5

VAN DE STRALINGSVERSCHIJNSELEN IN BEWOGEN STELSELS.

H. B. A. BOCKWINKEL.

5

VAN DE STRALINGSVERSCHIJNSELEN IN BEWOGEN STELSELS.

VAN DE STRALINGSVERSCHIJNSELEN IN BEWOGEN STELSELS.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DE RECTOR-MAGNIFICUS

DR. W. NOLEN,

HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN

OP

Donderdag 21 Maart 1907, des namiddags te 3 uren,

DOOR

HERMANN BERNARD ARNOLD BOCKWINKEL,

GEBOREN TE HEER-HUGOWAARD.

LEIDEN. — EDUARD IJDO.
1907.

AAN MIJN OUDERS EN OOM.

Bij deze gelegenheid dank ik mijn Professoren voor de welwillendheid die ik bij mijn studie van hen ondervonden heb en nog ondervind.

In het biezonder geldt deze dank mijn hooggeachte promotor Prof. LORENTZ, *die mij bij de samenstelling van dit proefschrift op de meest onbekrompen manier geholpen heeft.*

INHOUD.

INLEIDING.

§ 1. In zijn verhandeling „Ueber das Verhältnisz zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht" [1]) heeft KIRCHHOFF de naar hem genoemde wet over de onveranderlikheid van de in het opschrift bedoelde verhouding bewezen, wanneer men van het ene lichaam tot het andere overgaat en steeds dezelfde temperatuur en dezelfde frekwentie onderstelt. KIRCHHOFF heeft daarbij het oog gehad op stelsels die ten opzichte van de ether in rust zijn, want zijn beschouwingen zijn slechts voor zulke stelsels van toepassing; zij verliezen hun geldigheid zodra een sisteem een translatiesnelheid ten opzichte van de ether krijgt, aangezien dan rekening te houden is met de arbeid die door de druk van de stralen wordt verricht. Het kan zijn nut hebben na te gaan, in hoeverre de stralingsverschijnselen door de beweging van de aarde om de zon veranderd worden, evenals dit reeds gedaan is voor allerlei andere elektromagnetiese verschijnselen, voornamelik wat de voortplanting van golven in nietgeleiders betreft, door Prof. LORENTZ. Bij de vraag, welke invloed een translatiebeweging heeft op het emissie- en het absorptievermogen en hun onderlinge verhouding komt vooreerst te pas de kwestie hoe deze grootheden voor een bewogen stelsel te definieren zijn. Hierbij sluiten zich dan nog allerhande kwesties over de stralingsverschijnselen in bewogen stelsels aan. De diskussie van dergelijke kwesties vormt de inhoud van dit proefschrift We beperken ons daarbij tot zogenaamde grootheden van de eerste

[1]) Ann. d. Physik u. Chemie. Bd 19. 1860.

orde, d. w. z. tot grootheden die slechts de eerste macht van de translatiesnelheid bevatten.

§ 2. We houden ons uitsluitend bezig met de *temperatuurstraling*, en zullen aan de lichamen van een stelsel dat zich met een standvastige snelheid verschuift, evenals aan die van een rustend stelsel, een temperatuur toekennen, zijnde een getal dat aangeeft in welke richting zich tussen twee lichamen A en B van dat stelsel de warmte zal bewegen, indien die lichamen met elkaar in aanraking gebracht worden. We onderstellen nl. dat in een bewogen stelsel de warmteverschijnselen in hoofdzaak op dezelfde manier plaats hebben als in een rustend stelsel. We kunnen ons denken deel uit te maken van een zich bewegende wereld en aannemen dat we hierin, evengoed als in een rustende, verschillende warmtegraden kunnen onderscheiden; verder moge daarbij niet alleen sprake zijn van onze *gewaarwordingen*, maar ook van een bepaalde *toestand*, waarin de lichamen verkeren, die met onze hand in aanraking komen; deze willen we de warmtetoestand noemen. Verschillende warmtetoestanden van een lichaam zullen zich dan weer door uiterlike kenmerken van elkaar onderscheiden, zoals door volumeverschil, verschil in agregaatstoestand, enz. We onderstellen verder dat, wanneer twee lichamen A en B van het bewogen stelsel met elkaar in aanraking zijn, er ten slotte een evenwichtstoestand ontstaat, waarbij geen volumeverandering, dus geen warmteuitwisseling meer plaats vindt; in die toestand zullen we aan A en B hetzelfde temperatuurgetal toekennen. Gaat er bij de aanraking van A en B warmte van A op B over, dan kennen we aan A een hogere temperatuur toe dan aan B, gaat van B warmte over op een derde lichaam C, dan zeggen we wederom dat B een hogere temperatuur heeft dan C. In de mogelikheid om zo alle lichamen van de beschouwde wereld in een temperatuurreeks te rangschikken, schuilt een natuurwet. Deze zegt o. a. dat, als A en B met elkaar in warmteevenwicht zijn en evenzo B en C, dan ook A en C met elkaar in warmteevenwicht zullen zijn. De vaststelling van de temperatuurgetallen kan verder, zoals men weet, nog op allerlei wijzen geschieden.

§ 3. We zullen onderstellen dat ook twee lichamen A en A' die tot werelden met verschillende translatiesnelheid behoren, met elkaar in warmtewisseling treden zodra het ene lichaam het andere, hetzij onmiddellik, hetzij door tussenkomst van een standaardlichaam, aanraakt, en dat ten slotte weer een toestand van warmteevenwicht ontstaat, waarbij de beide lichamen geen veranderingen meer ondergaan. We verbeelden ons daarbij in het ene sisteem een oneindig grote vlakke plaat, volkomen glad en evenwijdig aan de relatieve snelheid $\mathfrak{w}'$ van het tweede stelsel ten opzichte van het eerste. Deze plaat P nemen we aan als standaardlichaam, waarmee we vooreerst alle lichamen van het eerste stelsel zelf en daarna ook alle lichamen van het tweede stelsel, wat hun warmtetoestand betreft, kunnen vergelijken, omdat we die lichamen met de bedoelde plaat in voortdurende aanraking kunnen brengen zonder dat er wrijving optreedt, wat op zichzelf de warmtegraad zou wijzigen. De plaat P is dan het middel door tussenkomst waarvan lichamen van verschillende stelsels met elkaar in warmtewisseling gebracht kunnen worden. Heeft er bij de aanraking van een lichaam A' van het tweede stelsel met P geen warmtewisseling plaats, dan ligt het voor de hand om aan A' en P hetzelfde temperatuurgetal toetekennen. Daarmee is de stap gedaan die nodig is om temperaturen van het ene stelsel met die van het andere te kunnen vergelijken. Eén ding postuleren wij daarbij nog, nl. de mogelikheid om alle lichamen van de beide stelsels in één gemeenschappelike temperatuurreeks te rangschikken. Daartoe is nodig dat verschillende lichamen van het tweede stelsel die met P in warmteevenwicht zijn, ook onderling in warmteevenwicht verkeren.

§ 4. Teoretiese beschouwingen hebben de voorstelling doen ontstaan dat iedere warmtetoestand gekenmerkt wordt door een bepaalde gemiddelde inwendige kinetiese energie van het lichaam per molekuul of atoom. Met de inwendige kinetiese energie bedoelen we hier die van het zwaartepunt van één molekuul ten opzichte van het gemeenschappelik zwaartepunt van alle molekulen; dit laatste heeft de kinetiese energie van de *verschuivende* beweging, als men de totale massa van het lichaam er in opgehoopt denkt. Er zal nu tussen twee lichamen A en B warmteevenwicht zijn, indien de gemiddelde inwendige kinetiese energie per molekuul van A gelijk is aan die van B; d. w. z. zodra deze gelijkheid ontstaan is, verandert de bedoelde grootheid niet meer. Dit geldt voor elke translatiesnelheid die men zich wil denken, want deze heeft met de genoemde inwendige beweging niets te maken; voor alle stelsels zal dus een temperatuurbegrip mogelik zijn. Op dezelfde teoretiese gronden ligt het voor de hand om ook warmtetoestanden te vergelijken van lichamen die tot werelden met verschillende translatiesnelheid behoren, en de temperaturen van twee zulke lichamen A en A' gelijk te noemen, indien hun gemiddelde inwendige kinetiese energie per molekuul hetzelfde is. Daaraan ligt dan de aanname ten grondslag dat, indien A en A' door tussenkomst van de in § 3 besproken vlakke plaat in warmtewisseling gebracht worden, die lichamen zolang nog volumeveranderingen vertonen, totdat de intenziteit van hun inwendige bewegingen hetzelfde is.

Men zal er verder ook geen bezwaar tegen willen maken dat we de geldigheid van de tweede hoofdwet van de termodinamika in zijn volle omvang voor bewogen sistemen aannemen. Daaruit volgt dat in een sisteem van lichamen met gemeenschappelike translatiesnelheid, die tegen warmteverlies naar de omgeving beschut zijn, de temperatuur in alle delen hetzelfde tracht te worden ook zonder dat deze delen met elkaar in aanraking zijn, en dat, is eenmaal temperatuurgelijkheid ontstaan, deze niet meer gestoord wordt. Ook door de *straling* van de lichamen zal dit temperatuurevenwicht verkregen worden. Ons op deze stelling bazerende, evenals Kirchhoff het in zijn genoemde verhandeling voor een rustend sisteem doet, willen we aantonen dat diens beschouwingen, mits met de nodige wijzigingen, voor een bewogen stelsel herhaald kunnen worden; daardoor zullen we tot de door hem uitgesproken wet, in de zin die daaraan voor een bewogen sisteem gehecht zal moeten worden, terugkomen.

HOOFDSTUK I.

Over de verhouding van het emissie- en het absorptievermogen van lichamen die deel uitmaken van een zich verschuivend stelsel.

A. Voorafgaande beschouwingen.

§ 5. Bij het onderzoek naar de stralingsverschijnselen van bewogen lichamen stellen we ons eens vooral voor dat alle lichamen van het stelsel dezelfde gemeenschappelike translatiesnelheid $\mathfrak{w}$ hebben ten opzichte van de ether, die we ons in rust kunnen denken. Spreken we kortheidshalve van bewogen stelsels, dan hebben we daarbij toch nooit iets anders dan verschuivende bewegingen op het oog. We zullen ons voorstellen dat de lichamen van een bewogen stelsel, evenals die van een rustend, uitgangspunten zijn van elektromagnetiese evenwichtsverstoringen, die zich in de omringende nietabsorberende media of in de vrije ether voortplanten; we zeggen dan dat de lichamen stralen. Deze evenwichtsverstoringen, die we ook kortweg lichtbewegingen zullen noemen, al veroorzaakt slechts een kleine groep onder hen de eigenlik gezegde lichtwerkingen, worden gekenmerkt door voornamelik twee vektoren, de elektriese kracht $\mathfrak{E}$ en de magnetiese kracht $\mathfrak{H}$, die in elk punt van het doorschijnende lichaam een met de tijd veranderlike waarde [1]) hebben. Om een denk-

[1]) Met „waarde" van een vektor duiden we tegelijkertijd zijn grootte en zijn richting aan.

beeld te krijgen van de aard van die veranderingen, willen we een ogenblik stilstaan bij de eenvoudigste evenwichtsverstoringen die zich in een verschuivende nietgeleider kunnen voortplanten. Daartoe moeten we echter vooraf in herinnering brengen hoe het in dat opzicht met een stilstaand dielektrikum gesteld is.

§ 6. In een onbegrensde rustende al of niet izotrope nietgeleider kunnen zich vlakke golven voortplanten, waarbij op een gegeven ogenblik zowel $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{H}$ dezelfde waarde [1]) hebben in alle punten van een plat vlak dat loodrecht op een bepaalde richting staat, en zich tot in het oneindige uitstrekt; we zullen hierbij kortheidshalve spreken van „vlakken van een bepaalde richting". De vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ veranderen op één bepaald ogenblik van het ene vlak tot het andere en in één bepaald vlak van ogenblik tot ogenblik, maar blijven daarbij steeds onderling loodrecht De toestand die op dit ogenblik in een gegeven vlak bestaat, zal enige tijd later in een volgend vlak worden aangetroffen, m. a. w. die toestand plant zich van het ene vlak tot het andere voort. Hierbij kunnen we ons een *bewegelik* vlak van dezelfde richting denken dat op ieder ogenblik samenvalt met het vaste vlak waar de lichtbeweging op dat ogenblik is aangekomen; zulk een bewegelik vlak heet een golffront. De afstand waarover zich een golffront in de tijdseenheid voortplant is de maat voor de voortplantingssnelheid van het golffront. Men kan zich hierbij voorstellen dat de energie van de evenwichtsverstoring zich als iets substantieels met het golffront mee voortplant, waarmee nog niet gezegd is dat we dan noodzakelik zouden moeten denken aan een voortplanting volgens de golfnormaal. Aanleiding tot die opvatting geeft het teorema van Poynting over de naar hem genoemde energiestroom. Deze laatste vektor, die we door $\mathfrak{S}$ zullen voorstellen, hangt

[1]) Vergel. de noot op blz. 6.

op eenvoudige wijze met de elektriese en de magnetiese kracht samen, nl. door de formule

$$(1) \qquad \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{H}],$$

als men de eenheden van de Matematiese Enciklopedie (M. E.) bezigt; c is de voortplantingssnelheid van het licht in de ether en $[\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{H}]$ betekent het vektorprodukt van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$, zodat de energiestroom steeds loodrecht op de beide laatstgenoemde vektoren staat. Het vlak dat door $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ gebracht kan worden, heeft bij platte golven evenals het golffront een vaste stand en valt bij izotrope lichamen met dit laatste samen, terwijl het er bij anizotrope enigszins van afwijkt. De energie stroomt dus ook overal en op elke tijd in dezelfde richting van het ene golffront naar het andere, bij izotrope lichamen langs de golfnormalen, bij anizotrope langs lijnen die daar in richting een weinig van afwijken. In elk geval geschiedt de voortplanting van de energie langs rechte lijnen, waarvan de richting door het vektorprodukt van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ wordt aangegeven. De weg waarover de energie zich in de tijdseenheid voortplant, heet de voortplantingssnelheid van de energie. Deze is dus bij izotrope lichamen gelijk aan de voortplantingssnelheid van het golffront, maar verschilt daarvan in anizotrope media.

§ 7. De wijze waarop bij de beschouwde evenwichtsverstoring de vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ in een gegeven punt met de tijd veranderen, kan in het voorgaande geheel willekeurig gedacht worden, maar van belang zijn vooral de gevallen waarin de komponenten van die vektoren langs drie onderling loodrechte koördinaatassen goniometriese funktiën van de tijd zijn met een bepaalde periode; we zeggen dan dat we te doen hebben met enkelvoudige trillingen. Nu treedt tevens op het begrip golflengte, d. i. de afstand waarover het golffront in de trillingstijd voortschuift. De komponenten van $\mathfrak{E}$ worden in een gegeven punt van een izotroop lichaam bepaald door vergelijkingen als de volgende

(2) $\mathfrak{E}_x = a_1 \cos(nt+\Phi_1)$, $\mathfrak{E}_y = a_2 \cos(nt+\Phi_2)$, $\mathfrak{E}_z = a_3 \cos(nt+\Phi_3)$.

De komponenten van $\mathfrak{H}$ kunnen hieruit door middel van de vergelijking

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}$$ [1]

worden afgeleid; zij hebben de gedaante

(3) $\mathfrak{H}_x = b_1 \cos(nt+\Psi_1)$, $\mathfrak{H}_y = b_2 \cos(nt+\Psi_2)$, $\mathfrak{H}_z = b_3 \cos(nt+\Psi_3)$.

In deze formules is n de frekwentie van de trillingen, d. i. het aantal malen dat de trillingstijd T op 2π begrepen is. Verder kunnen we $\sqrt{a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}$ de amplitude van de elektriese, $\sqrt{b^2_1 + b^2_2 + b^2_3}$ die van de magnetiese kracht noemen. Deze amplituden of liever hun tweede machten bepalen de gemiddelde energie per volume-eenheid U — genomen over een tijdsverloop dat vele perioden omvat — die in een punt van het dielektrikum tengevolge van de beschouwde evenwichtsverstoring aanwezig is. Verder vindt men dat bij voortplantingsverschijnselen tussen de energiestroom van Poynting $\mathfrak{S}$ en de energie per volume-eenheid steeds de betrekking

(4) $$\mathfrak{S}_z = vU$$

bestaat, als z de richting van de energiestroom en v de voortplantingssnelheid van de energie in die richting is, een betrekking die onmiddellik duidelik is, indien men de bovenvermelde opvatting van het „substantiele" van de energie wil handhaven, maar die, zo men dit niet wenst te doen, in elk geval merkwaardig is. De getallen Φ en Ψ stellen de fazen van de trillingen voor; zijn deze, zoals boven aangenomen is, voor de drie komponenten ongelijk, dan beschrijft het uiteinde van de vektor die de elektriese (magnetiese) kracht voorstelt, in de loop van een periode een ellips en zeggen we dat de trillingen ellipties gepolarizeerd zijn; in het biezonder kunnen deze overgaan in cirkulair gepolarizeerde trillingen. Het uiteinde van de vektor beschrijft een rechte lijn, als de fazen van

[1] Deze vergelijking geldt voor een niet magnetizeerbaar dielektrikum.

zijn drie komponenten gelijk zijn [1]); we hebben dan lineair gepolarizeerde trillingen. Het vlak dat hierbij door de richting van de energiestroom en de magnetiese kracht gebracht kan worden, heet het polarizatievlak van de lichtbeweging; we zeggen ook dat het licht in dat vlak gepolarizeerd is.

§ 8. In de tweede plaats kunnen zich in een rustend dielektrikum zijdelings begrensde bundels met platte golven voortplanten. Het is duidelik dat daarbij de begrenzingslijnen in elk punt de richting van de energiestroom hebben. Daar deze richting, zoals we zagen, voor platte golven in alle punten dezelfde is, hebben we te doen met cilindriese begrenzingen. Hierbij moet opgemerkt worden dat de vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ in een bepaald golffront aan de rand niet plotseling $= 0$ worden, maar nabij de begrenzing, hoewel tamelik snel, geleidelik tot 0 afnemen. Zal echter zo'n bundel in werkelikheid kunnen bestaan, dan moet de breedte er van boven zeker minimum blijven. Beperken we ons weer tot enkelvoudige trillingen, dan leert een nadere teorie dat dit minimum groot is ten opzichte van de golflengte van de trillingen. Dit neemt niet weg dat de voor het oog waarneembare en ook de overige in de stralingsteorie te pas komende lichtbundels nog betrekkelik smal kunnen zijn, omdat daarbij de golflengte slechts kleine onderdelen van *mM* bedraagt. Zulke smalle lichtbundeltjes noemen we ook stralen; de lijnen waardoor we gewoon zijn stralen voor te stellen, zijn feitelik niets anders dan de assen van straalbundels. De intenziteit van de trillingen in een gegeven punt van de straalbundel wordt bepaald door de energie U die het dielektrikum in dat punt per volume-eenheid bevat, en dus ook door de absolute waarde van de energiestroom $\mathfrak{S}$. Met deze grootheden bedoelen wij hier en ook elders de gemiddelde waarden

[1]) Dit is altoos *tegelijkertijd* met de fazen φ en ψ het geval.

over een lang tijdsverloop (§ 7). We zullen dit verder zo specializeren dat in een gegeven doorsnede de intenziteit van een zich voortplantende lichtbeweging bij definitie gelijk gesteld wordt aan de energie die in dat punt per tijdseenheid door die doorsnede heenstroomt. Is deze laatste $= \Sigma$ dan wordt dus de intenziteit I van de bundel in een gegeven punt en op een bepaald ogenblik uitgedrukt door de formule

$$I = c\,[\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{H}]_z\,\Sigma = c\,(\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_x)\,\Sigma,$$

als z de richting van de straal is. Ook de energie die door een schuine doorsnede stroomt is hieraan gelijk, aangezien de komponent van $\mathfrak{S}$ loodrecht op die doorsnede in dezelfde verhouding kleiner is dan $\mathfrak{S}_z$ als de doorsnede zelf groter is dan Σ. We kunnen dus ook zeggen dat de intenziteit van een lichtbundel gelijk is aan de energie die door een *willekeurige* doorsnede daarvan stroomt. Planten zich twee lichtbundels van dezelfde frekwentie volgens verschillende richtingen z_1 en z_2 voort en kruisen deze elkaar in een punt P, dan verkrijgen we volgens het superpozitiebeginsel de totale lichtbeweging in P door de stralingsvektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$, zoals die zouden zijn als elk van de beide evenwichtsverstoringen op zichzelf bestond, bij elkaar op te tellen. We denken ons de bundels zó begrensd dat ze een gemeenschappelike doorsnede Σ hebben, waarvan de normaal de richting z heeft. Bestaan nu, zoals bij de lichtbewegingen waarmee wij ons zullen bezighouden, steeds het geval is, grillige fazeverschillen tussen de beide lichtbewegingen, dan is het een bekend feit dat de komponent $\mathfrak{S}_z$ van de totale energiestroom per vlakte-eenheid in het punt P verkregen wordt door de gelijknamige komponenten van de afzonderlike energiestromen per vlakte-eenheid $\mathfrak{S}_z'$ en $\mathfrak{S}_z''$ bij elkaar op te tellen. In aansluiting met hetgeen we vroeger reeds vastgesteld hebben, ligt het voor de hand, om $\mathfrak{S}_z\,\Sigma$ de intenziteit van de totale lichtbeweging te noemen, waardoor het vlak Σ getroffen wordt. Dan is deze laatste dus ook gelijk aan $\mathfrak{S}'_z \Sigma + \mathfrak{S}''_z \Sigma$, d. w. z. aan de som van de afzonderlike intenziteiten. Kortheidshalve zullen we dit uitdrukken door te zeggen dat we de intenziteiten van twee elkaar in zeker punt P kruisende bundels bij elkaar mogen optellen, indien die bundels fazeverschillen vertonen welke grillige veranderingen ondergaan en dus, zoals we kunnen zeggen, *onafhankelik* van elkaar zijn; deze laatste benaming zullen we in het vervolg altoos op zulke bundels toepassen. Hebben de beide lichtbewegingen ongelijke frekwenties n' en n'', dan verandert dit aan de voorgaande beschouwingen zo goed als niets; het rezultaat is weer dat de beide intenziteiten bij elkaar opgeteld mogen worden, nu zelfs, zonder dat grillige veranderingen in fazeverschil nodig zijn.

In het biezonder geldt de hier besproken eigenschap, als beide lichtbewegingen zich volgens *dezelfde* richting voortplanten, maar daarbij onderling onafhankelik zijn of in trillingsgetal verschillen. Het spreekt verder vanzelf dat nu ook de intenziteiten van drie en meer zulke lichtbewegingen die een punt P van het dielektrikum treffen, bij elkaar opgeteld moeten worden om een denkbeeld van de sterkte der totale lichtbeweging in dat punt te verkrijgen.

§ 9. Een andere lichtbeweging, die in een onbegrensd rustend dielektrikum kan bestaan, is die waarbij voortplanting van uit een centrum plaats heeft. We beschouwen vooreerst weer trillingen van een bepaalde frekwentie. Op afstanden r van het centrum die groot zijn in vergelijking met de golflengte — dit begint voor de te pas komende golflengten reeds bij tamelik kleine afstanden — hebben dan de elektriese en de magnetiese kracht een richting loodrecht op de voerstraal die men van uit het centrum naar het beschouwde punt kan trekken, en tevens zijn die twee vektoren onderling loodrecht. De energiestroom is radiaal van het centrum af gericht en men heeft dus nu een voortplanting langs rechte lijnen die in richting *verschillen*. Langs eenzelfde voerstraal veranderen de amplituden van

$\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ omgekeerd evenredig met r, en de energiestroom met r^2. Heeft het vlak dat door de magnetiese kracht en de voerstraal gebracht kan worden, voortdurend dezelfde stand dan noemen we dat vlak het polarizatievlak van de trillingen.

Bij zijdelings begrensde lichtbundels die door éen punt worden uitgezonden, zullen de begrenzingslijnen voerstralen zijn. De breedte van die bundels is ook hier groot ten opzichte van de golflengte; niettemin zijn weer betrekkelik smalle divergente straalbundeltjes mogelik, die we stralen noemen; de lijnen die we gewoon zijn te bezigen als voorstelling van zulke straalbundeltjes, zijn niets anders dan de assen daarvan. De energie die door een doorsnede van de divergente straalbundel stroomt, is op alle plaatsen even groot, omdat het dielektrikum tussen twee doorsneden geen energie absorbeert. Dit komt ook uit met het feit dat de energiestroom per vlakte-eenheid omgekeerd evenredig, de doorsnede van de bundel daarentegen recht evenredig met r^2 verandert. De totale energiestroom door een doorsnede van de divergente straalbundel noemen we weer zijn intenziteit. Is de breedte van de bundel klein in vergelijking met de afstand tot het centrum, dan volgt uit het voorgaande dat we hem over een lengte die insgelijks klein is ten opzichte van die afstand, als een *vlakke* golfbundel kunnen behandelen. Dit kan bij sommige beschouwingen gemak opleveren. O. a. leiden we er direkt uit af dat de (gemiddelde) intenziteiten van twee onafhankelike divergente straalbundels, in een punt waar ze elkaar kruisen, opgeteld mogen worden.

§ 10. De ingewikkelde evenwichtsverstoringen die van stralende lichamen uitgaan, kunnen altijd opgevat worden als de superpozitie van divergente straalbundels die van de verschillende volumeelementen van het stralende lichaam afkomstig zijn. Deze zijn geheel onafhankelik van elkaar, zodat we de totale intenziteit in een punt krijgen door de som te nemen van de afzonderlike intenziteiten. Vestigen we de aandacht op een bepaalde straalbundel dan moeten we de komponenten van de vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ opvatten als funkties van de tijd die met tussenpozen, klein ten opzichte van de voor ons onderscheidbare tijdruimten, maar groot ten opzichte van de periode van de lichttrillingen, plotselinge en grillige sprongen ondergaan. Men kan deze funktiën naar het teorema van Fourier ontbinden in goniometriese die de grillige fazeveranderingen vertonen waarvan in § 9 sprake was; om die reden mogen we zeggen dat de bundels, van twee verschillende volumeelementen afkomstig, onafhankelik van elkaar zijn. Verder stralen de lichamen geen lineair of ellipties gepolarizeerd licht uit, maar kunnen de uitgezonden bewegingen, wat de werkingen er van betreft, *opgevat* worden als te bestaan uit twee komponenten van in 't algemeen verschillende intenziteit, die in twee onderling loodrechte vlakken gepolarizeerd zijn. De intenziteit van de totale evenwichtsverstoring door twee zulke komponenten veroorzaakt, is altijd gelijk aan de som van de beide intenziteiten, zoals direkt uit de definitie van de energiestroom blijkt.

