

UITWENDIGE BALLISTIEK

W. BEVELANDER

Universiteit Leiden



2 056 982 3

UITWENDIGE BALLISTIEK

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,
OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS
Mr J. M. VAN BEMMELEN, HOOGLERAAR IN
DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,
TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT
DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VER-
DEDIGEN OP WOENSDAG 28 APRIL 1954 TE
15 UUR

DOOR

WILLEM BEVELANDER

GEBOREN TE 's-GRAVENHAGE IN 1909

Bibliotheek
Gorlaeus Laboratoria
Universiteit Leiden
Postbus 9502
NL-2300 RA LEIDEN



UITGEVERIJ EXCELSIOR — 's-GRAVENHAGE

PROMOTOR PROF. DR S.R. DE GROOT



INSTITUUT VOOR DE FYSICA
DE GROOT S.R.
DE GROOT S.R.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

ANNUAL REPORT OF THE
COMMISSIONER OF THE GENERAL LAND OFFICE

LEVENSBESCHRIJVING

Mijn studie volbracht ik aan de Rijksuniversiteit te Leiden. Ik legde een candidaatsexamen af met hoofdvakken wis- en natuurkunde en met bijvak sterrekunde. Op 1 Juli 1936 deed ik het doctoraal examen, dat als hoofdvak omvatte experimentele, gecombineerd met theoretische natuurkunde en als bijvak wiskunde.

Als leraar was ik daarna achtereenvolgens verbonden aan diverse scholen voor middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs te 's-Gravenhage en Hilversum.

Op 1 October 1941 ging ik over naar het Centraal Bureau voor de Statistiek (C.B.S.) te 's-Gravenhage, waar ik werkzaam was aan de afdelingen overheidsfinancien, conjunctuuronderzoek en wiskundige statistiek. Hier verzorgde ik statistieken betreffende overheidsfinancien en na de bevrijding ook de statistiek over de financien van de Nederlandse regering in Engeland, alsmede de statistiek van de oorlogsschaden in Nederland. Gedurende de bezetting werd aan het C.B.S. een Commissie voor de nationale boekhouding ingesteld, waarvoor ik een aantal nota's over de financien van de Overheid schreef. Bij het verwerken van statistische gegevens kwam ik op het terrein van de correlatierekening.

Op 16 Maart 1947 ging ik over in de dienst van het Ministerie van Oorlog, waar ik tot heden toe werkzaam ben. Ik werd benoemd bij de Technische staf Koninklijke landmacht (T.S.), waar ik tot taak kreeg enerzijds om de theorie van de ballistiek en de waarschijnlijkheidsrekening te bestuderen en dienstbaar te maken aan de praktijk, anderzijds om de organisatie van een rekenbureau op mij te nemen. Dit rekenbureau voert ballistische en andere wiskundige berekeningen uit en verwerkt de waarnemingsuitkomsten van de schietproeven. Met ingang van 15 December 1951 werd de T.S. opgeheven en kreeg de ballistische afdeling hiervan de naam Commissie van Proefneming.

In de gelegenheid gesteld om enkele studiereizen naar buitenlandse ballistische centra te ondernemen, bezocht ik in 1952 Zweden (Bofors), Londen (Applied ballistics ordnance board), Lorient (Commission d'experience de Gâvre), Parijs (Service technique des constructions et armes navales, Direction des études et fabrications d'armement). In Amerika bezocht ik in 1953 het Ballistic research laboratory van Aberdeen proving ground te Aberdeen, het Naval ordnance laboratory te White Oak, het National bureau of standards te Washington, de International business machines corporation te New York, als ook het ballistische bureau op het Department of defense (Pentagon) te Washington.

Nadat ik in 1951 voor de officieren van de T.S. een reeks voordrachten had gehouden over de uitwendige ballistiek, werd ik in September 1951 aangezocht om het vak ballistiek aan de cadetten en de applicaten van de Koninklijke Militaire Academie te Breda te doceren. Ik schreef een cursus uitwendige ballistiek om bij deze lessen te gebruiken.

Van de ballistische studies, die ik verrichtte, noem ik hier:

1. Het verschil in de praktijk tussen de twee Franse methoden G.H.M. I en G.H.M. II en de Amerikaanse methode Moulton.
2. Een onderzoek over de wijze, waarop de invloed van de atmosfeer in de ballistiek wordt verwerkt.

3. De invloed van de rotatie en de kromming van de aarde op de baan van een projectiel.
4. De vermindering van de rotatie van een projectiel, dat zich in de atmosfeer voortbeweegt.
5. Het onderzoek van een methode voor het berekenen van rakettenbanen (Runge-Kutta) en het opstellen van rekenschema's hiervoor.
6. Een rapport over de wenselijke uitgaven voor wetenschappelijke research en het in de toekomst in Nederland benodigd aantal ingenieurs.
7. Een onderzoek over het toepassen van de moderne steekproefmethoden bij het opstellen van eisen voor keuringen van af te leveren militair materieel.
8. Verder schreef ik een encyclopedie-artikel over ballistiek in de Technische Winkler Prins.

I N H O U D

Samenvatting	1
Definities	3
Diverse benamingen	4
Notaties	5
Hoofdstuk 1. De baan van een projectiel in het luchtledig	6
1.1. Afleiding algemene formules	6
1.2. De gemiddelde hoogte van een projectiel	8
1.3. De omhullende of veiligheidskromme	9
Hoofdstuk 2. De evenwichtsverstoringen in de atmosfeer, veroorzaakt door een bewegend projectiel	12
2.1. Subsonische snelheid	12
2.2. Supersonische snelheid	13
2.3. Sonische snelheid	15
Hoofdstuk 3. De uitwendige invloeden op een projectiel, dat zich in de atmosfeer voortbeweegt	17
3.1. De versnelling tengevolge van de zwaartekracht	17
3.2. De luchtweerstand	17
3.3. De heersende wind	17
3.4. De draaiing van de aarde om zijn as	17
3.5. De kromming van de aarde	18
3.6. Het Poisson-effect	18
3.7. Het Magnus-effect	18
3.8. Het gyroscopisch effect	19
3.9. Het stabiliseren van een projectiel	22
Hoofdstuk 4. De luchtweerstand	23
4.1. Algemene mathematische vormgeving	23
4.2. Factoren, waarvan de luchtweerstand afhankelijk is	24
4.2.1. De vorm van het lichaam en de aard van het oppervlak	25
4.2.2. De relatieve bewegingen van het projectiel ten opzichte van het zwaartepunt	26

4.2.3.	De temperatuur, de druk en de relatieve vochtigheid van de lucht	27
4.2.4.	De snelheid van het zwaartepunt	27
4.2.4.1.	Vier facetten van de wiskundige vormgeving	28
4.2.4.2.	Oudere wetten	28
4.2.4.3.	Zonewetten	28
4.2.4.4.	Eenheidswetten	29
4.3.	Proefondervindelijke bepaling van de luchtweerstand	29
4.4.	De invloed van de geluidssnelheid op de luchtweerstand	32
4.5.	Een nadere beschouwing van de weerstandsgraad	35
Hoofdstuk 5.	De verwerking van de atmosfeer in de ballistiek	42
5.1.	Luchtgewicht	42
5.2.	Standaardatmosfeer	43
5.3.	Temperatuur en druk	43
5.4.	De barometrische hoogteformule voor een constante temperatuur	44
5.5.	De barometrische hoogteformule voor een veranderlijke temperatuur	45
5.6.	De barometrische hoogteformule voor de stratosfeer	47
5.7.	Overzicht van de afgeleide formules voor de verandering van het luchtgewicht als functie van de hoogte	48
5.8.	Enkele standaardatmosferen	49
5.9.	Het ballistisch luchtgewicht	52
Hoofdstuk 6.	Afleiding van de exacte en de benaderde ballistische hoofdvergelijking	53
6.1.	Exacte ballistische hoofdvergelijking	53
6.2.	Benaderde ballistische hoofdvergelijking	56
6.3.	De keuze van de constanten σ en γ	57
Hoofdstuk 7.	Enige algemene eigenschappen van de projectielbaan in de atmosfeer	59
7.1.	De horizontale component $V \cos \theta$ van de baansnelheid V neemt langs de baan voortdurend af	59
7.2.	In twee niveaupunten A_1 en A_2 maakt de baansnelheidsvector hoeken θ_1 en θ_2 met de horizontaal, zodanig dat $\theta_1 < \theta_2 $	59

7.3.	In twee niveaupunten A_1 en A_2 , is de snelheidsvector V_1 in A_1 steeds groter dan de snelheidsvector V_2 in A_2	61
7.4.	In twee niveaupunten A_1 en A_2 , is de absolute waarde van de verticale snelheidscomponent in A_1 steeds groter dan die in A_2	61
7.5.	De x-coördinaat van het culminatiepunt C ligt dichterbij O_2 dan bij O_1	62
7.6.	De vluchttijd voor de stijgende tak is kleiner, dan die voor de dalende tak	63
7.7.	De lengte van de stijgende tak O_1C is groter, dan die van de dalende tak CO_2	64
7.8.	De hoogte y_c van het culminatiepunt C ligt altijd tussen $\frac{1}{4} X \operatorname{tg} \varphi$ en $\frac{1}{4} X \operatorname{tg} \omega$	64
7.9.	Het punt van de minimum snelheid ligt voorbij het culminatiepunt. De oneindig voortlopende baan heeft een asymptoot, terwijl de snelheid dan een limietwaarde bereikt	65
Hoofdstuk 8.	Directe integratie van de exacte ballistische hoofdvergelijking	68
8.1.	Diverse methoden van integratie	68
8.2.	Enkele oudere ballistische methoden	69
8.2.1.	De methode Euler-Otto (Otto-Lardillon)	69
8.2.2.	De methode van Bashforth	70
Hoofdstuk 9.	De integratie van de benaderde ballistische hoofdvergelijking	71
9.1.	De formules voor x, t en y	71
9.2.	De methode Didion (1848)	73
9.3.	De methode Didion-Bernoulli	74
9.4.	De methoden Siacci I en Siacci II	74
Hoofdstuk 10.	De methode Siacci III (Siacci-Fasella)	76
10.1.	De formules voor een willekeurig punt van de baan	76
10.2.	De formules voor het eindpunt van de baan	78
10.3.	De formules voor het culminatiepunt	78
10.4.	De correctiefactor	80
10.5.	Enkele opmerkingen over de gereduceerde ballistische coëfficiënt	81
10.6.	De tabellen van Siacci-Fasella	82

Hoofdstuk 11.	De oplossing van het ballistische hoofd- probleem door reeksontwikkeling van Mc Laurin	84
11.1.	Formules voor y , θ , V en t	84
11.2.	De methode Piton-Bressant	86
11.3.	De methode Duchêne	87
Hoofdstuk 12.	De methode Garnier, Haag, Marcus 1918 (G.H.M. I)	88
12.1.	Berekeningsmethoden van projectiel- banen voor luchtdoelgeschut	88
12.2.	Afleiding van enkele benaderde formu- les	90
12.3.	De fout in verband met de keuze van u_m	94
12.4.	Toepassing van de reeksontwikkeling uit 12.3 op de aangroeiingen dx , dy , ds en dt	96
12.5.	De berekening van ρ	98
12.6.	De bepaling van de correctie op ρ	101
12.7.	Het corrigeren van x , s en t voor u_m	104
12.8.	De fout bij Dy_a	109
12.9.	Overzicht van de correctieformules	113
12.10.	Het corrigeren van x , y , s en t voor u_{1a}	114
12.11.	De begrenzing van de correctie ϵ_θ op V	115
12.12.	De begrenzing van de correcties ϵ_e en ϵ_θ op x , y , s en t	115
12.13.	Het vaststellen van de amplitude $D\tau$ ten opzichte van de snelheidscorrectie ϵ_θ	116
12.14.	Het vaststellen van de amplitude $D\tau$ ten opzichte van de correctie ϵ_e	117
12.15.	De bepaling van de maximum amplitude $D\tau_m$	118
12.16.	Het nomogram voor ϵ en f	118
12.17.	Het luchtgewicht bij G.H.M. I	120
12.18.	De luchtweerstandswet van G.H.M. I	121
12.19.	Kort overzicht van de gang van zaken bij het vervaardigen van een lucht- doelschootstafel volgens de methode G.H.M. I	121
12.20.	Voorbeeld van berekening	124
12.21.	Rekenschema's G.H.M. I	129
Hoofdstuk 13.	De methode Garnier, Haag, Marcus 1929 (G.H.M. II)	131
13.1.	Inleiding	131

13.2.	De ballistische coefficient	131
13.3.	De luchtweerstand	133
13.4.	Ontwerp voor de baanberekening	136
13.5.	De baanberekening	137
13.6.	De berekening van ρ	139
13.7.	De correctietermen	142
13.8.	De invloed van $\delta \rho_{ia}$	142
13.9.	De correctie op de snelheid	143
13.10.	Het corrigeren van x, s, t en y voor u_m	143
13.11.	Het geval dat V_1 of De klein is	144
13.12.	De berekening der discontinue punten	145
13.13.	De formules te gebruiken bij het schema van G.H.M. II	149
13.14.	Rekenschema's G.H.M. II	151
Summary		154
Résumé		156
Literatuuroverzicht		158

SAMENVATTING

De bedoeling van dit geschrift is een behandeling te geven van de theorieën, die de grondslag vormen voor de berekening van de noodzakelijke gegevens van projectielbanen voor land- en luchtdoelkanonnen, onder normale atmosferische omstandigheden. De methoden, die uitvoerig zijn behandeld, nl. de methode SIACCI voor landdoelkanonnen, alsmede de methoden GARNIER, HAAG, MARCUS 1918 (G.H.M. I) en GARNIER, HAAG, MARCUS 1929 (G.H.M. II) voor luchtdoelkanonnen, worden heden ten dage in Nederlandse ballistische kringen gebruikt.

In hoofdstuk 1 worden enkele formules afgeleid voor de projectielbaan in het luchtledig, terwijl tevens de vergelijking van de veiligheidskromme wordt bepaald. Hoofdstuk 2 behandelt de evenwichtsverstoringen, die een projectiel met respectievelijk subsonische, sonische en supersonische snelheden, in de atmosfeer veroorzaakt. Bij de supersonische snelheid wordt het begrip van de kopgolf nader verklaard. In hoofdstuk 3 worden alle uitwendige invloeden behandeld, die een roterend projectiel in de atmosfeer ondervindt, waarbij wordt vermeld welke vereenvoudigingen we aannemen bij de mathematische behandeling van het probleem.

Het gyroscopisch effect is iets uitvoeriger beschreven, waarbij wordt gewezen op het belang van een juiste rotatiesnelheid van het projectiel, in verband met de stabilisatie van het projectiel in de baan.

Hoofdstuk 4 is geheel gewijd aan de luchtweerstand, waarbij verschillende luchtweerstandswetten worden vermeld. Een methode wordt aangegeven om op proefondervindelijke manier een luchtweerstandswet te bepalen. Beschreven is verder de moderne theorie, waarbij men bij de bepaling van de luchtweerstand, rekening houdt met de verandering van de geluidssnelheid als functie van de temperatuur. Nader verklaard is ook het begrip weerstandsgraad.

In hoofdstuk 5 hebben we de manier beschreven, waarop in de ballistiek rekening wordt gehouden met het luchtgewicht. Het begrip standaardatmosfeer wordt verduidelijkt, terwijl enkele theoretische en praktische formules voor het luchtgewicht als functie van de hoogte worden behandeld.

We hebben in hoofdstuk 6 de differentiaalvergelijkingen van de projectielbaan opgesteld, voor het geval men het projectiel als een stoffelijk punt beschouwt. Uit deze vergelijkingen worden de exacte en de benaderde ballistische hoofdvergelijkingen afgeleid.

We behandelen vervolgens in hoofdstuk 7 enkele algemene eigenschappen van de projectielbaan in de atmosfeer.

Hoofdstuk 8 geeft een uiteenzetting van het uitwendig-ballistische hoofdprobleem en de wijze van oplossen van dit probleem volgens vijf verschillende manieren. De methoden OTTO-LARDILLON en BASHFORTH worden in dit verband genoemd.

In hoofdstuk 9 wordt de benaderde ballistische hoofdvergelijking geïntegreerd, waarbij zogenaamde primaire functies worden ingevoerd. Vermeld worden de methoden DIDION en DIDION-BERNOULLI, alsmede de eerste twee methoden van SIACCI. De in dit hoofdstuk afgeleide formules worden in hoofdstuk 10 herleid in de vorm, zoals ze door SIACCI in zijn derde methode worden gebruikt, waarbij tevens nog zogenaamde secundaire functies worden ingevoerd. Verder worden de tabellen van FASELLA besproken, die bij deze methode behoren.

Hoofdstuk 11 behandelt de oplossing van het uitwendig-ballistische hoofdprobleem met behulp van reeksontwikkeling. In dit verband worden de methoden PITON-BRESSANT en DUCHÊNE vermeld.

Tenslotte worden in de hoofdstukken 12 en 13 de beide methoden van GARNIER, HAAG, MARCUS uitvoerig afgeleid, welke methoden gebruikt worden voor de berekening van de projectielbanen voor luchtdoelgeschut. Bij deze methoden worden de projectielbanen vak voor vak berekend, zodat we tot veel exactere resultaten komen dan bij de methode SIACCI. Bovendien hebben we bij deze methoden het grote voordeel, dat we de nauwkeurigheid van onze berekende waarden voortdurend onder controle kunnen houden.

BENAMINGEN EN NOTATIES

Definitie Ballistiek

Onder *ballistiek* verstaat men de wetenschap, die de gedragingen van het projectiel bestudeert.

Zij is in combinatie met de waarschijnlijkheidsrekening de basis waar de schietregels op berusten en zij is onderverdeeld in inwendige-, uitwendige- en uitwerkingsballistiek.

Inwendige ballistiek

Dit is de studie van de gedragingen van het projectiel in de vuurmond, van de scheikundige verschijnselen die hier optreden en van de natuurkundige verschijnselen, die de beweging van het projectiel tot resultaat hebben. Zij tracht verband te leggen tussen projectiel-soort, kruittlading en vuurmond-soort. Zij bestudeert op ieder punt in de vuurmond de snelheid van het projectiel en de bijbehorende gasdruk. In het bijzonder is een punt van onderzoek de aanvangssnelheid (de snelheid V_0 van het projectiel gemeten bij de monding) en de maximum gasdruk.

De inwendige ballistiek wordt praktisch toegepast bij het ontwerpen en construeren van vuurmonden.

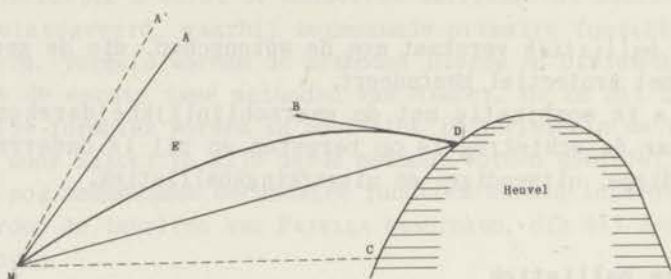
Uitwendige ballistiek

Dit is de studie van de gedragingen van het projectiel nadat dit de monding van het kanon heeft verlaten. Zij vindt praktisch toepassing bij het berekenen van de baan, het samenstellen van schootstafels en het berekenen van andere, voor de oplossing van het artillerieprobleem noodzakelijke gegevens.

Uitwerkingsballistiek

Dit is de studie van de gedragingen van het projectiel van het moment, dat het projectiel het doel treft, bijv. het doorboren van pantser of beton, het onderzoek van de scherfbeweging. Uit de studie van deze phase is het mogelijk te beslissen welk soort projectiel of in een bepaald geval moet worden gebruikt.

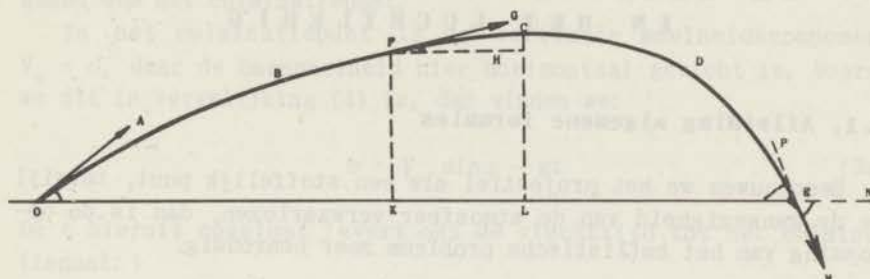
DIVERSE BENAMINGEN



Figuur 1

- M = vuurmond
- D = doel
- MED = baan van het projectiel
- MD = richtlijn
- \angle AMD = richthoek
- MA = verlengde zielas
- MA' = uitvaartslijn
- \angle A'MD = schootshoek
- \angle A'MA = verheffingshoek
- \angle A'MC = uitvaartshoek φ
- \angle AMC = elevatie
- \angle DMC = terreinhoek
- \angle BDM = invalshoek
- MC = mondingshorizon

NOTATIES



Figuur 2

OBCDE = projectielbaan.

OBC = klimmende tak.

CDE = dalende tak.

O = beginpunt van de baan in de monding van het kanon.

E = eindpunt van de baan, dus het punt waar het projectiel het z.g. maaiveld bereikt, punt van inval.

\vec{OA} = beginsnelheid V_o .

$\angle AOK$ = uitvaartshoek φ .

F = willekeurig punt van de projectielbaan.

FK = vluchthoogte y .

OK = horizontale afstand x .

OF = schuine afstand, gemeten volgens de rechte lijn OF.

\vec{FG} = snelheid V van het projectiel in het punt F.

$\angle GFH = \theta$ = hoek tussen de richting van de snelheid en de horizon.

C = culminatiepunt, hoogste punt van de baan.

CL = culminatiehoogte y_c .

OL = horizontale afstand x_c van het culminatiepunt.

OE = dracht X = totale horizontale afstand, afgelegd door het projectiel.

\vec{EM} = eindsnelheid V_e van het projectiel.

$\angle NEM = \theta_e$ = hoek tussen eindsnelheid projectiel en de horizontaal.

$\angle PEL = \omega$ = invalshoek. Daar wij voor ω een hoek in het eerste kwadrant nemen en θ_e een hoek in het vierde kwadrant is, is $\omega = -\theta_e$.

t = vluchttijd, benodigd om een punt in de baan te bereiken.

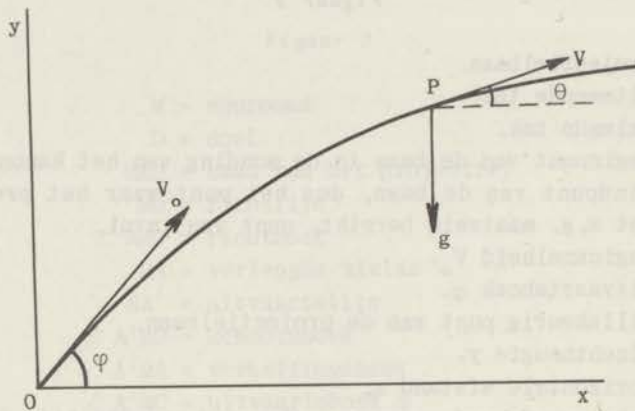
T = totale vluchttijd, waarin het projectiel zijn gehele baan doorloopt.

Hoofdstuk 1

DE BAAN VAN EEN PROJECTIEL IN HET LUCHTLEDIG

1.1. Afleiding algemene formules

Beschouwen we het projectiel als een stoffelijk punt, terwijl we de aanwezigheid van de atmosfeer verwaarlozen, dan is de oplossing van het ballistische probleem zeer eenvoudig.



Figuur 3

Een gedeelte van de baan van een in het luchtledig voortbewegend projectiel. De beweging wordt ontbonden langs de horizontale x- en de verticale y-as.

Ontbinden we in figuur 3 de beweging langs de x-as (horizontaal) en de y-as (verticaal), dan ontstaan de volgende vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V_0 \cos\varphi \\ V_y &= V_0 \sin\varphi - gt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= V_0 \cos\varphi t \\ y &= V_0 \sin\varphi t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Baanvergelijking} \\ \text{in parametervorm} \end{array} \quad (2)$$

Eliminatie van t uit (2) geeft de vergelijking van de baan in het luchtledig:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (3)$$

We zien dat (3) de vergelijking van een parabool is, waarvan de as evenwijdig loopt aan de y-as. De top van de parabool valt samen met het culminatiepunt.

In het culminatiepunt is de verticale snelheidscomponent $V_y = 0$, daar de baansnelheid hier horizontaal gericht is. Voeren we dit in vergelijking (1) in, dan vinden we:

$$0 = V_0 \sin \varphi - gt \quad (3a)$$

De t hieruit opgelost levert ons de vluchttijd tot het culminatiepunt:

$$t_c = \frac{V_0 \sin \varphi}{g} \quad (4)$$

Voeren we (4) in vergelijking (2) in, dan volgt voor de coördinaten van het culminatiepunt:

$$x_c = V_0 \cos \varphi \frac{V_0 \sin \varphi}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\varphi}{2g} \quad (5)$$

$$y_c = V_0 \sin \varphi \frac{V_0 \sin \varphi}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \sin^2 \varphi}{g^2} = \frac{V_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \quad (6)$$

In het eindpunt van de baan is: $y = 0$. Dit invoerende in (2), vinden we:

$$0 = V_0 \sin \varphi t - \frac{1}{2} gt^2$$

Hieruit volgt de totale vluchttijd voor de gehele baan:

$$T = \frac{2V_0 \sin \varphi}{g} \quad (7)$$

Voegen we de waarde van (7) in (2), dan volgt de formule voor de dracht:

$$X = V_0 \cos \varphi \frac{2V_0 \sin \varphi}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\varphi}{g} \quad (8)$$

Vergelijken we (4) met (7) en (5) met (8), dan blijkt dat de vluchttijd tot het culminatiepunt juist de helft is van de totale vluchttijd, terwijl de x-coördinaat van het culminatiepunt juist de helft is van de dracht.

In formule (8) vinden we bij een gegeven V_0 , de grootste waarde voor X, als $\sin 2\varphi$ maximaal is, dus voor $\sin 2\varphi = 1$, of

$2\varphi = 90^\circ$ en $\varphi = 45^\circ$. Schieten we in het luchtledig onder een hoek van 45° , dan wordt dus de grootste dracht bereikt.

Nemen we twee hoeken:

$$\varphi_1 = 45 + \alpha \quad \text{en} \quad \varphi_2 = 45 - \alpha,$$

dan is: $\sin 2\varphi_1 = \sin (90 + 2\alpha) = \cos 2\alpha$

en: $\sin 2\varphi_2 = \sin (90 - 2\alpha) = \cos 2\alpha.$

Voeren we deze hoeken in (8) in, dan vinden we in beide gevallen dezelfde waarde voor X, nl:

$$X = \frac{V_o^2 \cos 2\alpha}{g}$$

Kiezen we dus twee hoeken, waarvan de één evenveel groter is dan 45° , als de ander kleiner dan 45° , dan bereiken we in het luchtledig een even grote dracht.

De culminatiehoogte kan ook berekend worden uit de vluchttijd volgens de formule van HAUPT (SLADEN):

$$y_c = \frac{gT^2}{8} = 1.226 T^2 \quad (9)$$

Stellen we nl. voor het culminatiepunt: $t = \frac{1}{2} T$, dan volgt uit (3a): $V_o \sin\varphi = \frac{1}{2} gT$ en vinden we voor het culminatiepunt:

$$y_c = \frac{V_o^2 \sin^2\varphi}{2g} = \frac{\frac{1}{4} g^2 T^2}{2g} = \frac{g T^2}{8}$$

Bij benadering kan de formule van SLADEN ook gebruikt worden voor de baan in de atmosfeer.

De hoek θ , die de raaklijn aan de baan in een willekeurig punt maakt met de horizontaal, kunnen we bepalen door (3) te differentiëren naar x:

$$\text{tg } \theta = \frac{dy}{dx} = \text{tg}\varphi - \frac{g x}{V_o^2 \cos^2\varphi} \quad (10)$$

1.2. De gemiddelde hoogte van een projectiel

De gemiddelde hoogte waarop een projectiel zich bevindt gedurende de beweging in het vacuum, is:

$$\begin{aligned} y_{\text{gem}} &= \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (V_o \sin\varphi t - \frac{1}{2} g t^2) dt = \\ &= \frac{1}{T} (\frac{1}{2} V_o \sin\varphi T^2 - \frac{1}{6} g T^3) = \frac{1}{2} V_o \sin\varphi T - \frac{1}{6} g T^2. \end{aligned}$$

M. b. v. (7): $T = \frac{2V_0 \sin\varphi}{g}$, wordt dit:

$$y_{gem} = \frac{V_0^2 \sin^2\varphi}{g} = \frac{2V_0^2 \sin^2\varphi}{3g} = \frac{1}{3} \frac{V_0^2 \sin^2\varphi}{g}$$

en m. b. v. (6):

$$y_{gem} = \frac{2}{3} y_c \quad (11)$$

Met behulp van de formule van SLADEN kunnen we deze gemiddelde hoogte ook uitdrukken in de vluchttijd, nl:

$$y_{gem} = \frac{2}{3} y_c = \frac{2}{3} \frac{gT^2}{8} = \frac{gT^2}{12} \quad (12)$$

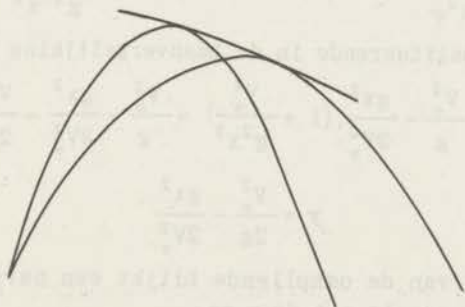
1.3. De omhullende of veiligheidskromme

Houden we de beginsnelheid V_0 constant, doch gaan we de uivaartshoek φ variëren van 0° tot 180° , dan krijgen we voortdurend een andere parabolische baan. We kunnen nu gaan vragen naar de kromme, die aan al deze parabolen raakt. We beschouwen daartoe twee krommen met de uivaartshoeken φ en $\varphi + \Delta\varphi$.

Schrijven we de baanvergelijking (3) in de vorm: $f(x, y, \varphi) = 0$, dan gaan we het snijpunt bepalen van:

$$f(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{en} \quad f(x, y, \varphi + \Delta\varphi) = 0$$

$$\text{of van } f(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{en} \quad f(x, y, \varphi + \Delta\varphi) - f(x, y, \varphi) = 0.$$



Figuur 4

De gemeenschappelijke raakkromme aan twee parabolische projectielbanen.

Volgens de middelwaardstelling geldt nu:

$$\frac{f(x, y, \varphi + \Delta\varphi) - f(x, y, \varphi)}{\Delta\varphi} = f'_{\varphi}(x, y, \varphi + \theta \cdot \Delta\varphi),$$

waarin $0 < \theta < 1$.

Laten we nu $\Delta\varphi$ tot 0 naderen, dan volgt:

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} f'_{\varphi}(x, y, \varphi + \theta \cdot \Delta\varphi) = f'_{\varphi}(x, y, \varphi),$$

waarbij dan tevens het snijpunt overgaat in een gemeenschappelijk raakpunt aan de omhullende. We vinden nu de vergelijking van de omhullende door eliminatie van φ uit:

$$f(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{en} \quad f'_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0.$$

Passen we dit toe op vergelijking (3) van de baan:

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2\varphi}.$$

of

$$f(x, y, \varphi) \equiv \frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{2V_0^2 x}{g} \operatorname{tg}\varphi + \frac{2V_0^2}{g} y = 0$$

$$f'_{\varphi}(x, y, \varphi) \equiv \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi x^2}{\cos^4\varphi} - \frac{2V_0^2 x}{g \cos^2\varphi} = 0.$$

Uit deze laatste vergelijking volgt: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_0^2}{g x}$

Verder

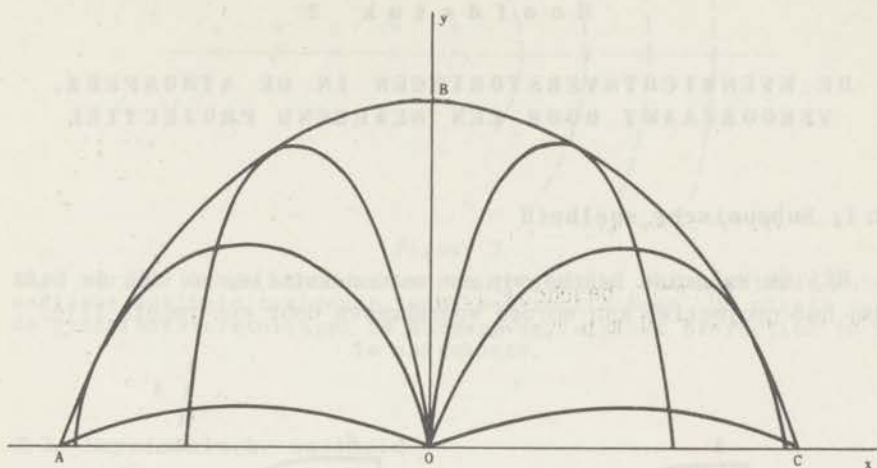
$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{V_0^4}{g^2 x^2}$$

Deze waarden substituerende in de baanvergelijking (3), vinden we:

$$y = \frac{V_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} \left(1 + \frac{V_0^4}{g^2 x^2}\right) = \frac{V_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} - \frac{V_0^2}{2g}$$

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} \quad (13)$$

De vergelijking van de omhullende blijkt een parabool te zijn, waarvan de as samenvalt met de y-as.



Figuur 5

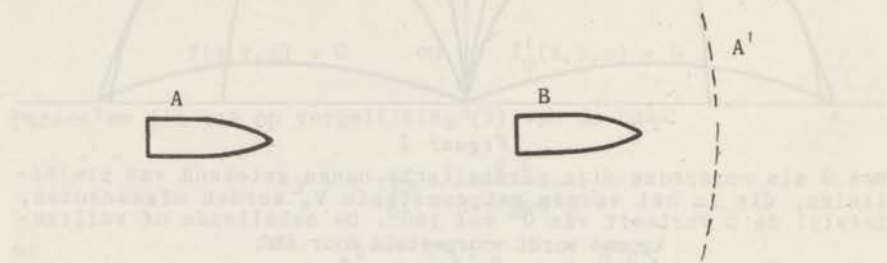
Met O als oorsprong zijn parabolische banen getekend van projectielen, die in het vacuum met constante V_0 worden afgeschoten, terwijl de φ varieert van 0° tot 180° . De omhullende of veiligskromme wordt voorgesteld door ABC .

Hoofdstuk 2

DE EVENWICHTSVERSTORINGEN IN DE ATMOSFEER, VEROORZAAKT DOOR EEN BEWEGEND PROJECTIEL

2.1. Subsonische snelheid

Bij de volgende beschouwingen veronderstellen we dat de baan van het projectiel kan worden weergegeven door een rechte lijn.



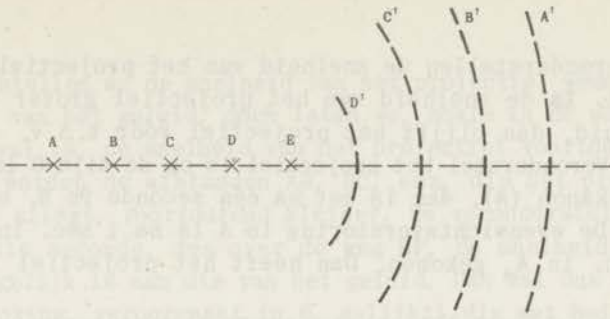
Figuur 6

Twee achtereenvolgende standen van een projectiel, dat zich met subsonische snelheid voortbeweegt. De evenwichtsverstoring veroorzaakt in A is in A' gekomen, als het projectiel B bereikt.

Is een bewegend lichaam met een snelheid kleiner dan die van het geluid (*subsonische snelheid*) in A aangekomen (fig. 6), dan veroorzaakt dit hier een evenwichtsverstoring van de lucht. Deze verstoring plant zich sneller voort dan het lichaam, zodat deze in A' gekomen is, als het lichaam zich in B bevindt. Alle evenwichtsverstoringen, die het lichaam veroorzaakt, zullen zich dus sneller voortplanten dan het verstorende element.

Indien het lichaam nu in B is aangekomen, zal het van de verstoring, die in A werd veroorzaakt (golf A') geen invloed meer ondervinden.

Figuur 7 toont ons, dat de achtereenvolgende evenwichtsverstoringen, veroorzaakt in de punten A, B, C en D, respectievelijk reeds in A', B', C' en D' zijn aangekomen, als het bewegende lichaam zich in E bevindt.

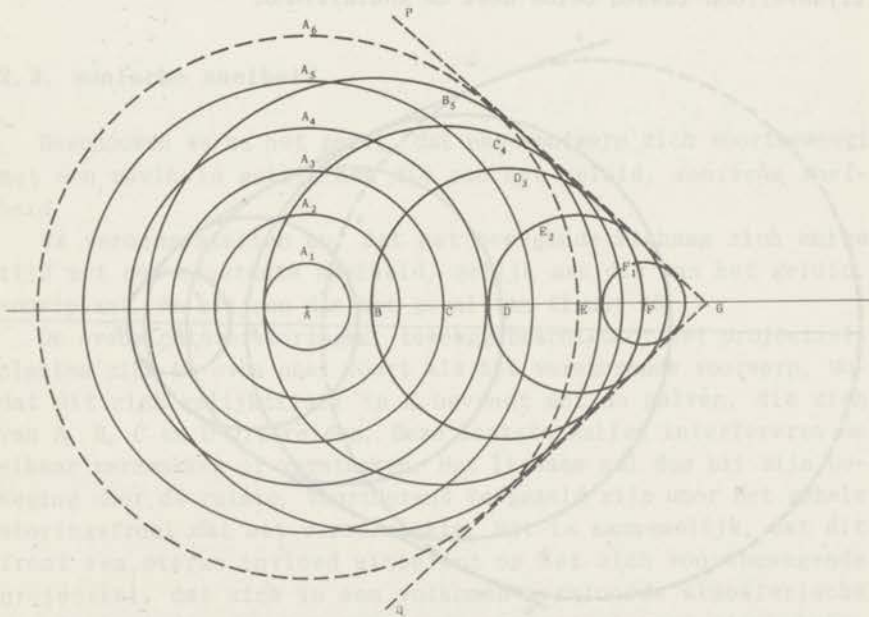


Figuur 7

Vijf verschillende standen van een projectiel met constante subsonische snelheid bewegend langs een rechte baan. De plaats van de evenwichtsverstoringen is aangegeven, als het projectiel in E is aangekomen.

2.2. Supersonische snelheid

Beweegt een lichaam zich met een snelheid, groter dan die van het geluid, *supersonische snelheid*, dan ligt het probleem anders, daar dan de verstoring achterblijft bij het bewegende voorwerp.



Figuur 8

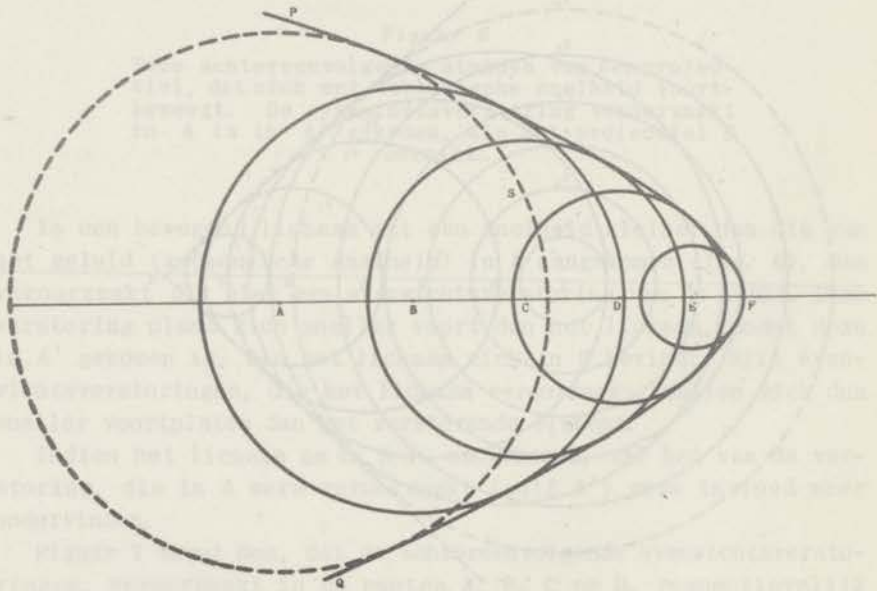
Constructie van de kogelgolf en de mondingsgolf voor een projectiel, dat zich met een constante supersonische snelheid langs een rechte baan beweegt.

We veronderstellen de snelheid van het projectiel enige tijd constant. Is de snelheid van het projectiel groter dan die van het geluid, dan blijft het projectiel vóór t.o.v. de geluidsgolven. Veronderstel het projectiel is op de tijd 0 in de monding van het kanon (A), dan is het na één seconde in B, na 2 sec. in C, enz. De evenwichtsverstoring in A is na 1 sec. in A_1 enz. en na 6 sec. in A_6 gekomen. Dan heeft het projectiel juist G bereikt.

Is het projectiel in G, dan heeft de evenwichtsverstoring van de monding A zich voortgeplant tot A_6 . We noemen dit de *mondingsgolf*. Uit figuur 8 blijkt dat deze is achtergebleven bij het projectiel. De verstoring in B plant zich 5 seconden voort tot in B_5 . In C slechts 4 seconden tot in C_4 , terwijl de geluidsgolf in F zich slechts één seconde tot F_1 voortbeweegt.

Trekken we uit G de gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkels, die de evenwichtsverstoringen aangeven, 6 seconden na het begin van de beweging, dan krijgen we de lijn PGQ, die het *storingfront* aangeeft. Deze lijn noemen we de *kopgolf*.

Als de kopgolf de waarnemer passeert hoort men de *kopknal*, bij voorbijgaan van de mondingsgolf A_6 hoort men de *mondingsknal*. Het tijdsverloop tussen beide heet de *knalafstand*.



Figuur 9

Constructie van de kopgolf en de mondingsgolf voor een projectiel, dat zich met een afnemende supersonische snelheid langs een rechte baan voortbeweegt. De gemiddelde snelheid over de afstand EF is gelijk aan de geluidssnelheid genomen.

Veronderstellen we de snelheid van het projectiel wederom groter dan die van het geluid, doch laten we, zoals in de werkelijkheid het geval is, de snelheid van het projectiel voortdurend afnemen, dan worden de afstanden AB, BC, enz. die het projectiel per seconde aflegt, voortdurend kleiner. We veronderstellen, dat in de laatste seconde, dus over de weg EF, de snelheid van het projectiel gelijk is aan die van het geluid. Dan zal dus de evenwichtsverstoring, veroorzaakt in E, gelijktijdig met het projectiel in F komen.

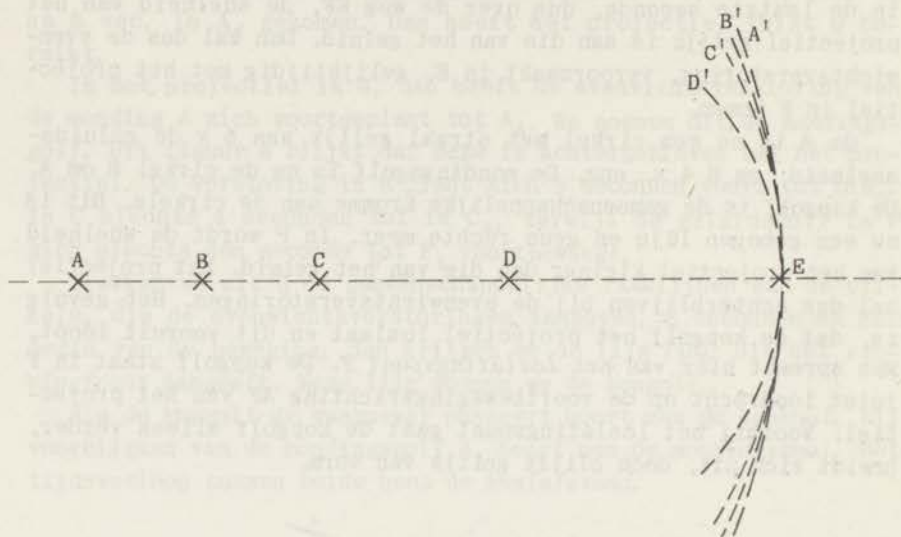
Om A is nu een cirkel met straal gelijk aan $5 \times$ de geluidssnelheid, om B $4 \times$, enz. De mondingsgolf is nu de cirkel S om A. De kopgolf is de gemeenschappelijke kromme aan de cirkels. Dit is nu een gebogen lijn en geen rechte meer. In F wordt de snelheid van het projectiel kleiner dan die van het geluid. Het projectiel zal dus achterblijven bij de evenwichtsverstoringen. Het gevolg is, dat de kopgolf het projectiel loslaat en dit vooruit loopt. Men spreekt hier van het *loslatingspunt* F. De kopgolf staat in F juist loodrecht op de voortbewegingsrichting AF van het projectiel. Voorbij het loslatingspunt gaat de kopgolf alleen verder, breidt zich uit, doch blijft gelijk van vorm.

