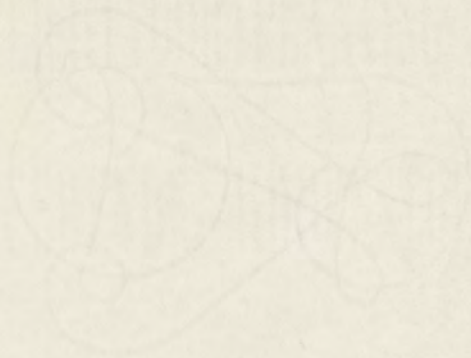
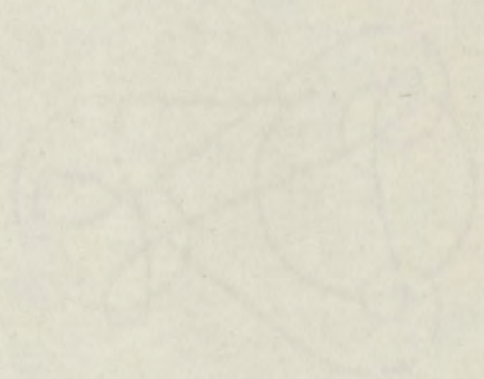


DISL
1905-13



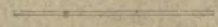


OVER LICHTVOORTPLANTING
IN DISPERGEERENDE MIDDENSTOFFEN,

11-13

DOOR

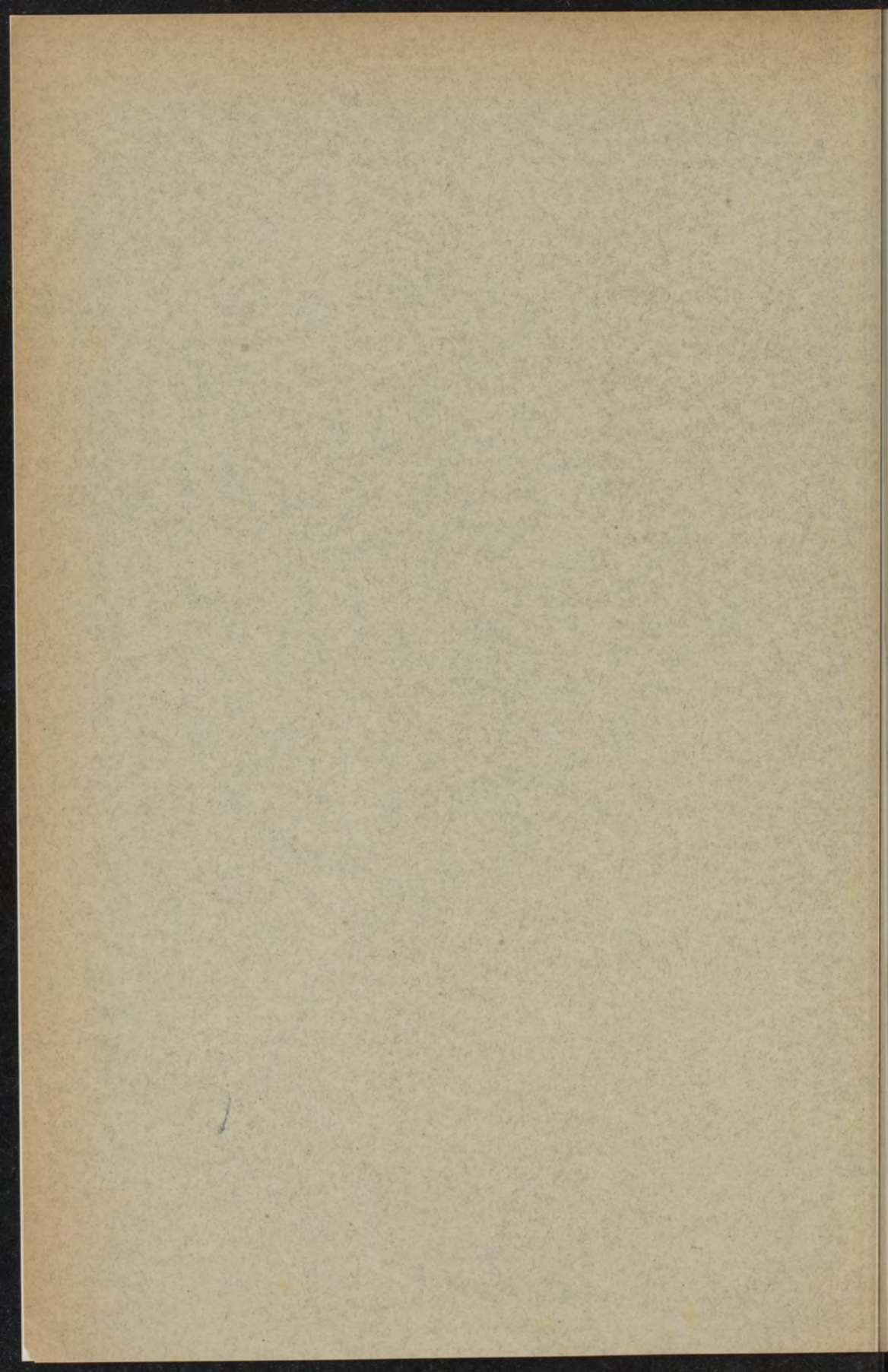
H. BREMEKAMP.



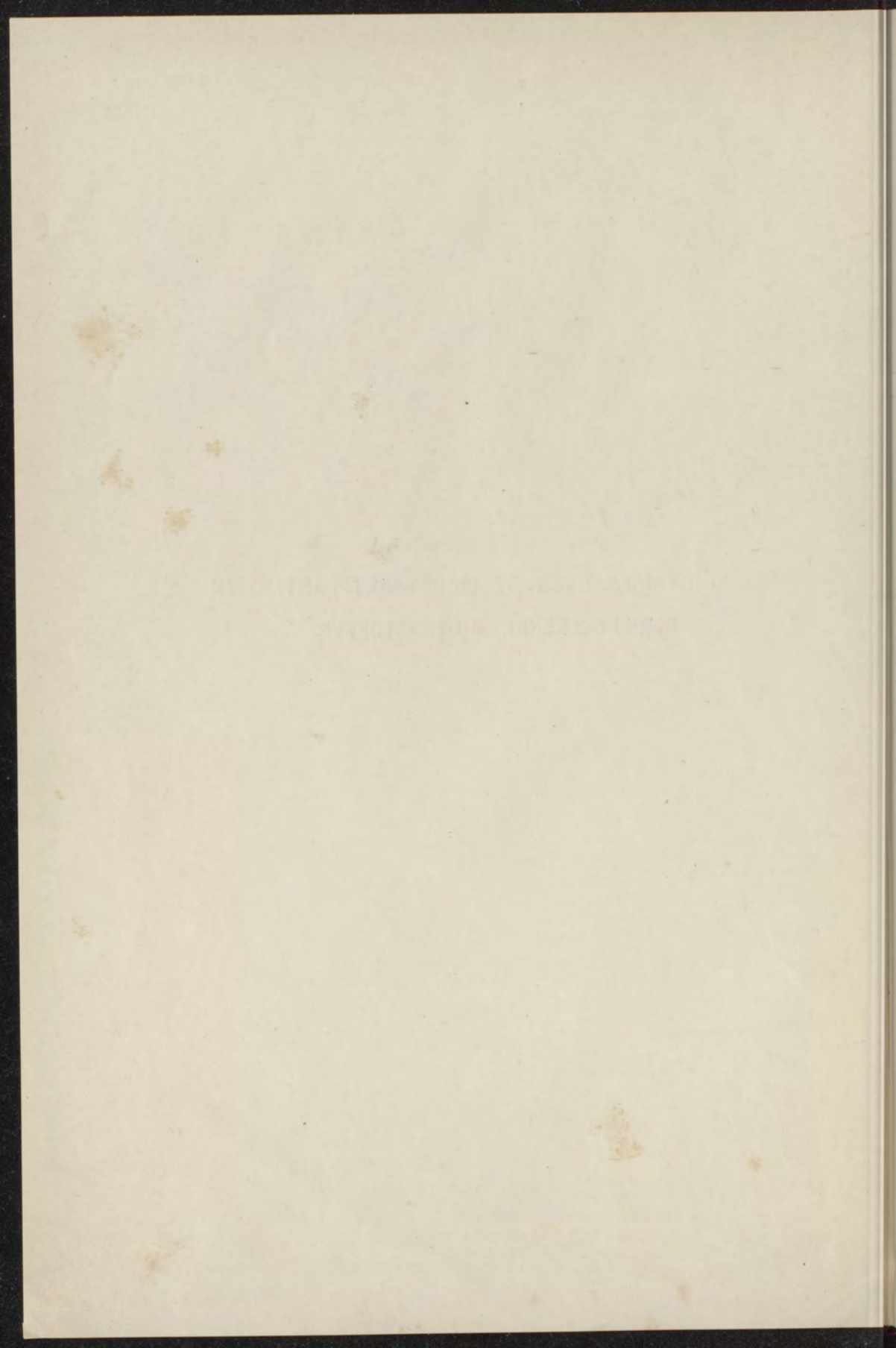
GRONINGEN. — ERVEN B. VAN DER KAMP. — 1905.

Diss Leiden

1905 nr 13



BESCHOUWINGEN OVER DE LICHTVOORTPLANTING IN
DISPERGEERENDE MIDDENSTOFFEN.



21507

BESCHOUWINGEN OVER DE
LICHTVOORTPLANTING IN DISPERGEERENDE MIDDENSTOFFEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE

RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. J. VAN LEEUWEN JR.,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN,



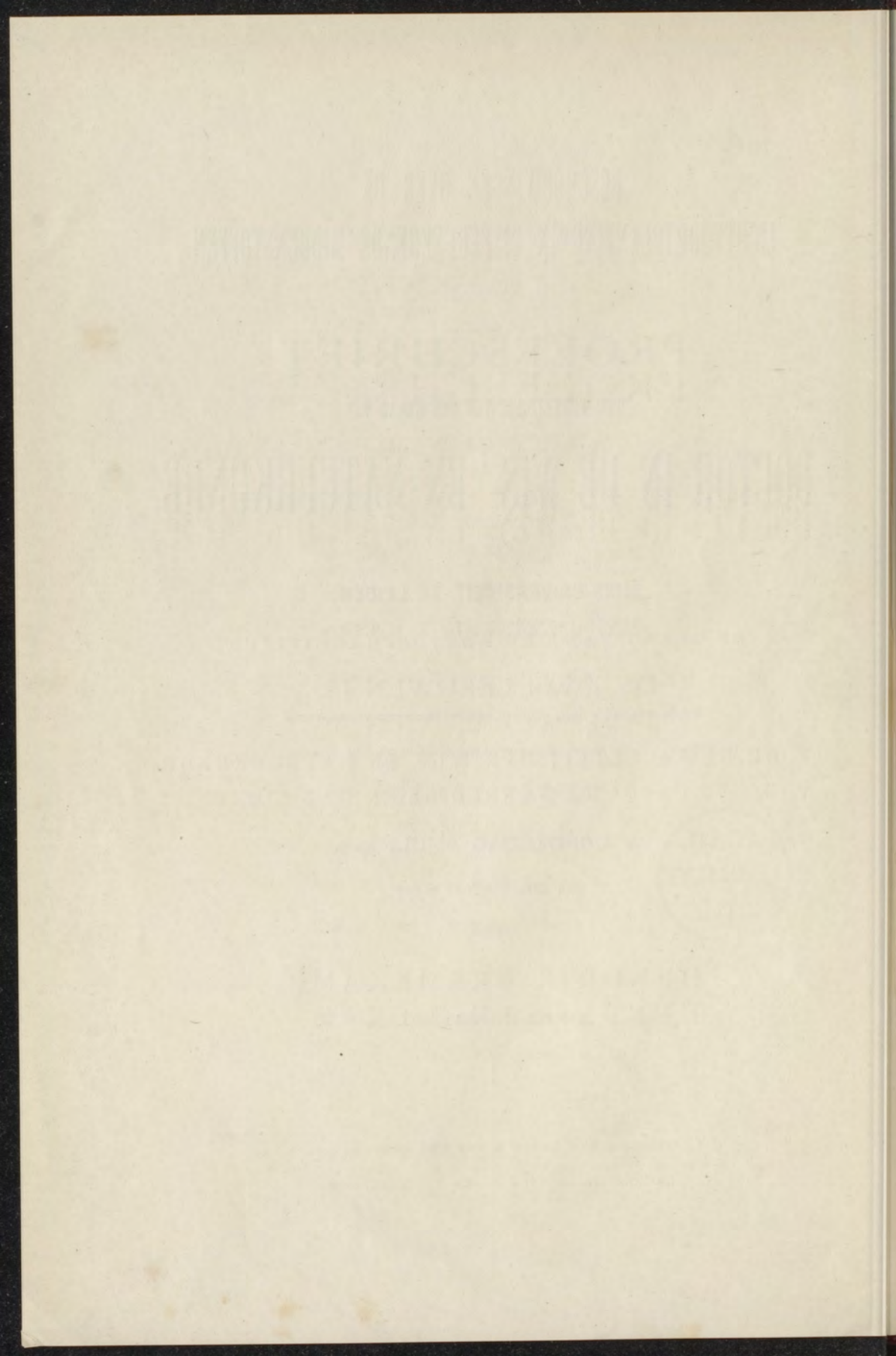
op DONDERDAG 6 JULI 1905,

des namiddags te 3 ure,

DOOR

HENDRIK BREMEKAMP,

geboren te DORDRECHT.



Aan mijne Ouders.

for my father

Gaarne voldoe ik hierbij aan den plicht, dien zoowel de academische gewoonte, als mijn gevoel mij voorschrijft, U, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren dezer Universiteit wier onderwijs ik genoten heb daarvoor mijn hartelijken dank te betuigen.

In 't bijzonder geldt dit U, Hooggeleerde LORENTZ, hooggeachte promotor, wien ik ook te danken heb voor Uwen steun bij de bewerking van mijn proefschrift. Als een groot voorrecht beschouw ik het U als geleerde en als mensch te hebben leeren kennen.

Hooggeleerde KLUYVER, Uwe lessen in de wiskunde heb ik steeds zeer gewaardeerd; als ik tegenover mathematische problemen met een zeker zelfvertrouwen sta, dan is dat niet anders dan vertrouwen in uw onderwijs.

Ook uwe colleges, Hooggeleerde VAN GEER en vooral uwe welwillende belangstelling, zelfs, nadat gij Uw ambt had neergelegd zal ik steeds in dankbare herinnering houden.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and is too light to transcribe accurately.

INLEIDING.

§ 1. *Een vraagstuk dat zich voordoet bij de lichtvoortplanting in disperseerende media.*

De volgende quaestie heeft mij 't eerst aanleiding gegeven tot de beschouwingen over de lichtvoortplanting in disperseerende middenstoffen, die de kern vormen van dit proefschrift.

De analytische voorstelling van enkelvoudige golven, die zich voortplanten in eene middenstof, waar de snelheid afhankelijk is van de golflengte (of den trillingstijd), wordt gegeven door formules als:

$$\varphi = A \text{ Cos } \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - V_\lambda t) + a \right\} \quad (1)$$

Hierin stelt φ eene grootheid voor, waardoor de toestand bepaald wordt, (lichtvector), haar juiste physische beteekenis doet nu niet ter zake. Men vat ze verschillend op, naarmate men zich op het standpunt der verschillende lichttheorieën plaatst.

Als richting der positieve X-as is die richting gekozen, waarin zich de golf voortplant; het nulpunt der x is willekeurig gekozen.

λ is de golflengte der golven,

V_λ , eene functie van λ , is de voortplantingssnelheid,

t de tijd, gerekend van een willekeurig gekozen nulpunt,

A is de amplitudo en a de phase der trillingen.

De nulpunten van x en t kunnen steeds zoo gekozen worden dat voor een bepaalde golf $a = 0$ is.

Nemen we voor φ de som van een willekeurig aantal vormen, zooals het tweede lid van (1), dan zal daardoor altijd een toestand voorgesteld worden, die in het medium bestaan kan. Dit volgt in iedere theorie uit de omstandigheid, dat φ eene oplossing is van eene lineaire homogene differentiaal-vergelijking.

Met deze gegevens kan men het probleem ter hand nemen, de lichtbeweging te onderzoeken in het onbegrensd gedachte medium, wanneer op een bepaald tijdstip de toestand geheel bekend is, m. a. w. wanneer op een bepaald tijdstip, dat wij thans als nulpunt van t zullen kiezen, de grootheid φ als functie van de coördinaten gegeven is.

Beperken we ons tot platte golven, waarbij in vlakken loodrecht op de voortplantingsrichting die toestand in alle punten dezelfde is, zoodat alles door één coördinaat x bepaald wordt.

Wij moeten nu trachten voor φ eene zoodanige som van uitdrukkingen zooals in (1) te vinden, dat voor $t = 0$, φ voor elke x de daarbij gegeven waarde heeft. Daartoe kunnen we ons bedienen van het theorema van Fourier.

Brengen we in de eerste plaats (1) in de gedaante:

$$\varphi = A_p \text{Cos} \left\{ p \frac{\pi}{x_0} (x - V_p t) + a_p \right\} \quad (1')$$

't geen alleen eene verandering in notatie is. In plaats van λ is $\frac{2x_0}{p}$ geschreven, waarbij x_0 als eene bepaalde lengte gedacht wordt wier beteekenis weldra zal duidelijk worden; voor V_λ is V_p gezet en bij A en a is ook de index p toegevoegd.

Beschouwen we nu:

$$\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left\{ p \frac{\pi}{x_0} (x - V_p t) + a_p \right\} \quad (2)$$

Voor $t = 0$ gaat dit, als we de bijbehorende waarde van φ door φ_0 aanwijzen, over in:

$$\varphi_0 = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left(p \frac{\pi}{x_0} x + \alpha_p \right) \quad (3)$$

We kunnen nu volgens het theorema van Fourier de grootheden A_p en α_p zoo kiezen, dat, voor alle waarden van x tusschen $-x_0$ en $+x_0$, φ_0 overeenkomt met de gegeven functie van x .

De grootheid x_0 kunnen we willekeurig kiezen. Nemen we ze oneindig groot dan komt in plaats van de reeks (3) eene integraal van Fourier. Zonder daartoe over te gaan zullen we x_0 toch zeer groot denken om eene straks nader aan te geven reden. De vergelijking (2) zal dan op ieder tijdstip den toestand voorstellen voor waarden van x tusschen bepaalde grenzen en wel zullen voor kleine waarden van t deze grenzen weinig van $-x_0$ en $+x_0$ verschillen (zie pag. 9).

Letten we nu op het geval dat de gegeven functie φ_0 slechts van nul verschillende waarden heeft in een bepaald interval van x_1 tot x_2 ($x_2 > x_1$), dat we ons in vergelijking met $2x_0$ zeer klein zullen voorstellen. De termen der som (3) geven dan voor waarden van x buiten het interval van x_1 tot x_2 te zamen nul. Maar tenzij voor een bijzonderen vorm der functie V_p zal in de som (2) als t eene, — zij het ook nog zoo weinig — van nul verschillende waarde heeft, dit niet het geval zijn. We zouden dus vinden, dat eene aanvankelijk tot een eindig gebied beperkte evenwichtsverstoring, onmiddellijk nadat er van voortplanting sprake kan zijn, haar invloed doet gelden ook op zeer grooten afstand van haar oorspronkelijk gebied.

Dit is zeer verschillend van onze gewone voorstelling omtrent voortplanting en in elk geval is iets van dien aard nooit waargenomen. Bovendien moet in de electromagnetische theorie deze uitkomst op theoretische gronden verworpen worden.

De vreemde uitkomst waartoe bovenstaande beschouwing

leidt, wordt alleen vermeden, wanneer we voor V_p eene geschikte functie van p vinden. Dit geeft dus eene voorwaarde, waaraan die functie moet voldoen en we staan voor de vraag, of onze theorie voor V_p eene zoodanige functie oplevert en zoo niet of ergens eene onjuistheid in de redeneeringen schuilt, waardoor de tegenspraak kan verklaard worden.

In de toepassing van het theorema van Fourier kan deze niet liggen. We kunnen stellig aannemen, dat de functie q_0 voldoet aan de eischen, waardoor ze volgens bekende mathematische beschouwingen, in eene reeks van Fourier kan ontwikkeld worden.

§ 2. *Inhoudsoverzicht van dit proefschrift.*

In 't volgende is een enkel voorbeeld behandeld van de bewerking met de reeks van Fourier, vooreerst in het eenvoudiger geval van den vrijen aether, waar zich de bedoelde moeilijkheid niet voordoet en vervolgens ook bij een dispergeerend medium. Wel zullen we daarbij zien, dat het vraagstuk iets ingewikkelder is, dan het boven werd voorgesteld, daar er in het algemeen twee golven ontstaan, die zich in tegen-gestelde richtingen voortplanten, maar de zaak zelf blijft daardoor toch dezelfde.

Wij moeten ons dus wenden tot het onderzoek der functie V_p .

Zoo ben ik er toe gekomen de theorie, die ons eene uitdrukking voor V_p geeft na te gaan en weer te geven en daardoor heeft dit proefschrift een andere gedaante gekregen, dan in het oorspronkelijk plan lag en is de behandeling der quaestie van de vorige paragraaf eenigszins op den achtergrond geraakt.

Volledigheidshalve heb ik vooreerst een kort overzicht gegeven van de interessante oudere dispersietheorieën van Cauchy en Helmholtz.

De voordeelen der nieuwe theorie liggen niet in hoofdzaak op het gebied der dispersie. Ik meende daarom een systematisch overzicht van de bezwaren, waartoe de mechanische theorieën aanleiding geven, achterwege te kunnen laten. Toch komen in het volgende verschillende punten ter sprake, waar de electromagnetische theorie een natuurlijker verklaring kan geven dan de mechanische theorieën; in 't bijzonder geldt dit voor de in Hoofdstuk VII gegeven theorie der dispersieverschijnselen in kristallen.

Op het overzicht der theorieën van Cauchy en Helmholtz, dat dus hoofdzakelijk als historiesch beschouwd moet worden, heb ik de verklaring der dispersie volgens de electronentheorie doen volgen, na eerst nog het grondidee der electromagnetische licht-theorie te hebben aangegeven in het hoofdstuk over de lichtvoortplanting in den vrijen aether. Hoewel het er mij vooral om te doen was de uitdrukking voor de voorplantings-snelheid te vinden, heb ik ook andere omstandigheden, die zich bij de lichtuitbreiding voordoen, nagegaan en in 't bijzonder aangegeven, hoe het met de verdeeling der energie gesteld is zoowel in het geval van den vrijen aether als voor dat van een dispergeerend medium.

Verder zijn eenige experimenteele gegevens vermeld en vergeleken met de uitkomst der theorie.

Daarna is aangetoond, dat de electronen-theorie ook geschikt is om eene verklaring te geven van de dispersie-verschijnselen in kristallen.

Eindelijk ben ik teruggekomen op de quaestie, die in het begin dezer inleiding werd uiteengezet, waartoe ik een fictief medium beschouwd heb, dat tot dezelfde quaestie aanleiding geeft, maar voor de mathematische behandeling eenvoudiger is.

Aan de beschouwing van dit medium heb ik nog eenige opmerkingen vastgeknoopt in 't bijzonder over de theorie van Lippmanns kleurenphotographie. Deze heb ik als aanhangsel toegevoegd.

§ 3. *Opmerking over den aether in de verschillende theorieën.*

Eenige algemeene opmerkingen over de theorie der lichtvoortplanting in disperseerende media kunnen hier nog eene plaats vinden. Vooreerst wil ik even een verschil aanstippen tusschen de oudere en de nieuwe theorie. In beide wordt over aether gesproken, maar deze speelt in de electro-magnetische theorie een eenigszins andere rol dan in de mechanische theorieën. In de eerste hebben we ons den aether te denken, zooals Drude het uitdrukt „lediglich” als „den mit gewissen physikalischen Eigenschaften ausgestatteten Raum.” De bedoelde eigenschappen worden uitgedrukt door de z.g. vergelijkingen van Maxwell, die wij als uit de waarnemingen afgeleid kunnen vooropstellen. Bijzondere hypothesen omtrent den aard van den vrijen aether hebben zich slechts ten doel te stellen deze vergelijkingen te verklaren, voeren ze tot andere resultaten, dan moeten ze verworpen worden. In de mechanische theorieën gaat men juist omgekeerd te werk; daar gaat men uit van bijzondere hypothesen omtrent den als eene stof gedachten aether en tracht daaruit de verschijnselen af te leiden.

§ 4. *Over de grenzen, tusschen welke eene oplossing met behulp der reeks van Fourier geldt.*

Op blz. 3 werd reeds opgemerkt, dat de reeks van Fourier eene oplossing geeft, die slechts tusschen zekere grenzen den waren toestand voorstelt. Dit zullen we thans nader onderzoeken. Nemen we daartoe vooreerst het geval van den vrijen aether. Hierbij is de voortplantingssnelheid onafhankelijk van de golflengte, we zullen ze door c voorstellen.

Een enkelvoudige golf, die zich in de richting der positieve X-as voortplant, wordt dan voorgesteld door

$$\varphi = A_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p (x - ct) + a_p \right\}$$

waarbij de beteekenis der letters geheel analoog is aan die in (1').