§ 11. De lichtbewegingen die door het binnenste van een ponderabel lichaam uitgezonden worden, bereiken eerst de omringende delen er van en worden daardoor gedeeltelik geabsorbeerd. We stellen ons hierbij voor dat ook in het absorberende lichaam begrensde straalbundels kunnen bestaan, maar het blijkt in het vervolg niet nodig te zijn dat we ons van de aard van de evenwichtsverstoringen die daarbij in het spel zijn, nader rekenschap geven. Wat aan de absorptie ontkomt, bereikt het oppervlak en wordt daardoor gedeeltelik teruggekaatst, gedeeltelik doorgelaten. Door een en hetzelfde oppervlakteelement treden zo een groot aantal stralenbundels van allerlei richting in het omringende dielektrikum. We vatten daaronder diegene in het oog waarvan de richtingen oneindig weinig van elkaar verschillen. Deze kunnen op zichzelf bestaan indien de breedte van het vlakteelement groot is ten opzichte van de golflengte van de stralen We zonderen zo'n bundel af door op een afstand die wederom groot is ten opzichte van de afmetingen van het beschouwde vlakteelement, een scherm te plaatsen met een opening die van dezelfde orde van grootte is als het vlakteelement. Blijkbaar is dan de intenziteit van die straalbundel afhankelik van de grootte van het vlakteelement en van de kegelopening $d\omega$, waaronder men uit een punt daarvan de opening in het scherm ziet Volgens de door KIRCHHOFF gegeven definitie is deze intenziteit juist het gezamenlike emissievermogen voor alle frekwenties die in de beschouwde bundel voorkomen.

§ 12. Uit de evenwichtsverstoringen die zich in een rustend dielektrikum kunnen voortplanten, krijgen we in eens degene die daarin kunnen bestaan als het in verschuivende beweging is, door toepassing van de door Prof. LORENTZ gevonden stelling over de mogelikheid van zogenaamde „korresponderende" bewegingstoestanden [1]). Daarbij is het dienstig om in plaats van de elektriese kracht $\mathfrak{E}$ en de magnetiese kracht $\mathfrak{H}$ twee hulpvektoren $\mathfrak{E}'$ en $\mathfrak{H}'$ in te voeren, gedefinieerd door de vergelijkingen

$$(5) \qquad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{H}] \quad , \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{E}].$$

Beide vektoren verschillen van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ slechts met een grootheid die de eerste macht van de komponenten van de translatiesnelheid bevat Aangezien we slechts translatiesnelheden zullen beschouwen die, zoals bij de jaarlikse beweging van de aarde, klein zijn ten opzichte van de snelheid c van het licht, kunnen we geheel van de teorie van Prof. LORENTZ gebruik maken, voorzover die berust op de verwaarlozing van de tweede en hogere machten van de translatiesnelheid. Dit is o. a. het geval met de stelling omtrent de korresponderende toestanden, die als volgt kan

[1]) H. A. LORENTZ. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leipzig 1906. Bl. 85.

worden uitgedrukt: Is in een rustend dielektrikum een evenwichtsverstoring mogelik, waarbij $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ zekere funkties van de koördinaten x, y, z en van de tijd t zijn, dan kan in datzelfde sisteem, indien het zich beweegt, een evenwichtsverstoring bestaan, waarbij $\mathfrak{E}'$ en $\mathfrak{H}'$ resp. dezelfde funkties zijn van de relatieve koördinaten ten opzichte van meebewegende assen en van de zogenaamde plaatselike tijd t', bepaald door de vergelijking

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(x\mathfrak{w}_x + y\mathfrak{w}_y + z\mathfrak{w}_z), \tag{6}$$

waarbij x, y, z de relatieve koördinaten zijn.

We wensen er hier uitdrukkelik de aandacht op te vestigen dat deze korrespondentiestelling geheel algemeen geldt, dus ook voor stralingsverschijnselen. Welke stralingstoestanden we derhalve in het vervolg in een bewogen stelsel ook mogen beschouwen, steeds zal de korresponderende daarvan in een rustend sisteem een *mogelike* bewegingstoestand voorstellen, d. w. z. een, die aan alle vergelijkingen voor een rustend stelsel voldoet, en waarop dus de in § 6—§ 11 gegeven beschouwingen van toepassing zijn. Deze opmerking zal ons in het vervolg in staat stellen, om hetgeen we in de genoemde paragrafen van een rustend sisteem gezegd hebben, gemakkelik op een bewogen stelsel over te brengen.

§ 13. Uit de genoemde korrespondentiestelling heeft Prof. Lorentz enige gevolgen afgeleid, die we hier moeten vermelden. We verstaan onder twee korresponderende punten, punten die in de beide stelsels dezelfde koördinaten hebben, en in 't algemeen onder korresponderende figuren, figuren die gelijk en gelijkvormig zijn en in de beide stelsels dezelfde stand innemen. Korresponderende richtingen zullen zijn richtingen die met betrekking tot de korresponderende koördinaatassen dezelfde richtingskonstanten hebben.

Een van de bedoelde gevolgen is nu, dat bij korresponderende toestanden de begrenzingen van de straalbundels met elkaar korresponderende, en dus gelijk en gelijkvormige oppervlakken zijn, m. a. w., kan zich in een stilstaand dielektrikum een lichtbundel van bepaalde richting voortplanten, dan is, wanneer dit dielektrikum in verschuivende beweging gebracht wordt, een „relatieve" straalbundel van de korresponderende richting mogelik. Hieruit volgt weer dat bij terugkaatsing en breking in een bewogen stelsel van nietgeleiders dezelfde richtingsveranderingen van de stralen plaats hebben als in het stilstaande sisteem; wat de *loop* van de stralen betreft, blijven dus dezelfde wetten van terugkaatsing en breking gelden. We zullen zo aanstonds zien, hoe het hierbij met de *intenziteiten* van invallende, teruggekaatste en gebroken bundels gesteld is, waartoe een definitie van het begrip intenziteit van relatieve straalbundels moet voorafgaan.

§ 14. Een ander gevolg van de korrespondentiestelling is, dat wanneer in een stilstaand dielektrikum de evenwichtsverstoring periodiek is met een zekere trillingstijd T of zekere frekwentie n, in het dielektrikum van het bewogen stelsel de korresponderende bewegingstoestand dezelfde relatieve trillingstijd of frekwentie heeft [1]). Bij terugkaatsing en breking blijft dus de *relatieve* frekwentie onveranderd. Hebben verder in het rustende stelsel vektoren of skalaire grootheden die zekere funktiën van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ zijn, konstante gemiddelde waarden, wat bij trillingen steeds het geval is, dan hebben in het bewogen stelsel bij de korresponderende toestand de korresponderende vektoren of skalaire grootheden dezelfde konstante gemiddelde waarden. Dit is o. a. het geval met de energiestroom van Poynting $\mathfrak{S}$ en de korresponderende vektor $\mathfrak{S}'$, welke laatste wordt voorgesteld door de vergelijking

$$\mathfrak{S}' = c\,[\mathfrak{E}' \,.\, \mathfrak{H}']. \tag{7}$$

---

[1]) Onder relatieve trillingstijd (frekwentie) wordt de trillingstijd (frekwentie) verstaan in een punt dat aan de translatie deelneemt; de absolute trillingstijd (frekwentie) is die in een punt dat ten opzichte van de ether in rust is.

§ 15. De vektor $\mathfrak{S}'$ stelt echter niet de energiestroom door een meebewegend vlakteelement voor; deze wordt (M. E. V 14, N⁰. 54) bepaald door de vergelijking

$$(8) \qquad \mathfrak{S}_z = \mathfrak{S}'_z - (\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{T}^z),$$

waarin $\mathfrak{S}$ nu de energiestroom door een bewogen vlakteelement betekent en z een willekeurige richting. Verder is $\mathfrak{T}^z$ de (fiktieve) spanning aan een vlak loodrecht op z, uitgeoefend door het deel van de ether aan de kant waarheen de normaal z getrokken is, op het deel aan de tegenovergestelde kant. Bij deze betekenis van $\mathfrak{T}^z$ is de vektor waarvan de komponenten langs drie onderling loodrechte koördinaatassen X, Y, Z, gelijk zijn aan

$$(\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{T}^x) \quad , \quad (\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{T}^y) \quad , \quad (\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{T}^z),$$

een van de keuze van het koördinatenstelsel onafhankelike grootheid, in ons geval, evenals $\mathfrak{S}$, een kwadratiese funktie van de komponenten van de elektriese en de magnetiese kracht. Dit blijkt uit de uitdrukkingen XLII en XLIII die in M. E. V 14, N⁰. 53 voor de spanningskomponenten in een rustend dielektrikum worden gevonden. Ook $\mathfrak{S}'$ is zo'n kwadratiese funktie van de vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$, en daar hij korrespondeert met de vektor $\mathfrak{S}$ die, vermenigvuldigd met de normale doorsnede Σ van een straalbundel, in een rustend sisteem de intenziteit daarvan bepaalt, zo ligt het voor de hand om in een bewogen stelsel de intenziteit van een relatieve straalbundel in een gegeven punt bij definitie gelijk te stellen aan $\mathfrak{S}'_z \Sigma$, als z de richting en Σ de normale doorsnede van die bundel in het beschouwde punt is. Straks zullen we zien dat deze definitie ook in andere opzichten geschikt is; reeds nu springt echter een voordeel er van in 't oog. Letten we namelik op hetgeen hiervóór uiteengezet is, dan kunnen we nu zeggen dat bij korresponderende toestanden de (gemiddelde) intenziteiten van twee korresponderende straalbundels in overeenkomstige punten gelijk zijn. Bij terugkaatsing en breking van het licht gelden dus niet alleen wat betreft de loop van de stralen dezelfde wetten als in een rustend stelsel, maar ook ten opzichte van de intenziteitsverdeling over de teruggekaatste en de doorgelaten bundels.

§ 16. We vestigen nu weer de aandacht op een bepaalde relatieve straalbundel. Is het vlak a dat door de vektor $\mathfrak{H}'$ en de straal gebracht kan worden onveranderlik van stand, dan noemen we a het polarizatievlak van de straalbundel. De polarizatievlakken van korresponderende straalbundels nemen dus korresponderende standen in. Uit de korrespondentiestelling kan men verder direkt afleiden dat de intenziteit van een relatieve straalbundel, die bestaat uit twee in onderling loodrechte vlakken gepolarizeerde straalbundels, gelijk is aan de som van de intenziteiten van elk daarvan en dat hetzelfde geldt van twee willekeurige bundels met ongelijke relatieve frekwenties, die zich in dezelfde richting voortplanten.

§ 17. We komen nu tot de stralende lichamen van een bewogen stelsel. Zoals reeds in de aanvang van dit hoofdstuk gezegd werd, mag men aannemen dat ook hier de lichamen uitgangspunten zijn van elektromagnetiese evenwichtsverstoringen die zich in het omringende dielektrikum voortplanten. Heeft men deze onderstelling eenmaal gemaakt, dan gelden analoge beschouwingen als we in § 10 voor een rustend stelsel gegeven hebben. De relatieve straalbundels, afkomstig van verschillende volumeelementen, die elkaar in een gegeven zich meebewegend punt P van het dielektrikum kruisen, zullen om dezelfde redenen als in § 10 vermeld zijn als onderling onafhankelik beschouwd mogen worden en men zal hun gemiddelde intenziteiten bij elkaar mogen optellen. Vatten we één bepaalde straalbundel in het oog, dan zijn de vektoren $\mathfrak{E}'$ en $\mathfrak{H}'$ funktiën van de tijd van dezelfde grillige gedaante als dit in de genoemde § 10 van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{H}$ besproken is. Verder zal ook hier de lichtbeweging kunnen opgevat worden als te bestaan uit twee in onderling loodrechte vlakken gepolarizeerde komponenten van in 't algemeen verschillende intenziteit. De totale intenziteit van de straalbundel is gelijk aan de som van de intenziteiten van de beide komponenten.

§ 18. We onderstellen evenals we dit in § 11 voor een rustend sisteem deden, dat ook in een bewogen *absorberend* lichaam begrensde straalbundels mogelik zijn. (Deze mogelikheid wordt in het volgende hoofdstuk bewezen, waar we een meer algemene stelling over korresponderende bewegingstoestanden in willekeurige lichamen zullen afleiden). We vatten één zo'n bundel in een stralend lichaam in het oog; deze gaat bij aankomst aan het oppervlak van het lichaam voor een deel door een element daarvan in het omringende dielektrikum over. We kunnen deze bundel weer van de overige lichtbeweging afzonderen door een opening van dezelfde orde van grootte als het bedoelde vlakteelement aan te brengen in een scherm dat zich op een afstand van het vlakteelement bevindt, groot in vergelijking met de lineaire afmetingen van dit laatste. De intenziteit van deze straalbundel is in een bepaald punt blijkbaar afhankelik van de grootte van het vlakteelement en van de kegelopening $d\omega$ waaronder men uit een punt daarvan de opening in het scherm ziet. Evenals in § 11 voor een rustend sisteem zullen we hier het totale emissievermogen van het lichaam voor de beschouwde bundel bij definitie gelijk stellen aan de zoeven genoemde intenziteit; hierbij is stilzwijgend ondersteld dat er bij een relatieve straalbundel ook werkelik van maar één intenziteit sprake is, of anders gezegd, dat de intenziteit in alle punten van zo'n bundel hetzelfde is. Dit laatste is een noodzakelike konzekwentie van het in § 12 uitdrukkelik vermelde feit dat de door bewogen lichamen uitgezonden relatieve straalbundels altoos als de korresponderende van straalbundels in een rustend sisteem kunnen opgevat worden, en bij deze laatste de gelijkheid van de intenziteiten in verschillende punten er van een bekende zaak is, die onmiddellik volgt uit de wet van het behoud van arbeidsvermogen in verband met het feit dat een dielektrikum geen stralen absorbeert. Het verdient opgemerkt te worden dat ook voor een bewogen stelsel de gelijkheid van de intenziteiten in verschillende punten van eenzelfde straalbundel door toepassing van de energiewet kan worden bewezen, maar hierbij doen zich twee komplikaties voor, nl. 1°. dat de spanningen bij de translatie een arbeid verrichten, (hierop werd reeds in § 1 van de inleiding gewezen), en 2°. dat we de intenziteit van de bundel niet gelijk gesteld hebben aan de energiestroom door een bewogen vlak, maar aan een grootheid die er met een bedrag van de orde $\mathfrak{w}$ van verschilt. (Zie § 15). Deze twee omstandigheden heffen elkaar in hun gevolgen juist op, zoals bij een nadere beschouwing van de energiewet blijkt.

Aangezien we in het vervolg de energiewet nodig hebben, willen we nu tot die nadere beschouwing overgaan.

§ 19. We moeten zoals gezegd is rekening houden met de arbeid door de spanningen verricht. Nu is het in het licht van de door Prof. Lorentz uitgewerkte elektronenteorie enigszins onbevredigend om zo maar zonder meer te spreken van de „druk" van de stralen. In werkelikheid wordt door het elektromagnetiese veld een kracht uitgeoefend op de *elektronen* en door tussenkomst van deze laatste op de ponderabele materie waarmee ze verbonden zijn. Het zijn dus krachten op volumedelen, geen spanningen, waarmee wij hier te doen hebben. Slechts door een matematiese herleiding kunnen de ponderomotoriese krachten in hoofdzaak worden teruggebracht tot spanningen aan 't oppervlak en bij stationaire verschijnselen, of periodieke, indien men de gemiddelde kracht over een periode beschouwt, blijft zelfs niets dan die spanningen over. Toch dient men zich bij de toepassing van de wet van het behoud van arbeidsvermogen op zeker deel van een sisteem, dat we door een denkbeeldig vlak σ van het overige deel afscheiden, te herinneren dat de „spanningen aan dat vlak" geen krachten zijn die, zoals in de elasticiteitsleer, door hetgeen zich aan de buitenkant er van bevindt worden uitgeoefend op de delen aan de binnenkant, maar dat het louter hulpgrootheden zijn, waardoor de krachten die de ether binnen σ op de elektronen binnen σ uitoefent, in sommige berekeningen vervangen kunnen worden Dit is o. a. het geval bij de berekening van de arbeid door die krachten verricht op de ponderabele lichamen van een zich verschuivend sisteem, zoals we nu zullen doen zien. Voor de fiktieve spanningen de gebruikelike notaties bezigende, kunnen we de krachtkomponenten per volume eenheid op een volumeelement $dxdydz$ aan het punt P uitgeoefend, voorstellen door

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ enz.}$$

Zijn de verplaatsingen van P in de richting van de X-, Y- en Z-as resp. ξ, η en ζ, dan is de arbeid die door de ether binnen het volumeelement op dit laatste wordt verricht

$$\left\{ \xi \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + \eta \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + \right.$$
$$\left. + \zeta \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \right\} dxdydz.$$

Hadden echter de grootheden X_x, X_y enz. de betekenis van werkelike spanningen die hetzij door de ponderabele, hetzij door de imponderabele delen buiten het volumeelement op het binnenste daarvan werden uitgeoefend, dan zou de arbeid geweest zijn

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z \right) \right\} dxdydz,$$

wat slechts dàn op hetzelfde neerkomt, als alle delen van het lichaam dezelfde beweging hebben. In dat geval kunnen beide uitdrukkingen, geintegreerd over de ruimte binnen σ, teruggebracht worden tot de integraal

$$(9) \qquad \int \left(\xi X_n + \eta Y_n + \zeta Z_n \right) d\sigma,$$

genomen over het oppervlak σ. Deze stelt in 't eerste geval de totale arbeid voor die bij de gedachte verschuiving door de ether binnen σ op de ponderabele delen binnen datzelfde vlak wordt verricht; in het tweede geval is het de totale arbeid die door de delen buiten σ wordt verricht op degene die binnen σ gelegen zijn.

§ 20. Wij hebben, zoals gezegd is, met het eerste geval te maken en het zal nu duidelik zijn hoe we de wet van het behoud van arbeidsvermogen op een sisteem dat zich met een standvastige translatiesnelheid voortbeweegt, moeten toepassen. De krachten die de ether op de ponderabele massa's uitoefent, zouden daaraan zekere versnellingen geven; onderstellen we dus dat die massa's een *standvastige* translatiebeweging hebben, dan brengt dit mee dat zij mechanies verbonden zijn met andere lichamen buiten het stelsel, die er tegengestelde versnellingen aan geven. Van deze „andere" lichamen vermelden we hier uitdrukkelik dat we ze niet tot „het stelsel" meerekenen. Aangezien de totale toename van de kinetiese energie van de materiele delen binnen σ gelijk 0 is, is de arbeid, verricht door de krachten die de ether er op uitoefent, gelijk aan de arbeid die deze delen zelf verrichten op de lichamen waarmee ze mechanies verbonden zijn. Dus is bij het opmaken van de energievergelijking de bovenbedoelde arbeid in rekening te brengen als arbeid door het sisteem op „de omgeving" verricht, en dus gelijk aan de algebraïese som van het verlies aan elektromagnetiese energie, het warmteverlies en de energie die gedurende de beschouwde tijd door het meebewegend oppervlak σ naar binnen gestroomd is. Laten we alles op de tijdseenheid betrekking hebben en duiden we voor dit tijdsverloop de energietoename door ΔE, de warmteontwikkeling door W aan; zij verder $\mathfrak{S}$ de energiestroom door een bewogen vlakteelement, dan luidt de energievergelijking

$$\int \left(\mathfrak{w}_x X_n + \mathfrak{w}_y Y_n + \mathfrak{w}_z Z_n \right) d\sigma = - \Delta E - W - \int \mathfrak{S}_n \, d\sigma,$$

als n de richting van de naar buiten getrokken normaal aanwijst. We kunnen voor deze vergelijking ook schrijven

$$\int \left\{ \mathfrak{S}_n + \left(\mathfrak{w} . \mathfrak{T}^n \right) \right\} d\sigma = - \Delta E - W, \tag{10}$$

waarbij evenals vroeger met $\mathfrak{T}^n$ de fiktieve spanning op het oppervlakteelement waarvan de normaal n is, bedoeld wordt. In het linkerlid van (10) staat nu volgens formule (8) juist de normale komponent van de vektor $\mathfrak{S}'$, die in een bewogen sisteem korrespondeert met de energiestroom van Poynting in een rustend. De energievergelijking gaat daardoor over in

$$\int \mathfrak{S}'_n \, d\sigma = - \Delta E - W, \tag{11}$$

en kan uit die voor een stilstaand sisteem verkregen worden, als men daarin de energiestroom van Poynting door de vektor $\mathfrak{S}'$ vervangt We zullen daarom $\mathfrak{S}'$ ook wel de „schijnbare energiestroom" door een bewogen vlak noemen; de *werkelike* energiestroom wordt zoals we zagen niet door $\mathfrak{S}'$ voorgesteld.

§ 21. We maken van (11) een toepassing die ons in het vervolg van dienst zal zijn. Stel, we hebben weer een afgesloten sisteem waarin in elk punt straalbundels van allerlei richting elkaar kruisen. Al deze bundels zijn afkomstig van verschillende volumeelementen en daardoor geheel onafhankelik van elkaar; we verkrijgen dus de totale energiestroom door een vlakteelement, indien we alle partiele energiestromen die tot de afzonderlike bundels behoren, bij elkaar optellen. Evenzo zal de totale elektromagnetiese energie die in een volumeelement aanwezig is, gelijk zijn aan de som van partiele energieën, die aan de afzonderlike bundels te danken zijn. We hebben hierbij voortdurend het oog op de totale evenwichtsverstoring, die nog niet in delen van verschillende frekwentie gesplitst is. In aanmerking genomen de *stationnaire* gemiddelde toestand die binnen een afgesloten sisteem van lichamen met gelijke temperatuur ontstaat, mogen we besluiten dat elk volumeelement, hetzij dit deel uitmaakt van een geleider, hetzij van een dielektrikum, of wel dat het in de vrije ether gelegen is, een elektromagnetiese energie bevat, waarvan het gemiddelde over zeker tijdsverloop onafhankelik is van het beschouwde ogenblik. Verder zal ook wegens de onderlinge onafhankelikheid van de diverze bundels de energie per volume-eenheid van iedere bundel afzonderlik een konstante waarde hebben en de toename er van = 0 zijn. Het ligt verder voor de hand om de totale warmteontwikkeling in zeker volumeelement op te vatten als de som van warmteontwikkelingen, veroorzaakt door elk van de bundels die elkaar in dat volumeelement kruisen, en wel aan elke bundel een zodanige bijdrage toeteschrijven, dat voor die bundel afzonderlik de wet van het behoud van arbeidsvermogen uitkomt. Dan wordt tevens door de feitelik bestaande toestand — die uit de afzonderlike bewegingstoestanden is samengesteld — aan de energiewet voldaan.

§ 22. We vatten in het oog een oneindig smalle straalbundel die in zeker volumeelement ontstaat en door terugkaatsingen en brekingen in allerlei bundeltjes gesplitst wordt; we onderstellen dat deze ten slotte alle geabsorbeerd worden. We denken ons verder om elk van deze bundels en bundeltjes een buisvormig oppervlak, zodanig dat aan dat oppervlak zo goed als geen lichtbeweging meer bestaat; elke aldus gevormde buis noemen we een straalbuis. Het is op de ruimte daarbinnen en op delen er van, dat we vergelijking (11) willen toepassen of liever degene die uit (11) ontstaat, indien we van beide leden het gemiddelde over zeker tijdsverloop nemen. Daarbij houden we, wat volgens de vorige § geoorloofd is, alleen rekening met de waarden van de elektromagnetiese grootheden die aan de beschouwde bundel te danken zijn. De gemiddelde toename per tijdseenheid van de elektromagnetiese energie is nu blijkbaar gelijk 0, dus komt er

$$(12) \qquad \int \overline{\mathfrak{S}'_n}\, d\sigma = -\overline{W},$$

als we de gemiddelden door strepen boven de letters aanduiden.

§ 23. We beschouwen een deel van een van de straalbuizen, geheel in hetzelfde doorschijnende dielektrikum binnen de afgesloten ruimte gelegen en begrepen tussen twee vlakken p en p' loodrecht op de straalrichting. Hierop passen we (12) toe. De warmteontwikkeling in dit deel is $= 0$, de schijnbare energiestroom door het oppervlak van de straalbuis insgelijks, omdat dáár geen lichtbeweging is. Is dus Σ de doorsnede van de bundel bij p, Σ' die bij p' en z de richting van de stralen, dan gaat (12) over in

$$(13) \qquad \mathfrak{S}'_{zp'}\, \Sigma' = \mathfrak{S}'_{zp}\, \Sigma$$

of in woorden: de totale schijnbare energiestroom die in een nietàbsorberend lichaam door de doorsnede van een straalbundel gaat, is voor alle doorsneden van eenzelfde ongestoord voortgaand gedeelte van de bundel even groot. Hierin vinden we de bevestiging van datgene waar we in § 18 op doelden en we zullen daarom in het vervolg van „de" intenziteit van een relatieve straalbundel kunnen spreken, die dan in grootte gelijk is aan het bedrag (13).

We willen nog van (13) gebruik maken, om een eigenschap van een volkomen spiegel af te leiden die we voor een bewogen stelsel definieren als een lichaam dat stralen noch doorlaat noch in warmte omzet, dus, behoudens de in aanmerking te nemen arbeid, alle opvallende energie terugkaatst.

We passen (13) toe op het deel van een straalbuis, beginnende bij zekere loodrechte doorsnede p in de invallende en eindigende bij een dergelijke doorsnede p' in de teruggekaatste bundel, terwijl we het dunne oppervlaktelaagje van de volkomen spiegel waar de lichtbeweging nog doordringt, meerekenen en door een vlak g afsluiten. Zoals de definitie aangeeft, is de warmteontwikkeling in de volkomen spiegel gelijk aan 0, evenzo die in het overige deel van de straalbuis, dat met het dielektrikum gevuld is. Verder verschillen alleen de schijnbare energiestromen door de vlakken p en p' van 0 en deze zijn dus, berekend voor de gehele doorsnede, volgens (13) aan elkaar gelijk. Daarmee is aangetoond dat de intenziteiten van de invallende en teruggekaatste bundel bij een volkomen spiegel gelijk zijn.

§ 24. We brengen een vlak p loodrecht op de straalrichting in een van de straalbuizen van het in § 22 beschouwde stralensisteem aan en passen (12) toe op dat deel van het buizenstelsel waar de stralen komen nadat ze p gepasseerd zijn. Waar de lichtbeweging van een bundeltje uitgeput is sluiten we de buisvormige ruimte af door vlakken p', p'', enz.; waar het de spiegelende wand treft, evenals in de vorige § door vlakken g, g', enz. dicht onder de oppervlakte gelegen. Het is duidelik dat dan alleen de schijnbare energiestroom door p van 0 verschilt en dat verder in de vergelijking nog slechts voorkomt de warmteontwikkeling in de ponderabele lichamen, veroorzaakt door de straalbundel nà het passeren van het vlak p. Is Σ de doorsnede en z de richting van de stralen bij p, welke richting tegengesteld aan die van n is, dan hebben we dus

$$\overline{W} = \overline{\mathfrak{S}_z}\,\Sigma,$$

d. w. z. beschouwt men een straalbundel van zeker vlak p af en wordt deze na herhaalde terugkaatsingen en brekingen ten slotte geheel geabsorbeerd, dan is de totale schijnbare energiestroom door p, gelijk aan de warmte die in de ponderabele lichamen ontwikkeld wordt door alle bundels en bundeltjes waarin de oorspronkelike straalbundel, na het vlak p voorbijgegaan te zijn, door de genoemde terugkaatsingen en brekingen gesplitst wordt. Volgens § 15 is deze schijnbare energiestroom ook gelijk aan de intenziteit van de straalbundel voor zover die gelegen is in het nietabsorberende lichaam waarin we het vlak p gekozen hebben. Dus kunnen we de voorgaande vergelijking ook aldus in woorden brengen: *de intenziteit van een straalbundel is gelijk aan het totale warmteeffekt dat de stralen teweegbrengen in de ponderabele lichamen waardoor ze, na herhaalde terugkaatsingen en brekingen, ten slotte geheel geabsorbeerd worden.* Deze stelling geldt in het biezonder ook voor rustende stelsels en is door Kirchhoff herhaaldelik stilzwijgend toegepast, waar geen bezwaar tegen is, omdat voor zulke sistemen de stelling een zó voor de hand liggend gevolg van de energiewet is, dat er niet afzonderlik de aandacht op gevestigd behoeft te worden.