2.3. Sonische snelheid

Beschouwen we nu het geval, dat een voorwerp zich voortbeweegt met een snelheid gelijk aan die van het geluid, *sonische snelheid*.

We veronderstellen nu, dat het bewegende lichaam zich enige tijd met een constante snelheid, gelijk aan die van het geluid, voortplant. We krijgen dan het geval van figuur 10.

De evenwichtsverstoringen, teweeggebracht door het projectiel, planten zich nu even snel voort als het versturende voorwerp, zodat dit zich gelijktijdig in E bevindt met de golven, die zich van A, B, C en D uitbreiden. Deze laatste zullen interfereren en elkaar verzwakken of versterken. Het lichaam zal dus bij zijn beweging door de ruimte, voortdurend vergezeld zijn door het gehele storingsfront dat het veroorzaakte. Het is aannemelijk, dat dit front een sterke invloed uitoefent op het zich voortbewegende projectiel, dat zich in een volkomen verstoorde atmosferische ruimte bevindt, die het bewegende projectiel zeer sterk beïnvloedt. Een en ander maakt het duidelijk, dat een projectiel met een snelheid van om en nabij die van het geluid, een veel grotere storende invloed ondervindt tengevolge van dit conglomeraat van evenwichtsverstoringen. Later zullen we dit iets meer wiskundig behandelen.



Figuur 10

Een projectiel, dat zich van A tot E met een constante sonische snelheid langs een rechte baan beweegt, komt gelijktijdig met de evenwichtsverstoringen in E aan.

H o o f d s t u k 3

DE UITWENDIGE INVLOEDEN OP EEN PROJECTIEL, DAT ZICH IN DE ATMOSFEER VOORTBEWEEGT

We zullen hieronder de verschillende uitwendige invloeden vermelden, waaraan een roterend projectiel onderworpen is, als het zich door de atmosfeer voortbeweegt. Daar de mathematische vormgeving te gecompliceerd zou worden, als we met al deze invloeden rekening hielden, zullen we enkele beperkende veronderstellingen moeten invoeren. Verder zullen we bij de opstelling van de differentiaalvergelijkingen, het projectiel als een stoffelijk punt beschouwen.

Een roterend, zich in de atmosfeer voortbewegend, projectiel ondervindt de volgende invloeden:

3.1. De versnelling tengevolge van de zwaartekracht

De versnelling van de zwaartekracht wordt constant verondersteld en onafhankelijk genomen van de hoogte waarop het lichaam zich in de atmosfeer bevindt. Verder wordt de richting van de versnelling der zwaartekracht langs de normaal op het aardoppervlak genomen en verondersteld dat deze versnellingsvector zich gedurende de beweging evenwijdig verplaatst.

3.2. De luchtweerstand

Zie hoofdstuk 4.

3.3. De heersende wind

De berekeningen worden uitgevoerd in een volkomen windstille atmosfeer. De lucht is dus in rust gedacht. De invloed van de wind kunnen we zonodig met speciale correctieformules berekenen.

3.4. De draaiing van de aarde om zijn as

Deze invloed is gering en krijgt pas enige betekenis voor zeer grote drachten. We verwaarlozen deze invloed.

3.5. De kromming van de aarde

Ook hier heeft het eerst voor zeer grote drachten zin om met deze factor rekening te houden. We nemen in de praktijk het aardoppervlak als een plat vlak aan.

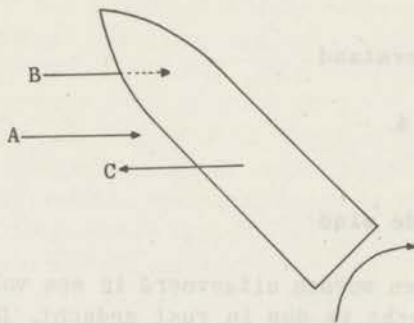
3.6. Het Poisson-effect

Is er een hoek tussen de as van het projectiel en de raaklijn aan de baan, zodanig, dat de spits van het projectiel boven de raaklijn aan de baan ligt, dan ontstaat daar ter plaatse onder de spits een luchtverdichting en aan de achterzijde een luchtverdunning.

We kunnen het nu populair zo beschouwen alsof de spits van het projectiel van dit luchtkussen afvalt en wel bij rechts-roterende projectielen naar rechts.

3.7. Het Magnus-effect

We veronderstellen een rechts-roterend projectiel. Aan voor- en achterzijde stroomt de lucht er langs, respectievelijk volgens A en B. Aan de voorzijde is de bewegingsrichting A van de lucht dezelfde als die van het projectiel. Aan de achterzijde echter is de bewegingsrichting B van de lucht tegengesteld aan die van het projectiel.



Figuur 11

Een rechts roterend projectiel beweegt zich in de richting van C.

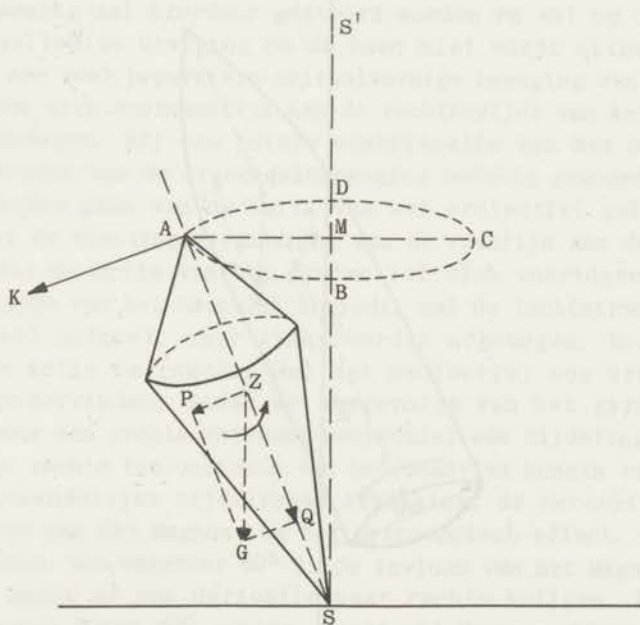
Aan de achterzijde ontstaat bij B een grotere druk, in vergelijking met die aan de voorzijde bij A, zodat het projectiel een

verplaatsing naar voren krijgt. In de baan gezien krijgt het projectiel tengevolge van het Magnus-effect dus een afwijking naar links. Voor kleine uitvaartshoeken is de invloed van het Magnus-effect gering, doch voor hoeken groter dan 60° wordt deze belangrijker.

3.8. Het gyroscopisch effect

Het gyroscopisch effect ontstaat tengevolge van de rotatie van het projectiel om zijn as. Deze roterende beweging is te vergelijken met de beweging van een tol. Het idee om een projectiel een draaiende beweging te geven, is ontstaan uit de noodzaak om het te stabiliseren in zijn baan. Onder stabiliseren wordt verstaan het projectiel zodanig in zijn baan te laten bewegen, dat de spits voortdurend naar voren blijft en de as van het projectiel nagenoeg blijft samenvallen met de raaklijn aan de baan.

Hoewel een volledige behandeling van het gyroscopisch effect ons veel te ver zou voeren, zullen we voor een beter begrip er toch iets van zeggen.



Figuur 12

Een rechts roterende tol heeft S als steunpunt. Het gewicht G grijptaan in Z. Een kracht K geeft de tol een uitwijking MA, met het gevolg, dat de top A van de tol een cirkelbaan ABCDA gaat beschrijven.

In figuur 12 zien we een draaiende tol, die in S op de grond steunt. Gezien in de richting SA hebben we te doen met een rechtsrotatie (met de wijzers van het uurwerk mee). Oefenen we op de tol in het punt A een kracht K uit in het vlak van tekening, dan zal de tol tengevolge van deze kracht een beweging krijgen loodrecht op het vlak van tekening, naar voren toe (praecessiebeweging). In werkelijkheid ondervindt de tol voortdurend de invloed van de zwaartekracht G, die in het zwaartepunt Z vertikaal naar beneden is gericht. We kunnen deze kracht ontbinden in twee componenten PZ en QZ. De component PZ heeft dezelfde invloed als de kracht K en veroorzaakt een draaiing van de tolas AS om de verticaal SS', zodat de spits A een baan ABCDA beschrijft.

We gaan dit nu toepassen op een bewegend projectiel, waartoe we figuur 13 beschouwen.



Figuur 13

Van een rechts roterend projectiel beweegt het zwaartepunt Z zich in de richting AB. De as CD van het projectiel maakt een hoek α met de voortbewegingsrichting. De luchtweerstand W grijpt in het punt P aan. De ontbondene W_1 veroorzaakt de tolbeweging van het projectiel.

Is AB een deel van de baan van het rechts roterende projectiel, waarin het zwaartepunt Z zich dus voortbeweegt, terwijl de as van het projectiel een hoek α maakt met de baan van het zwaartepunt, dan zal de luchtkracht (luchtweerstand) W aangrijpen in het punt P, dat tussen de spits C en het zwaartepunt Z is gelegen. De kracht WP is gericht evenwijdig aan AB. We kunnen deze ontbinden in W_1 loodrecht op, en W_2 langs de projectielas. De kracht W_2 zal de beweging van het projectiel vertragen, terwijl W_1 de tolbeweging veroorzaakt. Het zwaartepunt Z kunnen we vergelijken met het steunpunt S uit figuur 12. Tengevolge van de kracht W_1 , zal de spits C een beweging gaan uitvoeren loodrecht op het vlak van tekening naar achteren. De spits C gaat nu een soortgelijke beweging beschrijven, als vermeld in figuur 12. Daar het zwaartepunt Z zich echter langs AB voortbeweegt, zal de beweging van de spits worden uitgerekend tot een spiraalvormige beweging om de baan.

De projectielbaan is echter niet recht, zoals bij AB is aangenomen, doch gekromd. Beweegt de spits C zich naar beneden, dan zal door de voortbeweging van het zwaartepunt de helling van de baan intussen veranderd zijn. De hierboven beschreven spiraalvormige beweging zal hierdoor gestoord worden en wel op deze wijze dat de volledige beweging om de baan niet wordt uitgevoerd. We krijgen een veel beperktere spiraalvormige beweging van de spits, zodat deze zich voornamelijk aan de rechterzijde van het baanvlak blijft bewegen. Bij een juiste stabilisatie van het projectiel is de periode van de praecessiebeweging zodanig gekozen, dat het naar beneden gaan van de spits van het projectiel gelijke tred houdt met de richtingsverandering van de raaklijn aan de baan.

Doordat de spits van het projectiel zich voortdurend aan de rechterzijde van het baanvlak bevindt, zal de luchtstroom die het projectiel ontmoet, naar links worden afgebogen. Volgens het principe actie is reactie zal het projectiel een kracht naar rechts ondervinden, zodat we tengevolge van het gyroscopisch effect voor een rechts roterend projectiel een zijdelingse afwijking naar rechts ten opzichte van het baanvlak kunnen verwachten.

De uiteindelijke zijdelingse afwijking, de *derivatie*, is de resultante van het Magnus- en het gyroscopisch effect. Voor uitvaartshoeken tot ongeveer 60° is de invloed van het Magnus-effect gering, zodat we een derivatie naar rechts krijgen. Voor uitvaartshoeken boven 60° echter, wordt het Magnus-effect aanzienlijk groter, zodat dit het gyroscopisch effect kan gaan overtreffen. Voor zeer grote uitvaartshoeken zullen we dus rekening moeten houden met een derivatie, links ten opzichte van het schootsvlak.

Bij het opstellen van de differentiaalvergelijkingen voor de

projectielbanen in hoofdstuk 6 zullen we het gyroscopisch effect buiten beschouwing laten.

3.9. Het stabiliseren van een projectiel

Is de rotatiesnelheid van het projectiel te groot, dan zal de praecessiebeweging te langzaam zijn. Het naar beneden bewegen van de spits van het projectiel zal dan te langzaam zijn in vergelijking met de richtingsverandering van de raaklijn aan de baan. De as van het projectiel zal dan achterblijven met het gevolg, dat de bodem van het projectiel het eerst op het doel komt (z.g. *bodemtreffers*). We zeggen dat het projectiel *overgestabiliseerd* is.

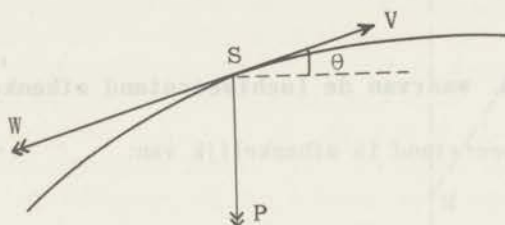
Roteert het projectiel te langzaam, dan wordt de praecessie te snel. In dat geval wordt door de spits van het projectiel de volledige spiraal om de baan uitgevoerd. De as van het projectiel maakt in dat geval voortdurend een veel te grote hoek met de bewegingsrichting van de luchtstroom, zodat de weerstand tengevolge van deze luchtstroom overdreven groot wordt. Het gevolg is een belangrijk verlies in afstand. We noemen een dergelijk projectiel *ondergestabiliseerd*.

De stabilisatie is één van de moeilijkste problemen van de projectielconstructie. Het is ook mogelijk projectielen te stabiliseren zonder rotatie. Daartoe worden ze voorzien van vleugels aan de achterzijde. We noemen dit stabilisatie volgens het *pijl-principe*.

Hoofdstuk 4

DE LUCHTWEERSTAND

4.1. Algemene mathematische vormgeving



Figuur 14

Het zwaartepunt van het projectiel bevindt zich in S. De snelheid V is gericht volgens de raaklijn aan de baan en maakt van hoek θ met de horizontaal. De luchtweerstand W is tegengesteld gericht aan de snelheid. Het gewicht P grijpt in S aan, verticaal naar beneden.

Zoals reeds eerder opgemerkt, beschouwen we voor de mathematische vormgeving van de beweging van het projectiel, dit als een stoffelijk punt S (fig. 14). De snelheid V is steeds gericht volgens de raaklijn aan de baan, terwijl de richting van het gewicht P samenvalt met de normaal op het aardoppervlak. Daar we het aardoppervlak als een plat vlak beschouwen, zal de vector voor het gewicht (en dus eveneens die voor de versnelling van de zwaartekracht) zich gedurende de beweging van het projectiel in de baan, evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. De luchtkracht W veronderstellen we samen te vallen met de raaklijn aan de baan, doch tegengesteld gericht aan de snelheidsvector.

In het algemeen wordt de kracht tengevolge van de luchtweerstand wiskundig in de volgende vorm gebracht:

$$W = \frac{P}{g} c f(V) = k i \pi R^2 \frac{\delta}{\delta_0} f(V) \quad (1)$$

$$\therefore c = k i \frac{\pi R^2}{P} g \frac{\delta}{\delta_0} \quad (2)$$

W = luchtweerstand.

P = projectielgewicht in kg.

- g = versnelling der zwaartekracht in m/sec^2 .
 c = ballistische coëfficiënt.
 $f(V)$ = snelheidsfunctie.
 k = constante.
 i = vormwaarde.
 R = straal doorsnede projectiel (half kaliber) in m.
 δ = luchtgewicht ter plaatse in kg/m^3 .
 δ_0 = normaal luchtgewicht op zeeniveau in kg/m^3 .
 $\frac{P}{\pi R^2}$ = metaalbelasting = gewicht per m^2 doorsnede.

4.2. Factoren, waarvan de luchtweerstand afhankelijk is

Deze *luchtweerstand* is afhankelijk van:

4.2.1. De vorm van het lichaam en de aard van het oppervlak

Dit vindt in de formule zijn weerklink in de factoren πR^2 en i .

De weerstand is niet recht evenredig met de doorsnede, want DIDRON (1848) vond dat bij grotere doorsneden de luchtweerstand per eenheid van doorsnede kleiner is, dan bij kleinere oppervlakken. KRUPP bewees dit in 1912 nogmaals met behulp van schietproeven.

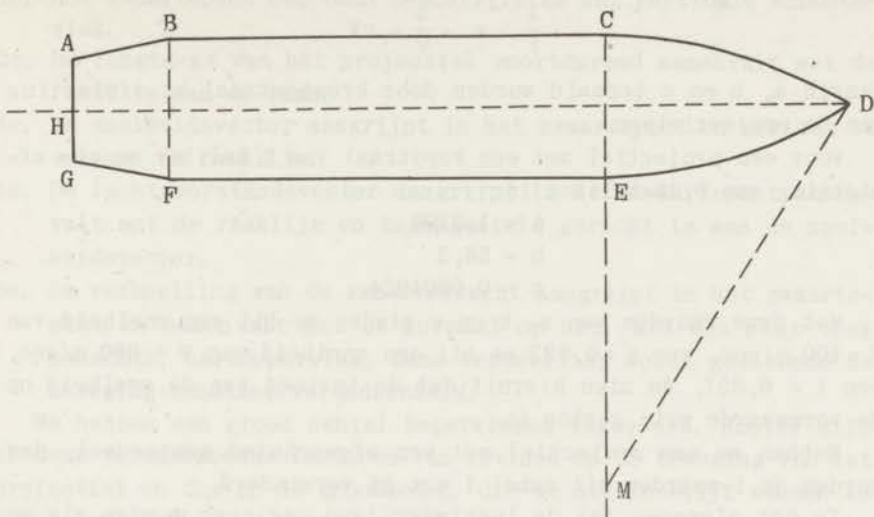
Om aan dit bezwaar tegemoet te komen, vermenigvuldigde DIDRON nog met de factor

$$0,74 + \frac{0,047}{0,05 + 2R}$$

Deze factor is voor $R = 0,065$ m ongeveer gelijk aan 1.

De evenredigheid met i is eveneens onjuist, daar de projectielvorm niet door een enkelvoudige factor kan worden voorgesteld, terwijl deze eveneens afhankelijk is van de snelheid. Het zal n.l. later blijken dat we de snelheidsfunctie $f(V)$ niet volkomen exact kunnen voorstellen. Het verschil tussen de mathematische vorm van $f(V)$ en de werkelijkheid moet dan verdisconteerd worden in de i -waarde (of eventueel in de k).

We geven in figuur 15 een schets van een projectiel, waarin BCEF het lichaam, ABFG het afgeschuinde achterdeel (*tap*), CDE het *ogief* en HD de lengte-as voorstelt. We beschouwen CD als een boog van de cirkel, waarvan M het middelpunt is. We noemen M het *kromtemiddelpunt* en MC de *kromtestraal*. We zien dus dat hoe groter de kromtestraal is, hoe slanker het projectiel en hoe kleiner de i -waarde. Dit is in overeenstemming met de vormwaarden uit tabel



Figuur 15

Schematische voorstelling van een projectiel.
 CDE: ogief, M: frontemiddelpunt, MC = MD: krom-
 testraal. ABFG: afschuining aan de achterzijde
 (tap). HD: lengte-as van het projectiel.

I, indertijd door KRUPP opgesteld en waarbij de kopstraal in het kaliber is uitgedrukt.

Tabel I
 Vormwaarden i
 volgens KRUPP

Kopstraal, uitgedrukt in kalibers	Vormwaarde i
0,5	1,40
1	1,10
2	0,85
3	0,70
4	0,65
6	0,55
8	0,50
10	0,45

Om aan het bezwaar van de snelheidsafhankelijkheid van i tege-
 moet te komen, stelde EBERHARD de volgende formule op:

$$\frac{1}{i} = a - \frac{b}{V} - cV$$

waarin a, b en c bepaald worden door kromtestraal en afplatting van de projectielkop.

Voor een projectiel met een kopstraal van 3 kaliber en een afplatting van 0,36 kaliber is:

$$a = 1,3206$$

$$b = 58,2$$

$$c = 0,0001024 .$$

Met deze waarden van a, b en c vinden we bij een snelheid van $V = 400$ m/sec, een $i = 0,882$ en bij een snelheid van $V = 800$ m/sec, een $i = 0,857$. We zien hieruit dat de invloed van de snelheid op de vormwaarde vrij gering is.

Hebben we een projectiel met een afgeschuind achterdeel, dan worden de i-waarden uit tabel I met 5% verminderd.

In het algemeen zal de luchtweerstand geringer worden als we de ballistische coëfficiënt klein houden. Dit kunnen we bereiken door:

1e. Voor de vormwaarde i een zo laag mogelijke waarde te nemen.

We bereiken dit door het projectiel een zeer spitse kop en dus een grote kromtestraal aan het ogief te geven.

2e. De doorsnede van het projectiel klein te houden.

Teneinde de waarde van de luchtweerstand zo laag mogelijk te houden, is het dus van belang om een slank projectiel met een zeer spits ogief te kiezen.

4.2.2. *De relatieve bewegingen van het projectiel ten opzichte van het zwaartepunt*

Tengevolge van het Poisson-effect (3.6) en het gyroscopisch-effect (3.8) zal de lengte-as van het projectiel niet voortdurend samenvallen met de raaklijn aan de baan. De lengte-as zal steeds een schommelende beweging uitvoeren ten opzichte van deze raaklijn.

De beide genoemde effecten, alsmede het Magnus-effect (3.7) hebben tot gevolg, dat het zwaartepunt niet een baan beschrijft, die in het verticale schootsvlak is gelegen, doch een baan, die ten opzichte van dit schootsvlak een zijdelingse afwijking verkrijgt. Ook de wind kan een zijdelingse verplaatsing van het zwaartepunt veroorzaken. We hebben echter reeds vermeld (3.3), dat we bij onze berekeningen uitgaan van een windstille atmosfeer.

Zoals reeds in de aanvang van dit hoofdstuk opgemerkt, maken we voor de mathematische vormgeving vereenvoudigende veronderstellingen, zodanig dat:

- 1e. Het zwaartepunt een baan beschrijft in het verticale schootsvlak.
- 2e. De lengte-as van het projectiel voortdurend samenvalt met de raaklijn aan de baan.
- 3e. De snelheidsvector aangrijpt in het zwaartepunt en gericht is volgens de raaklijn.
- 4e. De luchtweerstandsvectoor aangrijpt in het zwaartepunt, samenvalt met de raaklijn en tegengesteld gericht is aan de snelheidsvector.
- 5e. De versnelling van de zwaartekracht aangrijpt in het zwaartepunt en samenvalt met de normaal op het, als een plat vlak gedachte, aardoppervlak. Deze versnelling wordt gedurende de beweging constant verondersteld.

We hebben een groot aantal beperkingen ingevoerd. Echter zijn al deze verwaarloosde factoren van invloed op de beweging van het projectiel en dus op de grootheden, die we uiteindelijk wensen te berekenen. We kunnen deze verwaarlozingen alleen verantwoorden in de constante k (zie 4.1, formule (2)), terwijl we voor de zijdelingse afwijking (derivatie) achteraf een correctie moeten aanbrengen. Sommige ballistici laten deze constante k weg, dan moeten we het vinden in een correctie op de vormwaarde i . In de praktijk baseren we onze baanberekeningen altijd op experimentele waarnemingen, zodat dit weinig moeilijkheden oplevert, daar we dan onze ballistische coëfficiënt c aanpassen aan de waarnemingspunten. Een juiste kennis van de waarden der grootheden uit (2) van 4.1 is alleen vereist voor a priori berekeningen, als we nog niet de beschikking hebben over experimentele waarnemingspunten.

4.2.3. De temperatuur, de druk en de relatieve vochtigheid van de lucht

Zie hoofdstuk 5.

4.2.4. De snelheid van het zwaartepunt

Hiermede hangt samen de mathematische vormgeving van de snelheidsfunctie $f(V)$.

Dit geeft in de praktijk vele moeilijkheden, daar de afhankelijkheid van de luchtweerstand met de snelheid $f(V)$ uitsluitend experimenteel bepaald kan worden.

Een algemeen geldige theoretische wet is nog niet gevonden. Voor $f(V)$ kiest men soms V^n , waarbij n betiteld wordt als de *weerstandsgraad*. Vroeger koos men $n = 2$, waarbij deze waarde voor het gehele snelheidsgebied werd gebruikt.

Beter is, zoals uit proeven volgt, om de n in verschillende

snelheidszones een andere waarde te geven, waarbij blijkt, dat omstreeks de geluidssnelheid, de n een maximum vertoont.

4.2.4.1. Vier facetten van de wiskundige vormgeving

Voor de wiskundige vormgeving van de luchtweerstandsfunctie $f(V)$ moeten we rekening houden met de volgende vier punten:

- a. Golfweerstand.
- b. Zuig- en wervelweerstand.
- c. Wrijvingsweerstand.
- d. De hoek, die de as van het projectiel maakt met de richting van voortbewegen.

Diverse ballistici hebben zich met de opstelling van luchtweerstandswetten bezig gehouden.

Feitelijk is er geen een, die geheel voldoet.

4.2.4.2. Oudere wetten

We zullen de voornaamste vormen, die voor $f(V)$ gekozen zijn, bespreken:

$$f(V) = V^2 \text{ (NEWTON EN OTTO-LARDILLON)}$$

$$f(V) = V^3 \text{ (BASHFORTH)}$$

$$f(V) = V^4 \text{ (PITON-BRESSANT)}$$

$$f(V) = V^2 \left(1 + \frac{V}{435}\right) \text{ (DIDION)}$$

$$f(V) = V^2 \left(1 + \frac{V^2}{696^2}\right) \text{ (ST. ROBERT)}$$

Deze wetten worden gewoonlijk voor het gehele snelheidsgebied gebruikt.

4.2.4.3. Zonewetten

Verder kent men nog de z. g. zonewetten:

a. Zonewetten van MAYEVSKY:

$$f(V) = V^2 \quad \text{voor} \quad V \leq 240 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^3 \quad \text{voor} \quad 240 < V \leq 295 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^5 \quad \text{voor} \quad 295 < V \leq 375 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^3 \quad \text{voor} \quad 375 < V \leq 419 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^2 \quad \text{voor} \quad 419 < V \leq 550 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^{1,7} \quad \text{voor} \quad 550 < V \leq 800 \text{ m/sec}$$

$$f(V) = V^{1,55} \quad \text{voor} \quad 800 < V \leq 1000 \text{ m/sec}$$

b. Zonewetten van SIACCI II:

$f(V) = V^2$	voor	$V \leq 240$ m/sec
$f(V) = V^3$	voor	$240 < V \leq 282$ m/sec
$f(V) = V^6$	voor	$282 < V \leq 343$ m/sec
$f(V) = V^3$	voor	$343 < V \leq 420$ m/sec
$f(V) = V^2$	voor	$420 < V \leq 700$ m/sec

c. Zonewetten van CHAPEL - VALLIER - HOJEL:

$f(V) = V^{2,5}$	voor	$V < 300$ m/sec
$f(V) = V^5$	voor	$300 \leq V \leq 330$ m/sec
$f(V) = V-263$	voor	$V > 330$ m/sec.

4.2.4.4. Eenheidswetten

Nadien hebben we de z. g. eenheidswetten gekregen.

a. Allereerst de eenheidswet van SIACCI:

$$f(V) = 0,2002 V-48,05 + \sqrt{(0,1648 V-47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442 V(V-300)}{371 + \left(\frac{V}{200}\right)^{10}}$$

Deze eenheidswet heeft FASELLA gebruikt om zijn tabellen te berekenen, behorende bij de methode SIACCI III, welke methode nog altijd gebruikt wordt om schootstafels voor landdoelgeschut te berekenen. Voor snelheden tot 1200 m/sec is deze wet in tabelvorm uitgerekend door CRANZ (I, tabel 6).

b. Verder de luchtweerstandswet behorende bij de methode GARNIER, HAAG, MARCUS (1918):

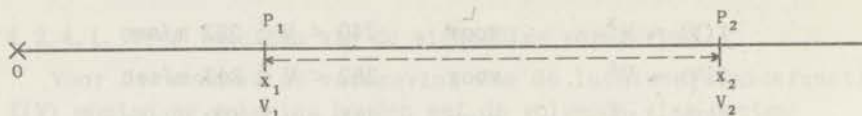
$$\log \left[\frac{F(V)}{V^2} \right] = \log \left[0,2550 + \frac{\sqrt[4]{1+0,0392 \left(\frac{V'}{10}\right)^8}}{27226+494 V'^2} \arctg V \right] + \frac{V^H-6}{10^4}$$

waarin $V' = \frac{V-330}{50}$ en V^H is V in hectometers.

Deze wet wordt gebruikt bij het berekenen van schootstafels voor luchtdoelgeschut. Bij de methode G.H.M. behoort een tabel, waarin $F(V)$ berekend is tot $V = 2000$ m/sec. De Amerikanen stelden hiermede hun „Ballistic Tables” (1929) samen.

4.3. Proefondervindelijke bepaling van de luchtweerstand

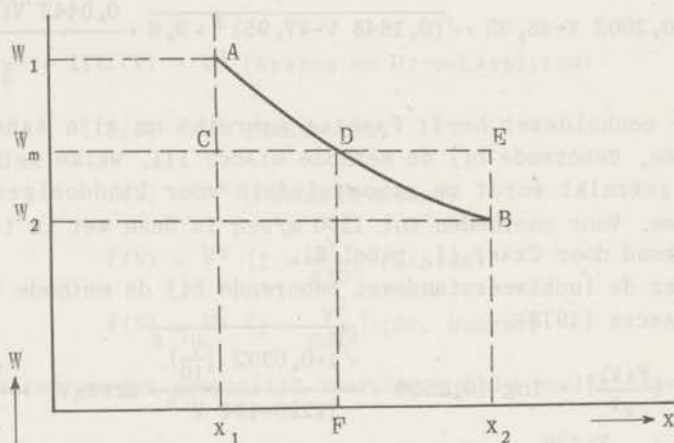
Kiezen we een zodanige opstelling van ons kanon, dat de projectielbaan nagenoeg horizontaal is, terwijl we aannemen dat de baan voorgesteld kan worden door een rechte lijn, dan kunnen we de zwaartekracht bij onze beschouwingen buiten rekening laten. We verschietsen ons projectiel bij 0 (fig. 16) en meten de snel-



Figuur 16

Het projectiel wordt verondersteld zich vanuit O volgens een rechte lijn voort te bewegen. De punten P_1 en P_2 met de coördinaten x_1 en x_2 liggen op een afstand s van elkaar. De gemeten snelheden in P_1 en P_2 zijn respectievelijk V_1 en V_2 .

heid in de punten P_1 en P_2 . Daar we de zwaartekracht buiten beschouwing laten, kunnen we volgens de wet van levende kracht en arbeid zeggen, dat de door de luchtweerstand verrichte arbeid gelijk is aan de afname van de hoeveelheid van beweging van het projectiel.



Figuur 17

Langs de verticale as is de luchtweerstand afgezet en langs de horizontale as de afstanden uit fig. 16.

Geven we in figuur 17 schematisch de luchtweerstand W als functie van x , dan is

$$\int_{x_1}^{x_2} W \, dx = \frac{1}{2} m (V_1^2 - V_2^2) \quad (3)$$

We kiezen nu een gemiddelde luchtweerstand W_m , zodanig dat opp $x_1 A B x_2 = \text{opp } x_1 C E x_2$.

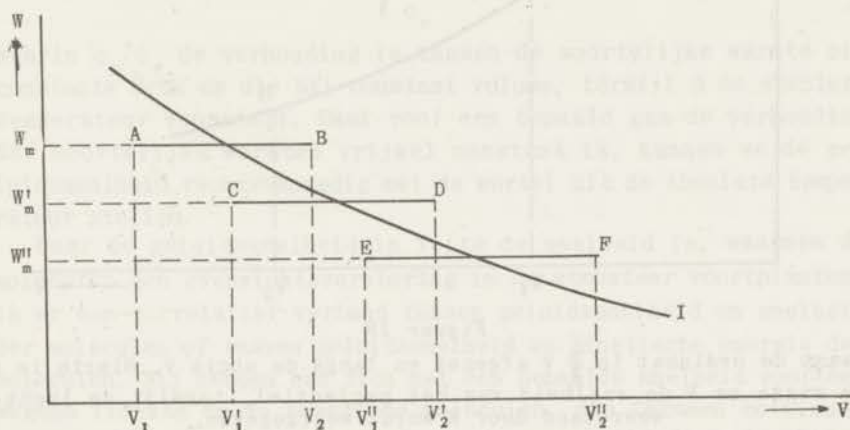
Formule (3) gaat dan over in:

$$W_m \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{2} m (V_1^2 - V_2^2)$$

$$W_m (x_2 - x_1) = \frac{1}{2} m (V_1^2 - V_2^2) \quad (4)$$

Uit (4) is W_m op te lossen.

We voeren deze berekeningen voor diverse snelheden uit en zetten de gevonden waarden in figuur 18 grafisch uit.



Figuur 18

Langs de ordinaat is de luchtweerstand W afgezet en langs de abscis de snelheid van het projectiel.

We vinden hier dus de gemiddelde waarden voor W in diverse snelheidsintervallen en trekken voorlopig door de middens van AB , CD en EF een kromme I , die de luchtweerstand W als functie van de snelheid V bepaalt. De juiste plaats van de kromme is onzeker, daar, zoals blijkt uit figuur 17, de keuze van W_m samenhangt met gelijke oppervlakken. We gaan nu een controle uitvoeren.

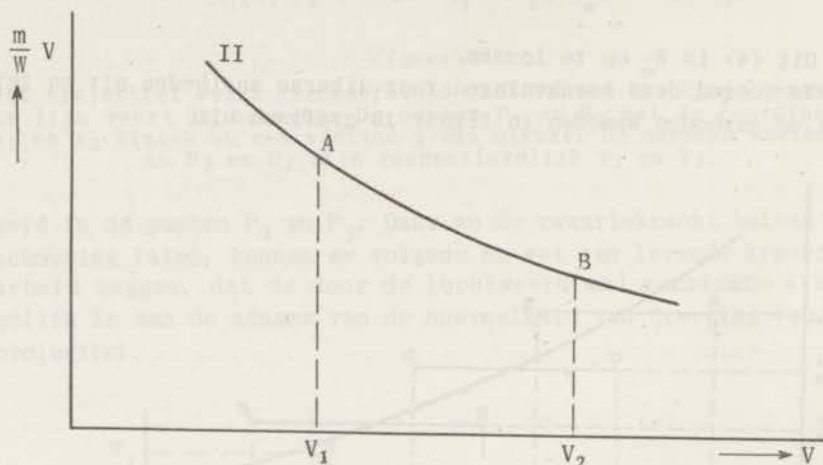
$$W = m \frac{dV}{dt} = m \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = m V \frac{dV}{dx}$$

$$\therefore dx = \frac{m}{W} V dV$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{W} V dV$$

$$x_2 - x_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{W} V dV = \text{opp. } V_1ABV_2 \quad (5)$$

(zie fig. 19).



Figuur 19

Langs de ordinaat is $\frac{m}{W} V$ afgezet en langs de abcis V . Hierin is m de massa en V de snelheid van het projectiel, terwijl de luchtweerstand door W wordt weergegeven.

We leiden nu uit de kromme I van figuur 18 een kromme II af van figuur 19. Het oppervlak V_1ABV_2 moet nu gelijk zijn aan $x_2 - x_1$ (fig. 16). Klopt dit niet, dan moet de kromme I anders getrokken worden. We gaan net zo lang door tot we goede resultaten vinden.

We hebben dan de weerstand W als functie van de snelheid gevonden en kunnen nu trachten de definitieve kromme I in een analytische vorm te brengen.

4.4. De invloed van de geluidssnelheid op de luchtweerstand

De onderzoekingen der Franse ballistici naar de vorm en het gedrag der functie $f(V)$ (de analytische luchtweerstandswet) toonden het bestaan van een kritische waarde dezer functie aan.

Deze waarde werd bereikt wanneer de snelheid van het projectiel de snelheid van het geluid bereikte. Passeerde de snelheid van het projectiel de snelheid van het geluid, dan trad een verschijnsel op, de zgn. „ballistische golf”, wat tot uitdrukking kwam in een groter energieverlies van het projectiel.

Volgens de kinetische gastheorie is de kinetische energie van

de moleculen, die zich vrij in een gas bewegen, evenredig aan het kwadraat van de snelheid van voortbewegen. Deze snelheid is evenredig aan de wortel uit de absolute temperatuur.

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}} \quad (6)$$

waarin v de snelheid van het geluid en θ de absolute temperatuur voorstelt.

Feitelijk is de snelheid v van het geluid rechtevenredig met

$$\sqrt{\frac{c_p}{c_v}} \theta,$$

waarin c_p/c_v de verhouding is tussen de soortelijke warmte bij constante druk en die bij constant volume, terwijl θ de absolute temperatuur voorstelt. Daar voor een bepaald gas de verhouding der soortelijke warmten vrijwel constant is, kunnen we de geluidssnelheid rechtevenredig met de wortel uit de absolute temperatuur stellen.

Daar de geluidssnelheid in feite de snelheid is, waarmee de moleculen een evenwichtsverstoring in de atmosfeer voortplanten, is er een correlatief verband tussen geluidssnelheid en snelheid der moleculen of tussen geluidssnelheid en kinetische energie der moleculen. Wij hebben een zich met een bepaalde snelheid voortbewegend lichaam en de bewegende moleculen, die tezamen botsings- en wrijvingsverschijnselen veroorzaken, waarbij de wederzijdse snelheden maatgevend zijn.

De luchtweerstand is dus afhankelijk van de snelheid van het bewegende lichaam en van de snelheid der moleculen, dus van de geluidssnelheid.

Het is dus volkomen te aanvaarden om de weerstandsfunctie van de lucht te schrijven als afhankelijk van beide grootheden. Men heeft hiervoor gekozen de vorm:

$$F(b) = F\left(\frac{V}{v}\right) \quad (7)$$

waarbij dus de snelheid van het bewegende lichaam wordt uitgedrukt in de geluidssnelheid ter plaatse. De functie van de projectielsnelheid wordt dus vervangen door een functie van b , het getal van MACH. DARRIEUS heeft in 1922 er voor het eerst in ballistische kringen op gewezen, dat de functie F de vorm van formule (7) moest worden gegeven.

Ook de vorm V/v is juist, daar immers de weerstand zeer sterk toeneemt als de snelheid van het lichaam om en nabij de geluidssnelheid komt. Zou laatstgenoemde snelheid tengevolge van een hogere temperatuur bv. met 10% toenemen, dan zou het projectiel

de sterke vergroting van de weerstand ook eerst ondervinden, indien zijn eigen snelheid met 10% was vergroot. Het is dus verklaarbaar om V en v in de vorm van een breuk te schrijven.

Een verklaring voor het feit, dat een bewegend lichaam juist bij de geluidssnelheid een grotere weerstand ondervindt, is te vinden in hoofdstuk 2.

De snelheid van het geluid is dus een functie van de absolute temperatuur der middenstof, zodat ook de waarde van F een verandering ondergaat als de temperatuur zich wijzigt, daar de ballistische golf dan optreedt bij een andere snelheid.

De functie F zal die verandering dus tot uitdrukking moeten brengen.

Daar de functie $F(b)$ voor $b = 1$ een discontinuïteit blijkt te vertonen, heeft de Franse ballisticus DUPUIS een luchtweerstandswet ontwikkeld, die op het getal van MACH is gebaseerd.

Onder zijn leiding werden in de jaren 1921-1923 schietproeven gehouden door de „Commission de Gavre”, teneinde experimentele waarnemingen te verkrijgen. Deze wet wordt bij de methode G.H.M. II gebruikt.

De luchtweerstandsfunctie is van de vorm:

$$F(b) = F_1(b) - jF_2(b) .$$

Deze is getabelleerd in bijlage B van Garniers verhandeling in het Mémorial de l'artillerie française 1929 met drie alternatieve waarden voor de parameter j . Deze parameter geeft de mogelijkheid de luchtweerstandsfunctie aan te passen aan de uitwendige vorm van het projectiel gezien vanuit een aerodynamisch gezichtspunt. Voor moderne, slanke projectielen wordt de waarde $j = 0,04$ gebruikt, voor de oudere projectielmodellen geldt $j = 0,24$, terwijl voor de tussenvormen de waarde $j = 0,14$ kan worden ingevoerd.

Deze parameter j geeft dus naast de vormwaarde i een tweede mogelijkheid om met de vorm van het projectiel rekening te houden.

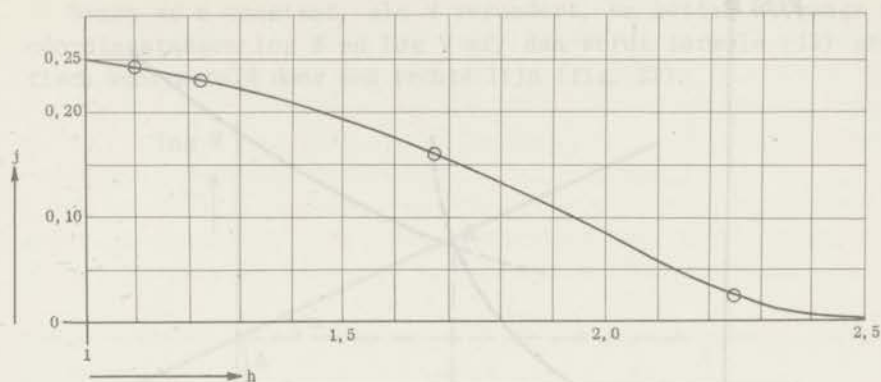
Uit resultaten van de praktijk is het mogelijk gebleken een grafiek te construeren voor j als functie van de ogiefhoogte h , waarbij h uitgedrukt wordt in kalibers (fig. 20).

De functiewaarden $F_1(b)$ en $F_2(b)$ zijn verkregen uit experimentele gegevens en op de volgende wijze mathematisch voor te stellen.

Voor $b \geq 1$:

$$F_1(b) = 96000 [(b - 0,5) + 0,16596 (b - 2,05) \cdot 10^{-5,5(b-1,94)^2}]$$

$$F_2(b) = 96000 .$$



Figuur 20

j = vormwaarde volgens de wet van Dupuis (Tabel B, G.H.M. II).
 h = hoogte van het ogief, uitgedrukt in kalibers.

Voor $b \leq 1$:

$$F_1(b) = 96000 [0,1399976 + 0,36 \cdot 10^{-5,8(1-b)}]$$

$$F_2(b) = 96000 [0,35 + 0,65 \cdot 10^{-5,8(1-b)}]$$

Voor $b = 1$ geven de twee functies van $F_1(b)$ resp. $F_2(b)$ gelijke waarden.

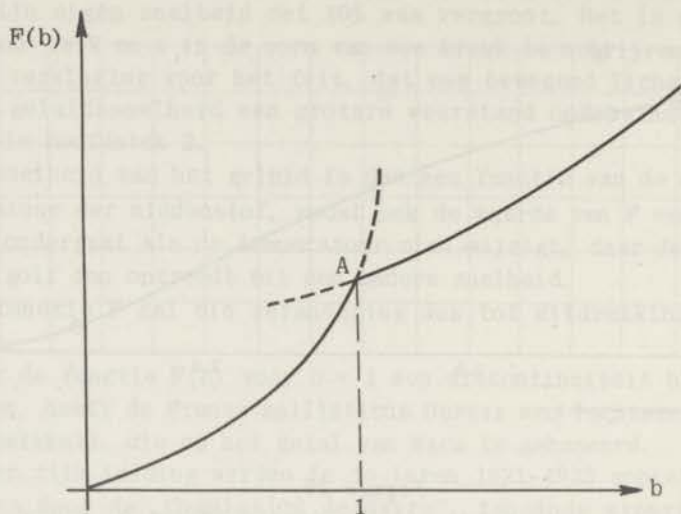
Zetten we de functie $F(b)$ grafisch uit, dan blijkt deze bij $b = 1$ een discontinuïteit te bezitten, zodat we bij het uitvoeren van berekeningen, in de omgeving van dit punt, speciaal moeten oppassen. Voor $j = 0,24$ is $F(b)$ als functie van b grafisch uitgezet in figuur 21. De weerstandsgraad n (zie verder) springt hier van 10,5 voor $b = 1 - \epsilon$ tot 3,8 voor $b = 1 + \epsilon$, waarin ϵ een zeer klein getal voorstelt.