De formule

$$\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p (x - ct) + a_p \right\} \quad (5)$$

zal nu een samengestelde golf voorstellen en de grootheden A_p en a_p kunnen zoo gekozen worden, dat deze op een bepaald tijdstip $t = 0$ tusschen de grenzen $-x_0$ en $+x_0$ beantwoordt aan een gegeven begintoestand:

$$\varphi_0 = F(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left(\frac{\pi}{x_0} p x + a_p \right) \quad (6)$$

In dit geval hebben we nu een eenvoudig middel om te onderzoeken tusschen welke grenzen (5) op een willekeurig tijdstip den toestand zal voorstellen, die uit den gegeven begintoestand ontstaat.

Iedere lichttheorie geeft n.l. voor de grootheden φ in den vrijen aether differentiaal-vergelijkingen van den vorm:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2}$$

Van deze vergelijking kunnen we eene algemeene oplossing vinden met behulp van onbepaalde functies. Als we ons blijven beperken tot golven, die zich in de richting der positieve X-as voortplanten, wordt die

$$\varphi = f(x - ct),$$

waarin f eene willekeurige functie voorstelt.

$$\varphi = F(x - ct) \quad (7)$$

zal dus eene oplossing zijn, die aan den gestelden eisch geheel voldoet. Wij hebben dus nu slechts na te gaan tusschen welke grenzen, bij een bepaalde waarde van t , (5) en (7) overeenkomen, als bekend is dat aan (6) voldaan is voor alle waarden van x tusschen $-x_0$ en $+x_0$. Men ziet onmiddellijk dat dit het

geval is als $x - ct$ ligt tusschen $-x_0$ en $+x_0$, dus voor waarden van x tusschen $-x_0 + ct$ en $+x_0 + ct$. Wij kunnen dit resultaat ook uitdrukken door te zeggen, dat de grenzen, waartusschen de oplossing (5) geldt, zich met de snelheid c in de voortplantingsrichting verplaatsen.

Bij disperseerende media hebben we met ingewikkelder differentiaal-vergelijkingen te doen. Daarbij kan geen oplossing gegeven worden met behulp van onbepaalde functies, zoodat we geen resultaat vinden waarmee we de oplossing die de reeks van Fourier geeft geschikt kunnen vergelijken. Zelfs moeten we de laatste als nietswaardig beschouwen, zoolang we de mogelijkheid aannemen — die volgens het op blz. (3) gezegde juist uit de toepassing van het theorema van Fourier zou volgen — dat de invloed eener evenwichtsverstoring zich onmiddellijk ook op oneindigen afstand zou doen gelden.

Nemen we echter aan, afziende van de differentiaalvergelijking, dat niets, dat op de lichtwerking invloed heeft, zich voortplant met eene snelheid grooter dan een zekere snelheid, V_1 of kleiner dan een andere, V_2 , dan kunnen we door een kunstgreep bewijzen dat de reeks tusschen bepaalde grenzen den toestand zal voorstellen.

We hebben te onderzoeken, tusschen welke grenzen de vergelijking

$$\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left\{ p \frac{\pi}{x_0} (x - V_p t) + a_p \right\} \quad (2)$$

voor een bepaalde waarde van t den toestand zal voorstellen, die ontstaat, wanneer voor $t = 0$ de toestand bepaald is door

$$\varphi_0 = F(x) \quad (8)$$

en we voor waarden van x tusschen $-x_0$ en $+x_0$ hebben:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left(p \frac{\pi}{x_0} x + a_p \right) \quad (9)$$

Wij zullen ter vergelijking een hulpgeval beschouwen, waarbij de begintoestand gegeven is door

$$\varphi_0 = F_1(x) \quad (8')$$

en voor *alle* waarden van x

$$F_1(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left(p \frac{\pi}{x_0} x + a_p \right) \quad (9')$$

De formule (2) zal ten allen tijde voor alle waarden van (x) den toestand, die in 't laatste geval ontstaat voorstellen. We hebben dus te onderzoeken in welk gebied op een gegeven tijd t de toestand in 't geval waarop (8) en (9) betrekking hebben zal samenvallen met dien in 't geval van (8') en (9').

Nu zal volgens onze onderstelling de toestand op den tijd nul, aan de negatieve zijde van 't vlak bepaald door $x = -x_0$ op den tijd t geen invloed hebben in 't gebied aan de positieve zijde van 't vlak $x = -x_0 + V_1 t$ en de toestand op den tijd nul aan de positieve zijde van 't vlak $x = +x_0$ zal op tijd t geen invloed hebben in 't gebied aan de negatieve zijde van 't vlak $x = x_0 + V_2 t$

Zoolang dus $x_0 + V_2 t > -x_0 + V_1 t$ zal op den tijd t de toestand tusschen de vlakken $-x_0 + V_1 t$ en $x_0 + V_2 t$ geheel bepaald worden door dien welke op den tijd nul zich bevindt tusschen de vlakken $x = -x_0$ en $x = +x_0$ en dus in beide te vergelijken gevallen dezelfde zijn.

Hiermede is bewezen, dat bij de aangenomen onderstelling de grenzen, waartusschen de oplossing (2) den waren toestand voorstelt op den tijd t zijn $-x_0 + V_1 t$ en $+x_0 + V_2 t$.

Wij hebben aan die oplossing dus niets meer zoodra $(V_1 - V_2) t \geq 2x_0$. Daarom is het van belang x_0 zeer groot te kiezen, bij voorkeur zoo, dat we gedurende den tijd, dien we beschouwen op den toestand aan de uiteinden van het geldigheidsgebied der oplossing niet behoeven te letten.

§ 5. *Groepsnelheid.*

Hoewel nu in een disperseerend medium voor een willekeurige golf geen sprake kan zijn van eene voortplantingsnelheid, zooals die in den vrijen aether bestaat, verdient ééne omstandigheid nog opmerking.

Beschouwen we vooreerst 't geval van twee gelijktijdig bestaande golfstelsels met weinig verschillende frequenties. Wij kunnen niet direct waarnemen de veranderingen in tijden van de orde van grootte van den trillingstijd — als we ten minste met lichtgolven te doen hebben —, maar de twee golven vertoonen in een bepaald punt op ieder tijdstip een bepaald phaseverschil, dat langzaam verandert, het gevolg daarvan namelijk verandering in lichtintensiteit kunnen we gemakkelijk waarnemen en deze zal zich in een punt een eind in de voortplantingsrichting verschoven na een bepaalden tijd herhalen. We vinden dus dat hierbij een zekere verdeeling der lichtintensiteit zich met eene bepaalde snelheid voortplant. De volgende berekening zal dit nader toelichten en eene waarde voor deze voortplantingssnelheid opleveren.

Zijn de golven voorgesteld door

$$\varphi_1 = A_1 \text{ Cos } \left\{ p_1 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_1} t) + a_1 \right\}$$

$$\varphi_2 = A_2 \text{ Cos } \left\{ p_2 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_2} t) + a_2 \right\}$$

dan kunnen we voor de samengestelde golf schrijven:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = A_1 \text{ Cos } \left\{ p_1 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_1} t) + a_1 \right\} +$$

$$A_2 \text{ Cos } \left\{ p_2 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_2} t) + a_2 \right\}$$

of als we $A_1 = A \cos \beta_1$, $A_2 = A \cos \beta_2$ noemen, waarbij we β_1 of β_2 nog willekeurig kunnen kiezen,

$$\varphi = \frac{1}{2} A \left[\cos \left\{ p_1 \frac{\pi}{x_0} (x - v_{p_1} t) + a_1 + \beta_1 \right\} + \right. \\ \left. \cos \left\{ p_1 \frac{\pi}{x_0} (x - v_{p_1} t) + a_1 - \beta_1 \right\} + \cos \left\{ p_2 \frac{\pi}{x_0} (x - v_{p_2} t) + a_2 + \beta_2 \right\} + \right. \\ \left. \cos \left\{ p_2 \frac{\pi}{x_0} (x - v_{p_2} t) + a_2 - \beta_2 \right\} \right]$$

dus

$$\varphi = A \cos \left\{ \frac{\pi}{2x_0} \left[(p_1 + p_2) x - (p_1 v_{p_1} + p_2 v_{p_2}) t \right] + \gamma \right\} \\ \cos \left\{ \frac{\pi}{2x_0} \left[(p_1 - p_2) x - (p_1 v_{p_1} - p_2 v_{p_2}) t \right] + \gamma' \right\} \\ + A \cos \left\{ \frac{\pi}{2x_0} \left[(p_1 + p_2) x - (p_1 v_{p_1} + p_2 v_{p_2}) t \right] + \delta \right\} \\ \cos \left\{ \frac{\pi}{2x_0} \left[(p_1 - p_2) x - (p_1 v_{p_1} - p_2 v_{p_2}) t \right] + \delta' \right\}$$

waarbij

$$\gamma = a_1 + a_2 + \beta_1 + \beta_2 \quad \gamma' = a_1 - a_2 + \beta_1 - \beta_2$$

$$\delta = a_1 + a_2 - \beta_1 - \beta_2 \quad \delta' = a_1 - a_2 - \beta_1 + \beta_2$$

De veranderingen in de grootheid φ , zooals die door de eerste factoren der beide termen worden voorgesteld kan ons oog niet volgen. We nemen dus slechts de langzame veranderingen in intensiteit waar. De intensiteit op een bepaald tijdstip is evenredig met de middelwaarde van φ^2 over een tijd waarin het bedoelde tijdstip ligt, die vele malen de periode der

eerste factoren $\frac{4 x_0}{p_1 V_{p_1} + p_2 V_{p_2}}$ bevat, maar toch nog zoo klein is, dat de tweede factoren niet merkbaar veranderen. Wij hebben dus bij 't berekenen dezer middelwaarden de laatste factoren als constante coëfficiënten te behandelen, wat de eerste betreft, zullen we, daar de tijd waarover we middelen vele trillingstijden bevat, tot uikomst vinden de middelwaarde over een trillingstijd, hieruit volgt dat ze onafhankelijk van x is. Zoo vinden we als we de bedoelde intensiteit I noemen:

$$I = B \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2x_0} [(p_1 - p_2)x - (p_1 V_{p_1} - p_2 V_{p_2})t] + \gamma' \right\} + \\ B \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2x_0} [(p_1 - p_2)x - (p_1 V_{p_1} - p_2 V_{p_2})t] + \delta' \right\}$$

waarbij B eene constante is evenredig met A^2 , en wel zullen we de eenheid van intensiteit zoo kiezen, dat $B = A^2$ is.

Wij nemen dus een periodieke toestand waar, die zich voortplant met eene snelheid

$$U = \frac{p_1 V_{p_1} - p_2 V_{p_2}}{p_1 - p_2}$$

Noemen we $p_1 - p_2 = \Delta p$ dan is

$$p_1 V_{p_1} - p_2 V_{p_2} = \Delta p \frac{d p V_p}{d p} + \frac{1}{2} (\Delta p)^2 \frac{d^2 p V_p}{d p^2} + \dots$$

Wanneer we nu het geval van abnormale dispersie buiten beschouwing laten en als we ook niet met metalen te doen hebben, dan is V_p slechts weinig met p veranderlijk. Als voorbeeld diene het volgende tafeltje, waarin eenige der uitkomsten van de metingen van Sarasin ¹⁾ over de brekingsindices van vloeispaat worden gegeven.

¹⁾ Arch. d. Sc.-phys. Genève 10 p. 300. (1883.)

Spectraallijn	golflengte in lucht	brekingsindex
A	760,40 $\mu\mu$	1,430101
B	686,71 "	1,431997
C	656,78 "	1,432571
D	589,20 "	1,433937
F	486,07 "	1,437051
H	396,81 "	1,442137

Waaruit we berekenen, de c.M. als eenheid nemende

A	$p = 2 x_o . 18807$	$p V_p = 2 x_o c . 13151$	
B	$p = 2 x_o . 20853$	$p V_p = 2 x_o c . 14562$	$\frac{\Delta p V_p}{\Delta p} = + 0,689 c.$
C	$p = 2 x_o . 21831$	$p V_p = 2 x_o c . 15240$	$\frac{\Delta p V_p}{\Delta p} = + 0,692 c.$
D	$p = 2 x_o . 24336$	$p V_p = 2 x_o c . 16972$	$\frac{\Delta p V_p}{\Delta p} = + 0,691 c.$
F	$p = 2 x_o . 29565$	$p V_p = 2 x_o c . 20573$	$\frac{\Delta p V_p}{\Delta p} = + 0,689 c.$
H	$p = 2 x_o . 36343$	$p V_p = 2 x_o c . 25201$	$\frac{\Delta p V_p}{\Delta p} = + 0,683 c.$

als c weer de voortplantings-snelheid van het licht in den vrijen aether voorstelt.

In dergelijke gevallen kunnen we de termen met $\frac{d^2 p V_p}{d p^2}$ en de hoogere differentiaalquotienten verwaarloozen als Δp niet te groot is. We vinden dan:

$$U = \frac{d p V_p}{d p} = V_p + p \frac{d V_p}{d p}$$

We kunnen deze formule nog in een eenigzins anderen vorm brengen, door in te voeren:

$$2 x_0 \frac{1}{p} = \lambda \quad \text{de golflengte in het medium}$$

$$\frac{\pi}{x_0} p V_p = \kappa \quad \text{de frequentie}$$

$$2 x_0 \frac{1}{p V_p} = T \quad \text{de trillingstijd,}$$

waardoor we vinden: $U = V_p + \kappa \frac{d V_\kappa}{d \kappa}$ (11)

of ook:
$$= \frac{d \frac{1}{T}}{d \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} - \lambda \frac{d \frac{\lambda}{T}}{d \lambda}$$
 (12)

In (11) is de voortplantingssnelheid, behoorend bij de frequentie κ , V_κ genoemd, dit is dus hetzelfde wat tot nog toe V_p genoemd werd. Uit de formule blijkt in verband met de waarnemingen, dat U in 't algemeen kleiner is dan V_p .

Beschouwen we nu een willekeurige golf, binnen zekere grenzen voorgesteld door:

$$\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \text{Cos} \left\{ p \frac{\pi}{x_0} (x - V_p t) + a_p \right\}$$

Kiezen we een bepaalde $p = p_0$ uit, dan kunnen we hiervoor ook stellen:

$$\varphi = \text{Cos} \left\{ p_0 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_0} t) + a_{p_0} \right\}$$

$$\Sigma A_p \text{Cos} \left\{ (p - p_0) \frac{\pi}{x_0} x - (p V_p - p_0 V_{p_0}) \frac{\pi}{x_0} t + \beta_p \right\}$$

$$- \text{Sin} \left\{ p_0 \frac{\pi}{x_0} (x - V_{p_0} t) + a_{p_0} \right\}$$

$$\Sigma A_p \text{Sin} \left\{ (p - p_0) \frac{\pi}{x_0} x - (p V_p - p_0 V_{p_0}) \frac{\pi}{x_0} t + \beta_p \right\}$$

Noemen we nu weer: $\frac{p V_p - p_o V_{p_o}}{p - p_o} = U$, dan is U

eene functie van p , die echter als constant beschouwd kan worden zoolang de waarden van p , die in de reeks te pas komen in termen met merkbare waarde, slechts weinig uiteen loopen. We vinden dan:

$$\begin{aligned} \varphi = & \text{Cos} \left\{ p_o \frac{\pi}{x_o} (x - V_{p_o} t) + \alpha_{p_o} \right\} \\ & \Sigma A_p \text{Cos} \left\{ (p - p_o) \frac{\pi}{x_o} (x - U t) + \beta_p \right\} \\ - & \text{Sin} \left\{ p_o \frac{\pi}{x_o} (x - V_{p_o} t) + \alpha_{p_o} \right\} \\ & \Sigma A_p \text{Sin} \left\{ (p - p_o) \frac{\pi}{x_o} (x - U t) + \beta_p \right\} \end{aligned}$$

Noemen we verder:

$$\Sigma A_p \text{Cos} \left\{ (p - p_o) \frac{\pi}{x_o} (x - U t) + \beta_p \right\} = F_1 (x - U t)$$

$$\Sigma A_p \text{Sin} \left\{ (p - p_o) \frac{\pi}{x_o} (x - U t) + \beta_p \right\} = F_2 (x - U t)$$

en nemen we bovendien aan dat F_1 en F_2 functies zijn die in een tijd $\frac{2 x_o}{p_1 V_{p_o}}$, dus voor veranderingen van 't argument van de orde van grootte van $\frac{x_o}{p}$, niet merkbaar veranderen, — 't geen weer hierop neerkomt, dat de coëfficiënten van termen in (2), waarbij $\frac{p - p_o}{x_o} U$ groot is, slechts onmerkbare waarden hebben — dan kunnen we op dezelfde wijze redeneeren, als voor 't geval van twee golven. Wij vinden dan:

$$I = B \{ [F_1 (x - U t)]^2 + [F_2 (x - U t)]^2 \},$$

waarbij $B = \frac{x_0}{2 p_0 V_{p_0}}$ Het is gemakkelijk te doen zien, dat deze beschouwingen, steeds van toepassing zijn bij proeven als die van Fizeau met het getande rad.

Wij vinden dus ook hier de voortplantingssnelheid

$$U = \frac{d(p V_p)}{d p} = V_p + p \frac{d V_p}{d p} \quad (10)$$

De grootheid U wordt groepsnelheid genoemd. V_p heet dan golfsnelheid.

Op het verschil tusschen golfsnelheid en groepsnelheid is het eerst gewezen door Rayleigh. ¹⁾ Gouy heeft onderzocht, hoe men de formule kan interpreteren als de term met $\frac{d^2 p V_p}{d p^2}$ niet verwaarloosd wordt. ²⁾ Wij zullen in 't vervolg met de grootheid U niet te doen hebben daar we ons slechts voorstellen de functie V_p uit de theorie te vinden.

¹⁾ vgl. b v. Theory of Sound. I, § 191.

²⁾ Journal de Liouville 1882.

HOOFDSTUK I.

Oudere dispersietheorieën.

§ 1. *Theorie van Cauchy.*

Dat de voortplantingssnelheid van het licht in ponderabele stoffen afhankelijk is van de golflengte, trof de grondleggers der undulatietheorie als een verschil tusschen de eigenschappen der geluidsvoortplanting en die der lichtvoortplanting. In dezen geest trachtte Fresnel dan ook eene verklaring der dispersie te vinden, door op te merken, dat bij het geluid de golflengte steeds zeer groot is in vergelijking met de onderlinge afstanden der moleculen, terwijl men niet behoeft aan te nemen dat de golflengte van het licht zoo groot is in vergelijking met de onderlinge afstanden der aetherdeeltjes.

De dispersietheorie van Cauchy kan als eene uitwerking van dit denkbeeld beschouwd worden. Cauchy neemt een aether aan, bestaande uit afzonderlijke moleculen, die op elkaar krachten uitoefenen gericht volgens hunne verbindingslijnen, evenredig met hunne massa's en wier grootte eene functie is van den onderlingen afstand. Den aether in een vacuum beschouwt hij als homogeen, evenzoo den aether in eene homogene ponderabele stof. (Zijne beschouwingen over de constitutie van den aether in kristallen zullen we buiten bespreking laten).

In den vrijen aether bestaat geen dispersie. Dit blijkt o. a. daaruit, dat de verduisteringen der satellieten van Jupiter en

de schaduwen die deze op de planeet werpen, van uit de aarde kunnen worden waargenomen, zonder vergezeld te gaan van kleurverschijnselen en nog sterker uit het uitblijven van deze verschijnselen bij de wisselingen in helderheid van veranderlijke sterren zooals Algol. Om de afwezigheid van dispersie in de ledige ruimte te verklaren moest Cauchy aannemen, dat daar de werkingssferen der aethermoleculen zeer veel kleiner zijn dan in ponderabele stoffen.

Wij zullen nu nagaan, hoe met behulp van deze onderstellingen eene lichttheorie kan opgebouwd worden en hoe deze voor de voortplantingssnelheid werkelijk eene uitdrukking geeft, die afhangt van de golflengte.

Als lichtvector beschouwen we hierbij de uitwijking van een aetherdeeltje uit zijn evenwichtsstand. Wij kunnen hierbij opmerken dat deze lichtvector dus niet in alle punten bestaat. Zijn de onderlinge afstanden der aetherdeeltjes echter zeer klein, dan kunnen we hem wel als eene vloeiende functie der coördinaten beschouwen.

We nemen nog aan dat deze uitwijkingen der aetherdeeltjes uit den evenwichtsstand steeds zeer klein zijn, klein in vergelijking met de onderlinge afstanden der deeltjes.

Laat nu x, y, z de coördinaten van een aetherdeeltje in zijn evenwichtsstand zijn, m zijne massa. Verder $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ en μ de overeenkomstige grootheden voor een naburig deeltje en r de onderlinge afstand dezer deeltjes. De kracht tusschen beide zullen we voorstellen door $m \mu f(r)$. De evenwichtsvoorwaarden voor het eerste deeltje zijn dan:

$$\sum \mu f(r) \frac{\Delta x}{r} = 0, \sum \mu f(r) \frac{\Delta y}{r} = 0, \sum \mu f(r) \frac{\Delta z}{r} = 0, \quad (1)$$

waarbij de sommaties moeten worden uitgestrekt over al de naburige deeltjes, die hun invloed op het deeltje m doen gelden.

Zijn de componenten der uitwijking uit den evenwichtsstand voor het eerste deeltje ξ, η, ζ en voor het tweede $\xi + \Delta \xi$ enz.,

zij de daarbij behorende onderlinge afstand $r + \varrho$, dan worden de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \Sigma \mu f(r + \varrho) \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \varrho}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu f(r + \varrho) \frac{\Delta y + \Delta \eta}{r + \varrho}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu f(r + \varrho) \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \varrho}.\end{aligned}\quad (2)$$

Ontwikkelen we nu $f(r + \varrho)$ in eene reeks van Taylor en verwaarloozen we in de tweede leden der vergelijkingen (2) de termen, die tweede en hoogere machten van $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, $\Delta \zeta$ en ϱ bevatten, (overeenkomstig onze onderstelling) dan vinden we:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Sigma \mu \left\{ f(r) \frac{\Delta \xi}{r} + \left(f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right) \varrho \frac{\Delta x}{r} \right\}$$

enz.

Noemen we:

$$\frac{f(r)}{r} = \varphi,$$

$$f'(r) - \frac{f(r)}{r} = \psi,$$

en substitueeren we:

$$\varrho = \frac{\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta}{r},$$

dan komt er:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \left(\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2} \right) \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \Delta \eta + \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \Delta \zeta \right\}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \left(\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2} \right) \Delta \eta + \varphi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \Delta \zeta \right\}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \Delta \eta + \left(\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) \Delta \zeta \right\}.\end{aligned}\quad (3)$$

Wanneer we nu ξ enz. als functies der coördinaten beschouwen, dan kunnen we $\xi + \Delta \xi$ enz. weer in reeksen van Taylor ontwikkelen, waardoor we b.v. vinden:

$$\begin{aligned} \Delta \xi = & \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \Delta z^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z + \\ & \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial x} \Delta z \Delta x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots \end{aligned}$$

Als de krachten tusschen de deeltjes alleen op zeer kleine afstanden werken, zullen alleen zeer kleine waarden van Δx , Δy , Δz in aanmerking komen en voor deze kunnen we aannemen dat de reeksontwikkelingen convergent zijn. Wij zullen nu deze reeksontwikkelingen in (3) gaan substitueeren, maar daarbij de onderstelling invoeren, dat we met een homogeen isotroop medium te doen hebben.

In dit geval vinden we bij ieder deeltje met coördinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, een dergelijk deeltje met coördinaten $x - \Delta x$, $y - \Delta y$, $z - \Delta z$. Voor twee zulke deeltjes zijn φ en ψ gelijk. Hieruit blijkt dat bij de sommatie alle termen die Δx , Δy of Δz in oneven macht bevatten wegvallen. De overblijvende termen bevatten differentiaalquotienten van even orde van ξ η ζ naar x y of z . De coëfficiënten dezer termen hangen alleen van de constitutie van het medium af.

In den vrijen aether zouden we aannemen, dat de afstanden waarop de aetherdeeltjes op elkaar werken nog veel kleiner zijn, zoodat we in de ontwikkeling ook alle termen van hooger orde dan de tweede kunnen weglaten.

Beschouwen we nu de voortplanting van een systeem platte golven met transversale trillingen. We kunnen zonder de algemeenheid te kort te doen de X-as loodrecht op het golf-front plaatsen. ξ is dan steeds nul en η en ζ zijn onafhankelijk

van y en z . De vergelijkingen (3) laten zich voor dit geval herleiden tot:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + C \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} + \dots \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + C \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^6} + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

terwijl we in 't geval van den vrijen aether moeten stellen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Uit den vorm dezer vergelijkingen blijkt dat we in beide gevallen den bedoelden toestand steeds kunnen verkrijgen door superpositie van twee eenvoudiger toestanden. Bij de eene daarvan is η overal nul, bij de andere ζ . Wij hebben slechts op één van beide onze aandacht te vestigen, daar al onze beschouwingen ook voor de andere doorgaan. Kiezen we de laatste. De algemeene oplossing van de eerste der vergelijkingen (5) — die op dit geval betrekking heeft — is:

$$\eta = F_1 (x - \sqrt{A} t) + F_2 (x + \sqrt{A} t),$$

waarin F_1 en F_2 willekeurige functies voorstellen. De bijzondere oplossing, die op enkelvoudige golven betrekking heeft is:

$$\eta = A \text{Cos} \{p(x - \sqrt{A} t) + a\} + B \text{Cos} \{p(x + \sqrt{A} t) + \beta\}.$$

We hebben steeds eene voortplanting met bepaalde eindige voortplantingssnelheid \sqrt{A} , zoodat de verschijnselen, die in eenig punt optreden, zich volkomen herhalen in ieder punt in de voortplantingsrichting gelegen, na een tijd, die voor ieder punt geheel bepaald is. We zullen in het vervolg de voortplantingssnelheid van het licht in den vrijen aether steeds door c voorstellen.