§ 25. We willen verder (12) toepassen op het deel van de meermalen genoemde straalbundel dat begrepen is tussen de plaats van oorsprong en een vlak in het dielektrikum tussen de stralingsbron en het eerstvolgende absorberende lichaam. Dan komt er, als Σ de doorsnede en z de richting van de bundel bij het beschouwde vlak is,

$$\overline{\mathfrak{S}'_z}\, \Sigma = - W.$$

Nu is $-W$ het warmteverlies van de stralingsbron. Men kan ook zeggen dat $-W$ is de hoeveelheid warmte die door de stralingsbron „beschikbaar gesteld" wordt om de beschouwde straalbundel te geven Deze beschikbaar gestelde warmte is dus volgens de laatste vergelijking en volgens § 15 gelijk aan de intenziteit van de stralen in het dielektrikum waar de bundel inkomt onmiddellik nadat hij de stralingsbron verlaten heeft. Men kan dit in verband met de in § 18 gegeven definitie ook aldus formuleren: *het totale emissievermogen van een lichaam voor een gegeven straalbundel in een bepaalde omgeving is gelijk aan de warmte die het lichaam daarvoor beschikbaar stelt,* een stelling die voor een rustend stelsel weer vanzelf spreekt maar voor een bewogen wel afzonderlik mag gememoreerd worden.

§ 26. De voorafgaande definities en stellingen maken het mogelik om de beschouwingen van Kirchhoff over de verhouding van het emissie- en het absorptievermogen van rustende lichamen met slechts geringe wijzigingen voor een bewogen sisteem te herhalen. Deze wijzigingen betreffen echter, dank zij de gelijkluidendheid van de bedoelde definities en stellingen met die voor een rustend sisteem, minder *veranderingen* in de genoemde beschouwingen dan wel *aanvullingen* daarvan, die door het optreden van een translatiesnelheid nodig blijken. We zouden nu in het vervolg kunnen volstaan met alleen die aanvullingen uiteentezetten, en voor het overige naar Kirchhoff's verhandeling verwijzen, maar eensdeels voor de geregelde gang van het betoog, anderdeels, omdat toch ook enkele *veranderingen* van Kirchhoff's beschouwingen nodig zijn, zullen we liever de volledige teorie over de verhouding van het emissie- en het absorptievermogen van bewogen lichamen ontwikkelen. Deze vormt de inhoud van de volgende afdeling van dit hoofdstuk.

B. Bewijs van Kirchhoff's wet voor een bewogen stelsel.

§ 27. In het voorgaande definieerden we reeds het emissievermogen van een bewogen lichaam voor een willekeurige door het lichaam uitgezonden relatieve straalbundel, maar hadden daarbij het oog op de totale lichtbeweging, die nog niet in trillingen van verschillende frekwentie ontbonden was. De stelling echter die we in het vervolg zullen afleiden heeft juist betrekking op het emissievermogen van een lichaam voor trillingen van één bepaalde frekwentie, evenals dit het geval was met de analoge stelling die Kirchhoff voor een rustend sisteem gevonden heeft Kirchhoff gebruikt hierbij de benaming: trillingen van een bepaalde golflengte Dit nu kunnen wij niet doen; wèl kan men spreken van stralen van een bepaald trillingsgetal of een bepaalde frekwentie, maar het is onmogelik om in een bewogen stelsel de stralen door zo iets als hun golflengte te karakterizeren. De reden hiervan is dat golven van een bepaalde relatieve frekwentie een andere voortplantingssnelheid hebben naarmate ze zich in een andere richting met betrekking tot die van de translatie voortplanten. Verstaat men op de gewone wijze onder golflengte de weg waarover men in de voortplantingsrichting verder moet gaan, om op hetzelfde ogenblik dezelfde faze als in het punt van uitgang aan te treffen, dan is $\lambda = v\, T$, indien λ de golflengte, v de voortplantingssnelheid en T de periode is, en verandert dus λ (bij gegeven relatieve periode) evenals v, met de richting van voortplanting. Men zou nu wel bij afspraak met λ de grootheid $c\, T$ kunnen bedoelen, waarbij c de voortplantingssnelheid van het licht in de vrije ether is, maar dan is λ niet gelijk aan de golflengte van de stralen in een bewogen stelsel, zelfs niet voor een relatieve straalbundel die zich in de ether voortplant, en de bedoelde grootheid zou dus door een nieuwe benaming moeten worden onderscheiden. Om dit alles te vermijden zullen we voor bewogen stelsels altoos spreken van de relatieve *frekwentie* of kortweg de *frekwentie* van de stralen.

§ 28. Om een bepaalde straalbundel af te zonderen, maken we gebruik van de door Kirchhoff gebezigde inrichting (Fig. 1): het stralende lichaam C en daarvóór twee schermen S_1 en S_2 die we voorlopig als onderling evenwijdig zullen aannemen; in deze schermen openingen 1 en 2, waarvan de verbindingslijn loodrecht op de schermen staat. De openingen zullen oneindig kleine afmetingen hebben met betrekking tot hun afstand r. Het dielektrikum M dat zich buiten C en de beide schermen uitstrekt, zij vooralsnog willekeurig maar izotroop. Het geheel hebbe de konstante translatiesnelheid $\mathfrak{w}$. De beide openin-

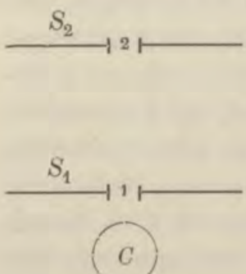

Fig. 1.

gen 1 en 2 bepalen dan in het medium M een van C afkomstige relatieve straalbundel; de lichtbeweging hiervan kunnen we ontbinden in trillingen van alle frekwenties tussen 0 en ∞. We vatten daaronder die trillingen in het oog waarvan de frekwenties liggen tussen n en $n + dn$; we mogen deze volgens het vroeger gezegde opvatten als te bestaan uit twee in onderling loodrechte maar overigens willekeurige vlakken a en b gepolarizeerde komponenten. De intenziteit, in de in § 15 aangeduide zin, van de eerstgenoemde komponent zij Kdn; dan heet K het emissievermogen van C met betrekking tot de straalbundel, het omringende dielektrikum en het polarizatievlak waarvan sprake was. Op het lichaam C valle omgekeerd door de openingen 2 en 1 een relatieve straalbundel van de frekwentie n, die in het vlak a gepolarizeerd is; van het deel hiervan dat het lichaam niet terugkaatst of doorlaat, gebruikt het nog weer een gedeelte van de orde $\mathfrak{w}$ om mechaniese arbeid op de omgeving te verrichten; het overige dient voor warmteontwikkeling in C. De verhouding van de hoeveelheid warmte die de stralen van de beschouwde bundel per tijdseenheid in C doen ontstaan, tot de intenziteit van die bundel zij A; dan noemen we A het absorptievermogen van C met betrekking tot de straalbundel, het omringende medium en het polarizatievlak waarvan sprake is. De grootheden K en A hangen af van de aard en de temperatuur van C, van de aard van het omringende medium, van de frekwentie n en van de ligging en de grootte van de openingen 1 en 2; misschien ook van de stand die de door figuur 1 voorgestelde inrichting ten opzichte van de translatierichting inneemt. We zullen aantonen dat de verhouding van K en A onafhankelik is van de aard van het lichaam C, van de richting van het polarizatievlak a en van de hoek die de stralen met de translatierichting maken. Hierbij hebben we voortdurend het oog op een en dezelfde translatiesnelheid $\mathfrak{w}$ ten opzichte van de rustende ether. Wat de afhankelikheid van de grootheden K en A van de grootte en de richting van die translatiesnelheid betreft, dit is een kwestie waarmee we ons pas in de laatste plaats willen bemoeien; eerst zullen we zien wat er van KIRCHHOFF's wet wordt in één bepaald zich verschuivend stelsel van stralende lichamen.

§ 29. We nemen aan, evenals KIRCHHOFF dat doet voor een rustend sisteem, dat er lichamen zijn die van alle stralingsenergie die er op valt, niets terugkaatsen of doorlaten, dus alles in warmte en ponderabele arbeid omzetten. Deze lichamen, die we volkomen zwarte of kortweg zwarte lichamen noemen, hebben dan evenals in een stilstaand sisteem de eigenschap dat hun absorptievermogen 1 is; immers, valt op zo'n lichaam een straalbundel, dan wordt deze in de zin van § 24 volkomen geabsorbeerd, hetgeen wil zeggen dat er geen bundel door dat lichaam wordt teruggekaatst of doorgelaten; volgens de in diezelfde § bewezen stelling is dan de warmteontwikkeling die de straalbundel in het zwarte lichaam veroorzaakt, juist gelijk aan de intenziteit er van; het absorptievermogen van dat lichaam derhalve gelijk 1.

§ 30. Van nu af onderstellen we, tenzij het tegendeel vermeld wordt, dat het medium dat C omringt de ether is; dit doen we om voortdurend één bepaald emissievermogen op het oog te hebben. We kunnen dan aan het eind van onze beschouwingen terugkomen op het geval dat het omringende medium een willekeurig doorschijnend lichaam is

Zij C vooreerst een zwart lichaam. Zijn emissievermogen noemen we k_1; we zullen in de eerste plaats aantonen dat k_1 onveranderd blijft, indien C door een ander zwart lichaam van dezelfde temperatuur vervangen wordt We denken ons het zwarte lichaam in een zwart omhulsel gesloten, dat zelf tegen straling naar buiten beschut is door aan de buitenzijde volkomen spiegelende wanden De schermen S_1 en S_2 maken deel uit van het zwarte omhulsel en wel zó, dat de opening

2 nu door een zwart vlak 2 is afgesloten, de opening 1 daarentegen vrij blijft. (Figuur 2).

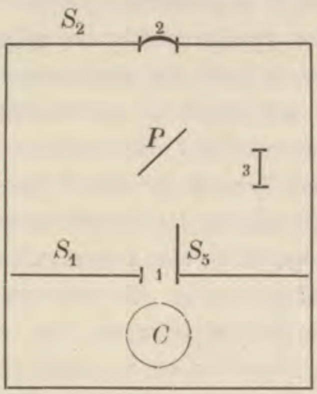

Fig. 2.

De overige in de figuur aangegeven lichamen moeten voorlopig nog weggedacht worden. Het gehele sisteem hebbe tans dezelfde temperatuur; de temperatuurgelijkheid wordt volgens hetgeen we in de inleiding zeiden, door de straling niet gestoord. Dus moet de warmte door C beschikbaar gesteld om naar alle richtingen stralingsenergie uittezenden, gelijk zijn aan de totale warmteontwikkeling die alle op C vallende stralen in dit lichaam veroorzaken. Volgens de stellingen van § 24 en § 25 kunnen we dit ook zó zeggen: de som van de intenziteiten van de stralen die C uitzendt is gelijk aan de som van de intenziteiten van de stralen die op C vallen. Het vlak 2 worde nu verwijderd en vervangen door een volkomen spiegelende wand, zódanig dat het opties beeld van de opening 1 door die wand gevormd, met 1 samenvalt. We stellen ons daarbij onwillekeurig voor dat dit zó geschiedt dat lichtpunt en beeldpunt elkaars tegenpunten zijn ten opzichte van het middelpunt van de opening 1. In een rustend stelsel zou het spiegelende vlak 2 dan een deel moeten zijn van een holle spiegel waarvan het middelpunt met dat van de opening 1 samenvalt. De reeds vermelde algemenere korrespondentiestelling zal leren dat in een bewogen sisteem van dezelfde holle spiegel in dezelfde stand gebruik gemaakt kan worden om het beoogde doel te bereiken; wat wij echter voorlopig slechts behoeven aan te nemen is dat er een spiegel kan *bestaan* die de genoemde eigenschap heeft. De buiging die de stralen aan de randen van 2 ondergaan moet echter verwaarloosd kunnen worden; daartoe is nodig dat de openingen 1 en 2, hoewel oneindig klein ten opzichte van hun afstand, toch nog groot zijn met betrekking tot de in aanmerking komende golflengten. We kunnen er altoos van te voren voor zorgen dat dit uitkomt, omdat de ervaring leert dat de intenziteit van stralen boven een bepaalde golflengte te verwaarlozen is; het bestaan van een translatiesnelheid die klein is ten opzichte van de snelheid van het licht in de ether, brengt in dit feit geen verandering. We kiezen nu de afmetingen van de openingen groot ten opzichte van die maximale golflengte [1]) en daarna de afstand van de openingen wederom groot ten opzichte van hun afmetingen.

Is nu de spiegel aangebracht, dan bestaat de enige verandering die daardoor in de stralingsuitwisseling van C gebracht is, hierin, dat C nu geen stralen van de zwarte wand ontvangt, in ruil daarvoor evenwel de stralen terugontvangt die hijzelf naar de volkomen spiegel heeft uitgezonden en die daardoor naar de opening 1 teruggekaatst zijn. Het evenwicht vereist dat de intenziteit van de straalbundel die het zwarte lichaam C door de openingen 1 en 2 uitzendt, gelijk is aan de intenziteit van de straalbundel die het zwarte vlak 2 bij dezelfde temperatuur door de opening 1 zendt. De eerstgenoemde intenziteit is dus, evenals de laatstgenoemde, onafhankelik van de natuur van C. Daarmee zou de uitgesproken stelling bewezen zijn, indien alle stralen van de beide met elkaar vergeleken straalbundels de frekwentie n hadden en in het vlak a gepolarizeerd waren. De verschillende aard van deze stralen maakt enigszins ingewikkelder beschouwingen nodig.

§ 31. In figuur 2 denken we ons de lichamen die we eerst weggedacht hadden, er nu wèl bij Deze zijn de volgende. Ten eerste een doorschijnend plaatje P, geplaatst op de weg van de stralen die van de opening 1 naar 2 gaan; dit plaatje hebbe een zo geringe dikte dat het geen

[1]) Zij zullen dan b.v. een paar m.M. zijn.

stralen uitzendt [1]), en zij verder zó gericht dat het invalsvlak van de genoemde stralen het vlak a is. Ten tweede een zwart schermpje S_3 zódanig gelegen dat het spiegelbeeld van de opening 2 ten opzichte van P daarin valt en er een deel van beslaat, dat we het vlakteelement 3 willen noemen; de straalbundel die door de openingen 1 en 2 bepaald wordt, valt dan na terugkaatsing tegen het plaatje P op het vlak 3 en neemt dit juist in beslag Ten derde een scherm S_5 dat verhinderen moet, dat er rechtstreeks stralen van het vlak 3 op de opening 1 vallen. De opening 2 zij door het zwarte vlakteelement 2 gesloten Nu stellen we ons voor dat het vlakteelement 3 verwijderd wordt en vervangen door een holle spiegel 3 die van het beeld van de opening 1 in het plaatje P opnieuw een beeld vormt dat met het eerste samenvalt; dan gaat in dit laatste geval de straalbundel die door de opening 1 vertrokken en door P naar 3 teruggekaatst is, na terugkaatsing tegen 3 en nog eens tegen P weer door de opening 1 naar C. Zowel bij aanwezigheid van het zwarte vlak 3 als van de volkomen spiegel 3, moet er temperatuurevenwicht zijn. Op een dergelijke manier als in de vorige § volgt hieruit dat de totale intenziteit van de stralen die door de verwijdering van het vlak 3 aan het lichaam C onttrokken worden, gelijk is aan de totale intenziteit van de stralen die C door het aanbrengen van de holle spiegel terugontvangt Het eerste bedrag is de intenziteit van de stralen die van het zwarte vlak 3 uitgegaan zijn, tegen het plaatje P teruggekaatst en door de opening 1 getreden; dit bedrag, dat we niet behoeven te kennen, noemen we Q. Het tweede bedrag bestaat uit twee delen; het eerste, dat we ook niet nader behoeven te kennen, is afkomstig van stralen die van een deel van de zwarte wand tegenover S_3 uitgegaan zijn, P doordrongen hebben, door de spiegel 3 en daarna door P teruggekaatst en eindelijk door de opening 1 op C gevallen zijn; dit bedrag noemen we R. Het andere deel

[1]) De doorschijnendheid van het plaatje is daartoe reeds voldoende, maar hiervan mag geen gebruik gemaakt worden.

van het tweede bedrag is afkomstig van C zelf en blijkbaar gelijk aan

$$\int_0^\infty k_1 r^2\, dn + \int_0^\infty k'_1 r'^2\, dn,$$

als r het reflexievermogen van P is, d. w. z. de verhouding van de teruggekaatste tot de invallende intenziteit voor een in het invalsvlak gepolarizeerde straal; k'_1 heeft betrekking op de loodrecht op het invalsvlak gepolarizeerde komponent, en r' is het reflexievermogen van P voor die komponent. Uit hetgeen we aan het slot van § 15 zagen, kunnen we afleiden dat r en r' door de translatie niet veranderd worden. Verder merken we nog eens op dat we hier weer gebruik gemaakt hebben van de in § 24 bewezen stelling, volgens welke de intenziteit van de op het lichaam C vallende straalbundel gelijk is aan de warmteontwikkeling die hij in C veroorzaakt R en Q hangen af van het reflexievermogen van P, maar zijn onafhankelik van de aard van het lichaam C. We hebben nu de vergelijking

$$\int_0^\infty k_1 r^2\, dn + \int_0^\infty k'_1 r'^2\, dn + R = Q.$$

Vervangt men C door een ander zwart lichaam van dezelfde temperatuur, dan komt er, als k_2 en k'_2 de emissievermogens daarvan zijn,

$$\int_0^\infty k_2 r^2\, dn + \int_0^\infty k'_2 r'^2\, dn + R = Q,$$

waaruit door aftrekking volgt

$$\int_0^\infty \left(k_1 - k_2\right) r^2\, dn + \int_0^\infty \left(k'_1 - k'_2\right) r'^2\, dn = 0.$$

We kunnen hieruit een vergelijking krijgen, die overeenstemt met de in hetzelfde verband door KIRCHHOFF voor een rustend stelsel gegevene [1]), indien we stellen

$$n = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

[1]) KIRCHHOFF l. c. § 3.

Vervangen we de uitdrukkingen $k\,dn$ en $k'dn$ door $-e\,d\lambda$ en $-e'd\lambda$, dan komt er

$$\int_0^\infty \left(e_1-e_2\right) r^2 d\lambda + \int_0^\infty \left(e'_1-e'_2\right) r'^2 d\lambda = 0.$$

We kunnen nu de brekingsindex van het plaatje P, die door de translatie niet verandert, voor alle in aanmerking komende frekwenties zo weinig van de eenheid laten verschillen als we willen Dan is de polarizatiehoek, die blijkens § 15 insgelijks door de translatie niet gewijzigd wordt, voor al die frekwenties op weinig na gelijk aan 45° en door het plaatje een zodanige stand te geven, dat de invalshoek gelijk 45° is, kunnen we de tweede term in de laatste vergelijking zo klein ten opzichte van de eerste maken als we goedvinden. Daaruit volgt dat het gehele linkerlid slechts $= 0$ kan zijn als de eerste term het is; we moeten dus hebben

$$\int_0^\infty \left(e_1-e_2\right) r^2 d\lambda = 0.$$

Uit het feit dat deze vergelijking voor alle mogelike dikten van het plaatje P — waarvan r afhankelik, maar (e_1-e_2) onafhankelik is — moet gelden, besluiten we op dezelfde wijze als Kirchhoff het in zijn verhandeling doet [1]), dat dit slechts mogelik is, indien $e_1=e_2$. Hieruit volgt tevens dat

$$k_1 = k_2.$$

Op een dergelijke manier kunnen we aantonen dat $k'_1=k'_2$. Er blijft nu nog over om te bewijzen, dat $k'_1=k_1$. We kunnen daartoe niet, zoals Kirchhoff voor een rustend sisteem doet, het lichaam C over een hoek van 90° om de straalrichting draaien en zeggen dat dan k_1 door k'_1 vervangen wordt; k'_1 kan n.l. onder het draaien veranderen, aangezien het met C meedraaiende polarizatievlak ten opzichte van de *translatierichting* in 't algemeen van stand verandert. We zullen daarom een andere weg moeten inslaan, om het verlangde rezultaat te vinden.

[1]) Kirchhoff l.c. § 3.

§ 32. We stellen ons voor dat de inrichting van figuur 2 alle lichamen die daarin aangegeven zijn bevat; alleen moeten de stralen nu niet onder een hoek van 45° op het plaatje P vallen, maar onder een willekeurige; het vlak 3 valle weer samen met het spiegelbeeld van de opening 2 in het plaatje en het worde daarna vervangen door de holle spiegel 3 waarvan het middelpunt samenvalt met dat van het beeld dat het plaatje P van de opening 1 vormt. Op de plaats van dit laatste beeld denken we ons een zwart vlak 4 (in de figuur niet aangegeven), dat dus gelijk is aan de opening 1. Zowel wanneer het vlak 3 als wanneer de spiegel 3 aanwezig is, moet het temperatuurevenwicht bestaan; daaruit volgt dat de totale intenziteit van de stralen die door de verwijdering van het vlak 3 aan het lichaam C onttrokken worden, gelijk is aan de totale intenziteit van de stralen die aan dit lichaam door het aanbrengen van de holle spiegel toegevoerd worden; het zwarte scherm S_5 moge weer de rechtstreekse bestraling van de opening 1 door het vlak 3 verhinderen De eerstgenoemde intenziteit moeten we nu, in tegenstelling met § 31, wèl weten. Zij k_3 het emissievermogen van het vlak 3 naar 4 voor de in het invalsvlak, k'_3 dat voor de loodrecht daarop gepolarizeerde stralen, r en r' de beide reflexievermogens van P, dan is het bedoelde bedrag van de straling die 3 naar C zendt,

$$\int_0^\infty k_3\, r\, dn + \int_0^\infty k'_3\, r'\, dn.$$

Na verwijdering van het vlak 3 en aanbrenging van de spiegel 3 ontvangt C in ruil voor het voorgaande bedrag: 1⁰. een deel van de intenziteit van de stralen die C zelf uitgezonden heeft, ten bedrage van

$$\int_0^\infty k_1\, r^2\, dn + \int_0^\infty k'_1\, r'^2\, dn;$$

daarbij voegt zich 2⁰. een bedrag afkomstig van stralen die 4 door P heen naar 3 gezonden heeft en die daarna door 3 en weer door P teruggekaatst en door de opening 1 op C gevallen zijn; het bedrag daarvan is blijkbaar

$$\int_0^\infty k_4 r\left(1-r\right) dn + \int_0^\infty k'_4 r'\left(1-r'\right) dn \text{ [1]}.$$

We moeten dus hebben

$$(14) \qquad \int_0^\infty k_3 r\, dn + \int_0^\infty k'_3 r' dn =$$

$$\int_0^\infty k_1 r^2 dn + \int_0^\infty k'_1 r'^2 dn + \int_0^\infty k_4 r\left(1-r\right) dn + \int_0^\infty k'_4 r'\left(1-r'\right) dn.$$

In deze formule kan een vereenvoudiging aangebracht worden. Denken we ons het vlak door de (willekeurig gekozen) emissierichting en de richting van de translatie, dan is het duidelik dat we het plaatje P altijd zó kunnen zetten, dat dit vlak invalsvlak wordt en dat tevens de richting van de teruggekaatste stralen, d. i. de richting van 4 naar 3 loodrecht op de translatierichting staat. Dit gedaan hebbende stellen we het aannemelike beginsel op de voorgrond, dat de draaiing van een bewogen sisteem om een as evenwijdig aan de translatierichting volstrekt geen invloed heeft op enig verschijnsel in dat sisteem, beschouwd ten opzichte van een koördinatenstelsel dat in het sisteem een vaste stand inneemt en dus de genoemde draaiing meemaakt. Als derhalve een lichaam voor zekere emissierichting en zeker polarizatievlak een emissievermogen K heeft, en het wordt vervolgens over een willekeurige hoek om de zoevengenoemde richting gedraaid, dan is zijn emissievermogen voor de meegedraaide richting en het meegedraaide polarizatievlak weer K. Denken we ons het lichaam zwart en nemen we in aanmerking — wat in de vorige § bewezen is — dat het emissievermogen

[1]) Dat deze uitdrukking voor een *rustend* stelsel juist is, is duidelik. Het blijft echter goed voor een bewogen stelsel wegens het in § 15 besprokene, waaruit n.l. volgt dat ook voor zulk een stelsel de som van het reflexie- en het doorlatingsvermogen = 1 is.

van zo'n lichaam onafhankelik van de aard daarvan is, dan komen we tot het besluit dat het emissievermogen van een zwart lichaam voor richtingen die gelijke hoeken met de translatierichting maken en polarizatievlakken die de zoeven vermelde standen ten opzichte van elkaar innemen, hetzelfde is. In 't biezonder geldt dit 1°. voor de emissierichting evenwijdig aan die van de translatie, waaruit volgt dat voor *deze* richting het emissievermogen van een zwart lichaam met betrekking tot *alle* polarizatievlakken hetzelfde is; en 2°. voor alle emissierichtingen die loodrecht op de translatie richting staan, dus o.a. voor de richtingen van 3 naar 4 en van 4 naar 3, waaruit volgt dat bij de bovenvermelde inrichting van figuur 2 $k_1 = k_3$ en $k'_1 = k'_3$ is Want na draaiing van de beschouwde polarizatierichtingen waarvan de een evenwijdig aan de translatierichting is en de ander loodrecht daarop — over een hoek van 180°, worden beide richtingen weer zoals ze eerst waren. Formule (14) gaat nu over in

$$(15) \qquad \int_0^\infty (k_1 - k_3)\, r^2 dn + \int_0^\infty (k'_1 - k'_3)\, r'^2 dn = 0.$$