4.5. Een nadere beschouwing van de weerstandsgraad

We hadden de luchtweerstand aanvankelijk geschreven volgens de formule:

$$W = \frac{P}{g} c f(V) \quad (8)$$

Hierin is de ballistische coëfficiënt c afhankelijk van het veranderlijke luchtgewicht, en daar dit laatste een functie is van de hoogte, is c dus eveneens een functie van de hoogte. Noe-



Figuur 21

De functie $F(b)$ van de luchtweerstandswet van Dupuis is langs de ordinaat en het getal van Mach langs de abscis afgezet. In A is een discontinuïteit. Bij het in tabelvorm brengen van de functie zijn de krommen voorbij het punt A geëxtrapoleerd.

men we de ballistische coëfficiënt op zeeniveau c_0 en nemen we een functie $h(y)$ aan, die verandert met de hoogte, dan kunnen we c als volgt uitdrukken:

$$c = c_0 h(y) .$$

Formule (8) gaat dan over in:

$$W = \frac{P}{g} c_0 h(y) f(V) \quad (9)$$

$$\log W = \log P - \log g + \log c_0 + \log h(y) + \log f(V) \quad (10)$$

Beschouwen we de luchtweerstand voor een constante hoogte, dan zijn $\log g$ en $\log h(y)$ constant. Uiteraard zijn ook $\log P$ en $\log c_0$ constant. Formule (10) gaat voor een *constante hoogte* over in:

$$\log W = A + \log f(V) \quad (11)$$

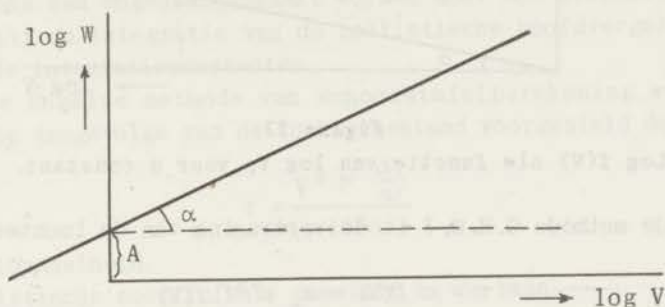
Hier in is A een constante grootheid.

Bij sommige ballistische methoden is verondersteld:

$$f(V) = V^n \quad (12)$$

dus: $\log W = A + n \log V$ (13)

Nemen we n constant, als V verandert, en zetten we langs de coördinaatassen $\log W$ en $\log V$ af, dan wordt formule (13) grafisch voorgesteld door een rechte lijn (fig. 22).



Figuur 22

Grafische voorstelling van formule (13) voor n constant.

Van de $\log W$ -as wordt een stuk A afgesneden, terwijl de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn wordt gegeven door n , waarbij $n = \text{tg } \alpha$.

Hoe groter de n , hoe steiler de rechte loopt en hoe sterker dus de toename van de luchtweerstand als functie van de snelheid is.

Verandert de n in het snelheidsgebied, dan vinden we op de logaritmische schaal van fig. 22 geen rechte meer, doch een grafische lijn, waarvan de richtingscoëfficiënt van tijd tot tijd verandert. Neemt de snelheid V met een bedrag dV toe, dan zal de luchtweerstand meer toenemen, naarmate n groter is. De n is dus een maat voor de verandering van de luchtweerstand in een bepaald snelheidsgebied. We noemen n de *weerstandsgraad*.

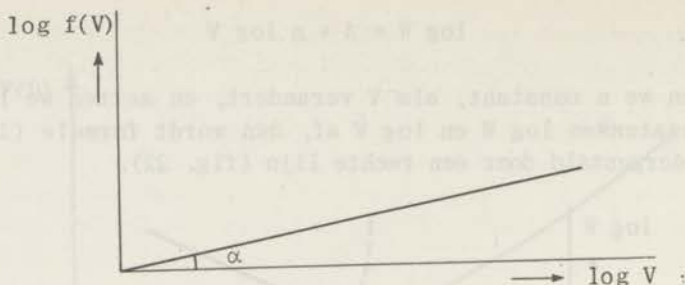
Om een inzicht te krijgen in de luchtweerstand kunnen we dus in plaats van $\log W$ langs de y -as, hierlangs $\log f(V)$ afzetten. Dit scheelt slechts het stuk A dat van de y -as wordt afgesneden. Voor een constante n vinden we op deze wijze fig. 23. Zoals boven reeds vermeld, zal de grafiek voor $\log f(V)$ als functie van $\log V$ in het algemeen een kromme zijn.

De helling van de kromme bepalen we nu door in ieder punt de *weerstandsgraad* (tangens van hellingshoek) uit te rekenen.

We vinden:

$$n = \text{tg } \alpha = \frac{d [\log f(V)]}{d [\log V]} = \frac{d [\ln f(V)]}{d [\ln V]} = \frac{\frac{f'(V)}{f(V)} dV}{\frac{dV}{V}} = \frac{V f'(V)}{f(V)}$$

dus:
$$n = \frac{V f'(V)}{f(V)} = \frac{d [\log f(V)]}{d [\log V]} \quad (14)$$



Figuur 23

Log $f(V)$ als functie van $\log V$, voor n constant.

Bij de methode G.H.M. I is de vertraging van de luchtweerstand:

$$r = c f(V) = c_0 e^{-hy} f(V) \quad (15)$$

$$\ln r = \ln c_0 - hy + \ln f(V) \quad (16)$$

Nemen we de hoogte constant, dan kunnen we dus weer $\ln f(V)$ als functie van $\ln V$, of $\log f(V)$ als functie van $\log V$ uitzetten. De weerstandsgraad wordt dan bepaald door formule (14).

De vertraging van de luchtweerstand wordt bij de methode G.H.M. II voorgesteld door:

$$r = c_0 \zeta F(b) = c_0 \frac{H}{H_0} F(b) \quad (17)$$

Hierin is H de atmosferische druk ter plaatse waar het projectiel zich bevindt en H_0 is de druk op zeeniveau.

$$\ln r = \ln c_0 + \ln H - \ln H_0 + \ln F(b) \quad (18)$$

Kiezen we de hoogte weer constant, dan krijgen we een inzicht in de luchtweerstand door $\log F(b)$ grafisch voor te stellen als functie van $\log b$. In deze formules is b de snelheid van het projectiel, gedeeld door de snelheid van het geluid. Hier is rekening gehouden met de verandering van de geluidssnelheid als functie van de temperatuur of, wat voor de standaardatmosfeer op hetzelfde neerkomt, als functie van de hoogte. Houden we de hoogte constant, dan is ook de geluidssnelheid voor de standaardatmosfeer constant en kunnen we op deze wijze de luchtweerstandswet en de weerstandsgraad van G.H.M. II vergelijken met G.H.M. I en uit de grafieken het onderscheid aflezen.

Voor de weerstandsgraad van G.H.M. II vinden we:

$$n = \frac{d [\log F(b)]}{d (\log b)} = \frac{d [\ln F(b)]}{d (\ln b)} = \frac{\frac{F'(b)}{F(b)} db}{\frac{db}{b}} = \frac{b F'(b)}{F(b)} \quad (19)$$

Bij de *zonewetten* voor de luchtweerstand (Mayevski, Siacci II, e. d.) is de functie $f(V)$ gegeven door V^n . De weerstandsgraad n varieert hier in de diverse snelheidsintervallen. Op de zonegrenzen verandert de weerstandsgraad plotseling, zodat er in de vertraging behalve een discontinuïteit ook een sprong optreedt. Deze sprong kan ongedaan gemaakt worden door een geschikte keuze van de, bij de integratie van de ballistische hoofdvergelijking, optredende integratieconstanten.

Bij de Engelse methode van schootstafelberekening wordt de vertraging tengevolge van de luchtweerstand voorgesteld door:

$$r = \frac{V^2 P \left(\frac{V}{a}\right)}{10^4 c} \quad (20)$$

a = geluidssnelheid.

c = ballistische coëfficiënt, constant in de baan.

$P\left(\frac{V}{a}\right)$ = functie van het getal van Mach.

$$\ln r = 2 \ln V + \ln P\left(\frac{V}{a}\right) - \ln c - \ln 10^4$$

$$n = \frac{d(\ln r)}{d(\ln V)} = 2 + \frac{d[\ln P\left(\frac{V}{a}\right)]}{d(\ln V)} = 2 + \frac{\frac{P'\left(\frac{V}{a}\right)}{P\left(\frac{V}{a}\right)} d\left(\frac{V}{a}\right)}{\frac{dV}{V}} = 2 + \frac{V P'\left(\frac{V}{a}\right)}{a P\left(\frac{V}{a}\right)}$$

Stellen we weer: $b = \frac{V}{a}$, dan is de weerstandsgraad:

$$n = 2 + \frac{b P'(b)}{P(b)} = 2 + \frac{d[\log P(b)]}{d(\log b)} \quad (21)$$

We hebben uit het voorgaande gezien, dat de weerstandsgraad in het gehele snelheidsgebied sterk aan verandering onderhevig is en wel speciaal in de buurt van de geluidssnelheid.

Schrijven we voor de luchtweerstand:

$$W = \frac{P}{g} c f(V), \quad (22)$$

dan leiden we de weerstandsgraad af uit $f(V)$. In de analytische vorm, die we voor $f(V)$ moeten kiezen, is dus in de eerste plaats het natuurkundige verschijnsel „luchtweerstand” verwerkt, doch in de tweede plaats bevat deze analytische vorm compensaties voor de beperkende veronderstellingen, die we in hoofdstuk 3 invoerden. In principe is hierbij c alleen maar afhankelijk gesteld van de hoogte. Daar de analytische vorm echter ook weer niet geheel exact is, zullen we een geringe afhankelijkheid van c en dus van i of k met de snelheid vinden. Voor ons betoog verwaarlozen we dit laatste echter.

Stellen we de luchtweerstand voor door de formule:

$$W = \frac{P}{g} c_1 V^2, \quad (23)$$

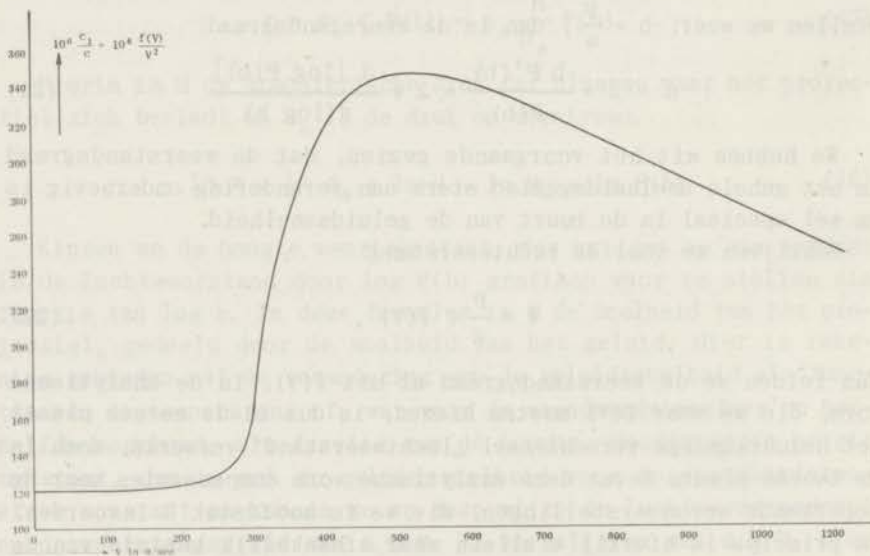
dan is de weerstandsgraad constant en gelijk aan 2. Alles wat we bij (22) in de $f(V)$ verwerkten, moeten we nu in de c_1 verantwoorden. Deze laatste wijze van mathematisch voorstellen vinden we o.a. bij de hierboven behandelde Engelse methode. Men betitelt c_1 dan met de naam *dragfunction*.

Door gelijkstelling van de formules (22) en (23) kunnen we de dragfunction afleiden uit de analytische functie $f(V)$. We vinden:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{f(V)}{V^2} \quad (24)$$

De functie $\frac{c_1}{c} = \frac{f(V)}{V^2}$ is in figuur 24 grafisch uitgezet voor

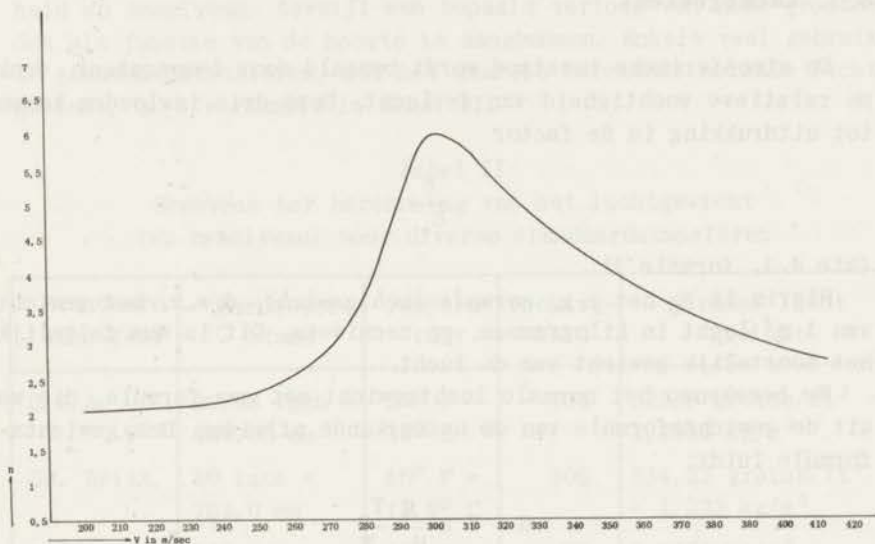
de eenheidswet van Siacci. We zien hieruit dat tot snelheden van ongeveer 200 m/sec de snelheidsfunctie $f(V)$ kan worden voorgesteld door V^2 . Voor grotere projectielsnelheden blijkt dit echter niet meer mogelijk te zijn. Tevens leert de figuur ons, dat de kromme voor $V = 300$ m/sec een buigpunt vertoont, het z.g. *buigpunt van Mayevski*. Bij een snelheid van ongeveer 500 m/sec wordt het z.g. *maximum van Hojel* bereikt.



Figuur 24

Grafische voorstelling van $10^6 \frac{c_1}{c} = 10^6 \frac{f(V)}{V^2}$ voor de eenheidswet van Siacci.

Tenslotte geven we in figuur 25 een beeld van de weerstandsgraad voor de eenheidswet van Siacci. Duidelijk blijkt dat deze weerstandsgraad bij het naderen van de geluidssnelheid sterk stijgt van $n = 2$ tot $n = 6$, om voorbij de geluidssnelheid weer regelmatig af te nemen. Dit verschijnsel is volkomen in overeenstemming met het buigpunt dat we in figuur 24 vonden voor een snelheid van 300 m/sec.



Figuur 25

De weerstandsgraad n als functie van de projectielsnelheid V , voor de eenheidswet van Siacci.

Hoofdstuk 5

DE VERWERKING VAN DE ATMOSFEER IN DE BALLISTIEK

5.1. Luchtgewicht

De atmosferische toestand wordt bepaald door temperatuur, druk en relatieve vochtigheid van de lucht. Deze drie invloeden komen tot uitdrukking in de factor

$$\frac{\delta}{\delta_0}$$

(zie 4.1, formule 1).

Hierin is δ_0 het z.g. *normale luchtgewicht*, d.w.z. het gewicht van 1 m^3 lucht in kilogrammen, op zeeniveau. Dit is dus feitelijk het soortelijk gewicht van de lucht.

We berekenen het normale luchtgewicht met een formule, die we uit de gewichtsformule van de natuurkunde afleiden. Deze gewichtsformule luidt:

$$G = v s \frac{H T_0}{H_0 T}$$

Het gewicht van 1 m^3 lucht, bij een druk van 76 cm en een temperatuur van 0°C , bedraagt 1,293 kg. Voor het luchtgewicht δ_0 vinden we dan:

$$\delta_0 = 1,293 \frac{H}{76} \frac{273}{T} = 4,65 \frac{H}{T} \quad (1)$$

Hierin moet H in centimeters kwikdruk en T in graden kelvin worden ingevoerd. In formule (1) is de vochtigheid verwaarloosd. Willen we hiermede rekening houden, dan moet de formule gecorrigeerd worden:

$$\delta_0 = \frac{4,65}{T} \left(H - \frac{3}{8} f E \right) \quad (2)$$

f = vochtigheidsgraad.

E = verzadigingsdruk van waterdamp in cm kwikdruk.

In deze formule wordt de druk gecorrigeerd voor de vochtigheid. In de Franse methoden corrigeert men gewoonlijk de temperatuur voor de vochtigheid.

5.2. Standaardatmosfeer

Behalve het luchtgewicht op zeeniveau moeten we ook, volgens een bepaalde formule, het verloop aannemen van het luchtgewicht met de hoogte. Zodoende komen we tot het luchtgewicht δ op zekere hoogte boven zeeniveau.

We maken hiervoor gebruik van de *standaardatmosfeer*, die gebaseerd is op een jaargemiddelde voor druk, temperatuur en vochtigheid op zeeniveau, terwijl een bepaald verloop van deze grootheden als functie van de hoogte is aangenomen. Enkele veel gebruikte standaardatmosferen, met het daaruit berekende normale luchtgewicht, zijn verzameld in tabel II.

Tabel II

Gegevens ter berekening van het luchtgewicht
(op zeeniveau) voor diverse standaardatmosferen

Standaard atmosfeer	Barometerstand	Temperatuur	Vochtigheid	Normaal luchtgewicht
U. S. A.	29,53 inch = 750,05 mm	59 ^o F = 15 ^o C	78%	525,9 grains/ft ³ = 1,2035 kg/m ³
Gr. Britt.	30 inch = 762,0 mm	60 ^o F = 15,6 ^o C	50%	534,22 grains/ft ³ = 1,223 kg/m ³
I. C. A. N.	760 mm	15 ^o C	0%	1,2255 kg/m ³
Nederland vóór 1940	760 mm	10 ^o C	80%	1,243 kg/m ³
Siacci- Fasella	750 mm	15 ^o C	50%	1,206 kg/m ³
G. H. M. I en II	755,33 mm	16 ^o C	75%	1,208 kg/m ³
Voormalig N. O. I.	758,0 mm	26,4 ^o C	83%	1,164 kg/m ³

5.3. Temperatuur en druk

Is het temperatuurverloop als functie van de hoogte, alsmede de druk op zeeniveau vastgelegd, dan is volgens de natuurkundige wet van de barometrische hoogteverdeling tevens het drukverloop als functie van de hoogte bepaald. Op iedere willekeurige hoogte kan nu het luchtgewicht met behulp van formule (1) worden berekend.

Moderne onderzoekingen op ballistisch gebied hebben aange-
toond, dat men bij de luchtweerstand rekening moet houden met de
veranderlijkheid van de geluidssnelheid als functie van de tem-
peratuur. Hieruit volgt dat het beter is de correcties tengevolge
van temperatuur- en drukverandering gesepareerd te berekenen, dan
dit te doen door middel van het luchtgewicht, waarin beide zijn
ingevoerd. Wordt deze nieuwere methode toegepast, dan is het
noodzakelijk te werken met de afwijking van de normale druk op
zeeniveau, alsmede met de ballistische temperatuur.

5.4. De barometrische hoogteformule voor een constante tem- peratuur

We zullen enkele formules afleiden voor de verandering van het
luchtgewicht als functie van de hoogte en wel in de eerste plaats
die, waarbij de temperatuur constant wordt gehouden.

We gaan uit van de toestandsvergelijking voor een ideaal gas:

$$p v = R T . \quad (3)$$

We vestigen er de aandacht op, dat de hier gebruikte gascon-
stante R voor ieder gas verschillend is. Deze is te verkrijgen
door de in de physica gebruikte universele gasconstante te delen
door het moleculairgewicht.

We hebben de massa van 1 m^3 lucht, voor een bepaalde tempera-
tuur, druk en vochtigheid, gesteld op $\delta \text{ kg}$. Gaan we bij onze be-
schouwingen uit van 1 kg lucht, onder dezelfde omstandigheden,
dan wordt het volume hiervan: $v = \frac{1}{\delta}$.

Formule (3) neemt dan de vorm aan:

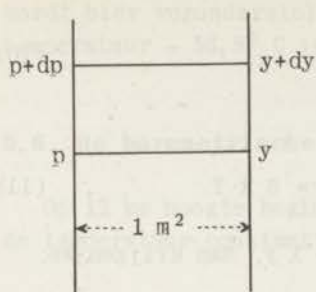
$$p = R T \delta . \quad (4)$$

Veronderstellen we een luchtkolom met een doorsnede van 1 m^2
en beschouwen we daarin een laag op hoogte $y \text{ m}$ met een luchtdruk
van $p \text{ kg/m}^2$; en een laag op hoogte $y + dy \text{ m}$ met een luchtdruk
van $p + dp \text{ kg/m}^2$ (fig. 26).

Stijgen we nu dy meter van het eerste tot het tweede niveau,
dan is het gewicht van de lucht in die kolom gelijk aan $\delta dy \text{ kg}$.
De drukverandering bij deze stijging bedraagt nu:

$$dp = - \delta dy . \quad (5)$$

Houdt men de temperatuur constant, dan geldt voor formule (4):



Figuur 26

Cylindervormige luchtkolom met eendoorsnede van 1 m^2 . Luchtdruk op y en $y + dy$ m, resp. p en $p + dp$ kg/m^2 .

of

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \quad (6)$$

Uit de formules (5) en (6) volgt:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\delta dy}{p} = - \frac{\delta_0}{p_0} dy$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = - \frac{\delta_0}{p_0} y$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\delta_0}{p_0} y} \quad (7)$$

Met behulp van (6) wordt deze formule:

$$\delta = \delta_0 e^{-\frac{\delta_0}{p_0} y} \quad (8)$$

Deze betrekking geldt dus uitsluitend als de temperatuur constant is verondersteld.

Gaan we uit van $p_0 = 760 \text{ mm}$ en $\delta_0 = 1,243 \text{ kg/m}^3$, dan vinden we

$$\frac{\delta_0}{p_0} = 0,000120 .$$

Voor $p_0 = 750 \text{ mm}$ en $\delta_0 = 1,206$ krijgen we als resultaat:

$$\frac{\delta_0}{p_0} = 0,000118 .$$

Gewoonlijk neemt men voor $\frac{\delta_0}{p_0}$ de waarde $h = 0,0001$.

Voor grotere hoogten wordt in de methode G.H.M. I gebruikt $h' = h(1 + ay)$, waarin $a = 0,13 \cdot 10^{-4}$, waardoor een gecorrigeerde formule ontstaat:

$$\delta = \delta_0 e^{-h' y} = \delta_0 e^{-h(1+ay)y} \quad (9)$$

5.5. De barometrische hoogteformule voor een veranderlijke temperatuur

Tot ongeveer 12 km hoogte in de z.g. *troposfeer*, neemt de temperatuur voortdurend af.

Noemen we λ de *temperatuurgradient*, d.w.z. het bedrag waarmee de temperatuur afneemt bij stijging van 1 m, dan geldt voor de hoogte y :

$$T_y = T_o - \lambda y . \quad (10)$$

Maken we wederom gebruik van de formules:

$$dp = - \delta dy \quad \text{en} \quad p = \delta R T \quad (11)$$

waarin nu voor T te substitueren is: $T_o - \lambda y$, dan krijgen we:

$$dp = - \frac{p dy}{R (T_o - \lambda y)}$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{dy}{R (T_o - \lambda y)}$$

Geïntegreerd:

$$\ln p \Big|_{p_o}^p = \frac{1}{R\lambda} \ln (T_o - \lambda y) \Big|_{y=0}^y$$

of:

$$\ln \frac{p}{p_o} = \frac{1}{R\lambda} \ln \frac{T_o - \lambda y}{T_o}$$

$$\frac{p}{p_o} = \left[\frac{T_o - \lambda y}{T_o} \right]^{\frac{1}{R\lambda}} \quad (12)$$

Met behulp van (11) vinden we:

$$\frac{p}{p_o} = \frac{\delta R (T_o - \lambda y)}{\delta_o R T_o} = \left[\frac{T_o - \lambda y}{T_o} \right]^{\frac{1}{R\lambda}}$$

$$\delta = \delta_o \left[\frac{T_o - \lambda y}{T_o} \right]^{\frac{1}{R\lambda} - 1} \quad (13)$$

Stellen we de temperatuur op 12 km hoogte op $-54,6^\circ \text{C}$ en op zeeniveau gelijk 10°C , dan is

$$\lambda = \frac{64,6}{12000} = 0,0054 .$$

$$R = 29,29 .$$

Met formule (11) gaat formule (13) over in:

$$\delta = \delta_o \left[1 - \frac{\lambda y}{T_o} \right]^{\frac{\delta_o T_o}{p_o \lambda} - 1} \quad (14)$$

daar:

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta_o T_o}{p_o}$$

Voor de I.C.A.N. standaardatmosfeer is $T_o = 288$. De troposfeer

wordt hier verondersteld te eindigen op 11 km hoogte, waarbij de temperatuur $-56,5^{\circ}$ C is. We vinden dan $\lambda = 0,0065$.

5.6. De barometrische hoogteformule voor de stratosfeer

Op 12 km hoogte begint de stratosfeer. In deze laag stellen we de temperatuur constant: $T_1 = 218,4$. We vinden dan m. b. v. (11):

$$dp = -\frac{p}{R T_1} dy$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{R T_1}$$

Geïntegreerd:

$$\ln p \Big|_{p_1}^p = -\frac{y}{R T_1} \Big|_{y_1}^y$$

$$\ln \frac{p}{p_1} = -\frac{y - y_1}{R T_1}$$

$$\frac{p}{p_1} = e^{-\frac{y - y_1}{R T_1}}$$

Voor constante temperatuur is: $\frac{p}{p_1} = \frac{\delta}{\delta_1}$, dus

$$\delta = \delta_1 e^{-\frac{y - y_1}{R T_1}} \quad (15)$$

Substitueren we voor δ_1 , de waarde uit (14), waarin $y = y_1 = 12000$ m, dan gaat formule (15) ter berekening van het luchtgewicht in de stratosfeer, over in:

$$\delta = \delta_o \left[1 - \frac{\lambda y_1}{T_o} \right]^{\frac{\delta_o T_o}{p_o \lambda} - 1} e^{-\frac{y - y_1}{R T_1}} \quad (16)$$

Opmerking: Bij de methode G.H.M. II wordt voor het luchtgewicht de formule gebruikt:

$$\delta_y = \delta_o \frac{p_y T_o'}{p_o T_y'} \quad (17)$$

Waarin T' de voor de vochtigheid gecorrigeerde temperatuur is.

Deze formule is op eenvoudige wijze uit de gewichtsformule van de natuurkunde af te leiden. Deze luidt:

$$G = v s \frac{p T_o}{p_o T} \quad (18)$$

Nemen we voor het volume van de lucht $v = 1 \text{ m}^3$, dan is het gewicht van deze lucht op zeeniveau $s = \delta_0$, waarbij een druk p_0 en een temperatuur T_0 behoren. Voor een druk p_y en een temperatuur T_y , op een hoogte van y meter, kunnen we dan het gewicht van de lucht $G = \delta_y$ berekenen. De gewichtsformule geldt voor droge lucht. We kunnen echter zonder bezwaar de temperatuur voor de vochtigheid corrigeren, waarna dus (17) volgt uit (18).

5.7. Overzicht van de afgeleide formules voor de verandering van het luchtgewicht als functie van de hoogte

A.
$$\delta_y = \delta_0 e^{-\frac{\delta_0}{p_0} y} \quad (19)$$

Deze formule is theoretisch afgeleid voor een constante temperatuur.

B.
$$\delta_y = \delta_0 e^{-hy} \quad (20)$$

C.
$$\delta_y = \delta_0 e^{-h(1+ay)y} \quad (21)$$

D.
$$\delta_y = \delta_0 \left(1 - \frac{\lambda y}{T_0}\right)^{\frac{1}{R\lambda} - 1} \quad (22)$$

De formule D is theoretisch afgeleid voor een veranderlijke temperatuur.

E.
$$\delta_y = \delta_0 \frac{p_y T_0'}{p_0 T_y'} \quad (23)$$

Om na te gaan in hoeverre deze formules in de praktijk van elkaar verschillen, hebben we hiervoor berekeningen uitgevoerd. De volgende gegevens zijn hierbij gebruikt:

$$\delta_0 = 1,243 \text{ kg/m}^3 \text{ (760 mm, } 10^0 \text{ C, 80\% vochtigheid).}$$

$$p_0 = 10333 \text{ kg/m}^2.$$

$$T_y = T_0 - \lambda y. \quad \lambda = 0,0054.$$

$$T_0 = 283^0 \text{ K.}$$

$$h = 10^{-4}.$$

$$a = 0,13 \cdot 10^{-4}$$

$$R = 29,3.$$

$$y \text{ in meters.}$$

De waarden van p_y en T_y' , benodigd voor de formule (E), zijn ontleend aan de tabellen, behorende bij de methode G.H.M. II (1929). De resultaten zijn verzameld in tabel III.

Tabel III

Het luchtgewicht als functie van de hoogte
volgens diverse formules

y in m	δ_y in kg/m^3				
	A	B	C	D	E
0	1,243	1,243	1,243	1,243	1,243
1000	1,102	1,125	1,123	1,122	1,117
2000	0,977	1,018	1,013	1,011	1,006
3000	0,867	0,921	0,910	0,908	0,907
4000	0,768	0,833	0,816	0,815	0,818
5000	0,681	0,754	0,730	0,729	0,738
6000	0,604	0,682	0,651	0,651	0,666
7000	0,536	0,617	0,579	0,579	0,600
8000	0,475	0,559	0,514	0,515	0,539
9000	0,421	0,505	0,455	0,456	0,483
10000	0,373	0,457	0,402	0,403	0,430
11000	0,331	0,414	0,354	0,355	0,378
12000	0,294	0,374	0,311	0,312	0,328

De formules B en C worden gebruikt bij de methode G.H.M. I. De correctie a krijgt pas invloed op grotere hoogte.

De getallenwaarden voor C en D zijn nagenoeg gelijk. Hieruit blijkt, dat de gecorrigeerde formule van G.H.M. I past bij de theoretisch afgeleide formule.

De formule E wordt gebruikt bij de methode G.H.M. II. Afwijkend van het bij deze methode gebruikelijke luchtgewicht is ter vergelijking met de andere cijferreeksen voor $\delta_0 = 1,243 \text{ kg/m}^3$ gekozen.

5.8. Enkele standaardatmosferen

Voor de Amerikaanse standaardatmosfeer is het luchtgewicht en de temperatuur als functie van de hoogte, vermeld in tabel IV.

Luchtgewicht, druk en temperatuur als functie van de hoogte, geeft ons tabel V voor de Britse standaardatmosfeer.

Een veel gebruikte standaardatmosfeer is de I.C.A.N.

De berekening van δ_y geschiedt hierbij volgens de formule:

$$\delta_y = \delta_0 \left(1 - \frac{0,0065 y}{288}\right)^{4,255} \quad (24)$$

Tabel IV

Het verloop van luchtgewicht en temperatuur als functie van de hoogte, voor de Amerikaanse standaardatmosfeer (voor het midden van de hoogte zones)

Hoogte in duizendtal- len voeten	Luchtge- wicht in kg/m ³	Temperatuur	
		in °F	in °C
0	1,2034	59,0	15,0
0,3	1,1920	58,1	14,5
1,05	1,1643	55,7	13,2
2,25	1,1208	52,0	11,1
3,75	1,0691	47,5	8,6
5,25	1,0197	43,0	6,1
7,5	0,9497	36,4	2,4
10,5	0,8638	27,7	- 2,4
13,5	0,7858	19,3	- 7,1
16,5	0,7146	11,1	-11,6
21	0,6199	- 0,8	-18,2
27	0,5130	-16,1	-26,7
33	0,4244	-30,5	-34,7
39	0,3512	-44,1	-42,3
45	0,2905	-57,3	-49,6
51	0,2404	-69,7	-56,5
57	0,1989	-81,6	-63,1

Tabel V

Het verloop van luchtgewicht, druk en temperatuur als functie van de hoogte, voor de Britse standaardatmosfeer (voor het midden van de hoogtezones)

Hoogte in duizendtal- len voeten	Luchtge- wicht in kg/m ³	Druk		Temperatuur	
		in mm kwikdruk	in mil- libar	in °F	in °C
0	1,223	762,0	1015,9	60	15,6
1	1,184	735,1	979,3	58,2	14,6
3	1,109	683,5	911,2	54,4	12,4
5	1,039	635,5	847,2	50,4	10,2
7	0,974	590,3	780,9	46,1	7,8
9	0,913	548,1	730,6	41,5	5,3
11	0,855	508,5	677,8	36,6	2,6
13	0,802	471,4	628,4	31,3	- 0,4
15	0,751	436,6	582,0	25,7	- 3,5
18	0,681	388,6	518,0	16,6	- 8,6
22	0,598	331,2	441,5	3,0	-16,1
26	0,526	280,9	374,4	-12,6	-24,8
30	0,462	237,0	315,9	-30,4	-34,7
34	0,405	198,1	264,1	-50,7	-45,9
38	0,341	164,7	219,4	-56,2	-49,0

Substitueren we in formule (22):

$$T_0 = 288$$

$$\lambda = 0,0065$$

$$R = 29,3$$

dan vinden we voor de exponent $\frac{1}{R\lambda} - 1 = 4,253$.

Hieruit zien we dat formule (24) gelijk is aan de theoretisch, voor een veranderlijke temperatuur, afgeleide formule (22).

Tabel VI geeft een overzicht van het verloop van luchtgewicht, druk en temperatuur, als functie van de hoogte, voor de I. C. A. N. standaardatmosfeer.

Tabel VI

Het verloop van luchtgewicht, druk en temperatuur, als functie van de hoogte, voor de I. C. A. N. standaardatmosfeer

Hoogte in km	Luchtgewicht in kg/m ³	Druk		Temperatuur in °C
		in mm kwikdruk	in mil- libar	
0	1,2255	760,00	1013,25	15,00
0,5	1,1677	716,00	954,59	11,75
1	1,1121	674,09	898,70	8,50
1,5	1,0585	634,23	845,60	5,25
2	1,0068	596,21	794,08	2,00
2,5	0,95722	560,11	746,78	- 1,25
3	0,90940	525,79	700,99	- 4,50
3,5	0,86356	493,23	657,60	- 7,75
4	0,81935	462,25	616,28	-11,00
4,5	0,77697	432,90	577,16	-14,25
5	0,73629	405,08	540,07	-17,50
5,5	0,69725	378,73	504,93	-20,75
6	0,65982	353,78	471,67	-24,00
6,5	0,62395	330,18	440,20	-27,25
7	0,58959	307,87	410,46	-30,50
7,5	0,55669	286,80	382,36	-33,75
8	0,52522	266,91	355,84	-37,00
8,5	0,49512	248,15	330,84	-40,25
9	0,46637	230,47	307,27	-43,50
9,5	0,43891	213,83	285,08	-46,75
10	0,41270	198,17	264,21	-50,00
10,5	0,38771	183,46	244,59	-53,25
11	0,36389	169,64	226,17	-56,50

5.9. Het ballistisch luchtgewicht

De schootstafels werden berekend voor een bepaalde standaard-atmosfeer. In het algemeen zal de werkelijke atmosferische toestand hiervan afwijken. We moeten hiervoor dus corrigeren. Hiertoe maken we gebruik van een gewogen gemiddeld luchtgewicht, het z.g. *ballistisch luchtgewicht*. Men verdeelt hiertoe de atmosfeer in horizontale lagen (*zones*). Voor een bepaalde projectielbaan is het culminatiepunt bekend of anders op eenvoudige wijze met de formule van SLADEN uit de vluchttijd te berekenen. We weten dan welke zones het projectiel doorloopt. In het midden van iedere zone wordt het luchtgewicht berekend volgens de standaardatmosfeer. Deze luchtgewichten worden vermenigvuldigd met de gewichtsfactoren, die voor iedere zone zijn vastgesteld, daarna algebraïsch gesommeerd en ten slotte gedeeld door de som van de gewichtsfactoren. We hebben nu het z.g. *normaal ballistisch luchtgewicht* gevonden. Op dezelfde wijze wordt gehandeld met de gemeten luchtgewichten van de dag. We vinden dan het *ballistisch luchtgewicht van de dag*. Het verschil tussen de beide ballistische luchtgewichten geeft ons een maat voor de aan te brengen correcties.

Vroeger werden de gewichtsfactoren berekend uit de tijd, gedurende welke een projectiel zich in de zone bevond. Voor een projectielbaan van landdoelgeschut moeten we dan de partiele vluchttijden voor de stijgende en de dalende tak per zone samentellen.

Voor luchtdoelgeschut hebben we slechts rekening te houden met de partiele vluchttijden van de stijgende tak. Tegenwoordig is men echter afgestapt van de partiele vluchttijden en heeft men andere methoden ontwikkeld om de wegingsfactoren te bepalen.

Wil men de atmosferische correcties bepalen met behulp van de druk op zeeniveau en de temperatuur, in plaats van met behulp van het luchtgewicht, dan moet men de *ballistische temperatuur* in plaats van het ballistisch luchtgewicht berekenen.

De keuze van de hoogtezones is in diverse landen verschillend. In Nederland had men vóór 1940 zones van gelijke dikte van 500 m. In Engeland en Amerika heeft men atmosferische lagen gekozen, die met de hoogte in dikte toenemen. Bij de Britse zones zijn de dikten van de lagen 2000 voet tot een hoogte van 16.000 voet, daarna wordt de dikte 4000 voet. De Amerikaanse zones zijn tegenwoordig in internationaal verband, als z.g. *standaardzones* aangevaard. Deze hebben tot 6000 voet een dikte van 1500 voet, daarna tot 18000 voet een dikte van 3000 voet, terwijl ze daarna met 6000 voet opklimmen.

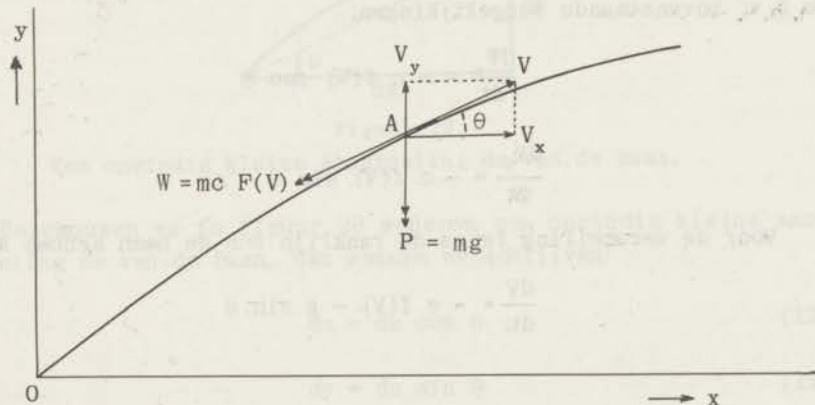
Deze zone-indelingen worden dan gebruikt bij de samenstelling van het militaire weerbericht.

Hoofdstuk 6

AFLEIDING VAN DE EXACTE EN DE BENADERDE BALLISTISCHE HOOFDVERGELIJKING

6.1. Exacte ballistische hoofdvergelijking

Zoals reeds eerder vermeld, zullen we voor de opstelling van de bewegingsvergelijkingen van het projectiel in de atmosfeer, dit als een stoffelijk punt beschouwen, terwijl we verder de beperkende veronderstellingen invoeren, omschreven in hoofdstuk 3.



Figuur 27

Het projectiel, als stoffelijk punt beschouwd, bevindt zich in het punt A van zijn baan. De snelheid V , gericht volgens de raaklijn, maakt een hoek θ met de horizontale richting x . De luchtweerstand W is tegengesteld gericht aan de snelheid V . Het projectielgewicht P is verticaal naar beneden gericht.

In figuur 27 bevindt het projectiel zich in A. De snelheid V en de weerstand W vallen samen met de raaklijn in A, doch zijn tegengesteld gericht. Het projectielgewicht P is gericht evenwijdig aan de y -as. De raaklijn in A sluit een hoek θ in met de horizontaal. We kunnen nu de volgende vergelijkingen opstellen:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V \cos \theta \\ V_y &= V \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = -W \cos \theta \quad (3)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = -W \sin \theta - P \quad (4)$$

$$W = m c f(V) \quad (5)$$

$$p = m g \quad (6)$$

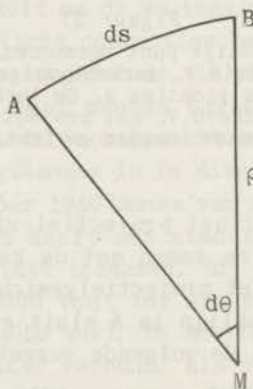
Voor de versnellingen langs de coördinaatassen krijgen we nu m. b. v. bovenstaande vergelijkingen:

$$\frac{dv_x}{dt} = -c f(V) \cos \theta \quad (7)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -c f(V) \sin \theta - g \quad (8)$$

Voor de versnelling langs de raaklijn aan de baan hebben we:

$$\frac{dv}{dt} = -c f(V) - g \sin \theta \quad (9)$$



Figuur 28

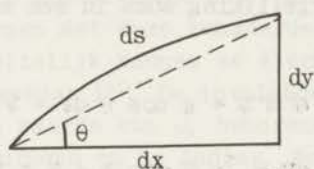
AB is een stukje ds van de projectielbaan. M is het kromtemiddelpunt van de baan en ρ de kromtestraal. De richtingsverandering van de snelheid, als het projectiel van A naar B beweegt is gelijk $d\theta$.

Voor de versnelling langs de normaal van de baan geldt:

$$-g \cos \theta = \frac{v^2}{\rho} \quad (10)$$

Hierin is ρ de kromtestraal van de baan. Beschouwen we in figuur 28 een stukje AB, ter lengte ds van de baan, waarvan het kromtemiddelpunt in M gelegen is, dan zal bij verplaatsing van het stoffelijk punt van A naar B, de raaklijn een richtingsverandering $d\theta$ ondergaan. Hieruit volgt dat $\angle AMB = d\theta$. Bovendien is BM gelijk aan de kromtestraal ρ .

$$\therefore ds = \rho d\theta \quad (11)$$



Figuur 29

Een oneindig kleine aangroeiing ds van de baan.

Beschouwen we in figuur 29 wederom een oneindig kleine aangroeiing ds van de baan, dan kunnen we schrijven:

$$dx = ds \cos \theta \quad (12)$$

$$dy = ds \sin \theta \quad (13)$$

$$\text{Uit (10) en (11) volgt: } \boxed{v^2 d\theta = -g \cos \theta ds} \quad (14)$$

$$\text{Uit (12) en (14) volgt: } \boxed{v^2 d\theta = -g dx} \quad (15)$$

We kunnen nu (14) als volgt veranderen:

$$v^2 \operatorname{tg} \theta d\theta = -g \cos \theta \operatorname{tg} \theta ds = -g \sin \theta ds$$

Met behulp van (13):

$$\boxed{v^2 \operatorname{tg} \theta d\theta = -g dy} \quad (16)$$

$$\text{Eveneens uit (14): } v^2 d\theta = -g \cos \theta \frac{ds}{dt} dt$$

$$\text{en m. b. v. (2): } v^2 d\theta = -g \cos \theta v dt$$

of:

$$V d \theta = - g \cos \theta dt \quad (17)$$

Elimineren we dt uit (7) en (17), dan vinden we:

$$dV_x = - c f(V) \cos \theta \cdot - \frac{V d \theta}{g \cos \theta}$$

of:
$$d(V \cos \theta) = \frac{c f(V) V d \theta}{g}$$

Hieruit volgt de z.g. *ballistische hoofdvergelijking*:

$$g d(V \cos \theta) = c V f(V) d \theta \quad (18)$$

Deze vergelijking is exact.

Men schrijft deze vergelijking soms in een enigszins andere vorm. Uit (18) volgt:

$$- g V \sin \theta d \theta + g \cos \theta dV = V c f(V) d \theta$$

$$g \cos \theta dV = [g V \sin \theta + V c f(V)] d \theta$$

$$\frac{dV}{d \theta} = V \operatorname{tg} \theta + \frac{V c f(V)}{g} \sec \theta$$

6.2. Benaderde ballistische hoofdvergelijking

Bij verschillende ballistische methoden wordt de hoofdvergelijking benaderd, alvorens men tot integratie overgaat. Deze benadering, waarbij we uitgaan van (18), wordt als volgt uitgevoerd:

$$\frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g d(V \cos \theta)}{V \cos \theta c f(V) \cos \theta}$$

$$\frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g d\left(\frac{V \cos \theta}{\sigma}\right)}{\frac{V \cos \theta}{\sigma} c f\left(\frac{V \cos \theta}{\sigma}\right) \{\cos \theta\}}$$

Tot nu toe is de herleiding exact. Een benadering verkrijgt men door voor de volgende cosinuswaarden een constante te nemen:

$$[\cos \theta] = \sigma \quad \text{en} \quad \{\cos \theta\} = \gamma \quad (19)$$

$$\frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g d\left(\frac{V \cos \theta}{\sigma}\right)}{\frac{V \cos \theta}{\sigma} c f\left(\frac{V \cos \theta}{\sigma}\right) \gamma}$$

Noem $\frac{V \cos \theta}{\sigma} = u$, dan wordt de benaderde hoofdvergelijking:

$$\frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g du}{c \gamma u f(u)} \quad (20)$$

Vergelijking (20) is geschikter voor integratie dan (18). In (20) is een splitsing van de beide variabelen u en θ verkregen, terwijl (18) in feite drie variabelen θ , V en $V \cos \theta$ bevat.