Overeenkomstig hetgeen reeds in de inleiding werd opge-

merkt kunnen we van de vergelijkingen (4) geen algemeene oplossing met onbepaalde functies geven. De bijzondere oplossing die betrekking heeft op enkelvoudige golven, die zich in éene richting voortplanten, is:

$$\eta = A \text{ Cos } \{ p (x - V_p t) + a \},$$

waarbij A en a willekeurig zijn, terwijl tusschen p en V_p de betrekking bestaat:

$$V_p^2 = A - B p^2 + C p^4 + \dots \quad (6)$$

Deze formule geeft dus het verband tusschen de voortplantingssnelheid en de golflengte. Om ze in een vorm te brengen die gemakkelijk met experimenten te vergelijken is, leiden we er vooreerst uit af:

$$V_p = A_1 + B_1 p^2 + C_1 p^4 + \dots$$

en verder zullen we invoeren den brekingsindex $n = \frac{c}{V_p}$ en de golflengte die de beschouwde golven in den vrijen aether zouden hebben $\lambda = \frac{2 \pi c}{p}$, waardoor we vinden:

$$n = a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \dots \quad (7)$$

Deze dispersieformulie van Cauchy wordt in de meeste gevallen door de experimenten goed bevestigd.

In het voorgaande is echter *aangenomen*, dat een toestand met platte golven, waarbij de richting der uitwijkingen van de aetherdeeltjes in 't golffront ligt, mogelijk is bij de *gemaakte* onderstellingen.

Wij moeten nu onderzoeken of dit werkelijk het geval is. Daartoe keeren we terug tot de algemeene vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \left(\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2} \right) \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \Delta \eta + \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \Delta \zeta \right\}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \left(\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2} \right) \Delta \eta + \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \Delta \zeta \right\}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \Sigma \mu \left\{ \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \Delta \xi + \right. \\ &\quad \left. \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \Delta \eta + \left(\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) \Delta \zeta \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

en zullen nu onderzoeken, of daaraan voldaan wordt als de uitwijking van een deeltje wordt bepaald door de formule:

$$\varepsilon = \delta \text{ Sin } p (R - V_p t),$$

waarbij R den afstand voorstelt van 't golffront, dat door het beschouwde deeltje gaat tot een willekeurig te kiezen vlak evenwijdig aan de golffronten. Zijn dan de hoeken, die de richting der uitwijking maakt met de assen, $\alpha \beta \gamma$ dan is:

$$\begin{aligned} \xi &= \delta \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } p (R - V_p t), \\ \eta &= \delta \text{ Cos } \beta \text{ Sin } p (R - V_p t), \\ \zeta &= \delta \text{ Cos } \lambda \text{ Sin } p (R - V_p t), \end{aligned} \quad (8)$$

en volgens de beteekenis van $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, $\Delta \zeta$:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \delta \text{ Cos } \alpha [\text{Sin } p (R - V_p t) (\text{Cos } p \Delta R - 1) + \\ &\quad \text{Cos } p (R - V_p t) \text{ Sin } p \Delta R], \end{aligned} \quad (9)$$

enz.

als ΔR den afstand voorstelt tusschen de golffronten, die door twee naburige moleculen gaan, zoodat als l , m , n , de

hoeken zijn tusschen de normaal op het golffront en de assen,

$$\Delta R = \Delta x \cos l + \Delta y \cos m + \Delta z \cos n.$$

Gaan we nu de uitdrukkingen (9) in (3) substitueeren, dan merken we op, dat bij het sommeeren alle termen, die $\sin p \Delta R$ bevatten, wegvallen, passen we verder telkens de herleiding $\cos p \Delta R - 1 = -2 \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R$ toe, dan vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\cos \alpha \Sigma \mu \left(\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2} \right) \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \beta \Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \gamma \Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R, \end{aligned}$$

Volgens (8) moet nu verder:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= -\cos \alpha \Sigma \eta \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \beta \Sigma \eta \left(\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \gamma \Sigma \mu \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -\cos \alpha \Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \beta \Sigma \mu \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R \\ &\quad - \cos \gamma \Sigma \mu \left(\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) \sin^2 \frac{p}{2} \Delta R. \end{aligned}$$

Volgens (8) moet nu verder:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -p^2 V_p^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= -p^2 V_p^2 \eta, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -p^2 V_p^2 \zeta, \end{aligned}$$

en dus:

$$\frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}{\text{Cos } a} = \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}{\text{Cos } \beta} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}}{\text{Cos } \gamma}.$$

Noemen we elk dezer verhoudingen 2ν en verder:

$$\begin{aligned} \Sigma \mu \left(\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2} \right) \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= a_{11}, \\ \Sigma \mu \left(\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2} \right) \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= a_{22}, \\ \Sigma \mu \left(\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= a_{33}, \\ \Sigma \mu \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= 2a_{23}, \\ \Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= 2a_{13}, \\ \Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \text{Sin}^2 \frac{p}{2} \Delta R &= 2a_{12}, \end{aligned} \tag{10}$$

dan hangen de coëfficiënten a_{11} enz. af van $l m n$ en bovendien van p , evenals ν . Maar zij zijn onafhankelijk van $a \beta \gamma$.

Het is nu de vraag of er waarden van $a \beta \gamma$ kunnen gevonden worden, zoodat voldaan is aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \nu \text{Cos } a &= a_{11} \text{Cos } a + a_{12} \text{Cos } \beta + a_{13} \text{Cos } \gamma, \\ \nu \text{Cos } \beta &= a_{12} \text{Cos } a + a_{22} \text{Cos } \beta + a_{23} \text{Cos } \gamma, \\ \nu \text{Cos } \gamma &= a_{13} \text{Cos } a + a_{23} \text{Cos } \beta + a_{33} \text{Cos } \gamma. \end{aligned}$$

Zooals bekend is, is hieraan voldaan als $a \beta \gamma$ de richtingshoeken zijn van een der assen van het quadratisch oppervlak:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{23} yz + 2a_{13} xz + 2a_{12} xy = 1. \tag{11}$$

Dit oppervlak wordt polarisatieëllipsoïde genoemd.

Blijkens het voorgaande is het voor iedere richting van den lichtstraal en voor iedere waarde van p (m. a. w. voor iedere golflengte) verschillend. Om nu de mogelijkheid van den bedoelden toestand met transversale trillingen te onderzoeken, hebben we slechts na te gaan of de assen der polarisatie-ellipsoïde evenwijdig zullen zijn aan het bijbehorende golf-front.

Daarbij zullen we nu invoeren onze onderstelling, dat we met een isotroop medium te doen hebben. In dat geval kunnen we ons beperken tot het onderzoek voor stralen, die zich in de richting der X-as voortplanten. Wij kunnen dan in de vergelijkingen (10) ΔR door Δx vervangen, zoodat $a_{23} = a_{13} = a_{12} = 0$ wordt. Verder is $a_{22} = a_{33}$.

De vergelijking der polarisatie-ellipsoïde is dus voor dit geval:

$$a_{11} x^2 + a_{22} (y^2 + z^2) = 1.$$

Het oppervlak is dus eene omwentelingsellipsoïde met de X-as tot omwentelings-as. Wij vinden hieruit dat de richting der trillingen kan samenvallen met iedere richting loodrecht op die der voortplanting. Bovendien echter geeft de theorie de mogelijkheid van trillingen in de richting der voortplanting.

Deze longitudinale golven worden nooit waargenomen en men kan ook nooit aanwijzen dat een deel der energie in het medium in dien vorm aanwezig is. Aan den anderen kant geeft de theorie niet alleen dat ze kunnen ontstaan, maar men moet zelfs bij iedere discontinuïteit in het medium, om aan de verschillende voorwaarden te voldoen aannemen, dat ze werkelijk zullen ontstaan. Dit punt is eene der voornaamste moeilijkheden in iedere mechanische lichttheorie.

§ 2. *Theorie van Briot.*

Zooals we gezien hebben moet in Cauchy's theorie 't verschil tusschen den vrijen aether en den aether in isotrope

homogene media alleen daarin gevonden worden, dat bij den vrijen aether de werkingssfeer der deeltjes zeer veel kleiner is dan bij den aether in eene ponderable stof. De afwezigheid van dispersie in de ledige ruimte wordt dan verklaard door dat in dat geval de termen, die op eene dispersie wijzen zeer klein zijn. In deze theorie is dus het verschil tusschen beide gevallen slechts een verschil in graad. In den vrijen aether moet er ook dispersie bestaan maar ze is zoo gering, dat we ze niet kunnen waarnemen.

Dit punt is eene leemte in de theorie van Cauchy. Zijn navolger Briot ¹⁾ trachtte de dispersie te verklaren als gevolg van de aanwezigheid der ponderable moleculen.

Overigens volgde hij in hoofdzaak den zelfden weg als Cauchy. De invloed der moleculen, dien hij vooral beschouwt bestaat namelijk in eene groepeerings der aetherdeeltjes. Zijne berekeningen voeren dan weer tot de dispersieformule (7). Hij heeft echter bovendien den invloed berekend van de krachten die de ponderable moleculen op de aetherdeeltjes gedurende hunne beweging uitoefenen, waardoor eene dispersie formule wordt afgeleid, die zich van de vorige onderscheidt door een term met λ^2 .

Behalve deze laatste wijziging is zijne theorie echter slechts op te vatten als eene nadere uitwerking van Cauchy's denkbeelden. Zij geeft dan ook aanleiding tot dezelfde moeilijkheden.

§ 3. *Theorie van Boussinesq.*

De eerste, die van eene andere onderstelling uitging waarmede men tot eene verklaring der dispersie kan komen was Boussinesq ²⁾.

¹⁾ Essai sur la théorie mathématique de la lumière (1864).

²⁾ Théorie nouvelle des ondes lumineuses. Journal de Liouville 1868.

Daarbij wordt de aether in eene ponderable stof geheel gelijk aangenomen aan den vrijen aether.

Ter verklaring der optische verschijnselen in ponderabele media beschouwt hij dan zekere krachten tusschen de aetherdeeltjes en de moleculen van het medium. Deze krachten zijn in ieder punt geheel bepaald door den toestand van den aether in dat punt — of in eene kleine ruimte daaromheen — en werken in hoofdzaak zoo, dat het aetherdeeltje de ponderabele materie tot op zekere hoogte meeslept in zijne beweging en zelf eene kracht ondervindt, die voldoet aan de wet van actie en reactie.

Uit deze onderstellingen komt Boussinesq ook tot de dispersieformule (7).

Verder geeft hij daarmede eene verklaring van verschillende andere optische verschijnselen, voornamelijk de draaiing van het polarisatievlak en de dubbele breking.

Op hetzelfde beginsel berusten ook de latere dispersie-theorieën van Sellmeier, Helmholtz en Ketteler.

§ 4. *Theorie van Sellmeier.*

Het verschil tusschen de theorie van Boussinesq en die van Sellmeier zit hoofdzakelijk in de onderstellingen omtrent den aard der krachten tusschen de aetherdeeltjes en de moleculen. Bovendien heeft Boussinesq den invloed der krachten tusschen de deeltjes van 't medium onderling als onbeteekenend buiten beschouwing gelaten, terwijl die krachten in de latere theorieën wel beschouwd worden en in sommige gevallen zelfs eene zeer belangrijke rol spelen.

De theorie van Sellmeier ¹⁾ voert tot de belangrijke resul-

¹⁾ Ueber die durch die Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien. Pogg. Annalen. Bnd. 145, 147.

taten, die later door de proeven van Kundt en van Christiansen over de abnormale dispersie eene mooie bevestiging vonden. Volgens deze theorie werken de aetherdeeltjes en die van het medium op elkaar met krachten, gericht volgens de verbindingslijn en alleen afhankelijk van den onderlingen afstand. Bovendien wordt aangenomen, dat op ieder deeltje van het medium eene elastische kracht werkt, en dat onder den invloed dezer kracht het deeltje eene eigen trilling kan uitvoeren. Wanneer nu de periode dezer eigen trilling uiterst weinig verschilt van de periode der aethertrillingen hebben we met abnormale dispersie te doen. Met het oog op dit geval is het ook noodig nog andere krachten aan te nemen, omdat anders de amplitudo der trillingen van de moleculen oneindig groot zou gevonden worden. Deze krachten moeten tevens absorptie veroorzaken.

§ 5. *Theorie van Helmholtz.*

Dit laatste geval heeft Sellmeier wel beredeneerd, maar hij heeft er geene berekeningen over uitgevoerd. Helmholtz's ¹⁾ theorie verschilt van die van Sellmeier, doordat eene eenvoudige hypothese wordt gemaakt over de krachten, die zorgen, dat, wanneer de periode der aethertrillingen samenvalt met die der eigen trillingen der moleculen, deze trillingen toch klein blijven. Wij zullen nu deze theorie in 't kort weergeven.

Beperken we ons weer tot homogene isotrope media. We kunnen dan ook weer behandelen 't geval van platte golven, die zich in de richting der X-as voortplanten. Bovendien zullen we alleen het geval beschouwen van uitwijkingen in de richting der Y-as. Die der aetherdeeltjes zullen we voorstellen door η , die der deeltjes van het medium y .

Wij hebben nu zoowel voor den aether als voor de ponderabele materie de bewegings-vergelijking op te stellen.

¹⁾ Zur Theorie der anomalen Dispersion. Pogg. Ann. Bnd. 154.

Zij de massa der aetherdeeltjes in de volume-eenheid μ . De kracht, die op die deeltjes zou werken als de ponderabele materie niet aanwezig was, kunnen we voorstellen door $a^2 \frac{d^2 \eta}{dx^2}$ en we zullen aannemen, dat de kracht tusschen de aetherdeeltjes en die van het medium in een bepaald volume-element evenredig is met de relatieve uitwijking, zoodat we ze kunnen voorstellen door $\beta^2 (y - \eta)$. De bewegingsvergelijking van den aether in het beschouwde volume-element is dan:

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \beta^2 (y - \eta). \quad (12)$$

Op de ponderabele deeltjes wier massa we per volume-eenheid m zullen noemen, zal vooreerst werken de kracht $-\beta^2 (y - \eta)$, verder eene kracht gericht naar een bepaalden evenwichtsstand en evenredig met de uitwijking uit dien stand, deze kunnen we voorstellen door $-a^2 y$, en eindelijk eene kracht evenredig aan de snelheid en tegengesteld daaraan gericht, die wij voor kunnen stellen door $-\gamma^2 \frac{dy}{dt}$; de laatste is het die de absorptie veroorzaakt en belet dat bij het samen-vallen van de periode der aethertrillingen met die van de eigen trillingen van de materie de amplitudo dezer trillingen oneindig groot wordt. De bewegingsvergelijking van de medetrillende ponderabele stof is dan:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\beta^2 (y - \eta) - a^2 y - \gamma^2 \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (13)$$

Beschouwen we nu de bijzondere oplossing van (12) en (13):

$$\begin{aligned} \eta &= \mathfrak{A} e^{lx - ipt}, \\ y &= A e^{lx - ipt}, \end{aligned} \quad (14)$$

waardoor aan beide vergelijkingen voldaan wordt als:

$$\begin{aligned} [-\mu p^2 - a^2 l^2 + \beta^2] \mathfrak{A} &= \beta^2 A, \\ [-m p^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 i p] A &= \beta^2 \mathfrak{A}. \end{aligned} \quad (15)$$

Wij kunnen uit (14) op eenvoudige wijze eene oplossing afleiden, waaraan we eene physische beteekenis kunnen hechten door van de tweede leden het reële stuk te nemen. Stellen we daartoe:

$$\begin{aligned} l &= -k_p + \frac{i p}{V_p}, \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_1 e^{i \varphi}, \\ A &= A_1 e^{i \psi}, \end{aligned} \quad (16)$$

dan vinden we:

$$\begin{aligned} \eta &= \mathfrak{A}_1 e^{-k_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(\frac{x}{V_p} - t \right) + \varphi \right\}, \\ y &= A_1 e^{-k_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(\frac{x}{V_p} - t \right) + \psi \right\}. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen stellen trillingen voor, waarbij de amplitudo afneemt in de richting der voortplanting, die dus bij de voortplanting absorptie ondergaan.

De grootheid k_p wordt absorptiecoëfficiënt genoemd, het is de logarithme der verhouding van de amplitudines op twee plaatsen, die eene lengteëenheid in de richting der voortplanting uiteen liggen. V_p is de voortplantingssnelheid.

Om deze beide grootheden in de coëfficiënten der differentiaalvergelijkingen uit te drukken, hebben we slechts \mathfrak{A} en A

uit de vergelijkingen (15) te elimineeren en onder toepassing van (16) de reële en en imaginaire stukken te scheiden.

Wij vinden:

$$[-\mu p^2 - a^2 l^2 + \beta^2] [-m p^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 i p] = \beta^4,$$

$$\text{en dus } -a^2 l^2 = \frac{\beta^4}{-m p^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 i p} + \mu p^2 - \beta^2.$$

$$\begin{aligned} -a^2 \left(k_p^2 - \frac{p^2}{V_p^2} \right) + 2 a^2 i k_p \frac{p}{V_p} &= -\frac{\beta^4 (m p^2 - a^2 - \beta^2)}{(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2} \\ &+ \mu p^2 - \beta^2 + \frac{\beta^4 \gamma^2 i p}{(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2}. \end{aligned}$$

Noemen we nu:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2} - \frac{\beta^4 (m p^2 - a^2 - \beta^2)}{a^2 p^2 [(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2]} \\ = \frac{1}{V_p^2} - \frac{k_p^2}{p^2} = F, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta^4 \gamma^2}{a^2 p} \frac{1}{(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2} \\ = \frac{2 k_p}{p V_p} = G, \end{aligned}$$

dan komen we tot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_p^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{F^2 + G^2} + \frac{1}{2} F, \\ \frac{k_p^2}{p^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{F^2 + G^2} - \frac{1}{2} F. \end{aligned} \tag{18}$$

Deze formules geven nu de voortplantingssnelheid en den absorptiecoëfficiënt als functie van de frequentie der trillingen.

Merken we vooreerst op, dat, als er geenerlei werking bestaat tusschen de aetherdeeltjes en ponderabele deeltjes,

wat in den vrijen aether zal voorkomen, $\beta = 0$ moet gesteld worden, waardoor $F = \frac{\mu}{a^2}$ en $G = 0$ wordt.

Wij vinden dan:

$$k_p = 0, \quad \frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{a^2}.$$

In den vrijen aether is er dus geen absorptie en de voortplantingssnelheid is onafhankelijk van de frequentie. Het spreekt trouwens van zelf, dat we dit zouden vinden, daar we voor dit geval de bewegingsvergelijking:

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

hebben vooropgesteld en deze stelt eene voortplanting zonder dispersie en zonder absorptie voor.

Wanneer we $\gamma = 0$ stellen, m. a. w. wanneer we de wrijvingskracht buiten beschouwing laten, dan wordt $G = 0$ en dus ook $k = 0$. We hebben dus geen absorptie. Verder vinden we voor dit geval:

$$\frac{1}{V_p^2} = F = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2} - \frac{\beta^4}{a^2 p^2 (m p^2 - a^2 - \beta^2)}.$$

Substitueeren we nu:

$$\frac{4 \pi^2}{p^2} \frac{a^2}{\mu} = \lambda^2 \quad \text{en} \quad \frac{a^2}{\mu} \frac{1}{V_p^2} = n^2,$$

waarbij λ de golflengte der beschouwde trillingen in den vrijen aether voorstelt en n den brekings-index, en noemen we:

$$\frac{\frac{4 \pi^2}{a^2 + \beta^2} \frac{a^2}{\mu}}{m} = \lambda_p^2$$

en verder:

$$\frac{\beta^2}{4 \pi^2 a^2} = P, \quad \frac{\beta^4 \lambda_p^2}{16 \pi^4 \frac{a^4}{\mu} m} = Q,$$

dan komen we tot de dispersie-formule:

$$n^2 = 1 - P \lambda^2 + Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_p^2}. \quad (19)$$

Voor $\lambda = \lambda_p$ gaat deze formule klaarblijkelijk niet meer door. Wanneer echter λ_p veel verschilt van de golflengten bij het gewone spectrum voorkomende, dan kunnen we de formule voor deze laatste toepassen en ze geeft dan uitkomsten die goed met de waarnemingen overeenkomen.

In de meeste gevallen blijkt, dat de coëfficiënten P en Q zeer weinig verschillen. Nemen we ze gelijk aan, dan wordt de formule (19)

$$n^2 = 1 + P \frac{\lambda_p^2}{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda}\right)^2} \quad (20)$$

Wanneer λ_p klein is in vergelijking met de waarden van λ waarvoor we de formule willen toepassen, kunnen we door de breuk in eene reeks te ontwikkelen, deze formule in de dispersieformule van Cauchy doen overgaan. Is daarentegen λ_p groot, dan kunnen we (20) of ook direct (19), herleiden tot eene formule van den vorm:

$$n^2 = a_0 + a_2 \lambda^2 + a_4 \lambda^4. \quad (21)$$

Zooals Helmholtz ook opmerkt, kan men de theorie nog uitbreiden tot het geval dat het medium verschillende soorten medetrillende deeltjes bevat. Dan zou men in plaats van (20) vinden:

$$n^2 = 1 + \Sigma P \frac{\lambda_p^2}{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda}\right)^2} \quad (22)$$

wat in 't algemeen weer aanleiding geeft tot eene dispersie-formule van den vorm:

$$n = \dots a \lambda^2 + a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \dots,$$

die zich van die van Cauchy onderscheidt door den term met λ^2 .

In vele gevallen geeft deze formule de waarnemingen nog beter weer dan die van Cauchy.

Helmholtz zelf beperkt zich tot het onderzoek van 't verloop der grootheden V_p en k_p in de nabijheid van eene absorptiestreep.

De uitdrukking (vgl. 17):

$$\frac{k_p}{V_p} = \frac{p}{2} G = \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 a^2} \frac{1}{(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2}$$

kunnen we in een anderen vorm brengen door te stellen:

$$p^2 = \frac{a^2 + \beta^2}{m} - \frac{\gamma^4}{2 m^2}, \quad q^2 = \frac{\gamma^4}{4 m^2}. \quad (23)$$

Wij vinden dan:

$$\frac{k_p}{V_p} = \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 a^2 m^2} \frac{1}{(p^2 - p^2)^2 + 4 (p^2 + q^2) q^2}. \quad (24)$$

Hieruit blijkt dat $\frac{k_p}{V_p}$ 't grootst is als $p = p$. Deze grootheid stelt dus de frequentie voor der trillingen, die 't meest geabsorbeerd worden bij voortplanting over een bepaald aantal golflengten. Als de brekings-index niet te zeer varieert zullen we ook kunnen zeggen, dat deze trillingen 't meest geabsorbeerd worden bij de voortplanting over een bepaalden afstand. Noemen we deze maximumwaarde van den absorptiecoëfficient k_p , de bijbehorende snelheid V_p , dan is:

$$\frac{k_p}{V_p} = \frac{\beta^4}{2 a^2 \gamma^2} \frac{1}{(p^2 + q^2)}.$$

Deze formule doet zien dat de waarde van $\frac{k_p}{V_p}$, voor eene bepaalde ligging van dit maximum, des te grooter is naarmate β , dus de kracht tusschen de aetherdeeltjes en de deeltjes van 't medium, grooter is en naarmate γ , dus de wrijving, kleiner is.

Verder hebben we:

$$\frac{k_p}{V_p} = \frac{k_p}{V_p} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(p^2 - p^2)^2}{4 q^2 (p^2 + q^2)}} \right\} \quad (25)$$

Hieraan zien we dat bij dezelfde waarden van p en p de grootheid $\frac{k_p}{V_p}$ des te grooter is in verhouding tot $\frac{k_p}{V_p}$, naarmate $q^2 = \frac{\gamma^4}{4 m^2}$ grooter is. Bij groote waarden van den wrijvings-coëfficient γ en kleine waarden van m , de massa der medetrillende deeltjes, zullen we dus breede absorptie-strepen vinden en omgekeerd geven kleine waarden van γ en grootere van m smalle absorptie-strepen.

Wij zullen nu nog nader de verandering van den brekings-index beschouwen in de nabijheid van een absorptie-streep. Wij zullen daarbij aannemen dat γ niet groot is, zoodat G zeer klein zal zijn in vergelijking met F .

Wij komen dan, vgl. (18), als wij termen met G^2 verwaarloozen, tot:

$$\frac{1}{V_p^2} = F, \quad k_p = \frac{p}{2} \frac{G}{V_p},$$

waaruit:

$$\frac{G}{F} = 2 \frac{k_p V_p}{p} = \frac{1}{\pi} k_p \lambda_p,$$

waarbij met λ_p de golflengte in het medium is bedoeld.

De onderstelling, G klein tegenover F , beteekent dus, dat de verzwakking van het licht bij eene voortplanting over een golflengte gering is. In gewone gevallen zal dit met de werkelijkheid overeenkomen.