Tot dezelfde vorm van vergelijking zouden we klaarblijkelik gekomen zijn, indien we voor het medium M niet de ether, maar een ander izotroop dielektrikum gekozen hadden. Ook de manier waarop we uit (15) zullen afleiden dat $k_1 = k_3$, en $k'_1 = k'_3$, is voor de ether geen andere dan voor een willekeurig doorschijnend medium; ter wille van een algemenere gevolgtrekking zullen we daarom bij het volgende betoog onderstellen dat het plaatje P aan weerskanten door zo'n medium omringd is. Uit de elektromagnetiese lichtteorie vinden we gemakkelik de beide reflexiekoëfficienten r en r' van een plaatje dat uit een doorschijnende stof 2 bestaat en aan beide zijden door de doorschijnende stof 1 begrensd wordt. Zij d de dikte van het plaatje, ν zijn brekingsindex ten opzichte van het medium 1 en λ_2 de golflengte in P voor stralen van de frekwentie n (als P

in rust is); zij verder de invalshoek Φ, de hoek van breking ψ, dan is

$$(16)\left\{\begin{aligned} r &= \frac{(\nu^2-1)^2\sin^2\frac{p}{\lambda_2}}{(\nu^2-1)^2\sin^2\frac{p}{\lambda_2}+4\nu^2\cos^2\Phi\cos^2\psi}, \\ r' &= \frac{(\nu^2-1)^2(\cos^2\Phi-\sin^2\psi)^2\sin^2\frac{p}{\lambda_2}}{(\nu^2-1)^2(\cos^2\Phi-\sin^2\psi)^2\sin^2\frac{p}{\lambda_2}+4\nu^2\cos^2\Phi\cos^2\psi}\end{aligned}\right.$$

waarbij gesteld is $p = 2\pi d\cos\psi$. Nemen we weer aan dat de brekingsindex ν zeer weinig van de eenheid verschilt en stellen we $\nu^2-1=\mu$, dan is met behoud alleen van de laagste machten van μ

$$p = 2\pi d\cos\Phi, \quad r = \frac{\mu^2}{4\cos^4\Phi}\sin^2\frac{p}{\lambda_2}, \quad \cos^2\Phi-\sin^2\psi = \cos 2\Phi,$$

$$r' = r\cos^2 2\Phi.$$

Voor (15) kan derhalve geschreven worden

$$\int_0^\infty \Big\{(k_1-k_3)+(k'_1-k'_3)\cos^4 2\Phi\Big\}\mu^4\sin^4\frac{p}{\lambda_2}\,dn +$$

$$+\int_0^\infty (A\mu^5+B\mu^6+\cdots\cdots)\,dn = 0.$$

Was de eerste integraal van het linkerlid niet $=0$, dan zouden we hem, door μ klein genoeg te kiezen, zo groot ten opzichte van de rest kunnen maken als we maar willen en het linkerlid zou zelf ook niet 0 kunnen zijn. Zal dit wèl het geval wezen, dan moet die eerste integraal dus op zichzelf 0 zijn. We krijgen daardoor de voorwaarde

$$(17)\quad \int_0^\infty \Big\{(k_1-k_3)+(k'_1-k'_3)\cos^4 2\Phi\Big\}\mu^4\sin^4\frac{p}{\lambda_2}\,dn = 0.$$

Hierin kunnen we stellen

$(k_1-k_3)dn = -(e_1-e_3)\,d\lambda_2, \quad (k'_1-k'_3)dn = -(e'_1-e'_1)\,d\lambda_2,$

waardoor (17) overgaat in

$$\int_0^\infty \Big\{(e_1-e_3)+(e'_1-e'_3)\cos^4 2\Phi\Big\}\mu^4\sin^4\frac{p}{\lambda_2}\,d\lambda_2 = 0.$$

Hieruit mogen we evenals in § 31 besluiten dat

$$(e_1 - e_3) + (e'_1 - e'_3)\cos^4 2\Phi = 0$$

of ook

(18) $$(k_1 - k_3) + (k'_1 - k'_3)\cos^4 2\Phi = 0.$$

Dit is een voorlopige betrekking tussen de grootheden $(k_1 - k_3)$ en $(k'_1 - k'_3)$, en de hoek 2Φ die de beschouwde emissierichting maakt met een richting loodrecht op de translatiesnelheid. We maken van deze betrekking gebruik om (15) nader te herleiden, waardoor we vinden

(19) $$\int_0^\infty (k'_1 - k'_3)(r'^2 - r^2\cos^4 2\Phi)\,dn = 0.$$

Nu is blijkens (16) op een grootheid van de orde μ^2 na

$$\frac{r'}{r} = (\cos^2\Phi - \sin^2\Phi)^2,$$

waaruit na enige herleiding volgt dat op een grootheid van de orde μ^6 na

$$r'^2 - r^2\cos^4 2\Phi = \frac{\cos^3 2\Phi \sin^2\Phi}{4\cos^8\Phi}\mu^5 \sin^4\frac{p}{\lambda_2}.$$

Substitueren we de laatstgevonden waarde in (19), dan komt er

$$\int_0^\infty (k'_1 - k'_3)\,\mu^5 \sin^4\frac{p}{\lambda_2}\,dn = 0,$$

waaruit we weer mogen besluiten dat

(20) $$k'_1 = k'_3$$

Evenzo is in verband met (18)

(21) $$k_1 = k_3.$$

De gelijkheden (20) en (21) gelden in alle gevallen, dus ook wanneer we, met behoud van hetzelfde invalsvlak, de emissierichting (de richting van 1 naar 2) langs die van de translatie kiezen. In dat geval is echter, zoals we in deze § zagen, $k'_1 = k_1$. Stel beide $= k$, dan hebben we nu volgens (20) en (21) ook

(22) $$k'_3 = k_3 = k,$$

en verder in het algemeen voor elke willekeurige richting

(23) $$k'_1 = k_1 = k.$$

Hiermee is aangetoond dat het emissievermogen k_1 van een zwart lichaam voor trillingen waarvan het polarizatievlak *a* gaat door de translatierichting, gelijk is aan het emissievermogen k'_1 voor trillingen waarvan het polarizatievlak loodrecht op het eerstgenoemde vlak staat. Daaruit volgt dat het door een bewogen zwart lichaam uitgezonden licht geen rechtlijnig gepolarizeerd deel heeft; immers, was dit het geval, dan zou het polarizatievlak van dit laatste deel om redenen van simetrie òf met het vlak *a* òf met *b* moeten samenvallen, wat juist zou willen zeggen dat de emissievermogens voor die twee vlakken *niet* gelijk zijn, in strijd met het gevonden rezultaat. Behalve echter dat het bedoelde emissievermogen voor elk polarizatievlak hetzelfde is, leert (23) nu ook nog dat het niet afhangt van de hoek die de as van de beschouwde straalbundel maakt met de translatierichting. Daarmee is omtrent het emissievermogen van een zwart lichaam alles aangetoond wat we ons voorstelden te bewijzen.

Is $d\sigma_1$ de grootte van de opening 1, $d\sigma_2$ die van 2, zijn verder ϑ_1 en ϑ_2 de scherpe hoeken die de normalen op de openingen maken met hun verbindingslijn, dan is evenals voor een rustend stelsel

$$k = f\,\frac{d\sigma_1\, d\sigma_2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2}{r^2} \tag{24}$$

waarin de emissiekoëfficient f nog afhangt van de temperatuur en de frekwentie. De laatste formule drukt de wet van de wederkerige toestraling van twee zwarte vlakteelementen $d\sigma_1$ en $d\sigma_2$ uit, die op een afstand r van elkaar gelegen zijn en waarvan de normalen resp. de scherpe hoeken ϑ_1 en ϑ_2 met hun verbindingslijn maken.

§ 33. We komen nu tot het bewijs van een stelling die opgevat kan worden als een uitbreiding van het in de vorige § genoemde wederkerigheidsprincipe. Tussen de beide zwarte vlakken 1 en 2 van dezelfde temperatuur stelle men zich lichamen voor die de stralen welke die twee vlakken elkaar toezenden, op willekeurige wijze terugkaatsen, breken en absorberen. Eén van de straalbundels die van 1 naar 2 gaat vatte men in 't oog; bij 2 ontbinde men het deel waarvan de frekwenties tussen n en $n + dn$ liggen in twee komponenten, die in de onderling loodrechte vlakken a_2 en b_2 gepolarizeerd zijn; de intenziteit van de eerste komponent zij Hdn. Van de bundel die langs dezelfde weg in omgekeerde richting van 2 naar 1 gaat, ontbinde men, wederom bij 2, het deel waarvan de frekwenties tussen n en $n + dn$ liggen, in twee volgens a_2 en b_2 gepolarizeerde komponenten. Wat er van de eerste komponent bij 1 aankomt zij in zijn geheel $H'dn$ Dan is

$$H = H'.$$

Door Kirchhoff is gebruik gemaakt van deze stelling bij zijn beschouwingen voor een rustend sisteem [1]; het bewijs er voor kan, wanneer slechts doorschijnende lichamen op de weg van de lichtstralen voorkomen, volkomen streng geleverd worden. Gaan de stralen echter op hun weg tussen 1 en 2 door absorberende lichamen, dan kan men de bedoelde stelling nog wel *aannemelik* maken, maar een streng bewijs dat met alle gevallen van absorptie rekening houdt, is bezwaarlik meer te geven. Het is o. a. al moeilik zich een voorstelling te vormen van de aard van de evenwichtsverstoring in een enigszins sterk absorberend medium; daar loopt Kirchhoff zo maar over heen en dit is een zwak punt in zijn betoog. Kirchhoff beroept zich verder op een uitspraak van Helmholtz [2], om daaruit te besluiten dat de wederkerigheidsstelling altoos doorgaat. Of Helmholtz echter van zijn uitspraak een volkomen streng betoog [3]) gegeven heeft, mag betwijfeld worden en zo blijft de hierbedoelde stelling toch altijd nog min of meer een aanname.

Men zou een dergelijke aanname ook voor een bewogen stelsel kunnen maken, maar we willen opmerken dat dit

[1]) Kirchhoff. l. c. § 9.

[2]) Helmholtz. Physiologische Optik. Abschnitt 1, § 16.

[3]) Als zodanig zou men kunnen aanmerken de reciprociteitsstelling in Helmholtz: Ueber das Prinzip der kleinsten Wirkung. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 100. Heft 3. p. 218.

niet meer nodig is, aangezien, als men aangenomen heeft dat de stelling voor een rustend stelsel geldt, men bewijzen kan dat hij ook voor een bewogen stelsel doorgaat. Dit bewijs berust op de reeds meermalen vermelde en in het volgende hoofdstuk te bewijzen algemenere korrespondentiewet voor absorberende lichamen. Uit deze volgt n.l. dat de intenziteiten van korresponderende straalbundels voor dezelfde frekwentie en korresponderende polarizatievlakken gelijk zijn; noemen we de intenziteiten die we straks in het bewogen stelsel door H en H' aangeduid hebben, voor het rustende H_1 en H'_1, dan is $H = H_1$ en $H' = H'_1$. Maar aangenomen was dat $H_1 = H'_1$, dus is ook $H = H'$, hetgeen te bewijzen was.

§ 34. Met behulp van de laatste stelling kunnen we nu aantonen dat voor een willekeurig lichaam C waarvan het emissievermogen K en het absorptievermogen A is, de gelijkheid geldt

$$\frac{K}{A} = k,$$

indien k het emissievermogen voorstelt van een zwart lichaam van dezelfde temperatuur als C, dat voor C in de plaats komt. Dit bewijs is woordelik gelijk aan datgene wat Kirchhoff in § 11 van zijn verhandeling voor een rustend sisteem heeft gegeven; we behoeven het dus niet te herhalen. Alleen merken we nog op dat de bedoelde gelijkluidendheid vooreerst te danken is aan de in deel A van dit hoofdstuk gegeven definities en stellingen, en verder aan de omstandigheid dat we in de §§ 31—33 presies dezelfde wetten voor *zwarte* lichamen gevonden hebben, als gelden voor een rustend stelsel. Tevens zal, aangezien deze laatstgenoemde wetten blijven gelden, indien de stralen niet in de ether maar in een willekeurig medium worden uitgezonden, ook de wet over de standvastige verhouding van het emissie- en het absorptievermogen van een lichaam nog doorgaan, wanneer het omringende medium een willekeurig izotroop dielektrikum is; alleen zal de waarde die de konstante verhouding heeft — dat is het emissievermogen van een zwart lichaam — afhangen van de aard van dat dielektrikum.

§ 35 Nog een algemene gevolgtrekking is uit de genoemde wet te maken. Een willekeurig lichaam A zende door een element α van zijn oppervlak een straalbundel die door allerlei dielektrika en absorberende lichamen naar een ander oppervlakteelement β van zeker lichaam B gaat, waarbij echter α en β onmiddellik aan een doorschijnend lichaam grenzend gedacht moeten worden. Van deze bundel beschouwen we in het dielektrikum bij A het deel waarvan de frekwenties tussen n en $n + dn$ gelegen zijn en ontbinden dit in twee komponenten die volgens de onderling loodrechte vlakken 1 en 2 gepolarizeerd zijn; wat van de eerste komponent bij B aankomt ontbinden we in twee komponenten, die in de beide onderling loodrechte vlakken 3 en 4 gepolarizeerd zijn. De gezamenlike intenziteiten daarvan kunnen we, als A_1 het absorptievermogen van het lichaam A is voor de beschouwde bundel en het polarizatievlak 1, voorstellen door de uitdrukking

$$A_1 (k_{13} + k_{14})\, dn,$$

waarin $k_{13}\, dn$ en $k_{14}\, dn$ de intenziteiten zijn die de volgens 3 en 4 gepolarizeerde komponenten resp. zouden hebben, indien het vlak α door een zwart vlakteelement van dezelfde gedaante en temperatuur vervangen werd. De warmteontwikkeling w_1 die het genoemde deel van de door A uitgezonden stralen in B geeft, wordt derhalve bepaald door de formule

$$w_1 = A_1 (A_3 k_{13} + A_4 k_{14})\, dn,$$

als A_3 en A_4 resp de absorptievermogens van B zijn voor de beide in de vlakken 3 en 4 gepolarizeerde komponenten waarin we bij B de bundel ontbonden hebben. Van de stralen die uit B langs dezelfde weg naar A gaan, beschouwen we het deel waarvan de frekwenties liggen tussen n en $n + dn$, en ontbinden dit bij B in twee komponenten, die in de vlakken

3 en 4 gepolarizeerd zijn; wat van de eerste komponent bij A aankomt, ontbinden we in twee volgens de vlakken 1 en 2 gepolarizeerde komponenten en noemen de intenziteit van het in 1 gepolarizeerde deel $A_3\, k_{31}\, dn$. Voor de tweede komponent, die bij B in het vlak 4 gepolarizeerd is, stellen we het overeenkomstige bedrag voor door $A_4\, k_{41}\, dn$; dan zijn $k_{31}\, dn$ en $k_{41}\, dn$ resp. de intenziteiten die voor $A_3\, k_{31}\, dn$ en $A_4\, k_{41}\, dn$ in de plaats treden, wanneer β door een zwart vlakte-element van dezelfde gedaante en temperatuur vervangen wordt. De warmteontwikkeling w_2 die de beschouwde stralen gezamenlik in A geven, is

$$w_2 = A_1\, (A_3\, k_{31}\, dn + A_4\, k_{41}\, dn)$$

Volgens een stelling, iets algemener dan die in § 33, en voor een rustend sisteem eveneens door Kirchhoff uitgesproken, is nu $k_{13} = k_{31}$, en $k_{41} = k_{14}$; daaruit volgt dat de beide warmtehoeveelheden w_1 en w_2 ook aan elkaar gelijk zijn. Dus is hiermee de volgende wederkerigheidsstelling bewezen: De warmteontwikkeling die een lichaam A geeft in een ander B tengevolge van dat deel van een door A langs zekere weg naar B gezonden straalbundel, dat in het dielektrikum bij A in het vlak a gepolarizeerd is en waarvan de frekwenties liggen tussen n en $n + dn$, is gelijk aan de warmte die B geeft in A tengevolge van het deel van een door B langs dezelfde weg naar A gezonden straalbundel, dat insgelijks bij A in het vlak a gepolarizeerd is en waarvan de frekwenties ook liggen tussen n en $n + dn$. We merken nog eens op dat deze stelling alleen bewezen is, wanneer A en B onmiddellik aan een voor alle stralen doorschijnend medium grenzen.

§ 36. Met behulp van de laatstgenoemde stelling kunnen we doen zien hoe het gesteld is met de stralingsenergie in de ether binnen een door volkomen spiegelende wanden afgesloten ruimte, die overigens nog lichamen van allerlei aard bevat. Bij onregelmatige verspreiding van deze laatste komen er in een punt P van de ether straalbundels van allerlei richting samen, hetzij rechtstreeks van de lichamen, hetzij na herhaalde terugkaatsingen en brekingen. Hieruit zonderen we een oneindig smal bundeltje van stralen af, die vallen binnen de opening $d\omega$ van een kegeltje met P tot top. De gemeenschappelike richting die we aan die stralen mogen toekennen, zullen we de richting z noemen, de tegengestelde richting door $-z$ aanduiden Denken we ons in P een zwart vlakteelement van de grootte $d\sigma$ loodrecht op z, en sluiten we vooreerst het zeer biezondere geval uit, dat de beschouwde bundel, vóórdat hij P bereikte, nog eens in een andere richting door P gegaan is, dan kunnen we beweren dat door het aanbrengen van het vlak $d\sigma$ geen verandering ontstaan is in het deel van de bundel dat vóór $d\sigma$ gelegen is. De bedoelde straalbundel is ontstaan door de vereniging van allerlei gedeeltelike bundels, die door verschillende vlakteelementen heen in de ether getreden zijn en na terugkaatsingen en brekingen zich langs de gemelde weg naar het punt P hebben begeven; van de eindbundel beschouwen we het deel waarvan de frekwenties liggen tussen n en $n + dn$, en ontbinden dit in twee komponenten waarvan de ene in het YZ-vlak, de tweede in het XZ-vlak gepolarizeerd is; de intenziteit van de eerste komponent zij hdn, dan is dit ook de warmteontwikkeling die hij in het zwarte vlak $d\sigma$ geeft. Volgens de in § 35 bewezen stelling is hdn nu ook de warmteontwikkeling die de stralen door het zwarte vlak $d\sigma$ in omgekeerde richting uitgezonden, met frekwenties tussen n en $n + dn$ en bij P in het YZ-vlak gepolarizeerd, in de lichamen doen ontstaan die tot de eerstgenoemde bundel hebben bijgedragen. Daar de tweede bundel ten slotte geheel geabsorbeerd wordt, is hdn dus de totale intenziteit van het genoemde deel van de door $d\sigma$ uitgezonden stralen. Deze laatste is blijkens (24) gelijk aan $f\, d\sigma\, d\omega\, dn$, zodat we hebben

$$h\, dn = f\, d\sigma\, d\omega\, dn$$

of

$$h = f\, d\sigma\, d\omega.$$

Het is dus alsof in de richting — z een zwart vlakte-element stond dat van P uit onder de kegelopening $d\omega$ gezien wordt; dit zou n.l. juist de beschouwde bundel kunnen geven.

Heeft het punt P wèl de biezondere ligging die we eerst uitgesloten hadden, dan kan men niet à priori zeggen dat door het aanbrengen van het vlak $d\sigma$ de beschouwde bundel niet gewijzigd wordt. We kunnen dan evenwel een punt P' beschouwen dat oneindig dicht bij P gelegen is en de bedoelde biezondere ligging niet heeft; voor dit laatste punt geldt dan weer de gegeven beschouwing en dus gaat de daardoor gevonden uitkomst ook door voor het punt P, waar de toestand maar oneindig weinig van die in P' kan verschillen.

Het punt P en de richting z waarop we de aandacht gevestigd hadden zijn blijkbaar geheel willekeurig, zodat we tot het besluit komen dat elke straalbundel in de ether binnen een afgesloten zich bewegend stelsel afkomstig kan gedacht worden van een zwart lichaam; we drukken dit uit door te zeggen dat binnen een afgesloten sisteem de „zwarte" straling bestaat De gemiddelde *schijnbare* energiestroom per vlakte-eenheid die aan het genoemde deel van de beschouwde bundel beantwoordt, is $f\,d\omega\,dn$; noemen we deze $\mathfrak{S}_z'$ [1]), dan hebben we ook

$$f\,d\omega\,dn = \overline{\mathfrak{S}}_z' = c \cdot \tfrac{1}{2}\,(\overline{\mathfrak{E}_x'^2} + \overline{\mathfrak{H}_y'^2}), \tag{25}$$

evenals voor een rustend stelsel de gemiddelde *werkelike* energiestroom $\overline{\mathfrak{S}}_z$ in de ether gelijk is aan de gemiddelde energie per volume-eenheid — die we hier U_z zullen noemen — vermenigvuldigd met c, of

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = c \cdot \tfrac{1}{2}\,(\overline{\mathfrak{E}_x^2} + \overline{\mathfrak{H}_y^2}).$$

Herleiden we (25) met behulp van (5), dan komt er

$$f\,d\omega\,dn = \overline{\mathfrak{S}_z'} = c.\ \tfrac{1}{2}\,(\overline{\mathfrak{E}_x^2} + \overline{\mathfrak{H}_y^2})\left(1 - \frac{2\mathfrak{w}_z}{c}\right) = cU_z\left(1 - \frac{2\mathfrak{w}_z}{c}\right).$$

Voor de tegengesteld gerichte bundel vinden we

$$f\,d\omega\,dn = cU_{-z}\left(1 + \frac{2\mathfrak{w}_z}{c}\right).$$

---

[1]) We zetten weer strepen boven de letters om gemiddelden aan te duiden.

De totale energie per volume-eenheid, te danken aan de beide bundels, is gelijk aan de som van de twee bedragen U_z en U_{-z}, dus $2\,f\,d\omega\,dn/c$, en de energie die aan alle mogelike bundels samen beantwoordt $4\pi f\,dn/c$. Daarbij is telkens nog slechts rekening gehouden met de in het YZ-vlak gepolariseerde komponent. Neemt men ook de andere komponent in aanmerking, dan vinden we ten slotte voor de gezamenlike energie U per volume-eenheid van de ether binnen een afgesloten sisteem, te danken aan stralen van de frekwentie n

$$U = \frac{8\pi f}{c}\,dn. \tag{26}$$

We kunnen een dergelijke uitkomst ook nog afleiden, indien het beschouwde medium niet de ether, maar een willekeurig dielektrikum is, voor alle frekwenties doorschijnend. Dit willen we niet nader aanwijzen maar alleen de uitkomst vermelden. Is f_ν de emissiekoëfficiënt van een bewogen zwart lichaam, wanneer het omringende dielektrikum de brekingsindex ν heeft, V de voortplantingssnelheid in dat dielektrikum als het stilstaat, en U_ν de energie per volume-eenheid in een punt P daarvan, indien het deel uitmaakt van een bewogen afgesloten stelsel, dan vindt men dat

$$U_\nu = \frac{8\pi f_\nu}{V}\,dn. \tag{27}$$

§ 37. We willen nu overgaan tot het vergelijken van de stralingsverschijnselen in twee stelsels die verschillende translatiesnelheid hebben. Dit zal het gemakkelikst kunnen geschieden door eerst een sisteem dat de willekeurige snelheid $\mathfrak{w}$ heeft, te vergelijken met een stilstaand. De grootheid f_ν, waarmee de energiedichtheid in een willekeurig punt P van een doorschijnend lichaam, binnen een afgesloten sisteem van lichamen met overal gelijke temperatuur, evenredig is, zullen we van nu af kortweg de stralingsgrootheid in dat medium noemen. We stellen ons de vraag hoe wel de stralingsgrootheid voor een bepaalde relatieve frekwentie verandert, indien een afgesloten sisteem dat eerst in rust was, daarna in beweging gebracht wordt, zonder dat de temperatuur verandert; deze vraag heeft een bepaalde zin, daar we in de inleiding vastgesteld hebben, wanneer de temperatuur in een rustend en in een bewogen sisteem gelijk genoemd zal worden; dit zou nl. het geval zijn, indien er tussen de lichamen van beide stelsels warmte-evenwicht bestaat. Ook wezen we in § 4 op de aannemelikheid van de onderstelling dat dit warmteevenwicht zal intreden zodra de gemiddelde inwendige kinetiese energie per molekuul voor de twee stelsels hetzelfde geworden is. Is nu K de bedoelde kinetiese energie, die we ook de „molekulaire bewegingsintenziteit" zullen noemen, dan kunnen we voor de stralingsgrootheid f_ν stellen

$$f_\nu = \psi\,(K, n, \mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z). \tag{28}$$

We zullen de stralingsgrootheid voor het rustende stelsel, bij dezelfde temperatuur en dezelfde relatieve (hier ook absolute) frekwentie, door f_{ν_0} voorstellen. Nemen we aan dat de funktie ψ op de plaats $\mathfrak{w} = 0$ volgens het teorema van Taylor ontwikkeld kan worden, dan kunnen we met weglating van grootheden van de tweede orde voor (28) ook schrijven

$$f_\nu = f_{\nu 0} + \alpha\,\mathfrak{w}_x + \beta\,\mathfrak{w}_y + \gamma\,\mathfrak{w}_z.$$

Het is verder wel aannemelik dat de stralingsgrootheid in een bewogen sisteem, wanneer men voortdurend dezelfde *relatieve* frekwentie beschouwt, alleen van de *grootte*, maar niet van de *richting* van de translatiesnelheid afhangt, aangezien we aan het medium in alle richtingen dezelfde eigenschappen toeschrijven. Wanneer we dus $\mathfrak{w}_x$ door $-\mathfrak{w}_x$, of $\mathfrak{w}_y$ door $-\mathfrak{w}_y$, of $\mathfrak{w}_z$ door $-\mathfrak{w}_z$ vervangen, dan moet f_ν onveranderd blijven; daaruit volgt dat de koëfficiënten α, β en γ gelijk 0 zijn, zodat $f_\nu = f_{\nu 0}$. De stralingswet voor een zwart lichaam is dus, wanneer men de daarin voorkomende grootheden zó definieert als dit in het voorgaande gedaan is, voor een bewogen stelsel geheel dezelfde als voor een rustend. In het biezonder blijven de wetten van Clausius, Wien en Boltzmann gelden, zoals we dit van de laatste nog langs een andere weg willen aantonen.

§ 38. We beschouwen daartoe een bewogen stelsel, afgesloten door een volkomen spiegelende wand W, waarbinnen zich behalve de ether nog een absorberend lichaam M bevindt, dat de zwarte straling zal veroorzaken. De elektromagnetiese bewegingen zullen nog even in de wand doordringen en aan zeker oppervlak P uitgeput zijn. We vestigen de aandacht op het gehele binnen het vlak P gelegen sisteem; de toestand hiervan wordt bepaald door twee grootheden: de temperatuur ϑ en het volume v. Voor een dergelijk sisteem voert toepassing van de tweede hoofdwet tot de vergelijking

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = -p + \vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta}. \tag{29}$$

Hierin is ε de totale energie van het stelsel, d.w.z. de elektromagnetiese energie van de ether daarbinnen, vermeerderd met de energie van het lichaam M; p betekent de „druk" van de stralen. We zullen in § 40 aantonen dat deze stralingsdruk, evenals binnen een rustend afgesloten stelsel, gelijk is aan één derde van de totale energie U die de ether per volume-eenheid bevat. Verder is $\partial\varepsilon/\partial v$ de toename van de energie per eenheid van volumetoename en konstante temperatuur; hierbij verandert U niet en p dus evenmin. Aangezien de toestand van het lichaam M geheel door de druk p en de temperatuur ϑ bepaald wordt, ondergaat hij geen verandering. Het is dus alleen het volume in de ether dat met dv toeneemt; daardoor neemt de energie met een bedrag $d\varepsilon = U dv$ toe, zodat $\partial\varepsilon/\partial v = U$ en (29) overgaat in

$$U = -\frac{1}{3} U + \frac{1}{3} \vartheta \frac{dU}{d\vartheta}.$$

Na integratie komt er

$$U = a \vartheta^4. \tag{30}$$

Voor een rustend stelsel geldt de wet van Boltzmann

$$U_0 = a_0 \vartheta^4.$$

Bij gelijke temperaturen hebben dus de energiedichtheden van de beide stelsels een verhouding die voor alle temperaturen hetzelfde is. Dit stemt overeen met het in de vorige § gevonden rezultaat, waar bovendien bleek dat de bedoelde verhouding gelijk 1 is. Derhalve is $a = a_0$ en $U = U_0$. We willen nog opmerken dat het zwaartepunt van het betoog waardoor we tot de uitkomst (30) gekomen zijn, gelegen is in de omstandigheid dat we de tweede hoofdwet voor een bewogen stelsel aannemen, en dat verder in zulk een stelsel de druk p op dezelfde wijze met de energie samenhangt als in een rustend.