6.3. De keuze van de constanten σ en γ

Bij de afleiding van de benaderde hoofdvergelijking hebben we enkele malen een veranderlijke cosinuswaarde vervangen door een constante, een zekere middelwaarde dus. Hieruit volgt dat we geen banen kunnen berekenen met deze benaderde vergelijking, waarin θ veel varieert. Feitelijk kunnen we slechts gaan tot een uitvaartshoek φ van ongeveer 15° . De invalshoek ω is groter, dan de uitvaartshoek φ . De waarde van ω , behorende bij $\varphi = 15^\circ$ is afhankelijk van de vuurmond en de lading. We komen niet hoger dan $\omega = 22^\circ$. Nu is $\cos 15^\circ = 0,97$ en $\cos 22^\circ = 0,93$. Tot uitvaartshoeken van 15° , varieert de cosinus van θ dus tussen 1 en 0,93. Op de benadering t.g.v. een keuze van σ en γ , kunnen we nog weer een correctie toepassen, zodat we met onze uitvaartshoeken tot 45° kunnen gaan. Voor $\varphi = 45^\circ$ ($\cos 45^\circ = 0,71$) is $\omega \cong 60^\circ$ ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$). De cosinus van θ varieert dus in het interval tussen 1 en $\frac{1}{2}$. Op te merken valt, dat in het grootste deel van de baan de cosinus $> 0,71$. Slechts in het allerlaatste stuk van de baan beweegt $\cos \theta$ zich tussen 0,71 en $\frac{1}{2}$. Diverse ballistici hebben in de loop der jaren de benaderde hoofdvergelijking als uitgangspunt voor hun methoden gebruikt, waarbij de keuze van σ en γ verschillend was.

We zullen hieronder een overzicht geven van de keuze van σ en γ , zoals dit in de loop der jaren bij de verschillende ballistische methoden is geschied. Tevens zullen we de bij deze methoden gebruikte luchtweerstandswet vermelden (tabel VII).

Tabel VII

De keuze van de constanten σ en γ

Ballistische methode	Waarden van σ en γ	Bijzonderheden	Luchtweerstandswet
BORDA (1769)	$\sigma = 1$; $\gamma = \frac{1}{\cos \varphi}$		$f(V) = V^2$
DIDION (1848)	$\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$	$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}$; $\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$	$f(V) = V^2 \left(1 + \frac{V}{435}\right)$
DIDION-BERNOULLI	$\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$	α als bij Didion	$f(V) = V^2, V^3, V^4$
SIACCI I (1880)	$\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$	α wordt ingevoerd in de primaire functies (zie later)	$f(V)$ Zonewetten van Mayevski
KRUPP (\pm 1885)	$\sigma = \gamma = 1$		$f(V)$ eigen luchtweerstandswet
SIACCI II (1888)	$\sigma = \cos \varphi$; $\gamma = \beta \cos^2 \varphi$	primaire en secundaire functies	$f(V)$ zonewetten van Siacci
SIACCI III (1896)	$\sigma = \cos \varphi$; $\gamma = \beta \cos^2 \varphi$	$\beta =$ correctiefactor om te kunnen gaan tot uitvaartshoeken van 45°	$f(V)$ eenheidswet van Siacci
VALLIER (1894)	$\sigma = \cos \varphi$; $\gamma = \beta \cos^2 \varphi$		$f(V)$ zonewetten van Chapel-Vallier-Hojel

Hoofdstuk 7

ENIGE ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN DE PROJECTIELBAAN IN DE ATMOSFEER

Alvorens we ons met de verdere integratie van de ballistische hoofdvergelijking zullen bezighouden, willen we eerst enige algemene eigenschappen van de projectielbaan in de atmosfeer afleiden. Deze eigenschappen zijn op eenvoudige wijze te ontleen aan de tot nu toe afgeleide formules. Ze zijn verder onafhankelijk van de aard van het projectiel of van de keuze van de luchtweerstandswet.

We onderscheiden nu de volgende eigenschappen:

7.1. De horizontale component $V \cos \theta$ van de baansnelheid V neemt langs de baan voortdurend af

Bewijs: We gaan uit van de ballistische hoofdvergelijking:

$$g d(V \cos \theta) = -c V f(V) d\theta$$

c , V , $f(V)$ en g zijn voortdurend positief, $d\theta$ is steeds negatief, dus $d(V \cos \theta)$ is steeds negatief, dat wil zeggen $V \cos \theta$ neemt altijd af.

7.2. In twee niveaupunten A_1 en A_2 maakt de baansnelheidsvector hoeken θ_1 en θ_2 met de horizontaal, zodanig dat $\theta_1 < |\theta_2|$

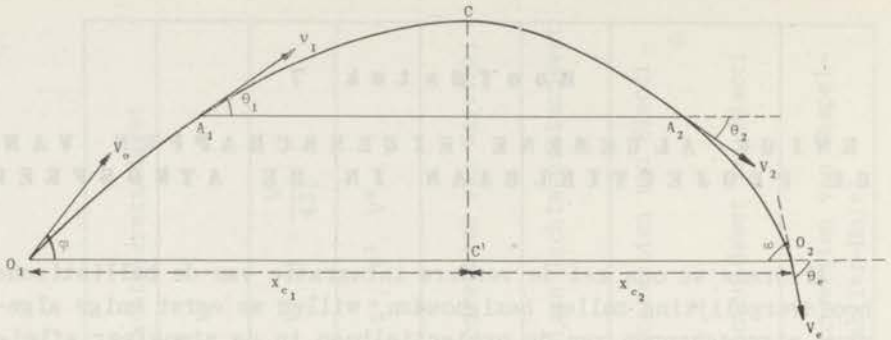
We kiezen in figuur 30 twee niveaupunten A_1 en A_2 , d.w.z. punten die evenver boven het horizontale vlak liggen. We hebben dan de bovengenoemde eigenschap.

Bewijs: Volgens formule (16) van 6.1 is:

$$g dy = V^2 \operatorname{tg} \theta d\theta$$

$$\text{of: } -\frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g dy}{(V \cos \theta)^2} \quad (1)$$

Integreren we deze vergelijking van A_1 tot C:



Figur 30

Een projectielbaan in de atmosfeer met het beginpunt O_1 en het eindpunt O_2 . De punten A_1 en A_2 liggen op een horizontale lijn.

$$\begin{aligned}
 - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\operatorname{tg} \theta \, d\theta}{\cos^2 \theta} &= \int_{y_{A_1}}^{y_c} \frac{g \, dy}{(V \cos \theta)^2} \\
 \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_1 &= \int_{y_{A_1}}^{y_c} \frac{g \, dy}{(V \cos \theta)^2} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Integreren we (1) van C tot A_2 :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\theta}^{\theta_2} \frac{\operatorname{tg} \theta \, d\theta}{\cos^2 \theta} &= \int_{y_c}^{y_{A_2}} \frac{g \, dy}{(V \cos \theta)^2} \\
 \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_2 &= \int_{y_{A_2}}^{y_c} \frac{g \, dy}{(V \cos \theta)^2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Volgens eigenschap 1 zal $V \cos \theta$ voortdurend afnemen, zodat de noemer van het rechterlid van (2) steeds groter is dan de noemer van het rechterlid van (3). Dientengevolge is de integrand van (2) steeds kleiner dan die van (3). Daar de integratiewegen bij beide even groot zijn, zal dus de waarde van de integraal uit (2) steeds kleiner zijn dan die uit (3).

$$\therefore \operatorname{tg}^2 \theta_1 < \operatorname{tg}^2 \theta_2$$

of: $\theta_1 < \theta_2$

Nemen we nu voor de niveaupunten O_1 en O_2 , dan zien we onmiddellijk, dat $\varphi < \omega$. Uit deze eigenschap volgt dus, dat de uitvaartshoek φ steeds kleiner is dan de invalshoek ω .

7.3. In twee niveaupunten A_1 en A_2 , is de snelheidsvector V_1 in A_1 steeds groter dan de snelheidsvector V_2 in A_2

Bewijs: Volgens de wet van levende kracht en arbeid is:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \int k ds$$

Daar A_1 en A_2 even hoog liggen verricht de zwaartekracht in totaal een arbeid = 0. De arbeid van de luchtweerstand is:

$$\int k ds = - \int m c f(V) ds$$

dus: $\frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = - \int m c f(V) ds$

De waarde van het rechterlid is steeds negatief, zodat

$$V_2^2 < V_1^2$$

of: $V_2 < V_1$

7.4. In twee niveaupunten A_1 en A_2 , is de absolute waarde van de verticale snelheidscomponent in A_1 steeds groter dan die in A_2

Bewijs: Uit formule (8) van 6.1 volgt:

$$d(V \sin \theta) = - [g + c f(V) \sin \theta] dt$$

Uit formule (1) van 6.1 volgt:

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \theta$$

dus: $\frac{1}{2} d(V \sin \theta)^2 = - [g + c f(V) \sin \theta] dy$

Geïntegreerd in de stijgende tak van A_1 tot C vinden we:

$$\frac{1}{2} d(V_1 \sin \theta_1)^2 = \int_{y_{A_1}}^{y_c} [g + c f(V) \sin \theta] dy \quad (4)$$

In de dalende tak is $\sin \theta < 0$, in de stijgende tak is $\sin \theta > 0$. Schrijven we in de dalende tak $-\sin \theta$, dan is geïntegreerd in de dalende tak van C tot A_2 :

$$-\frac{1}{2} (V_2 \sin \theta_2)^2 = \int_{y_c}^{y_{A_2}} [g - c f(V) |\sin \theta|] dy$$

of:
$$\frac{1}{2} (V_2 \sin \theta_2)^2 = \int_{y_{A_2}}^{y_c} [g - c f(V) |\sin \theta|] dy \quad (5)$$

Vergelijken we de beide rechterleden van (4) en (5), dan blijkt de integrand van (4) voortdurend een grotere waarde te hebben dan die van (5), zodat we concluderen:

$$V_1 \sin \theta_1 > V_2 |\sin \theta_2|$$

7.5. De x-coördinaat van het culminatiepunt C ligt dichterbij O_2 dan bij O_1

Bewijs: $dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \theta}$.

Integreren we van O_1 tot C, dan is:

$$x_{c_1} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{\operatorname{tg} \theta} \quad (6)$$

Doen we dit eveneens van C tot O_2 , dan volgt:

$$x_{c_2} = \int_{y_c}^0 \frac{dy}{\operatorname{tg} \theta}$$

Nu is $\text{tg } \theta$ in de dalende tak voortdurend negatief, zodat we kunnen schrijven:

$$x_{c_2} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{|\text{tg } \theta|} \quad (7)$$

Nu is steeds $\theta_1 < |\theta_2|$, dus $\text{tg } \theta_1 < |\text{tg } \theta_2|$, zodat de integrand van (6) steeds groter is dan die van (7). Daar bij beide integralen over dezelfde weg wordt geïntegreerd, concluderen we, dat

$$x_{c_1} > x_{c_2}$$

7.6. De vluchttijd voor de stijgende tak is kleiner, dan die voor de dalende tak

Bewijs: Uit formule (1) van 6.1 volgt:

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \theta$$

of:
$$dt = \frac{dy}{V \sin \theta}$$

Geïntegreerd van O_1 tot C vinden we:

$$t_{O_1C} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{V \sin \theta} \quad (8)$$

Eveneens voor de dalende tak:

$$t_{CO_2} = \int_{y_c}^0 \frac{dy}{V \sin \theta}$$

Nu is θ_2 een hoek in het vierde kwadrant, wat tot gevolg heeft, dat $\sin \theta_2$ voortdurend negatief is. We kunnen dus schrijven:

$$t_{CO_2} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{|V \sin \theta|} \quad (9)$$

Nu is $V_1 \sin \theta_1 > |V_2 \sin \theta_2|$, dus de integrand van (8) is kleiner dan die van (9). Daar we over dezelfde weg integreren, is dus:

$$t_{O_1C} < t_{CO_2}$$

7.7. De lengte van de stijgende tak O_1C is groter, dan die van de dalende tak CO_2

Bewijs: $dy = ds \sin \theta$.

Integrerend van O_1 tot C en van C tot O_2 , vinden we achtereenvolgens:

$$S_{O_1C} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{\sin \theta} \quad (10)$$

$$S_{CO_2} = \int_{y_c}^0 \frac{dy}{\sin \theta}$$

Daar $\sin \theta$ in de dalende tak weer voortdurend negatief is, kunnen we voor laatstgenoemde vorm schrijven:

$$S_{CO_2} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{|\sin \theta|} \quad (11)$$

Nu is weer $\theta_1 < |\theta_2|$, dus $\sin \theta_1 < |\sin \theta_2|$ en dus is de integrand van (10) voortdurend groter dan die van (11), zodat we vinden:

$$S_{O_1C} > S_{CO_2}$$

7.8. De hoogte y_c van het culminatiepunt C ligt altijd tussen $\frac{1}{4} X \operatorname{tg} \varphi$ en $\frac{1}{4} X \operatorname{tg} \omega$

Bewijs (zie fig. 31):

Voor de parabolische baan met uitvaarts- en invalshoek φ is:

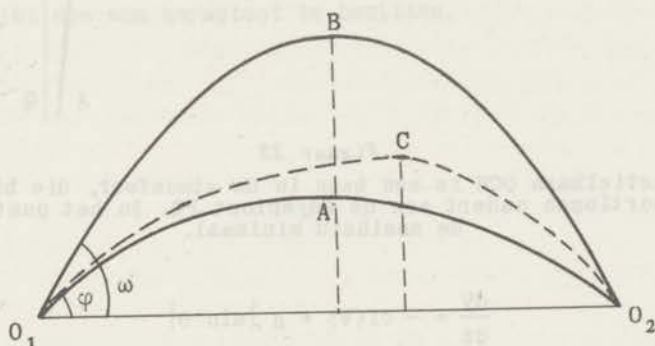
$$X = \frac{V_o^2 \sin 2\varphi}{g} = 2 \frac{V_o^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g}$$

$$y_c = \frac{V_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \varphi$$

Nemen we nu een parabolische baan met uitvaarts- en invalshoek ω en gelijke dracht X , dan is: $y_c = \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \omega$.

De ballistische kromme met uitvaartshoek φ en invalshoek ω ligt daartussen in, zodat voor het culminatiepunt geldt:

$$\frac{1}{4} X \operatorname{tg} \varphi < y_c < \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \omega$$



Figuur 31

O_1AO_2 en O_1BO_2 zijn projectielbanen in het luchtledig met uivaartshoeken resp. φ en ω . O_1CO_2 is een projectielbaan in de atmosfeer met een uitvaartshoek φ en een invalshoek ω .

7.9. Het punt van de minimum snelheid ligt voorbij het culminatiepunt. De oneindig voortlopende baan heeft een asymptoot, terwijl de snelheid dan een limietwaarde bereikt

Beschouwen we in fig. 32 een projectielbaan in de atmosfeer, met in C het culminatiepunt.

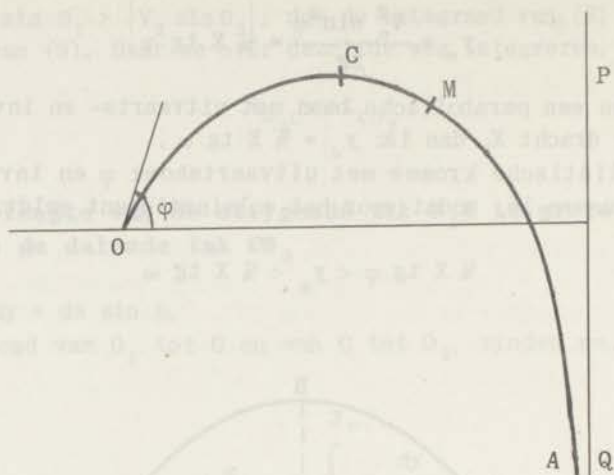
Iets voorbij het culminatiepunt vinden we het punt M, waar de baansnelheid minimaal is.

Daarna neemt de snelheid weer toe. Veronderstellen we dat de baan naar beneden toe oneindig ver doorloopt, dan nadert de snelheid tot een zekere limiet. De dalende tak zelf blijkt dan een asymptoot te bezitten.

Bewijs:

1e. Minimale snelheid in M

In de dalende tak is $\sin \theta$ negatief, dus:



Figuur 32

De projectielbaan OCM is een baan in de atmosfeer, die bij oneindig voortlopen nadert aan de asymptoot PQ. In het punt M is de snelheid minimaal.

$$\frac{dV}{dt} = -c f(V) + g |\sin \theta|$$

Is $\sin \theta$ klein, dan zal $\frac{dV}{dt} < 0$ blijven en de snelheid afnemen.

Neemt $\sin \theta$ toe, dan is er een ogenblik dat: $-c f(V) + g |\sin \theta| = 0$ wordt en de snelheid een minimum bereikt voorbij het culminatiepunt. Daarna wordt $\frac{dV}{dt} > 0$ en neemt de snelheid weer toe.

2e. *Limietwaarde van de snelheid voor een oneindig voortlopende baan*

Voorbij het punt met de minimumsnelheid wordt $\frac{dV}{dt}$ weer positief. Hierdoor neemt V en dus $c f(V)$ toe.

We krijgen zo uiteindelijk een evenwichtstoestand, waarbij $c f(V)$ en $g |\sin \theta|$ elkaar opheffen en $\frac{dV}{dt} = 0$ wordt, zodat de snelheid constant blijft en een zekere limietwaarde bereikt.

3e. *De oneindig voortlopende baan heeft een asymptoot*

Volgens formule (17) van 6.1 is:

$$dt = -\frac{V d\theta}{g \cos \theta} = -\frac{V \cos \theta}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Nu heeft $V \cos \theta$ een eindige waarde, zodat we hiervoor een zekere middelwaarde $[V \cos \theta]_m$ kunnen aannemen.

Dan is

$$\int_0^t dt = - \frac{[V \cos \theta]_m}{g} \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$
$$t = \frac{[V \cos \theta]_m}{g} (-\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \varphi)$$

Voor $t = \infty$ moet het rechterlid ∞ en dus $\operatorname{tg} \theta = -\infty$ worden. Hieruit volgt weer, dat $\theta = -\frac{\pi}{2}$. De oneindig voortlopende projectielbaan blijkt dus een asymptoot te bezitten.

Hoofdstuk 8

DIRECTE INTEGRATIE VAN DE EXACTE BALLISTISCHE HOOFDVERGELIJKING

8.1. Diverse methoden van integratie

In hoofdstuk 6 hebben we de exacte hoofdvergelijking opgesteld en hieruit tevens een benaderde hoofdvergelijking afgeleid, zoals deze algemeen gebruikt werd, in de, tegen het einde van de 19e eeuw, ontwikkelde oplossingsmethoden. Bij deze methoden wordt de benaderde hoofdvergelijking dan geheel exact geïntegreerd. Voordien ging men gewoonlijk uit van de exacte hoofdvergelijking, die werd geïntegreerd, en waarbij gedurende de integratie zekere benaderingen werden toegepast. De moderne Franse methoden gaan weer uit van de exacte hoofdvergelijking, waarbij gebruik gemaakt wordt van reeksen, die worden afgebroken na een aantal termen.

Globaal gezien hebben we dus de volgende manieren, waarop de oplossing van het *uitwendig ballistische hoofdprobleem* kan worden aangepakt:

1e. Uitgaan van de exacte hoofdvergelijking. Deze integreren, waarbij gedurende de integratie bepaalde benaderingen worden toegepast.

2e. De benaderde hoofdvergelijking afleiden uit de exacte, waarna de benaderde vergelijking geheel exact wordt geïntegreerd.

3e. Als uitgangspunt kiezen we de reeksontwikkeling van Mc LAURIN voor de baanvergelijking, waarna door herhaalde differentiatie van deze reeks de benodigde vergelijkingen worden verkregen.

4e. Zoals de moderne Franse methoden doen, uitgaan van de exacte hoofdvergelijking en deze verder verwerken met behulp van reeksen, die worden afgebroken na een aantal termen.

5e. Direct uitgaan van de oorspronkelijke differentiaalvergelijkingen, waarbij de mathematische behandeling vrij eenvoudig blijft.

Vóór 1940 geschieden de noodzakelijke berekeningen voor het bepalen van projectielbanen aanvankelijk met behulp van logaritentafels. Daarna ging men over tot handrekenmachines, die later weer werden vervangen door elektrische tafelrekenmachines. Werd door deze verbeteringen het rekenwerk reeds aanmerkelijk versneld, het bleef toch nog altijd zo, dat aan de hand van reken-

schema's een enorme hoeveelheid rekenwerk moest worden verzet om een schootstafel samen te stellen. Speciaal kwam dit naar voren, toen in de eerste wereldoorlog het luchtdoelgeschut werd ontwikkeld en, zoals gebruikelijk is, de banen hiervan in gedeelten (z.g. vakken) werden berekend. Als eerste eis voor een ballistische methode wordt dus gesteld, dat de mathematische opzet zodanig is, dat het rekenwerk zo veel mogelijk beperkt wordt. Hierdoor wordt de mathematische behandeling vaak zeer gecompliceerd, mede als gevolg van de voorwaarde, dat herhaalde berekening van een baanvak zoveel mogelijk moet worden vermeden. Als tweede eis geldt, dat het rekenwerk aan de hand van schema's eenvoudig is, zodat na enige oefening dit vlot kan geschieden en mensen zonder speciale wiskundige scholing dit kunnen uitvoeren. Een belangrijke derde eis is nog dat tabellen zijn samengesteld, die bij de methode behoren, zodat de ballistische functies eenvoudig zijn af te lezen.

Door de invoering van de electronische rekenmachines in de tweede wereldoorlog zijn de eerste twee eisen vervallen. De electronische machine werkt zo snel, dat beperking van het rekenwerk geen primaire eis meer is en dat zonder bezwaar voor een baanvak herhaalde, benaderende berekeningen kunnen worden uitgevoerd. Een gevolg hiervan is de opkomst van de ballistische methoden, genoemd onder 5e.

8.2. Enkele oudere ballistische methoden

We zullen nu verder in dit hoofdstuk zeer kort twee der oudere methoden vermelden, die een directe integratie van de exacte hoofdvergelijking toepassen (geval, genoemd onder 1^e).

8.2.1. De methode Euler-Otto (Otto-Lardillon)

EULER heeft in 1753 deze methode wiskundig ontwikkeld, waarna OTTO in 1842 tabellen heeft samengesteld. Enkele jaren later heeft LARDILLON deze tabellen uitgebreid en ze in een handiger vorm gebracht. De methode is tegenwoordig meestal bekend onder de naam OTTO-LARDILLON. We kiezen als vertraging van de luchtweerstand:

$$c f(V) = cV^2 .$$

Zoals uit het voorgaande blijkt (o.a. de zonewetten van MAYEVSKI) is bij een constant houden van de ballistische coëfficiënt c deze methode slechts geldig tot $V = 240$ m/sec. Als onaf-

hankelijk veranderlijke wordt gekozen de θ . De baan wordt beschouwd als een veelhoek, waarbij uitgaande van het culminatiepunt steeds een zijde van de veelhoek als Δs wordt berekend. Hierna zijn Δx , Δy en Δt te vinden. Door sommatie worden gevonden s , x , y en t . Voor de berekening van mortierbanen wordt deze methode nog wel eens toegepast.

De formule voor de ballistische coëfficiënt luidt hier:

$$c = ki \frac{\pi R^2}{P} g \frac{\delta}{\delta_0}$$

$k = 0,0140$

$\delta_0 = 1,206 \text{ kg/m}^3$

$i = 1$ voor een kopstraal van 2 kaliber van het ogief.

8.2.2. De methode van Bashforth

Deze Engelse methode lijkt wel op de voorgaande, alleen wordt hier voor de vertraging van de luchtweerstand geschreven:

$$c f(V) = c V^3 .$$

Ook voor deze methode werden tabellen samengesteld.

H o o f d s t u k 9

D E I N T E G R A T I E V A N D E B E N A D E R D E B A L L I S T I S C H E H O O F D V E R G E L I J K I N G

9.1. De formules voor x, t en y

We hebben de benaderde hoofdvergelijking afgeleid in formule (20) van 6.2. Deze luidt:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g du}{c \gamma u f(u)} \quad (1)$$

waarin

$$u = \frac{V \cos \theta}{\sigma} \quad (2)$$

We gaan nu de integratie uitvoeren volgens het systeem, genoemd in hoofdstuk 8 onder 2e. Integreren we (1) van de oorsprong tot een willekeurig punt van de baan, dan krijgen we:

$$\int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g}{c\gamma} \int_{u_0}^u \frac{du}{u f(u)} \quad (3)$$

waarbij

$$u_0 = \frac{V_0 \cos \varphi}{\sigma} \quad (4)$$

Noem:

$$J(u) = -2g \int \frac{du}{u f(u)} \quad (5)$$

dan is:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\gamma} [J(u) - J(u_0)] \quad (6)$$

Uit formule (15) van 6.1 volgt:

$$dx = -\frac{V^2 d\theta}{g} = -\frac{V^2 \cos^2 \theta}{\sigma^2} d\theta \sigma^2 = -\frac{u^2 \sigma^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Met behulp van (1):

$$dx = -\frac{u^2 \sigma^2}{g} \frac{g du}{c \gamma u f(u)} = \frac{-\sigma^2 u du}{c \gamma f(u)} \quad (7)$$

$$\int_0^x dx = \frac{-\sigma^2}{c \gamma} \int_{u_0}^u \frac{u du}{f(u)}$$

Noem nu:

$$D(u) = - \int \frac{u du}{f(u)} \quad (8)$$

$$\therefore x = \frac{\sigma^2}{c \gamma} [D(u) - D(u_0)] \quad (9)$$

Uit formule (17) van 6.1 volgt:

$$dt = \frac{-V d \theta}{g \cos \theta} = - \frac{\frac{V \cos \theta}{\sigma} d \theta \sigma}{g \cos^2 \theta} = - \frac{u \sigma}{g} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta}$$

en met behulp van (1):

$$dt = - \frac{u \sigma}{g} \frac{g du}{c \gamma u f(u)} = - \frac{\sigma}{c \gamma} \frac{du}{f(u)}$$

$$\int_0^t dt = - \frac{\sigma}{c \gamma} \int_{u_0}^u \frac{du}{f(u)}$$

Noem:

$$T(u) = - \int \frac{du}{f(u)} \quad (10)$$

$$\therefore t = \frac{\sigma}{c \gamma} [T(u) - T(u_0)] \quad (11)$$

Formule (16) van 6.1 geeft ons:

$$V^2 \operatorname{tg} \theta d \theta = - g dy$$

Zouden we hier dezelfde integratiemethode volgen als boven, dan levert ons dit moeilijkheden op in verband met de $\operatorname{tg} \theta$. We leiden daarom de dy af uit de dx .

$$dy = \operatorname{tg} \theta dx$$

We vinden m. b. v. (6):

$$dy = \operatorname{tg} \theta dx = \frac{1}{2c \gamma} [J(u) - J(u_0)] dx$$

De laatste term wordt in twee delen gesplitst, die een verschillende herleiding ondergaan, daar $J(u_0)$ constant en $J(u)$ van x afhankelijk is en dus mede geïntegreerd moet worden.

$$dy = \operatorname{tg} \varphi dx - \frac{1}{2c \gamma} J(u) dx + \frac{1}{2c \gamma} J(u_0) dx$$

Met behulp van (7):

$$dy = \operatorname{tg} \varphi dx - \frac{1}{2c \gamma} J(u) - \frac{\sigma^2 u du}{\gamma c f(u)} + \frac{1}{2c \gamma} J(u_0) dx$$

$$dy = \operatorname{tg} \varphi dx + \frac{\sigma^2 u J(u) du}{2c^2 \gamma^2 f(u)} + \frac{1}{2c \gamma} J(u_0) dx$$

Geïntegreerd vinden we:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sigma^2}{2c^2 \gamma^2} \int_{u_0}^u \frac{u J(u) du}{f(u)} + \frac{1}{2c \gamma} J(u_0) x \quad (12)$$

Stellen we nu:

$$A(u) = - \int \frac{u J(u) du}{f(u)} \quad (13)$$

Lossen we tevens uit (9) op:

$$\frac{\sigma^2}{c \gamma} = \frac{x}{D(u) - D(u_0)}$$

en substitueren we dat in (12), dan krijgen we:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2c \gamma} \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} + \frac{1}{2c \gamma} J(u_0) x$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2c \gamma} \left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \right] \quad (14)$$

Bij bovenstaande afleidingen werd dus aangenomen dat men voor c een constante middelwaarde kan gebruiken. Evenzo voor i .

De functies $D(u)$, $T(u)$, $J(u)$ en $A(u)$ zijn de z.g. *primaire functies van Siacci*.

Voor $f(u) = u^n$ kunnen deze functies eenvoudig geïntegreerd worden, voor een meer ingewikkelde voorstelling van $f(u)$ wordt dit gecompliceerder.

9.2. De methode Didion (1848)

DIDION kiest $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$, dus volgens (2): $u = \alpha V \cos \theta$. De luchtweerstandsfunctie schrijft hij als volgt:

$$f(V) = V^2 \left(1 + \frac{V}{435} \right) .$$

Voor α neemt DIDION een zekere theoretische waarde, ten doel hebbende om de toegepaste benaderingen zoveel mogelijk op te heffen. Deze blijkt voor de kwadratische luchtweerstandswet gelijk te zijn aan de later door SIACCI in zijn derde methode in te voeren β (z.g. Ausgleichfaktor). In zoverre wijkt DIDION van de algemene oplossingsmethode af, doordat hij x als onafhankelijk veranderlijke aanneemt. De aangenomen luchtweerstandswet is zodanig, dat alle integraties kunnen worden uitgevoerd en zonder gebruik te maken van de primaire functies, alle grootheden in de vorm van formules kunnen worden gebracht. DIDION heeft een tabel gemaakt voor de in deze formules voorkomende e-machten (CRANZ I, tabel 5).

9.3. De methode Didion-Bernoulli

Uit de literatuur blijkt, dat de Amerikanen deze methode in het begin van de tweede wereldoorlog nog wel gebruikten. Omstreeks 1920 werd de methode DIDION-BERNOULLI toegepast bij de Commissie van Proefneming.

Wederom is $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ dus $u = \alpha V \cos \theta$. Voor de luchtweerstand: $cf(V) = cV^n$. De α is dezelfde als bij DIDION, x wederom de onafhankelijk veranderlijke. Voor de in de formules optredende e-machten kan men wederom tabel 5 van CRANZ I gebruiken.

Gewoonlijk wordt voor $n = 2, 3$ of 4 gekozen.

9.4. De methoden Siacci I en Siacci II

In 1880 publiceerde SIACCI zijn eerste methode, waarbij gekozen werd: $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ en $u = \alpha V \cos \theta$.

Deze waarden worden ingevoerd in de vergelijkingen (6), (9), (11) en (14). Bij deze methode worden dus uitsluitend de primaire functies gebruikt. Voor de luchtweerstand wordt gebruik gemaakt van de zonewetten van MAYEVSKI.

Men is vrij in de keuze van de bij de integratie der primaire functies ontstane integratieconstanten, daar de functies in de formules steeds als verschillen optreden, bijv. $D(u) - D(u_0)$. De integratieconstanten worden nu zodanig gekozen, dat bij de grenzen dezer zones, waar immers de weerstandsgraad verandert, geen sprongen in de waarden van de luchtweerstand optreden.

Door deze keuze wordt voorkomen, dat bij de grenzen van de zones voor een bepaalde u -waarde twee functiewaarden voorkomen. De waarden in de tabellen sluiten dus aan. Bij de punten van aansluiting is een knik aanwezig, zodat dus de functies wel een discontinuïteit vertonen.

In 1888 verscheen een tweede methode van SIACCI, waarbij andere zonewetten werden gebruikt (zie 4.2.4.3.b.) en zg. *secondaire functies* werden ingevoerd. Voor σ en γ werden andere waarden gekozen en wel dezelfde, die hij bij zijn derde methode gebruikt.

In 1888 verscheen een tweede methode van SIACCI, waarbij andere zonewetten werden gebruikt (zie 4.2.4.3.b.) en zg. *secondaire functies* werden ingevoerd. Voor σ en γ werden andere waarden gekozen en wel dezelfde, die hij bij zijn derde methode gebruikt.

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Deze vergelijking kan worden herschreven in de vorm van een Bernoulli-vergelijking. Door de substitutie $v = \frac{1}{u}$ wordt de vergelijking lineair. De oplossing is dan $v = \frac{1}{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + C \right)$, waarbij C een willekeurige constante is.

$$(2) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

Deze vergelijking kan worden herschreven in de vorm van een Bernoulli-vergelijking. Door de substitutie $v = \frac{1}{u}$ wordt de vergelijking lineair. De oplossing is dan $v = \frac{1}{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + C \right)$, waarbij C een willekeurige constante is.

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

$$(7) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

Hoofdstuk 10

DE METHODE SIACCI III (SIACCI - FASELLA)

10.1. De formules voor een willekeurig punt van de baan

In 1896 maakte SIACCI een derde methode openbaar. Door FASELLA werden bij deze methode tabellen samengesteld, die in 1901 werden gepubliceerd. Vandaar dat deze methode nogal eens wordt aangeduid als de *methode Siacci-Fasella*.

De formules van de methode SIACCI III worden gevonden, door die uit hoofdstuk 9 te herleiden. De integratiemethode berust dus op het systeem van hoofdstuk 8, vermeld onder 2e.

SIACCI stelt:

$$\sigma = \cos \varphi \quad \text{en} \quad \gamma = \beta \cos^2 \varphi \quad (1)$$

We gaan dit nu invoeren in de vergelijkingen (2), (4), (6), (9), (11) en (14) van hoofdstuk 9 en vinden dan achtereenvolgens:

$$u = \frac{V \cos \theta}{\sigma} = \frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \quad (2)$$

$$u_0 = \frac{V_0 \cos \varphi}{\sigma} = \frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \varphi} = V_0 \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c \gamma} [J(u) - J(u_0)]$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c \beta \cos^2 \varphi} [J(u) - J(u_0)] \quad (4)$$

$$x = \frac{\sigma^2}{c \gamma} [D(u) - D(u_0)] = \frac{1}{c \beta} [D(u) - D(u_0)] \quad (5)$$

$$t = \frac{\sigma}{c \gamma} [T(u) - T(u_0)] = \frac{1}{c \beta \cos \varphi} [T(u) - T(u_0)] \quad (6)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2c \gamma} \left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \right]$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2 c \beta \cos^2 \varphi} \left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \right] \quad (7)$$

SIACCI noemt nu:

$$f_0(x) = D(u) - D(u_0)$$

$$f_4(x) = J(u) - J(u_0)$$

$$f(x) = \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0)$$

$$f_3(x) = T(u) - T(u_0)$$

Verder voert hij z.g. *secundaire functies* in:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{f_0(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{f_4(x)}{f(x)} - 1$$

SIACCI schrijft verder $\frac{1}{c \beta} = c'$.

c' noemen we de gereduceerde ballistische coëfficiënt.

De vergelijkingen (4) t/m (7) krijgen nu de volgende vorm:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} f_4(x) \quad (8)$$

$$x = c' f_0(x) \quad (9)$$

$$t = \frac{c'}{\cos \varphi} f_3(x) \quad (10)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x c'}{2 \cos^2 \varphi} f(x) \quad (11)$$

Deze vergelijkingen gelden dus voor een willekeurig punt van de baan. Uit de vergelijkingen (8) en (11) en door te stellen:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$$

vinden we:

$$\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta = \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} f_4(x)$$

$$\operatorname{tg} \varphi - \frac{y}{x} = \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} f(x)$$

Delen we beide bovenstaande vergelijkingen op elkaar, dan volgt:

$$\frac{f_4(x)}{f(x)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varepsilon}$$

$$\frac{f_4(x)}{f(x)} - 1 = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varepsilon} = f_2(x) \quad (12)$$

10.2. De formules voor het eindpunt van de baan

We gaan nu de formules afleiden, die voor het *eindpunt van de baan* gelden. Voor dit eindpunt kunnen we stellen:

$$y = 0, \quad x = X, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = 0, \quad \theta = -\omega \quad \text{en} \quad V = V_e$$

uit (9):

$$f_0(X) = \frac{X}{c'} \quad (13)$$

Uit (11):

$$0 = X \operatorname{tg} \varphi - \frac{X c'}{2 \cos^2 \varphi} f(X)$$

$$\therefore f(X) = \frac{\sin 2\varphi}{c'} \quad (14)$$

En door deling van (13) en (14) op elkaar, vinden we:

$$f_1(X) = \frac{f(X)}{f_0(X)} = \frac{\sin 2\varphi}{X} \quad (15)$$

De secundaire functie f_1 wordt dus uitsluitend gebruikt voor het eindpunt van de baan.

De vergelijkingen (2), (10) en (12) worden voor het *eindpunt van de baan*:

$$V_e = \frac{u \cos \varphi}{\cos \omega} \quad (16)$$

$$T = \frac{c'}{\cos \varphi} f_3(X) \quad (17)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi} = f_2(X) \quad (18)$$

10.3. De formules voor het culminatiepunt

Ter bepaling van de *coördinaten van het culminatiepunt* schrijven we de vergelijkingen (8) en (11) in de vorm:

$$y_c = x_c \operatorname{tg} \varphi \left[1 - \frac{c'}{\sin 2 \varphi} f(x_c) \right] = x_c \operatorname{tg} \varphi \left[1 - \frac{f(x_c)}{f(X)} \right] \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi \left[1 - \frac{c'}{\sin 2 \varphi} f_4(x_c) \right] = \operatorname{tg} \varphi \left[1 - \frac{f_4(x_c)}{f(X)} \right] \quad (20)$$

Voor het culminatiepunt is $\theta = 0$, dus uit (20):

$$f_4(x_c) = f(X) \quad (21)$$

Heeft men $f(X)$, dus $f_4(x_c)$ gevonden, dan kan men in tabel VI, bij de gegeven V_0 en de gevonden $f_4(x_c)$ een waarde van $f_0(x_c)$ bepalen. We vinden dan voor het culminatiepunt:

$$x_c = f_0(x_c) c' \quad (22)$$

Men bepaalt daarna met de gegeven V_0 en de gevonden $f_0(x_c)$ uit de tabellen van FASELLA de waarde van $f(x_c)$, waarna de y_c gevonden wordt uit (19).

Er zijn speciale tabellen berekend ter bepaling van de coördinaten van het culminatiepunt. Stelt men in dit punt $u = u_c$, dan volgt uit (5):

$$x_c = c' [D(u_c) - D(u_0)]$$

$$\left[\frac{x_c}{X} \right] = \frac{c'}{X} [D(u_c) - D(u_0)] = \left[f_5 \right] \quad (23)$$

Verder volgt uit (4), door bij het culminatiepunt $\theta = 0$ te stellen:

$$\frac{\sin 2 \varphi}{c'} = J(u_c) - J(u_0) \quad (24)$$

Hierna volgt uit (7):

$$y_c = x_c \operatorname{tg} \varphi - \frac{x_c c'}{2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{A(u_c) - A(u_0)}{D(u_c) - D(u_0)} - J(u_0) \right] =$$

$$= \frac{x_c c'}{2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{\sin 2 \varphi}{c'} + J(u_0) - \frac{A(u_c) - A(u_0)}{D(u_c) - D(u_0)} \right]$$

en met behulp van (24):

$$y_c = \frac{c' x_c}{2 \cos^2 \varphi} \left[J(u_c) - \frac{A(u_c) - A(u_0)}{D(u_c) - D(u_0)} \right]$$

Stel nu:

$$f_6 = \frac{y_c}{X \operatorname{tg} \varphi} = \frac{x_c}{X} \frac{c'}{\sin 2 \varphi} \left[J(u_c) - \frac{A(u_c) - A(u_o)}{D(u_c) - D(u_o)} \right] \quad (25)$$

Deze functies f_5 en f_6 zijn speciale functies, die door FASELLA in tabelvorm zijn gebracht en die dus uitsluitend geldig zijn voor de berekening van de coördinaten van het culminatiepunt.

10.4. De correctiefactor

Van groot belang bij deze methode is de correctiefactor β , die de onnauwkeurigheden, ontstaan door de toegepaste benaderingen, zoveel mogelijk moet opheffen.

De methoden, die berusten op de benaderde hoofdvergelijking, waarbij in de baan veranderlijke cosinuswaarden worden vervangen door constanten, zijn feitelijk slechts te gebruiken tot uitvaartshoeken van ongeveer 15° . Het gebruik van de correctiefactor β geeft ons echter de mogelijkheid om de geldigheid dezer methoden uit te breiden tot uitvaartshoeken van ongeveer 45° . SIACCI heeft van deze mogelijkheid gebruik gemaakt en gaat als volgt te werk:

De exacte hoofdvergelijking luidt:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g d (V \cos \theta)}{V \cos \theta c_y f(V) \cos \theta} \quad (26)$$

waarbij c_y de c -waarde op hoogte y is.

SIACCI III schrijft de hoofdvergelijking als volgt:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g d \left(\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right)}{\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} c_o f \left(\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right) \beta \cos^2 \varphi} \quad (27)$$

waarbij c_o de c -waarde op zeeniveau voorstelt.

SIACCI gebruikt nl. in de gehele baan een constante c -waarde, die gelijk aan c_o wordt genomen. De β geeft hierop een correctie, die afhankelijk is van dracht en elevatie. Stellen we (26) gelijk aan (27), dan volgt:

$$\frac{g d (V \cos \theta)}{V \cos \theta c_y f(V) \cos \theta} = \frac{g d \left(\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right)}{\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} c_o f \left(\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right) \beta \cos^2 \varphi}$$

$$\text{of:} \quad c_y f(V) \cos \theta = c_o f \left[\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right] \beta \cos^2 \varphi$$

$$\beta = \frac{c_y}{c_o} \frac{f(V) \cos \theta}{f \left(\frac{V \cos \theta}{\cos \varphi} \right) \cos^2 \varphi} \quad (28)$$

Voor vlakke banen verschilt β weinig van 1. Na een omvangrijke herleiding, waarbij enkele vereenvoudigingen worden toegepast, vindt men een formule voor een middelwaarde β_m van β . Met behulp hiervan werd een tabel samengesteld voor φ tot 45° en X tot 20 km. De β blijkt te variëren tussen 0,77 en 1,18 (CRANZ I, tabel II, slot). Verder is deze β -waarde in de vorm van een diagram berekend (CRANZ I, diagram 6).

10.5. Enkele opmerkingen over de gereduceerde ballistische coefficient

We schreven voor de ballistische coefficient (4.1, form. 2):

$$c = k i \frac{\pi R^2}{P} g \frac{\delta}{\delta_o}$$

In de tijd van SIACCI gebruikte men z. g. *normaal-projectielen*, dat waren projectielen, waarvan de kromtestraal van het ogief twee kaliber bedroeg. Men richtte de methoden zo in, dat voor het normaalprojectiel een waarde $i = 1$ kon worden gekozen. Voor afwijkende projectielvormen had i dan een andere waarde. SIACCI hield zich aan dit gebruik, doch het bleek hem, dat dan voor een normaalprojectiel k de waarde 0,896 moest aannemen. Volgens CRANZ zou nog beter zijn $k = 0,865$.