Wij vinden, als we den brekings-index weer n noemen:

$$n^2 = c^2 \left[\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2} - \frac{\beta^4 (m p^2 - a^2 - \beta^2)}{a^2 p^2 \{(m p^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 p^2\}} \right]$$

Den brekings-index van trillingen met de frequentie p zullen we n_p noemen. Daarvoor kunnen we dan stellen:

$$n_p^2 = c^2 \left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2} + \frac{\beta^4}{2 m a^2 p^2 (p^2 + q^2)} \right).$$

Wij krijgen nu met onze vroegere notaties:

$$n^2 - n_p^2 = - \frac{c^2 \beta^2}{a^2} \frac{(p^2 - p'^2)}{p^2 p'^2} - \frac{c^2 \beta^4}{2 m a^2 p^2 (p^2 + q^2)} - \frac{c^2 \beta^4 (p^2 - p'^2 - 2 q^2)}{a^2 m p^2 \{ (p^2 - p'^2)^2 + 4 q^2 (p^2 + q^2) \}}, \quad (26)$$

waarbij we den eersten term tegenover de andere kunnen verwaarloozèn.

Uit deze uitdrukking leiden we vooreerst af dat voor golflengten, kleiner dan die welke bij de maximum-absorptie behoort, waarbij dus $p > p'$ is n kleiner is dan voor golflengten grooter dan die der meest geabsorbeerde stralen. Passeert men een absorptiestreep, dan neemt dus n toe als λ toeneemt; dit is de verklaring der abnormale dispersie.

Verder kunnen we uit (26) de maximum- en minimum-waarde van n , voor golflengten in de nabijheid van 't absorptie-maximum vinden. Bij smalle absorptiestrepen kunnen we daarbij afzien van de verandering van den factor p^2 in den noemer.

De voorwaarde voor een maximum of minimum geeft dan:

$$4 q^2 (p^2 + q^2) = (p^2 - p'^2)^2 - 4 q^2 (p^2 - p'^2).$$

Verwaarloozen we nu q^2 tegenover p^2 , dan vinden we:

$$p^2 - p'^2 = \pm 2 p q.$$

Daar q zeer klein is, zullen we in het tweede lid p in plaats van p' zetten en vinden dan voor de frequentie der sterkst en minst gebroken stralen:

$$p^2 - p'^2 = \pm 2 p q.$$

Door dit in (25) te substitueeren vinden we voor de absorptie-coëfficiënten dezer beide stralen:

$$\frac{k_p}{V_p} = \frac{1}{2} \frac{k_{p'}}{V_{p'}}.$$

De grenswaarden voor den brekings-index behooren dus steeds bij stralen die wegens de absorptie moeilijk te onderzoeken zijn.

Voor de maximum- en minimum-brekings-indices vinden we de waarden:

$$n^2 - n_p^2 = \mp c^2 \frac{\beta^4}{4 a^2 m p^3 q} = \mp n_p c \frac{k_p}{p},$$

waaruit, daar $n - n_p$ klein is,

$$n - n_p = \mp \frac{1}{4\pi} k_p \lambda_p,$$

als λ_p de golflengte in den vrijen aether voorstelt van de stralen met de frequentie p . We vinden dus dat het grootste verschil in brekings-index tengevolge der abnormale dispersie gelijk is aan het logaritmisch decrement der lichtsterkte bij voortplanting over een afstand gelijk aan $\frac{1}{2\pi} \times$ de golflengte der sterkst geabsorbeerde stralen in den vrijen aether. Eene aanzienlijke abnormale dispersie is dus alleen te verwachten bij sterk absorbeerende media.

Beschouwen we ten laatste het geval dat p zeer groot wordt, dus de golflengte zeer klein. Dan is

$$F = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2} \quad G = \frac{\beta^4 \gamma^2}{a^2 m^2} \frac{1}{p^5};$$

dan is dus, ook bij grootere waarden van γ , G zeer klein tegenover F en we hebben dus weer (vgl. 17)

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 p^2},$$

$$k_p = - \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 a m^2 \sqrt{\mu}} \frac{1}{p^4}.$$

Als p dus al grooter wordt nadert de absorptie tot nul, terwijl de voortplantingssnelheid tot c , dus de brekings-index tot 1 nadert. Dit schijnt niet met de waarnemingen overeen te komen. Helmholtz zoekt deze tegenspraak op te heffen door evenals Sellmeier aan te nemen, dat alle media ergens in 't ultraviolette spectrum een absorptie-gebied hebben.

NOTATIES.

In 't volgende zullen we veelal van de voorstellingen en hulpmiddelen der vectoranalyse gebruik maken. We zullen ons daarbij steeds aan de volgende voorstellingen en notaties houden. Zij komen over 't geheel met de algemeen gebruikelijke overeen.

Waar sprake is van een coördinatenstelsel, is steeds bedoeld een rechthoekig stelsel met assen X Y Z, zoodat de positieve Z-as naar die zijde loopt, waar men zich moet plaatsen om een draaiing van de positieve X-as naar de positieve Y-as over een hoek van 90°, te zien in den zin tegengesteld aan de beweging van de wijzers van een uurwerk. We zullen ons zelf dan steeds zoo t. o. van het coördinatenstelsel geplaatst denken, dat voor ons de X-as van links naar rechts loopt, de Y-as van achter naar voren, de Z-as van beneden naar boven.

Vectoren zullen we doorgaans door Duitse hoofdletters aanwijzen. Componenten van een vector in de richting der assen X Y Z zullen we aangeven door eene x, y, z te plaatsen aan den voet der letter, die den vector voorstelt, componenten in eene willekeurige richting h door eene h aan den voet der letter.

Differentiaalquotienten naar den tijd, zoowel van vectoren als van scalaire grootheden, zullen we veelal aanduiden door een punt boven de letter die de gedifferentieerde grootheid voorstelt. Evenzoo tweede differentiaalquotienten door twee punten enz.

Het symbool Div. stelt eene operatie voor, waardoor uit een vector eene scalaire grootheid wordt afgeleid, gedefinieerd door de vergelijking:

$$\text{Div. } \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}.$$

Het symbool Rot stelt eene operatie voor, waardoor uit een vector een nieuwe vector wordt afgeleid, zoodanig dat, wanneer $\text{Rot } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ is,

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z},$$

$$\mathfrak{B}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x},$$

$$\mathfrak{B}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.$$

Het symbool grad. stelt eene operatie voor, waardoor uit een scalaire groot-
heid φ een vector wordt afgeleid met de componenten: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

De operatie $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ stellen we voor door Δ .

De volgende betrekkingen zullen we hier en daar noodig hebben:

$$\text{Rot. grad. } \varphi = 0,$$

$$\text{Div. grad. } \varphi = \Delta \varphi,$$

$$\text{Div. Rot. } \mathfrak{A} = 0.$$

Rot. Rot. \mathfrak{A} is een vector met componenten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Div. } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}_x,$$

enz.

Het scalaire product van twee vectoren \mathfrak{A} en \mathfrak{B} stellen we voor door $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$; de beteekenis wordt gegeven door:

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

Het vector-product van \mathfrak{A} en \mathfrak{B} , voorgesteld door $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$, is een vector met de componenten:

$$\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y,$$

$$\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z,$$

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x.$$

Veelal zullen we de waarde eener grootheid in een bepaald punt moeten beschouwen; dit wijzen we aan door die grootheid tusschen haakjes te plaatsen, met de coördinaat of coördinaten waardoor 't bedoelde punt bepaald is, als index aan den voet der haakjes. Ook komt het voor, dat we de waarde willen aanwijzen in een bepaald deel der ruimte, dat we door een cijfer onderscheiden hebben. In dat geval gebruiken we op dezelfde wijze dit cijfer als index.

HOOFDSTUK II.

Lichtvoortplanting in den vrijen aether.

§ 1. *Algemeene vergelijkingen.*

De moderne lichttheorie vat het licht op als eene electromagnetische evenwichtsverstoring. In den vrijen aether wordt daarbij de toestand bepaald door de z.g. vergelijkingen van Maxwell:

$$\left. \begin{array}{ll} (a) \text{ Rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{C}, & \text{Rot } \mathfrak{C} = -\frac{1}{c} \mathfrak{B}, \\ (b) \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E}, & \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \\ (c) \text{ Div } \mathfrak{C} = 0, & \text{Div } \mathfrak{B} = 0. \end{array} \right\} \text{I}$$

Hierbij stelt \mathfrak{C} de elektrische, \mathfrak{H} de magnetische kracht voor, \mathfrak{D} de dielectrische verplaatsing, \mathfrak{E} de elektrische stroom en \mathfrak{B} de magnetische inductie, alles uitgedrukt in de door Hertz en Heaviside ingevoerde eenheden.

De vergelijkingen I zetten we voorop als uitdrukking der verschillende waarnemingsfeiten, de formules (a) zijn algemeen geldig en dus ook (c), die er uit volgen, maar de formules (b) moeten voor een ander medium door andere vervangen worden.

De vectoren \mathfrak{C} en \mathfrak{H} kunnen als lichtvector opgevat worden; als ze op zeker tijdstip in ieder punt gegeven zijn, dan kunnen de waarden der andere grootheden gemakkelijk worden afgeleid. Wij willen daarom uit I een stel vergelijkingen afleiden,

waarin of alleen componenten van \mathfrak{E} of alleen componenten van \mathfrak{H} voorkomen. Dit geeft:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{E}_x, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{H}_x, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{E}_y, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{H}_y, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{E}_z, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{H}_z, \end{aligned} \right\} \text{II}$$

We zullen nu in een enkel voorbeeld doen zien hoe met deze vergelijkingen de oplossing kan gegeven worden van problemen, zooals voor het geval van disperseerende media, in de inleiding werden besproken en hoe men die ook met het theorema van Fourier kan behandelen. Deze laatste behandelingswijze is voor het geval van den vrijen aether omslachtig, maar ze voert steeds tot juiste resultaten, tevens zullen we gelegenheid vinden tot eenige opmerkingen, die ook van gewicht zijn voor 't geval van disperseerende media, waar we de behandeling met het theorema van Fourier niet kunnen ontgaan.

§ 2. Toepassing op platte golven.

Beperken wij ons tot eene voortplanting met vlakke golf-fronten. Daarbij is in ieder vlak loodrecht op eene bepaalde richting, die wij als die der X-as zullen kiezen, de toestand in alle punten dezelfde. Al de beschouwde grootheden hebben dan in alle punten van zulk een vlak dezelfde waarde, alle differentiaalquotienten naar y of z zijn nul. In de eerste plaats volgt dan uit Ia en Ib:

$$\dot{\mathfrak{E}}_x = 0 \text{ en } \dot{\mathfrak{H}}_x = 0$$

en uit Ic en Ib:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0.$$

Zoowel \mathfrak{E}_x als \mathfrak{H}_x heeft dus op ieder tijdstip en in elk punt der ruimte dezelfde waarde. We kunnen aannemen dat

beide steeds nul zijn. De beteekenis van dit resultaat is dat de beschouwde evenwichtsverstoringen transversaal zijn; dit is hier dus een noodzakelijk gevolg van de onderstellingen omtrent het wezen der lichtbeweging.

De vergelijkingen I gaan voor het beschouwde geval over in:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= -c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, & \mathfrak{H}_y &= c \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{E}_z &= c \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, & \mathfrak{H}_z &= -c \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \text{III}$$

Uit den vorm dezer vergelijkingen blijkt dat men een toestand, zooals de hier bedoelde, steeds kan verkrijgen door superpositie van twee eenvoudiger toestanden; bij de eene van deze zullen \mathfrak{E}_z en \mathfrak{H}_y overal en altijd nul zijn, bij de andere \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z . Wij kunnen ons dus verder beperken tot de beschouwing van één dezer toestanden. Wij zullen nemen $\mathfrak{E}_z = 0$ en $\mathfrak{H}_y = 0$, hetgeen hierop neerkomt dat we alleen gepolariseerd licht beschouwen, dat het XZ-vlak tot polarisatievlak heeft. Wij hebben dan uit III:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} \\ (b) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

welke vergelijkingen de bijzondere vorm van II zijn, die voor dit geval geldt. Zij kunnen ook onmiddellijk uit II worden afgeleid.

§ 3. *Algemeene en bijzondere oplossingen.*

De algemeene oplossing van IVa is

$$\mathfrak{E}_y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (1)$$

waarin f_1 en f_2 willekeurige functies voorstellen. Uit III vinden we dan, als bijbehorende oplossing van IVb,

$$\mathfrak{H}_z = f_1(x - ct) - f_2(x + ct). \quad (1)$$

De bijzondere oplossing die wij noodig hebben voor de toepassing van het theorema van Fourier is:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_y &= A_p \text{Cos} \{ p(x - ct) - a_p \} + B_p \text{Cos} \{ p(x + ct) - \beta_p \}, \\ \mathfrak{H}_z &= A_p \text{Cos} \{ p(x - ct) - a_p \} - B_p \text{Cos} \{ p(x + ct) - \beta_p \}.\end{aligned}\quad 1a$$

Door geringe wijziging in de notaties kunnen we ze brengen in elk der volgende vormen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_y &= A_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p(x - ct) - a_p \right\} + B_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p(x + ct) - \beta_p \right\}, \\ \mathfrak{H}_z &= A_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p(x - ct) - a_p \right\} - B_p \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p(x + ct) - \beta_p \right\},\end{aligned}\quad 1b$$

of ook:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_y &= A_q \text{Cos} \left\{ q \left(t - \frac{x}{c} \right) - a_q \right\} + B_q \text{Cos} \left\{ q \left(t + \frac{x}{c} \right) - \beta_q \right\}, \\ \mathfrak{H}_z &= A_q \text{Cos} \left\{ q \left(t - \frac{x}{c} \right) - a_q \right\} - B_q \text{Cos} \left\{ q \left(t + \frac{x}{c} \right) - \beta_q \right\},\end{aligned}\quad 1c$$

of:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_y &= A_q \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} q \left(t - \frac{x}{c} \right) - a_q \right\} + B_q \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} q \left(t + \frac{x}{c} \right) - \beta_q \right\}, \\ \mathfrak{H}_z &= A_q \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} q \left(t - \frac{x}{c} \right) - a_q \right\} - B_q \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} q \left(t + \frac{x}{c} \right) - \beta_q \right\}.\end{aligned}\quad 1d$$

die alle te pas kunnen komen, al naar gelang van de verschillende problemen, die wij op te lossen hebben en naarmate we met integralen of met reeksen van Fourier willen werken.

§ 4. Voorbeeld van toepassing.

Als voorbeeld zullen we behandelen 't probleem:

Voor een gegeven tijdstip, dat wij als nulpunt van tijd zullen kiezen, zijn \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z als functie van x gegeven. Gevraagd, den toestand op een willekeurig tijdstip te bepalen.

Zij dus voor $t = 0$: $\mathfrak{E}_y = \varphi(x)$, $\mathfrak{H}_z = \psi(x)$.

Wij hebben nu:

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \varphi_1(p) \cos px \, dp + \int_0^{\infty} \varphi_2(p) \sin px \, dp, \quad (2)$$

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \psi_1(p) \cos px \, dp + \int_0^{\infty} \psi_2(p) \sin px \, dp,$$

waarbij:

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \cos pu \, du, \quad \varphi_2(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \sin pu \, du, \quad (3)$$

$$\psi_1(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) \cos pu \, du, \quad \psi_2(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) \sin pu \, du.$$

Door een oneindig aantal oplossingen van III en IV van de gedaante (1a) samen te stellen, vinden we eene oplossing:

$$\begin{aligned} \xi_y = & \int_0^{\infty} A_p \cos p(x - ct) \, dp + \int_0^{\infty} A'_p \sin p(x - ct) \, dp + \\ & + \int_0^{\infty} B_p \cos p(x + ct) \, dp + \int_0^{\infty} B'_p \sin p(x + ct) \, dp, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi_z = & \int_0^{\infty} A_p \cos p(x - ct) \, dp + \int_0^{\infty} A'_p \sin p(x - ct) \, dp - \\ & - \int_0^{\infty} B_p \cos p(x + ct) \, dp - \int_0^{\infty} B'_p \sin p(x + ct) \, dp. \end{aligned}$$

Deze moet nu voor $t = 0$ met de waarden (2) overeenstemmen, waaraan voldaan is als voor alle waarden van p :

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi_1(p) + \psi_1(p) \right\}, & A'_p &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi_2(p) + \psi_2(p) \right\}, \\ B_p &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi_1(p) - \psi_1(p) \right\}, & B'_p &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi_2(p) - \psi_2(p) \right\}. \end{aligned}$$

Door deze waarden in (4) te substitueeren vinden we met behulp van (3):

$$\begin{aligned} \xi_y &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left\{ \varphi(u) + \psi(u) \right\} \cos p(u - x + ct) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left\{ \varphi(u) - \psi(u) \right\} \cos p(u - x - ct) du, \\ \xi_z &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left\{ \varphi(u) + \psi(u) \right\} \cos p(u - x + ct) du \quad (5) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left\{ \varphi(u) - \psi(u) \right\} \cos p(u - x - ct) du. \end{aligned}$$

We kunnen hierin de integratie ook nog uitvoeren en komen dan tot een vorm, dien we ook direct door toepassing der oplossing (1) hadden kunnen vinden.

Volgens (5) vinden we twee golven, die zich beide met de snelheid c ongewijzigd voortplanten, de eene naar rechts, de andere naar links.

Het interessantste geval is, dat de aanvankelijke evenwichtsverstoring tot een eindig gebied beperkt is, zoodat de functies φ en ψ slechts tusschen zekere grenzen van nul verschillende waarden hebben. Het is uit de formules gemakkelijk af te leiden, dat dan ook elk der beide golven op ieder tijdstip slechts een dergelijk eindig gebied zal innemen.

Volgens onze oplossing is de voor $t = 0$ waargenomen evenwichtsverstoring 't gevolg van de samenwerking der beide in tegengestelde richting loopende golven; het is echter duidelijk dat de toestand op ieder later tijdstip dezelfde zal zijn, onverschillig of de waargenomen evenwichtsverstoring op deze wijze of door een willekeurige andere oorzaak ontstaan is.

We zullen ons veelal tevreden kunnen stellen met eene

oplossing die de waarden van \mathfrak{G}_y en \mathfrak{H}_z op een willekeurig tijdstip doet kennen voor eene eindige, desnoods zeer groote ruimte. Wanneer we van te voren vastgesteld hebben, dat deze grootheden slechts voor een eindig interval van nul zullen verschillen, is het van zelf voldoende, als we voor dat interval hunne waarde kunnen aangeven. In zulke gevallen kunnen we werken met reeksen van Fourier.

Daar de berekening vrijwel parallel loopt met de vorige, kunnen we hiermee kort zijn.

Zij weer voor $t = 0$, $\mathfrak{G}_y = \varphi(x)$, $\mathfrak{H}_z = \psi(x)$ en laten we ons, om de gedachten te bepalen, voorstellen, dat $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ alleen van nul verschillen als $x_2 > x > x_1$.

Nu zal:

$$\varphi = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} x + B_p \text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} x),$$

$$\text{waarbij } A_p = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0}^{+x_0} \varphi(z) \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} z dz,$$

$$B_p = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0}^{+x_0} \varphi(z) \text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} z dz,$$

met $\varphi(x)$ overeenkomen tusschen de grenzen $-x_0$ en $+x_0$. We kunnen x_0 zoo groot kiezen, dat $x_0 + x_1$ en $x_0 - x_2$ groot zijn in vergelijking met $x_2 - x_1$.

Eenzoo komt:

$$\psi = \sum_{p=1}^{\infty} (A'_p \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} x + B'_p \text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} x),$$

$$\text{waarbij } A'_p = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0}^{+x_0} \psi(z) \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} z dz,$$

$$B'_p = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0}^{+x_0} \psi(z) \text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} z dz,$$

tusschen $-x_0$ en $+x_0$ met $\psi(x)$ overeen.

Door toepassing dezer ontwikkeling vinden we, dat de oplossing van III en IV (vgl. 1b):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_y &= \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ B_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) + B_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) \right\}, \\ \mathfrak{G}_z &= \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} \\ &\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ B_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) + B_{2p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

aan de gestelde voorwaarden voldoen zal, als:

$$\begin{aligned} A_{1p} &= \frac{1}{2} (A_p + A'_p), & A_{2p} &= \frac{1}{2} (B_p + B'_p), \\ B_{1p} &= \frac{1}{2} (A_p - A'_p), & B_{2p} &= \frac{1}{2} (B_p - B'_p). \end{aligned} \quad (7)$$

De vergelijkingen (6) en (7) geven de gewenschte oplossing. We vinden ook nu weer één golf, die zich naar rechts en één die zich naar links voortplant. Om deze nader te onderscheiden beschouwen we φ als de som van twee functies Φ_1 en Φ_2 ,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} x + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} x), \\ \Phi_2 &= \sum_{p=1}^{\infty} (B_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} x + B_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} x). \end{aligned}$$

Uit onze formule volgt onmiddellijk $\varphi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Evenzoo stellen we:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} x + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} x), \\ \Psi_2 &= - \sum_{p=1}^{\infty} (B_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} x + B_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} x), \end{aligned}$$

zoodat $\psi = \Psi_1 + \Psi_2$.

Volgens (6) veroorzaakt nu de golf, die zich naar rechts voortplant, op ieder tijdstip eene evenwichtsverstoring, congruent

met die, beschreven door Φ_1 en Ψ_1 , en de golf die zich naar links voortplant, eene, congruent met die, beschreven door Φ_2 en Ψ_2 . Het is nu uit de formules nog gemakkelijk te zien, dat Φ_1 , Φ_2 , Ψ_1 , en Ψ_2 slechts van nul zullen verschillen in 't zelfde gebied waar dit met φ en ψ 't geval is, immers we vinden:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \psi(x) \}, & \Psi_1 &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) - \psi(x) \}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) - \psi(x) \}, & \Psi_2 &= -\frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \psi(x) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

§ 5. Meetkundige voorstelling.

Deze beschouwingen geven aanleiding tot eene zeer sprekende meetkundige voorstelling. We denken ons de waarde van \mathfrak{E}_y in elk punt der X-as als ordinaat uitgezet. Op een bepaald oogenblik zullen we nu eene voorstelling krijgen van den aard der golf, door de kromme te trekken, die de eindpunten dezer ordinaten verbindt. We kunnen ons dan verder de voortplanting der golf verbeelden door deze kromme met de snelheid c langs de X-as te verschuiven. Hebben we te doen met twee golven, die geheel of gedeeltelijk in het zelfde gebied vallen, dan zullen ook de krommen, die deze voorstellen, geheel of gedeeltelijk op eenzelfde stuk der X-as komen en voor een punt van dit gemeenschappelijk gebied zal \mathfrak{E}_y voorgesteld worden door de som der beide ordinaten der krommen in dit punt. De geheele toestand op een bepaald oogenblik wordt dan voorgesteld door de kromme wier ordinaat in ieder punt gelijk is aan de som der beide ordinaten in dat punt van de krommen die de beide golven voorstellen. Op deze wijze uit twee krommen eene derde afleiden, zullen we noemen de beide krommen samenstellen. De omgekeerde bewerking zullen we noemen, eene kromme ontbinden. Deze operaties kunnen ook tot meerdere krommen worden uitgebreid. Wanneer we bij het samenstellen

van eenige krommen, eene kromme vinden die een punt met de X-as gemeen heeft, zullen we zeggen dat in dat punt de krommen elkaar opheffen.

Wat hier van \mathfrak{G}_y gezegd is geldt evengoed voor \mathfrak{S}_z en kan trouwens in verschillende problemen op allerlei grootheden worden toegepast.

Wij kunnen nu de oplossing van het vraagstuk dat ons bezighoudt, op de volgende wijze meetkundig beschrijven. Wij construeeren de krommen $y = \varphi(x)$ en $y = \psi(x)$, die de als begintoestand gegeven evenwichtsverstoring voorstellen. We ontbinden beide op bepaalde wijze (vgl. 8), zoodat de eerste twee krommen oplevert $y = \Phi_1(x)$ en $y = \Phi_2(x)$, de tweede $y = \Psi_1(x)$ en $y = \Psi_2(x)$. We zullen in 't vervolg alleen over de beide eerste spreken; wat we hiervan zeggen geldt, mutatis mutandis, ook voor de andere. De kromme $y = \Phi_1(x)$ zal zich naar rechts, de kromme $y = \Phi_2(x)$ zal zich naar links verschuiven, voorstellende de naar rechts en de naar links loopende golf.

Het theorema van Fourier kan nu als volgt worden uitgedrukt: „Het is steeds mogelijk een — in 't algemeen oneindig groot — aantal sinusoiden te construeeren, wier perioden een geheel aantal malen begrepen zijn op eene bepaalde grondperiode, zoodanig, dat deze sinusoiden zich samenstellen tot eene kromme die in een van te voren aan te wijzen gebied samenvalt met eene willekeurig gegeven kromme.” Buiten dit gebied zal het samenvallen in het algemeen niet plaats vinden, want de kromme die we door het samenstellen der sinusoiden krijgen is periodiek en wel is het gebied waarover ze met de gegeven kromme samenvalt gelijk aan hare periode, tevens is dit de bovenbedoelde grondperiode voor de sinusoiden.

We hebben bij de oplossing van ons probleem de kromme $y = \varphi(x)$ op deze wijze in het gebied tusschen $-x_0$ en $+x_0$ ontbonden in sinusoiden en verder elke sinusoïde in twee sinusoiden met dezelfde periode. Zoo vonden we twee stel sinusoiden. 't Eerste stel geeft bij samenstelling de kromme $y = \Phi_1(x)$,

't tweede de kromme $y = \Phi_2(x)$, van elk der beide stellen heffen de sinuïden elkaar in alle punten tusschen $-x_0$ en $+x_0$ op, behalve in die tusschen x_1 en x_2 . Beide stellen dus eindige golven voor. We verschuiven nu alle sinuïden met dezelfde snelheid en wel het eerste stel naar rechts, het tweede naar links. Wanneer we dan op een willekeurig tijdstip de sinuïden weer samenstellen, is het duidelijk, dat ze elkaar overal weer zullen opheffen, behalve in een bepaald gebied, dat in het algemeen uit twee geïsoleerde stukken zal bestaan, waar ze de krommen zullen opleveren, die de beide zich voortplantende golven voorstellen.