§ 39. We zullen ten slotte aantonen dat de nu beschouwde zwarte-stralingstoestand Q die in de ether binnen een afgesloten zich bewegend sisteem van de temperatuur ϑ bestaat, identiek is met de toestand P' die korrespondeert met de zwarte-stralingstoestand P in een rustend stelsel met dezelfde temperatuur; van de toestand P' weten we n.l. alleen dat hij *mogelik* is, nog niet dat hij ook de *werkelike* toestand voorstelt. We beschouwen daartoe de kenmerken die voldoende zijn om Q te bepalen, n. l. voor zover er van bepaaldheid van de toestand sprake kan zijn (de grillige fazeveranderingen die in ieder punt bestaan (§ 10) zijn o.a. volstrekt niet bepaald). De bedoelde kenmerken zijn de volgende:

1⁰. Bij de toestand Q bestaan relatieve straalbundels van alle mogelike richtingen, maar zó dat bij gegeven relatieve frekwentie voor elke richting en voor elk polarizatievlak de *intenziteit* dezelfde is (§ 36).

2⁰. In de toestand Q is de aan alle bundels gezamenlik te danken energie per volume-eenheid bij een bepaalde relatieve frekwentie volgens § 37 even groot als in de toestand P.

Beide onder 1⁰ en 2⁰ genoemde eigenschappen kenmerken ook de toestand P'; de eerste volgt onmiddellik uit het feit dat P' korrespondeert met P en voor deze laatste toestand de bedoelde eigenschap geldt; de tweede, dat n.l. de energie per volume-eenheid in de toestand P' even groot is als die in de toestand P (bij één bepaalde relatieve frekwentie), zullen we in de volgende § aantonen. Daarmee is dan de identiteit van de toestanden Q en P' bewezen en zien we tevens dat bij korresponderende toestanden de temperaturen gelijk moeten zijn, wat we in het volgende hoofdstuk nog langs andere weg zullen aantonen.

§ 40. De grootheden die in het rustende stelsel de toestand P kenmerken duiden we aan met de index 1, die in het bewogen stelsel (toestand P') met de index 2. Voor zekere frekwentie zij in de toestand P de energie per volume-eenheid $= U_1$ en in de toestand $P' = U_2$, dan hebben we

$$(31) \qquad U_1 = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2{}_1 + \mathfrak{H}^2{}_1), \qquad U_2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2{}_2 + \mathfrak{H}^2{}_2).$$

Met behulp van (5) vinden we na enige herleiding

$$\mathfrak{E}^2{}_{2x} + \mathfrak{H}^2{}_{2x} = \mathfrak{E}'^2{}_{2x} + \mathfrak{H}'^2{}_{2x} - \frac{2}{c} (\mathfrak{w}_y \mathfrak{S}'{}_{2y} + \mathfrak{w}_z \mathfrak{S}'{}_{2z}), \text{ enz.}$$

Volgens § 14 zijn de gemiddelden over zeker tijdsverloop van korresponderende grootheden aan elkaar gelijk, zodat we ook kunnen schrijven

$$(32) \qquad \overline{\mathfrak{E}^2{}_{2x}} + \overline{\mathfrak{H}^2{}_{2x}} = \overline{\mathfrak{E}^2{}_{1x}} + \overline{\mathfrak{H}^2{}_{1x}}, \text{ enz.}$$

waarbij tevens in aanmerking genomen is dat de gemiddelde waarde van de schijnbare energiestroom in een afgesloten zich bewegend stelsel $= 0$ is. Uit (32) volgt, in verband met (31), dat ook $U_2 = U_1$. Dit wilden we bewijzen.

Nu we de korresponderende bewegingstoestanden P en P' beschouwd hebben, willen we meteen nog op een paar zaken de aandacht vestigen. Ten eerste willen we aantonen dat de druk van de stralen binnen een afgesloten zich bewegend sisteem gelijk is aan één derde van de totale energie per volumeeenheid $U^{(t)}{}_2$, en tevens in 't licht stellen dat er van geen *tangentiele* spanningen sprake is. We vinden nl.[1])

[1]) M. E. V 14 N°. 7. In een sisteem dat zich met de translatiesnelheid $\mathfrak{w}$ beweegt, moet eigenlik aan de spanning nog een bedrag $\frac{1}{c^2} \mathfrak{w}_n \mathfrak{S}$ (M. E. V 14 N°. 59 *b*) toegevoegd worden; het gemiddelde van dit bedrag is hier echter slechts van de tweede orde, aangezien dat van $\mathfrak{S}$ op een grootheid van de eerste orde na 0 is.

$$(33)\begin{cases} p = -X_{x2} = -\left\{\overline{\mathfrak{E}_{2x}^2} - \frac{1}{2}\overline{\mathfrak{E}_2^2} + \overline{\mathfrak{H}_{2x}^2} - \frac{1}{2}\overline{\mathfrak{H}_2^2}\right\} = \frac{1}{3}U_2^{(t)} = \frac{1}{3}U_1^{(t)}. \\ X_{y2} = \overline{\mathfrak{E}_{2x}\mathfrak{E}_{2y}} + \overline{\mathfrak{H}_{2x}\mathfrak{H}_{2y}} = \\ \quad = \overline{\mathfrak{E}'_{2x}\mathfrak{E}'_{2y}} + \overline{\mathfrak{H}'_{2x}\mathfrak{H}'_{2y}} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x\overline{\mathfrak{S}'_{2y}} + \mathfrak{w}_y\overline{\mathfrak{S}'_{2x}}) = \\ \quad = \overline{\mathfrak{E}_{1x}\mathfrak{E}_{1y}} + \overline{\mathfrak{H}_{1x}\mathfrak{H}_{1y}} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x\overline{\mathfrak{S}_{1y}} + \mathfrak{w}_y\overline{\mathfrak{S}_{1x}}) = X_{y1} = 0. \end{cases}$$

Ten tweede willen we er op wijzen dat een verschuivend stelsel waarin de zwarte straling bestaat, tengevolge daarvan een elektromagnetiese massa heeft. Duiden we de elektromagnetiese hoeveelheid beweging door $\mathfrak{G}^a$ aan, dan is

$$\mathfrak{G}^a = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\, d\, S \quad ^{1});$$

hierin betekent $\mathfrak{S}$ echter de energiestroom door een *stilstaand* vlak, dus $\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}.\mathfrak{H}]$. We herleiden dit als volgt

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{E}.\mathfrak{H}\Big] = \frac{1}{c}\Big[\Big\{\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}.\mathfrak{H}']\Big\}.\Big\{\mathfrak{H}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}']\Big\}\Big] =$$
$$= \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{E}'.\mathfrak{H}'\Big] + \frac{1}{c^2}\Big[\mathfrak{E}'.[\mathfrak{w}.\mathfrak{E}']\Big] + \frac{1}{c^2}\Big[\mathfrak{H}'\,[\mathfrak{w}.\mathfrak{H}']\Big].$$

Gemiddeld over zeker tijdsverloop vinden we dus voor de X-komponent van de elektromagnetiese hoeveelheid beweging per volume-eenheid

$$\frac{1}{c^2}\overline{\mathfrak{S}}_x = \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2}\Big\{(\overline{\mathfrak{E}'^2_y} + \overline{\mathfrak{E}'^2_z}) + (\overline{\mathfrak{H}'^2_y} + \overline{\mathfrak{H}'^2_z})\Big\} -$$
$$- \frac{\mathfrak{w}_y}{c^2}(\overline{\mathfrak{E}'_x\mathfrak{E}'_y} + \overline{\mathfrak{H}'_x\mathfrak{H}'_y}) - \frac{\mathfrak{w}_z}{c^2}(\overline{\mathfrak{E}'_x\mathfrak{E}'_z} + \overline{\mathfrak{H}'_x\mathfrak{H}'_z})$$

of met weglating van grootheden van de tweede orde en in verband met (32) en (33)

$$\frac{1}{c^2}\overline{\mathfrak{S}}_x = \frac{4}{3}\mathfrak{w}_x\frac{U^{(t)}}{c^2}.$$

In 't algemeen is derhalve

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{4}{3}\frac{U^{(t)}}{c^2}\mathfrak{w}.$$

Daaruit volgt voor de elektromagnetiese massadichtheid ρ^a de formule

[1]) M. E. V 14. N°. 7.

$$\rho_a = \frac{4}{3} \frac{U^{(t)}}{c^2}.$$

§ 41. In de voorgaande §§ zijn we tot het besluit gekomen dat de stralingsgrootheden van twee gelijke stelsels met verschillende translatiesnelheden aan elkaar gelijk zijn, wanneer dit het geval is met hun temperaturen of, wat op hetzelfde neerkomt, met hun gemiddelde inwendige kinetiese energieën per molekuul (molekulaire bewegingsintenziteit). We zullen dit in het laatste hoofdstuk bevestigd vinden. In deze bevestiging mogen we dan een feit zien ten gunste van de in de inleiding door ons gemaakte onderstelling dat ook voor een bewogen stelsel de tweede hoofdwet geldt; d. w. z. dat ook hier de grootheid die geschikt is om het al of niet bestaan van warmteevenwicht aan te geven, tevens een integrerende deler is van de bekende differentiaaluitdrukking voor de aan een sisteem toegevoerde warmte.

HOOFDSTUK II.

De warmtestraling in een stelsel van bewogen lichamen met overal gelijke temperatuur.

A. Vooragfgaande beschouwingen.

§ 42 We willen tans de vergelijkingen bespreken die tussen de verschillende elektromagnetiese grootheden voor een bewogen sisteem van ponderabele lichamen gelden. Zoals in M. E. V 14. Hoofdstuk IV uitvoerig uiteengezet wordt, komen bij zulke lichamen, die een onnoemelik aantal elektronen bevatten, niet de van punt tot punt *snel* veranderlike grootheden $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{h}'$, ρ enz. te pas, maar zekere middelwaarden daarvan, die *geleidelik* van punt tot punt veranderen. Deze middelwaarden [1]) zijn het die zich bij de waarnemingen voordoen. Om te komen tot de vergelijkingen die er tussen de middelwaarden in een bewogen sisteem bestaan, gaan we uit van degene die voor de ongemiddelde grootheden gelden; deze zijn te vinden in M. E. V 14. N⁰. 10. (I') — (V') en luiden

$$\text{(I}') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{d}' = \left(1 - \frac{(\mathfrak{w} . \mathfrak{u})}{c^2}\right) \rho.$$

$$\text{(III}') \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \frac{1}{c}\left(\dot{\mathfrak{d}}' + \rho\, \mathfrak{u}\right).$$

$$\text{(IV}') \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}'.$$

$$\text{(V}') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0.$$

[1]) Niet te verwarren met de vroeger besproken „gemiddelden" over zeker tijdsverloop.

Hierbij is van een meebewegend koördinatenstelsel gebruik gemaakt en de plaatselike tijd t' (zie formule (6)) ingevoerd. De grootheden $\dot{\mathfrak{d}}'$ en $\dot{\mathfrak{h}}'$ betekenen differentiaalquotiënten naar t' bij konstante relatieve koördinaten x, y, z, en in de met „div" en „rot" aangeduide uitdrukkingen treden de bij konstante t' genomen differentiaalquotiënten naar de relatieve koördinaten op dezelfde wijze op als anders die naar de absolute koördinaten bij konstante t.

§ 43. We beschouwen een fizies oneindig kleine ruimte S, vatten op een gegeven ogenblik (dus als t' voor de verschillende punten van S *on*gelijk is) de waarden in het oog, die zekere skalaire of vektorgrootheid A aanneemt en stellen

$$\overline{\mathrm{A}} = \frac{1}{S}\int \mathrm{A}\, d\, S,$$

waarin $d\,S$ een volumeelement van S voorstelt; we noemen $\overline{\mathrm{A}}$ de middelwaarde van de grootheid A voor een zeker punt P binnen S. Wanneer we de gedaante van S eenmaal gekozen hebben en eveneens het punt P waaraan we de middelwaarde toekennen, dan berekenen we de middelwaarde $\overline{\mathrm{A}}$ van A in een ander punt P' door gebruik te maken van de ruimte S' die gelijk en gelijkvormig met S is en uit deze laatste verkregen wordt door een verschuiving over de afstand PP'. Dan wordt $\overline{\mathrm{A}}$ een geheel bepaalde funktie van de koördinaten en de tijd, dus ook van de relatieve koördinaten x, y, z en de plaatselike tijd t' van P, waaruit nu alle *snelle* veranderingen verdwenen zijn indien S, hoewel oneindig klein ten opzichte van afmetingen die voor de waarneming toegankelik zijn, toch nog groot is ten opzichte van de afmetingen en onderlinge afstanden van de elektronen, zodat er een zeer groot aantal van deze laatste in S bevat kunnen zijn.

Er bestaan nu allerlei gelijkheden, die tot de volgende twee tipen zijn terug te brengen, nl.

$$(34) \qquad \overline{\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{\mathrm{A}}}{\partial x}, \qquad \overline{\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t'}} = \frac{\partial \overline{\mathrm{A}}}{\partial t'}.$$

Deze willen we aantonen en beginnen daartoe met de tweede. Uitgeschreven, luidt deze

$$(35) \qquad \frac{1}{S}\int \frac{\partial A}{\partial t'}\, dS = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{S}\int A\, dS\right).$$

De betekenis van $\partial A/\partial t'$ in een willekeurig punt Q van S is deze: we moeten de waarde A_1 die A daar heeft op het beschouwde ogenblik, aftrekken van de waarde A_2 die A daar heeft op het ogenblik als de plaatselike tijd van Q met dt' vooruitgegaan is, en daarna het verschil door dt' delen. Denken we ons dt' voor alle punten van de ruimte S even groot, dan hebben we ook voor alle punten een werkelike tijd die dt' later ligt dan het eerst beschouwde ogenblik, m. a. w. de nieuwe waarden A_2 worden voor alle punten van S weer op éen en hetzelfde ogenblik genomen. We hebben nu

$$(36) \qquad \frac{1}{S}\int \frac{\partial A}{\partial t'}\, dS = \frac{1}{S}\int \frac{A_2 - A_1}{dt'}\, dS = \frac{\frac{1}{S}\int A_2\, dS - \frac{1}{S}\int A_1\, dS}{dt'}.$$

Aangezien in de integralen van het laatste lid zowel A_2 als A_1 voor alle volumeelementen op hetzelfde ogenblik genomen moeten worden, is het laatste lid van (36) juist gelijk aan het tweede lid van (35) en daarmee is de tweede gelijkheid van (34) bewezen. De andere formule die we bewijzen moeten luidt volgens de betekenis

$$\frac{1}{S}\int \frac{\partial A}{\partial x}\, dS = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\int A\, dS\right).$$

De betekenis van $\partial A/\partial x$ in een willekeurig punt Q van de ruimte S is deze: we moeten de waarde A_1 die A in Q heeft op het beschouwde ogenblik, aftrekken van de waarde A_2 die A heeft in een punt Q' dat uit Q verkregen wordt door dit laatste punt over de afstand dx in de richting van de X-as te verschuiven, en wel moet deze laatste waarde genomen worden op een tijdstip dat de plaatselike tijd van Q' even groot is als op het eerstbeschouwde ogenblik de plaatselike tijd van Q; het verschil moet door dx gedeeld worden.

Onderstellen we dx voor alle punten van S even groot, dan volgt uit de betekenis van t' dat ook het ogenblik waarop de waarde van A genomen wordt, voor alle punten Q' van de nieuwe ruimte S' hetzelfde is.

We hebben nu

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{1}{S}\int \frac{\partial A}{\partial x}\, dS = \frac{1}{S}\int \frac{A_2 - A_1}{dx}\, dS =$$
$$= \frac{1}{dx}\left(\frac{1}{S'}\int A_2\, dS' - \frac{1}{S}\int A_1\, dS\right). \tag{37}$$

Aangezien in de integralen van het laatste lid A_2 evenals A_1 voor alle volumeelementen van S of S' op hetzelfde ogenblik genomen moet worden, is

$$\frac{1}{S}\int A_1\, dS = \overline{A}_1 \quad \text{en} \quad \frac{1}{S'}\int A_2\, dS' = \overline{A}_2,$$

waarin $\overline{A}_1$ betrekking heeft op het punt P, en $\overline{A}_2$ op het punt P' dat in de richting van de X-as een afstand dx verder ligt, en wel zó dat $\overline{A}_1$ en $\overline{A}_2$ genomen worden voor eenzelfde plaatselike tijd, in P en in P'. Daardoor gaat het laatste lid van (37) over in

$$\frac{\overline{A}_2 - \overline{A}_1}{dx} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x},$$

zodat we nu vinden

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x}.$$

§ 44. De gevonden stellingen, die kortweg aldus kunnen uitgedrukt worden, dat de middelwaarde van een differentiaalquotient gelijk is aan het differentiaalquotient van de middelwaarde, kunnen ons diensten bewijzen bij het herleiden van de grondvergelijkingen *(I')* — *(V')* tot betrekkingen tussen de middelwaarden. Om daartoe te komen, moeten we bij ieder van die vergelijkingen van beide leden de middelwaarde nemen. We willen ons alleen bezighouden met onmagnetizeerbare lichamen en sluiten daarom magnetizatie-elektronen uit. Het komt nu in de eerste plaats aan op de middelwaarden van ρ en van $\rho\mathfrak{u}$. Volgens M. E. V 14. N°. 30 vindt men voor de polarizatieelektronen

(38) $$\overline{\rho} = -\operatorname{div.}\mathfrak{P},\quad \overline{\rho\mathfrak{u}} = \dot{\mathfrak{P}},$$

wanneer er sprake is van een stilstaand stelsel; $\mathfrak{u}$ betekent dan de snelheid van de ladingen ten opzichte van dit stelsel, $\dot{\mathfrak{P}}$ het differentiaalquotiënt van $\mathfrak{P}$ naar de tijd t bij konstante absolute koördinaten en div. betekent de bekende bewerking, maar bij konstante t. Geven we aan het stelsel in zijn geheel een translatie, dan blijft (38) doorgaan, mits men tans onder $\mathfrak{u}$ de relatieve snelheid ten opzichte van een meebewegend koördinatenstelsel verstaat, verder onder $\dot{\mathfrak{P}}$ het differentiaalquotiënt van $\mathfrak{P}$ naar de tijd t bij konstante relatieve koördinaten of, wat hetzelfde is, het differentiaalquotiënt naar t'; terwijl we voor div. de zoeven genoemde bewerking moeten lezen, maar de daarin voorkomende differentiaties naar de *relatieve* koördinaten uitgevoerd kunnen denken, altoos bij konstante t. Wil men differentiaties naar de relatieve koördinaten bij konstante t' invoeren, dan komt er voor de eerste van (38)

$$\overline{\rho} = -\operatorname{div}\mathfrak{P} + \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{w}\,.\,\dot{\mathfrak{P}}\right).$$

Voor de geleidingselektronen komt er volgens M.E. V14 N°. 29

$$\overline{\rho} = N_1 e_1 + N_2 e_2 + \ldots\ldots,\qquad \overline{\rho\mathfrak{u}} = N_1 e_1 \mathfrak{u}_1 + N_2 e_2 \mathfrak{u}_2 + \ldots.$$

Deze uitdrukkingen, waarvan we de eerste ρ_1 noemen, gelden ook voor een bewogen stelsel, als $\mathfrak{u}$ de *relatieve* snelheid is.

§ 45. We zijn nu in staat, de middelwaarden te nemen in elk van de vergelijkingen (I') tot (V'), waarbij we stellen.

$$\overline{\mathfrak{d}'} = \mathfrak{E}',\qquad \overline{\mathfrak{h}'} = \mathfrak{H}'\ ^{1)}.$$

Neemt men de middelwaarde van (I'), dan komt er

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}' = (N_1 e_1 + N_2 e_2 + \ldots\ldots) - \operatorname{div}\mathfrak{P} + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}\,.\,\dot{\mathfrak{P}}) -$$
$$-\frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}.\{\dot{\mathfrak{P}} + N_1 e_1 \mathfrak{u}_1 + N_2 e_2 \mathfrak{u}_2 + \ldots\}),$$

---

[1]) Hieruit volgt formule (5). In M.E. V 14 N°. 33 is $\overline{\mathfrak{h}'} = \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{E}]$, wat in $\mathfrak{H}'$ overgaat als geen magnetizatie ondersteld wordt.

of

$$(39) \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{E}' + \mathfrak{P}) = \Sigma\, Ne\left(1 - \frac{(\mathfrak{w}\ \mathfrak{u})}{c^2}\right),$$

de som over alle soorten van geleidingselektronen uitgestrekt. Stellen we verder

$$(40) \qquad \mathfrak{E}' + \mathfrak{P} = \mathfrak{D}', \qquad \Sigma\, Ne\left(1 - \frac{(\mathfrak{w}\ \mathfrak{u})}{c^2}\right) = \rho',$$

dan gaat (39) over in

$$(\mathrm{I}''') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D}' = \rho',$$

welke vergelijking nu in vorm met *(I″)* van M. E V 14 N°. 33 overeenstemt. Nemen we vervolgens de middelwaarde van *(III′)*, dan vinden we

$$(41) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}}' + \dot{\mathfrak{P}} + \mathfrak{J}) = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{D}}' + \mathfrak{J}),$$

waarin gesteld is

$$\mathfrak{J} = N_1 e_1 \mathfrak{u}_1 + N_2 e_2 \mathfrak{u}_2 + \ldots\ldots$$

Het ligt voor de hand om $\mathfrak{J}$ de geleidingsstroom te noemen. Zo heet $\dot{\mathfrak{P}}$ de polarizatiestroom; bij deze stromen voegt zich verder nog een deel dat aan de ether zelf te danken is. Om verdere overeenstemming met een rustend stelsel te krijgen zullen we als zodanig opvatten de vektor $\dot{\mathfrak{E}}'$. De totale stroom noemen we $\mathfrak{C}'$, dan is $\mathfrak{C}' = \dot{\mathfrak{D}}' + \mathfrak{J}$ en gaat (41) over in

$$(\mathrm{III}''') \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}\mathfrak{C}',$$

wat in vorm overeenstemt met *(III″)* van M. E. V 14 N°. 33. De middelwaarden van *(IV′)* en *(V′)* geven geen aanleiding tot biezondere opmerkingen; we kunnen direkt neerschrijven dat

$$(\mathrm{IV}''') \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}'.$$

$$(\mathrm{V}''') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H}' = 0.$$

Ook de beide laatste vergelijkingen stemmen in vorm met *(IV″)* en *(V″)* van M. E. V 14 N°. 33 overeen, als daar $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gesteld wordt.

§ 46. Hiermee zijn de grondvergelijkingen gevonden die voor elk bewogen lichaam gelden Er blijven nu echter nog een aantal betrekkingen te beschouwen over, die er bestaan tussen de polarizatie $\mathfrak{P}$ en de elektriese geleidingsstroom $\mathfrak{J}$ aan de ene, en de vektor $\mathfrak{E}'$ aan de andere kant. Nu is $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}.\mathfrak{H}]$ de kracht die per ladingseenheid op de geleidingselektronen werkt indien deze aan de translatie deelnemen; het ligt daarom voor de hand om te stellen

(42) $$\mathfrak{J} = (\sigma)\,\mathfrak{E}',$$

wat voor een willekeurig anizotroop medium geldt en uitgeschreven betekent

(42') $$\mathfrak{J}'_x = \sigma_{11}\,\mathfrak{E}'_x + \sigma_{12}\,\mathfrak{E}'_y + \sigma_{13}\,\mathfrak{E}'_z, \text{ enz.},$$

met de betrekkingen $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, enz. die in menig geval kunnen worden aangenomen.

Ofschoon op de polarizatie-elektronen een kracht werkt die wel met $\mathfrak{E}'$ in verband staat, maar er op ingewikkelde manier van afhangt, mag men ten slotte een formule als (42) ook voor $\mathfrak{P}$ aannemen; voor de nadere uiteenzetting hiervan verwijzen we naar M. E. V 14. N°. 36, 45, 50. We stellen daarom

(43) $$\mathfrak{P} = (\varkappa)\,\mathfrak{E}'$$

waaruit ook volgt

(44) $$\mathfrak{D}' = (1 + (\varkappa))\,\mathfrak{E}' = (\varepsilon)\,\mathfrak{E}', \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{21}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \text{ enz.}$$

De vergelijkingen (42) — (44) gelden bij stationnaire en langzaam veranderlike toestanden; bij snel veranderlike hangt $\mathfrak{E}'$ echter ook met de differentiaalquotiënten van $\mathfrak{J}$ en $\mathfrak{P}$ naar de tijd samen Toch blijven bij de gebruikelike behandeling van *periodiek veranderlike* toestanden dezelfde formules doorgaan, mits men de koëfficiënten (σ), $(\varkappa)$ en (ε) komplex denkt en afhankelik van de frekwentie van de trillingen. Aangezien wij ons slechts met de laatstgenoemde toestanden hebben bezig te houden, willen we de betrekkingen (42) — (44) inderdaad in de laatste zin opvatten.

De vraag doet zich voor of de grootheden (σ) en $(\varkappa)$ door de translatie gewijzigd worden. We kunnen aannemelik maken dat dit niet het geval is, tenminste niet voor lichamen met drie onderling loodrechte elektriese simetrievlakken. Nemen we deze tot koördinaatvlakken aan dan gaat (42) over in

$$\mathfrak{J}_x = \sigma_1 \mathfrak{E}'_x, \text{ enz.}$$

Stellen we nu

$$\sigma_1 = \psi (\vartheta, \mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z),$$

waarin ϑ de temperatuur aanduidt en nemen we aan dat de funktie ψ volgens het teorema van TAYLOR ontwikkeld kan worden, dan kunnen we ook schrijven

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + \alpha \mathfrak{w}_x + \beta \mathfrak{w}_y + \gamma \mathfrak{w}_z.$$

Hierin moet nu, omdat het lichaam gelijk is aan zijn spiegelbeeld in elk van de koördinaatvlakken, σ_1 onveranderd blijven wanneer men $\mathfrak{w}_x$ of $\mathfrak{w}_y$ of $\mathfrak{w}_z$ door hun tegengestelden vervangt. Dit kan alleen, zo α, β en $\gamma = 0$ zijn. Hetzelfde geldt voor de andere fiziese konstanten σ_2, η_1 enz., zelfs dàn, wanneer de simetrievlakken voor de konstanten σ anders mochten zijn dan die voor de konstanten η, wat we ter wille van de algemeenheid zullen onderstellen. Gaat men nu weer op een willekeurig koördinatenstelsel over dan zijn ook de konstanten σ_{11}, σ_{12} enz. voor het bewogen sisteem hetzelfde als voor het rustende.

§ 47. Uit de volkomen overeenstemming in vorm van de vergelijkingen (III'''), (IV'''), (V'''), (42), (43) en (44) met de overeenkomstige voor een rustend stelsel volgt de mogelikheid van korresponderende toestanden in de zin die we daaraan in het vorige hoofdstuk § 12 gehecht hebben De vergelijkingen (I'') en (I''') hebben hierop geen invloed; deze dienen slechts om *a posteriori* uit de gekonstrueerde oplossing de ladingsdichtheid te vinden. Wat de korrespondentiestelling betreft, we hebben daarvan nu dèze uitbreiding, dat hetgeen op de genoemde plaats van de vektoren $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{H}'$ gezegd is, bovendien blijkt te gelden van de vektoren $\mathfrak{J}$ en $\mathfrak{J}'$ $(= \mathfrak{J})$, $\mathfrak{P}$ en $\mathfrak{P}'$ $(= \mathfrak{P})$, $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$, en dat dus ook absorberende lichamen in het veld aanwezig mogen zijn.