SIACCI schrijft nu voor zijn ballistische coefficient:

$$c = \frac{D^2 \delta 1000 i \cdot 0,896}{P \cdot 1,206} \quad (29)$$

Hieruit volgt voor de gereduceerde ballistische coefficient c'

$$c' = \frac{1}{c \beta} = \frac{1,206 \cdot P}{D^2 \delta 1000 i \cdot 0,896 \beta} \quad (30)$$

Uit de inleiding van het *tabellenboek van Fasella* blijkt dat deze aanneemt:

$$c_f = \frac{P}{1000 D^2}$$

en

$$c'_f = \frac{c_f}{\delta_f i \beta}$$

In deze laatste formule heeft δ_f de betekenis van de verhou-

ding van het luchtgewicht ter plaatse tot het luchtgewicht op zeeniveau, dus:

$$\delta_f = \frac{\delta}{1,206}$$

We vinden dus:

$$c'_f = \frac{c_f}{\delta_f i \beta} = \frac{1,206 P}{1000 D^2 \delta i \beta} \quad (31)$$

We zien dus, dat (30) en (31), afgezien van de constante 0,896, aan elkaar gelijk zijn. De i -waarde in formule (31) voor de gereduceerde ballistische coëfficiënt van FASELLA, moet dus enigszins anders gekozen worden en wel voor een normaalprojectiel $i = 0,896$.

10.6. De tabellen van Siacci-Fasella

Op basis van de eenheidswet van SIACCI voor de luchtweerstand (4.2.4.4a), die geldt tot $V = 1200$ m/sec, werden door SIACCI in 1896 tabellen voor de primaire functies samengesteld, die later door FASELLA werden uitgebreid tot de secundaire functies (1901).

De titel dezer tabellen luidt:

Tavole balistiche secondarie - ETTORE FASELLA.

Deze tabellen zijn geconstrueerd met dubbele ingang, naar de argumenten f_0 en V_0 waaruit dan de u , f , f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 en f_6 zijn af te lezen.

De V_0 klimt van 160 m/sec tot 1000 m/sec op met 10 m/sec en van 1000 m/sec tot en met 1500 m/sec op met 100 m/sec.

De f_0 varieert van 0 tot 10.000, opklimmend met 100.

Zijn uit schietproeven de gegevens: φ , X en V_0 bekend, dan bepaalt men volgens (15):

$$f_1(X) = \frac{\sin 2 \varphi}{X}$$

In de tabel voor f_1 zoeken we nu in de kolom voor V_0 de waarde van f_1 op en bepalen f_0 .

Met behulp van (13) vinden we nu c' . De andere f -waarden kunnen daarna in de diverse tabellen worden opgezocht.

Willen we een ordinaat bepalen bij een willekeurige abcis x , dan bepalen we $f_0(x) = \frac{x}{c'}$, zoeken daarbij op een $f(x)$ en substitueren deze in (11), waarna de ordinaat wordt berekend.

Voor het culminatiepunt gebruiken we (21), waarna bij V_0 en

$f_4(x_c)$ een $f_0(x_c)$ wordt gevonden. Vervolgens bepalen we $f(x_c)$, waarna (19) de ordinaat van het culminatiepunt levert.

Op te merken valt, dat voor een bepaalde baan een c' wordt gezocht, die voor de gehele baan constant blijft. De f_0 -waarde is echter afhankelijk van het punt in de baan, dat men beschouwt. Voor eind- en culminatiepunt en voor willekeurige punten in de baan, moeten we dus steeds een andere f_0 -waarde bepalen. Op te merken valt echter, dat bij het gebruik van de formules (23) en (25) ter bepaling van de coördinaten van het culminatiepunt, we hier de waarde $f_0(X)$ voor het eindpunt van de baan moeten aanhouden.

De afgeleide van f_0 naar x is

$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dx}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dx}$$

De afgeleide van f_0 naar t is

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dt}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dt}$$

(1)
$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dx}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dx}$$

De afgeleide van f_0 naar t is

(2)
$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dt}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dt}$$

De afgeleide van f_0 naar x is

(3)
$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dx}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dx}$$

De afgeleide van f_0 naar t is

(4)
$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dt}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dt}$$

De afgeleide van f_0 naar x is

(5)
$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dx}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dx}$$

De afgeleide van f_0 naar t is

(6)
$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{g} \right) = \frac{1}{2} \frac{2v \frac{dv}{dt}}{g} = \frac{v}{g} \frac{dv}{dt}$$

H o o f d s t u k 11

DE OPLOSSING VAN HET BALLISTISCHE HOOFDPROBLEEM DOOR REEKSONTWIKKELING VAN MC LAURIN

11.1. Formules voor y , θ , V en t

We zullen nu de theorie behandelen van de oplossing van het ballistische hoofdprobleem, zoals genoemd in hoofdstuk 8, punt 3, waarbij we uitgaan van een reeksontwikkeling volgens MC LAURIN.

Hebben we een functie $F(x)$, die in het interval $(0, x)$ eindig en eenduidig is en continu verloopt, terwijl de differentiaalquotienten van hogere orde alle bestaanbaar zijn en de restterm met toenemende n tot nul nadert, dan kunnen we de reeksontwikkeling van MC LAURIN toepassen.

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \frac{x^3}{3!} F'''(0) + \dots \quad (1)$$

We willen (1) gebruiken om de baanvergelijking van het projectiel op te stellen, zodat:

$$F(x) = y \quad (2)$$

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \quad (3)$$

$$F''(x) = \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

Nu is: $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{g}{V^2}$ (formule (15), 6.1.)

dus: $F''(x) = -\frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} \quad (5)$

$$\begin{aligned} F'''(x) &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} \right) = -g \frac{d}{dx} (V^2 \cos^2 \theta)^{-1} = \\ &= g \frac{2 V \cos \theta d(V \cos \theta)}{V^4 \cos^4 \theta dx} = \frac{2 g V \cos \theta d(V \cos \theta) d\theta}{V^4 \cos^4 \theta d\theta dx} \end{aligned}$$

Volgens formule (18) van 6.1 is:

$$\frac{d(V \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c V f(V)}{g}$$

dus:
$$F'''(x) = -\frac{2 g V \cos \theta c V f(V) g}{V^4 \cos^4 \theta} \frac{g}{V^2}$$

$$F'''(x) = -\frac{2 g c f(V) \cos \theta}{(V \cos \theta)^4} \quad (6)$$

Stellen we in (2) t/m (6) de $x = 0$, dan krijgen we:

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = \operatorname{tg} \varphi, \quad F''(0) = -\frac{g}{V_0^2 \cos^2 \varphi},$$

$$F'''(0) = -\frac{2 g c f(V_0)}{V_0^4 \cos^3 \varphi}$$

Deze waarden invoerende in (1), vinden we voor de *baanvergelijking*:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \varphi} - \frac{g c f(V_0) x^3}{3 V_0^4 \cos^3 \varphi} + \text{rest} \quad (7)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{2 c f(V_0) x}{3 V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right] \quad (8)$$

Om de *vergelijking voor θ* te vinden moeten we (7) differentieren naar x :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2 \varphi} - \frac{g c f(V_0) x^2}{V_0^4 \cos^3 \varphi} + \text{rest} \quad (9)$$

De *vergelijking voor de snelheid V* kunnen we vinden door (9) te differentieren naar x . Uit (4) en (5) volgt:

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \theta) = -\frac{g}{V^2 \cos^2 \theta}$$

We vinden door differentiatie van (9):

$$-\frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} = -\frac{g}{V_0^2 \cos^2 \varphi} - \frac{2 g c f(V_0) x}{V_0^4 \cos^3 \varphi} + \text{rest}$$

$$\frac{1}{V \cos \theta} = \frac{1}{V_0 \cos \varphi} \left[1 + \frac{2 c f(V_0) x}{V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

of:
$$V \cos \theta = V_0 \cos \varphi \left[1 + \frac{2 c f(V_0) x}{V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Met de reeksontwikkeling van NEWTON:

$$V \cos \theta = V_0 \cos \varphi \left[1 - \frac{c f(V_0) x}{V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right] \quad (11)$$

De vergelijking voor de horizontale snelheidscomponent luidt:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V \cos \theta$$

$$dt = \frac{dx}{V \cos \theta}$$

en m. b. v. (10): $dt = \frac{dx}{V_0 \cos \varphi} \left[1 + \frac{2 c f(V_0) x}{V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$dt = \frac{dx}{V_0 \cos \varphi} \left[1 + \frac{c f(V_0) x}{V_0^2 \cos \varphi} + \text{rest} \right]$$

Door integratie vinden we de *vergelijking voor de vluchttijd*:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \varphi} + \frac{c f(V_0) x^2}{2 V_0^3 \cos^2 \varphi} + \text{rest} \quad (12)$$

Zijn de uitvaartshoek φ en de aanvangssnelheid V_0 gegeven, dan levert ons (7) voor een gegeven abscis x de ordinaat y van een punt uit de baan.

Vergelijking (9) levert ons de hoek θ voor een willekeurig punt van de baan, terwijl we voor het eindpunt van de baan, dus voor $x = X$, hieruit de invalshoek ω vinden ($\omega = -\theta_e$). Uit (11) leiden we de snelheid V in een punt van de baan af en voor $x = X$ en $\theta = -\omega$, de eindsnelheid V_e . Tenslotte geeft (12) de vluchttijd t en voor $x = X$ de totale vluchttijd T voor de gehele baan.

Er zijn twee ballistische methoden van enig belang, waarbij deze wijze van oplossen van het ballistische hoofdprobleem als basis is gekozen, nl. de methoden PITON-BRESSANT en DUCHÊNE.

11.2. De methode Piton-Bressant

Vergelijking (8) wordt hier geschreven in de vorm:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \varphi} [1 + k x]$$

Hierin is k een constante, die bepaald kan worden door één waarnemingspunt. Deze waarde geldt dan voor een bepaalde V_0 en φ . Soortgelijke vergelijkingen zijn af te leiden als (9), (11) en (12).

11.3. De methode Duchêne

Duchêne kiest voor (8) de volgende vorm:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{A x}{\cos \varphi} + \frac{B x^2}{\cos^2 \varphi} \right]$$

De constanten A en B hangen nu in tegenstelling tot de k van PITON-BRESSANT, uitsluitend van de V_0 af. Deze methode is nauwkeuriger dan de voorgaande, doch leidt tot ingewikkelder berekeningen.

Voor de bepaling van A en B zijn twee waarnemingspunten noodzakelijk.

H o o f d s t u k 12

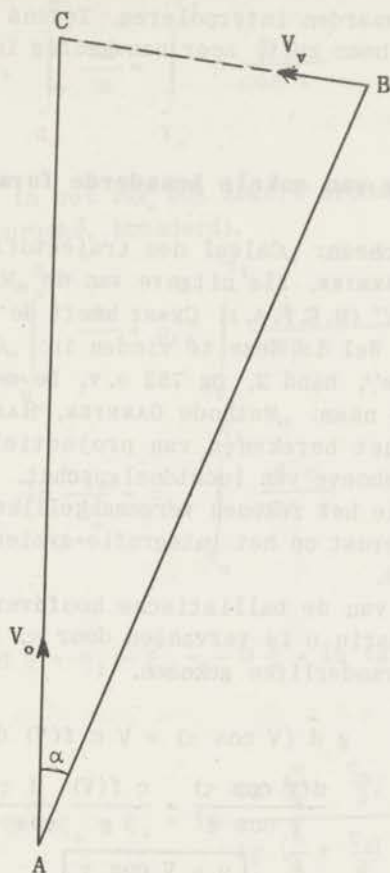
DE METHODE GARNIER, HAAG, MARCUS 1918 (G.H.M. I)

12.1. Berekeningsmethoden van projectielbanen voor luchtdoelgeschut

Tot nu toe hebben we methoden behandeld, die geschikt waren voor het berekenen van projectielbanen van landdoelgeschut. Daar wij te land meestal slechts te maken hebben met vaststaande doelen, waarvan de plaats bij benadering bekend is, behoeven we hier slechts op de hoogte te zijn van de gegevens aan het eindpunt en in het culminatiepunt van de baan. Voor het eindpunt voornamelijk de totale horizontale afstand (dracht) tot de vuurmond en de invalshoek. Deze laatste is vooral van belang bij brisantgranaten, waarbij de vorm van de schervenbundel een grote rol speelt en de invalshoek zodanig moet worden gekozen, dat we een gunstige scherfwerking krijgen. De hoogte van het culminatiepunt moet bekend zijn in verband met de invoering van de atmosferische correcties. Verder interesseert ons de projectielbaan van een landdoelkanon, voor de praktijk, echter weinig.

Anders is dit met projectielbanen van luchtdoelgeschut. Hier hebben we te doen met zeer snel bewegende vliegtuigdoelen, die op variërende hoogten passeren. We hebben dus alleen maar belangstelling voor de stijgende tak van de projectielbaan. Behalve dat we van ieder punt in de baan de coördinaten moeten weten, is het tevens noodzakelijk de gegevens te kennen over snelheid en vluchttijd.

We nemen aan (fig. 33), dat het kanon in A geplaatst is en het vliegtuig bij B wordt waargenomen. Bij deze waarneming moeten de snelheid en de koers worden vastgesteld. Het kanon moet nu zo worden ingesteld, dat vliegtuig en projectiel gelijktijdig in C komen. Voor de bepaling van de afstanden AC en BC moet de vliegtuigsnelheid V_v , het snelheidsverloop van het projectiel in de baan, alsmede de vluchttijd van het projectiel bekend zijn. Uiteindelijk wordt de hoek α , de zg. *voorloophoek*, bepaald. Het *vuurleidingstoestel*, dat bij een batterij luchtdoelkanonnen wordt gebruikt, moet in staat zijn om de benodigde berekeningen voor een juist treffen uit te voeren. Hiertoe worden de resultaten van onze berekende projectielbanen, alsmede de te gebruiken correcties, in het vuurleidingstoestel ingevoerd. De moderne waarne-



Figuur 33

AB is de richting van het kanon naar het vliegtuig. V_v en V_0 resp. vliegtuig- en projectielsnelheid. Hoek α is de voorloophoek. Het projectiel treft het vliegtuig in C.

mingsmethoden stellen ons in staat om richtings- en snelheidsveranderingen van het vliegtuig te bepalen, zodat we voortdurend de versnelling naar richting en grootte kunnen invoeren.

Uit het bovenstaande volgt, dat we voor luchtdoelbanen niet kunnen volstaan met de eenvoudige berekeningen, die we voor landdoelbanen uitvoerden. We berekenen hier de baan in gedeelten (z.g. vakken). De grootte van een vak wordt gekozen, afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid. Aan het einde van ieder vak berekenen we, behalve de coördinaten, ook de vluchttijd, de snelheid en de hoek tussen de raaklijn aan de baan en de horizon. De eindwaarden van een bepaald vak worden weer gebruikt als beginwaarden voor een volgend vak. Hebben we al deze gegevens tot het culminatiepunt berekend, dan kunnen we ze grafisch afbeelden en voor

tussenliggende waarden interpoleren. Tevens is het dan mogelijk om de projectielbaan zelf, zeer nauwkeurig in een grafische vorm te brengen.

12.2. Afleiding van enkele benaderde formules

In 1918 verscheen: „Calcul des trajectoires par arcs successifs” door M. GARNIER, als uitgave van de „Mission de balistique des tirs aeriens” (M.B.T.A.). CRANZ heeft de methode niet in zijn boek opgenomen. Wel is deze te vinden in: „Charbonnier - Balistique exterieure”, band 2, pg 752 e.v. De methode is bekend geworden onder de naam: „Methode GARNIER, HAAG, MARCUS I”. Ze is geschikt voor het berekenen van projectielbanen in gedeelten (vakken), ten behoeve van luchtdoelgeschut. Bij de methode behoren tabellen, die het rekenen vergemakkelijken.

De methode berust op het integratie-systeem, vermeld in hoofdstuk 8, onder 4e.

We gaan uit van de ballistische hoofdvergelijking (zie 6.1, formule 18), waarin θ is vervangen door τ . Deze τ wordt als onafhankelijke veranderlijke gekozen.

$$g \, d(V \cos \tau) = V \, c \, f(V) \, d\tau \quad (1)$$

$$\frac{d(V \cos \tau)}{V \cos \tau} = \frac{c \, f(V)}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

Stel

$$u = V \cos \tau \quad (2)$$

$$\rho = \frac{c \, f(v)}{g} \quad (3)$$

Deze ρ is dus de verhouding tussen de twee voorkomende versnelingen, nl. die tengevolge van de luchtweerstand en die tengevolge van de zwaartekracht.

De hoofdvergelijking wordt:

$$\frac{du}{u} = \rho \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (4)$$

Om goede resultaten te verkrijgen met deze methode, die speciaal is opgezet om de banen van het luchtdoelgeschut te berekenen, verdeelt men een baan in vakken.

Geeft men begin en einde van een vak respectievelijk de indices 0 en 1, dan is dus geïntegreerd:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \rho \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (5)$$

Voor ρ neemt men in het vak een zekere middelwaarde ρ_{ia} (i = middelwaarde, a = approché, benaderd).

dus

$$\int_{u_0}^{u_{1a}} \frac{du}{u} = \rho_{ia} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

$$\ln \frac{u_{1a}}{u_0} = \rho_{ia} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (6)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau} = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi = \xi_1 - \xi_0 = -D\xi = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} \quad (7)$$

dus:

$$D\xi = \xi_0 - \xi_1 = \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_1}{2} \right)} \quad (8)$$

$$\therefore \ln u_{1a} = \ln u_0 - \rho_{ia} D\xi \quad (9)$$

u_{1a} is dus benaderd, omdat ook ρ_{ia} benaderd is. In Briggse logarithmen wordt formule (9):

$$\log u_{1a} = \log u_0 - \rho_{ia} M D\xi \quad (10)$$

Hierin is $M = {}^{10}\log e = 0,43429$.

Stellen we $\theta_a = \rho_{ia} M D\xi$ (11)

dan gaat (10) over in:

$$\log u_{1a} = \log u_0 - \theta_a \quad (12)$$

Bekend zijn nu τ_0 en τ_1 , daar τ de onafhankelijk veranderlijke is, die men kiest, evenals de aangroeiing $\tau_1 - \tau_0 = D\tau$.

We kunnen $M D\xi$ dus berekenen. Voor $M \xi$ is, opklimmend met één minuut, een tabel aanwezig. Door aftrekking van de waarden uit de tabel is $D\xi$ te verkrijgen.

Doen we een schatting voor ρ_{1a} , dan is dus u_{1a} te berekenen en uit u_{1a} is weer af te leiden:

$$V_{1a} = \frac{u_{1a}}{\cos \tau_1} \quad (13)$$

Voor de berekening van de elementen x , y , s en t gaan we uit van de formules (14), (15), (16) en (17) van 6.1.

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{V^2}{g} \quad (14)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \tau \quad (15)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{V^2}{g \cos \tau} \quad (16)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{V}{g \cos \tau} \quad (17)$$

Substitueer hierin $V = \frac{u}{\cos \tau}$, dan gaan deze vergelijkingen over in:

$$dx = -\frac{u^2}{g \cos^2 \tau} d\tau = -u^2 d\left(\frac{\operatorname{tg} \tau}{g}\right) \quad (18)$$

$$dy = -\frac{u^2 \operatorname{tg} \tau}{g \cos^2 \tau} d\tau = -u^2 d\left(\frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{2g}\right) \quad (19)$$

$$ds = -\frac{u^2}{g \cos^3 \tau} d\tau = -u^2 d\left(\frac{\xi_2}{g}\right) \quad (20)$$

$$dt = -\frac{u}{g \cos^2 \tau} d\tau = -u d\left(\frac{\operatorname{tg} \tau}{g}\right) \quad (21)$$

Hierin is:

$$\xi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Om de integratie uit te voeren, kiezen we voor u het meetkundig gemiddelde tussen u_0 en u_{1a} , n.l.

$$u_m = \sqrt{u_o u_{1a}} \quad (23)$$

Stel de aangroeiing in het vak:

$$Dx = \int_{x_o}^{x_1} dx = x_1 - x_o$$

Evenzo kiezen we Dy , Ds en Dt .

Dan wordt geïntegreerd:

Uit (18):
$$Dx_a = -u_o u_{1a} \int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{tg \tau}{g}\right)$$

Stel
$$-\int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{tg \tau}{g}\right) = \frac{tg \tau_o}{g} - \frac{tg \tau_1}{g} = +D\left(\frac{tg \tau}{g}\right) = \Lambda_1 \quad (24)$$

$$\therefore Dx_a = u_o u_{1a} \Lambda_1 \quad (25)$$

Uit (19):
$$Dy_a = -u_o u_{1a} \int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{tg^2 \tau}{2g}\right)$$

Stel
$$-\int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{tg^2 \tau}{2g}\right) = \frac{tg^2 \tau_o}{2g} - \frac{tg^2 \tau_1}{2g} = D\left(\frac{tg^2 \tau}{2g}\right) = \Lambda_2 \quad (26)$$

$$\therefore Dy_a = u_o u_{1a} \Lambda_2 \quad (27)$$

Uit (20):
$$Ds_a = -u_o u_{1a} \int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{\xi_2}{g}\right)$$

Stel
$$-\int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{\xi_2}{g}\right) = \left(\frac{\xi_2}{g}\right)_{\tau_o} - \left(\frac{\xi_2}{g}\right)_{\tau_1} = D\left(\frac{\xi_2}{g}\right) = \Lambda_3 \quad (28)$$

$$\therefore Ds_a = u_o u_{1a} \Lambda_3 \quad (29)$$

Uit (21):

$$Dt_a = -\sqrt{u_o u_{1a}} \int_{\tau_o}^{\tau_1} d\left(\frac{tg \tau}{g}\right)$$

$$\therefore Dt_a = \sqrt{u_o u_{1a}} \Lambda_1 \quad (30)$$

De waarden van Λ_1 , Λ_2 en Λ_3 zijn te ontlennen aan de tabellen voor $\frac{tg \tau}{g}$, $\frac{tg^2 \tau}{2g}$ en $\frac{\xi_2}{g}$.

12.3. De fout in verband met de keuze van u_m

De u komt voor onder het integraalteken. We kiezen een zekere gemiddelde waarde, die voor het integraalteken gebracht wordt en niet geïntegreerd wordt.

In het algemeen doen we dus feitelijk het volgende:

Er is een niet-integreerbare functie $f(W)$.

$$\int_{W_1}^{W_o} f(W) dW = \int_{W_1}^{W_m} f(W) dW + \int_{W_m}^{W_o} f(W) dW =$$

$$= \text{eerste integraal} + \text{tweede integraal.} \quad (31)$$

W_m is een zekere constante middelwaarde, tussen W_1 en W_o gelegen.

$$W = W_m + (W - W_m)$$

$$dW = d(W - W_m)$$

$$f(W) = f[W_m + (W - W_m)] \equiv f(x + h)$$

waarin $x = W_m$ en $h = W - W_m$

De reeks van TAYLOR luidt:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) +$$

$$+ \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

Passen we deze reeksontwikkeling toe op de bovengenoemde functie $f(W)$, waarbij we voor $n = 4$ kiezen, dan volgt:

$$f(W) = f(W_m) + \frac{W-W_m}{1!} f'(W_m) + \frac{(W-W_m)^2}{2!} f''(W_m) + \frac{(W-W_m)^3}{3!} f'''(W_m) + \frac{(W-W_m)^4}{4!} f^{IV}[W_m + \theta(W-W_m)] \quad (32)$$

Schrijven we: $f(W_m) = f_m$

en: $f^{IV}[W_m + \theta(W-W_m)] = f^{IV}$

De eerste integraal van (31) in een reeks ontwikkeld, geeft dan:

$$\int_{W_1}^{W_m} f(W) dW = f_m (W-W_m) \Big|_{W_1}^{W_m} + \frac{1}{2} f'_m (W-W_m)^2 \Big|_{W_1}^{W_m} + \frac{1}{3!} f''_m (W-W_m)^3 \Big|_{W_1}^{W_m} + \frac{1}{4!} f'''_m (W-W_m)^4 \Big|_{W_1}^{W_m} + \frac{1}{5!} f^{IV}_m (W-W_m)^5 \Big|_{W_1}^{W_m} \quad (33)$$

Kies nu

$$W_m = \frac{W_0 + W_1}{2}$$

dan is: $(W-W_m) \Big|_{W_1}^{W_m} = - (W_1 - W_m) = -W_1 + \frac{W_0 + W_1}{2} = \frac{W_0 - W_1}{2} = \frac{DW}{2}$

$$(W-W_m)^2 \Big|_{W_1}^{W_m} = - (W_1 - W_m)^2 = - \frac{(DW)^2}{4}$$

$$(W-W_m)^3 \Big|_{W_1}^{W_m} = - \left(\frac{W_1 - W_0}{2}\right)^3 = \frac{(DW)^3}{4} \quad \text{enz.}$$

$$\therefore \int_{W_1}^{W_m} f(W) dW = f_m \frac{DW}{2} - f'_m \frac{(DW)^2}{4 \cdot 2!} + f''_m \frac{(DW)^3}{8 \cdot 3!} - f'''_m \frac{(DW)^4}{16 \cdot 4!} + f^{IV}_m \frac{(DW)^5}{32 \cdot 5!} \quad (34)$$

De tweede integraal van (31) geeft uitsluitend plustekens bij de termen der reeks. Hierbij treedt nl. op:

$$(W - W_m) \Big|_{W_m}^{W_o} = W_o - W_m = W_o - \frac{W_o + W_1}{2} = \frac{W_o - W_1}{2} = \frac{DW}{2}$$

$$(W - W_m)^2 \Big|_{W_m}^{W_o} = (W_o - W_m)^2 = \frac{(DW)^2}{4} \quad \text{enz.}$$

De tweede integraal van (31) geeft dus:

$$\int_{W_m}^{W_o} f(W) dW = f_m \frac{DW}{2} + f'_m \frac{(DW)^2}{4 \cdot 2!} + f''_m \frac{(DW)^3}{8 \cdot 3!} + f'''_m \frac{(DW)^4}{16 \cdot 4!} + f^{IV}_\beta \frac{(DW)^5}{32 \cdot 5!} \quad (35)$$

Bij sommatie van (34) en (35) vallen diverse termen tengevolge van de mintekens weg:

$$\int_{W_1}^{W_o} f(W) dW = f_m DW + f''_m \frac{(DW)^3}{4!} + (f^{IV}_\alpha + f^{IV}_\beta) \frac{(DW)^5}{32 \cdot 5!} \quad (36)$$

f^{IV}_α en f^{IV}_β zijn van W afhankelijk en mogen dus feitelijk niet buiten het integraalteken worden gebracht. Daar deze termen toch worden verwaarloosd, is dit geen bezwaar. Afbreken na de eerste term geeft een vrij goede benadering, daar de volgende term reeds van de derde orde in DW is.

12.4. Toepassing van de reeksontwikkeling uit 12.3 op de aangroeiingen dx , dy , ds en dt

We hadden volgens (18):

$$dx = -u^2 d \left(\frac{tg \tau}{g} \right)$$

en dus:

$$x = - \int u^2 d \left(\frac{tg \tau}{g} \right)$$

Hierin is dus te stellen: $u^2 = f(W)$ en $\frac{tg \tau}{g} = W$.

Gebruiken we slechts de eerste term f_m DW der reeks (36), dan is hierin $f_m = u_o u_{1a}$ en

$$DW = \frac{tg \tau_o - tg \tau_1}{g} = \Lambda_1 \quad (\text{zie 24})$$

We vinden dus dezelfde formule voor de aangroeiing van x als in (25).

$$Dx_a = u_o u_{1a} \Lambda_1$$

Volgens (20) is: $ds = -u^2 d\left(\frac{\xi_2}{g}\right)$

en: $s = -\int u^2 d\left(\frac{\xi_2}{g}\right)$

In (36) stellen we nu $f(W) = u^2$ en $W = \frac{\xi_2}{g}$.
Dan is:

$$f_m = u_o u_{1a}$$

$$\text{en: } DW = \frac{(\xi_2)_o - (\xi_2)_1}{g} = \Lambda_3$$

De eerste term der reeks (36) geeft nu:

$$Ds_a = u_o u_{1a} \Lambda_3$$

Volgens (21) is: $dt = -u d\left(\frac{tg \tau}{g}\right)$

en: $t = -\int u d\left(\frac{tg \tau}{g}\right)$

We stellen in (36): $f(W) = u$ en $W = \frac{tg \tau}{g}$

dan is: $f_m = \sqrt{u_o u_{1a}}$

en: $DW = \frac{tg \tau_o - tg \tau_1}{g} = \Lambda_1$

Voor $dy = -u^2 d\left(\frac{tg^2 \tau}{g}\right) = f(W) dW$ ligt de zaak enigszins anders.

$$f'(W) = \frac{d f(W)}{dW} = \frac{2 u du}{d\left(\frac{tg^2 \tau}{g}\right)} = 2 u g \frac{du}{d(tg \tau)} \frac{1}{2 tg \tau}$$

De term $\frac{du}{d(tg \tau)}$ komt ook bij x en t voor en daar teller en noemer van deze breuk van dezelfde orde tot o naderen, zal deze breuk eindig zijn. Echter nadert $\frac{1}{tg \tau}$ voor $\tau = 0$ tot oneindig, dus

$f'(W) = \infty$. We kunnen nu dus de reeksontwikkeling voor y niet toepassen.

Voor de berekening van Dy_a lepalen we ons nu weer uitsluitend tot de eerste term der reeksontwikkeling van Dx_a en stellen $dy = dx \operatorname{tg} \tau$.

Voor de aangroeiing van x nemen we nu Dx_a en voor de waarde $(\operatorname{tg} \tau)_m$ nemen we het rekenkundig gemiddelde van $\operatorname{tg} \tau_0$ en $\operatorname{tg} \tau_1$, dus:

$$Dy_a = Dx_a \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} = u_0 u_{1a} \frac{\operatorname{tg} \tau_0 - \operatorname{tg} \tau_1}{g} \cdot \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} =$$

$$= u_0 u_{1a} \frac{\operatorname{tg}^2 \tau_0 - \operatorname{tg}^2 \tau_1}{2g} = u_0 u_{1a} \Lambda_2$$

We zien dus dat de gekozen benaderingsformules (25), (27), (29) en (30) berusten op het gebruik van uitsluitend de eerste term van de reeks (36).

12.5. De berekening van ρ

$$\rho = \frac{c f(V)}{g} = \frac{c_0 e^{-hy} f(V)}{g} \quad (37)$$

waarin

$$c_0 = \Delta_0 \frac{a^2}{p} \sin \gamma \quad (38)$$

Δ_0 = gewicht van 1 m^3 lucht op zeeniveau in kg.

a = kaliber in m.

p = projectielgewicht in kg.

γ = fictieve halve tophoek van het projectiel (i -waarde).

$h = 10^{-4}$.

$f(V)$ = snelheidsfunctie van de luchtweerstand, te ontleen aan een tabel.

Men noemt de ρ aan het begin van het vak:

$$\rho_0 = \frac{c_0}{g} e^{-hy_0} f(V_0) \quad (39)$$

Voor de bepaling van de i -waarde gebruiken we de formule van J. OTTENHEIMER (Balistique extérieure), waarin een fictieve halve tophoek γ voorkomt (experimentele formule).

$$i = \sin \gamma = \frac{0,72}{d^{0,15} \sqrt{h}}$$

d = kaliber in dm.

h = som van ogieffhoogte en taplengte in kalibers.

Over de verandering van ρ is a priori niets te zeggen.

Over de aangroeiing van ρ_0 is wel iets te vinden door deze te differentieren en dan de aangroeiing over het gehele vak te denken. Men stelt dan de kromme door een rechte voor. De gemiddelde waarde van ρ over het vak is dan:

$$\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}$$

$$\rho = \frac{c_0}{g} e^{-hy} f(V)$$

$$\ln \rho = \ln \frac{c_0}{g} - hy + \ln f(V)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -h dy + \frac{f'(V)}{f(V)} dv \quad (40)$$

Volgens (15): $dy = -\frac{V^2}{g} \operatorname{tg} \tau d\tau$

Volgens (1): $g d(V \cos \tau) = V c f(V) d\tau$

$$-V \sin \tau d\tau + \cos \tau dV = V \frac{c}{g} f(V) d\tau$$

of: $dV = \frac{V \frac{c}{g} f(V) d\tau + V \sin \tau d\tau}{\cos \tau} \quad (41)$

Voeren we de vergelijkingen (15) en (41) in vergelijking (40) in, dan krijgen we:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left[\frac{h V^2 \operatorname{tg} \tau}{g} + \frac{V f'(V)}{f(V) \cos \tau} (\rho + \sin \tau) \right] d\tau$$

Stel: $n = \frac{V f'(V)}{f(V)} \quad (42)$

Dit is de z.g. *weerstandsgraad* (degré de résistance).

We krijgen nu:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left[\frac{hV^2}{g} \operatorname{tg} \tau + \frac{n\rho}{\cos \tau} + n \operatorname{tg} \tau \right] d\tau$$

Stellen we nu: $m = n + \frac{hV^2}{g} \quad (43)$

dan gaat de vergelijking over in:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(m \operatorname{tg} \tau + \frac{n\rho}{\cos \tau} \right) d\tau$$

$$d\rho = \rho (n \operatorname{tg} \tau + m \sin \tau) \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

$$d\rho = \rho (n\rho + m \sin \tau) d\xi$$

Volgens (7) is nu:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau} = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi = -D\xi$$

Integreren we nu $d\rho$ over het gehele vlak, waarbij we echter voor ρ , n , m en τ uitsluitend de nulwaarden voor het begin van het vak aanhouden, dan krijgen we:

$$\Delta \rho = -\rho_0 (n_0 \rho_0 + m_0 \sin \tau_0) D \xi \quad (44)$$

Er is een tabel voor $f(V)$, waarin tevens de waarden van m en n vermeld zijn.

Neem nu:

$$\rho_{1a} = \rho_{01a} = \rho_0 + \frac{\Delta \rho}{2} \quad (45)$$

Hierin is ρ_{01a} de benaderde gemiddelde waarde voor ρ in het vak. We kunnen nu met de formules (10), (2) en (27) benaderde waarden berekenen voor u_{1a} , V_{1a} en y_{1a} , als volgt:

$$\log u_{1a} = \log u_0 - \rho_{01a} M D \xi$$

$$V_{1a} = \frac{u_{1a}}{\cos \tau_1}$$

$$Dy_a = u_0 u_{1a} \Lambda_2$$

$$y_{1a} = y_0 + Dy_a$$

Nu kunnen we de benaderde waarde van ρ aan het einde van het vak berekenen met (37):

$$\rho_{1a} = \frac{c_0}{g} e^{-hy_{1a}} f(V_{1a})$$

Hieruit volgt weer:

$$D\rho_a = \rho_{1a} - \rho_0 \quad (46)$$

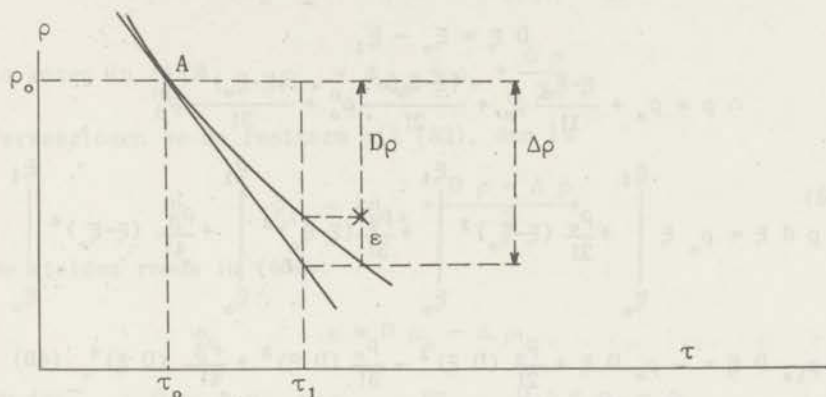
We noemen dit de *werkelijke* aangroeiing van ρ_0 , waarmee we bedoelen de aangroeiing langs de kromme voor ρ .

Toch is deze $D\rho_a$ nog benaderd. Dit is dus een verbetering ten opzichte van de $\Delta\rho$ uit (44), waarvoor we uitsluitend nulwaarden gebruiken.

We noemen nu:

$$\varepsilon = D\rho_a - \Delta\rho \quad (46a)$$

de correctie van ρ . Deze mag een zekere waarde niet overschrijden.



Figuur 34

ρ als functie van τ . Aan begin en eind van het vak zijn de hellingshoeken respectievelijk τ_0 en τ_1 .

12.6. De bepaling van de correctie op ρ

Uit (5) en (7) volgt:

$$\ln u_1 - \ln u_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \rho \, d\xi$$

Volgens (5) is nu:

$$u = \varphi_1(\rho, \tau) \quad \text{of} \quad \rho = \varphi_2(u, \tau)$$

Volgens (10) is: $u = \psi_1(\xi)$

en volgens (7): $\tau = \psi_2(\xi)$

$$\therefore \rho = f(\xi) = f[\xi_0 + (\xi - \xi_0)]$$

Ontwikkelen we ρ in een reeks van TAYLOR:

$$\rho = f(\xi_0) + \frac{\xi - \xi_0}{1!} f'(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2!} f''(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^3}{3!} f'''[\xi_0 + \theta(\xi - \xi_0)] \quad (47)$$

$$f(\xi_0) = \rho_0$$

$$f'(\xi_0) = \rho'_0 \quad \text{enz,}$$

$$D \xi = \xi_0 - \xi_1$$

$$\therefore \rho = \rho_0 + \frac{\xi - \xi_0}{1!} \rho'_0 + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2!} \rho''_0 + \frac{(\xi - \xi_0)^3}{3!} \rho'''_0$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \rho d\xi = \rho_0 \xi \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \frac{\rho'_0}{2!} (\xi - \xi_0)^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \frac{\rho''_0}{3!} (\xi - \xi_0)^3 \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \frac{\rho'''_0}{4!} (\xi - \xi_0)^4 \Big|_{\xi_0}^{\xi_1}$$

$$- \rho_{ia} D \xi = - \rho_0 D \xi + \frac{\rho'_0}{2!} (D \xi)^2 - \frac{\rho''_0}{3!} (D \xi)^3 + \frac{\rho'''_0}{4!} (D \xi)^4 \quad (48)$$

In de laatste term heeft ρ natuurlijk niet de index 0, omdat we hier in plaats van $f'''(\xi_0)$ de factor $f'''[\xi_0 + \theta(\xi - \xi_0)]$ hebben.

Uit (48) volgt:

$$\rho_{ia} = \rho_0 - \frac{\rho_0}{2!} D \xi + \frac{\rho''_0}{3!} (D \xi)^2 - \frac{\rho'''_0}{4!} (D \xi)^3 \quad (49)$$

Uit (47) volgt: $\rho = \rho_0 + \frac{\xi - \xi_0}{1!} \rho'_0 + \dots$

of: $\rho_1 - \rho_0 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{1!} \rho'_0 + \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2}{2!} \rho''_0 + \frac{(\xi_1 - \xi_0)^3}{3!} \rho'''_0$

Men noemt $D \rho = \rho_1 - \rho_0$ de werkelijke aangroeiing.

$$D \rho = - \rho'_0 D \xi + \frac{\rho''_0}{2!} (D \xi)^2 - \frac{\rho'''_0}{3!} (D \xi)^3 \quad (50)$$

Elimineren we de term met ρ''_0 uit (49) en (50), dan is het resultaat:

$$\rho_{ia} - \frac{D \rho}{3} = \rho_0 - \frac{\rho'_0}{6} D \xi + \left(\frac{\rho'''_0}{3 \cdot 3!} - \frac{\rho'''_0}{4!} \right) (D \xi)^3 \quad (51)$$

Nu is: $d \rho = \frac{d \rho}{d \xi} d \xi = \rho' d \xi$

Nemen we voor $d \rho$ de aangroeiing over het gehele vak volgens de raaklijn, dus zoals in (44) $\Delta \rho$, dan is:

$$\Delta \rho = - \rho'_0 D \xi \quad (51a)$$

Vergelijking (51) gaat nu over in:

$$\rho_{ia} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2} + \frac{D \rho - \Delta \rho}{3} + \left(\frac{\rho_{\alpha}^{III}}{3 \cdot 3!} - \frac{\rho_{\beta}^{III}}{4!} \right) (D \xi)^3 \quad (52)$$

We kozen in (45): $\rho_{ia} = \rho_{oia} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2}$

Verwaarlozen we de restterm uit (52), dan is

$$\rho_{ia} = \rho_{oia} + \frac{D \rho - \Delta \rho}{3} \quad (53)$$

We stelden reeds in (46a):

$$\varepsilon = D \rho_a - \Delta \rho$$

Nu is: $D \rho_a = \rho_{ia} - \rho_o$ en $D \rho = \rho_1 - \rho_o$

$$\therefore D \rho - D \rho_a = \rho_1 - \rho_{ia}$$

Dit verschil blijkt van dezelfde grootte-orde te zijn als de restterm uit (52). Schrijven we nu:

$$\varepsilon = D \rho - \Delta \rho \quad (54)$$

waarbij dus $D \rho_a$ is vervangen door $D \rho$, dan maken we een fout van dezelfde orde van grootte als die we in (52) maakten, door de verwaarlozing van de restterm.

We vinden dus:

$$\rho_{ia} = \rho_{oia} + \frac{\varepsilon}{3} \quad (55)$$

Kiezen we ρ_{ia} volgens (55), dan kunnen we deze ρ_{ia} vervangen door ρ_1 , waarbij de gemaakte fout van de grootte-orde is van de restterm uit (52).

Het corrigeren van de snelheid voor ρ_{ia}

Volgens formule (10):

$$\log u_{ia} = \log u_o - \rho_{ia} M D \xi$$

of: $\log u_{ia} = \log u_o - \theta_a$

Nu moet ρ_{ia} gecorrigeerd worden met $\frac{\varepsilon}{3}$, dus θ_a met $\frac{\varepsilon}{3} M D \xi$.