Wij kunnen nu met behulp van deze meetkundige beschouwing ook weer gemakkelijk vinden, wat reeds in de inleiding werd aangetoond, dat de grenzen, waartusschen de reeks:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\}$$

hare beteekenis houdt, zich met de snelheid c naar rechts verschuiven en evenzoo die voor de reeks:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ B_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) + B_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x + ct) \right\}$$

naar links. De formule (6) zal dus in haar geheel slechts gelden tusschen $-x_0 + ct$ en $x_0 - ct$. Wanneer we x_0 zeer groot gekozen hebben, zullen we voor niet te groote waarden van t de formule nog onmiddellijk kunnen toepassen, maar in 't algemeen zal het noodig zijn, zooals boven werd aangegeven, de beide golven afzonderlijk te beschouwen.

Het voordeel der toepassing van het theorema van Fourier bij deze problemen ligt eensdeels hierin, dat de functies zooals $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ veelal niet op andere wijze analytisch kunnen worden voorgesteld en verder in de uitbreiding tot het geval van een dispergeerend medium.

§ 6. *Beschouwing der energie.*

Voordat we overgaan tot de lichtvoortplanting in andere media, zullen we onderzoeken hoe het gesteld is met de verdeling der energie. In de eerste plaats kunnen we opmerken, dat bij platte golffronten, zooals wij ze beschouwen, de toestand voor alle punten van een vlak loodrecht op de X-as dezelfde is. We kunnen ons dus beperken tot de beschouwing van een cylinder met eenheid van doorsnede en wiens as langs de X-as valt.

We hebben voor de energie in een ruimteëlement $d\tau$ op een willekeurig tijdstip de uitdrukking: $\frac{1}{2} \{ (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}) \} d\tau$,

die voor ons geval overgaat in: $\frac{1}{2} (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) d\tau$. Voor den boven bedoelden cylinder vinden we als de coördinaten zijner

eindvlakken x' en x'' zijn: $\frac{1}{2} \int_{x'}^{x''} (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) dx$.

§ 7. *Toepassing op het vroeger besproken voorbeeld.*

Wij zullen deze uitkomst toepassen op het boven behandelde voorbeeld. Daarbij hadden we de golf ontbonden in een aantal enkelvoudige golven, zoodat in ieder punt binnen het gebied van $-x_0$ tot $+x_0$ de electricische en de magnetische kracht — en ook de andere der vroeger beschouwde vectoren — de algebraische som is van die welke voor de enkelvoudige golven in dat punt voorkomen.

Wij kunnen nu ook zoowel bij de samengestelde golf als bij elk der enkelvoudige golven in ieder punt de energie per volumeëenheid aangeven, die we afleiden door beschouwing der energie in een oneindig klein volumeëlement bij dat punt;

deze grootheid zal nu niet voor de samengestelde golf gevonden worden als de som van die voor de enkelvoudige golven. In 't eene punt zal deze som grooter, in 't andere kleiner zijn dan de energie in de samengestelde golf. De geheele energie in de ruimte waar onze oplossing geldt, is echter gelijk aan de som der hoeveelheden energie van alle enkelvoudige golven in die ruimte. We zullen dit bewijzen voor het geval van één golf, die zich b. v. van links naar rechts voortplant. Het bewijs voor 't geval dat we in de ruimte, waar de oplossing geldt, twee golven hebben, kan geheel op dezelfde wijze gegeven worden.

Zij dus (vgl. 6):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_y &= \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\}, \\ \mathfrak{G}_z &= \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\}. \end{aligned}$$

Voor 't arbeidsvermogen in de bedoelde ruimte hebben we dan:

$$E = \int_{-x_0+ct}^{+x_0+ct} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \operatorname{Cos} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \operatorname{Sin} p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} \right]^2 dx,$$

waaruit we door ontwikkeling der tweede macht afleiden:

$$E = \int_{-x_0+ct}^{+x_0+ct} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} A_{1p}^2 \operatorname{Cos}^2 p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p}^2 \operatorname{Sin}^2 p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} dx, \quad (9)$$

daar de producten van termen met ongelijke p en ook de termen van den vorm $\text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} (x - ct)$ bij 't integreeren nul opleveren. Uit (9) blijkt de stelling die we bewijzen wilden onmiddellijk, we kunnen deze formule verder nog herleiden tot:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{+x_0} \sum_{p=1}^{\infty} \{ A_{1p}^2 + A_{2p}^2 \} dx = x_0 \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p}^2 + A_{2p}^2) \quad (10)$$

Deze uitdrukking is onafhankelijk van x en van t , wat we trouwens van te voren wisten, daar E eenvoudig de geheele energie der golf voorstelt.

Evenals we formule (10) afgeleid hebben, kunnen we ook bewijzen, 't geen trouwens ook onmiddellijk door redeneering uit (10) kan afgeleid worden, dat in ieder ruimte-element de gemiddelde energie I over een tijd $\frac{2x_0}{c}$, die overeenkomt met den trillingstijd der trillingen met de grootste golflengte, die bij de ontbinding volgens (6) voorkomt, gelijk is aan de som der gemiddelde energieën van de enkelvoudige golven over dien tijd. Om dit aan te toonen, moeten we berekenen:

$$I = \frac{1}{2x_0} \int_0^{\frac{2x_0}{c}} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p} \text{Cos } p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p} \text{Sin } p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} \right]^2 dt$$

't geen we herleiden tot:

$$I = \frac{c}{2x_0} \int_0^{\frac{2x_0}{c}} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_{1p}^2 \text{Cos}^2 p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) + A_{2p}^2 \text{Sin}^2 p \frac{\pi}{x_0} (x - ct) \right\} dt,$$

waarmee de bovengenoemde stelling bewezen is. Wij kunnen deze formule ook nog weer herleiden tot:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \{ A_{1p}^2 + A_{2p}^2 \}, \quad (11)$$

waaruit blijkt dat deze gemiddelde energie in ieder punt de zelfde is.

§ 8. *Theorema van Poynting.*

Om de verandering der energie in eene bepaalde ruimte na te gaan, keeren we terug tot de beschouwing van den cylinder wiens eindvlakken de coördinaten x' en x'' hebben. De energie daarin is:

$$E = \frac{1}{2} \int_{x'}^{x''} (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) dx,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{x'}^{x''} (\mathfrak{E}_y \dot{\mathfrak{E}}_y + \mathfrak{H}_z \dot{\mathfrak{H}}_z) dx,$$

of volgens III:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = -c \int_{x'}^{x''} \left(\mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \right) dx = \\ -c (\mathfrak{E}_y \cdot \mathfrak{H}_z)_{x''} + c (\mathfrak{E}_y \cdot \mathfrak{H}_z)_{x'}. \end{aligned} \quad (12)$$

De formule (12) drukt voor ons geval het theorema van Poynting uit; zij is een bijzonder geval eener veel algemeenere, die wij verkrijgen door bij een willekeurigen toestand in den aether de verandering der energie in eene willekeurige ruimte te beschouwen.

Noemen we nu de energie in deze ruimte E , dan is:

$$E = \frac{1}{2} \int (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2 + \mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 + \mathcal{H}_z^2) d\tau.$$

De integraal moet over de geheele beschouwde ruimte worden uitgestrekt.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int (\mathcal{E}_x \dot{\mathcal{E}}_x + \mathcal{E}_y \dot{\mathcal{E}}_y + \mathcal{E}_z \dot{\mathcal{E}}_z + \mathcal{H}_x \dot{\mathcal{H}}_x + \mathcal{H}_y \dot{\mathcal{H}}_y + \mathcal{H}_z \dot{\mathcal{H}}_z) d\tau,$$

waaruit door toepassing van I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = c \int \left\{ \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \right) + \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right) - \mathcal{H}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \right. \\ \left. - \mathcal{H}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) - \mathcal{H}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Noemen we het oppervlak dat de beschouwde ruimte begrenst S , een element van dit oppervlak dS , dan vinden we hieruit door integratie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = -c \int \left\{ \text{Cos } \lambda (\mathcal{E}_y \mathcal{H}_z - \mathcal{E}_z \mathcal{H}_y) + \text{Cos } \mu (\mathcal{E}_z \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_x \mathcal{H}_z) \right. \\ \left. + \text{Cos } \nu (\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_y \mathcal{H}_x) \right\} dS, \end{aligned}$$

waarbij λ, μ, ν de hoeken zijn tusschen de aan het element dS naar buiten getrokken normaal en de coördinatenassen. De integraal moet over het geheele oppervlak S worden uitgestrekt.

Voeren we nu den vector \mathfrak{B} in, bepaald door:

$$\mathfrak{B} = c [\mathcal{E}, \mathcal{H}], \quad (13)$$

dan krijgen we:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c \int \mathfrak{B}_n dS, \quad (14)$$

waarbij met n de richting der naar buiten getrokken normaal

is aangewezen. De eenvoudigste voorstelling der door deze formule bepaalde energie-verandering kunnen we ons vormen door aan te nemen, dat aan ieder element dS een „energiestroom” $\mathfrak{B}_n dS$ bestaat en daar we dit zouden vinden bij iederen stand van het vlak S , komen we tot de opvatting dat in ieder punt steeds een energiestroom bestaat, bepaald door den vector \mathfrak{B} .

Door dit weer toe te passen op het geval der vroeger beschouwde platte golven, die zich in de richting der X-as voortplanten, vinden we daar in ieder punt een energiestroom in de richting der X-as, bepaald door:

$$\mathfrak{B}_x = c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z. \quad (15)$$

Ook deze energiestroom is niet de som van die, welke we zouden vinden voor de enkelvoudige golven, daar de resulterende energiestroom afhankelijk is van de phaseverschillen der samenstellende trillingen. Weer vinden we echter voor de geheele energie die gedurende den trillingstijd der langzaamste trillingen uit (6), dus gedurende den tijd $\frac{2x_0}{c}$, door een willekeurig deel van een vlak loodrecht op de X-as, b.v. de vlakte-eenheid, gaat de som der hoeveelheden, die gedurende dien tijd door de enkelvoudige golven door hetzelfde vlaktedeel worden gevoerd. We bewijzen dit op eene wijze volkomen analoog aan de afleiding der formule (11).

§ 9. *Nadere beschouwing der energie bij de behandeling met integralen van Fourier.*

Ten slotte willen we nog een enkele opmerking maken over de bewerking met de integraal van Fourier. Nemen we nu eens het geval, dat \mathfrak{E}_y in een bepaald punt P als functie van den tijd is gegeven, $\mathfrak{E}_y = \varphi(t)$, waarbij we weer zullen

onderstellen, dat $\varphi(t)$ slechts van nul verschillende waarden heeft in een eindig interval, van t_1 tot t_2 . Wij hebben:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(p) \cos pt \, dp + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(p) \sin pt \, dp,$$

$$\text{waarbij } f_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \cos pu \, du, \quad f_2(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \sin pu \, du.$$

Wij kunnen dit ook in den vorm brengen:

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} F(p) \cos(pt - \alpha_p) \, dp, \quad (16)$$

$$\text{waarbij: } \pi F(p) \cos \alpha_p = f_1(p), \quad \pi F(p) \sin \alpha_p = f_2(p).$$

We komen tot deze integraal door een reeks te beschouwen en daarbij het geldigheidsgebied oneindig groot te doen worden. De voorstelling van $\varphi(t)$ door (16) kan dus zoo opgevat worden, dat de gegeven evenwichtsverstoring wordt voorgesteld als de resultante van een oneindig aantal enkelvoudige trillingen met alle mogelijke perioden. Het eenige verschil tusschen dit geval en de reeks van Fourier ligt dus hierin, dat het geldigheidsgebied oneindig groot is geworden, terwijl de perioden nu niet sprongsgewijze, maar geleidelijk op elkaar volgen; de amplitudines der afzonderlijke trillingen zijn nu oneindig klein.

Willen we op dit geval de formule (11) toepassen, dan zien we dat deze ons niets leert, daar in het tweede lid een oneindig aantal termen komt, die echter alle oneindig klein van de tweede orde zijn, zoodat de geheele som tot nul nadert, wat echter ook van zelf spreekt, daar S nu de gemiddelde energie over een oneindig langen tijd zal voorstellen, terwijl de geheele energie eindig is, daar we aannemen, dat de geheele evenwichtsverstoring tot een eindigen tijd beperkt is.

Uit (11) volgt onmiddellijk de geheele energie der golf en dus ook de middelwaarde over een willekeurig tijdsverloop, mits grooter dan den geheelen duur der evenwichtsverstoring.

Deze kunnen we uit de integraal op andere wijze vinden en komen dan ook tot eene zeer eenvoudige uitkomst. ¹⁾

Stellen we ons voor de middelwaarde van $\{\varphi(t)\}^2$ te zoeken over den tijd $t_2 - t_1 = T$, en noemen we nu deze I, dan is:

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \{\varphi(t)\}^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\varphi(t)\}^2 dt$$

volgens onze onderstelling omtrent de functie $\varphi(t)$.

Wij hebben nu:

$$\begin{aligned} \pi^2 \{\varphi(t)\}^2 &= \left[\int_0^\infty f_1(p) \cos pt dp + \int_0^\infty f_2(p) \sin pt dp \right] \\ &\quad \times \left[\int_0^\infty f_1(q) \cos qt dq + \int_0^\infty f_2(q) \sin qt dq \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(p) f_1(q) \cos pt \cos qt dp dq \\ &\quad + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(p) f_2(q) \cos pt \sin qt dq \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(p) f_2(q) \sin pt \sin qt dp dq. \end{aligned}$$

Zij nu:

$$\pi^2 T I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(p) f_1(q) \cos pt \cos qt dp dq,$$

$$\pi^2 T I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(p) f_2(q) \cos pt \sin qt dp dq,$$

$$\pi^2 T I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(p) f_2(q) \sin pt \sin qt dp dq,$$

¹⁾ Vgl. Rayleigh, On the Character of the complete Radiation at a given Temperature. Phil. Mag. V 27.

dan is het vooreerst gemakkelijk in te zien dat $I_2 = 0$ is en we vinden dus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \pi^2 \{ \varphi(t) \}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(p) f_1(q) \cos pt \cos qt dp dq \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_2(p) f_2(q) \sin pt \sin qt dp dq.$$

Om nu deze integraties uit te voeren, zullen we gebruik maken van een kunstgreep.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 \{ \varphi(t) \}^2 dt = \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} \pi^2 e^{-\alpha t} \{ \varphi(t) \}^2 dt + \\ \lim_{\alpha=0} \int_{-\infty}^0 \pi^2 e^{+\alpha t} \{ \varphi(t) \}^2 dt$$

waarbij $\alpha > 0$ gedacht wordt. Deze formule is werkelijk juist omdat we onderstellen, dat de gemiddelde energie een bepaalde

eindige waarde heeft en dus $\int_{-\infty}^{+\infty} \{ \varphi(t) \}^2 dt$ een convergente integraal is. ¹⁾

Zij nu:

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(p) f_1(q) e^{-\alpha t} \cos pt \cos qt dp dq + \\ \int_{-\infty}^0 dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(p) f_1(q) e^{+\alpha t} \cos pt \cos qt dp dq \\ = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f_1(p) f_1(q) \{ \cos(p+q)t + \\ \cos(p-q)t \} dp dq = \pi^2 T I_{1\alpha}$$

²⁾ Vgl. b.v. Weber. Die Partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik. Bnd. 1, pag. 21.

en evenzoo:

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f_2(p) f_2(q) \{ -\text{Cos}(p+q)t + \text{Cos}(p-q)t \} dp dq = \pi^2 T I_{3\alpha}$$

dan is:

$$I = \lim_{\alpha=0} (I_{1\alpha} + I_{3\alpha}).$$

In de integralen $I_{1\alpha}$ en $I_{3\alpha}$ mogen we nu de integraties in willekeurige volgorde uitvoeren.

Passen we de integraaluitkomst:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \text{Cos} kt dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$$

toe, dan vinden we:

$$\lim_{\alpha=0} \pi^2 T I_{1\alpha} = \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dq \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (p+q)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (p-q)^2} \right\} f_1(p) f_1(q).$$

Op de waarde der limiet heeft de eerste term tusschen accolades geen invloed en de tweede levert alleen iets op voor die termen der dubbelintegraal, waarvoor $p=q$ is. Om de integraal van deze termen te vinden, zullen we in plaats van q eene nieuwe integratieveranderlijke invoeren door de vergelijking: $p - q = az$, zoodat als a tot nul nadert, z loopt van $-\infty$ tot $+\infty$, $dq = -adz$, want bij 't intregreeren naar q sommeeren we telkens eene groep termen waarvoor p constant is. Voor $f_1(q)$ komt $f_1(p - az)$ of in de limiet voor $a = 0$ $f_1(p)$, en we vinden:

$$\lim_{\alpha=0} \pi^2 T I_{1\alpha} = \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f_1(p) \}^2 \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Tegen de verwaarloozing van az ook in de termen waar

$z = \infty$, kan bezwaar gemaakt worden, maar uit de uitkomst blijkt, daar f_1 in ieder geval niet oneindig groot is, dat deze termen toch geen invloed zouden hebben op de integraal. We vinden dus:

$$\lim_{\alpha=0} \pi^2 T I_{1\alpha} = \pi \int_0^{\infty} \{f_1(p)\}^2 dp,$$

Evenzoo leiden we af:

$$\lim_{\alpha=0} \pi^2 T I_{3\alpha} = \pi \int_0^{\infty} \{f_2(p)\}^2 dp$$

en dus:

$$I = \frac{1}{\pi T} \int_0^{\infty} [\{f_1(p)\}^2 + \{f_2(p)\}^2] dp, \quad (17)$$

waarvoor we met de notatie van (16) ook kunnen schrijven:

$$I = \frac{\pi}{T} \int_0^{\infty} \{F(p)\}^2 dp. \quad (18)$$

Deze formule komt in vorm eenigszins met (11) overeen.

HOOFDSTUK III.

Hypothese over het wezen der dispergeerende media.

§ 1. *Hypothese.*

Om tot eene verklaring te geraken van de optische eigenschappen van ponderabele media, heeft men de onderstelling ingevoerd, dat deze electricch geladen deeltjes bevatten, die onder den invloed van zekere krachten „eigen trillingen” kunnen uitvoeren en door het electricch veld der lichtstralen tot medetrillen worden gebracht.

Deze onderstelling voert tot beschouwingen, die in vele opzichten overeenkomen met de oudere dispersie-theorie van Helmholtz, die ook hoofdzakelijk den invloed van medetrillende deeltjes beschouwt. Zij komt het eerst voor in eene verhandeling van Lorentz ¹⁾. Ook Helmholtz ²⁾ heeft later de hypothese der geladen deeltjes gebruikt in zijne electro-magnetische dispersietheorie.

In de beide aangehaalde stukken wordt uitgegaan van de onderstelling der „afstandswerking”. Dit standpunt heeft men thans verlaten. De onderstelling der geladen deeltjes is echter vrij algemeen bij de physici doorgedrongen.

De eenvoudigste geladen deeltjes zullen we electronen noemen. Deze electronen zullen we ons zeer klein denken. Ze zullen verder op onderlinge afstanden liggen, hoogstens zoo groot als die der moleculen. In vele gevallen zullen we ons

¹⁾ H. A. Lorentz. Over het verband tusschen de voortplantings-snelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen. Verh. der Acad. v. Wet. te Amsterdam. Deel 18. 1878.

²⁾ Wied. Ann. Bnd. 48. 1893.

zelfs denken, dat één molecuul de drager is van een groot aantal electronen, die er op de een of andere wijze mee verbonden zijn. De lading van een electron zullen we over de ruimte die het inneemt, verdeeld denken, dus niet, zoo als bij geladen geleiders, alleen over het oppervlak verspreid. Wij kunnen ons denken, dat de dichtheid der lading ρ binnen het deeltje nog van punt tot punt veranderlijk is. Deze verdeling der lading kan ook met den tijd veranderlijk zijn, maar de geheele lading zal steeds dezelfde blijven.

§ 2. *Het electrisch veld in de omgeving van een electron dat zich beweegt.*

We staan nu voor het vraagstuk: in een medium, waarin zich zeer vele electronen bevinden, den toestand te bepalen. We zullen daarbij echter eenige vereenvoudigingen invoeren door bijzondere onderstellingen omtrent de verdeling der lading en omtrent de beweging der electronen.

Om daartoe te geraken, beginnen we met de beschouwing van een eenvoudig geval n.l. dat we één enkel zich bewegend deeltje hebben ¹⁾. We zullen ons daarbij voorstellen dat de elementen van het deeltje zich ook ten opzichte van elkaar kunnen bewegen, maar steeds dezelfde lading behouden. De absolute snelheid van zulk een element noemen we v .

Overal buiten het deeltje blijven de gewone vergelijkingen voor den vrijen aether gelden.

$$\left. \begin{array}{l} (a) \text{ Rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{C}, \quad \text{Rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \mathfrak{B}, \\ (b) \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \\ (c) \text{ Div } \mathfrak{C} = 0, \quad \text{Div } \mathfrak{B} = 0. \end{array} \right\} \text{I}$$

We zullen ons denken, dat ook binnen de electronen al de vectoren, die in den vrijen aether den electro-magnetischen

¹⁾ Vgl. H. A. Lorentz. La théorie électro-magnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants.

toestand beschrijven, een bepaalde waarde hebben. Daarbij zullen dan tusschen die vectoren de vergelijkingen Ia en Ic blijven gelden; ook zullen we nog hebben $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ en $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, maar de stroom bestaat uit twee deelen, den verplaatsingsstroom $\dot{\mathfrak{D}}$ en den convectiestroom, door de beweging der lading, ρv . De laatste is nul in de geheele ruimte buiten het electron. Verder vinden we door de beschouwing der lading van een volume-element gemakkelijk $\text{Div. } \mathfrak{D} = \rho$. Binnen het electron hebben we dus:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad \text{Rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{E}, \quad \text{Rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \mathfrak{B}, \\ (b) \quad \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{D}} + \rho v, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \\ (c) \quad \text{Div } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{Div } \mathfrak{D} = \rho, \quad \text{Div } \mathfrak{B} = 0. \end{array} \right\} \text{ II}$$

We kunnen trouwens de vergelijkingen II ook overal toepassen, als we bedenken dat buiten het electron $\rho = 0$ is.

We moeten nu vooreerst opmerken, dat wanneer we eene oplossing van het stel II gevonden hebben, we steeds eene nieuwe kunnen vinden door eene willekeurige oplossing van het stel I er bij te voegen.

Het zal weer voldoende zijn voor \mathfrak{E} en \mathfrak{H} functies van de coördinaten en den tijd te vinden, die aan de vergelijkingen voldoen.

Wegens de vergelijking $\text{Div } \mathfrak{H} = 0$ kunnen we een hulpvector \mathfrak{F} invoeren zoodat:

$$\mathfrak{H} = \text{Rot } \mathfrak{F}, \quad (1)$$

door substitutie vinden we dan verder $\text{Rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \text{Rot } \dot{\mathfrak{F}}$ en dus:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{F}} - \text{grad } \Omega, \quad (2)$$

waarin Ω een nog nader te bepalen scalaire grootheid is. De vergelijkingen II geven nu tusschen Ω en \mathfrak{F} ééne betrekking.

Uit $\text{Rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{E}} + \rho v)$ volgt n.l.:

$$\text{Rot Rot } \mathfrak{F} = \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{c} \ddot{\mathfrak{F}} - \text{grad } \dot{\Omega} + \rho v \right),$$

waaruit we voor de componenten van \mathfrak{F} afleiden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (\text{Div } \mathfrak{F}) - \Delta \mathfrak{F}_x &= -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_x - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x} + \frac{1}{c} \varrho v_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} (\text{Div } \mathfrak{F}) - \Delta \mathfrak{F}_y &= -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_y - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial y} + \frac{1}{c} \varrho v_y, \quad (3) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\text{Div } \mathfrak{F}) - \Delta \mathfrak{F}_z &= -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_z - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial z} + \frac{1}{c} \varrho v_z.\end{aligned}$$

We kunnen dus tusschen \mathfrak{F} en Ω nog eene betrekking willekeurig aannemen. Kiezen we daartoe:

$$\text{Div } \mathfrak{F} = -\frac{1}{c} \dot{\Omega}, \quad (4)$$

dan worden de vergelijkingen (3):

$$\begin{aligned}\Delta \mathfrak{F}_x - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_x &= -\frac{1}{c} \varrho v_x, \\ \Delta \mathfrak{F}_y - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_y &= -\frac{1}{c} \varrho v_y, \quad (5) \\ \Delta \mathfrak{F}_z - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{F}}_z &= -\frac{1}{c} \varrho v_z.\end{aligned}$$

Eindelijk vinden we ter bepaling van Ω uit $\text{Div } \mathfrak{G} = \varrho$:

$$-\frac{1}{c} \text{Div } \dot{\mathfrak{F}} - \Delta \Omega = \varrho,$$

en dus wegens (4):

$$\Delta \Omega - \frac{1}{c^2} \ddot{\Omega} = -\varrho. \quad (6)$$

Als we nu uit (6) en (5) Ω en \mathfrak{F} bepaald hebben vinden we uit (1) en (2) ommiddellijk \mathfrak{H} en \mathfrak{E} .