Het is hier de plaats om nog even terug te komen op de onderstellingen waarvan we op verschillende plaatsen in het vorige hoofdstuk gebruik gemaakt hebben. Zo moesten we het in § 18 van dat hoofdstuk nog twijfelachtig noemen of in een bewogen medium, als dit de stralen absorbeert, dergelijke bewegingstoestanden kunnen bestaan als in de rusttoestand; dat dit inderdaad mogelik is, is juist wat in de meer uitgebreide korrespondentiewet beweerd wordt.

In § 23 van hetzelfde hoofdstuk definieerden we voor een bewogen stelsel een volkomen spiegelende wand als een lichaam dat stralen noch doorlaat, noch in warmte omzet of, wat op hetzelfde neerkomt, een lichaam dat de hele er op vallende intenziteit weer terugkaatst. De korrespondentiewet leert daarvan nu dat een lichaam dat in rust een volkomen spiegel is, een volkomen spiegel blijft als het in verschuivende beweging gebracht wordt. Valt n.l. op dit lichaam, terwijl het zich beweegt, een relatieve straalbundel van de intenziteit i en is de teruggekaatste intenziteit i', dan moeten we aantonen dat $i' = i$. Daartoe beschouwen we de korresponderende toestand als het lichaam in rust is. We hebben in § 14 van het vorige hoofdstuk gezien dat de gemiddelde intenziteiten van twee korresponderende bundels gelijk zijn; dus is voor het rustende lichaam de opvallende intenziteit weer i en de teruggekaatste i'. Maar aangezien het lichaam in de rusttoestand een volkomen spiegel zou zijn, moet de teruggekaatste intenziteit gelijk zijn aan de opvallende. Dus is $i' = i$, wat te bewijzen was. We kunnen op dezelfde manier algemener betogen dat voor elke metaalspiegel die in translatiebeweging verkeert, niet alleen wat, zoals reeds lang bekend is, de *loop* van de stralen, maar ook wat hun *intenziteit* betreft, dezelfde wetten van terugkaatsing gelden als bij een stilstaande, en dat ook de bewegingen in het doorgaande licht in beide stelsels met elkaar korresponderen. Verder, dat een bepaald buigingsverschijnsel ook nooit enige invloed van een translatiebeweging kan ondervinden: men beschouwe telkens maar weer het korresponderende buigingsverschijnsel in de rusttoestand; waar bij dit laatste de intenziteit van zekere kleur 0 is, daar is dit ook bij het eerste op de korresponderende plaats het geval, en eveneens zijn de van 0 verschillende intenziteiten in korresponderende punten gelijk, zodat, daar korresponderende figuren gelijk en gelijkvormig zijn, de lichtverdeling in een bepaald vlak door de translatie ongewijzigd blijft. Dit laatste moge dienen als aanvulling van hetgeen vermeld wordt in Prof. Lorentz' „Versuch" enz. bl. 86—87, waar alleen van een doorschijnend sisteem sprake is.

Ook blijkt nu de juistheid van de in § 30 hoofdstuk I uitgesproken bewering dat we, om van de daar beschouwde opening 1 een beeld te ontwerpen dat met die opening zelf samenvalt, een holle spiegel kunnen gebruiken, die het midden van de opening tot middelpunt heeft.

In § 29 van hoofdstuk I namen we aan dat er in een bewogen stelsel zwarte lichamen bestaan; we vermelden nu nog het feit dat lichamen die in rust zwart zijn, in beweging zwart blijven; we kunnen dit met behulp van de korrespondentiestelling bewijzen, en wel op geheel analoge manier als we hetzelfde voor een volkomen spiegel gedaan hebben. Het mag overbodig genoemd worden dit nog nader aan te wijzen.

We hebben eindelik in § 33 van hoofdstuk I de stelling omtrent de gelijkheid van de wederkerige toestraling van twee bewogen zwarte vlakte-elementen bewezen door deze met behulp van de algemenere korrespondentiewet af te leiden uit dezelfde stelling voor stilstaande lichamen. We behoeven het daar geleverde bewijs niet te herhalen, maar willen alleen opmerken dat dit dus nu op goede gronden berust.

§ 48. We willen ten slotte de grensvoorwaarden bespreken die uit het stel vergelijkingen van § 45 kunnen worden afgeleid. Ten eerste volgt op de bekende manier uit (III''') de kontinuiteit van de tangentiele komponent van $\mathfrak{H}'$. Om dit in te zien vervangen we (III''') door de vergelijking

$$\int \mathfrak{H}'_s \, ds = \frac{1}{c} \int \mathfrak{E}'_n \, d\sigma,$$

waarbij men echter moet bedenken dat de lijn- en de oppervlakte-integraal over zeker gebied moeten uitgestrekt worden bij konstante *plaatselike* tijd. Past men op de gewone manier de voorgaande gelijkheid toe op een rechthoekje waarvan twee overstaande oneindig kleine zijden aan weerskanten van het grensvlak en evenwijdig daaraan lopen, terwijl de beide andere er loodrecht op staan en oneindig klein ten opzichte van de eerste zijn, dan vindt men vooreerst dat, als δ de kortste zijde van het rechthoekje is, de tangentiele komponenten van $\mathfrak{H}'$ in twee op dezelfde normaal gelegen punten P_1 en P_2 aan weerszijden van het oppervlak met een bedrag van de orde δ verschillen als de *plaatselike* tijd in P_1 en P_2 hetzelfde is; maar daarna ook, dat dit verschil nog van dezelfde orde blijft, indien de waarden voor de *univerzele* tijd in P_1 en P_2 dezelfde zijn, aangezien P_1 en P_2 zelf op een afstand δ van elkaar liggen. De finesse van de plaatselike tijd heeft dus bij het vinden van de grensvoorwaarden geen invloed op het rezultaat, en het is duidelik dat dit altoos het geval zal zijn. Daarom kunnen we verder ook ineens besluiten tot de doorlopendheid van de tangentiele komponent van $\mathfrak{E}'$ en van de normale komponent van $\mathfrak{E}'$ en van $\mathfrak{H}'$, want dit volgt uit de vergelijkingen (III'''), (IV''') en (V''') op dezelfde manier als de doorlopendheid van de overeenkomstige grootheden in een rustend stelsel uit (III''), (IV'') en (V'').

In het volgende deel van dit hoofdstuk zullen we een toepassing maken van de in dit deel gevonden vergelijkingen.

B. Beschrijving van de stralingsverschijnselen met behulp van elektromotoriese krachten

§ 49. We willen nu de voor een bewogen stelsel verkregen elektromagnetiese vergelijkingen dienstbaar maken aan de uitwerking van het denkbeeld, om voor żo'n stelsel de stralingsverschijnselen met behulp van elektromotoriese krachten te beschrijven. Prof. Lorentz heeft dit idee voor *rustende* lichamen ontwikkeld [1]). Het zal blijken dat het door ons beoogde doel op volkomen analoge manier kan worden bereikt. De uitkomst die we zullen vinden, is ook zeer eenvoudig en bestaat hierin dat we in een *bewogen* volume-element voor een bepaalde temperatuur en (relatieve) frekwentie presies dezelfde elektromotoriese krachten moeten onderstellen als in het *rustende* element voor dezelfde temperatuur en frekwentie.

§ 50. We beperken ons tot trillingen en werken daarom met komplexe vektoren die alle de faktor $e^{int'}$ bevatten en waarvan de reële delen de werkelike waarden van de te beschouwen grootheden voorstellen. Ter wille van de algemeenheid zullen we verder schrijven

$$\mathfrak{B}' = (\mu)\,\mathfrak{H}', \qquad \mu_{12} = \mu_{21}, \text{ enz.,} \tag{45}$$

en in plaats van (IV''')

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}', \tag{[IV''']}$$

maar we moeten, aangezien we onze vergelijkingen slechts voor onmagnetizeerbare lichamen bewezen hebben, ten slotte altijd weer $(\mu) = 1$ nemen. De laatste twee vergelijkingen dienen dan ook alleen om zekere *fiktieve* toestanden te bepalen, waarvan de beschouwing echter soms dienen kan om *werkelike* toestanden gemakkeliker te leren kennen.

---

[1]) H. A. Lorentz. Over de warmtestraling in een stelsel lichamen van overal gelijke temperatuur. Akademie v. Wetenschappen te Amsterdam. 1905. I en II. Deze verhandelingen zullen we in 't vervolg aanduiden met l.c.

De vroeger gevonden betrekkingen (42), (43) en (44) kunnen samengevat worden door te schrijven

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{P}} + \dot{\mathfrak{E}}' = (p')\mathfrak{E}', \qquad p'_{12} = p'_{21}, \text{ enz.}$$

of omgekeerd $\quad \mathfrak{E}' = (p)\mathfrak{E}', \qquad p_{12} = p_{21}, \text{ enz.},$

hetgeen voor een rustend stelsel van dezelfde temperatuur overgaat in $\mathfrak{E} = (p)\mathfrak{E}$; dit laatste stemt met (3) l. c. overeen. Evenzo kunnen we in plaats van (45) schrijven $\mathfrak{H}' = (q)\mathfrak{B}'$.

We voeren nu elektromotoriese krachten in, wat op ongedwongen wijze kan geschieden door in de vergelijkingen (42) en (43) $\mathfrak{E}'$ resp. door $\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{el}$ en $\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{ev}$ te vervangen [1]). Daardoor krijgen we de vergelijkingen

$$\mathfrak{J} = (\sigma)(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{el}), \qquad \mathfrak{P} = (\varkappa)(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{ev})$$

$$\mathfrak{E}' = (\sigma)(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{el}) + in(\varkappa)(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{ev}) + in\,\mathfrak{E}'$$

of

(46) $$\mathfrak{E}' = \{(\sigma) + in\,(\varepsilon)\}\,\mathfrak{E}' + (\sigma)\,\mathfrak{E}^{el} + in\,(\varkappa)\,\mathfrak{E}^{ev}.$$

Bepalen we nu een nieuwe vektor $\mathfrak{E}^e$ door de vergelijking

$$(\sigma)\,\mathfrak{E}^{el} + in\,(\varkappa)\,\mathfrak{E}^{ev} = \{(\sigma) + in\,(\varepsilon)\}\,\mathfrak{E}^e,$$

dan gaat (46) over in

$$\mathfrak{E}' = \big((\sigma) + in\,(\varepsilon)\big)(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e) = (p')(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e)$$

of

(47) $$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e = (p)\,\mathfrak{E}' \ ^{2)}.$$

Evenzo voeren we een magnetomotoriese kracht $\mathfrak{H}^e$ in door te stellen

(48) $$\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^e = (q)\,\mathfrak{B}'; \qquad q_{12} = q_{21}, \text{ enz.};$$

in werkelik voorkomende gevallen is echter $\mathfrak{H}^e = 0$. Voor izotrope lichamen komt er

(49) $$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e = p\,\mathfrak{E}'.$$

(50) $$\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^e = q\,\mathfrak{B}'.$$

---

[1]) M. E. V 14 N°. 50c.

[2]) Het is de vektor $\mathfrak{E}^e$, die ten slotte voor elk volume-element door de toestand daarvan (temperatuur, enz.) volkomen bepaald zal blijken te zijn. Deze vektor zullen we in 't vervolg kortweg de elektromotoriese kracht noemen.

Er is nu slechts éen komplexe koëfficiënt p, terwijl q ten slotte weer $= 1$ genomen wordt.

§ 51. De vergelijkingen (III''), $([IV''])$, (47), (48) enz. stemmen in vorm overeen met (1), (2), (5), (6), enz. van l. c. Daaruit volgt echter, nu elektromotoriese krachten in de vergelijkingen voorkomen, nog niet de mogelikheid van korresponderende toestanden; hiervoor is nodig dat die elektromotoriese krachten in beide gevallen ook *zelf* met elkaar korresponderen, d. w. z. dat zij in het ene geval dezelfde funkties zijn van x, y, z en t als in 't andere geval van x, y, z en t'. Dit neemt echter niet weg dat we toch ineens de evenwichtsverstoring die in een *bewogen* stelsel door gegeven elektromotoriese krachten wordt teweeggebracht, kunnen leren kennen, wanneer we dit vraagstuk voor een *rustend* stelsel reeds hebben opgelost. Immers, daartoe behoeven we ons maar *voor te stellen* dat in het rustende sisteem de korresponderende elektromotoriese krachten werken. Deze zullen dan een bekende bewegingstoestand veroorzaken, korresponderende met de gezochte in het bewogen sisteem, en daarmee is deze laatste zelf óók gevonden.

Houden we dit in het oog, dan is het gemakkelik in te zien dat dergelijke stellingen als in een rustend sisteem nog blijven gelden voor een bewogen stelsel, wanneer, zoals meestal het geval is, zo'n stelling de gelijkheid uitspreekt van twee grootheden A en B, die eventueel bij verschillende punten P en Q kunnen behoren, en aan welke in het bewogen stelsel korresponderende grootheden A' en B', in de korresponderende punten P' en Q', van hetzelfde bedrag beantwoorden. Uit $A = B$ volgt dan $A' = B'$ (als de plaatselike tijden in P' en Q' gelijk zijn aan de gewone tijd in het rustende stelsel). Zo kunnen o. a de wederkerigheidsstellingen die Prof. LORENTZ in § 7*a* en *b* van l. c. voor een rustend stelsel bewijst onveranderd op een bewogen stelsel overgebracht worden. Deze spelen bij het onderzoek naar de elektromotoriese krachten die de straling in een *rustend* stelsel kunnen tot stand brengen, een belangrijke rol en zullen derhalve evenzeer kunnen dienen om voor een *bewogen* stelsel dat onderzoek te vergemakkeliken. Daarbij wordt echter van nog drie dingen gebruik gemaakt, nl 1^0 het feit dat voor alle lichamen de verhouding van emissie- en absorptievermogen hetzelfde is; dit geldt ook voor een bewogen stelsel, zodat ook wat dit betreft, het bedoelde onderzoek in de twee gevallen parallel loopt. Ten tweede de grensvoorwaarden; hierbij geldt (§ 48) hetzelfde van de grootheden in een bewogen stelsel als van de overeenkomstige grootheden in het rustende, zodat ook dit punt voor de doorvoering van de metode geen bezwaar oplevert. Maar ten derde komt te pas de warmteontwikkeling in de absorberende lichamen; het is de vraag of deze voor een bewogen stelsel door uitdrukkingen wordt voorgesteld, korresponderende met die voor een rustend. We zullen in de volgende § aantonen dat dit inderdaad het geval is.

§ 52. We willen daartoe de energievergelijking voor een willekeurig stelsel van bewogen lichamen afleiden, echter geen magnetomotoriese krachten aannemen en $(q) = 1$ stellen. We kunnen voluit schrijven $p_{11} = \alpha_{11} - i\,\beta_{11}$, enz en vinden dan voor (47)

$$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e = (\alpha)\,\mathfrak{C}' - i\,(\beta)\,\mathfrak{C}'$$

of, in reële grootheden, als we een nieuwe vektor $\mathfrak{D}'$ invoeren [1]), bepaald door de vergelijking

$$\mathfrak{C}' = \dot{\mathfrak{D}}',$$

$$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e = (\alpha)\,\mathfrak{C}' + n\,(\beta)\,\mathfrak{D}', \tag{51}$$

wat beantwoordt aan (22) van l c. We kunnen nu weer presies dezelfde herleiding volgen als in l.c, zodat met de

[1]) Deze vektor is niet te verwarren met de vroegere $\mathfrak{D}' = \mathfrak{E}' + \mathfrak{P}'$; wij gebruiken hier de letter $\mathfrak{D}$ in een andere betekenis ter wille van de analogie in notatie met l.c.

energievergelijking in § 4 daar ter plaatse, hier de volgende voor een bewogen stelsel overeenkomt

$$(52)\quad (\mathfrak{E}^e . \mathfrak{E}') = ((\alpha)\mathfrak{E}' . \mathfrak{E}') + \frac{1}{2} n \frac{\partial}{\partial t'} ((\beta)\mathfrak{D}' . \mathfrak{D}') + $$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} (\mathfrak{H}' . \mathfrak{H}') + \text{div. } \mathfrak{S}'.$$

Nemen we van (52) het gemiddelde over een zeer lang tijdsverloop en onderstellen we eerst eens geen elektromotoriese krachten, dan komt er

$$\overline{((\alpha)\ \mathfrak{E}' . \mathfrak{E}')} = - \overline{\text{div } \mathfrak{S}'},$$

of, beide leden over een zekere ruimte integrerende

$$(53)\qquad \int \overline{((\alpha)\mathfrak{E}' . \mathfrak{E}')}\ d S = - \int \overline{\mathfrak{S}'}_n\ d\sigma.$$

Nu is $- \int \overline{\mathfrak{S}'}_n\ d\sigma$ de gemiddelde schijnbare energiestroom die door het oppervlak dat de beschouwde ruimte omringt, naar binnen gaat, dus is volgens § 20 het linkerlid van (53) de gemiddelde warmte-ontwikkeling die daardoor in die ruimte plaats heeft [1]); het bedrag w hiervan per volume-eenheid wordt dus bepaald door de formule

$$(54)\qquad w = \overline{\left((\alpha)\ \mathfrak{E}' . \mathfrak{E}'\right)},$$

welke vergelijking in vorm wederom overeenstemt met de gelijkwaardige (24) l. c., die de warmte-ontwikkeling in een rustend sisteem aangeeft [2]). In een bewogen stelsel blijkt deze dus door de vektor $\mathfrak{E}'$ bepaald te worden; ook in dit opzicht is het geschikt om voor een bewogen stelsel $\mathfrak{E}'$ de

---

[1]) Wanneer men nl. van (11) het gemiddelde over zeker tijdsverloop neemt, valt in dit geval de term ΔE weg.

[2]) Het daar gezegde geeft de indruk als zou (24) ook op *ieder ogenblik* de warmte-ontwikkeling per tijds- en volume-eenheid voorstellen. Dit is echter niet het geval; de uitdrukking geldt alleen voor de *gemiddelde* waarden.

elektriese stroom te noemen. Dus zijn bij korresponderende evenwichtsverstoringen de warmte-ontwikkelingen in korresponderende volume-elementen gelijk. We zullen (54) voor één geval verifieren. Stel dat de geleidingsstroom alleen van $\mathfrak{E}'$ en de verplaatsingsstroom alleen van $\dot{\mathfrak{E}}'$ afhangt, en dat we met izotrope lichamen zonder elektromotoriese kracht te doen hebben, zodat we kunnen stellen

$$\mathfrak{S}' = \sigma\,\mathfrak{E}' + \varepsilon\,\dot{\mathfrak{E}}' = (\sigma + i\,n\,\varepsilon)\,\mathfrak{E}',$$

of

$$\mathfrak{E}' = \frac{\sigma - i\,n\,\varepsilon}{\sigma^2 + n^2\,\varepsilon^2}\,\mathfrak{S}',$$

dan volgt hieruit in verband met (49)

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sigma^2 + n^2\,\varepsilon^2}, \qquad \beta = \frac{n\,\varepsilon}{\sigma^2 + n^2\,\varepsilon^2}.$$

De uitdrukking $((\alpha)\,\mathfrak{S}'.\,\mathfrak{S}')$ gaat in dit geval over in $\alpha\,\mathfrak{S}'^2$. zodat we voor de gemiddelde warmte-ontwikkeling vinden

$$w = \frac{\sigma}{\sigma^2 + n^2\varepsilon^2}\,\overline{\mathfrak{S}'^2}.$$

Nu is voor de reële grootheden

$$\overline{\mathfrak{S}'^2} = \sigma^2\,\overline{\mathfrak{E}'^2} + 2\,\sigma\varepsilon\,\overline{\mathfrak{E}'\frac{\partial\,\mathfrak{E}'}{\partial\,t'}} + \varepsilon^2\,\overline{\left(\frac{\partial\,\mathfrak{E}'}{\partial\,t'}\right)^2}$$

en

$$\overline{\left(\frac{\partial\,\mathfrak{E}'}{\partial\,t'}\right)^2} = n^2\,\overline{\mathfrak{E}'^2}, \qquad \overline{\mathfrak{E}'\,\frac{\partial\,\mathfrak{E}'}{\partial\,t'}} = 0$$

Hieruit volgt

$$\overline{\mathfrak{S}'^2} = (\sigma^2 + n^2\,\varepsilon^2)\,\overline{\mathfrak{E}'^2}$$

en

$$w = \sigma\,\overline{\mathfrak{E}'^2} = \frac{\overline{\mathfrak{J}^2}}{\sigma},$$

waarmee de in dit geval welbekende uitdrukking voor de warmte-ontwikkeling teruggevonden is.

De uitdrukking (54) gaat, in geval we aan de koördinaatassen de hoofdrichtingen geven waarvan in § 8 l.c. sprake is, over in

$$w = \frac{1}{2}\left\{\alpha_1 (\mathfrak{E}'_x)^2 + \alpha_2 (\mathfrak{E}'_y)^2 + \alpha_3 (\mathfrak{E}'_z)^2\right\},$$

als $(\mathfrak{E}_x')$, $(\mathfrak{E}_y')$ en $(\mathfrak{E}_z')$ de amplituden van de elektriese stroomkomponenten zijn, en α_1, α_2 en α_3 de waarden die de koëfficienten (α) voor de drie hoofdrichtingen aannemen. Deze waarden zijn, evenals de hoofdrichtingen, voor het rustende en het bewogen volume-element hetzelfde bij gelijke temperatuur en frekwentie.

§ 53. De beschouwingen die Prof. LORENTZ na § 8 van zijn verhandeling nu verder laat volgen, voeren tot de kennis van de elektromotoriese kracht die men in elk volume-element van een lichaam moet onderstellen om de uitstralingsverschijnselen te verklaren. Deze elektromotoriese kracht blijkt af te hangen van de temperatuur en de koëfficiënt α, die we de „warmtekoëfficiënt" zouden kunnen noemen en die niet alleen van de geleidingsweerstand afhangt, maar in 't algemeen van de weerstand die elke elektronensoort ondervindt. Heeft men eenmaal gevonden dat de genoemde elektromotoriese kracht in ieder punt een geheel bepaalde waarde heeft, dan moeten de vergelijkingen van het elektromagnetiese veld deze grootheid ook voor goed bevatten en mogen niet meer zonder hem gebruikt worden. Men moet daarom niet denken dat nu alle oplossingen van de bedoelde vergelijkingen zonder elektromotoriese krachten waardeloos worden. Dit is geenszins het geval. Men moet de zaak aldus opvatten: Stralingsverschijnselen zijn er altoos en treden tegelijk op met andere elektromagnetiese bewegingstoestanden. Dit wil zeggen dat het feitelike veld dat we bij deze laatste hebben, de superpozitie is van twee andere velden, nl. 1°. van datgene wat door de straling en 2°. wat door de bedoelde elektromagnetiese verschijnselen in engere zin wordt teweeggebracht. Het eerste veld wordt beschreven door een oplossing van de vergelijkingen waarbij de elektromotoriese krachten de meermalen vermelde waarde hebben, het tweede daarentegen door een oplossing van de vergelijkingen waarbij de elektromotoriese krachten 0 zijn. Dan voldoet de gehele oplossing, die uit de superpozitie van deze twee bestaat, aan de vergelijkingen *met* de genoemde elektromotoriese krachten, iets wat we als noodzakelik verklaarden, terwijl toch wat de elektromagnetiese verschijnselen in engere zin betreft, van de vergelijkingen *zonder* die toevoegsels gebruik gemaakt is. Zo moeten we elk vroeger behandeld elektromagneties verschijnsel in engere zin opvatten als deel uit te maken van een algemener elektromagneties verschijnsel dat tevens de altijd aanwezige straling omvat. De invoering van de elektromotoriese krachten echter maakt het mogelik om de straling scherp te onderscheiden van de andere evenwichtsverstoringen.

Na deze uitweiding, die onveranderd van kracht is voor een bewogen stelsel, vatten we het aan 't slot van § 51 gezegde weer op. Op grond daarvan kan het bedrag van de elektromotoriese kracht in elk punt op volkomen analoge manier gevonden worden als voor een rustend sisteem. Men komt dan tot het besluit dat nog altijd elektromotoriese krachten met *dezelfde* amplituden voor de drie hoofdrichtingen ondersteld moeten worden als in een rustend volumeelement bij dezelfde temperatuur en frekwentie; volgens § 13 en § 14 l.c. wordt dus de elektromotoriese kracht bepaald door de formules [1])

$$(55)\quad \mathfrak{E}^e_x = \frac{4\pi c}{n}\sqrt{\frac{2k\alpha_1 dn}{s}}\, e^{int'},\quad \mathfrak{E}^e_y = \frac{4\pi c}{n}\sqrt{\frac{2k\alpha_2 dn}{s}}\, e^{int'},$$

$$\mathfrak{E}^e_z = \frac{4\pi c}{n}\sqrt{\frac{2k\alpha_3 dn}{s}}\, e^{int'}.$$

Hierin is s de grootte van het volumeelement dat we beschouwd hadden. We behoeven nu niet meer uitvoerig aan te wijzen hoe we, de metode van Prof. LORENTZ volgende, tot de uitdrukkingen (55) kunnen geraken; het is voldoende te doen zien dat met die uitdrukkingen inderdaad de in het

[1]) In deze formules is k de vroegere stralingsgrootheid f; we bezigen hier de letter k ter wille van de overeenstemming in notatie met l. c.

vorige hoofdstuk besproken wetten kunnen verklaard worden, die de stralingsverschijnselen in een bewogen stelsel beheersen. Daartoe merken we op dat de aangenomen elektromotoriese krachten (55) nu inderdaad in de bovenvermelde zin *korresponderen* met degene die voor een rustend stelsel gelden. Hierbij moet alleen in 't oog gehouden worden dat we met het neerschrijven van de faktor $e^{int'}$ alleen de *periodiciteit* willen aanduiden, maar niet bedoelen een *bepaalde faze* aan de elektromotoriese krachten toetekennen; integendeel, deze laatste moeten gedacht worden grillige fazeveranderingen te ondergaan, onafhankelik van degene die in andere volume-elementen plaats vinden; het korresponderen van de elektromotoriese krachten betreft dan ook alleen hun gemiddelde waarden, die door de amplituden bepaald worden. Uit het feit dat de elektromotoriese krachten met elkaar korresponderen, volgt (verg. het begin van § 51) dat ook voor de *stralings*verschijnselen de korrespondentiewet blijft doorgaan. Dit is al dadelik in overeenstemming met het in § 39 gezegde dat de stralingstoestand in de ether binnen een afgesloten zich bewegend stelsel korrespondeert met die in een rustend sisteem; het hier beweerde is echter algemener. We kunnen nu verder verifieren dat, zoals we vroeger reeds vonden, het emissievermogen van een zich bewegend zwart lichaam gelijk is aan dat van een rustend. We beschouwen daartoe, zoals altijd in zulke gevallen, twee korresponderende toestanden; daarbij zijn in overeenkomstige punten de intenziteiten van korresponderende straalbundels gelijk, dus is ook het emissievermogen van het lichaam dat die bundels in de beide gevallen uitgezonden heeft, in de rust- en in de bewegingstoestand hetzelfde. Dit geldt echter zowel van een willekeurig lichaam als van een volkomen zwart lichaam, dus moet volgens de wet van Kirchhoff ook het absorptievermogen door de translatie niet gewijzigd worden. Dit is het geval; immers bij invallende lichtbewegingen die met elkaar korresponderen, zijn niet alleen de intenziteiten van de invallende bundels dezelfde maar ook de warmteontwikkelingen (§ 52) in het door de bundels in de twee gevallen getroffen lichaam. De verhouding van de warmteontwikkeling tot de invallende intenziteit, dat is het absorptievermogen van het beschouwde lichaam, is dus eveneens in de beide gevallen hetzelfde.