Dus: $\log u_{1a} = \log u_o - \rho_{1a} M D \xi$

$\log u_1 = \log u_o - \rho_1 M D \xi$

$\therefore \log u_{1a} - \log u_1 = (\rho_1 - \rho_{1a}) M D \xi = \frac{\epsilon}{3} M D \xi$

Daar voor u_{1a} en u_1 dezelfde hoek τ_1 geldt, is dus:

$$\log \frac{u_{1a}}{u_1} = \log \frac{V_{1a}}{V_1} = \frac{\epsilon}{3} M D \xi = \epsilon_\theta \quad (56)$$

$$\therefore \log V_1 = \log V_{1a} - \epsilon_\theta \quad (57)$$

12.7. Het corrigeren van x, s en t voor u_m

Noemen we de aangroeiingen in het interval van x, s, t en y voorlopig De, dan is volgens (36):

$$De = f_m DW + f_m'' \frac{(DW)^3}{4!} + (f_\alpha^{IV} + f_\beta^{IV}) \frac{(DW)^5}{32 \cdot 5!} \quad (58)$$

We gebruiken uitsluitend de eerste term van (36), nl.

$$De_a = f_m DW \quad (59)$$

We kiezen nu in (59):

$$f_m = \sqrt{f_o f_1}$$

dan is de fout:

$$\delta(De) = De - De_a = (f_m - \sqrt{f_o f_1}) DW + f_m'' \frac{(DW)^3}{4!} + (f_\alpha^{IV} + f_\beta^{IV}) \frac{(DW)^5}{32 \cdot 5!} \quad (60)$$

Volgens (32) is:

$$f(W) = f(W_m) + \frac{W-W_m}{1!} f'(W_m) + \frac{(W-W_m)^2}{2!} f''(W_m) + \frac{(W-W_m)^3}{3!} f'''(W_m) + \frac{(W-W_m)^4}{4!} f''''[W_m + \theta(W-W_m)] \quad (61)$$

Voor: $f(W_o) = f_o$

wordt: $W_o - W_m = W_o - \frac{W_o + W_1}{2} = \frac{W_o - W_1}{2} = \frac{DW}{2}$

Voor: $f(W_1) = f_1$

wordt:

$$W_1 - W_m = -\frac{DW}{2}$$

$$\therefore f_o = f_m + f'_m \frac{DW}{2} + f''_m \frac{(DW)^2}{2^2 \cdot 2!} + f'''_m \frac{(DW)^3}{2^3 \cdot 3!} + f''''_m \frac{(DW)^4}{2^4 \cdot 4!}$$

en $f_1 = f_m - f'_m \frac{DW}{2} + f''_m \frac{(DW)^2}{2^2 \cdot 2!} - f'''_m \frac{(DW)^3}{2^3 \cdot 3!} + f''''_m \frac{(DW)^4}{2^4 \cdot 4!}$

dus: $f_o f_1 = f_m^2 + (f_m f''_m - f'^2_m) \frac{(DW)^2}{4} + \dots (DW)^4$

$$= f_m^2 \left[1 + \left(\frac{f''_m}{f_m} - \frac{f'^2_m}{f_m^2} \right) \frac{(DW)^2}{4} + \dots (DW)^4 \right] \quad (62)$$

Bepalen we uit (62): $\sqrt{f_o f_1}$ en passen we op de eerste twee termen van het rechterlid het binonium van NEWTON toe, dan volgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{f_o f_1} &= f_m \left[1 + \left(\frac{f''_m}{f_m} - \frac{f'^2_m}{f_m^2} \right) \frac{(DW)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= f_m + \left(\frac{f''_m}{f_m} - \frac{f'^2_m}{f_m^2} \right) \frac{(DW)^2}{8} - \dots (DW)^4 \end{aligned}$$

$$f_m - \sqrt{f_o f_1} = - \left(\frac{f''_m}{f_m} - \frac{f'^2_m}{f_m^2} \right) \frac{(DW)^2}{8} + \dots (DW)^4$$

Dit gesubstitueerd in de formule (60) geeft:

$$\begin{aligned} \delta(De) &= - \left(\frac{f''_m}{f_m} - \frac{f'^2_m}{f_m^2} \right) \frac{(DW)^3}{8} + f''_m \frac{(DW)^3}{4!} + \dots (DW)^5 = \\ &= \left(-\frac{f''_m}{12} + \frac{f'^2_m}{8f_m^2} \right) (DW)^3 + \dots (DW)^5 \quad (63) \end{aligned}$$

Nu is: $\delta(\log De) = M \delta(\ln De) = M \frac{\delta(De)}{De} \sim M \frac{\delta(De)}{f_m DW}$

Bij deze herleiding is in de noemer De vervangen door $f_m DW$, d.i. de eerste term van het rechterlid van (58). De noemer is hierdoor dus benaderd.

$$\begin{aligned} \delta(\log De) &= \left[-\frac{f''_m}{12f_m} + \frac{f'^2_m}{8f_m^2} \right] M (DW)^2 + \dots = \\ &= \frac{f'_m}{f_m} DW \left[-\frac{f''_m}{12f'_m} M DW + \frac{f'_m}{8f_m} M DW \right] + \dots \end{aligned}$$

Nu is:
$$d [\ln f(W)] = \frac{d f(W)}{f(W)} = \frac{f'(W)}{f(W)} dW$$

Gebruiken we van de reeks (61) weer uitsluitend de eerste term, dan kunnen we schrijven:

$$\frac{f'(W)}{f(W)} \sim \frac{f'_m}{f_m}$$

$$\therefore d [\ln f(W)] = \frac{f'_m}{f_m} dW = \frac{d [\log f(W)]}{M}$$

$$\text{en: } \delta(\log De) = \frac{D \{ \log f(W) \}}{M} \left[-\frac{D \{ \log f'(W) \}}{12} + \frac{D \{ \log f(W) \}}{8} \right] \equiv e_e \quad (64)$$

Voor x en s moeten we nu substitueren: $f(W) = u^2$.

$$\therefore D [\log f(W)] = D [\log u^2] = 2 D [\log u]$$

Verder is:
$$f'(W) dW = 2u du$$

Volgens de ballistische hoofdvergelijking (4) is:

$$du = \rho u \frac{d \tau}{\cos \tau}$$

$$f'(W) = \frac{2u du}{dW} = \frac{2 \rho u^2 \frac{d \tau}{\cos \tau}}{dW}$$

Voor x geldt:

$$W = \frac{tg \tau}{g}$$

$$dW = \frac{d \tau}{g \cos^2 \tau}$$

$$f'(W) = \frac{2 \rho u^2 \frac{d \tau}{\cos \tau}}{\frac{d \tau}{g \cos^2 \tau}} = 2 u^2 \rho g \cos \tau$$

$$\log f'(W) = \log 2g + 2 \log u + \log \rho + \log \cos \tau$$

$$D [\log f'(W)] = 2 D (\log u) + D(\log \rho) + D (\log \cos \tau)$$

Substitueren we nu $D[\log f(W)]$ en $D[\log f'(W)]$ voor x in (64), dan volgt:

$$\epsilon_x = \delta(\log Dx) = \frac{2D(\log u)}{M} \left[-\frac{1}{12} \{2 D(\log u) + D(\log \rho) + D(\log \cos \tau)\} + \frac{2D(\log u)}{8} \right]$$

$$\epsilon_x = \frac{D(\log u)}{6M} [D(\log u) - D(\log \rho) - D(\log \cos \tau)] \quad (65)$$

Nu is: $D(\log u) = \log u_1 - \log u_0 = -\theta$ (66)

$$u = V \cos \tau$$

$$\log u = \log V + \log \cos \tau$$

$$\therefore D(\log u) - D(\log \cos \tau) = D(\log V)$$

Dus: $\epsilon_x = -\frac{\theta}{6M} [D(\log V) - D(\log \rho)]$ (66a)

Noem: $D(\log V) - D(\log \rho) = -\mu_x$ (67)

dan is: $\epsilon_x = \frac{\theta}{6M} \mu_x$ (68)

Voor s geldt: $W = \frac{\xi_2}{g} = \frac{1}{g} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$

$$dW = \frac{d\tau}{g \cos^3 \tau}$$

$$f'(W) = \frac{2u du}{dW} = \frac{2\rho u^2 \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}}{\frac{d\tau}{g \cos^3 \tau}} = 2\rho u^2 g \cos^2 \tau$$

$$\log f'(W) = \log 2g + \log \rho + 2 \log u + 2 \log \cos \tau$$

$$D[\log f'(W)] = 2 D(\log u) + D(\log \rho) + 2 D(\log \cos \tau)$$

Gesubstitueerd in (64) krijgen we:

$$\epsilon_s = \delta(\log Ds) = \frac{2 D(\log u)}{M} \left[-\frac{1}{12} \{2D(\log u) + D(\log \rho) + 2D(\log \cos \tau)\} + \frac{2D(\log u)}{8} \right]$$

$$\epsilon_s = \frac{D(\log u)}{6M} [D(\log u) - D(\log \rho) - 2 D(\log \cos \tau)]$$

Met behulp van (66), (67) en $u = V \cos \tau$ vinden we nu:

$$\epsilon_s = \frac{D(\log u)}{6M} [D(\log V) - D(\log \rho) - D(\log \cos \tau)]$$

$$\epsilon_s = \frac{\theta}{6M} (\mu_x + \sigma) \quad (69)$$

waarin:

$$\sigma = \log \sec \tau_0 - \log \sec \tau_1$$

Voor t vinden we:

$$f(W) = u$$

$$\therefore D[\log f(W)] = D[\log u]$$

$$f'(W) dW = du$$

$$W = \frac{tg \tau}{g}$$

$$dW = \frac{d \tau}{g \cos^2 \tau}$$

$$f'(W) = \frac{du}{dW} = \frac{\rho u \frac{d \tau}{\cos^2 \tau}}{\frac{d \tau}{g \cos^2 \tau}} = \rho u g \cos \tau$$

$$\log f'(W) = \log g + \log u + \log \rho + \log \cos \tau$$

$$D[\log f'(W)] = D(\log u) + D(\log \rho) + D(\log \cos \tau)$$

Substitueren we $D[\log f(W)]$ en $D[\log f'(W)]$ voor t in (64), dan volgt:

$$\epsilon_t = \delta(\log Dt) =$$

$$= \frac{D(\log u)}{M} \left[-\frac{1}{12} \{D(\log u) + D(\log \rho) + D(\log \cos \tau)\} + \frac{D(\log u)}{8} \right]$$

$$\epsilon_t = \frac{D(\log u)}{12 M} [\frac{1}{2} D(\log u) - D(\log \rho) - D(\log \cos \tau)]$$

$$\epsilon_t = \frac{D(\log u)}{12 M} [D(\log u) - D(\log \rho) - D(\log \cos \tau)] - \frac{[D(\log u)]^2}{24 M}$$

Met behulp van (65) en (66) wordt:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \varepsilon_x - \frac{\theta^2}{24 M} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_x - \frac{\theta^2}{12 M} \right) \quad (70)$$

12.8. De fout bij Dy_a

De toegepaste reeksontwikkeling met als resultaat formule (36), kan niet voor Dy worden toegepast, zoals reeds eerder opgemerkt (zie 12.4). Het bleek daar dat $f'(W) = \infty$ voor $\tau = 0$. De reeksontwikkeling geldt in dit geval dus niet voor $\tau = 0$.

We gaan uit van: $dy = tg \tau dx$

$$Dy = \int_{x_0}^{x_1} tg \tau dx$$

Stellen we:

$$x_m = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$\text{dan is: } \int_{x_0}^{x_1} tg \tau dx = \int_{x_0}^{x_m} tg \tau dx + \int_{x_m}^{x_1} tg \tau dx$$

We beschouwen nu $tg \tau$ als functie van x , dus:

$$tg \tau = \psi(x) = \psi[x_m + (x-x_m)]$$

$$tg \tau = \psi(x_m) + \psi'(x_m) \frac{x-x_m}{1!} + \psi''(x_m) \frac{(x-x_m)^2}{2!} + \psi'''(x_m) \frac{(x-x_m)^3}{3!} + \psi_{\alpha}^{(4)} \frac{(x-x_m)^4}{4!}$$

$$\begin{aligned} \int tg \tau dx &= \psi(x_m) \int d(x-x_m) + \psi'(x_m) \int (x-x_m) d(x-x_m) + \\ &+ \psi''(x_m) \int \frac{(x-x_m)^2}{2!} d(x-x_m) + \psi'''(x_m) \int \frac{(x-x_m)^3}{3!} d(x-x_m) + \\ &+ \psi_{\alpha}^{(4)} \int \frac{(x-x_m)^4}{4!} d(x-x_m) \end{aligned}$$

Schrijven we: $\psi(x_m) = (tg \tau)_m$, $\psi'(x_m) = (tg \tau)'_m$, enz., dan is:

$$\int_{x_0}^{x_m} \operatorname{tg} \tau \, dx = -(\operatorname{tg} \tau)_m (x_0 - x_m) - (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{(x_0 - x_m)^2}{2!} - (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(x_0 - x_m)^3}{3!} - (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(x_0 - x_m)^4}{4!} - (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(x_0 - x_m)^5}{5!} \quad (71)$$

$$\int_{x_m}^{x_1} \operatorname{tg} \tau \, dx = (\operatorname{tg} \tau)_m (x_1 - x_m) + (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{(x_1 - x_m)^2}{2!} + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(x_1 - x_m)^3}{3!} + (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(x_1 - x_m)^4}{4!} + (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(x_1 - x_m)^5}{5!} \quad (72)$$

Schrijven we:

$$Dx = x_1 - x_0$$

dan is:

$$x_0 - x_m = x_0 - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{-x_1 + x_0}{2} = -\frac{Dx}{2}$$

$$x_1 - x_m = x_1 - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{Dx}{2}$$

Sommatie van (71) en (72) geeft:

$$Dy = (\operatorname{tg} \tau)_m Dx + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(Dx)^3}{2^2 \cdot 3!} + \overbrace{[(\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} + (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)}]}^A \frac{(Dx)^5}{2^5 \cdot 5!} \quad (73)$$

Voor de waarde van Dy_a hebben we reeds eerder gevonden:

$$Dy_a = Dx_a \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} = [Dx - \delta(Dx)] \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2}$$

De juiste waarde van Dy vinden we in de reeksontwikkeling van (73), zodat we voor de fout op Dy_a kunnen schrijven:

$$\delta(Dy) = Dy - Dy_a = \left[(\operatorname{tg} \tau)_m - \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} \right] Dx + \frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} \delta(Dx) + \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{24} (Dx)^3 + A \quad (74)$$

Ontwikkelen we nu achtereenvolgens $\operatorname{tg} \tau_0$ en $\operatorname{tg} \tau_1$ in een reeks, waarbij weer:

$$\operatorname{tg} \tau = \psi(x)$$

$$(\operatorname{tg} \tau)_m = \psi(x_m)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau_0 &= (\operatorname{tg} \tau)_m + (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{x_0 - x_m}{1!} + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(x_0 - x_m)^2}{2!} + \\ &+ (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(x_0 - x_m)^3}{3!} + (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(x_0 - x_m)^4}{4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau_1 &= (\operatorname{tg} \tau)_m + (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{(x_1 - x_m)}{1!} + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(x_1 - x_m)^2}{2!} + \\ &+ (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(x_1 - x_m)^3}{3!} + (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(x_1 - x_m)^4}{4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau_0 &= (\operatorname{tg} \tau)_m - (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{Dx}{2} + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(Dx)^2}{2^2 \cdot 2!} - (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(Dx)^3}{2^3 \cdot 3!} \\ &+ (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(Dx)^4}{2^4 \cdot 4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau_1 &= (\operatorname{tg} \tau)_m + (\operatorname{tg} \tau)_m' \frac{Dx}{2} + (\operatorname{tg} \tau)_m'' \frac{(Dx)^2}{2^2 \cdot 2!} + (\operatorname{tg} \tau)_m''' \frac{(Dx)^3}{2^3 \cdot 3!} + \\ &+ (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} \frac{(Dx)^4}{2^4 \cdot 4!} \end{aligned}$$

Sommeren we de beide reeksen voor $\operatorname{tg} \tau$, dan vinden we:

$$\frac{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1}{2} = (\operatorname{tg} \tau)_m + \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{2^2 \cdot 2!} (Dx)^2 + \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)} + (\operatorname{tg} \tau)_m^{(4)}}{2^5 \cdot 4!} (Dx)^4$$

Substitueren we de gevonden waarde in (74), dan volgt: ^B

$$\begin{aligned} \delta(Dy) &= - \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{2^2 \cdot 2!} (Dx)^3 - B Dx + (\operatorname{tg} \tau)_m \delta(Dx) + \\ &+ \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{2^2 \cdot 2!} (Dx)^2 \delta(Dx) + B \delta(Dx) + \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{24} (Dx)^3 + A \quad (75) \end{aligned}$$

We weten dat de fout op $\log Dx$ van de tweede orde in Dx is, dus $\delta(Dx)$ is van de derde orde in Dx . De opvolgende termen van (75) zijn resp. van de 3^e, 5^e, 3^e, 5^e, 7^e, 3^e en 5^e orde in Dx .

We nemen nu alleen de termen van de 3^e orde en verwaarlozen de andere, zodat:

$$\delta(Dy) = - \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{12} (Dx)^3 + (\operatorname{tg} \tau)_m \delta(Dx)$$

Delen we het linkerlid door Dy en het rechterlid door de

eerste term van de reeksontwikkeling (73) van Dy , nl. $(\operatorname{tg} \tau)_m Dx$, dan krijgen we:

$$\frac{\delta(Dy)}{Dy} = - \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m'' (Dx)^2}{(\operatorname{tg} \tau)_m 12} + \frac{\delta(Dx)}{Dx}$$

$$\delta(\log Dy) = - \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m'' M}{(\operatorname{tg} \tau)_m 12} (Dx)^2 + M \frac{\delta(Dx)}{Dx}$$

Nu blijkt uit (65), dat: $M \frac{\delta(Dx)}{Dx} = \varepsilon_x$

$$\therefore \delta(\log Dy) = \varepsilon_y = \varepsilon_x - \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m'' M}{(\operatorname{tg} \tau)_m 12} (Dx)^2 \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is: } - \frac{M}{12} \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{(\operatorname{tg} \tau)_m} (Dx)^2 &= - \frac{M}{12} \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m''}{(\operatorname{tg} \tau)_m'} Dx \frac{(\operatorname{tg} \tau)_m'}{(\operatorname{tg} \tau)_m} Dx = \\ &= - \frac{M}{12} D[\ln (\operatorname{tg} \tau)_m'] \frac{D(\operatorname{tg} \tau)_m}{(\operatorname{tg} \tau)_m} \end{aligned}$$

We kunnen schrijven:

$$(\operatorname{tg} \tau)' = \frac{1}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \tau} \left[- \frac{g}{V^2} \right] = - \frac{g}{V^2 \cos^2 \tau} = - \frac{g}{u^2}$$

We kiezen de aangroeiing over het gehele vak met het symbool D en kunnen daarom bij $D[\ln (\operatorname{tg} \tau)_m']$ en $D(\operatorname{tg} \tau)_m$ de index m weglaten, zodat:

$$D[\ln (\operatorname{tg} \tau)'] = 2 \ln u_1 - 2 \ln u_0 = - \frac{2\theta}{M}$$

$$\text{dus: } - \frac{M}{12} \frac{(\operatorname{tg} \tau)''}{(\operatorname{tg} \tau)_m} (Dx)^2 = \frac{\theta D(\operatorname{tg} \tau)}{6 (\operatorname{tg} \tau)_m} = \frac{\theta \lambda}{6 M}$$

$$\text{Hierin is: } \lambda = \frac{M D(\operatorname{tg} \tau)}{(\operatorname{tg} \tau)_m} = 2 M \frac{\operatorname{tg} \tau_0 - \operatorname{tg} \tau_1}{2 (\operatorname{tg} \tau)_m}$$

Kiezen we bij benadering $2(\operatorname{tg} \tau)_m = \operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1$, dan is:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 M \frac{\operatorname{tg} \tau_0 - \operatorname{tg} \tau_1}{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1} = 2 M \frac{\sin \tau_0 \cos \tau_1 - \sin \tau_1 \cos \tau_0}{\sin \tau_0 \cos \tau_1 + \sin \tau_1 \cos \tau_0} = \\ &= 2 M \frac{\sin (\tau_0 - \tau_1)}{\sin (\tau_0 + \tau_1)} = 2 M \frac{\sin D \tau}{\sin (\tau_0 + \tau_1)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x + \frac{\theta \lambda}{6 M} = \frac{\theta}{6 M} \mu_x + \frac{\theta}{6 M} \lambda = \frac{\theta}{6 M} (\mu_x + \lambda) = \frac{\theta}{6 M} \mu_y \quad (77)$$

Opmerkingen:

1. We hebben voor $\frac{(\operatorname{tg} \tau)_m'}{(\operatorname{tg} \tau)_m}$ niet in de plaats gesteld $D[\ln (\operatorname{tg} \tau)]$,

daar in het culminatiepunt van de baan $\tau = 0$ wordt, met het gevolg dat de logarithme daar oneindig groot wordt.

2. Bij de berekening van ε_y hebben we gebruik gemaakt van de correctie op Dy en hieruit de correctie op $\log Dy$ bepaald, door te delen door $(\operatorname{tg} \tau)_m Dx$. Voor het geval dat het beschouwde baanstuk (τ_0, τ_1) aan weerszijden van het culminatiepunt ligt, kunnen we het geval krijgen dat $\tau_0 + \tau_1 = 0$. Voor dit geval zou $Dy_a = 0$ worden. Om hier geen moeilijkheden te krijgen, nemen we het culminatiepunt steeds als een eindpunt van een vak.

12.9. Overzicht van de correctieformules

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_x \\ \varepsilon_s &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_s \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_x - \frac{\theta_a^2}{12 M} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_y \end{aligned} \quad (78)$$

waarin:

$$\begin{aligned} \theta_a &= \rho_{ia} M D \xi \\ \mu_x &= D(\log \rho) - D(\log V) \\ \mu_s &= \mu_x + \sigma \\ \sigma &= \log \sec \tau_0 - \log \sec \tau_1 \\ \mu_y &= \mu_x + \lambda \\ \lambda &= 2 M \frac{\operatorname{tg} \tau_0 - \operatorname{tg} \tau_1}{\operatorname{tg} \tau_0 + \operatorname{tg} \tau_1} 10^4 = 8686 \frac{\sin D\tau}{\sin (\tau_0 + \tau_1)} \end{aligned} \quad (79)$$

Voor de praktische berekening van ε merken we op, dat $D(\log \rho)$ en $D(\log V)$ worden afgeleid tijdens de berekening van het vak. Voor λ en σ zijn tabellen, die niet in ons bezit zijn. De berekening is echter zeer eenvoudig.

Op te merken valt nog, dat bij alle berekeningen over ε , men steeds $D(\log \rho)$ mag vervangen door $D(\log \rho)_a$, enz.

12.10. Het corrigeren van x , y , s en t voor u_{1a}

Bij de keuze van u_m hebben we genomen $\sqrt{u_o u_{1a}}$ in plaats van $\sqrt{u_o u_1}$. We moeten dus nog corrigeren voor u_{1a} .

Voor x , y en s hadden we gevonden:

$$De_a = u_o u_{1a} \Lambda_\alpha$$

of
$$\log De_a = \log u_o + \log u_{1a} + \log \Lambda_\alpha$$

Hier moet feitelijk staan $\log u_1$. We vonden dat

$$\log u_1 = \log u_{1a} - \varepsilon_\theta$$

zodat hieruit volgt, dat we $\log De_a$ moeten corrigeren met $-\varepsilon_\theta$.

Voor Dt_a vonden we:

$$Dt_a = \sqrt{u_o u_{1a}} \Lambda_1$$

$$\log Dt_a = \frac{1}{2} \log u_o + \frac{1}{2} \log u_{1a} + \log \Lambda_1$$

We moeten hier dus $\log Dt_a$ corrigeren met $-\frac{1}{2} \varepsilon_\theta$.

De totale correcties voor x , y , s en t

We vinden tenslotte de volgende correcties op de aangroeiingen:

$$\text{op } \log Dx_a : \varepsilon_x - \varepsilon_\theta = \delta(\log Dx)$$

$$\text{op } \log Dy_a : \varepsilon_y - \varepsilon_\theta = \delta(\log Dy)$$

$$\text{op } \log Ds_a : \varepsilon_s - \varepsilon_\theta = \delta(\log Ds)$$

$$\text{op } \log Dt_a : \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_\theta = \delta(\log Dt)$$

(80)

12.11. De begrenzing van de correctie ϵ_{θ} op V

De correcties op $\log V$ zijn gelijk aan die op ρ_{ia} , vermenigvuldigd met $M D \xi$ (zie formule 10 van 12.2).

Volgens (52) is:

$$\rho_{ia} = \rho + \frac{\Delta \rho}{2} + \frac{D \rho - \Delta \rho}{3} + \left(\frac{\rho_{\alpha}'''}{18} - \frac{\rho_{\beta}'''}{24} \right) (D \xi)^3$$

De eerste twee termen van deze reeks zijn exact bepaald. We kunnen er nu van uitgaan, dat de vierde term te verwaarlozen is t.o.v. de derde. We moeten nu echter de derde term, dus de ϵ_{θ} begrenzen.

Voor de begrenzing van ϵ_{θ} gaat men er van uit, dat de correctie op V_1 niet groter mag zijn, dan 0.2% van V_1 , dus:

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} \leq \frac{1}{500}$$

Schrijven we dit in de vorm van een differentiaal, dan vinden we:

$$\frac{dV_1}{V_1} = d(\ln V_1) = \frac{d(\log V_1)}{M}$$

We vinden in formule (57) van 12.6:

$$\log V_1 - \log V_{1a} = -\epsilon_{\theta}$$

of:

$$\delta(\log V_1) = -\epsilon_{\theta}$$

zodat:

$$\left| \frac{\Delta V_1}{V_1} \right| = \left| \frac{\delta(\log V_1)}{M} \right| = \left| \frac{\epsilon_{\theta}}{M} \right| \leq \frac{1}{500}$$

of:

$$\left| \epsilon_{\theta} \right| \leq \frac{M}{500} = 20 M \cdot 10^{-4} = 8,68 \cdot 10^{-4} \quad (81)$$

12.12 De begrenzing van de correcties ϵ_e en ϵ_{θ} op x , y , s en t

We gaan er hier voor de begrenzing van uit, dat de correctie op De niet groter mag zijn dan 1% van De .

of:

$$\frac{\Delta (De)}{De} \leq \frac{1}{100}$$

of:

$$\frac{d(De)}{De} = d(\ln De) = \frac{d(\log De)}{M}$$

We vonden in (80), voor x , y en s :

$$\delta(\log De) = \varepsilon_e - \varepsilon_\theta$$

Werken we met de absolute waarden, zoals dat in de foutentheorie gebruikelijk is, dan krijgen we:

$$\left| \frac{\Delta(De)}{De} \right| = \left| \frac{\delta(\log De)}{M} \right| = \frac{|\varepsilon_e| + |\varepsilon_\theta|}{M} \leq \frac{1}{100}$$

$$\text{of: } |\varepsilon_e| + |\varepsilon_\theta| \leq \frac{M}{100} = 100 M \cdot 10^{-4} = 43,4 \cdot 10^{-4} \quad (82)$$

Voor t vinden we dan volgens (80):

$$|\varepsilon_t| + \frac{1}{2} |\varepsilon_\theta| \leq 43,4 \cdot 10^{-4} \quad (83)$$

ε wordt in de regel uitgedrukt in de eenheid 10^{-4} , dus dan is:

$$|\varepsilon_\theta| \leq 20 M = 8,68 \quad \text{en} \quad |\varepsilon_e| + |\varepsilon_\theta| \leq 100 M = 43,4$$

De grenzen $\frac{1}{500}$ en $\frac{1}{100}$ zijn min of meer willekeurig.

Men zou de grenzen ook anders kunnen stellen. Met deze begrenzungen blijkt uit de ervaring, dat de verwaarloosde gedeelten kleiner zijn dan $1/5$ van de aangebrachte correctie.

12.13. Het vaststellen van de amplitude $D\tau$ ten opzichte van de snelheidscorrectie ε_θ

Volgens (50) is:

$$D\rho = -\rho'_0 D\xi + \frac{\rho''_0}{2!} (D\xi)^2 - \frac{\rho'''_0}{3!} (D\xi)^3$$

$$\text{Verder uit (51a):} \quad \Delta\rho = -\rho'_0 D\xi$$

$$\therefore \frac{D\rho - \Delta\rho}{3} = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{\rho''_0}{2!} (D\xi)^2 - \frac{\rho'''_0}{3!} (D\xi)^3 \right]$$

Verwaarlozen we nu de laatste term, dan is:

$$\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\rho''_0}{3!} (D\xi)^2$$

$$\text{Uit (56):} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon}{3} M D\xi = \frac{\rho''_0}{3!} M (D\xi)^3$$

Het blijkt dus dat ε_{θ} van de grootte-orde van $(D\xi)^3$ is.

Bij een berekening wordt een zekere amplitude $D\tau$ gekozen, dit leidt tot een bepaalde $|\varepsilon_{\theta}|$. Was de keuze van $D\tau$ groter geweest, dan zou ook $|\varepsilon_{\theta}|$ groter zijn uitgevallen. Een bepaalde amplitude is slechts dan toegestaan als $|\varepsilon_{\theta}|$ niet een zodanige waarde krijgt, dat de grens van de snelheidscorrectie wordt overschreden.

Noemen we de maximum toegestane amplitude $D\tau_{\theta}$, dan definiëren we een f_{θ} , zodanig, dat:

$$f_{\theta} D\tau = D\tau_{\theta} \quad (84)$$

Nu is ε_{θ} van de orde $(D\xi)^3$, dus volgens (7) ook van de orde $(D\tau)^3$. Daar f_{θ} van de orde $D\tau$ is, zal ε_{θ} van de orde f_{θ}^3 zijn.

Bij de keuze $D\tau_{\theta}$ behoort $\varepsilon_{\theta} = 20 M$, als we ε_{θ} in de eenheid 10^{-4} uitdrukken.

Kiezen we echter $D\tau$ als amplitude, dan is

$$f_{\theta} = \frac{D\tau_{\theta}}{D\tau}$$

We hebben dan de voorwaarde:

$$\varepsilon_{\theta} f_{\theta}^3 = 20 M \quad (85)$$

of:

$$f_{\theta} = \sqrt[3]{\frac{20 M}{\varepsilon_{\theta}}}$$

Voor f_{θ} is een nomogram geconstrueerd, dat we gewoonlijk gebruiken ter bepaling van f_{θ} .

12.14. Het vaststellen van de amplitude $D\tau$ ten opzichte van de correctie ε_e

Ook voor $|\varepsilon_e|$ kiezen we een f_e , zodanig, dat:

$$f_e D\tau = D\tau_e \quad (86)$$

De correctie ε_e is van de orde $(D\xi)^2$, zodat we voor ε_e en $\varepsilon_{\theta e}$ bij de berekening van x , y en s , de volgende betrekking vinden:

$$\varepsilon_{\theta e} f_e^3 + \varepsilon_e f_e^2 = 100 M \quad (87)$$

Bij de berekening van t vinden we:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\theta t} f_t^3 + \varepsilon_t f_t^2 = 100 M \quad (88)$$

De bepaling van deze f_e -waarden komt neer op de oplossing van een derdemachtsvergelijking. Om dit te voorkomen heeft men een nomogram geconstrueerd, waaruit in verband met de waarden $\varepsilon_{\theta e}$ en ε_e , direct f is af te lezen. Dit nomogram (zie fig. 35) levert ook gemakkelijk f_{θ} . Voor de bepaling van f in het algemeen heeft dus niet te worden gerekend.

12.15. De bepaling van de maximum amplitude $D\tau_m$

De waarden van f_{θ} , f_x , enz. zijn in het algemeen verschillend. Nu is het duidelijk, dat het kleinste getal in deze beperkend optreedt. In de praktijk schrijft men dan ook niet alle waarden van f op, doch door een enkele blik op het nomogram zien we, welke waarde het kleinst is. Deze waarde leert ons de maximale toegestane aangroeiing kennen, zodat we de kleinste f -waarde noemen: f_m . De maximum toegestane amplitude of beter uitgedrukt de amplitude van zekerheid is: $D\tau_m = f_m D\tau$.

In de praktijk blijkt, dat in het ene vak bv. de snelheid beperkend optreedt ($f_{\theta} = f_m$) en in een ander vak bv. de y , zodat dan $f_y = f_m$.

12.16. Het nomogram voor ε en f

Het nomogram (zie fig. 35), dat geconstrueerd is om de modulus van nauwkeurigheid en de juiste amplitude te bepalen, gaat uit van de vergelijkingen (85) en (87):

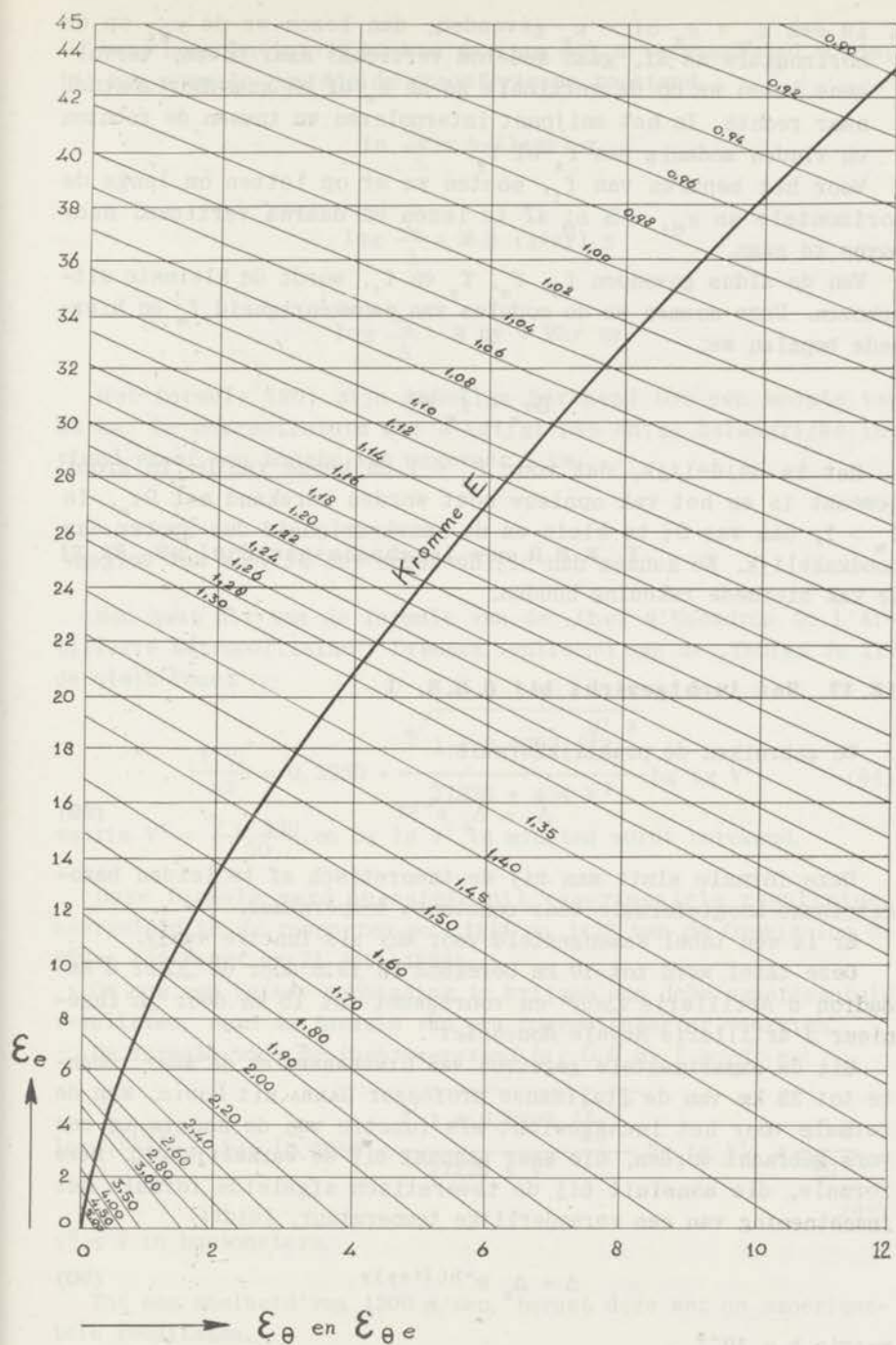
$$\varepsilon_{\theta} f_{\theta}^3 = 20 M$$

$$\varepsilon_{\theta e} f_e^3 + \varepsilon_e f_e^2 = 100 M$$

De kromme E wordt gevonden door f_{θ} op te lossen uit de eerste vergelijking. Kiest men in de tweede vergelijking een bepaalde waarde voor f_e , dan ontstaat de vergelijking van een rechte lijn in $\varepsilon_{\theta e}$ en ε_e . Voor diverse waarden van f ontstaan dus steeds rechten.

Het gebruik van het nomogram gaat als volgt:

1. Is een ε_{θ} gevonden, dan lezen we deze op de horizontale as af, vervolgens gaan we verticaal naar boven tot de kromme E en interpoleren hier tussen de rechten voor $f = \text{constant}$, waardoor een f_{θ} wordt gevonden.



Figuur 35

Nomogram ter bepaling van f_m
 (De getallen bij de rechte lijnen
 geven de waarden van f aan).

2. Is een $\varepsilon_e = \varepsilon_x$ of $= \varepsilon_y$ gevonden, dan lezen we de ε_{θ_e} op de horizontale as af, gaan wederom verticaal naar boven, vervolgens lezen we op de verticale as de ε_e af en gaan horizontaal naar rechts. In het snijpunt interpoleren we tussen de rechten en vinden zodanig een f_x of f_y .

Voor het bepalen van f_t , moeten we er op letten om langs de horizontale as $\varepsilon_{\theta_t} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\theta}$ af te lezen en daarna verticaal naar boven te gaan.

Van de aldus gevonden f_{θ} , f_x , f_y en f_t , wordt de kleinste uitgekozen. Deze noemen we de modulus van nauwkeurigheid f_m en hiermede bepalen we:

$$D\tau_m = f_m D\tau$$

Het is duidelijk, dat voor $f_m < 1$ de keuze van $D\tau$ te groot geweest is en het vak opnieuw moet worden berekend met $D\tau_m$. Is $f_m > 1$, dan was $D\tau$ te klein en de nauwkeurigheid dus groter dan noodzakelijk. We kunnen dan bij de keuze van $D\tau$ voor het volgende vak hiermede rekening houden.

12.17. Het luchtgewicht bij G.H.M. I

We gebruiken de praktijkformule:

$$\Delta_y = \Delta_0 e^{-hy} \quad (89)$$

Deze formule sluit aan bij de theoretisch af te leiden barometrische hoogteformule voor constante temperatuur.

Er is een tabel samengesteld voor M_{hy} als functie van y .

Deze tabel werd tot 10 km berekend in 1916 door de „Chef d'Escadron d'Artillerie Lyon” en voortgezet tot 15 km door „L'ingénieur d'Artillerie Navale *Mouchelet*”.

Uit de experimentele gegevens van LINDENBERG en de meer recente tot 35 km van de Italiaanse professor GAMBA uit *Pavia*, kan de formule voor het luchtgewicht als functie van de hoogte in een vorm gebracht worden, die meer aanpast bij de werkelijkheid. Deze formule, die aansluit bij de theoretisch afgeleide formule met inachtneming van een veranderlijke temperatuur, luidt:

$$\Delta = \Delta_0 e^{-h(1+ay)y} \quad (90)$$

waarin $h = 10^{-4}$

$a = 0,13 \cdot 10^{-4}$

Voor hoogten tot 10 km kan de term met a verwaarloosd worden, bij een normale gemiddelde atmosferische toestand.

$$\ln \frac{\Delta_o}{\Delta} = h (1+ay) y$$

$$\log \frac{\Delta_o}{\Delta} = M \cdot h (1+ay) y$$

$$\log \frac{\Delta_o}{\Delta} = M h y + M h y a y$$

Met formule (90) zijn tabellen berekend tot een hoogte van 90 km. De correctieterm met a krijgt pas enige belangrijke invloed vanaf een hoogte van ongeveer 7 km.

12. 18. De luchtweerstandswet van G. H. M. I

Men gaat uit van de formule van de „Chef d'Escadron de l'Artillerie Métropolitaine": DEMOGUE, ontleend aan de „Tables de Tir de plein Fouet":

$$\frac{f(V)}{V^2} = 0,2250 + \frac{\sqrt[4]{1 + 0,0392 \left(\frac{V'}{10}\right)^8}}{27226 + 494 V^2} \text{bg tg } V' \quad (91)$$

waarin $V' = \frac{V - 330}{50}$ en $\text{bg tg } V'$ in minuten wordt berekend.

Deze formule werd opgesteld uit experimentele resultaten, neergelegd in de rapporten no. 1414 en 1429 van de Commission de Gâvre (14 Maart en 21 Juli 1898).

Om nog een betere aanpassing te krijgen aan deze experimentele resultaten, werd de formule van een correctiefactor voorzien.

De formule voor de *luchtweerstand bij G.H.M. I* wordt nu:

$$\log \left[\frac{f(V)}{V^2} \right] = \log \left[0,2250 + \frac{\sqrt[4]{1 + 0,0392 \left(\frac{V'}{10}\right)^8}}{27226 + V^2} \text{bg tg } V' \right] + \frac{V^H - 6}{10^4} \quad (92)$$

$V^H = V$ in hectometers.

Tot een snelheid van 1200 m/sec, berust deze wet op experimentele resultaten.

Men heeft deze wet later geëxtrapoleerd tot $V = 2000$ m/sec, zodat we de $f(V)$ tot deze waarde in de tabellen kunnen onzoeken.

Deze extrapolatie geschiedde als volgt, dat men formule (92) berekende voor $V = 2000$ m/sec en $V = 600$ m/sec en vond:

$$\left[\log \frac{f(V)}{V^2} \right]_{2000} - \left[\log \frac{f(V)}{V^2} \right]_{600} = 0,9115 - 1$$

Vervolgens deed men hetzelfde met de *eenheidswet van Siacci*, die eveneens slechts tot een snelheid van 1200 m/sec geldt. Hier werd gevonden:

$$\left[\log \frac{f(V)}{V^2} \right]_{2000} - \left[\log \frac{f(V)}{V^2} \right]_{600} = 0,7284 - 1$$

Verder hield VIEILLE zich omstreeks 1900 bezig met de voortplanting van evenwichtsverstoringen met supersonische snelheden. Deze vond als resultaat voor snelheden van 600 m/sec en 2000 m/sec:

$$\left[\log \frac{\text{druk}}{V^2} \right]_{2000} - \left[\log \frac{\text{druk}}{V^2} \right]_{600} = 0,0183$$

Voor de extrapolatie werd nu gebruik gemaakt van het gemiddelde van deze drie, nl.: 0,8861 - 1.

We vinden met de wet van G.H.M. I voor $v = 600$ m/sec:

$$\log \frac{f(V)}{V^2} = 0,5677 - 1$$

Voor $V = 2000$ m/sec volgt dan: $\log \frac{f(V)}{V^2} = 0,4538 - 1$

Deze waarde werd nu aangehouden, waarna de volgende machtreeksen werden opgesteld:

$$\log \frac{f(V)}{V^2} = A - BV_1 + CV_1^2 - DV_1^3$$

waarin: $V_1 = \frac{V - 1050}{100}$ en $1050 < V \leq 1150$

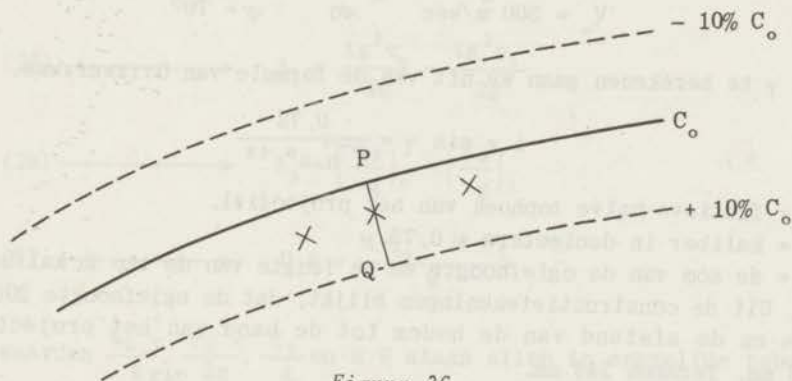
en $\log \frac{f(V)}{V^2} = E - FV_2$

waarin: $V_2 = \frac{V - 1150}{100}$ en $1150 < V \leq 2000$

12. 19. Kort overzicht van de gang van zaken bij het vervaardigen van een luchtdoelschootstafel volgens de methode G.H.M. I

1. Voor een bepaald projectiel wordt volgens formule (38) à priori een $\frac{c_0}{g}$ bepaald.

2. Voor enkele uitvaartshoeken (bv. 300‰, 500‰, 800‰, 1000‰ en 1300‰) worden met deze $\frac{c_0}{g}$ banen berekend en in grafiek gebracht.
3. Voor dezelfde uitvaartshoeken worden schietproeven genomen en experimentele punten bepaald (coördinaten in de ruimte, vluchttijd, aanvangssnelheid). Deze waarden worden gecorrigeerd voor de daginvloeden, zodat we gegevens krijgen voor een ideaal geval (lucht in rust, luchtgewicht volgens de aangenomen standaardatmosfeer).
4. Deze punten worden op de onder 2 berekende grafieken uitgezet.
5. Naar gelang de punten onder of boven de theoretische kromme liggen wordt een baan berekend met + of - 10% c_0 . Een lijn van gelijke vluchttijd PQ wordt nu getrokken en lineair geïnterpooleerd om te zien met welk percentage de c_0 uiteindelijk moet worden veranderd.



Figuur 36

Een normale projectielbaan met de ballistische coëfficiënt c_0 en twee afwijkende banen met $\pm 10\%$ c_0 . De punten x zijn experimenteel waargenomen punten.

6. Met de aldus uit schietproeven bepaalde $\frac{c_0}{g}$ wordt de schoots-tafel berekend. Per baan wordt dezelfde waarde aangehouden. De verandering van het luchtgewicht is reeds verwerkt in de tabellen. Vaak is het nodig voor steilere banen een kleine variatie te nemen in de $\frac{c_0}{g}$ t.o.v. de vlakke banen om een betere aanpassing te krijgen (v.b. 7,5 tl).
7. De cirkel wordt gesteld op 6400‰. Voor één stel begingegevens (V_0 en $\frac{c_0}{g}$) worden nu banen berekend van 100‰ tot 1500‰, om de 100‰, dus 15 banen. Tot 50° worden ze geheel doorgerekend tot het maaiveld weer bereikt is (o.a. in verband met veiligheidsmaatregelen). Boven 50° gaat men niet verder dan even voorbij het culminatiepunt. Deze berekeningen worden uitgevoerd voor:

- Het ideale geval (lucht in rust t.o.v. de aarde, luchtgewicht volgens de aangenomen standaardatmosfeer).
- Voor 10 meter/sec mee-wind en 10 meter/sec tegenwind. De correcties voor deze beide gevallen zijn tegengesteld van teken.
- Voor een met 10% verminderde V_0 (in verband met het uitslijten van het kanon).
- Voor + 10% verandering in het luchtgewicht.

12.20. Voorbeeld van berekening

Gekozen is als voorbeeld van berekening de baan van een projectiel van het kanon van $7\frac{1}{2}$ cm tegen luchtdoel.

$$V_0 = 500 \text{ m/sec} \quad \text{en} \quad \varphi = 70^\circ$$

Om γ te berekenen gaan we uit van de formule van OTTENHEIMER.

$$i = \sin \gamma = \frac{0,72}{\sqrt{h \cdot a^{0,15}}}$$

γ = fictieve halve tophoek van het projectiel.

a = kaliber in decimeters = 0,75.

h = de som van de ogiefhoogte en de lengte van de tap in kalibers.