§ 3. *Mathematische hulpstellingen.*

De differentiaalvergelijkingen (6) en (5), waaraan Ω en de componenten van \mathfrak{F} voldoen, zijn alle van de gedaante:

$$c^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -a, \quad (7)$$

waarbij a eene willekeurige bekende functie van de coördinaten en van den tijd voorstelt. We zullen doen zien, dat aan (7) voldaan wordt door:

$$\chi = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} d\tau'. \quad (8)$$

Met den index $t - \frac{r}{c}$ aan den voet der haakjes wordt bedoeld dat de waarde van a genomen moet worden voor die waarde van t . r stelt den afstand voor van het ruimte-element $d\tau'$ tot het punt x, y, z , waar we χ willen bepalen. De integratie in (8) moet worden uitgestrekt over de geheele ruimte waar a op den tijd $t - \frac{r}{c}$ eene van nul verschillende waarde heeft. We kunnen bij onze beschouwingen dit integratiegebied ook veel grooter denken, daar het overige deel der ruimte toch niets oplevert.

We zullen ons steeds voorstellen, dat het punt x, y, z binnen het integratiegebied ligt. De coördinaten van een willekeurig punt van het integratiegebied zullen we x', y', z' noemen. Overeenkomstig deze notatie is in (8) ook $d\tau'$ geschreven.

Om aan te toonen dat de door (8) bepaalde functie aan (7) voldoet moeten we de differentiaalquotienten dier functie bepalen. We moeten daarbij er op letten, dat voor $x' = x, y' = y, z' = z, r = 0$ is en dus de functie onder het integraalteeken oneindig groot wordt.

We zullen daarom beginnen met de afleiding eener algemeene formule voor zulke gevallen.

Zij $I = \int U d\tau'$, waarbij U eene willekeurige functie der coördinaten x', y', z' is, die ook afhangt van de coördinaten x, y, z van het punt waar we I willen bepalen. Dit punt zal binnen het integratiegebied liggen en U zal overal eindig en doorlopend zijn behalve juist in dit punt.

We beginnen dus met van het integratiegebied uit te sluiten een bolletje om dat punt als middelpunt, met een straal R .

De integraal over de overblijvende ruimte zullen we I_R noemen. We hebben dan:

$$I = \lim_{R=0} I_R$$

Zooals bekend is nadert I_R alleen dan tot een bepaalde limiet, wanneer een bepaalde waarde van n kleiner dan 3 kan gevonden worden, zoodat overal in de omgeving van het punt x, y, z , $U r^n$ eindig blijft.

We hebben nu:

$$\frac{\partial I_R}{\partial x} = \lim_{\delta=0} \left[\int_{R, (x+\delta)} U(x+\delta, y, z) d\tau' - \int_{R, (x)} U(x, y, z) d\tau' \right]$$

Met de indices $R, (x+\delta)$ en $R, (x)$ bij de integraalteekens wordt aangewezen, dat van het integratiegebied wordt uitgesloten een bolletje met den straal R , waarvan 't middelpunt in 't eerste geval tot coördinaten heeft $(x+\delta, y, z)$ en in 't tweede (x, y, z) . Het verschil der bijdragen, die een willekeurig ruimte-element $d\tau'$ voor de beide integralen oplevert is $\frac{\partial U}{\partial x} \delta d\tau'$. Bovendien zijn er echter elementen die voor de eerste integraal buiten het integratiegebied vallen, voor de tweede er binnen en omgekeerd. De eerste geven telkens een bedrag $-U \frac{x' - x}{R} \delta dB'$ de tweede evenzoo $U \frac{x - x'}{R} \delta dB'$, waarbij dB' een element van het boloppervlak voorstelt. De beide sommen, wier termen den zelfden vorm verkrijgen, strekken zich samen over den geheelen bol uit.

Wij vinden op deze wijze:

$$\frac{\partial I_R}{\partial x} = \int_R \frac{\partial U}{\partial x} d\tau' - \frac{1}{R} \int (x' - x) U dB', \quad (9)$$

en dus:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau' - \lim_{R=0} \frac{1}{R} \int (x' - x) U dB'. \quad (10)$$

Als een der beide termen in (9) niet tot een bepaalde limiet nadert, verliest het differentiaalquotient $\frac{\partial I}{\partial x}$ zijne beteekenis.

We zullen nu deze uitkomst op (8) toepassen. We moeten daarbij bedenken dat $(a)_t - \frac{r}{c}$ alléén van x, y, z afhangt, omdat het op den tijd $t - \frac{r}{c}$ genomen moet worden. We vinden:

$$4 \pi c^2 \frac{\partial \chi}{\partial x} = \text{Lim}_{R=0} \left[\int_R \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau' - \frac{1}{R} \int (x' - x) \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} dB' \right]. \quad (11)$$

Aan alle punten van het boloppervlak is $\frac{x' - x}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}}$ eindig en we kunnen dus eene eindige constante β aangeven, zoo dat voor alle termen der tweede integraal $\frac{x' - x}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} < \beta$, dan is:

$$\frac{1}{R} \int (x' - x) \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} dB' < \frac{\beta}{R} \int dB' \\ \text{dus} < 4 \pi R \beta.$$

De tweede term in (11) nadert dus met R tot nul. Het is verder door toepassing van bovengenoemd criterium gemakkelijk in te zien, dat de eerste term voor $R = 0$ tot een bepaalde limiet nadert, zoodat we vinden:

$$4 \pi c^2 \frac{\partial \chi}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau',$$

en door weer (10) toe te passen:

$$4 \pi c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \text{Lim}_{R=0} \left[\int_R \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau' - \frac{1}{R} \int (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} dB' \right].$$

De eerste term nadert tot een bepaalde limiet; om den tweeden te herleiden, hebben we:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} = - \frac{x-x'}{r^3} (a)_{t-\frac{r}{c}} - \frac{x-x'}{r^2 c} (\dot{a})_{t-\frac{r}{c}}.$$

De laatste term hiervan levert in de limiet voor $R=0$ eene oneindig kleine bijdrage voor de integraal, zooals we gemakkelijk aantoonen op de zelfde wijze als voor den laatsten term in (11) is gebeurd. We vinden dus:

$$4 \pi c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau' - \lim_{R=0} \frac{1}{R^4} \int (x-x')^2 (a)_{t-\frac{R}{c}} dB'.$$

Verder kunnen we in de laatste integraal $(a)_{t-\frac{R}{c}}$ als eene constante beschouwen, die in de limiet in $(a)_t$ overgaat, waardoor na integratie van dien term komt:

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{4 \pi} \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau' - \frac{1}{3} a,$$

en dus:

$$c^2 \Delta \chi = \frac{1}{4 \pi} \int \Delta \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau' - a.$$

Verder is:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{1}{4 \pi} \int \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau',$$

en dus:

$$c^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - a + \frac{1}{4 \pi} \int \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \frac{1}{r} (a)_{t-\frac{r}{c}} \right\} d\tau',$$

waarbij de beteekenis van het symbool $\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ wel geen toelichting behoeft. Eene eenvoudige berekening voert

tot het, trouwens bekende, resultaat, dat de laatste term nul is en dus:

$$c^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -a,$$

waarmee we bewezen hebben, dat de door (8) bepaalde functie aan de differentiaalvergelijking (7) voldoet.

§ 4. Toepassing op het geval van één bewegend electron.

Door dit resultaat toe te passen op de vergelijkingen (6) en (5) vinden we:

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} (q)_{t-\frac{r}{c}} d\tau'. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} (qv_x)_{t-\frac{r}{c}} d\tau', \\ \mathfrak{F}_y &= \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} (qv_y)_{t-\frac{r}{c}} d\tau', \\ \mathfrak{F}_z &= \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} (qv_z)_{t-\frac{r}{c}} d\tau'. \end{aligned} \quad (13)$$

Wij zullen nu deze integralen berekenen voor een electron dat alleen eene translatiesnelheid v heeft. Daarbij stellen we ons voor, dat dit electron behoort tot een deeltje, dat in zijn geheel genomen in rust verkeert. In dat deeltje heeft het electron een trillende beweging. Wij zullen de tweede machten van $\frac{v}{c}$, de tweede machten der afmetingen van het deeltje, de producten van zulk eene afmeting met een der componenten van v en eindelijk termen waarin een component van v met een component der versnelling vermenigvuldigd is, verwaarloozen.

Wij kiezen nu binnen het deeltje een vast punt 0 met de coördinaten x'_0, y'_0, z'_0 en brengen een coördinatenstelsel aan met dit punt tot oorsprong en assen evenwijdig aan de X, Y, Z as. Coördinaten met betrekking tot dit stelsel zullen we x, y, z noemen.

Den afstand van 0 tot het punt P (x, y, z) waar we den toestand willen bepalen op den tijd t , zullen we door r_o voorstellen en wij zullen $t_o = t - \frac{r_o}{c}$ stellen.

Wij vestigen nu de aandacht op een punt van het electron, dat op den tijd t_o de coördinaten x, y, z heeft. De in dit punt aanwezige lading levert eene bijdrage voor de integralen (12) en (13) in een bepaalden stand, dien zij in den loop der beweging inneemt. Deze stand, Q, wordt bepaald door de voorwaarde, dat als $t_o + t$ de tijd is, waarop hij wordt bereikt:

$$QP = c(t - t_o - t).$$

Hieruit volgt:

$$(x - x_o' - x - v_x t)^2 + (y - y_o' - y - v_y t)^2 + \\ (z - z_o' - z - v_z t)^2 = c^2(t - t_o - t)^2,$$

of met de aangegeven verwaarloozing:

$$(x - x_o')^2 + (y - y_o')^2 + (z - z_o')^2 \\ - 2 \{ x(x - x_o') + y(y - y_o') + z(z - z_o') \} \\ - 2t \{ v_x(x - x_o') + v_y(y - y_o') + v_z(z - z_o') \} \\ = c^2(t - t_o)^2 - 2c^2(t - t_o)t,$$

of, daar $r_o^2 = c^2(t - t_o)^2$:

$$r_o(c - v_{r_o})t = x(x - x_o') + y(y - y_o') + z(z - z_o'). \quad (14)$$

Hieruit blijkt, dat t van dezelfde orde van grootte is als $\frac{x}{c}$, $\frac{y}{c}$, $\frac{z}{c}$, zoodat er geen bezwaar tegen kan zijn dat bij deze berekening de termen met t^2 verwaarloosd zijn en de beweging gedurende den tijd t als eenparig is beschouwd.

De coördinaten van 't punt Q zijn nu:

$$x' = x_o' + x + v_x t, \quad y' = y_o' + y + v_y t, \quad z' = z_o' + z + v_z t.$$

Aan ieder punt van 't electron beantwoordt op deze wijze een punt van de ruimte, dat voor de integralen (12) en (13) eene bijdrage levert. Wij kunnen nu b.v. (12) vervangen door eene integraal over de ruimte, die het electron op den tijd t_0 inneemt door x, y, z als nieuwe veranderlijken in te voeren. Wij merken nog op dat, met de aangegeven verwaarloozingen, onder r , waarvoor eigenlijk de afstand P Q moet genomen worden, ook mag verstaan worden de afstand van P tot het punt waar het beschouwde element van het electron zich op den tijd t_0 bevindt.

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} (\rho)_{t-\frac{r}{c}} dx' dy' dz' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} \frac{\partial (x', y', z')}{\partial (x, y, z)} dx dy dz.$$

Hierin stelt $\frac{\partial (x', y', z')}{\partial (x, y, z)}$ den functionaaldeterminant voor, die op de volgende wijze gevonden wordt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + v_x \frac{\partial t}{\partial x} & v_x \frac{\partial t}{\partial y} & v_x \frac{\partial t}{\partial z} \\ v_y \frac{\partial t}{\partial x} & 1 + v_y \frac{\partial t}{\partial y} & v_y \frac{\partial t}{\partial z} \\ v_z \frac{\partial t}{\partial x} & v_z \frac{\partial t}{\partial y} & 1 + v_z \frac{\partial t}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ = 1 + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Met behulp van (14) herleiden we dit tot:

$$1 + \frac{v_{r_0}}{c},$$

zoodat we krijgen:

$$4 \pi \Omega = \int \frac{\rho}{r} \left(1 + \frac{v_{r_0}}{c} \right) dr'.$$

Evenzoo vinden we:

$$4 \pi c \tilde{\mathfrak{S}}_x = \int \frac{Q v_x}{r} \left(1 + \frac{v_{r_0}}{c}\right) d\tau',$$

$$4 \pi c \tilde{\mathfrak{S}}_y = \int \frac{Q v_y}{r} \left(1 + \frac{v_{r_0}}{c}\right) d\tau',$$

$$4 \pi c \tilde{\mathfrak{S}}_z = \int \frac{Q v_z}{r} \left(1 + \frac{v_{r_0}}{c}\right) d\tau',$$

waarbij nu al de integralen moeten worden uitgestrekt over de ruimte van 't electron en berekend op den tijd $t_0 = t - \frac{r_0}{c}$.

In de integralen, die $\tilde{\mathfrak{S}}$ bepalen, kunnen we de termen $\frac{v_{r_0}}{c}$ weglaten.

§ 5. *Polarisatie-electronen.*

Wij zullen ons nu deeltjes voorstellen, die positieve en negatieve electronen bevatten, zoo dat de som van de positieve ladingen gelijk en tegengesteld is aan die der negatieve.

We denken ons de positieve electronen aan bepaalde punten van het molecuul gebonden. Verder zullen we eenvoudigheds halve ons denken dat slechts één negatief electron voorkomt, dat zich in alle richtingen kan bewegen maar zich slechts zeer weinig verwijdert uit een bepaalden evenwichtsstand. Wij zullen ons voorstellen, dat het deeltje geen werking op eenigen afstand uitoefent als het negatieve electron zich in zijn evenwichtsstand bevindt.

Als het eene uitwijking uit dien stand heeft, zeggen we dat het deeltje gepolariseerd is.

De electronen, die deze deeltjes bevatten, noemen we polarisatie-electronen.

De werking van het geheele deeltje op eenigen afstand wordt bepaald door (1) en (2), waarin we voor Ω en $\tilde{\mathfrak{S}}$ de som

moeten nemen van de overeenkomstige grootheden voor de afzonderlijke electronen.

Om deze verder te herleiden brengen we weer het coördinatenstelsel met den oorsprong 0 aan. Wij kunnen dan stellen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + x \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right)_0 + y \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right)_0 + z \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right)_0,$$

en dus voor het negatieve electron, steeds grootheden van de tweede orde weglatend:

$$4 \pi \Omega = \frac{1}{c r_0} \int \rho v_r d\tau' + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right)_0 \int \rho x d\tau' + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right)_0 \int \rho y d\tau' + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right)_0 \int \rho z d\tau'. \quad (15)$$

Voor de positieve electronen vinden we eene dergelijke uitkomst, waar alleen de eerste term ontbreekt, omdat daar $v_r = 0$ ondersteld is. Wij kunnen dus Ω voor het geheele deeltje vinden door in (15) de integralen ook over het geheele deeltje uit te strekken. Verder vinden we \mathfrak{F} voor het geheele deeltje (gelijk aan de waarde voor het negatieve electron alleen) uit:

$$\begin{aligned} 4 \pi c \mathfrak{F}_x &= \frac{1}{r_0} \int \rho v_x d\tau', \\ 4 \pi c \mathfrak{F}_y &= \frac{1}{r_0} \int \rho v_y d\tau', \\ 4 \pi c \mathfrak{F}_z &= \frac{1}{r_0} \int \rho v_z d\tau'. \end{aligned} \quad (16)$$

Wij zullen bij deze deeltjes den vector:

$$p = \int \rho r d\tau', \quad (17)$$

invoeren, waarbij r den voerstraal van 't punt 0 naar een element $d\tau'$ voorstelt. (17) is een vector-vergelijking, ze is

aequivalent met de volgende drie, waardoor de componenten van p bepaald worden:

$$\begin{aligned} p_x &= \int q x \, d\tau', \\ p_y &= \int q y \, d\tau', \\ p_z &= \int q z \, d\tau'. \end{aligned} \quad (17')$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat de vector p onafhankelijk is van de richting der coördinaten-assen en omdat $\int q \, d\tau' = 0$ is ook van de plaats van den oorsprong.

Uit (17) volgt:

$$\dot{p} = \int q v \, d\tau', \quad (18)$$

een vector-vergelijking, die evenals (17), door drie vergelijkingen voor de componenten kan vervangen worden.

Met behulp van dezen vector kunnen we nu onze uitkomsten als volgt voorstellen:

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega &= \left(p_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right)_{t-\frac{r_0}{c}} + \left(p_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right)_{t-\frac{r_0}{c}} + \left(p_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right)_{t-\frac{r_0}{c}} \\ &\quad + \frac{1}{c} \left(\dot{p}_r \right)_{t-\frac{r_0}{c}}, \\ 4\pi c \tilde{\mathcal{D}}_x &= \left(\dot{p}_x \right)_{t-\frac{r_0}{c}}, \quad 4\pi c \tilde{\mathcal{D}}_y = \left(\dot{p}_y \right)_{t-\frac{r_0}{c}}, \quad 4\pi c \tilde{\mathcal{D}}_z = \left(\dot{p}_z \right)_{t-\frac{r_0}{c}}. \end{aligned}$$

Nu is $\frac{\partial}{\partial x'} = -\frac{\partial}{\partial x}$. Verder kunnen we bovenstaande

formules nog herleiden door toepassing van:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{r} \right)_{t-\frac{r_0}{c}} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right)_{t-\frac{r_0}{c}} - \left(\frac{1}{c r} \frac{\partial r}{\partial x} \dot{p}_x \right)_{t-\frac{r_0}{c}}$$

enz.

waarbij weer de termen van de tweede orde verwaarloosd zijn. We vinden dan:

$$4\pi\Omega = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_y}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_z}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}} \quad (19)$$

en

$$\begin{aligned} 4\pi c \mathfrak{F}_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_x}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}, \\ 4\pi c \mathfrak{F}_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_y}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}, \\ 4\pi c \mathfrak{F}_z &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_z}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}, \end{aligned} \quad (20)$$

waarbij nog r_0 door r vervangen is, omdat het volgens onze onderstellingen geen verschil maakt, welk punt binnen het deeltje we als 't punt 0 kiezen.

§ 6. De bewegings-vergelijkingen van een polarisatie-electron.

De formules (17) en (18) zouden ook gelden voor een geval, dat wat algemeener is dan wij onderstelden, namelijk dat de dichtheid der lading geleidelijk van punt tot punt binnen het deeltje veranderde. Wij zullen ons echter houden aan het eenvoudigste geval, dat in het begin der vorige § werd beschreven.

Het komt er nu vooreerst op aan de beweging van het negatieve electron te beschrijven. Bij iedere uitwijking uit

den evenwichtsstand zal op het electron eene kracht werken, die het naar den evenwichtsstand terug drijft, bij kleine uitwijkingen kunnen we die kracht evenredig aan de uitwijking stellen. In een isotroop medium zal ze steeds dezelfde richting hebben als de uitwijking en hare grootte zal van de richting niet afhankelijk zijn. Verder zal op het electron steeds eene electriche kracht werken. Om de grootte dezer kracht te vinden moeten we er op letten, dat het deeltje zelf ook een electricch veld te weeg brengt. Door de formules (12) en (13) toe te passen voor kleine waarden van r , vinden we betrekkelijk gemakkelijk ¹⁾ dat het belangrijkste deel der kracht, die het negatieve electron tengevolge daarvan ondervindt, evenredig is met zijne versnelling, verder blijkt er eene kracht te werken, evenredig met het differentiaalquotient van de versnelling naar den tijd. Bij enkelvoudig periodieke toestanden kunnen we deze evenredig aan de snelheid stellen, ze is daaraan tegengesteld gericht. Overigens is de electriche kracht over de geheele ruimte, die het deeltje inneemt, constant. Laten we overeenkomstig onze onderstelling, dat de uitwijking en snelheid van het deeltje steeds zeer klein zijn, den invloed van het magnetisch veld buiten rekening, ¹⁾ dan kunnen we de uitwendige kracht die op het electron werkt voorstellen door het product van de lading en de electriche kracht in het punt waar het deeltje zich bevindt.

De bewegings-vergelijkingen van het negatieve electron zijn nu, als we de componenten der uitwijking ξ, η, ζ noemen:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial \xi}{\partial t} - a \xi - e \mathfrak{E}_x, \\ m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial \eta}{\partial t} - a \eta - e \mathfrak{E}_y, \\ m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial \zeta}{\partial t} - a \zeta - e \mathfrak{E}_z. \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁾ Vgl. Lorentz. La théorie électro-magnétique enz.

Den coëfficiënt m in deze formules zullen we de massa van het electron noemen, hij heeft natuurlijk voor een deel zijne waarde te danken aan de bovengenoemde electriche kracht, die het deeltje zelf te weeg brengt, we zullen in het midden laten of het electron overigens nog eene „ware” massa heeft, evenzoo zullen we niet verder ingaan op de oorzaak van den term met den coëfficiënt β ¹⁾; $a\xi$, $a\eta$, $a\zeta$ zijn de componenten der kracht, die het electron naar zijn evenwichtsstand trekt en $-e$ is de lading van het negatieve electron. Wij zullen m , e , β en a als constanten beschouwen.

Uit de formules (21) blijkt, dat ook bij afwezigheid van een uitwendig electriche veld het electron eene bepaalde beweging zal kunnen hebben; wegens den term evenredig met de snelheid, die eene wrijving voorstelt, zal deze, al is β nog zoo klein, op den duur worden uitgeput. We zullen aannemen, dat β zeer klein is, zoodat in de meeste gevallen de termen, die dezen coëfficiënt bevatten kunnen worden verwaarloosd.

Wanneer een component der electriche kracht voortdurend nul is, kunnen we zeggen dat ook de overeenkomstige component der uitwijking voortdurend nul zal zijn.

Het verband tusschen ξ , η , ζ en de componenten van p is zeer eenvoudig. Wij kunnen in (17') de integralen opvatten als sommen van integralen, elk uitgestrekt over één der electronen, die het deeltje bevat. Zijn nu voor een punt van het negatieve electron de coördinaten in den evenwichtsstand x_0 , y_0 , z_0 , dan

¹⁾ Wanneer men de electronen-theorie zelfs wil gebruiken om de grondslagen der geheele mechanica af te leiden (zie b. v. Wien: Lorentz-gedenkboek, pag. 96), den mag men eene ware massa niet aannemen en ook niet den coëfficiënt β verklaren als het gevolg van eene wrijving tusschen electron en molecuul (vgl. hierbij ook Abraham Ann. der Phys. 10, 1903, pag. 108 en 109.) Dit laatste is stellig slechts eene ruwe voorstelling. In de verslagen der K. A. v. W., deel VI, vindt men eene theorie van Lorentz, waar de absorptie wordt verklaard door den invloed van de botsingen der moleculen op de beweging der electronen. Schrijft men den term met β alleen toe aan de werking van de lading van 't deeltje zelf, dan is ze te klein om bij de abnormale dispersie de absorptie te verklaren (zie echter Planck Sitzungsberichte der K. P. A. d. W., 21 April 1904).

zijn ze bij eene willekeurige uitwijking $x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta$. Door dit te substitueeren, vinden we door toepassing van de eigenschap, dat het electron geen werking naar buiten oefent en p dus nul is, als 't negatieve deeltje in den evenwichtsstand is:

$$p_x = \xi \int \rho \, d\tau',$$

enz.

waarbij de integratie is uit te strekken over het negatieve electron, zoodat we vinden:

$$\begin{aligned} p_x &= -e \xi, \\ p_y &= -e \eta, \\ p_z &= -e \zeta. \end{aligned}$$

Wij kunnen nu in plaats van de vergelijkingen (21) ook schrijven:

$$\begin{aligned} m \ddot{p}_x + \beta \dot{p}_x + \alpha p_x &= e^2 \mathcal{E}_x, \\ m \ddot{p}_y + \beta \dot{p}_y + \alpha p_y &= e^2 \mathcal{E}_y, \\ m \ddot{p}_z + \beta \dot{p}_z + \alpha p_z &= e^2 \mathcal{E}_z. \end{aligned} \tag{22}$$

§ 7. *Manier, waarop we het vraagstuk zullen behandelen.*

Wij zullen nu weer een medium beschouwen, dat zeer vele polarisatie-electronen bevat. Bij een isotroop medium zullen deze volkomen onregelmatig verspreid zijn.

We hebben dan overal buiten die electronen de vergelijkingen I en overal binnen die electronen de vergelijkingen II. In het laatste geval is dan nog (21) noodig voor het verband tusschen v en de overige vectoren.

Eene volledige oplossing zou nu voor elk der vectoren functies van de coördinaten en den tijd moeten geven, die aan I en andere die aan II voldoen, terwijl dan het verband tusschen die functies bepaald zou zijn doordat aan het oppervlak van elk

electron voldaan moet worden aan de algemeene voorwaarden aan discontinuïteitsvlakken:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_h)_I &= (\mathcal{E}_h)_{II}, & (\mathcal{H}_h)_I &= (\mathcal{H}_h)_{II}, \\ (\mathcal{E}_n)_I &= (\mathcal{E}_n)_{II}, & (\mathcal{B}_n)_I &= (\mathcal{B}_n)_{II}, \end{aligned} \quad \text{III}$$

waarbij h eene willekeurige richting in het discontinuïteitsvlak voorstelt, n de normaal op dat vlak en met de indices I en II waarden aan beide zijden van dat vlak worden onderscheiden.