Eindelik kunnen we gemakkelik aantonen dat aan de voorwaarde voor het warmte-evenwicht voldaan is. In § 16 l. c. bewijst Prof. LORENTZ hetzelfde voor een rustend stelsel en toont daartoe eerst aan dat twee volume-elementen s en s' elkaar wederkerig gelijkelik toestralen (d. i. gelijke warmte-ontwikkelingen geven); dit is dus ook bij de korresponderende toestand het geval. De som van de warmtehoeveelheden die alle volume-elementen s' van het afgesloten stelsel geven in het ene volume-element s, is dus ook gelijk aan de som van de warmtehoeveelheden die s doet ontstaan in alle andere volume-elementen. Maar dit laatste bedrag is ook de *totale* hoeveelheid die het element afstaat, juist omdat het stelsel afgesloten is. Derhalve ontvangt het element evenveel als het afstaat en is dus aan de voorwaarde voor het stralings-evenwicht voldaan.

§ 54. Ten slotte leidt Prof. LORENTZ, als toepassing van zijn gevonden uitkomsten, in § 17 en § 18 l. c. de dichtheid van de stralingsenergie af in een punt P van een willekeurig doorschijnend lichaam dat deel uitmaakt van een afgesloten sisteem, en bepaalt daartoe eerst de amplituden $(\mathfrak{C}_{lP})$ en $(\mathfrak{H}_{lP})$ van de totale elektriese stroom en van de magnetiese kracht, ontbonden volgens de richting l. In een bewogen stelsel zal men voor dezelfde temperatuur en frekwentie dezelfde uitdrukkingen voor de korresponderende grootheden vinden, dus (verg. § 18 l. c.)

$$(56) \quad (\mathfrak{C}'_{lP})^2 = \frac{16\,\pi\, kc^2\, ndn}{3\,\beta\, v^3}, \quad (\mathfrak{H}'_{lP})^2 = \frac{16\,\pi\, kc^2\, n^2\, dn}{3\, v^3},$$

waarin v de voortplantingssnelheid van trillingen met de frekwentie n in het beschouwde medium voorstelt als dit stilstaat. We zullen aantonen dat de energie per volume-eenheid op dezelfde manier met de kwadraten van de amplituden $(\mathfrak{E}'_{lP})$ en $(\mathfrak{H}'_{lP})$ samenhangt als in een rustend stelsel met $(\mathfrak{E}_{lP})$ en $\mathfrak{H}_{lP}$. Volgens M. E. V 14 N°. 51 wordt de elektriese energie U_e en de magnetiese energie U_m in een bewogen onmagnetizeerbare nietgeleider zonder elektromotoriese krachten bepaald door de formules

$$U_e = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} . \mathfrak{D}), \qquad U_m = \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2.$$

Gemiddelden nemende kunnen we, zoals na enige herleiding blijkt, hiervoor ook schrijven :

$$(57) \qquad U_e = \frac{1}{2}\,\overline{(\mathfrak{E}' . \mathfrak{D}')}\,{}^{1)}, \qquad U_m = \frac{1}{2}\,\overline{\mathfrak{H}'^2}.$$

In een nietgeleider is $\varkappa = 0$ en stemt de vektor $\mathfrak{D}'$ die in § 52 gedefinieerd is overeen met de vektor $\mathfrak{D}'$ die in de voorgaande formule voorkomt. Dus vinden we volgens (51) $\mathfrak{E}' = n\,\beta\,\mathfrak{D}'$, en in verband met (57) voor de totale energie per volume-eenheid

$$U = \frac{1}{4}\,n\,\beta\,(\mathfrak{D}')^2 + \frac{1}{4}(\mathfrak{H}')^2.$$

Volgens (56) is voor alle komponenten van $\mathfrak{E}'$ en $\mathfrak{H}'$ het kwadraat van de amplitude gelijk, en daar verder

$$(\mathfrak{E}')^2 = n^2\,(\mathfrak{D}')^2, \qquad (\dot{\mathfrak{H}}')^2 = n^2\,(\mathfrak{H}')^2,$$

zo vinden we dat

$$(\mathfrak{D}')^2 = \frac{16\,\pi\,k\,c^2\,dn}{n\,\beta\,v^3}, \qquad (\mathfrak{H}')^2 = \frac{16\,\pi\,k\,c^2\,dn}{v^3}.$$

Dus wordt

$$U = \frac{8\,\pi\,k\,c^2\,dn}{v^3},$$

hetgeen voor de ether overgaat in de uitdrukking die we al in § 36 vonden, terwijl we voor een willekeurig dielektrikum het in § 37 verkregen rezultaat terugvinden, dat de dichtheid van de stralingsenergie daarin niet gewijzigd wordt door de translatiebeweging.

---

[1]) Hierin wordt met $\mathfrak{D}'$ weer de vroegere vektor $\mathfrak{E}' + \mathfrak{P}$ bedoeld.

HOOFDSTUK III.

De stralingswet voor een bewogen stelsel in het geval van grote golflengten.

A. Het door een enkel elektron voortgebrachte veld

§ 55. We hebben in het begin van Hoofdstuk II gezien dat tussen de verschillende elektromagnetiese grootheden in een bewogen sisteem, wanneer men een meebewegend koördinatenstelsel aanneemt, de betrekkingen *(I')*, *(III')*, *(IV')* en *(V')* bestaan. In dezelfde § van de M. E. [1]) waaraan we bovengenoemde vergelijkingen ontleenden, wordt aangetoond dat men oplossingen daarvan kan vinden, die het veld bepalen dat door gegeven ladingen veroorzaakt wordt. Dit geschiedt door twee hulpgrootheden in te voeren, een skalaire potentiaal φ' en een vektorpotentiaal $\mathfrak{a}'$, waarmee de vektoren $\mathfrak{d}'$ en $\mathfrak{h}'$ door de betrekkingen *(IX')* en *(X')* verbonden zijn, nl.

$$\text{(IX')} \qquad \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}}' - \operatorname{grad}\varphi' + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\,.\,\dot{\mathfrak{a}}').$$

$$\text{(X')} \qquad \mathfrak{h}' = \operatorname{rot}\mathfrak{a}'.$$

Zijn op ieder ogenblik de ladingen die zich in een willekeurig volumeelement bevinden, gegeven, dan vindt men de grootheden φ' en $\mathfrak{a}'$ voor een willekeurig punt P op de plaatselike tijd t' uit de vergelijkingen

$$\text{(XI')} \qquad \varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\,[\rho]\,dS.$$

$$\text{(XII')} \qquad \mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}[\rho\mathfrak{u}]\,dS.$$

[1]) M. E. V 14. N°. 10.

Hierin is r de afstand van P tot het beschouwde volumeelement, ρ de dichtheid van de lading daar ter plaatse en u de relatieve snelheid van die lading ten opzichte van een koördinatenstelsel dat aan de translatie deelneemt; de haken om ρ en ρu betekenen dat men deze grootheden moet nemen, wanneer in het beschouwde volumeelement $d\,S$ de plaatselike tijd $t'-r/c$ is.

§ 56. De integraties die in (XI') en (XII') moeten uitgevoerd worden leveren alleen voor diè volumeelementen iets op, waarin zich op het tijdstip dat dààr de plaatselike tijd $t'-r/c$ is, een lading bevindt Het ligt dus voor de hand, om achtereenvolgens alle ladingselementen te beschouwen in dàt punt R van hun baan [1]) waar ze zijn, als daar de plaatselike tijd juist $t'-r/c$ is. Is het punt P waar we de lichtbeweging willen kennen, gegeven, dan is er zoals aanstonds zal blijken voor elk ladingselement één, maar ook niet meer dan één punt R van zijn baan waarvoor dit uitkomt, altans zolang we snelheden van de elektronen beschouwen, die veel kleiner zijn dan die van het licht. Dit punt R willen we *het met P voor de P-tijd t' korresponderende punt* van de baan noemen; het verandert van plaats als t' verandert of ook als men een ander punt P beschouwt. Het is in de eerste plaats van belang het veld te leren kennen dat door één enkel elektron wordt teweeggebracht; in dit geval bepalen de punten R samen een begrensde ruimte S, van dezelfde orde van grootte als het elektron, maar niet daaraan gelijk. Het is over de ruimte S dat we moeten integreren. Deze integratie willen we vervangen door een integratie over de ruimte S_1 die het elektron op een bepaald ogenblik inneemt, waarvoor we kunnen kiezen het ogenblik waarop zeker punt O van de ruimte S met P, voor de P-tijd t', korrespondeert. Op dat ogenblik hebben de bovengenoemde punten (ladingselementen) R zekere standen R_1; deze laatste bepalen samen de ruimte S_1. Met

[1]) We spreken kortheidshalve van de baan die het *ladingselement* beschrijft, maar bedoelen daarmee de baan van één van zijn *punten*.

elk element dS van de ruimte S komt zo een element dS_1 van de ruimte S_1 overeen, waarbij, als de koördinaten van R, ten opzichte van O als oorsprong, x', y', z', die van R_1 $x_1', y_1' z_1'$ zijn,

$$dS = \begin{pmatrix} x' \; y' \; z' \\ x'_1 \, y'_1 \, z'_1 \end{pmatrix} dS_1 \; ;$$

hierin wijst de vorm tussen de haken de funktionaaldeterminant van x', y', z' naar x'_1, y'_1, z'_1 aan. Het is dus nu nodig om een verband te vinden tussen het stel koördinaten x'_1, y'_1, z'_1 en het stel x', y', z'. De afstanden OP en RP door r en r' voorstellende, merken we het volgende op:

Als het ladingselement in R is, is de R-tijd : $t'-r'/c$,

dus „ „ „ „ R „ „ O-tijd : $t'-r'/c$ +

$$+ \frac{x' \mathfrak{w}_x + y' \mathfrak{w}_y + z' \mathfrak{w}_z}{c^2};$$

verder is, als het ladingselement in R_1 is, de O-tijd : $t'-r/c$, dus wordt de tijd τ die er verloopt tussen de ogenblikken waarop het ladingselement in R_1 en in R is, gevonden door het laatste bedrag van het eerste af te trekken; dan komt er

$$\tau = \frac{r-r'}{c} + \frac{x' \mathfrak{w}_x + y' \mathfrak{w}_y + z' \mathfrak{w}_z}{c^2}. \tag{58}$$

Blijkbaar is hierin, als we de radiusvektor van O af naar P trekken,

$$r-r' = x' \cos(r, x) + y' \cos(r, y) + z' \cos(r, z), \tag{59}$$

waarbij we een grootheid van de orde l^2/r verwaarloosd hebben, indien l een lineaire afmeting van het elektron is Het komt vooral aan op de orde van grootte van de tijd τ; deze is blijkens (58) en (59) als l/c, en daar we reeds grootheden van de orde l^2 weglieten, zullen we hetzelfde doen met termen die τ^2 als faktor bevatten. Dan kunnen we, als het onderscheid in snelheid van de verschillende punten van het elektron verwaarloosd mag worden, stellen

$$x' = x_1' + \tau \mathfrak{u}_x, \quad y' = y_1' + \tau \mathfrak{u}_y, \quad z' = z_1' + \tau \mathfrak{u}_z,$$

en dus

$$x' = x_1' + \frac{\mathfrak{u}_x}{c} \Big\{ x' \left(\cos(r,x) + \frac{\mathfrak{w}_x}{c}\right) + y' \left(\cos(r,y) + \frac{\mathfrak{w}_y}{c}\right) +$$

$$+ z' \left(\cos(r,z) + \frac{\mathfrak{w}_z}{c}\right) \Big\}, \text{ enz.}$$

of

$$(60) \quad x_1' = x' \left[1 - \frac{\mathfrak{u}_x}{c} \Big\{ \cos(r,x) + \frac{\mathfrak{w}_x}{c} \Big\}\right] -$$

$$- y' \frac{\mathfrak{u}_x}{c} \Big\{ \cos(r,y) + \frac{\mathfrak{w}_y}{c} \Big\} - z' \frac{\mathfrak{u}_x}{c} \Big\{ \cos(r,z) + \frac{\mathfrak{w}_z}{c} \Big\}, \text{ enz.}$$

Met behulp van (60) kan men de funktionaaldeterminant $\begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z_1' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, die de omgekeerde is van de bovengenoemde, berekenen. Na enige herleiding komt er

$$(61) \qquad \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = 1 - \frac{\mathfrak{u}_r}{c} - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{w})}{c^2}$$

en dus is

$$(62) \qquad dS = \frac{d\,S_1}{1 - \frac{\mathfrak{u}_r}{c} - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{w})}{c^2}}.$$

We merken op dat de gevonden uitkomst goed is op grootheden van de orde l na; deze laatste zouden nl. opgetreden zijn als we in (59) de weggelaten grootheden van de orde l^2 gehouden hadden, evenals nu de grootheden van de orde l die in laatstgenoemde formule voorkomen, aanleiding geven tot het eindige bedrag (61). Zetten we in de formules (XI') en (XII') voor $d\,S$ de waarde (62) dan moet nu de integraal genomen worden over het gehele volume dat het elektron op de O-tijd $t' - r/c$, d. i. op één en dezelfde tijd inneemt. De waarden die we bij ieder element voor ρ en $\rho\,\mathfrak{u}$ moeten nemen, hebben evenwel niet betrekking op die tijd, maar op een andere, die er met een grootheid τ, d. i. een grootheid van de orde l/c van verschilt. Onderstellen we echter dat, zowel wat de dichtheden als wat de snelheden betreft, de toestand van het elektron zich in de tijd l/c maar weinig wijzigt, dan kunnen we voor ρ en $\rho\,\mathfrak{u}$ in elk volumeelement de waarden nemen, die zij op de O-tijd $t' - r/c$ hebben. Voor de afstand r nemen we in ieder punt de waarde die hij in O heeft; daarbij verwaarlozen we grootheden van de orde l, wat geen meerdere onnauwkeurigheid geeft aangezien we dit, zoals we opmerkten, in (59) ook reeds gedaan hebben. Verder mogen we als tweede stap voor de snelheid $\mathfrak{u}$ nog de waarde nemen die op de O-tijd $t' - r/c$ *in het punt* O bestaat, aangezien we al ondersteld hebben dat het snelheidsverschil van de verschillende delen van het elektron te verwaarlozen is. Dan kunnen r en $\mathfrak{u}$ in (XI') en (XII') vóór het integraalteken gebracht worden en is $\int \rho\, d\, S_1$ gelijk aan de lading e van het elektron. Er komt ten slotte

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi' &= \frac{e}{4\,\pi\left[r\left(1 - \frac{\mathfrak{u}_r}{c} - \frac{(\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{w})}{c^2}\right)\right]}, \\ \mathfrak{a}' &= \frac{e}{4\,\pi\,c}\left[\frac{\mathfrak{u}}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{u}_r}{c} - \frac{(\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{w})}{c^2}\right)}\right], \end{aligned}\right.$$

waarin de vierkante haken om de vormen betekenen dat deze genomen moeten worden op het ogenblik als de O-tijd $t' - r/c$ is; daarbij is O het punt dat voor het in 't begin van deze § beschouwde ladingselement met het punt P voor de P-tijd t' korrespondeert. Aangezien we van de verschillen van r en $\mathfrak{u}$ voor verschillende punten van het elektron afzien, kunnen we bij het toepassen van (63) de gehele lading van het elektron op het beschouwde ogenblik in O gekoncentreerd denken en dus verder handelen alsof we met een puntlading te doen hadden In die zin zullen we kunnen zeggen dat het elektron „zich in O bevindt".

We kunnen in de formule voor $\mathfrak{a}'$ nog een vereenvoudiging aanbrengen; wanneer we ons nl. evenals in M. E. V 14 N°. 18 voor een rustend stelsel gedaan is, tot grootheden beperken die met betrekking tot de snelheid $\mathfrak{u}$ (en de aanstonds te beschouwen versnelling $\mathfrak{j}$) lineair zijn, dan komt er

$$(64)\qquad \mathfrak{a}' = \frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\mathfrak{u}}{r}\right].$$

§ 57. Nu we φ' en $\mathfrak{a}'$ gevonden hebben, kunnen we overgaan tot de bepaling van $\mathfrak{d}'$ en $\mathfrak{h}'$ met behulp van (IX') en (X'). Hiervoor is nodig een differentiatie van φ' en $\mathfrak{a}'$ naar t' en naar de relatieve koördinaten x, y, z van het punt P. We zullen hierbij termen met r^2 in de noemer weglaten, m. a. w. r bij het differentieren als konstant beschouwen. We beginnen met de differentiatie naar t'; als deze grootheid met dt' toeneemt, terwijl men P op zijn plaats laat, veranderen φ' en $\mathfrak{a}'$ dáárdoor dat de snelheid $\mathfrak{u}$ van het elektron op een tijd dt later genomen moet worden. Blijkbaar verschilt nu dt' van dt met een bedrag dat tegelijk met $\mathfrak{u}$ nul wordt. Aangezien de bedoelde differentiaalquotiënten zelf reeds de faktor $\mathfrak{j}$ bevatten kunnen we dus $\partial\varphi'/\partial t'$ door $d\varphi'/dt$, en $\partial\mathfrak{a}'/\partial t'$ door $d\mathfrak{a}'/dt$ vervangen, zodat we volgens (63) en (64) vinden

$$(65)\qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = \frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\mathfrak{j}_r + \frac{1}{c}(\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{w})}{r}\right],\quad \frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'} = \frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\mathfrak{j}}{r}\right].$$

Daarna moeten we φ' en $\mathfrak{a}'$ differentieren naar de koördinaten. Om het differentiaalquotiënt naar een willekeurige richting h te vinden, bepalen we afzonderlik het differentiaalquotiënt naar de richting r en naar een richting loodrecht op r. Het laatste is 0, omdat bij een oneindig kleine verplaatsing van het punt P loodrecht op de richting r de afstand OP slechts met een bedrag van de tweede orde verandert en dus evenzo de plaats van het met P voor de P-tijd t' korresponderende punt O, terwijl bovendien de verandering van $\mathfrak{u}_r$ van de orde $1/r$ is. Beschouwen we vervolgens het differentiaalquotiënt van φ' naar de richting r. We verplaatsen daartoe in die richting het punt P naar P' over de afstand dr; dan beantwoordt aan het punt P' voor de P'-tijd $t'+dr/c$, weer hetzelfde punt O. De totale verandering van φ' is hierbij derhalve gelijk 0, aangezien we afzien van de verandering die Φ' ondergaat tengevolge van de verandering van r. We moeten dus hebben

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'}\, d t' + \frac{\partial \Phi'}{\partial r}\, d r = 0, \quad \text{als} \quad d t' = \frac{d r}{c} \quad \text{is,}$$

en dus

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t'},$$

met een dergelijke formule voor $\mathfrak{a}'$.

Voor een willekeurige richting h hebben we dus nu

$$(66) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial h} = -\frac{1}{c}\cos(r,h)\frac{\partial \Phi'}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial h} = -\frac{1}{c}\cos(r,h)\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'}.$$

§ 58. De formules die we voor de differentiaalquotiënten van $\mathfrak{a}'$ vinden, zijn presies dezelfde als die in een rustend sisteem [1]). Slechts betekent hier $\mathfrak{j}$ de relatieve versnelling, die trouwens gelijk is aan de absolute, aangezien het sisteem een konstante translatiesnelheid heeft. Merken we verder op dat ook (X') in vorm geheel overeenkomstig is met de formule voor $\mathfrak{h}$ in een rustend sisteem, dan komen we tot het besluit, dat $\mathfrak{h}'$ in het bewogen stelsel op dezelfde wijze van de relatieve versnelling van het elektron afhangt, als $\mathfrak{h}$ in het rustende sisteem van de absolute versnelling. Voor $\mathfrak{d}'$ volgt daaruit direkt hetzelfde ten opzichte van de vektor $\mathfrak{d}$ bij een rustend sisteem, als men bedenkt dat $\mathfrak{h}'$ en $\mathfrak{d}'$ door middel van (III') op dezelfde manier samenhangen als $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{d}$ door middel van (III). [2]) Willen we echter $\mathfrak{d}'$ afleiden uit de bovenstaande formules dan zien we de overeenstemming van $\mathfrak{d}$ en $\mathfrak{d}'$ pas na enige herleiding. In (IX') staat nl. in plaats van $-\operatorname{grad}\Phi'$ de vorm $-\operatorname{grad}\left\{\Phi' - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{a}')\right\}$ en in $\partial\Phi'/\partial t'$ komt als toevoegsel de term

$$\frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\frac{1}{c}(\mathfrak{j}\,.\,\mathfrak{w})}{r}\right].$$

[1]) M. E. V. 14. N°. 17 en 18.
[2]) M. E. V. 14. N°. 2.

Voor de X-komponent van $\mathfrak{d}'$ levert die vorm

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi' - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{a}')\right) = \frac{1}{c}\cos(r,x)\left(\dot{\Phi}' - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\,.\,\dot{\mathfrak{a}}')\right)$$

of

$$\frac{e}{4\pi c^2}\cos(r,x)\left\{\left[\frac{\mathfrak{j}_r}{r} + \frac{1}{c}\,\frac{(\mathfrak{j}\,.\,\mathfrak{w})}{r} - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{w}\,.\,\frac{\mathfrak{j}}{r}\right)\right]\right\}.$$

Hierin heffen de laatste twee termen tussen de akkolades elkaar op en daarmee verdwijnen de toevoegsels waardoor de vorm voor $\mathfrak{d}'_x$ zich zou kunnen onderscheiden van die voor $\mathfrak{d}_x$ in een rustend stelsel. Er komt

$$(67)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}'_x = -\dfrac{e}{4\pi c^2}\left\{\left[\dfrac{\mathfrak{j}_x}{r} - \dfrac{\mathfrak{j}_r}{r}\cos(r,x)\right]\right\} \text{ enz.,} \\[2ex] \mathfrak{h}'_x = -\dfrac{e}{4\pi c^2}\left\{\left[\dfrac{\mathfrak{j}_z}{r}\cos(r,y) - \dfrac{\mathfrak{j}_y}{r}\cos(r,z)\right]\right\} \text{ enz.} \end{cases}$$

Nemen we nu twee willekeurige richtingen h en h', onderling loodrecht en ook loodrecht op de richting r, terwijl deze laatste richting past bij een wenteling van h naar h', dan is

$$(68)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}'_h = -\dfrac{e}{4\pi c^2}\left[\dfrac{\mathfrak{j}_h}{r}\right], & \mathfrak{d}'_{h'} = -\dfrac{e}{4\pi c^2}\left[\dfrac{\mathfrak{j}_{h'}}{r}\right], \\[2ex] \mathfrak{h}'_h = \dfrac{e}{4\pi c^2}\left[\dfrac{\mathfrak{j}_{h'}}{r}\right], & \mathfrak{h}'_{h'} = -\dfrac{e}{4\pi c^2}\left[\dfrac{\mathfrak{j}_h}{r}\right], \end{cases}$$

terwijl $\mathfrak{d}'_r$ en $\mathfrak{h}'_r$ beide 0 zijn Hieruit volgt dat de vektor $\mathfrak{d}'$ loodrecht staat op r en tegengesteld gericht is aan de versnellingskomponent $\mathfrak{j}_p$ loodrecht op r, terwijl $\mathfrak{h}'$ loodrecht op r en op $\mathfrak{d}'$ staat en wel zodanig dat de schijnbare energiestroom $c\,[\mathfrak{d}'.\,\mathfrak{h}']$ in P van O af gericht is. De absolute grootte van $\mathfrak{d}'$, zowel als van $\mathfrak{h}'$, is

$$(69)\qquad -\frac{e}{4\pi c^2}\left[\frac{\mathfrak{j}_p}{r}\right]\text{[1]}.$$

[1] We hebben de hier gegeven afleiding, die uitgaat van de vergelijkingen voor een bewogen stelsel, expres gebezigd omdat deze zich direkt aansluit bij de manier van behandeling in de vorige hoofdstukken Overigens zou men de einduitkomst spoediger kunnen vinden door gebruik te maken van die voor een rustend stelsel. (M. E. V. 14 N°. 18).

B. Het emissie- en het absorptievermogen van een bewogen metaalplaatje, voor het geval van grote golflengten.

§ 59. Uit het onder *A* gezegde blijkt dat een elektron alleen dàn een middelpunt van straling is, wanneer zijn relatieve snelheid veranderingen ondergaat. Elk lichaam bevat een groot aantal elektronen en zendt ook in meerdere of mindere mate stralen uit. Dus ligt het voor de hand om te veronderstellen dat de straling juist het gevolg is van de versnellingen die de elektronen van het lichaam telkens verkrijgen. Ook de wet van Kirchhoff over het verband tussen het emissie- en het absorptievermogen doet vermoeden dat de uitstraling het gevolg is van de elektronenbewegingen, aangezien men zich op goede gronden voorstelt dat ook de absorptie door tussenkomst van de elektronen plaats heeft. In 't algemeen zijn hierbij zowel de polarizatie- als de geleidingselektronen in 't spel; de uitstraling zal dus ook aan beide soorten moeten worden toegeschreven. Intussen is gebleken dat men een bevredigende teorie verkrijgt wanneer men uitgaat van de onderstelling dat in een rustend metaal de emissie voor *kleine* frekwenties uitsluitend het gevolg is van de vrije elektronen. Prof. Lorentz heeft nl. het emissievermogen van een metaalplaatje voor de genoemde frekwenties bepaald, uitgaande van de snelheidsveranderingen die de vrije elektronen door de botsingen met metaalatomen ondergaan [1]. Het absorptievermogen kan eenvoudig worden uitgedrukt met behulp van het gewone geleidingsvermogen σ, terwijl deze laatste grootheid reeds door Drude was bepaald, insgelijks met behulp van de konstanten die op de beweging van de vrije elektronen betrekking hebben. De verhouding van de aldus gevonden emissie- en absorptievermogens blijkt

[1] H. A. Lorentz. Het emissie- en het absorptievermogen der metalen, in het geval van grote golflengten. Akademie v. Wetenschappen te Amsterdam 1903.

werkelik een van de aard van het metaal onafhankelike grootheid te zijn, die bovendien wat de afhankelikheid van temperatuur en frekwentie betreft, voldoet aan de wet van WIEN.

We willen doen zien dat men de beschouwingen van Prof. LORENTZ kan herhalen voor een bewogen metaalplaatje. De mogelikheid hiervan berust op de overeenstemming tussen de uitkomst die voor de straling van een enkel elektron in een bewogen en in een rustend stelsel gevonden wordt. We beschouwen derhalve een metaalplaatje van zeer kleine dikte Δ, dat zich met een konstante translatiesnelheid voortbeweegt en berekenen de energie die het per tijdseenheid door een element ω van zijn oppervlak, gelegen aan het punt O, in een richting loodrecht daarop uitzendt. Het zal er daarbij, in verband met hetgeen we in het begin als stralingsgrootheid gedefinieerd hebben, vooral om te doen zijn de schijnbare energiestroom $c\,[\mathfrak{d}' . \mathfrak{h}']$ te leren kennen in een punt P van de normaal die we aan het plaatje kunnen trekken.