Uit de constructietekeningen blijkt, dat de ogiefhoogte 205 mm is en de afstand van de bodem tot de band van het projectiel 38 mm. Tezamen 243 mm.

We moeten h uitdrukken in kalibers, dus $h = \frac{243}{75}$.

De berekening uitvoerende vinden we:

$$\log \sin \gamma = 9,62080 - 10$$

en dus

$$\gamma = 24^{\circ}41'$$

$$a. (38) \longrightarrow \frac{c_0}{g} = \frac{\Delta_0}{g} \frac{a^2}{p} \sin \gamma$$

$$\Delta_0 = 1,243$$

$$g = 9,812$$

$$a = 0,075$$

$$p = 6,5$$

$$\tau_0 = 70^\circ$$

$$D\tau = 25', \text{ dus}$$

$$\tau_1 = 69^{\circ}35'$$

$$\log \sin \gamma = 9,62080 - 10$$

$$\therefore \log \frac{c_0}{g} = 5,66072 - 10$$

$$b. (39) \longrightarrow \rho_o = \frac{c_o}{g} e^{-hy_o} f(V_o)$$

$$(2) \longrightarrow u_o = V_o \cos \varphi$$

$$y_o = 0$$

$$\text{dus} \quad Mhy = 0$$

$$\text{uit de tabel:} \quad \log f(V_o) = 4,9879$$

$$\therefore \log u_o = 2,23302$$

$$\rho_o = 4,4527$$

$$c. (24) \longrightarrow \Lambda_1 = \frac{\text{tg } \tau_o}{g} - \frac{\text{tg } \tau_1}{g}$$

$$(26) \longrightarrow \Lambda_1 = \frac{\text{tg}^2 \tau_o}{2g} - \frac{\text{tg}^2 \tau_1}{2g}$$

$$(28) \longrightarrow \Lambda_3 = \left[\frac{\xi_2}{g} \right]_o - \left[\frac{\xi_2}{g} \right]_1$$

$$(8) \longrightarrow D \xi = \frac{M \xi_o - M \xi_1}{M}$$

De waarden $\frac{\text{tg } \tau}{g}$, $\frac{\text{tg}^2 \tau}{2g}$, $\frac{\xi_2}{g}$ en $M \xi$ staan allen in eenzelfde tabel.
De berekening geschiedt in serie:

$$\tau_o = 70^\circ \quad \tau_1 = 69^\circ 35'$$

$$\therefore \log \Lambda_1 = 7,79330 - 10$$

$$\log \Lambda_2 = 8,22740 - 10$$

$$\log \Lambda_3 = 8,25499 - 10$$

$$\log M D \xi = 7,96110 - 10$$

$$d. (44) \longrightarrow \Delta \rho = - \rho_o (n_o \rho_o + m_o \sin \tau_o) D \xi$$

Uit de tabel van $\log f(V)$ lezen we af bij $V = 500$ m/sec:

$$n = 1,863$$

$$m = 4,412$$

$$\therefore \Delta \rho = -1,1662$$

$$e. (45) \longrightarrow \rho_{o1a} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2}$$

$$\therefore \rho_{o1a} = 3,8693$$

$$f. (11) \longrightarrow \theta_a = \rho_{o1a} M D \xi \longrightarrow 10^{-\theta_a}$$

$$(12) \longrightarrow \log u_{1a} = \log u_o - \theta_a \longrightarrow u_{1a} = u_o 10^{-\theta_a}$$

$$(2) \longrightarrow \log V_{1a} = \log u_{1a} + \log \sec \tau_1 \longrightarrow V_{1a} = u_{1a} \sec \tau_1$$

$$\therefore \theta_a = 0,03538$$

$$V_{1a} = 451,9 \quad (\text{nodig voor de berekening van } \rho_{1a})$$

$$u_{1a} = 157,6$$

$$g. (25) \longrightarrow Dx_a = u_o u_{1a} \Lambda_1 \longrightarrow w = u_o u_{1a}$$

$$(30) \longrightarrow Dt_a = \sqrt{u_o u_{1a}} \Lambda_1$$

$$(29) \longrightarrow Ds_a = u_o u_{1a} \Lambda_3$$

$$(27) \longrightarrow Dy_a = u_o u_{1a} \Lambda_2$$

$$y_{1a} = y_o + Dy_a$$

$$\therefore Dx_a = 167,5$$

$$Dt_a = 1,02$$

$$Dy_a = 455,0$$

$$Y_{1a} = 455,0$$

$$h. (37) \longrightarrow \rho_{1a} = \frac{c_o}{g} e^{-hy_{1a}} f(V_{1a})$$

$$(45) \longrightarrow D \rho_a = \rho_{1a} - \rho_o$$

$$(54) \longrightarrow \varepsilon = D \rho_a - \Delta \rho$$

$$\therefore \rho_{1a} = 3,4794$$

$$D \rho_a = -0,9733$$

$$\varepsilon = 0,1929$$

We gebruiken altijd een ε , die in de eenheid 10^{-4} wordt uitgedrukt, dus $\varepsilon = 1932$.

$$i. (78) \longrightarrow \mu_x = D (\log \rho)_a - D (\log v)_a$$

We kunnen dit ook in een andere vorm brengen, nl.

$$E = \frac{V_o \rho_{1a}}{V_{1a} \rho_o} \quad \text{en} \quad \mu_x = \log E$$

$$\therefore \mu_x = -0,0631$$

Drukken we deze μ_x wederom uit in de eenheid 10^{-4} , dan is dus $\mu_x = 631$.

$$j. (78) \rightarrow \mu_y = \mu_x + \lambda \quad \lambda = 8686 \frac{\sin D \tau}{\sin (\tau_o + \tau_1)} 10^{-4}$$

$$\mu_s = \mu_x + \sigma$$

$$\sigma = 10^4 (\log \sec \tau_o - \log \sec \tau_1)$$

$$\therefore \lambda \sim 97$$

$$\sigma \sim 86$$

$$\mu_y = -534$$

$$\mu_s = -545$$

$$k. (56) \longrightarrow \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon}{3} M D \xi \longrightarrow 10^{-\varepsilon_\theta}$$

$$(69) \longrightarrow \varepsilon_x = \frac{\theta_a}{6M} \mu_x \longrightarrow 10^{\varepsilon_x}$$

$$\therefore \varepsilon_\theta = 5,879$$

$$\varepsilon_x = -8,6$$

$$l. (78) \longrightarrow \varepsilon_y = \frac{\theta_a}{6M} \mu_y \longrightarrow 10^{\varepsilon_y}$$

$$(78) \longrightarrow \varepsilon_s = \frac{\theta}{6M} \mu_s \longrightarrow 10^{\varepsilon_s}$$

$$\therefore \varepsilon_y = -7,3$$

$$\varepsilon_s = -7,4$$

$$m. (78) \longrightarrow 2 \varepsilon_t = \varepsilon_x - \frac{(100 \theta_a)^2}{12 M} \longrightarrow 10^{\varepsilon_t}$$

In deze formule staat $100 \theta_a$ en niet θ_a , omdat ϵ met 10^4 is vermenigvuldigd.

$$\therefore \epsilon_t = -5,5$$

n. (57) $\longrightarrow \log V_1 = \log V_{1a} - \epsilon_\theta$

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} \log Dx = \log Dx_a + (\epsilon_x - \epsilon_\theta) \longrightarrow x_1 = x_o + Dx \\ \log Dy = \log Dy_a + (\epsilon_y - \epsilon_\theta) \longrightarrow y_1 = y_o + Dy \\ \log Ds = \log Ds_a + (\epsilon_s - \epsilon_\theta) \longrightarrow s_1 = s_o + Ds \\ \log Dt = \log Dt_a + \frac{2 \epsilon_t - \epsilon_\theta}{2} \longrightarrow t_1 = t_o + Dt \end{array} \right.$$

Deze formules kunnen ook in een niet logaritmische vorm geschreven worden:

$$V_1 = V_{1a} 10^{-\epsilon_\theta}$$

$$Dx = Dx_a 10^{\epsilon_x} 10^{-\epsilon_\theta} = \frac{\Lambda}{-1} w 10^{\epsilon_x} 10^{-\epsilon_\theta}$$

$$Dy = Dy_a 10^{\epsilon_y} 10^{-\epsilon_\theta}$$

$$Dt = Dt_a 10^{\epsilon_t} 10^{-\frac{\epsilon_\theta}{2}} = \Lambda_1 \sqrt{w} 10^{\epsilon_t} \sqrt{10^{-\epsilon_\theta}}$$

$$\therefore v_1 = 451,3 \text{ m/sec}$$

$$Dx = 166,9$$

$$x_1 = 166,9$$

$$Dy = 453,6$$

$$y_1 = 453,6$$

$$Ds = 483,5$$

$$s_1 = 483,5$$

$$Dt = 1,018$$

$$t_1 = 1,018$$

o. $\epsilon_\theta = 5,9$

$$\epsilon_{\theta_x} = 5,9$$

en

$$\epsilon_x = 8,6$$

volgens nomogram $f = 1,14$

volgens nomogram $f_x = 1,57$

$$\epsilon_{\theta_y} = 5,9$$

en

$$\epsilon_y = 7,3$$

volgens nomogram $f_y = 1,60$

$$\epsilon_{\theta_s} = 5,9$$

en

$$\epsilon_s = 7,4$$

volgens nomogram $f_s = 1,60$

$$\frac{\epsilon_{\theta_t}}{2} = 3,0$$

en

$$\epsilon_t = 5,5$$

volgens nomogram $f_t = 1,95$

De kleinste waarde van f moeten we aanhouden, zodat

$$f_m = 1,14$$

en dus

$$D\tau_m = f_m D\tau$$

$$D\tau_m = 1,14 \times 25^1 = 28,5^1$$

12.21. Rekenschema's G.H.M. I

Rekenblad I

$V_0 =$

$\varphi =$

$\log \frac{c_0}{g} =$

VAK Nr.	1	2	3	4
τ_1				
$M\xi_0$				
$M\xi_1$				
$MD\xi$				
$\frac{\text{tg } \tau_1}{g}$	$\text{tg } \tau_0$			
	g			
	A_1			
$\frac{\text{tg}^2 \tau_1}{2g}$	$\frac{\text{tg}^2 \tau_0}{2g}$			
	A_2			
ϱ_0				
$n_0 \times \varrho_0 + m_0 \times \sin \tau_0 = A$				
$-A \times \varrho_0 \times MD\xi \times 2,303 = +A_0$				
$0,5 \cdot A_0 + \varrho_0 = \varrho_{0,1}$				
$\varrho_{0,1} \times MD\xi = \theta_{1,1}$				
	$10^{-\theta_{1,1}}$			
$\frac{V_0}{\sec \tau_0} = U_0$				
$U_0 \times 10^{-\theta_{1,1}} = U_{1,1}$				
$U_{1,1} \times \sec \tau_1 = V_{1,1}$				
$U_{1,1} \times U_0 = w$				
$w \times A_2 = DY_{1,1}$				
$DY_{1,1} + Y_0 = Y_{1,1}$				
$\varrho_{1,1}$				
$\varrho_{1,1} - \varrho_0 - A_0 = \epsilon$				
$0,3333 \epsilon \times MD\xi = \epsilon_{1,1}$				

Rekenblad II

$V_0 =$

$\varphi =$

$\log \frac{c_0}{g} =$

VAK Nr.	1	2	3	4
V_0				
Y_0				
Dt				
$\tau_0 + \tau_1$				
10^{-t_0}				
$\frac{V_1 \times e_{1a}}{V_{1a} \times e_0} = E$				
$\log E = \mu_x$				
$\frac{n D\tau \times 0,8686}{\sin(\tau_0 + \tau_1)} = \lambda$				
μ_y				
$\theta_x \times 0,3837 \times \mu_x = r_x$				
10^{r_x}				
$\theta_x \times 0,3837 \times \mu_y = r_y$				
10^{r_y}				
$r_x - \frac{e_{1a}^2}{5,212} = r_1$				
10^{r_1}				
f_m				
$f_m \times D\tau$				
$V_{1a} \times 10^{-t_{1a}} = V_1$				
$A_1 \times w \times 10^{r_x} \times 10^{-t_{1a}} = DX$				
$DX + X_0 = X_1$				
$DY_x \times 10^{r_y} \times 10^{-t_{1a}} = DY$				
$DY + Y_0 = Y_1$				
$\sqrt{w} \times A_1 \times 10^{r_1} \times \sqrt{10^{-t_{1a}}} = Dt$				
$Dt + t_0 = t_1$				

H o o f d s t u k 13

DE METHODE GARNIER, HAAG, MARCUS 1929 (G.H.M. II)

13.1. Inleiding

In aansluiting op de methode G.H.M. I verscheen in 1929 in het „Mémorial de l'Artillerie française" 1^{er} fascicule, een nieuwe methode vervaardigd door de heren, GARNIER, HAAG en MARCUS (G.H.M. II). De theoretische opzet van deze methode is principieel dezelfde als die van G.H.N. I. In de methode 1929 komt echter een nieuw begrip naar voren, namelijk een luchtweerstandswet als functie van de verhouding tussen de snelheid van het projectiel en de snelheid van het geluid. Deze verhouding noemt men het getal van MACH.

Alvorens hier nader op in te gaan merken we op, dat de mathematische vormgeving het noodzakelijk maakt, dat we enkele vereenvoudigende veronderstellingen invoeren. Deze veronderstellingen resulteren hierin, dat het projectiel gedurende zijn vlucht onderworpen is aan twee versnellingen, nl.:

- a. de versnelling der zwaartekracht g , constant in grootte en richting.
- b. de vertraging ten gevolge van de luchtweerstand, voortdurend veranderend van grootte, maar steeds gericht volgens de raaklijn aan de baan en tegen de bewegingsrichting in.

Deze laatste vertraging wordt voorgesteld door ρg , dus ρ maal de versnelling der zwaartekracht, waarbij ρ dus een getal voorstelt.

De vertraging ten gevolge van de luchtweerstand, dus ρg wordt verkregen door het product van twee factoren, ten eerste de ballistische coëfficiënt c , ten tweede de luchtweerstandswet $F(V)$, dus:

$$\rho g = c F(V) \quad (1)$$

13.2. De ballistische coëfficiënt

Deze wordt uitgedrukt door:

$$c = i \frac{\Delta a^2}{p} : \frac{h}{a} = i \frac{\Delta a^3}{p h} \quad (2)$$

waarin:

i = vormwaarde.

Δ = het gewicht van 1 m^3 lucht op de beschouwde hoogte y .

a = diameter van het projectiel in meters.

p = gewicht van het projectiel in kg.

h = hoogte van het ogief van het projectiel in meters.

De ballistische coëfficiënt volgens (2) verschilt in zoverre van die van G.H.M. I, dat hier nog extra de verhouding tussen de ogiefhoogte en de diameter is ingevoerd.

In deze ballistische coëfficiënt komt voor, behalve constante factoren, de veranderlijke grootte Δ .

Daarom schrijven we:

$$c = i \frac{\Delta a^3}{p h} = i \frac{\Delta_0 a^3 \Delta}{p h \Delta_0} = c_0 \frac{\Delta}{\Delta_0} \quad (3)$$

waarin Δ_0 het gewicht van 1 m^3 lucht op zeeniveau voorstelt, volgens de aangenomen standaardatmosfeer. We zien dus dat, voor een bepaald projectiel, c_0 een constante grootte is.

We veronderstellen, dat de lucht voldoet aan de wet van BOYLE-GAY-LUSSAC, dan is dus voor droge lucht:

$$P v = R \theta$$

waarin P de spanning, v het volume, R de gasconstante en θ de absolute temperatuur is op een bepaalde hoogte y .

Is Δ het gewicht van 1 m^3 lucht op deze hoogte dan geldt voor 1 kg lucht het volume:

$$v = \frac{1}{\Delta}$$

Is H de barometerstand op de hoogte y , dan is dus:

$$H \frac{1}{\Delta} = R \theta$$

$$\Delta = \frac{H}{R \theta}$$

$$\text{waarin } R = \frac{760 \text{ (mm Hg)}}{1,2932 \text{ (kg/m}^3) \times 273 \text{ (}^\circ\text{K)}} = 2,153 \frac{\text{mm Hg}}{\text{kg/m}^3 \cdot ^\circ\text{K}}$$

Is de lucht vochtig en is f de spanning van de waterdamp, dan gaat de formule over in:

$$\Delta = \frac{H - \frac{3}{8} f}{R \theta}$$

$$\Delta = \frac{H}{R \theta} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{H}\right)$$

en daar de verhouding van f tot H altijd klein is, kan men deze formule schrijven:

$$\Delta = \frac{H}{R \theta \left(1 + \frac{3}{8} \frac{f}{H}\right)} \quad \text{of} \quad \Delta = \frac{H}{R \theta'} \quad (4)$$

waarbij dan $\theta' = \theta \left(1 + \frac{3}{8} \frac{f}{H}\right)$ d.i. de absolute temperatuur, waarin de correctie voor de vochtigheidstoestand verwerkt is.

Nu is:

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{H}{R \theta'} \frac{R \theta'_0}{H_0} = \frac{H}{H_0} \frac{\theta'_0}{\theta'} \quad (5)$$

Men kiest nu bij deze methode voor 1 kg normale lucht, het gewicht $\Delta_0 = 1,208 \text{ kg/m}^3$, hetgeen overeen komt met:

$$H_0 = 755,33 \text{ mm}$$

$$\theta_0 = 289 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\theta'_0 = 290,46 \text{ }^\circ\text{K}$$

Bij deze laatste waarde is een vochtigheidstoestand van 75% aangenomen.

Formule (3) krijgt nu m. b. v. (5) de vorm:

$$c = c_0 \frac{H}{H_0} \frac{\theta'_0}{\theta'} \quad (6)$$

13.3. De luchtweerstand

We hebben in 4.4 reeds een en ander medegedeeld over de invloed van de geluidssnelheid op de luchtweerstand. Dit rekening houden met de geluidssnelheid is het essentiële verschil tussen de beide methoden G.H.M.

We schrijven de snelheidsfunctie $F(V)$ uit (1) nu als volgt:

$$F(V) = K_1 V^2$$

Hierin is K_1 een functie van de verhouding van V en de vierkantswortel uit de absolute temperatuur. Splitsen we deze verhouding af in een nieuwe functie, dan krijgen we:

$$F(V) = K_2 V^2 \varphi\left(\frac{V}{\sqrt{\theta}}\right) \quad (7)$$

Nu is K_2 dus niet meer afhankelijk van de verhouding van V en de vierkantswortel uit de absolute temperatuur.

Beschouwen we naast een milieu waarin een projectiel zich met een snelheid V beweegt en waarin een temperatuur θ heerst, een milieu waarin een temperatuur θ_0 heerst, terwijl het projectiel een dusdanige snelheid heeft, dat:

$$\frac{V}{\sqrt{\theta}} = \frac{V_0}{\sqrt{\theta_0}} \quad (8)$$

In dit laatste milieu hebben we een proefondervindelijk bepaalde luchtweerstandswet $F(V_0)$.

De functie φ is in beide milieu's dezelfde.

Delen we nu

$$F(V_0) = K_2 V_0^2 \varphi\left(\frac{V_0}{\sqrt{\theta_0}}\right)$$

op (7) dan krijgen we:

$$\frac{F(V)}{F(V_0)} = \frac{K_2 V^2 \varphi\left(\frac{V}{\sqrt{\theta}}\right)}{K_2 V_0^2 \varphi\left(\frac{V_0}{\sqrt{\theta_0}}\right)}$$

en dus, daar

$$\varphi\left(\frac{V}{\sqrt{\theta}}\right) = \varphi\left(\frac{V_0}{\sqrt{\theta_0}}\right)$$

$$\frac{F(V)}{F(V_0)} = \frac{V^2}{V_0^2}$$

en dus volgens (8):

$$\frac{F(V)}{F(V_0)} = \frac{\theta}{\theta_0}$$

$$F(V) = \frac{\theta}{\theta_0} F(V_0) = \frac{\theta}{\theta_0} F\left(V \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}\right) \quad (9)$$

De snelheid van het geluid v is evenredig met de vierkantswortel uit de absolute temperatuur, dus:

$$\frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}} \quad (10)$$

Formule (9) gaat nu over in:

$$F(V) = \frac{\theta}{\theta_0} F\left(\frac{V}{v} v_0\right) \quad (11)$$

Daar v_0 constant is, zien we hier dus een nieuwe veranderlijke optreden, namelijk de verhouding tussen de projectiel- en de geluidssnelheid.

$$b = \frac{V}{v} \quad (12)$$

$$F(V) = \frac{\theta}{\theta_0} F(b) \quad (13)$$

Behalve van de temperatuur is v ook afhankelijk van de vochtigheidstoestand. Is f de spanning van de waterdamp in de lucht, dan wordt de snelheid van het geluid gecorrigeerd door te vermenigvuldigen met $(1 + 0,16 \frac{f}{H})$.

Hierdoor wordt v bij een temperatuur θ en een spanning van de waterdamp f gelijk aan:

$$\begin{aligned} v_{\theta, f} &= \frac{v_{273}}{\sqrt{273}} (1 + 0,16 \frac{f}{H}) \sqrt{\theta} = \frac{331,3}{\sqrt{273}} (1 + 0,16 \frac{f}{H}) \sqrt{\theta} = \\ &= 20,05 \sqrt{(1 + 0,32 \frac{f}{H}) \theta} \quad (14) \end{aligned}$$

$\frac{f}{H}$ is klein, daardoor kunnen we $(\frac{f}{H})^2$ verwaarlozen.

0,32 nult dicht bij 0,375 en in verband met het klein zijn van $\frac{f}{H}$ nemen we $(1 + 0,32 \frac{f}{H}) \theta \sim (1 + \frac{3}{8} \frac{f}{H}) \theta = \theta'$.

Hierdoor wordt de waarde van v :

$$v = 20,05 \sqrt{\theta'} \quad (15)$$

De verhouding $\frac{\theta}{\theta_0}$ in de uitdrukking voor $F(v)$ in (13) vervangen we door $\frac{\theta'}{\theta_0}$, daar het verschil tussen θ en θ' gering is.

We krijgen nu door deze substituties m. b. v. (6) en (13):

$$\begin{aligned} \rho g &= c F(V) = c_0 \frac{H}{H_0} \frac{\theta'}{\theta_0} \frac{\theta'}{\theta_0} F(b) \\ \rho g &= c_0 \frac{H}{H_0} F(b) = c_0 \zeta F(b) \quad (16) \end{aligned}$$

Dit is dus de vorm, waarin we de vertraging tengevolge van de luchtweerstand uitdrukken.

Wanneer de wet $F(b)$ grafisch wordt weergegeven, blijkt voor $b=1$, dus voor de snelheid van het projectiel gelijk aan de snelheid van het geluid, een discontinuïteit te bestaan (zie 4.4).

13.4. Ontwerp voor de baanberekening

Opmerking: De tabellen die hierin voortdurend genoemd worden, zijn de tabellen A, B, C en D, betrekking hebbende op de methode G.H.M. II (1929), „Calcul des tables et abaques de tir”, uitgegeven door de Imprimerie Nationale, Paris 1929.

De theorie van deze methode is te vinden in het „Mémorial de l'Artillerie française” 1929, 1^{er} fascicule.

Het volgende vraagstuk vraagt nu om een oplossing. Uit de gegeven aanvangssnelheid en schootshoek, tezamen met de hiervoor afgeleide uitdrukkingen van de verschillende vertragingen en invloeden waaraan het projectiel gedurende zijn vlucht onderworpen is, de vorm van de gevolgde baan te bepalen.

Dat komt dus hier op neer, dat we analytische uitdrukkingen moeten vinden, die het mogelijk maken de grootte der veranderlijken die de baan bepalen, te berekenen. Deze veranderlijken zijn, wanneer we in het vlak van de baan een assenstelsel aannemen met de x-as horizontaal en de y-as verticaal door het beginpunt der beweging:

De coördinaten x en y , de tijd t waarin een baangedeelte doorlopen wordt, de lengte van de doorlopen boog s , de snelheid V , de horizontale snelheid u en de helling τ van de baan.

We kiezen van al deze veranderlijke grootheden de helling τ van de baan als onafhankelijk veranderlijke. Daar het niet mogelijk is analytische uitdrukkingen voor de hele baan ineens te vinden, waaruit we de bovengenoemde veranderlijken, *de elementen van de baan*, kunnen vinden, verdelen we de baan in voldoende kleine bogen en berekenen we uit de begingegevens van iedere boog de elementen van het uiteinde. De elementen van het uiteinde van de ene boog zijn dan begingegevens van de daarop volgende boog.

We gaan nu als volgt te werk:

Iedere boog wordt bepaald door de hoeken τ_0 en τ_1 , die de raaklijnen in de uiteinden maken met de horizontaal.

- a. In de eerste plaats wordt berekend de waarde ρ_0 voor ρ aan het begin van de boog, vervolgens een tussenliggende gemiddelde waarde ρ_m voor ρ .
- b. Daarna worden de benaderde waarden aan het einde van de boog berekend voor de horizontale snelheid u_{1a} , de tangentiële snelheid V_{1a} , de hoogte y_{1a} , de aangroeiingen van x en y , de Dx_a en Dy_a . Evenzo van de booglengte en de tijdsduur waarin het baangedeelte doorlopen wordt, Ds_a en Dt_a . De index a geeft aan, dat we te doen hebben met benaderde waarden.
- c. Uit V_{1a} en y_{1a} berekenen we ρ_{1a} .
- d. Verder worden bepaald de waarden van de correctie ε_θ van de

logarithmen van u_{1a} en V_{1a} evenals de correcties ε_x , ε_y , ε_s en ε_t op de logarithmen van de aangroeiingen van x , y , s en t .

- e. Wanneer de diverse aangroeiingen bekend zijn, worden door somming de waarden van x , y , s en t aan het einde van de boog bepaald.
- f. Ten slotte wordt achteraf aan de hand van deze correctiegrootheden bepaald hoe groot $(\tau_1 - \tau_0)$ genomen moet worden, ten einde met voldoende nauwkeurigheid te werk te kunnen gaan.

13.5. De baanberekening

Daar de wiskundige methode van G.H.M. II slechts op enkele punten afwijkt van G.H.M. I, zullen we in hoofdzaak naar laatstgenoemde afleiding verwijzen.

We gaan weer uit van de ballistische hoofdvergelijking:

$$\frac{du}{u} = \rho \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (17)$$

waarin:

$$u = V \cos \tau \quad (18)$$

$$\rho g = c_0 \zeta F(b) \quad (19)$$

$$c_0 = i \frac{\Delta_0 a^3}{p h} \quad (20)$$

Hierin is:

u = de horizontale snelheidscomponent van het projectiel.

τ = de hoek tussen de raaklijn en het horizontale vlak.

ρg = de vertraging door de luchtweerstand.

c_0 = de ballistische coëfficiënt op zeeniveau.

$\zeta = H_y/H_0$ = de verhouding tussen de luchtdrukken op hoogte y en op zeeniveau.

$F(b)$ = de luchtweerstandsfunctie.

b = het getal van MACH.

Δ_0 = het soortelijk gewicht in kg/m^3 op zeeniveau.

a = het kaliber van het projectiel in meters.

h = de hoogte van het ogief in meters.

p = het projectielgewicht in kg.

i = de vormwaarde.

Integreren we vergelijking (17) in een vak, onder aanname van een benaderde middelwaarde ρ_{ia} , dan is:

$$\int_{u_0}^{u_{1a}} \frac{du}{u} = \rho_{ia} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (21)$$

$$\ln u_{1a} - \ln u_0 = \rho_{ia} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_1}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_0}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Schrijven we

$$\frac{d\tau}{\cos \tau} = d\xi$$

en

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos \tau} = -D\xi$$

dan is:

$$\ln u_{1a} = \ln u_0 - \rho_{ia} D\xi$$

$$\log u_{1a} = \log u_0 - \rho_{ia} M D\xi = \log u_0 - \theta_a \quad (23)$$

In tabel C, behorende bij G.H.M. II, vinden we de functie

$$M\xi = M \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)$$

getabelleerd als functie van τ , zodat we $M D\xi = M\xi_0 - M\xi_1$ kunnen uitrekenen.

Uit u_{1a} is nu af te leiden:

$$V_{1a} = \frac{u_{1a}}{\cos \tau_1} \quad (24)$$

Voor de benaderde aangroeiingen in het vak vinden we, evenals bij G.H.M. I:

$$Dx_a = u_0 u_{1a} D\left(\frac{\operatorname{tg} \tau}{g}\right) = u_0 u_{1a} \Lambda_1 \quad (25)$$

$$Dy_a = u_0 u_{1a} D\left(\frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{2g}\right) = u_0 u_{1a} \Lambda_2 \quad (26)$$

$$Ds_a = u_0 u_{1a} D\left(\frac{\xi_2}{g}\right) = u_0 u_{1a} \Lambda_3 \quad (27)$$

$$Dt_a = \sqrt{u_0 u_{1a}} D\left(\frac{\operatorname{tg} \tau}{g}\right) = \sqrt{u_0 u_{1a}} \Lambda_1 \quad (28)$$

Bij deze integratie is een tweede benadering ingevoerd, door in plaats van de veranderlijke u een middelwaarde

$$u_m = \sqrt{u_o u_{1a}} \quad (29)$$

aan te nemen.

Uit dezelfde reeksontwikkeling als van hoofdstuk 12, formule (36), blijkt, dat de benaderingen van (25) t/m (28), er op neerkomen, dat we uitsluitend de eerste term van deze reeks hebben gekozen. Dit is een goede benadering, daar de volgende term van de reeks al van de 3^e orde in DW is.

Voor de benaderde waarde van ρ kiezen we:

$$\rho_{ia} = \rho_{o1a} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2} \quad (30)$$

Voor $\Delta \rho$ wordt dan weer de aangroeiing in het vak genomen, als we in ρ_o een raaklijn aan de ρ - τ kromme trekken (zie fig. 34). Met de reeksontwikkeling van 12.6 vinden we de daar afgeleide formule (52):

$$\rho_{ia} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2} + \frac{D \rho - \Delta \rho}{3} \left(\frac{\rho_{\alpha}'''}{3 \cdot 3!} - \frac{\rho_{\beta}'''}{4!} \right) (D \xi)^3 \quad (31)$$

Verwaarlozen we de term met $(D\xi)^3$, daar deze zeer klein is door de derde macht en de grote noemers, dan blijkt dus alleen de derde term $\frac{D \rho - \Delta \rho}{3}$ nog niet in rekening te zijn gebracht.

De derde term van de reeksontwikkeling voert men echter in als correctieterm van de vorm:

$$\epsilon = (D \rho - \Delta \rho)$$

waarin;

$$D \rho = \rho_{ia} - \rho_o \quad (31a)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\epsilon}{3} M D \xi = \frac{1}{3} (D \rho - \Delta \rho) M D \xi \quad (31b)$$

13.6. De berekening van ρ

Door de logarithmische differentiering van de uitdrukking (19):

$$\rho = \frac{c_o}{g} \zeta F(b)$$

Krijgen we:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{dF(b)}{F(b)} \quad (32)$$

Daar nu:

$$r = H/H_o$$

is:

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dH}{H} \quad (33)$$

We voeren de *weerstandsgraad* n in, gedefinieerd als:

$$n = \frac{d[\ln F(b)]}{d(\ln b)} = \frac{\frac{F'(b)}{F(b)} db}{\frac{db}{b}} = \frac{b F'(b)}{F(b)} = \frac{b}{F(b)} \frac{dF(b)}{db}$$

$$\therefore \frac{dF(b)}{F(b)} = n \frac{db}{b} \quad (34)$$

Vergelijking (32) wordt nu m. b. v. (33) en (34):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dH}{H} + n \frac{db}{b} \quad (35)$$

Noemen we de geluidssnelheid v_0 bij de temperatuur θ'_0 , dan is bij een willekeurige temperatuur θ' , deze:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\theta'}{\theta'_0}} \quad (36)$$

Nu is:

$$b = \frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0 \sqrt{\frac{\theta'}{\theta'_0}}} \quad (37)$$

Logarithmisch gedifferentieerd:

$$\frac{db}{b} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{d\theta'}{\theta'} \quad (38)$$

Vergelijking (38) invoerende in (35) krijgen we:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dH}{H} + n \frac{dv}{v} - \frac{n}{2} \frac{d\theta'}{\theta'} \quad (39)$$

In de tabellen voor de standaardwaarden van de atmosfeer vinden wij nu de volgende functies getabelleerd:

$$- \frac{d(\ln H)}{dy} = k \quad (40)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta')}{dy} = 1 \quad (41)$$

Dit invoerende in vergelijking (39) vinden we:

$$\frac{d\rho}{\rho} = n \frac{dv}{v} - (k - n/2) dy \quad (42)$$

Daar men in de berekeningen de hoek van de raaklijn met het horizontale vlak heeft ingevoerd als onafhankelijke variabele, moet $d\rho$ uitgedrukt worden in $d\tau$. Daartoe moeten we dus dV en dy uitdrukken in $d\tau$. Uit de ballistische hoofdvergelijking (17) volgt als we u vervangen door $V \cos \tau$:

$$d(V \cos \tau) = \rho V d\tau$$

$$\cos \tau dV - V \sin \tau d\tau = \rho V d\tau$$

$$\therefore \frac{dV}{V} = (\rho + \sin \tau) \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (43)$$

Nu geeft vergelijking (16) van 6.1:

$$dy = -\frac{V^2}{g} \sin \tau \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (44)$$

Wanneer we (43) en (44) invoeren in (42), vinden we:

$$\frac{d\rho}{\rho} = [n(\rho + \sin \tau) + \frac{V^2}{g} \sin \tau (k-nl)] \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad (45)$$

We voeren nu de volgende grootheden in:

$$\left. \begin{aligned} \rho + \sin \tau &= R \\ \frac{V^2}{g} &= \gamma \\ k - nl &= h \\ \frac{d\tau}{\cos \tau} &= d\xi \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Vergelijking (45) wordt nu:

$$\frac{d\rho}{\rho} = (nR + h \gamma \sin \tau) d\xi \quad (47)$$

Vervangen wij de differentiaalquotienten door de differenties dan wordt tenslotte, als we tevens $M D\xi$ invoeren, die uit de tabellen van G.H.M. is af te leiden

$$\Delta \rho = -\frac{\rho |M D \xi|}{M} (nR + \gamma \sin \tau h) \quad (48)$$

$$M D \xi = M \xi_0 - M \xi_1 \quad (49)$$

Nadat men $\Delta \rho$ heeft berekend voor n_0 , R_0 , γ_0 , h_0 , τ_0 en ρ_0 kan

men verder ook een eerste benadering vaststellen voor u_1 volgens (23):

$$\log u_{1a} = \log u_o - \left(\rho_o + \frac{\Delta \rho}{2}\right) M D \xi \quad (50)$$

en met behulp hiervan berekent men de hoogtoename Dy_a m. b. v. (26). We vinden nu:

$$y_{1a} = y_o + Dy_a \quad (51)$$

Uit (50) volgt:

$$V_{1a} = \frac{u_{1a}}{\cos \tau_1} \quad (52)$$

Met behulp van (51) en (52) bepalen we een nieuwe b_{1a} en $\log F(b_{1a})$ en hieruit weer een ρ_{1a} .

13.7. De correctietermen

Willen we nu de juiste eindwaarden der verschillende elementen bepalen uit de benaderde waarden, dan moeten we rekening houden met de benaderingen die we gebruikt hebben. Dat zijn:

- 1e. Bij het bepalen van ρ_{1a} hebben we de term $\delta \rho_{1a} = \frac{D \rho - \Delta \rho}{3}$ weggelaten (zie formule 30 en 31).
- 2e. Voor u_m hebben we de meetkundig middelevenredige genomen tussen u_o en u_{1a} (zie formule 29).

We moeten dus nagaan welke invloed deze factoren uitoefenen op het eindresultaat.

13.8. De invloed van $\delta \rho_{1a}$

Het is niet nodig de grootte van $\delta \rho_{1a}$ te bepalen en met deze nu bekende waarde weer de berekening te beginnen. We kunnen er mee volstaan de terugslag na te gaan op de in het voorgaande benaderde elementen.

Voeren we in de notaties $D \rho_a = \rho_{1a} - \rho_o$ en $\varepsilon = D \rho_a - \Delta \rho$. Deze laatste uitdrukking is wanneer we $D \rho_a$ vervangen door $D \rho$ gelijk aan de teller van $\delta \rho_{1a}$. We zagen bij G.H.M. I (formule 52 van 12.6) dat het verschil tussen ρ_{1a} en ρ_1 van de derde orde is in $D \xi$ en gelijk aan de restterm van deze reeks, waardoor dit verschil verwaarloosd kan worden.

We mogen dus schrijven:

$$\delta \rho_{1a} = \frac{D \rho_a - \Delta \rho}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

13.9. De correctie op de snelheid

We hadden:

$$\log u_{1a} = \log u_o - \theta_a$$

(zie formule 23)

$$\log V_{1a} = \log u_{1a} + \log \sec \tau_1$$

(zie formule 24).

Hierin was $\theta_a = \rho_{ia} M D \xi$ en de fout die we gemaakt hebben door $\delta \rho_{ia}$ te verwaarlozen stellen we:

$$\varepsilon_\theta = \delta \rho_{ia} M D \xi = \frac{\varepsilon}{3} M D \xi \quad (53)$$

We krijgen dus:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\log u_1) &= -\varepsilon_\theta \\ \delta(\log V_1) &= -\varepsilon_\theta \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

13.10. Het corrigeren van x, s, t en y voor u_m

We zagen bij G.H.M. I (formule 66a van 12.7), dat het vervangen van de veranderlijke u, door het meetkundig gemiddelde $u_m = \sqrt{u_o u_1}$, aanleiding gaf tot een correctieterm:

$$\varepsilon_x = -\frac{\theta}{6M} [D(\log V) - D(\log \rho)]$$

We stelden: $D(\log V) - D(\log \rho) = -\mu_x$

zodat: $\varepsilon_x = \frac{\theta}{6M} \mu_x$

Doordat we in u_m de u_1 vervangen door u_{1a} komt hierbij nog de correctie op u_{1a} , nl. $-\varepsilon_\theta$.

Voor s, t en y vinden we eveneens dezelfde correcties als bij G.H.M. I.

We geven hier een overzicht van de correctieformules, die analoog zijn aan die van G.H.M. I.

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_x \\ \varepsilon_s &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_s \end{aligned} \right] \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_x - \frac{\theta_a^2}{12 M} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\theta_a}{6M} \mu_y \end{aligned} \quad (55)$$

waarin:

$$\begin{aligned} \theta_a &= \rho_{ia} M D \xi \\ \mu_x &= D(\log \rho) - D(\log V) \\ \mu_s &= \mu_x + \sigma \\ \sigma &= \log \sec \tau_o - \log \sec \tau_1 \\ \mu_y &= \mu_x + \lambda \\ \lambda &= 2 M \frac{\operatorname{tg} \tau_o - \operatorname{tg} \tau_1}{\operatorname{tg} \tau_o + \operatorname{tg} \tau_1} 10^4 = 8686 \frac{\sin D\tau}{\sin(\tau_o + \tau_1)} \end{aligned} \quad (56)$$

Op te merken valt, dat in de formules (55) en (56) de θ is vervangen door θ_a . Dit vindt zijn oorzaak in het feit, dat in plaats van de werkelijke waarde van ρ een benadering ρ_{ia} is aangenomen. Dit laatste wordt weer in orde gebracht door de correctieterm $-\varepsilon_\theta$.

We vinden nu als uiteindelijke correcties:

$$\left. \begin{aligned} \text{op } \log D x_a: & \quad \delta(\log Dx) = \varepsilon_x - \varepsilon_\theta \\ \text{op } \log D y_a: & \quad \delta(\log Dy) = \varepsilon_y - \varepsilon_\theta \\ \text{op } \log D s_a: & \quad \delta(\log Ds) = \varepsilon_s - \varepsilon_\theta \\ \text{op } \log D t_a: & \quad \delta(\log Dt) = \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_\theta \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Voor de begrenzing van de correcties ε_θ en ε_e , het vaststellen van de amplitude $D\tau$ en het nomogram, kunnen we verwijzen naar de methode G.H.M. I (12.11 tot en met 12.16).

13.11. Het geval dat V_1 of De klein is

Wanneer V_1 of De klein worden, kunnen we niet blijven vasthouden aan dezelfde begrenzing voor $\frac{\delta V_1}{V_1}$ of $\frac{\delta(De)}{De}$

Dit zou hier op neer komen, dat we voor δV_1 en $\delta(De)$ extra kleine grenzen gingen bepalen, terwijl de rest van de berekening niet van dezelfde graad van nauwkeurigheid zou zijn.

Is k de gebruikelijke grens op de correctie $\frac{\delta L}{L}$ ($L = V_1$ of De), dan is de limiet van de correctie op L gelijk aan kL . Wanneer we deze limiet vasthouden, terwijl we L kleiner laten worden, dan krijgen we als nieuwe limiet op de relatieve correctie:

$$k' = k \frac{L}{V_1} \text{ of } K \frac{L}{De} \text{ in plaats van } k.$$

Practisch zeggen we, dat V_1 klein is beneden de 100 m/sec, Dx , Dy en Ds beneden de 50 m en Dt beneden 0.5 sec. Om nu dezelfde limiet op de absolute correctie te behouden moeten we de limiet op de relatieve correctie in bovenstaand geval vermenigvuldigen met $\frac{100}{V_1}$ voor V_1 , $\frac{50}{De}$ voor De ($e = x, y, s$) en met $\frac{0.5}{dt}$ voor Dt of wat hetzelfde is, de betrokken $|e|$ vermenigvuldigen met $\frac{V_1}{100}$ wanneer $V_1 < 100$, met $\frac{De}{50}$ wanneer $De < 50$ en met $\frac{Dt}{0.5}$ wanneer $Dt < 0.5$.

13.12. De berekening der discontinue punten

In het voorafgaande bij de beschouwing van de functie $F(b)$ hebben we gezien, dat er discontinue punten in de kromme voor kunnen komen en wel daar waar de snelheid van het geluid gelijk is aan de projectielsnelheid.

Al heeft deze discontinuïteit geen directe gevolgen op de continuïteit van de elementen van de baan, voor hun afgeleiden en voor ρ , die we bij de berekening geregeld gebruiken, zullen we daar wel rekening mee moeten houden.

Daarom moeten we de punten van discontinuïteit opsporen, om ze samen te laten vallen met de deelpunten van de baan.

Voor die punten is $V = v$, $b = 1$ en $\log b = 0$.

Waar zullen deze punten optreden?

In de *stijgende tak* van de baan vermindert en de snelheid van het projectiel en de snelheid van het geluid, hoewel de snelheid van het projectiel veel vlugger afneemt. Is dus de aanvangssnelheid kleiner dan die van het geluid, dan zal geen geval ontstaan waarvoor $V = v$.

Is de aanvangssnelheid groter dan v , dan kan discontinuïteit ontstaan, de $\log b$ gaat dan van positief over in negatief.

In de *dalende tak* bereikt de snelheid van het projectiel eerst een minimum, daarna wordt zij weer groter, terwijl de snelheid van het geluid steeds toeneemt. In de dalende tak kunnen dus twee discontinue punten voorkomen.

Gedurende de berekening kunnen we uit het gedrag van $\log b$, wanneer deze logarithme namelijk of van de positieve of van de negatieve kant tot nul nadert, opmaken waar ongeveer een discontinu punt op zal treden.

Zijn we dus in de berekening zo ver, dat in de volgende boog het discontinu punt te verwachten is, dan moeten we de waarde τ_1 , van dat punt eerst berekenen. We beschouwen het discontinu punt als het eindpunt van deze boog.

Nu geldt dus $D(\log b) = \log b_1 - \log b_0 = 0 - \log b_0 = -\log b_0$. De onbekende is hier τ , of omdat we daar gemakkelijker mee kunnen werken ξ .

We gaan uit van de identiteit $d\xi = \frac{d\xi}{d(\ln b)} d(\ln b)$

Opmerking: In het hierna volgende gebruiken we weer de grootheden R , l en γ , die ingevoerd zijn bij de berekening van $d\rho$ (13.6).