Om deze oplossing te vinden zouden natuurlijk vooreerst de gedaante en den stand van elk der grensvlakken moeten bekend zijn. Het vraagstuk is echter wegens het groote aantal en de onregelmatige verspreiding der electronen niet op dergelijke mathematisch nauwkeurige wijze op te lossen. Trouwens van de bijzonderheden, die deze oplossing zou aangeven, kan men toch niets waarnemen, daar ons oog slechts ruimten onderscheiden kan, die zeer vele moleculen en dus ook zeer vele electronen bevatten. Wat we bij onze proeven als electriche en magnetische kracht waarnemen zijn middelwaarden der overeenkomstige vectoren over ruimten, die ons oog nog juist onderscheiden kan, desnoods met behulp van optische toestellen. Zulke ruimten zullen we physisch oneindig klein noemen, hare afmetingen zijn veel kleiner dan de golflengten van het licht van het zichtbare spectrum, maar we zullen ze in vergelijking met de electronen zoo groot denken, dat we zulk eene ruimte in een groot aantal elementen kunnen verdeelen, die elk nog vele electronen bevatten.

Het ligt nu voor de hand te trachten eene oplossing te vinden die ons deze middelwaarden doet kennen.

Wij zullen daaraan eene bespreking van sommige eigenschappen der middelwaarden doen voorafgaan.

HOOFDSTUK IV.

Stellingen over middelwaarden.

§ 1. Definitie der middelwaarden.

Grootheden, die grillig veranderen over afstanden van de orde van grootte der moleculaire afmetingen, komen in de physica dikwijls voor. In zulke gevallen zullen we steeds bij onze proeven te doen hebben met middelwaarden, telkens genomen over eene physisch oneindig kleine ruimte T . Het is dan ook in de theorie steeds van belang deze middelwaarden te beschouwen.

Als middelwaarde $\bar{\varphi}$ eener grootheid φ definieeren we:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int \varphi \, d\tau, \quad (1)$$

waarbij de integratie over alle elementen der ruimte T moet worden uitgestrekt.

In de gevallen, die in de natuur voorkomen, waarop wij deze beschouwing zullen toepassen, zal $\bar{\varphi}$ doorgaans slechts zeer weinig veranderen, als we voortgaan over een afstand van de orde der afmetingen van T . Gaat dit niet op, zooals 'tgeval zou zijn bij eene golfbeweging met zeer kleine golflengte, dan verliest de beschouwing der middelwaarden hare physische beteekenis. Op 't genoemde voorbeeld komen we in de volgende hoofdstukken terug. Letten we nu niet op zulke uitzonderingsgevallen, dan kunnen we beweren dat vorm en grootte der

ruimte T onverschillig zijn, het is dan natuurlijk voor T een bol te nemen wiens middelpunt ligt in het punt, waarvoor we de middelwaarde berekenen.

Soms is het echter voordeelig eene andere keuze voor de ruimte T te doen.

§ 2. Voorwaarden voor het bestaan van middelwaarden.

Wanneer de grootheid φ binnen de ruimte T oneindig groot kan worden, is het niet à priori zeker, dat we aan de integraal (1) eene beteekenis kunnen hechten.

Wij kunnen daarbij drie gevallen onderscheiden. Zij voor- eerst φ oneindig in een punt P , maar in alle punten in de omgeving eindig en doorlopend. Beschouwen we nu de waarden van φ binnen een bolletje om P , met den zeer kleinen straal r . Zij r de afstand van eenig punt tot P . We trachten nu een eindig positief getal n te vinden, zoodat voor ieder punt binnen het beschouwde bolletje $|\varphi| < A r^{-n}$, waarbij A eveneens eene eindige constante is. (We hebben hier $|\varphi|$ geschreven om aan te geven dat we niet willen letten op het teeken van φ .) Bestaat zulk een getal n niet, dan is de integraal (1) divergent en er kan niet van eene middelwaarde gesproken worden. Opdat (1) convergent zij, 't geen de noodzakelijke voorwaarde is voor 't bestaan der middelwaarde, moet bovendien $n < 3$ zijn.

Er kunnen natuurlijk ook meerdere afzonderlijke punten P voorkomen, waar φ oneindig wordt. Zoolang hun aantal eindig is en in elk afzonderlijk de gevonden voorwaarde geldt, blijft de integraal (1) convergent. Overeenkomstige opmerkingen kunnen ook in de beide volgende gevallen gemaakt worden.

Is φ oneindig in alle punten eener lijn die geheel of gedeeltelijk in het integratiegebied ligt, dan kunnen we de convergentie der integraal (1) onderzoeken, door om deze lijn als as eene buisvormige holte te beschrijven. Zij l de afstand van

een punt tot deze lijn, dan zullen we binnen deze holte weer moeten hebben $|\varphi| < Al^{-n}$. Is er geen eindig getal n zoodat aan deze voorwaarde voldaan is, dan is de integraal divergent. Opdat ze convergent zij, moet bovendien $n < 2$ zijn.

Het derde geval, dat we te bespreken hebben, is dat, waarbij φ oneindig wordt in alle punten van een vlak. Nu beschrijven we eene laagvormige ruimte, waarvan de zijvlakken aan beide zijden van 't vlak loopen. Zij d de afstand van een punt tot dat vlak, dan moeten we hebben binnen deze laag $|\varphi| < Ad^{-n}$, waarbij nu $n < 1$ moet zijn.

§ 3. *Middelwaarde van het differentiaalquotient eener discontinue functie.*

Wij zullen te doen krijgen met het geval, dat de functie φ het differentiaalquotient is in een of andere richting van eene functie ψ , die aan een vlak discontinu is. Om te definieeren wat we in dat geval onder de middelwaarde zullen verstaan, zullen we het beschouwen als de grens van een ander, waarbij de functie φ in eene dunne laag langs dat vlak wel zeer snel, maar toch geleidelijk verandert. Wij moeten dan de limiet nemen voor het geval, dat de dikte dezer laag nul wordt. Zij b. v. $\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial h}$ en beschouwen we het geval, dat ψ aan een plat vlak, loodrecht op h discontinu is. We denken ons eene functie ψ_0 , die overal met ψ overeenkomt, behalve in de onmiddellijke nabijheid van 't discontinuïteitsvlak, waar ze in eene zeer dunne laag geleidelijk overgaat van de waarde ψ_1 , die ψ aan de eene zijde van 't discontinuïteitsvlak heeft tot de waarde ψ_2 aan de andere zijde. Eigenlijk moeten we nemen de waarden op afstanden van 't discontinuïteitsvlak gelijk aan de halve dikte der overgangslaag. Maar in de limiet zullen deze overgaan in de waarden aan dat vlak.

We denken ons eenvoudigheidshalve, dat ψ_1 en ψ_2 voor alle punten van 't discontinuïteitsvlak de zelfde waarde hebben.

De dikte der overgangslaag zullen we d noemen. Wij zullen nu de middelwaarde $\bar{\varphi}$ definiëren door de vergelijking:

$$\bar{\varphi} = \text{Lim}_{d=0} \frac{\partial \psi_0}{\partial h}.$$

Nu is:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + \int_{T_2} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau,$$

waarbij met de letter aan den voet van 't integraalteeken het integratiegebied wordt aangegeven. T_2 is het deel der overgangslaag, dat binnen de ruimte T valt en T_1 't overige deel der ruimte T . We hebben dan verder:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + O \int_0^d \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d h.$$

Hierbij stelt O het oppervlak voor, dat door de begrenzing der ruimte T van 't discontinuïteitsvlak wordt afgesneden. Wij hebben hierbij gebruik gemaakt van de omstandigheid, dat ψ_1 en ψ_2 niet van de plaats op 't discontinuïteitsvlak afhangen, zoodat 't zelfde van $\frac{\partial \psi_0}{\partial h}$ in de overgangslaag kan ondersteld worden. De laatste integratie kunnen we nu onmiddellijk geheel uitvoeren, waardoor we vinden:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + O \{ \psi_2 - \psi_1 \}.$$

In deze formule kunnen we nu d tot 0 laten overgaan, dan wordt $\frac{\partial \psi_0}{\partial h} = \frac{\partial \psi}{\partial h} = \varphi$ voor alle punten, behalve die aan 't discontinuïteitsvlak, waar $\frac{\partial \psi}{\partial h}$ geen beteekenis heeft. En we vinden volgens onze definitie:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{T_1} \varphi d\tau + \frac{O}{T} \{ \psi_2 - \psi_1 \}, \quad (2)$$

waarin 't integratiegebied T_1 't zelfde is als T met uitsluiting der oneindige waarden van φ .

We kunnen het bovenstaande gemakkelijk uitbreiden tot het geval dat ψ discontinu is aan een willekeurig oppervlak S , waarbij we tevens 't algemeene geval zullen aannemen, dat de waarden ψ_1 en ψ_2 aan weerszijden van dat oppervlak van punt tot punt langs het oppervlak geleidelijk veranderlijk zijn. We nemen dan een coördinatenstelsel λ, μ, ν aan, zoodat 't oppervlak S een der oppervlakken $\lambda = \text{constant}$ is. De ruimte, die uit T wordt afgesneden door eene dunne laag, wier zijvlakken langs S loopen, zullen we weer T_2 noemen, 't overige deel T_1 . Met notaties, die geheel met de voor 't vorige geval ingevoerde overeenkomen, is nu:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + \int_{T_2} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \\ \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + \int_S dS \int_0^d \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\lambda,$$

dS stelt een element van 't oppervlak S voor en kan natuurlijk in μ en ν en hunne differentiaalën worden uitgedrukt. We hebben nu verder:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + \int_S dS \int_0^d \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \chi d\lambda,$$

waarbij χ eene functie is van de plaats op 't oppervlak S , dus ook van de coördinaten μ en ν . We kunnen nu de laatste integratie weer uitvoeren en vinden:

$$\int_T \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau = \int_{T_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial h} d\tau + \int_S dS \chi (\psi_2 - \psi_1)$$

en voor de grens als $d = 0$ is:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial \psi}{\partial h} + \frac{1}{T} \int_S (\psi_2 - \psi_1) \chi dS. \quad (3)$$

§ 4. *Differentiaalquotienten van middelwaarden.*

We zullen nu eenige stellingen bespreken over de differentiaalquotienten van $\bar{\varphi}$. Denken we ons dat φ , behalve van de coördinaten, nog afhangt van een parameter t , ook $\bar{\varphi}$ zal dan van t afhangen.

Wanneer $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ in ieder punt eindig en doorlopend is, zal 't zelfde gelden voor $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}$, want:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_T \varphi d\tau = \frac{1}{T} \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau.$$

Voor de laatste integraal kunnen we volgens vergelijking (1) schrijven $T \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}$, we hebben dus tevens bewezen:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}. \quad (4)$$

De vergelijking (4) blijft gelden zoolang elk der integralen $\int_T \varphi d\tau$ en $\int_T \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau$ eene bepaalde waarde heeft, 't geen voor elk afzonderlijk, volgens 't voorgaande, kan onderzocht worden.

Voor 't onderzoek van het differentiaalquotient $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial h}$, waarbij h eene willekeurige richting voorstelt, zullen we vooreerst ons denken dat φ in 't geheele beschouwde gebied eindig en doorlopend is. We zullen de richting h tot die der X-as kiezen.

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_T \varphi d\tau. \quad (1)$$

Om nu $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$ te vinden, moeten we ook de waarde van $\bar{\varphi}$ bepalen in een punt, op een afstand δx in de richting der

X-as gelegen, van dat waarvoor (1) geldt. Hiervoor vinden we:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T'} \int_{T'} \varphi d\tau,$$

als T' de ruimte voorstelt begrensd door 't oppervlak, dat we verkrijgen door 't oppervlak dat T begrenst, in de richting der X-as, over een afstand δx , te verschuiven. T' is dus even groot als T . Om nu de beide integralen te vergelijken, verdeelen we eerst het integratie-gebied T op willekeurige wijze in elementen $d\tau$. Wij kunnen dan T' zoodanig in elementen $d\tau'$ verdeelen, dat ieder element overeenkomt met een der elementen $d\tau$ en daaruit kan verkregen worden door dit over een afstand δx , in de richting der X-as, te verschuiven.

Wij hebben nu:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \lim_{\delta x = 0} \frac{1}{\delta x} \frac{1}{T} \left\{ \int_{T'} \varphi d\tau' - \int_T \varphi d\tau \right\}.$$

Elk element $d\tau$ levert nu voor 't verschil der integralen eene bijdrage $\{ \varphi(x + \delta x) - \varphi(x) \} d\tau$, zoodat we krijgen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} &= \lim_{\delta x = 0} \frac{1}{\delta x} \frac{1}{T} \int_T \{ \varphi(x + \delta x) - \varphi(x) \} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_T \lim_{\delta x = 0} \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} d\tau = \frac{1}{T} \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau, \end{aligned}$$

en dus
$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \bar{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}. \quad (5)$$

Stelling en bewijs blijven gelden zoolang de beide integralen

$$\int_T \varphi d\tau \text{ en } \int_T \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau$$

eene bepaalde waarde hebben, 't geen volgens het voorgaande onderzocht kan worden.

Het geval, dat φ discontinu is aan een vlak S, dat gedeeltelijk binnen de beschouwde ruimte ligt, moet echter afzonderlijk behandeld worden. Wij zullen bij dit onderzoek

ook weer eerst 't geval nemen, dat S een plat vlak is, loodrecht op de richting waarin wij differentieeren en dat de waarden van φ aan beide zijden van 't vlak, φ_1 en φ_2 niet afhangen van de plaats op het vlak. Kiezen we de richting waarin we differentieeren, weer tot die der X -as, dan hebben we volgens 't vroeger gevondene, formule (2):

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau + \frac{O}{T} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Om nu $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ te vinden, gaan we weer uit van de definitie $\overline{\varphi} = \frac{1}{T} \int_T \varphi d\tau$. We zullen ook nu weer T verdeeld denken in de stukken T_1 en T_2 en ons T_1 vooreerst weer voorstellen als een laag van eindige, hoewel zeer kleine, dikte d .

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{T} \operatorname{Lim}_{\delta x = 0} \frac{1}{\delta x} \left\{ \int_{T'} \varphi d\tau - \int_T \varphi d\tau \right\},$$

waarin T' dezelfde beteekenis heeft als bij 't voorgaande. We zullen uit de ruimte T' ook weer het stuk T_2 afzonderen, het overschietende zullen we T'_1 noemen, dan is natuurlijk ook:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{T} \operatorname{Lim}_{\delta x = 0} \frac{1}{\delta x} \left\{ \int_{T'_1} \varphi d\tau - \int_{T_1} \varphi d\tau \right\}.$$

Stellen we nu weer in de eerste integraal $x + \delta x$ in plaats van x , dan worden de grenzen van 't integratiegebied zoodanig gewijzigd, dat dit met T_1 samenvalt, behalve dat aan de eene zijde van de ruimte T_1 eene oneindig dunne laag (ter dikte δx) buiten T_1 valt, terwijl aan de andere zijde T_1 een dergelijke laag bevat, die buiten 't gewijzigd integratiegebied der eerste integraal ligt. We vinden dus:

$$\int_{T'_1} \varphi d\tau = \int_{T_1} \varphi (x + \delta x) d\tau + O \varphi_2 \delta x - O \varphi_1 \delta x,$$

en dus:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_{T_1} \text{Lim}_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} d\tau + \frac{0}{T} (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau + \frac{0}{T} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Hiermede is ook voor dit geval bewezen:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

De uitbreiding tot het algemeene geval, overeenkomend met dat waarop formule (3) betrekking heeft, is ook hier eenvoudig.

Het is verder gemakkelijk in te zien, dat deze uitkomsten ook nog geldig zijn als het discontinuïteits oppervlak S een deel der begrenzing der ruimte T vormt. Wij moeten daarbij echter vaststellen, dat bij 't integreeren de punten van het oppervlak S steeds gerekend worden te behooren tot de ruimte-elementen, die binnen dat oppervlak liggen.

Verder hebben we, als φ eindig en doorlopend is:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial h^2} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial h} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial h}} \right) = \overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2}}, \quad (6)$$

wat ook weer blijft gelden zoolang de beide integralen $\int_T \varphi d\tau$ en $\int_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} d\tau$ convergent zijn. Op de zelfde wijze hebben we:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial h \partial k} = \overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h \partial k}}, \quad (7)$$

enz.

Ook deze stellingen moeten nader onderzocht worden voor 't geval dat φ aan een vlak S onderlopend is. Wij zullen ook nu weer behandelen het geval dat S een plat vak is, loodrecht op de richting der differentiatie, die we weer tot X -as zullen kiezen en we zullen ook weer ons denken dat φ_1 en φ_2 onafhankelijk zijn van de coördinaten y en z . Brengen we langs

het discontinuïteitsvlak weer een dunne laag aan en beschouwen vooreerst de functie φ_0 die overal met φ overeenkomt, behalve in deze laag, waar ze geleidelijk overgaat van φ_1 tot φ_2 . Daarbij zal ook $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$, hoewel het groote waarden doorloopt, geleidelijk overgaan van $(\frac{\partial \varphi}{\partial x})_1$, de waarde van $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ op oneindig kleinen afstand aan de negatieve zijde van 't vlak, tot $(\frac{\partial \varphi}{\partial x})_2$ de overeenkomstige waarde aan de andere zijde. We kunnen dan weer tot het geval overgaan, waarom het ons te doen is, door de dikte der laag tot nul te laten naderen.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}} \right) = \frac{1}{T} \lim_{\delta x = 0} \frac{1}{\delta x} \left\{ \int_{T_1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} d\tau - \int_{T_1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} d\tau \right\},$$

De term $\frac{0}{T} (\varphi_2 - \varphi_1)$ moet zoowel bij de integraal over T' , als bij die over T_1 worden opgeteld zoodat ze bij 't verschil wegvalt. Eigenlijk moeten we hierbij er opletten dat de ruimte T' van het discontinuïteitsvlak een stuk O' zal afsnijden, dat nog van O verschillen kan. Dit geeft aanleiding tot een term die met betrekking tot δx van de tweede orde is en dus na de deeling door δx in de limiet nog nul oplevert.

Stellen we nu weer in de eerste integraal $x + \delta x$ in de plaats van x , dan wordt het integratiegebied weer herleid tot T_1 behalve dat aan de eene zijde van T_2 er eene laag bij is, terwijl er aan de andere eene ontbreekt. Zoo vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}} \right) &= \frac{1}{T} \int_{T_1} \lim_{\delta x = 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \varphi_0 (x + \delta x) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}}{\delta x} d\tau + \\ &\quad \frac{0}{T} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} d\tau + \frac{0}{T} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 \right\}. \end{aligned}$$

Hierin kunnen we direct $d = 0$ laten worden en dus φ_0 door φ vervangen.

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ vinden we uit:

$$\overline{\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}} = \frac{1}{T} \int_T \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} d\tau = \frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial^2 x} d\tau + \frac{1}{T} \int_{T_2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} d\tau =$$

$$\frac{1}{T} \int_{T_1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} d\tau + \frac{0}{T} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 \right\},$$

door hierin d tot nul te laten naderen en dus φ_0 door φ te vervangen.

$$\text{We hebben dus weer: } \overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right),$$

waaruit door toepassing van 't vroeger bewezene

$$\overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Het bewijs van 't algemeene geval, waarop formule (3) betrekking heeft, loopt weer volkomen parallel met 't behandelde.

§ 5. Berekening der middelwaarde voor een bepaald geval.

Wij zullen nu nog in een bepaald geval voor de middelwaarde eener grootheid eene uitdrukking afleiden, die wij in 't volgende noodig zullen hebben.

Denken wij ons een functie φ , die slechts van nul verschillende waarden heeft binnen bepaalde ruimten, die in de ruimte, die wij beschouwen, volkomen onregelmatig verspreid zijn, zeer talrijk zijn en elk voor zich zeer klein, zoodat ze overeenkomen met de ruimten, die naar onze onderstellingen door de electronen in een disperseerend medium worden ingenomen. Om ons gemakkelijker uit te kunnen drukken stellen we ons voor dat de bedoelde ruimten door „deeltjes” worden ingenomen. Het aantal

dezer deeltjes per volume-eenheid N , zal van punt tot punt langzaam veranderlijk zijn, de waarde van N , die wij aan een punt P toekennen, leiden we af uit het aantal deeltjes binnen eene physisch oneindig kleine ruimte, die P tot middelpunt heeft. We zullen ons denken, dat φ binnen deze deeltjes nog veranderlijk is en willen nu de middelwaarde van φ zoeken over eene physisch oneindig kleine ruimte T . We zullen aannemen, dat de verspreiding der deeltjes en de functie φ zóó zijn, dat de gedaante der ruimte T onverschillig is.

Het komt er dus op aan $\int_T \varphi \, dv$ te berekenen. Om daar-

toe te komen zullen we eerst een ander vraagstuk oplossen.

Eene grootheid φ zal in elk der bedoelde deeltjes in een aantal afzonderlijke punten A_1, A_2, \dots, A_k in alle deeltjes congruent geplaatst, de waarden $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ hebben. Vooreerst zullen we ons denken, dat deze voor al de deeltjes de zelfde zijn en in ieder deeltje $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k = 0$ is. Gevraagd wordt te berekenen $\Sigma \varphi$ uitgestrekt over alle punten A binnen de physisch oneindig kleine ruimte T , waarbij we ons zullen voorstellen dat het oppervlak S der ruimte T steeds sommige der deeltjes zal doorsnijden. Is dit niet het geval dan zou $\Sigma \varphi = 0$ zijn en wanneer we dus niet zorgen dat S steeds eenige der deeltjes doorsnijdt, kan zeker $\Sigma \varphi$ niet geleidelijk veranderen bij verplaatsing door de ruimte en kan de middelwaarde $\frac{1}{T} \Sigma \varphi$ ook niet onafhankelijk zijn van de bijzondere keuze van T . Wij zullen uit het volgende zien dat dit wel het geval is als aan de genoemde voorwaarde voldaan is.

Om nu $\Sigma \varphi$ te vinden maken we gebruik van den volgenden kunstgreep. We nemen in elk der deeltjes een oorsprong aan, in alle op de zelfde wijze. In dezen oorsprong O denken we ons k punten O_1, O_2, \dots, O_k samengevallen, waar de functie de waarden $-\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_k$ heeft. De waarde van $\Sigma \varphi$ zal dan niet veranderen, als we deze punten op de zelfde wijze als de punten A mee tellen. Wij zullen nu vooreerst

nagaan hoeveel der vectoren $O_1 A_1 = v_1$ het oppervlak S zullen doorsnijden. Als $O_1 A_1$ S doorsnijdt, dan behooren O_1 en A_1 tot een deeltje dat gedeeltelijk binnen T ligt en dus iets voor $\Sigma \varphi$ kan opleveren en òf O_1 òf A_1 ligt binnen T en moet dus voor die som worden meegerekend. Aan beide zijden van ieder element dS ligt een groot aantal punten O en wel is natuurlijk overal het aantal per volumeëenheid N . Om nu te berekenen, hoeveel der vectoren v_1 het element dS snijden merken we op, dat de beginpunten dezer vectoren moeten liggen binnen een cylinder met dS tot grondvlak en wiens beschrijvende lijn gelijk en evenwijdig is aan v_1 . Het bedoelde aantal is dus afgezien van 't teeken $N dS v_{1n}$, wanneer n de richting der normaal op 't oppervlakte-element dS is. Rekenen we de normaal positief in de richting naar buiten, dan is v_{1n} negatief als de punten A_1 binnen 't oppervlak liggen, het aantal vectoren, gelijk aan dat der punten A_1 , die bij het element dS behooren en iets voor de som opleveren is natuurlijk positief, wij moeten dus voor dit aantal stellen $- N dS v_{1n}$. Liggen daarentegen de punten O_1 aan de binnenzijde van het element dS , dan kunnen we voor 't aantal te beschouwen punten stellen $+ N dS v_{1n}$ en daar ieder punt O_1 een bedrag $-\varphi_1$ oplevert, vinden we ook nu in 't geheel $- N \varphi_1 dS v_{1n}$. Voor alle punten O_1 en A_1 vinden we nu de bijdrage door over S te integreeren:

$$- \int_S N \varphi_1 v_{1n} dS.$$

Deze uitdrukking kan onveranderd blijven als φ , niet in al de deeltjes de zelfde waarde heeft maar van element tot element verandert.

Op de zelfde wijze vinden we voor de bijdrage der punten O_2 en A_2 :

$$- \int_S N \varphi_2 v_{2n} dS,$$

enz.

In 't geheel:

$$\Sigma \varphi = - \int_s N \{ \varphi_1 v_{1n} + \varphi_2 v_{2n} + \dots + \varphi_k v_{kn} \} dS. \quad (8)$$

Zij nu in ieder deeltje de vector q bepaald door:

$$q = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \dots + \varphi_k v_k, \quad (9)$$

en in ieder punt:

$$N q = \Omega, \quad (10)$$

dan hebben we:

$$\Sigma \varphi = - \int_s \Omega_n dS. \quad (11)$$

Volgens 't voorgaande blijft (8) gelden als de grootheden φ , enz. van element tot element veranderen. Wij kunnen dan (11) ook nog handhaven, als we voor Ω stellen:

$$\Omega = \frac{1}{T_1} \Sigma q, \quad (12)$$

waarin de som moet genomen worden over alle deeltjes binnen de physisch oneindig kleine ruimte T_1 .

Nu is echter gegeven dat de ruimte binnen S physisch oneindig klein is en dat de gedaante dezer ruimte onverschillig is.

Kiezen we daarvoor een parallelepipedum met ribben evenwijdig aan de coördinaatassen X, Y, Z , dan vinden we uit (11) gemakkelijk:

$$\Sigma \varphi = - T \text{Div } \Omega, \quad (13)$$

waarbij dan echter het teeken Div ook in physischen zin moet worden opgevat, d. w. z. onder $\frac{\partial \Omega_x}{\partial x}$ hebben we te verstaan de verhouding der verandering van Ω_x bij voortgang over een physisch oneindig kleinen afstand dx , tot dien afstand, enz.