§ 60. We onderstellen dat P op zo'n grote afstand r van O ligt, dat we de verschillen in afstand van de punten van het volumeelement $\omega\,\Delta$ mogen verwaarlozen Dan mogen we tevens gebruik maken van de regel die voor de uitstraling van éen elektron naar ver verwijderde punten gevonden is. Volgens deze geeft een elektron met de lading e, dat zich op de O-tijd t' in dat volumeelement bevindt en dan de relatieve versnellingen

$$\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt},\quad \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt},\quad \frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}$$

heeft, op de P-tijd $t' + r/c$ in P een vektor $\mathfrak{d}'$ met de komponenten (zie (68))

$$(70)\qquad -\frac{e}{4\pi c^2 r}\,\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt},\quad -\frac{e}{4\pi c^2}\,\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt},\quad 0,$$

als we de richting OP tot Z- as kiezen, zodat de X- en de Y-

richting evenwijdig aan het oppervlak van het plaatje zijn. Alle elektronen die zich op de O-tijd t' in het beschouwde deel bevinden, geven dus op de P-tijd $t' + r/c$ samen een vektor $\mathfrak{d}'$ waarvan de X-komponent bepaald wordt door de formule

$$\mathfrak{d}'_x = -\frac{1}{4\pi c^2 r} \Sigma e \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt}. \tag{71}$$

De vektor $\mathfrak{h}'$ heeft een Y-komponent die hieraan gelijk is; de schijnbare energiestroom door een element ω' bij P loodrecht op OP, die aan dit deel van de straling te danken is, bedraagt dus

$$c\,\mathfrak{d}'^2_x\,\omega'$$

terwijl aan de Y-komponent van $\mathfrak{d}'$ een straling $c\,\mathfrak{d}'^2_y\,\omega'$ beantwoordt.

§ 61. De vektor $\mathfrak{d}'$ in P zal zekere funktie van t' of ook van t zijn. Deze willen we ontbinden volgens het teorema van Fourier. Beschouwen we een zeer lang tijdsverloop van $t = 0$ tot $t = \vartheta$, dan kunnen we gedurende dit tijdsinterval stellen

$$\mathfrak{d}'_x = \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \sin \frac{m\pi}{\vartheta} t$$

waarin

$$a_m = \frac{2}{\vartheta} \int_0^\vartheta \sin \frac{m\pi t}{\vartheta} .\ \mathfrak{d}'_x\, dt.$$

Daar de uitstraling stationair is, kunnen we volstaan met de gemiddelde waarde van de schijnbare energiestroom en dus de gemiddelde waarde van $\mathfrak{d}'^2_x$ te beschouwen. Stellen we deze voor door $\overline{\mathfrak{d}'^2_x}$, dan is

$$\overline{\mathfrak{d}'^2_x} = \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta \mathfrak{d}'^2_x\, dt$$

of blijkens de verhandeling van Prof. LORENTZ

$$\overline{\mathfrak{d}'^2_x} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty} a^2_m .$$

Daar al het hier geschrevene in vorm geheel overeenstemt met het korresponderende in de genoemde verhandeling, kunnen we nu wel direkt zeggen dat de straling door ω' voor frekwenties tussen n en $n+dn$ gelijk is aan

$$\frac{c\vartheta}{2\pi} \omega' a^2_m \, dn$$

wat met (14) van die verhandeling overeenstemt. Daarbij is dan

$$(72) \qquad a_m = \frac{2}{\vartheta} \int_0^\vartheta \sin nt . \, \mathfrak{d}'_x \, dt.$$

Kombineren we (71) en (72) dan kunnen we de waarde van a_m bepalen. Er komt

$$a_m = - \frac{1}{2\pi c^2 \vartheta r} \Sigma \left[e \int_0^\vartheta \frac{d\, \mathfrak{u}_x}{d\, t} \sin nt \; dt \right].$$

Integreren we nog partieel dan vinden we

$$a_m = \frac{n}{2\pi c^2 \vartheta r} \Sigma \left[e \int_0^\vartheta \mathfrak{u}_x \cos nt \, dt \right].$$

§ 62. Hiermee is voor a_m formeel dezelfde uitdrukking gevonden als (15) van de geciteerde verhandeling. Als echter de relatieve beweging van de elektronen ingeval het plaatje een translatiesnelheid heeft, door hetzelfde gemiddelde snelheidskwadraat gekarakterizeerd is als in het geval van een rustend plaatje hun absolute beweging, dan zal de uitkomst die de verdere beschouwingen voor a_m opleveren, ook geheel dezelfde zijn in de beide gevallen, aangezien deze beschouwingen volkomen analoog zijn aan die in de genoemde verhandeling. Verstaat men onder u de gemiddelde snelheid van de warmtebeweging van de elektronen, dan vindt men

$$a^2_m = \frac{n^2 e^2 N l \, u \, \Delta}{24 \pi^2 c^4 \vartheta \, r^2} \omega ,$$

wat voor één elektronensoort geldt en voor de schijnbare energiestroom door ω', te danken aan alle elektronensoorten

$$\frac{n^2}{48 \pi^3 c^3 r^2} (e_1{}^2 N_1 l_1 u_1 + e_2{}^2 N_2 l_2 u_2 + \ldots) \Delta \omega \omega' dn \tag{73}$$

waarbij nog geen rekening gehouden is met de Y-komponent van $\mathfrak{d}'$. (Vergelijk (24) van de genoemde verhandeling)

§ 63. Ook het absorptievermogen kan door een dergelijke formule worden voorgesteld als bij een rustend plaatje. Vallen op het beschouwde plaatje in loodrechte richting relatieve stralen, gekarakterizeerd door de vektoren $\mathfrak{d}'$ (in de richting h) en $\mathfrak{h}'$, welke laatste in absolute waarde gelijk is aan $\mathfrak{d}'$, en is dus de totale schijnbare energiestroom door het voorvlak gelijk aan $c\mathfrak{d}'^2 \omega$, dan ontstaan in het plaatje stromen waarbij volgens § 52 een warmteontwikkeling

$$\sigma \, \mathfrak{E}'^2_h \, \omega \, \Delta$$

plaats heeft; hierin kan voor $\mathfrak{E}'_h$ de waarde aan het voorvlak van het plaatje genomen worden. Deze laatste is wegens de grensvoorwaarde van § 48 gelijk aan $\mathfrak{d}'$ in de invallende stralen (de amplitude van de *teruggekaatste* is van de orde Δ). De warmteontwikkeling is dus

$$\sigma \, \mathfrak{d}'^2 \, \omega \, \Delta$$

waaruit we voor het absorptievermogen vinden

$$A = \frac{\sigma}{c} \Delta , \tag{74}$$

een formule die met (3) van het geciteerde stuk overeenstemt. We moeten nu σ berekenen en beschouwen daartoe vooreerst één soort van elektronen. Zij voor een daarvan de massa m_1, de lading e_1, de gemiddelde weglengte l_1, de gemiddelde snelheid van de warmtebeweging u_1 en het aantal elektronen per volume-eenheid N_1, dan is de elektriese stroom $\mathfrak{J}$ door een vlak dat zich met het plaatje meebeweegt, voor zover die aan de beschouwde elektronensoort te danken is,

$$\mathfrak{J} = N_1 e_1 v_1,$$

waarbij v_1 de gemeenschappelike snelheid is waarmee de elektronenzwerm in zijn geheel in een richting loodrecht op dat vlak voortgaat. Deze snelheid v_1 of liever zijn gemiddelde waarde, hangt af van de vektor $\mathfrak{E}'$ die in die richting werkzaam is. Op één elektron werkt nl. de kracht $e_1 \mathfrak{E}'$; deze geeft per tijdseenheid de snelheid

$$\frac{e_1 \mathfrak{E}'}{m_1},$$

dus in de tijd $\tau_1 = l_1/u_1$ tussen twee botsingen, de snelheid

$$\frac{l_1}{u_1} \cdot \frac{e_1 \mathfrak{E}'}{m_1}\ ^{1)}.$$

De gemiddelde snelheid tussen twee botsingen bedraagt dus, als we onderstellen dat na elke botsing $v_1 = 0$ is,

$$\frac{1}{2} \frac{l_1}{u_1} \cdot \frac{e_1 \mathfrak{E}'}{m_1},$$

en de stroom

$$\mathfrak{J} = \frac{e_1^2 N_1 l_1 u_1}{4 \cdot \frac{1}{2} m_1 u_1^2} \mathfrak{E}'.$$

Zijn er meer elektronensoorten, dan leveren deze een elektriese stroom

$$\mathfrak{J} = \Sigma \frac{e^2 N l u}{4 \cdot \frac{1}{2} m u^2} \mathfrak{E}',$$

waaruit voor het geleidingsvermogen σ volgt

---

[1]) Hierbij is ondersteld dat in de tijd τ_1 de vektor $\mathfrak{E}'$ niet merkbaar verandert, dus dat τ_1, als $\mathfrak{E}'$ periodiek is, klein is in vergelijking met de trillingstijd. Voor langzame trillingen kan dit het geval zijn.

$$(75) \qquad \sigma = \Sigma \frac{e^2 N l u}{4 \cdot \frac{1}{2} m u^2}.$$

Nemen we nu aan dat de gemiddelde kinetiese energie van de warmtebeweging van een elektron voor alle elektronensoorten gelijk is en overeenkomt met de gemiddelde kinetiese energie q van een gasmolekuul bij dezelfde temperatuur, dan kunnen we voor (75) ook schrijven

$$\sigma = \frac{1}{4q} \Sigma e^2 N l u ,$$

waaruit we in verband met (74) voor het absorptievermogen vinden

$$(76) \qquad A = \frac{\Delta}{4 q c} \Sigma e^2 N l u .$$

Uit (73) en (76) volgt dat het emissievermogen van een zwart plaatje van dezelfde afmetingen als het metaalplaatje gelijk is aan

$$\frac{q n^2}{12 \pi^3 c^2 r^2} \omega \omega' dn$$ [1].

Hieruit vinden we de stralingsgrootheid f door de faktoren ω, ω' en $1/r^2$ weg te laten, dus is

$$(77) \qquad f = \frac{q n^2}{12 \pi^3 c^2} dn$$

De zwarte straling die zoals we zagen binnen een naar alle zijden tegen temperatuurstraling beschutte ruimte bestaat, gaat gepaard met een energie per volume-eenheid U volgens § 36 gelijk aan

$$\frac{8 \pi f}{c} dn,$$

waaruit in verband met (77) volgt

[1] Prof. Lorentz deelde mij mee dat deze uitkomst bij een minder ruwe berekening, zowel van het emissie- als van het absorptievermogen, nog dezelfde blijft. Ook deze meer nauwkeurige berekening zou voor een bewogen plaatje herhaald kunnen worden.

$$U = \frac{2\,q\,n^2}{3\,\pi^2 c^3}\,dn. \tag{78}$$

Hierbij is ook de andere komponent van de straling in aanmerking genomen, die we tot nog toe buiten rekening hadden gelaten.

§ 64. De formule (78) stemt geheel overeen met (25) van Prof. Lorentz' verhandeling, waarin de gemiddelde kinetiese energie per molekuul $q = \alpha T$ gesteld is. Wat stralen van de beschouwde kleine frekwenties betreft, is dus binnen een afgesloten sisteem dat ten opzichte van de ether een translatiebeweging heeft de energiedichtheid hetzelfde als in een rustend stelsel, zo de gemiddelde *relatieve* kinetiese energie van een molekuul in 't eerste geval gelijk is aan de *absolute* in 't tweede geval. In de vorige hoofdstukken kwamen we reeds tot het besluit dat dit niet alleen voor de *kleine*, maar voor *alle* frekwenties zou gelden Dit wordt derhalve hier bevestigd in het enige geval waarin de berekening van de stralingsgrootheid met behulp van de elektronenteorie kan worden uitgevoerd. De zeer uiteenlopende beschouwingen van de hoofdstukken I, II en III voeren dus tot met elkaar overeenstemmende rezultaten.

AANHANGSEL.

Over de teorie van de straling in bewogen lichamen is tot nu toe, voor zover mij bekend, voornamelik door F. Hasenöhrl [1]) en door K. v. Mosengeil [2]) geschreven. Beide schrijvers voeren hun berekeningen uit voor willekeurig grote waarden van de translatiesnelheid. In de verhandeling van de eerste is echter een fundamentele fout, waarop v. Mosengeil opmerkzaam maakt [3]), en waardoor zijn beschouwingen, die toch al minder scherp zijn, veel van hun waarde verliezen. Hasenöhrl meent nl. voor wat hij noemt de „ware relatieve straling" de kosinuswet van Lambert te kunnen uitspreken. Deze „ware relatieve straling" is juist wat wij genoemd hebben de „schijnbare relatieve energiestroom" door een bewogen vlakteelement, die wij als maat leerden kennen voor de door een zwart vlak hetzij beschikbaar gestelde, hetzij geabsorbeerde warmte. Nu hebben wij daarvoor inderdaad (zie § 32) de bedoelde wet gevonden; alleen onze beschouwingen golden slechts met beperking tot grootheden van de *eerste* orde. Von Mosengeil komt nu, m.i. terecht, tot een afwijking van de wet, evenwel slechts in grootheden van de *tweede* orde, [4]) zodat er geen tegenspraak met mijn uitkomsten is. Ook in de verdere delen van het

[1]) F. Hasenöhrl. „Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern", verschenen in drie achtereenvolgende gedeelten in de Wien Sitzb. van 1904 en daarna omgewerkt in de Ann. d. Physik 1904 Bd. 15 en 1905 Bd. 16

[2]) K v. Mosengeil. Dissertation: Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. Berlin 1906.

[3]) l c. p. 8.

[4]) l.c. p. 17, waar voor i_0, d.i. de bedoelde »ware relatieve" straling, een uitkomst gevonden wordt die slechts grootheden van de 2e orde bevat.

werk van v. Mosengeil stemt alles tot op de tweede orde na met mijn uitkomsten overeen, zoals we het best nader kunnen aanwijzen door hem op de voet te volgen.

In § 2 van de genoemde verhandeling bewijst v. Mosengeil dat bij elke grootte van de translatiesnelheid binnen een afgesloten zich verschuivend sisteem een wat de intenziteit betreft stationaire stralingstoestand ontstaat, die onafhankelik is van de daar aanwezige absorberende lichamen, d. w. z. deze stralingstoestand is in elk punt het rezultaat van een groot aantal straalbundels van verschillende richting, waarvan de afzonderlike intenziteiten niet van de aanwezige absorberende lichamen, maar enkel van de richting der straalbundels met betrekking tot die van de translatiesnelheid afhangen. Het bewijs van v. Mosengeil steunt op de tweede hoofdwet, die hij als grondslag van alle verdere beschouwingen aanneemt. Voor zover het grootheden van de eerste orde betreft — immers daartoe beperkten wij ons voortdurend — hebben wij dit insgelijks gedaan (zie de inleiding § 4); vervolgens hebben wij aangewezen dat zuiver elektromagnetiese beschouwingen tot overeenstemming met de eerstgevonden rezultaten voerden. (Verg. o.a. de behandeling in hoofdstuk I met die in hoofdstuk II en III). Tot de rezultaten die we verkregen behoorde o.a. ook de genoemde onafhankelikheid van de straling in een afgesloten sisteem van de daar aanwezige lichamen, anders gezegd, het bestaan in zo'n sisteem van de zwarte straling (§ 37). We mochten dit echter slechts tot op grootheden van de tweede orde na besluiten.

In § 3 geeft v. Mosengeil de reeds besproken afhankelikheid tussen specifieke stralingsintenziteit (stralingsgrootheid) en straalrichting aan. In § 4 en langs andere weg in § 5 brengt hij de stralingsgrootheden zoals die zijn bij een snelheid v en een snelheid 0 in verband met elkaar, terwijl hij de „termodinamiese" omstandigheden waaronder de vergelijking van de twee waarden plaats vindt, nader presizeert door het rustende sisteem langs adiabatiese en omkeerbare weg op de snelheid v te brengen Na dit proses heeft het stelsel begrijpelikerwijze een andere temperatuur gekregen, die v. MOSENGEIL in § 8 berekent en die van de tweede orde blijkt te zijn [1]; we mogen dus zeggen dat wij het bewogen en het rustende sisteem onder *dezelfde* omstandigheden vergeleken hebben als v. MOSENGEIL, aangezien wij *gelijke* temperaturen in de beide gevallen onderstelden, waarbij echter een afwijking van de tweede orde niet uitgesloten is. Nu hebben wij gevonden dat de specifieke stralingsintenziteiten in de beide gevallen gelijk zijn; zal dus geen tegenspraak gevonden worden met de uitkomsten van v. MOSENGEIL, dan moet uit deze op grootheden van de tweede orde na hetzelfde kunnen worden afgeleid. Dit nu is inderdaad het geval. Op blz. 17 van v. MOSENGEIL's verhandeling blijkt nl. dat op grootheden van de tweede orde na $K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = i_0$ (d. i. de specifieke stralingsintenziteit van een *bewogen* zwart lichaam voor alle frekwenties samen, en op blz. 24 (formule (21)) dat, eveneens op een grootheid van de tweede orde na, $K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = K_0$ (d. i. de specifieke stralingsintenziteit van een *rustend* zwart lichaam).

Wat hier van de totale straling gezegd is, geldt eveneens van het deel met een bepaalde frekwentie, waarvoor v. MOSENGEIL in § 6 en § 7 analoge wetten afleidt.

In § 9 behandelt hij de uitdrukkingen voor de schijnbare massa van een afgesloten vakuum en maakt onderscheid tussen de massa m_{ad}, die bij een adiabatiese, en de massa m_{is}, die bij een izotermiese toename van de snelheid te pas komt. (Bl. 43 en 44). Beide grootheden stemmen tot op grootheden van de tweede orde na met de elektromagnetiese massa overeen die ik langs andere weg gevonden heb (§ 40). HASENÖHRL daarentegen vindt een dubbel zo grote waarde; dit ligt niet aan de fundamentele fout waarvan straks sprake was en die slechts grootheden van de tweede orde

[1]) Bedoeld is hier de temperatuur van het bewogen sisteem ten opzichte van een rustende waarnemer. (Zie verder onder).

betrof, maar aan het ontbreken van een nauwkeurige vaststelling van de ingevoerde grootheden.

Ten slotte bewijst v. MOSENGEIL al zijn uitkomsten opnieuw door gebruik te maken van korresponderende grootheden. Daarbij neemt hij niet het standpunt van Prof. LORENTZ[1]) in, maar dat van A. EINSTEIN[2]), en bazeert zijn beschouwingen dus op het door laatstgenoemde op de voorgrond gestelde relativiteitsprincipe volgens hetwelk de voor een sisteem geldende wetten onafhankelik zijn van de vraag of dit sisteem zich met betrekking tot een aangenomen normaalsisteem beweegt. Het is hierbij nodig zich voor te stellen dat er wel is waar voor een en dezelfde waarnemer onderscheid is tussen korresponderende grootheden in een rustend en een bewogen stelsel, maar dat zekere grootheid in het ene sisteem voor een rustende waarnemer hetzelfde is wat de korresponderende grootheid in het andere sisteem is voor een bewogen waarnemer.

VON MOSENGEIL onderscheidt nu verder ook de temperatuur T van een lichaam ten opzichte van een rustende waarnemer en de temperatuur T' van datzelfde lichaam ten opzichte van een bewogen waarnemer. We willen even nagaan hoe v. MOSENGEIL tot de vaststelling van de getallen T en T' komt. De grootheden K en K' die hij voor een straalbundel met zekere kegelopening onderscheidt, zijn resp. gelijk aan onze grootheden $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{S}'$, genomen per eenheid van kegelopening, voor alle frekwenties samen, en stellen dus resp. voor wat wij zouden noemen de emissiefaktor ten opzichte van een rustend en ten opzichte van een bewogen stelsel V. MOSENGEIL beschouwt steeds twee sistemen, het ene, A, in rust, het andere, B, in translatiebeweging met de snelheid v, en vat in elk een straalbundel in het oog; bij beide bundels

[1]) H. A. LORENTZ. Elektromagnetiese verschijnselen in een stelsel dat zich met willekeurige snelheid, kleiner dan die van het licht, beweegt Akademie v. Wet te Amsterdam. 1904

[2]) A. EINSTEIN. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d Phys. (4). 17 p. 891. 1905.

kan men onderscheid maken tussen de absolute en de relatieve straalrichting. De hoek die de absolute en de relatieve straalrichtingen met de translatierichting maken, noemt hij in beide gevallen resp. ϑ en ϑ'. Verder stelt hij

K_0 = de emissiefaktor van A t. o. v. het rustende stelsel.
K'_0 = „ „ „ A „ „ bewogen „ .
K_v = „ „ „ B „ „ rustende „ .
K'_v = „ „ „ B „ „ bewogen „ .

Evenzo onderscheidt v. Mosengeil de vier temperatuurgetallen T_0, T'_0, T_v en T'_v. De grootheid K_0 wordt bepaald door de wet van Boltzmann:

$$K_0 = \varkappa T_0^4$$

We zagen verder boven dat v. Mosengeil de grootheid K_v bepaald heeft; hij vindt daarvoor (formule (48))

$$K_v = \varkappa \left\{ T_v \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \right\}^4.$$

Verder geeft hij in formule (55) het verband tussen K en K', en wel is

$$K' = K \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}, \text{ [1]}$$

wat zowel op K_0 als op K_v mag toegepast worden. Dus komt er voor K'_0

$$K'_0 = \varkappa \left\{ T_0 \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\}^4.$$

Maar, zegt v. Mosengeil (en nu volgt de zaak waar het op aankomt), volgens het relativiteitsprincipe *moet* K'_0 *op*

[1] Beperkt men zich tot grootheden van de eerste orde, dan moet voor de beschouwde bundel tussen de grootheden K' en K hetzelfde verband bestaan als tussen de grootheden $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{S}'$; dit komt inderdaad uit.

dezelfde manier van ϑ', — v *en* T'_0 *afhangen, als* K_v *afhangt van* ϑ, v *en* T_v, dus moet ook

$$K'_0 = \varkappa \left\{ T'_0 \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \right\}^4.$$

Daar verder volgens (52) van de verhandeling van v. Mosengeil

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta},$$

kunnen we voor K'_0 ook schrijven

$$K'_0 = \varkappa \left(T'_0 (1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta) \right)^4.$$

Een vergelijking met de eerstgevonden waarde leert dat

$$T'_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Evenzo vindt v. Mosengeil dat

$$T_v = \frac{T'_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Als dus het bewogen sisteem B en het rustende sisteem A ten opzichte van het rustende stelsel dezelfde temperatuur hebben, m. a. w. als $T_v = T_0$, dan hebben de beide sistemen ten opzichte van het bewogen stelsel verschillende temperatuur; immers, dan is volgens de beide voorgaande formules

$$T'_v = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) T'_0.$$

Von Mosengeil drukt dit aldus uit: Zwei Körper die der ruhende Beobachter als gleich heisz bezeichnet, können einem bewegten Beobachter verschieden heisz erscheinen, nämlich dann, wenn die Körper verschiedene Geschwindigkeit haben.

In deze wijze van uitdrukken ligt wel opgesloten dat v. Mosengeil *essentiele* betekenis aan het begrip relatieve temperatuur toekent. Doet men dit echter, dan komt men tot moeilik te aanvaarden konzekwenties, waarin we nu niet nader willen treden. Voor ons blijft daarom het door v. Mosengeil gemaakte onderscheid van louter formele aard; in elk geval heeft hij niet aangewezen dat het begrip relatieve temperatuur een experimentele bazis heeft of gedacht kan worden te hebben.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Al pleiten de jongste proeven van Kaufmann tegen de mogelikheid om op de grondslag van de rustende ether een bevredigende verklaring te geven van sommige elektromagnetiese verschijnselen waarbij de tweede macht van de translatiesnelheid een merkbare invloed uitoefent, toch geven deze proeven nog geen voldoende aanleiding om het denkbeeld van een rustende ether te verlaten.

II.

De uitkomst die F. Hasenöhrl voor de schijnbare massa van een afgesloten met straling gevuld vakuum vindt, is tweemaal te groot. (Ann. d. Physik. Bd 15. p. 363).

III.

Ten onrechte geeft K. v. Mosengeil de indruk als zou aan het begrip „relatieve temperatuur" anders dan formele betekenis toekomen. (Dissertation. p. 49).

IV.

Tegenover de minder strenge gedeelten die in Kirchhoffs verhandeling (zie de inleiding) zijn aan te wijzen, verliest de uiterste gestrengheid die overal elders in die verhandeling in acht genomen wordt, enigszins van zijn betekenis.

V.

De verklaring die Drude geeft van het feit dat bij lichttrillingen de magnetizeringskonstante zelfs voor ijzer = 1 genomen moet worden, berust op een onjuistheid in de door hem opgestelde vergelijkingen. (Lehrbuch der Optik, 1e Druk. Voorbericht p. V; tekst p. 249 (noot) en p. 419)

VI.

In hetzelfde boek p. 346 komt Drude, bij de behandeling van de interferentieverschijnselen in absorberende tweeassige kristalplaatjes, wèl op korrekte manier tot de intenziteit van het uit de analizator tredende licht voor zover het de richtingen betreft die enigszins van de „optiese as" afwijken, maar het rezultaat dat hij voor de optiese as zelf vindt is, ofschoon juist, door een foutieve redenering verkregen.

VII

De uitkomsten die uit de metingen van Dr. E. C. de Vries over de invloed van de temperatuur op de kapillaire stijghoogte bij ether kunnen worden afgeleid, bevestigen voldoende het door v. d. Waals teoreties afgeleide rezultaat dat de kapillariteitskonstante voor temperaturen T, nabij de kritiese T_k, evenredig is met $(T - T_k)^{3/2}$.

VIII.

De vrij ingewikkelde afleiding, met behulp van de entropie, die PLANCK in zijn „Thermodynamik" (blz 124) van de evenwichtsvoorwaarde voor een sisteem in verschillende aggregaatstoestanden geeft, behoort in een leerboek of in een voordracht voor studenten vervangen te worden door de meer eenvoudige afleiding met behulp van de vrije energie of de termodinamiese potentiaal.

IX.

A. SCHUSTER vat de taak van de fizika verkeerd op, als hij in het voorbericht van zijn „Introduction to the theory of optics" de mening uitspreekt dat er tegenwoordig geen lichtteorie bestaat.

X.

Bij het bewijs dat FORSYTH in § 8 van zijn „Treatise on differential equations" tracht te geven van de stelling: A differential equation cannot have more than n independent first integrals, toont hij iets anders aan dan hetgeen de stelling zegt.

XI.

Wanneer twee funkties van een reële veranderlike, $\phi(x)$ en $f(x)$, voor $x = a$ beide 0 of beide ∞ worden, en $\lim\limits_{x=a} \dfrac{\phi'(x)}{f'(x)}$ *bestaat*, dan bestaat ook $\lim\limits_{x=a} \dfrac{\phi(x)}{f(x)}$ en we hebben

$$\lim_{x=a} \frac{\phi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\phi'(x)}{f'(x)}.$$

Hierbij mag a een singulier punt van $\phi(x)$ en $f(x)$ zijn.

XII.

In „Riemann-Weber. Partielle Differentialgleichungen I § 9" komt de stelling voor dat

$$\lim_{\varkappa=0} \int_a^\infty \varphi(x)\,\psi(\varkappa x)\,dx = \psi(0)\int_a^\infty \varphi(x)\,dx,$$

indien $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ (voorwaardelik) konvergeert en $\psi(x)$ „*von einem bestimmten x an*" voortdurend afneemt. Dit is niet geheel juist; de hier bedoelde waarde van x mag niet groter zijn dan 0.