Integreren over de boog $\tau_0 \tau_1$ geeft

$$\xi_0 - \xi_1 = \int_{\ln b_1}^{\ln b_0} \frac{d\xi}{d(\ln b)} d(\ln b)$$

Ontwikkelen we $\frac{d\xi}{d(\ln b)}$ volgens TAYLOR, zoals in het voorafgaande al meermalen gedaan is, vermenigvuldigen we vervolgens iedere term met $d(\ln b)$ en integreren we dan term voor term tussen $\ln b_0$ en $\ln b_1$, dan krijgen we daar $\ln b_1 = 0$ en dus $D(\ln b) = -\ln b_0$:

$$\xi_0 - \xi_1 = \left[\frac{d\xi}{d(\ln b)} \right]_0 \ln b_0 - \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\xi}{d(\ln b)^2} \right]_0 \ln^2 b_0 + \frac{1}{6} \left[\frac{d^3\xi}{d(\ln b)^3} \right]_0 \ln^3 b_0$$

waarbij deze laatste term betrekking heeft op een tussenliggende waarde van de veranderlijke. Overgaande naar gewone logarithmen vinden we:

$$M \xi_0 - M \xi_1 = MD \xi = \left[\frac{d\xi}{d(\ln b)} \right]_0 \log b_0 - \frac{1}{2M} \left[\frac{d^2\xi}{d(\ln b)^2} \right]_0 \log^2 b_0 + \frac{1}{6M^2} \left[\frac{d^3\xi}{d(\ln b)^3} \right]_0 \log^3 b_0 \quad (58)$$

De eerste afgeleide van ξ naar $\ln b$ krijgen we door uit te gaan van het omgekeerde $\frac{d(\ln b)}{d\xi}$.

$$\frac{d(\ln b)}{d\xi} = \frac{d(\ln V)}{d\xi} - \frac{d(\ln v)}{d\xi}$$

daar

$$b = \frac{V}{v}$$

Nu is

$$\frac{d \ln (V)}{d \xi} = \frac{dV}{V} \frac{1}{d\xi} = R d\xi \frac{1}{d\xi} = R$$

$$\text{Verder is } \frac{d(\ln v)}{d \xi} = \frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta')}{d \xi} = -\frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta')}{dy} \left(-\frac{dy}{d\xi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta')}{dy} \left(-\frac{dy}{d\tau} \cos \tau\right) = -\frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta')}{dy} \frac{v^2}{g} \cos \tau \operatorname{tg} \tau = l \gamma \sin \tau$$

$$\text{Dus } \frac{d(\ln b)}{d \xi} = R - l \gamma \sin \tau$$

en

$$\frac{d \xi}{d(\ln b)} = \frac{1}{R - l \gamma \sin \tau}$$

De tweede afgeleide krijgen we door bovenstaande uitdrukking nog eens naar $\ln b$ te differentieren.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d(\ln b)^2} &= -\frac{1}{(R - l \gamma \sin \tau)^2} \frac{d(R - l \gamma \sin \tau)}{d \xi} \frac{d \xi}{d(\ln b)} = \\ &= -\frac{1}{(R - l \gamma \sin \tau)^3} \frac{d(R - l \gamma \sin \tau)}{d \xi} \end{aligned}$$

Nu is:

$$\frac{d(R - l \gamma \sin \tau)}{d \xi} = \frac{dR}{d\xi} - l \gamma \cos \tau \frac{d\tau}{d\xi} - l \sin \tau \frac{d\gamma}{d\xi} - \gamma \sin \tau \frac{dl}{d\xi}$$

We nemen aan, dat $\frac{dl}{d\xi} = 0$, daar l zeer weinig verandert.

$$R = \rho + \sin \tau$$

dus

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{d\rho}{d\xi} + \cos \tau \frac{d\tau}{d\xi}$$

$$\therefore \frac{d(R - l \gamma \sin \tau)}{d\xi} = \frac{d\rho}{d\xi} + (1 - l \gamma) \cos \tau \frac{d\tau}{d\xi} - l \sin \tau \frac{d\gamma}{d\xi} \quad (59)$$

$$\text{Verder is } \frac{d\rho}{d\xi} = (n R + h \gamma \sin \tau) \rho = P \rho$$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{d\tau}{\cos \tau} = \cos \tau$$

$$\frac{\frac{d\gamma}{d\xi}}{\gamma} = \frac{2V \frac{dV}{d\xi}}{V^2} = \frac{2 \frac{dV}{d\xi}}{V} = 2 \frac{dV}{V} \frac{1}{d\xi} = 2 R$$

We vinden dus:

$$\frac{d^2\xi}{d(\ln b)^2} = - \frac{1}{(R - 1 \gamma \sin \tau)^3} [P \rho + (1 - 1 \gamma) \cos^2 \tau - 2R 1 \gamma \sin \tau] \quad (60)$$

Om nu $M D \xi$ uit (58) te berekenen, beginnen we met een benadering door de eerste term:

$$(M D \xi)_a = \left[\frac{d\xi}{d(\ln b)} \right]_o \log b_o = \frac{\log b_o}{(R - 1 \gamma \sin \tau)_o} \quad (61)$$

De hier gebruikte grootheden zijn alle bekend daar ze betrekking hebben op het begin van het te berekenen vak.

De tweede benadering van $M D \xi$ krijgen we door de tweede term van deze reeks (58) toe te voegen. Beschouwen we deze tweede benadering als een correctie ϵ_ξ , dan is:

$$\epsilon_\xi = - \frac{1}{2M} \left[\frac{d^2\xi}{d(\ln b)^2} \right]_o \log^2 b_o$$

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{2M} \frac{\log^2 b_o}{(R - 1 \gamma \sin \tau)_o^3} [P \rho + (1 - 1 \gamma) \cos^2 \tau - 2R 1 \gamma \sin \tau]_o$$

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{2M} \frac{(M D \xi)_a^2}{(R - 1 \gamma \sin \tau)_o} [P \rho + (1 - 1 \gamma) \cos^2 \tau - 2R 1 \gamma \sin \tau]_o \quad (62)$$

Voor de praktijk is de som van de eerste twee termen van de reeks voldoende, dus:

$$M \xi_o - M \xi_1 = M D \xi = (M D \xi)_a + \epsilon_\xi \quad (63)$$

Alle grootheden in $(M D \xi)_a$ en ϵ_ξ vinden we ook reeds in de berekening op het rekenblad, zodat de berekening van het laatste lid geen moeilijkheden oplevert.

Ook $M \xi_o$ is bekend, zodat we dus $M \xi_1$ vinden. Terugzoeken in tabel C geeft dan de τ_1 , die voldoende dicht bij het discontinue punt gelegen is.

Het is nu mogelijk de baan te berekenen voor een gegeven aanvangssnelheid, een gegeven beginhoek τ en een gegeven $\frac{c_o}{g}$.

13.13. De formules te gebruiken bij het schema van G.H.M. II

$$(23) \longrightarrow \log u_{1a} = \log u_o - \theta_a \longrightarrow u_{1a} = \frac{u_o}{10^{\theta_a}}$$

$$\theta_a = \rho_{1a} M D \xi \longrightarrow 10^{\theta_a}$$

$$(24) \longrightarrow \log V_{1a} = \log u_{1a} + \log \sec \tau_1 \longrightarrow V_{1a} = u_{1a} \sec \tau_1$$

$$(25) \text{ en } (28) \longrightarrow \begin{cases} Dx_x = u_o u_{1a} \Lambda_1 \\ \Lambda_1 = \frac{\text{tg } \tau_o}{g} - \frac{\text{tg } \tau_1}{g} \\ Dt_a = \sqrt{u_o u_{1a}} \Lambda_1 \end{cases}$$

$$(26) \longrightarrow Dy_a = u_o u_{1a} \Lambda_2 \longrightarrow y_{1a} = Dy_a + y_o$$

$$\Lambda_2 = \frac{\text{tg}^2 \tau_o}{2g} - \frac{\text{tg}^2 \tau_1}{2g}$$

$$(19) \longrightarrow \rho_o = \frac{c_o}{g} \zeta F(b_o) \longrightarrow \rho_{1a} = \frac{c_o}{g} \zeta_{1a} F(b_{1a})$$

$$(46) \longrightarrow \begin{cases} R_o = \rho_o + \sin \tau_o \\ \gamma = \frac{V_o^2}{g} \end{cases}$$

$$(40) \longrightarrow k_o = - \frac{d(\ln H_o)}{dy}$$

$$(41) \longrightarrow l_o = - \frac{1}{2} \frac{d(\ln \theta_o')}{dy}$$

$$(34) \longrightarrow n_o = \frac{b_o F'(b_o)}{F(b_o)}$$

$$(46) \longrightarrow h_o = k_o - n_o l_o$$

$$(48) \longrightarrow \Delta \rho = - \frac{\rho_o |M D \xi|}{M} (n_o R_o + h_o \gamma_o \sin \tau_o)$$

$$(30) \longrightarrow \rho_{1a} = \rho_o + \frac{\Delta \rho}{2}$$

$$(31a) \longrightarrow \begin{cases} D \rho_a = \rho_{1a} - \rho_o \\ \varepsilon = D \rho_a - \Delta \rho \end{cases}$$

$$(31b) \longrightarrow \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon}{3} M D \xi \longrightarrow 10^{\varepsilon_\theta}$$

$$(54) \longrightarrow \begin{cases} \delta(\log u_1) = \log u_1 - \log u_{1a} = - \varepsilon_\theta \longrightarrow u_1 = \frac{u_{1a}}{10^{\varepsilon_\theta}} \\ \delta(\log V_1) = \log V_1 - \log V_{1a} = - \varepsilon_\theta \longrightarrow V_1 = \frac{V_{1a}}{10^{\varepsilon_\theta}} \end{cases}$$

$$(55) \longrightarrow \epsilon_x = -\frac{D(\log u)}{6M} [D(\log \rho) - D(\log V)] = \frac{\theta_a}{6M} \mu_x$$

$$(23) \longrightarrow \theta_a = -D(\log u) = \log u_o - \log u_{1a}$$

$$(56) \longrightarrow \mu_x = D(\log \rho) - D(\log V)$$

$$D(\log \rho) = \log \rho_{1a} - \log \rho_o$$

$$D(\log V) = \log V_{1a} - \log V_o$$

$$(55) \longrightarrow \epsilon_t = \frac{1}{2} (\epsilon_x - \frac{\theta_a^2}{12M})$$

$$(55) \longrightarrow \epsilon_y = \frac{\theta_a}{6M} \mu_y$$

$$(56) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_y = \mu_x + \lambda \\ \lambda = 8686 \frac{\sin D\tau}{\sin(\tau_o + \tau_1)} \end{array} \right.$$

$$(23) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = \log u_o - \log u_1 \\ \theta_a = \log u_o - \log u_{1a} \end{array} \right.$$

$$- \epsilon_\theta = \log u_1 - \log u_{1a}$$

$$(57) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log Dx = \log Dx_a + \epsilon_x - \epsilon_\theta \longrightarrow Dx = Dx_a 10^{\epsilon_x - \epsilon_\theta} \\ \log Dy = \log Dy_a + \epsilon_y - \epsilon_\theta \longrightarrow Dy = Dy_a 10^{\epsilon_y - \epsilon_\theta} \\ \log Dt = \log Dt_a + \epsilon_t - \frac{1}{2} \epsilon_\theta \longrightarrow Dt = Dt_a 10^{\epsilon_t - \frac{1}{2} \epsilon_\theta} \end{array} \right.$$

13.14. Rekenchema's G.H.M. II

Rekenblad I

$$V_0 = \quad \varphi = \quad \log \frac{C_0}{g} =$$

VAK Nr	1	2	3	4
τ_1				
$M\xi_0$				
$M\xi_1$				
$MD\xi$				
$\frac{\text{tg } \tau_0}{g}$				
$\frac{\text{tg } \tau_1}{g}$				
A_1				
$\frac{\text{tg}^2 \tau_0}{2g}$				
$\frac{\text{tg}^2 \tau_1}{2g}$				
A_2				
$\log V_0 + \text{colog } v_0 = \log b_0$				
e_0				
$(k_0 - n_0) \times \frac{V_0^{100}}{9,8118} \times \sin \tau_0 + n_0 \times (e_0 + \sin \tau_0) = A$				
$-A \times e_0 \times MD\xi \times 2,303 = + \Delta e$				
$0,5 \Delta e + e_0 = e_{01a}$				
$e_{01a} \times MD\xi = e_{0a}$				
10^{-0a}				
$\frac{V_0}{\sec \tau_0} = U_0$				
$U_0 \times 10^{-0a} = U_{1a}$				
$U_{1a} \times \sec \tau_1 = V_{1a}$				
$U_{1a} \times U_0 = w$				
$w \times A_2 = DY_a$				
$DY_a + Y_0 = Y_{1a}$				
$\log V_{1a} + \text{colog } v_{1a} = \log b_{1a}$				
e_{1a}				
$e_{1a} - e_0 - \Delta e = \epsilon$				
$0,3333 \epsilon \times MD\xi = e_0$				

Rekenblad II

$V_a =$

$\varphi =$

$\log \frac{C_0}{g} =$

VAK Nr:	1	2	3	4
V_0				
Y_0				
$D\tau$				
$r_0 + r_1$				
10^{-e_0}				
$\frac{V_0 \times \rho_{1a}}{V_{1a} \times \rho_0} = E$				
$\log E = \mu_x$				
$\frac{\sin D\tau \times 0,8686}{\sin (r_0 + r_1)} = \lambda$				
μ_y				
$(\theta_a + r_0) \times 0,3837 \times \mu_x = e_x$				
10^{e_x}				
$(\theta_a + r_0) \times 0,3837 \times \mu_y = e_y$				
10^{e_y}				
$r_x = \frac{(\theta_a + r_0)^2}{5,212}$				
10^{e_t}				
$f_m \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_t \end{pmatrix}$				
$f_m \times D\tau$				
$V_{1a} \times 10^{-e_0} = V_1$				
$A_1 \times w \times 10^{e_x} \times 10^{-e_0} = DX$				
$DX + X_0 = X_1$				
$DY_a \times 10^{e_y} \times 10^{-e_0} = DY$				
$DY + Y_0 = Y_1$				
$\sqrt{10^{-e_0} \times w \times A_1 \times 10^{e_t}} = D\tau$				
$D\tau + t_0 = t_1$				

Hulpschema voor het discontinue punt b = 1

$$V_0 =$$

$$\varphi =$$

$$\log \frac{C_0}{g} =$$

VAK Nr	1	2	3	4
$\log b_0$				
ℓ_0				
$\frac{V_0^{200}}{9,8118} = \gamma$				
$\ell_0 + \sin \tau_0 = R$				
$\gamma \ell_0 \sin \tau_0 = Q$				
$R - Q$				
$\frac{\log b_0}{R - Q} = MD \xi_a$				
$k_0 - n_0 \ell_0 = h$				
$\ell_0 (h \gamma \sin \tau_0 + n_0 R)$				
$(1 - \gamma \ell_0) \cos^2 \tau_0$	+			
$2 R Q$				
P				
$\frac{(MD \xi_a)^2 \times P}{0,8686 \times (R - Q)} = \epsilon_\xi$				
$M \xi_0 - MD \xi_a - \epsilon_\xi = M \xi_1$				
τ_1				
$\tau_0 - \tau_1 = D \tau$				

SUMMARY

The purpose of this monograph is to explain the theories, which form the basis for the calculation of the data of trajectories for terrestrial and anti-aircraft guns under normal atmospheric conditions. The methods, which are discussed in detail viz the method of SIACCI for terrestrial guns and the methods of GARNIER, HAAG, MARCUS 1918 (G.H.M. I) and GARNIER, HAAG, MARCUS 1929 (G.H.M. II) for anti-aircraft guns, are now being used in Dutch centres for ballistics.

In the first chapter certain formulae for trajectories in vacuum are derived, together with the equation of the safety-curve. Chapter 2 discusses the disturbances of the equilibrium of the atmosphere caused by a projectile flying respectively, at subsonic, sonic and supersonic velocities. In the latter case the wave front at the head of the projectile is explained. All external influences on a projectile rotating in the atmosphere are analysed in chapter 3, together with the simplifications, needed for the mathematical treatment of the problem. The gyroscopic effect is explained in greater detail, with emphasis on the importance of an accurate rotating velocity of the projectile with a view to its stability in the trajectory.

Chapter 4 is devoted to the theory of the air-resistance and an explanation of various air-resistance laws. A method is described to determine experimentally an air-resistance law. This section also describes the modern theory which takes into account the changes in the velocity of sound as a function of temperature for the determination of the air-resistance. The so-called degree of resistance is also explained.

The fifth chapter describes the methods used to allow for the density of the air in ballistic problems. The definition of the standard atmosphere is explained and some theoretical and experimental formulae for the density of the air as a function of altitude are given.

The differential equations of the trajectory are given in chapter 6 assuming that the projectile may be regarded as a material point. From these equations the accurate and the approximate main ballistic equations are derived. Furthermore chapter 7 discusses some general properties of the trajectory in the atmosphere.

In chapter 8 the main problem of exterior ballistics is explained and the five different ways in which this problem can be

solved. The methods of OTTO-LARDILLON and BASHFORTH are mentioned in this connection.

The approximate main ballistic equation is integrated in chapter 9, with the use of the so-called primary functions. DIDION'S and DIDION-BERNOULLI'S methods and the first and the second method of SIACCI are mentioned here. The formulae derived in chapter 9 are used in chapter 10 to derive the formulae used in SIACCI'S third method, introducing the so-called secondary functions. FASELLA'S tables which are needed for this method, are also discussed.

Chapter 11 discusses the solution of the main problem of exterior ballistics with the help of a series of Mc LAURIN, PITON-BRESSANT'S and DUCHÊNE'S methods are also mentioned in this connection.

Finally, chapters 12 and 13 present a detailed derivation of the two methods of GARNIER, HAAG, MARCUS used for the computation of anti-aircraft trajectories. A complete derivation is given of the mathematical theory which forms the bases of these methods. Because more accurate values should be obtained for these anti-aircraft trajectories, they are computed arc by arc. Moreover these methods have the advantage that the accuracy of the calculated values can be kept under control.

R É S U M É

Ce mémoire traite des théories nécessaires au calcul des données indispensables des trajectoires, dans des circonstances atmosphériques normales, concernant le tir de plein fouet et le tir anti-aérien.

Y seront traitées en détail, la méthode de SIACCI pour le tir de plein fouet et la méthode de GARNIER, HAAG, MARCUS de 1918 (G.H.M. I), et celle de GARNIER, HAAG, MARCUS de 1929 (G.H.M. II) pour le tir anti-aérien.

Ce sont actuellement les méthodes employées dans les centres balistiques des Pays-Bas.

Chapitre 1. Quelques formules concernant la trajectoire dans le vide et ensuite l'équation de la parabole de sécurité.

Chapitre 2. Les perturbations de l'équilibre, causées par un projectile qui se déplace dans l'atmosphère, à des vitesses respectivement subsoniques, soniques et ultrasoniques.

Explication dans les conditions de vitesse ultrasonique, de la surface d'onde à la tête du projectile.

Chapitre 3. Influences extérieures agissant sur un projectile rotatif dans l'atmosphère et simplifications nécessaires pour traiter mathématiquement le problème.

Détails sur l'effet gyroscopique: nécessité d'une vitesse de rotation exacte du projectile, en tenant compte de la stabilité du projectile dans la trajectoire.

Chapitre 4. Résistance de l'air et les lois qui y ont trait. Méthode pour déterminer de façon expérimentale, la résistance de l'air. Théorie moderne du changement de la vitesse du son avec la température, en déterminant la résistance de l'air.

Explication point par point du degré de résistance.

Chapitre 5. Densité de l'air dans la balistique. Atmosphère-étalon et quelques formules théoriques et pratiques concernant la densité de l'air en fonction de l'altitude.

Chapitre 6. Equations différentielles de la trajectoire en considérant le projectile comme un point matériel.

De ces équations dériveront l'hodographe et l'équation approchée.

Chapitre 7. Quelques caractères généraux de la trajectoire dans l'atmosphère.

Chapitre 8. Problème principal de la balistique extérieure. Façon de résoudre ce problème de cinq manières différentes. Méthode de OTTO-LARDILLON et de BASHFORTH.

Chapitre 9. Intégration de l'équation principale approchée à l'aide de l'introduction des fonctions primaires. Méthodes de DIDION, de DIDION-BERNOULLI ainsi que la première et la seconde méthode de SIACCI.

Chapitre 10. Modification de ces formules suivant la troisième méthode de SIACCI, avec l'introduction des fonctions secondaires. Examen des tableaux de FASELLA qui doivent, nécessairement, être joints à cette méthode.

Chapitre 11. Problème principal de la balistique extérieure en utilisant la série de MC LAURIN. Examen des méthodes de PITON-BRESSANT et de DUCHÊNE.

Chapitres 12 et 13. Examen détaillé des deux méthodes anti-aériennes de GARNIER, HAAG, MARCUS.

En usant de ces méthodes, calcul des trajectoires, par arcs successifs, ce qui permet d'obtenir des résultats plus exacts qu'en employant la méthode de SIACCI.

Ces méthodes auront le grand avantage de permettre de contrôler le degré d'exactitude des valeurs calculées.

L I T E R A T U U R O V E R Z I C H T

A. Hand- en leerboeken voor de uitwendige ballistiek

- | | |
|-----------------------------|---|
| C. Cranz | Lehrbuch der Ballistik (1925). I & Ergänzungsband (1936). (Duits, met uitgebreide literatuuropgave). |
| L. Hänert | Geschütz und Schuss (1928). (Duits). |
| Dufrénois, Risser & Rousier | Les méthodes actuelles de la balistique extérieure (1921). (Frans). |
| P. Charbonnier | Traité de balistique extérieure I & II (1921). (Frans). |
| P. Curti | Einführung in die äussere Ballistik (1944). (Zwitsers). |
| R. Sängler | Ballistische Störungstheorie (1949). (Zwitsers). |
| L. Besse | Cours de balistique extérieure (1947). (Frans). |
| H.J.A. Feber | Handleiding tot de kennis der artillerie, afd. tactiek, hoofdstuk I, het schieten (1923, met apart tabellenboek). (Nederlands). |
| G.H.C. van Dijk | Handleiding tot de kennis der artillerie, afd. tactiek, hoofdstuk I, het schieten, aanhangsel (1933). (Nederlands). |
| A.R. Russer | Ballistische vraagstukken (1893). (Hoofdzakelijk voor de opleiding van cadetten). |
| J. Ottenheimer | Balistique extérieure (1924). |
| Gey - Teichmann | Einführung in die Lehre vom Schuss (1934). (Duits). |
| H. Athen | Ballistik (1941). (Duits, inwendige en uitwendige ballistiek). |
| Heydenreich | Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln I & II (1898). (Duits). |
| Delachet & Faillé | La balistique (Presses universitaires de France, 1951). (Populair, over inwendige en uitwendige ballistiek). |
| H. Lorenz | Ballistik, die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuss (1917). (Duits). |
| Moulton | New methods in exterior ballistics. (Amerikaans). |

- I.N. Bingen La technique de l'artillerie, Tome II, Balistique extérieure (Belgisch).
- L.S. Dederick Ballistic computation (Aberdeen).
- Aberdeen proving ground Computation of firing tables for U.S. Army.
- W. Bevelander Voordrachten over uitwendige ballistiek. (Technische Staf, 1951).
- W. Bevelander Cursus uitwendige ballistiek voor de cadetten der K.M.A. (1952).
- J. Darpas Cours d'armes navales. Balistique extérieure (1950).
- E.J. Mc Shane, Exterior ballistics (1953). (Amerikaans).
- J.L. Kelley & F.V. Reno

B. Belangrijke tijdschriftartikelen en rapporten over de uitwendige ballistiek

- M.R. Winter Évolution de la balistique en France de 1918 à 1940 (Mémorial de l'artillerie française XX, 2, 1946, pg. 479 e.v.). Overzicht van de Franse ballistische literatuur, verschenen tussen 1918 en 1940).
- Mémorial de l'artillerie française (1926) Bibliographie générale de l'artillerie technique. (Hierop zijn regelmatig aanvullingen verschenen).
- M. Garnier Calcul des trajectoires par arcs successifs (1918) & Annexes. (Uitgave van: Mission de balistique des tirs aériens. Theoretische behandeling van de methode G.H.M. I).
- M. Garnier Calcul des tables et abaques de tir (Mémorial de l'artillerie française 1929, 1e fasc.). (Theoretische behandeling van de methode G.H.M. II).
- Ilmari Llikkanen Zur Störungstheorie der äusseren Ballistik (1943 Helsinki, Societas Scientiarum Fennica).
- Lennart Simons Geschossabweichungen infolge der Erdrehung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes (1943, Societas Scientiarum Fennica).
- Åke Silberhielm Projectilbanans beräkning A. I. H. S.-method 1949 (Zweden, Artilleri Tidskrift 1950, Häfte 1, pg. 11).

- L. S. Dederick The effect of the rotation of the earth on the motion of shells and bombs (Aberdeen 1952).
- A. N. Winter Tables numériques de balistique extérieure (methode G.H.M. 1929).
Tome I. Calculs relatifs aux portées X et aux rendements r (1948).
Tome II. Calculs relatifs aux durées de trajet t (1948).
Tome III. Calculs relatifs aux flèches et abscisses du sommet y_s et x_s , aux vitesses restantes et angles de chute V_ω et ω (1948).
Tome IVa. Coefficients différentiels de portée (1948).
Tome IVb. Coefficients différentiels de portée et de dérivation (1948).
Annexe II. Poids des couches pour les corrections aérologiques de portée (1948).
- Direction des Études et Fabrication d'armement (L. Besse)
Réseaux des portées, méthode G.H.M. 1929. (1949)/1953).
- A. N. Winter & D. T. Le Prado Aide - mémoire du bureau des calculs.
I. Balistique intérieure (1950).
II. Balistique intermédiaire (1950).
V. Aérologie (1950).
- Over de elasticiteit van de lucht:*
- Dufrénois Revue d'artillerie, Maart 1921.
- Darrieus Mémorial de l'artillerie française 1922, pg. 241.
- Langevin Mémorial de l'artillerie française 1922, pg. 253.
- Jouquet Mémorial de l'artillerie française 1922, pg. 267.
- Garnier Mémorial de l'artillerie française 1922, pg. 271.
- Dupuis Mémorial de l'artillerie française 1928, pg. 613.
- Garnier Mémorial de l'artillerie française 1931, pg. 977.
- Logger Militaire spectator 1936, pg. 222.

Verder wordt dit onderwerp besproken in:

Cranz	Ergänzungsband (1936), pg. 34.
Curti	Äussere ballistik (1944), pg. 111.
Sänger	Ballistische Störungstheorie (1949), pg. 71.
Wedderburn	Elasticity and ballistic temperature.

C. Tijdschriften van belang voor de ballistiek

Mémorial de l'artillerie française (Frans).
Flugwehr und Flugtechnik (Zwitsers).
Journal of aeronautical Sciences (Amerikaans).
Artillerie bulletin (Nederlandse Marine).
Journal of atmospheric and terrestrial physics (Engels).
Bulletin d'information technique et scientifique (Ministère des Armées, France).
Militair technisch tijdschrift (Nederlands 1927 t/m 1931).
Zeitschrift für das gesamte Schiess- und Sprengstoffwesen (Duits).
Journal of applied physics (Amerikaans).
Anti-aircraft Journal (Amerikaans).
Index aeronauticus (Amerikaanse literatuuroverzichten van de nieuwste verschenen literatuur).
Artilleristische Monatshefte.
Wehrtechnische Hefte.

D. Inwendige ballistiek

J. Corner	Theory of the interior ballistics of guns (1950). (Amerikaans).
Diverse auteurs	Internal ballistics (Londen 1951, Uitgave van het Ministry of Supply).
F. Gossot & R. Liouville	Balistique intérieure (1922).
C. Cranz	Lehrbuch der Ballistik II (1925) & Ergänzungsband (1936).
J. Ottenheimer	Balistique intérieure (1926).
Artillerieschool Den Helder	Dictaat inwendige ballistiek.
J. Darpas	Cours d'armes navales. Balistique intérieure (1951).
Jooss	Chargements en explosif (1952).

E. Ballistiek van raketten

- Koninklijk Instituut
van Ingenieurs
J.H. Greidanus
S.F. Erdmann
J.M.J. Kooy &
J.W.H. Uytendogaart
M.P. Blanc
B.J. Roover, R.P. Newton
& G.L. Gross
G.P. Sutton
G. de Koningh
G. de Koningh
G. de Koningh
E. Burgess
- Verslag over het symposium betreffende raketten (1949). (algemeen).
Principes en prestaties van supersone raketten (N. L. L. rapport F 27, 1948). (algemeen).
Leistungen und Entwicklungsbedingungen von Ueberschallraketen (N. L. L. rapport F 6, 1947). (algemeen).
Ballistics of the future (1947). (uitwendige ballistiek).
Principes de la balistique extérieure des engins autopropulsés, type V2 (Mémorial de l'artillerie française 1949, 2e fasc. pg. 311 - 385). (uitwendige ballistiek).
Mathematical theory of rocket flight (1947). (Hoofdzakelijk van belang pg. 1 - 39 en Appendix I over de straalbuis-theorie).
Rocket propulsion elements (1948). (theoretisch naslagwerk, van belang voor de ontwikkeling van een raket. Met uitgebreide literatuuropgave. Inwendige ballistiek).
Een beschouwing over raketten, meer speciaal kruitraketten. (lezing 1948, niet uitgegeven).
Enkele methoden in de loop der jaren ontwikkeld in verband met de rakettenballistiek. (Samengesteld 1948, doch niet uitgegeven).
Literatuuroverzicht van artikelen over raketten, bevattende de gehele wereldliteratuur tot 1948. (niet uitgegeven).
Rocket propulsion (with an introduction to the idea of interplanetary travel). (1952).

F. *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek (met inbegrip van steekproeven).*

- Statistica Nederlands tijdschrift.
- N.C. Grotendorst Beginselen der waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten (1910).
- G. Josselin de Jong Beginselen van de waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten, in het bijzonder toegepast op de ballistiek (1917).
- J.M. Pool Leerboek der waarschijnlijkheidsrekening en haar toepassing op de theorie der waarnemingsfouten (1938).
- D.H.G. Brethouwer Beginselen van de statistica - ballistica. (1949).
- J.G. Stridiron Handboek der bedrijfseconomische statistiek (1947). (Speciaal voor steekproeven en correlatierekening).
- E.C. Molina Poissons exponential binomial limit.
- National Bureau of Standards Tables of the binomial probability distribution.
- Office of technical services Tables of the culmulative binomial probabilities.
- R. von Mises Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik (1943).
- L.W. Shaw Double sampling inspection plans (Aberdeen 1942).
- F.E. Grubbs On designing single sampling inspection plans (Aberdeen 1948).
- F.E. Grubbs Some methods for estimating precision of measuring instruments and product variability (Aberdeen 1948).
- A. Golub The determination of acceptance numbers for placing a lot from which a single sample is drawn into one of three grades (Aberdeen 1951).
- L.W. Shaw & A. Stein Tables of acceptance probabilities for double sampling plans with $N_2 = 2 N_1$ (Aberdeen 1943).

G. *Electronische rekenapparatuur*

- | | | |
|------------------------------|---|---|
| A. van Wijngaarden | } | Symposium over moderne rekenmachines (1949, Nederlands tijdschrift voor natuurkunde). |
| W.L. v.d. Poel | | |
| F. Zernike | | |
| H. Freudenthal | | |
| Y. Boxma | | Electronische rekenapparaten. Mathematische grondslagen (1950). |
| L. Kosten | | Electronische rekenmachines. Algemene opbouw en uitvoeringsvormen (1950). |
| W.L. v.d. Poel | | A simple electronic digital computer (1951). |
| A.J. Leenhouts | | Electronische tijdmetr (1952). |
| G.R. Boulanger | | Faut-il construire une grande machine mathématique en Belgique? (1951). |
| National Bureau of Standards | | Seac - computer (1950). |
| A.L. Leiner | | System specifications for the dyseac computer (National Bureau of Standards 1952). |

H. *Wiskunde*

- | | |
|---------------------------|---|
| J.B. Scarborough | Numerical mathematical analysis (Londen 1950). |
| C. Runge & H. König | Vorlesungen über numerisches Rechnen (Berlin 1924). |
| H. Margenau & G.M. Murphy | The mathematics of physics and chemistry (1943). |
| E. Madelung | Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers (1943). |
| Ph. Frank & R. von Mises | Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (1943). |
| L. Collatz | Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (1951). |

I. *Diverse onderwerpen*

- | | |
|---------|---|
| Garnier | Tabellen, behorende bij de methode G.H.M. I (1918). |
| Garnier | Tabellen, behorende bij de methode G.H.M. II (1929). (Tabel A, B, C, D en E). |

- E. Fasella Tavole balistiche (1901). Tabellen, behorende bij de methode Siacci.
- F. Krupp Tabellen zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit für vor der Mündung gemessene Bahngeschwindigkeiten von 100-1500 m. (berustend op de methode Siacci-Fasella).
- Joints Chiefs of Staff Dictionary of United States military terms (1950).
- Patard Historique de la Commission d'expériences de Gâvre. (Tirage a part spécial du Mémorial de l'artillerie française.)
- Commissie van Handboek (1952).
 Proefneming

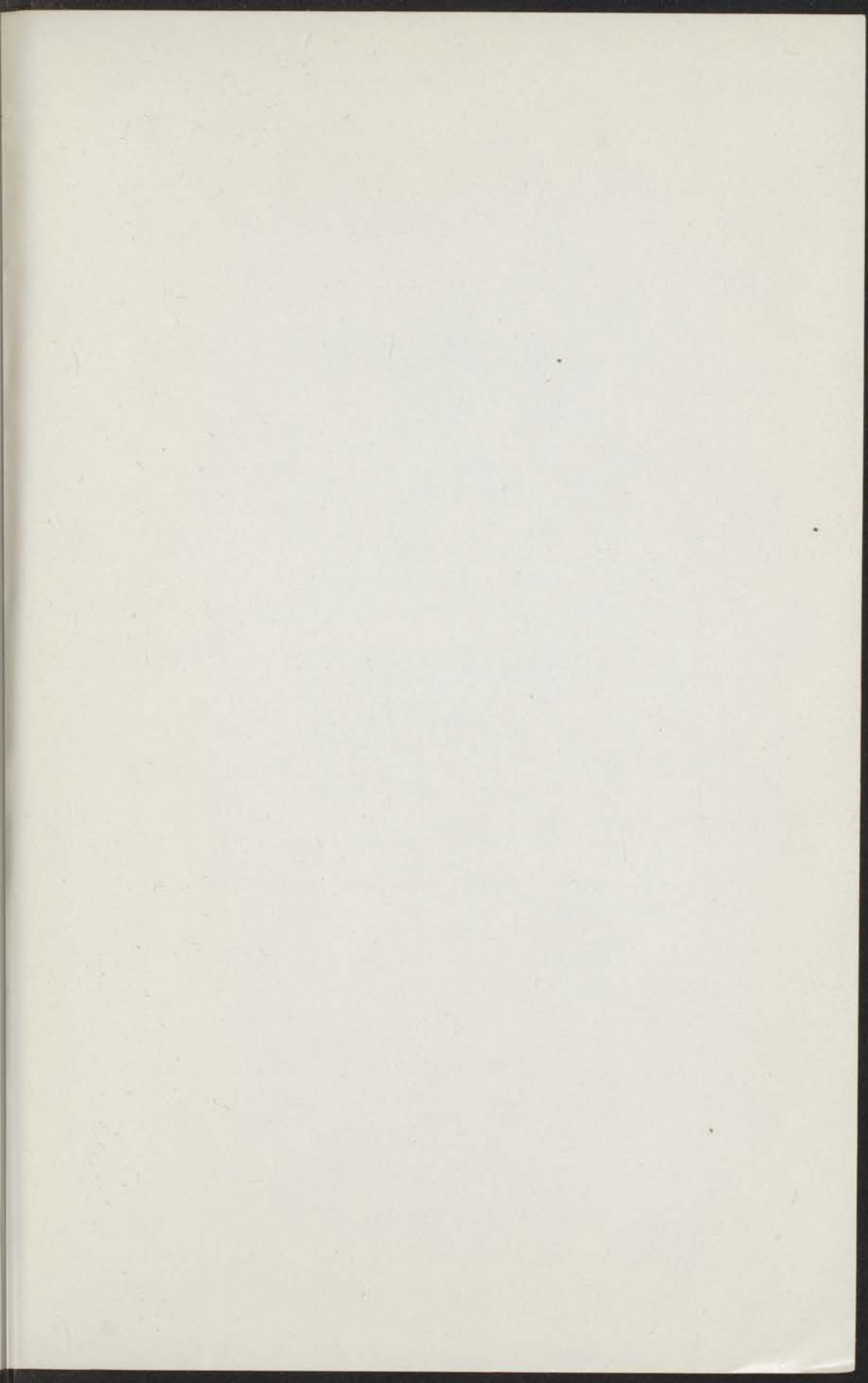
A.
B.
C.
D.
E.
F.
G.
H.
I.
J.
K.
L.
M.
N.
O.
P.
Q.
R.
S.
T.
U.
V.
W.
X.
Y.
Z.

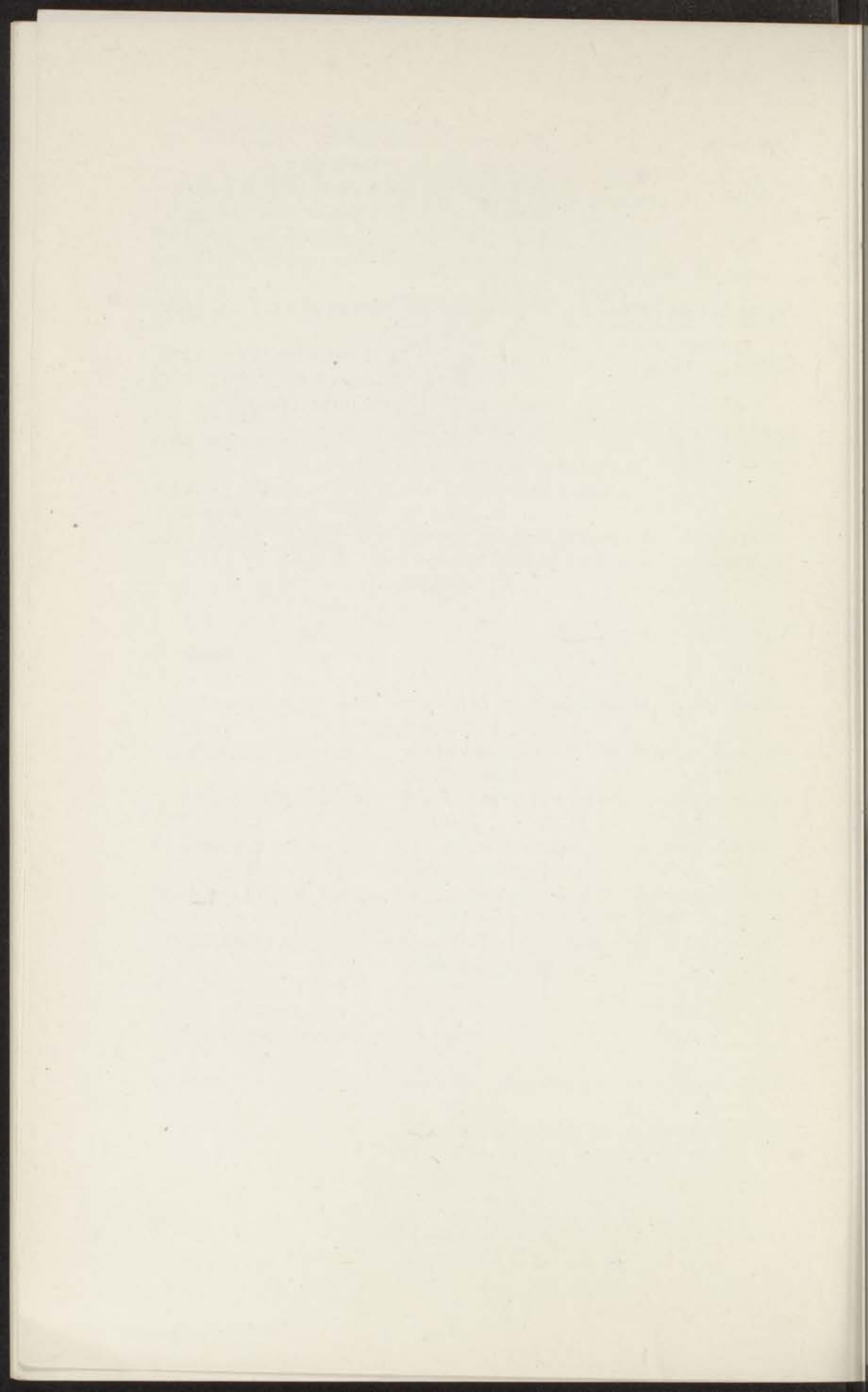
H. ...

J.D.
C.
M.
E.
F.
G.

J. Inverse ...

...	...
...	...





STELLINGEN

1. Het probleem van de uitwendige ballistiek is het probleem van de luchtweerstandswet. Het zou gewenst zijn op dit gebied experimentele onderzoeken te verrichten.
2. Het is onjuist, dat in Nederland door de marine, de landmacht en de luchtmacht drie verschillende standaardatmosferen worden gebruikt voor het samenstellen van hun schootstafels. Gewenst zou zijn om meer eenheid te brengen in de toe te passen standaardatmosferen, ter vereenvoudiging van de militaire weerberichten.
3. De, in internationaal verband, voorgestelde oplossing om de tot nu toe gebruikte standaardatmosferen te handhaven, en tabellen in te voeren waardoor de overgang tussen de diverse standaardatmosferen wordt vereenvoudigd, is gebrekkig.
4. De toepassing van elektronische rekenmachines zal de wiskundige basis van de ballistische methoden sterk vereenvoudigen.
5. Het verdient aanbeveling, dat bij het opstellen van militaire eisen voor destructieve keuringen, meer dan tot nu toe, gebruik gemaakt wordt van de moderne theorieën over enkelvoudige, dubbele en voortschrijdende steekproeven.
6. Het is te wensen, dat het vak ballistiek in Nederland aan een universiteit of hogeschool wordt gedoceerd. Hierdoor zal tevens de mogelijkheid geschapen worden om op internationaal universitair niveau uitwisseling van gegevens en resultaten van wetenschappelijk onderzoek te verkrijgen, zowel schriftelijk als door persoonlijk contact.
7. Voor de toepassing van de atmosferische correcties is het gewenst, om in de schootstafels geen gebruik te maken van het luchtgewicht, doch van de temperatuur en de druk.
8. In Nederland zou, meer dan tot nu toe gebruikelijk is, contact gelegd moeten worden tussen de aerodynamica en de ballistiek.
9. De studie van de kogel en de mondingskogel verdient, ook uit zuiver militaire overwegingen, grote belangstelling.

10. Het verdient aanbeveling dat de uitspraak van de Duitse ballisticus Athen: „Nur das Eine steht mit Sicherheit fest: die gründliche theoretische Durchdringung ist unerlässlich, wenn die Praxis sich nicht in uferloser Probiererei verlieren soll“, in Nederlandse ballistische kringen ruimere bekendheid krijgt.
H. Athen. Wehrtechnische Hefte, 1953 no 1, pg. 28.
11. De toelaatbare fout in de snelheid bij de baanberekeningen volgens de methoden Garnier, Haag, Marcus 1918 en 1929 is 0,2%. In de praktijk is het verantwoord gebleken om een onnauwkeurigheid van 0,8% toe te laten.
12. Bij het Algemeen Burgerlijk Pensioenfonds wordt in principe uitgegaan van op actuariale grondslagen berustende berekeningen. Het kapitaal wordt daarbij gevormd uit de individuele pensioenstortingen van de ambtenaren en uit de extra-bijdragen van de Overheid aan het fonds, alsmede uit de rente der beleggingen. Het ware te overwegen om na te gaan of dit systeem vervangen kan worden door betalingen van de pensioenen, rechtstreeks uit de gewone dienst van de Rijksbegroting.
13. Het verdient aanbeveling om ter bespoediging van de samenstelling van de statistieken van loon- en inkomstenbelasting, gebruik te maken van een moderne steekproefsgewijze bewerking van de oorspronkelijke aangiftebiljetten van de inkomstenbelasting en van de loonbelastingkaarten.
14. Bij de Koninklijke Landmacht zijn de academici en ingenieurs, die zich met wiskundige, natuurkundige en theoretisch-technische problemen bezig houden, verspreid over diverse bureaux. Het zou aanbeveling verdienen om deze wetenschappelijke werkers te verenigen in één dienst. Deze dienst zou ruime bevoegdheden en vooral het recht van initiatief moeten verkrijgen.