Wij kunnen nu 't voorgaande onmiddellijk uitbreiden tot de berekening van $\int_T \varphi d\tau$ voor 't geval dat φ in ieder punt der beschouwde deeltjes eene waarde heeft, mits slechts voor elk deeltje:

$$\int \varphi d\tau = 0 \quad (14)$$

zij. Daartoe komen we door 't aantal k onbepaald te doen toenemen en de grootheden $\varphi_1 \varphi_2 \dots$ te vervangen door $\varphi d\tau$.

Wij voeren voor ieder deeltje een vector in:

$$q = \int \varphi r d\tau, \quad (15)$$

waarin r den voerstraal voorstelt van een willekeurig gekozen oorsprong naar het element $d\tau$. (Met behulp van (14) is het gemakkelijk aan te toonen dat de keuze van den oorsprong aan de waarden van q niet afdoet.) Definieeren we verder Ω weer door de vergelijking (12) dan vinden we:

$$\bar{\varphi} = - \text{Div } \Omega. \quad (16)$$

HOOFDSTUK V.

Lichtvoortplanting in disperseerende media.

§ 1. *Algemeene vergelijkingen.*

We zijn nu in staat de vergelijkingen tusschen de middelwaarden der electromagnetische vectoren in een disperseerend medium af te leiden. Door geschikte notaties in te voeren brengen we deze vergelijkingen in een vorm, die zooveel mogelijk overeenkomt met dien der vergelijkingen in den vrijen aether.

Uit $\text{Rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{C}$, wat zoowel binnen als buiten de electronen geldt, volgt, blijkens de definitie der middelwaarden onmiddellijk $\overline{\text{Rot } \mathfrak{H}} = \frac{1}{c} \overline{\mathfrak{C}}$ en dus volgens het in 't voorgaande bewezene: $\text{Rot } \overline{\mathfrak{H}} = \frac{1}{c} \overline{\mathfrak{C}}$.

Evenzoo vinden we: $\text{Rot } \overline{\mathfrak{E}} = -\frac{1}{c} \overline{\dot{\mathfrak{B}}}$,

$$\text{Div } \overline{\mathfrak{C}} = 0,$$

$$\text{Div } \overline{\mathfrak{B}} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{D}},$$

$$\overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{B}}.$$

Verder is binnen de electronen $\mathfrak{C} = \dot{\mathfrak{D}} + \rho \mathbf{v}$ en deze uitdrukking blijft ook buiten de electronen gelden, want daar is $\rho = 0$. We hebben dus:

$$\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\dot{\mathfrak{D}}} + \overline{\rho \mathbf{v}}.$$

Voor $\bar{q}v$ vinden we:

$$\bar{q}v = \frac{1}{T} \int_T qv \, d\tau = \frac{1}{T} \Sigma \dot{p},$$

waarbij de sommatie over alle electronen binnen de ruimte T moet uitgestrekt worden. Den vector $\mathfrak{P} = \frac{1}{T} \Sigma p$ noemen we het electricisch moment der volume-eenheid. Hij kan ook gevonden worden door het gemiddelde van p voor de electronen binnen de ruimte T te vermenigvuldigen met N , het aantal electronen per volume-eenheid. We hebben uit de vorige vergelijking:

$$\bar{q}v = \dot{\mathfrak{P}}.$$

Om \bar{q} te vinden kunnen we gebruik maken van de uitkomsten aan het eind van het vorige hoofdstuk, daar volgens onze onderstellingen in ieder deeltje voldaan is aan $\int q \, d\tau = 0$.

We vinden dan: $\bar{q} = -\text{Div } \mathfrak{P}$.

Noemen we verder: $\bar{\mathfrak{D}} + \mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{D}}$,

dan hebben we in de eerste plaats:

$$\text{Div } \bar{\mathfrak{D}} = 0,$$

en bovendien:

$$\mathfrak{C} = \dot{\bar{\mathfrak{D}}}.$$

Wij zullen daarom den vector $\bar{\mathfrak{D}}$ in onze vergelijkingen invoeren, hij zal dezelfde rol spelen als \mathfrak{D} in de vergelijkingen voor den vrijen aether. Het eenige verschil tusschen die vergelijkingen en die voor ons geval ligt dan in de betrekking tusschen \mathfrak{C} en $\bar{\mathfrak{D}}$. Wij hebben nu:

$$\mathfrak{C} = \dot{\bar{\mathfrak{D}}} - \dot{\mathfrak{P}}.$$

Het stel vergelijkingen wordt:

$$\left. \begin{array}{ll} (a) \text{ Rot } \bar{\mathfrak{H}} = \frac{1}{c} \bar{\mathfrak{C}}, & \text{Rot } \bar{\mathfrak{C}} = -\frac{1}{c} \dot{\bar{\mathfrak{H}}}, \\ (b) \bar{\mathfrak{C}} = \dot{\bar{\mathfrak{D}}} = \dot{\bar{\mathfrak{C}}} + \dot{\mathfrak{P}}, & \bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}, \\ (c) \text{ Div } \bar{\mathfrak{C}} = 0, & \text{Div } \bar{\mathfrak{H}} = 0. \end{array} \right\} \text{I.}$$

§ 2. Grensvoorwaarden.

Wanneer we te doen hebben met twee verschillende media, waarvan 't eene ook de vrije aether kan zijn, die volgens een vlak aan elkaar grenzen, dan moeten aan deze vergelijkingen nog zekere grensvoorwaarden worden toegevoegd.

Om de eerste dezer voorwaarden af te leiden merken we op, dat volgens de beschouwing aan het eind van het vorige hoofdstuk:

$$\int_T \rho \, d\tau = - \int_S \mathfrak{P}_n \, dS, \quad (1)$$

waarbij de eerste integraal is uit te strekken over eene willekeurige physisch oneindig kleine ruimte T , de tweede over het oppervlak, dat deze begrenst. Het is trouwens gemakkelijk in te zien, dat deze formule ook doorgaat voor grootere ruimten, het bewijs daarvoor kan op volkomen dezelfde wijze geleverd worden. Verder volgt uit $\int_S \mathfrak{D}_n \, dS = \int_T \rho \, d\tau$, wat voor iedere gesloten ruimte geldt:

$$\int_S \overline{\mathfrak{D}}_n \, dS = \int_T \overline{\rho} \, d\tau = \int_T \rho \, d\tau,$$

en dus:

$$\int_S (\overline{\mathfrak{D}}_n + \mathfrak{P}_n) \, dS = \int_S \overline{\mathfrak{D}}_n \, dS = 0. \quad (2)$$

Kiezen we nu voor het gesloten oppervlak S een zeer kleinen cylinder, wiens as loodrecht staat op het te beschouwen discontinuïteitsvlak, waarvan de eindvlakken ter weerszijden van het discontinuïteitsvlak liggen en waarvan de hoogte nog oneindig klein is in vergelijking met de afmetingen der eindvlakken, dan vinden we uit (2), dat aan ieder punt van het discontinuïteitsvlak:

$$(\overline{\mathfrak{D}}_n)_I = (\overline{\mathfrak{D}}_n)_{II} \quad (3)$$

moet zijn, als met n de normaal op dat vlak wordt aange-

wezen en de beide zijden van het vlak door I en II zijn onderscheiden.

Om de tweede grensvoorwaarde te vinden, leiden we uit $\int_s \mathfrak{B}_n dS = 0$, wat voor ieder gesloten oppervlak geldt, af $\int_s \overline{\mathfrak{B}}_n dS = 0$, waaruit door dezelfde redeneering, die in het vorige geval is toegepast, volgt:

$$(\overline{\mathfrak{B}}_n)_I = (\overline{\mathfrak{B}}_n)_{II}. \quad (4)$$

Verder volgt uit de vergelijking $\int_s \mathfrak{S}_s ds = \frac{1}{c} \int_s \mathfrak{C}_n dS$, $\int_s \overline{\mathfrak{S}}_s ds = \frac{1}{c} \int_s \overline{\mathfrak{C}}_n dS$, hierbij is s eene willekeurige lijn en S een oppervlak, dat die lijn tot randlijn heeft. \mathfrak{S}_s en $\overline{\mathfrak{S}}_s$ zijn componenten van \mathfrak{S} en $\overline{\mathfrak{S}}$ in de richting der raaklijn aan de lijn s . Passen we deze vergelijking toe op een oppervlak dat tot randlijn heeft een oneindig kleinen rechthoek, waarvan twee zijden evenwijdig zijn aan eene willekeurige richting h in het discontinuïteitsvlak en aan weerszijden van dit vlak loopen, terwijl het andere paar zijden nog oneindig klein is in vergelijking met het eerste, dan vinden we:

$$(\overline{\mathfrak{S}}_h)_I = (\overline{\mathfrak{S}}_h)_{II}, \quad (5)$$

Eindelijk vinden we op dezelfde manier uit $\int_s \mathfrak{C}_s ds = \frac{1}{c} \int_s \mathfrak{B}_n dS$:

$$(\overline{\mathfrak{C}}_h)_I = (\overline{\mathfrak{C}}_h)_{II}. \quad (6)$$

Wij kunnen nog opmerken, dat de afgeleide grensvoorwaarden ook kunnen gebruikt worden, als wij niet een scherp bepaald grensvlak maar eene overgangslaag hebben, waarvan de dikte van de orde der moleculaire afstanden is. Wij kunnen dan als grensvlak een willekeurig vlak in deze laag beschouwen. In 't algemeen zullen dan de middelwaarden van de grootheden, die de eigenschappen van het medium aangeven, merkbaar

verschillen voor punten ter weerszijden van die laag, terwijl ze in een homogeen medium geen merkbare verschillen vertoonen over zulke kleine afstanden. De grensvoorwaarde (1) drukt dan uit dat de component $\overline{\mathfrak{D}}_n$ ook bij de grenslaag niet merkbaar verandert over moleculaire afstanden, evenzoo moeten de andere grensvoorwaarden worden opgevat.

Over het geheel zullen wij ons beperken tot de beschouwing van een homogeen medium, waarvan we ons voorstellen, dat het zich tot in het oneindige uitstrekt.

§ 3. *Afleiding der differentiaalvergelijking, waardoor \mathfrak{P} kan worden uitgedrukt.*

Het verband tusschen \mathfrak{P} en de overige vectoren moeten we vinden met behulp der vergelijkingen (22) van hoofdstuk III.

Wij zullen daartoe de electronen in groepen verdeelen, zoodanig, dat in ééne groep bij elkaar komen die electronen, waarvoor de grootheden e , m , a en β dezelfde zijn. Het aantal dezer groepen zal in sommige gevallen groot kunnen zijn. Wij zullen echter aannemen, dat ook voor iedere groep nog zeer vele electronen in de ruimte T voorkomen. Den vector \mathfrak{P} zullen we opvatten als de som van een aantal vectoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ enz., elk beantwoordend aan een bepaalde groep electronen. De grootheden e , m , a , β , p en N zullen we voor de verschillende groepen eveneens door indices onderscheiden.

Voor de electronen der eerste groep hebben we dan:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{p}_{1x} + \beta_1 \dot{p}_{1x} + a_1 p_{1x} &= e_1^2 \mathfrak{E}_x, \\ m_1 \ddot{p}_{1y} + \beta_1 \dot{p}_{1y} + a_1 p_{1y} &= e_1^2 \mathfrak{E}_y, \\ m_1 \ddot{p}_{1z} + \beta_1 \dot{p}_{1z} + a_1 p_{1z} &= e_1^2 \mathfrak{E}_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Om hieruit vergelijkingen af te leiden voor de componenten van \mathfrak{P}_1 moeten we voor alle electronen der eerste groep binnen de ruimte T deze vergelijkingen opmaken, gemiddelden nemen en dan met N_1 vermenigvuldigen. We vinden dan echter niet,

zooals men op het eerste gezicht licht zou meenen, in de tweede leden N_1 , $\overline{\mathcal{E}}_x$ enz., immers $\overline{\mathcal{E}}_x$ is de middelwaarde van \mathcal{E}_x over alle punten binnen de ruimte T , terwijl wij hier noodig hebben 't gemiddelde der waarden van \mathcal{E}_x in de punten binnen de electronen der eerste groep in de ruimte T . Deze waarden zullen we $\overline{\mathcal{E}}_{x_1}$ enz. noemen. We kunnen dan stellen $\overline{\mathcal{E}}_x = \overline{\mathcal{E}}_{x_1} + q_{x_1}$ enz.

Om van den vector q_1 eene voorstelling te verkrijgen, zullen we de electriche kracht in een bepaald punt, nauwkeuriger beschouwen. Daartoe beschrijven we om dat punt een physisch oneindig kleinen bol — die echter nog groot is in vergelijking met de ruimte T , waarover we middelen — en vatten de bedoelde kracht op als de resultante van: 1°. de electriche kracht tengevolge van de electronen binnen dezen bol, 2°. de electriche kracht tengevolge der overige electronen; 3°. die welke onafhankelijk van de electronen nog bestaan kan. De beide laatste deelen zullen voor alle punten binnen T nagenoeg dezelfde waarde hebben en dus geen bijdrage voor q_1 opleveren. Op deze wijze zien we in, dat q_1 alleen kan afhangen van hetgeen zich voordoet in eene physisch oneindig kleine ruimte om het punt waar we q_1 willen bepalen. (Volgens onze afleiding zouden we het grensvlak van deze ruimte bepalen door in ieder punt der ruimte T waarover we middelen, op de normaal naar buiten een stuk af te passen, gelijk aan de straal van den boven bedoelden bol, maar volgens onze vroegere aanname zal de juiste gedaante dezer ruimte onverschillig zijn.) Verder is het duidelijk dat q_1 nul zou zijn als alle electronen in de bedoelde ruimte in den evenwichtsstand bleven. Daar de uitwijkingen uit dien stand en dus ook p , \dot{p} enz. zeer klein zijn kunnen we ook ons er toe beperken q_1 als eene lineaire functie van deze grootheden en dus ook van \mathfrak{B} , \mathfrak{F} enz. te beschouwen.

Om dit nader te onderzoeken beschouwen wij nog eens den invloed van één enkel electron, die door de vergelijkingen (2), (15) en (16) van hoofdstuk III bepaald wordt. Het is uit deze formules gemakkelijk in te zien, dat op kleine afstanden van het deeltje — het geval waarmee we hier te doen hebben —

deze invloed in hoofdzaak bepaald wordt door p (de termen met \ddot{p} enz. zijn alle veel kleiner)¹. Op deze wijze komen we er toe q_1 als eene lineaire functie van p en dus van \mathfrak{P} te beschouwen. In een isotroop medium zullen we bovendien aannemen, dat q_{1x} alleen van \mathfrak{P}_x afhangt; evenzoo de andere componenten. Eindelijk kunnen we wegens de volkomen grillige verdeeling der electronen, \mathfrak{P}_1 evenredig stellen met \mathfrak{P} en komen dus tot:

$N_1 e_1^2 q_{1x} = s_1 \mathfrak{P}_{1x}$, $N_1 e_1^2 q_{1y} = s_1 \mathfrak{P}_{1y}$, $N_1 e_1^2 q_{1z} = s_1 \mathfrak{P}_{1z}$, (8)
 waarbij s_1 eene constante voorstelt, die we verderop nog nader zullen bepalen. De differentiaalvergelijkingen, die het verband tusschen \mathfrak{P} en $\overline{\mathfrak{C}}$ uitdrukken, worden:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1x} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1x} + (a_1 - s_1) \mathfrak{P}_{1x} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{C}}_x, \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1y} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1y} + (a_1 - s_1) \mathfrak{P}_{1y} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{C}}_y, \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1z} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1z} + (a_1 - s_1) \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{C}}_z, \end{aligned} \quad (9)$$

terwijl volkomen analoge betrekkingen bestaan tusschen de grootheden die op andere groepen betrekking hebben.

§ 4. Enkelvoudig periodieke toestand.

Voor het geval van een enkelvoudig periodieken toestand met de periode $\frac{2\pi}{p}$ geeft (9) als we nog, overeenkomstig het vroeger gezegde, den coëfficiënt β_1 verwaarloozen:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{N_1 e_1^2}{-m_1 p^2 + a_1 - s_1} \overline{\mathfrak{C}}. \quad (10)$$

Hieruit blijkt dat de verwaarloozing van β_1 alleen dan niet geoorloofd kan zijn ais p^2 nagenoeg gelijk is aan $\frac{a_1 - s_1}{m_1}$.

Noemen we $\frac{a_1 - s_1}{m_1} = q_1^2$, dan kunnen we q_1 beschouwen als de frequentie der „eigen trillingen der eerste groep electronen.”

¹) Vgl. § 12.

Deze verschilt van de frequentie der eigen trillingen van één enkel deeltje wegens de elektrische werking der verschillende electronen op elkaar.

Ligt p zeer dicht bij q_1 dan moet de coëfficiënt β_1 in aanmerking genomen worden. In dat geval kunnen we eene oplossing van (9) op de volgende wijze voorstellen. Denken we ons $\overline{\mathfrak{E}}$ uitgedrukt door $C e^{i p t}$, waarmee dan bedoeld wordt dat $\overline{\mathfrak{E}}$ gelijk is aan het reële stuk van deze uitdrukking. C zal daarbij complex kunnen zijn en hangt af van de coördinaten. We kunnen dan op dezelfde wijze \mathfrak{A}_1 uitdrukken door:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{N_1 e_1^2}{-m_1 p^2 + i \beta_1 p + (a_1 - s_1)} \overline{\mathfrak{E}} = \frac{N_1 e_1^2}{m_1 (q_1^2 - p^2) + i \beta_1 p} \overline{\mathfrak{E}}. \quad (11)$$

Laten we dit geval buiten beschouwing, dan vinden we:

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_k \frac{N_k e_k^2}{m_k (q_k^2 - p^2)} \overline{\mathfrak{E}}, \quad (12)$$

waarbij de som over alle electronengroepen moet worden uitgestrekt. We hebben voor iedere groep $\frac{a_k - s_k}{m_k} = q_k^2$ gesteld.

In 't algemeen zullen we echter moeten aannemen, dat er groepen kunnen voorkomen, waarvoor q_k weinig van p verschilt; dan moeten we stellen:

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_k \frac{N_k e_k^2}{m_k (q_k^2 - p^2) + i \beta_k p} \overline{\mathfrak{E}}, \quad (13)$$

met de boven aangegeven beteekenis. $i \beta_k p$ zal alleen bij die termen der som in aanmerking behoeven genomen te worden, waarvoor q_k nagenoeg gelijk aan p is.

Noemen we nu:

$$\frac{1}{V p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \sum_k \frac{N_k e_k^2}{m_k (q_k^2 - p^2)} \right\}, \quad (14)$$

of zoo noodig:

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \sum_k \frac{N_k e_k^2}{m_k (q_k^2 - p^2) + i \beta_k p} \right\}, \quad (15)$$

dan volgt vooreerst uit I (b), I (c) en (12) of (13):

$$\text{Div } \overline{\mathcal{E}} = 0$$

en uit I (b) en I (c): $\text{Div } \overline{\mathcal{H}} = 0$.

Verder leiden we voor het beschouwde geval af:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{E}}_x}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{E}}_x, & \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}_x}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{H}}_x, \\ \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{E}}_y}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{E}}_y, & \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}_y}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{H}}_y, \\ \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{E}}_z}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{E}}_z, & \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}_z}{\partial t^2} &= \Delta \overline{\mathcal{H}}_z. \end{aligned} \right\} \quad \text{II.}$$

§ 5. *Medium zonder absorptie.*

Kunnen we de formule (14) toepassen, dan is V_p reëel en we hebben dus te doen met een toestand, die zich met de snelheid V_p voortplant.

Wij zullen ons weer beperken tot het geval van platte golven, met het golffront evenwijdig aan het YZ-vlak, waarbij dus alle differentiaal-quotienten naar y en z nul zijn. Uit $\text{Div } \overline{\mathcal{E}} = 0$ en $\text{Div } \overline{\mathcal{H}} = 0$, leiden we evenals bij het overeenkomstige geval in hoofdstuk II af, dat $\overline{\mathcal{E}}_x$ en $\overline{\mathcal{H}}_x$ noch van de coördinaten, noch van den tijd afhangen, we zullen weer aannemen, dat ze steeds en overal nul zijn. We vinden dan:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\overline{\mathcal{E}}}_y &= -\frac{V_p^2}{c} \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_z}{\partial x}, & \dot{\overline{\mathcal{H}}}_y &= c \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}_z}{\partial x}, \\ \dot{\overline{\mathcal{E}}}_z &= \frac{V_p^2}{c} \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_y}{\partial x}, & \dot{\overline{\mathcal{H}}}_z &= -c \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad \text{III.}$$

Evenals vroeger kunnen we ons bepalen tot de beschouwing van een toestand, waarbij alleen $\overline{\mathfrak{E}}_y$ en $\overline{\mathfrak{H}}_z$ van nul verschillende waarden hebben. Daarvoor gelden dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{E}}_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{E}}_y}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{H}}_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{H}}_z}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \text{IV.}$$

Daar wij echter dezen vorm afgeleid hebben in de onderstelling, dat de toestand enkelvoudig periodiek is met den trillingstijd $\frac{2\pi}{p}$, is de bijzondere oplossing van het stel I, die hieraan beantwoordt:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_y &= A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} + B \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\}, \\ \overline{\mathfrak{H}}_z &= \frac{c}{V_p} A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} - \frac{c}{V_p} B \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Door een eenigszins andere notatie in te voeren kunnen wij deze formule nog in een anderen vorm brengen. Noemen we $\frac{p}{V_p} = p'$. Bij iedere waarde van p' behoort dan ook eene bepaalde waarde voor V_p , om te doen uitkomen dat we deze grootheid als afhankelijk van p' denken, zullen we V'_p schrijven. Onze oplossing is dan:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_y &= A' \text{Cos} \{ p' (x - V'_p t) + a' \} + B' \text{Cos} \{ p' (x + V'_p t) + \beta' \}, \\ \overline{\mathfrak{H}}_z &= \frac{c}{V'_p} A' \text{Cos} \{ p' (x - V'_p t) + a' \} - \frac{c}{V'_p} B' \text{Cos} \{ p' (x + V'_p t) + \beta' \}. \end{aligned} \quad (16')$$

Voor iedere waarde van p zullen zulke oplossingen voldoen, als V_p telkens door (14) bepaald wordt. De som van een willekeurig aantal dergelijke oplossingen zal ook aan I voldoen. Op deze wijze zullen we overeenkomstig het in hoofdstuk II behandelde oplossingen kunnen construeeren, waarbij voor $t = 0$ $\overline{\mathfrak{E}}_y$ en $\overline{\mathfrak{H}}_z$ tusschen de grenzen $-\pi$ en $+\pi$ overeenkomen met

gegeven functies van x , of voor $x = 0$ tusschen $t = -\pi$ en $t = +\pi$ met gegeven functies van t . Door toepassing van de integraal van Fourier zullen we met behulp van (16) of (16') oplossingen kunnen samenstellen, waarbij $\overline{\mathfrak{E}}_y$ en $\overline{\mathfrak{H}}_z$ op een bepaald tijdstip in de geheele ruimte of in een bepaald punt voor ieder tijdstip met gegeven functies overeenstemmen. Willen we reeksen gebruiken die tusschen andere grenzen den begin-toestand voorstellen, dan moeten we — door nog eene geringe wijziging in de notatie — de elementaire oplossingen in den vorm brengen.

$$\overline{\mathfrak{E}}_y = A \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} + B \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{H}}_z = \frac{c}{V_p} A \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} - \frac{c}{V_p} B \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\},$$

en

$$\overline{\mathfrak{E}}_y = A' \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x - V'_p t) + a' \right\} + B' \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x + V'_p t) + \beta' \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{H}}_z = \frac{c}{V'_p} A' \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x - V'_p t) + a' \right\} - \frac{c}{V'_p} B' \operatorname{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x + V'_p t) + \beta' \right\}.$$

De theorie voert voor dit geval tot de vergelijkingen, die wij in de inleiding hebben aangenomen, we staan dus nog voor de daar aangewezen moeilijkheid. In een volgend hoofdstuk komen we daarop terug.

§ 6. *Medium met absorptie.*

Moeten we om V_p uit te drukken de formule (15) gebruiken, dan kunnen we onder overeenkomstige onderstellingen de vergelijkingen nog tot de vormen III en IV herleiden. Daar alle daarbij voorkomende vergelijkingen lineair zijn, kunnen we daaraan eene dergelijke beteekenis hechten als in § 4 verklaard werd. De bedoeling is dus, dat $\overline{\mathfrak{E}}_y$ en $\overline{\mathfrak{H}}_z$ gevonden zullen

worden als de reële stukken van de complexe oplossingen dezer vergelijkingen. Volgens de afleiding mogen we echter alleen de bijzondere oplossing nemen:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{G}}_y &= A e^{ip(t - \frac{x}{v_p})} + B e^{ip(t + \frac{x}{v_p})}, \\ \bar{\mathfrak{G}}_z &= \frac{c}{V_p} A e^{ip(t - \frac{x}{v_p})} - \frac{c}{V_p} B e^{ip(t + \frac{x}{v_p})},\end{aligned}$$

waarin A en B complexe constanten zijn. Zij $A = A e^{i\alpha}$, $B = B e^{i\beta}$ en stellen we verder $\frac{1}{V_p} = \frac{1}{v_p} - i\mu_p$, $p\mu_p = \kappa_p$; volgens (15) is dan κ_p positief daar de coëfficiënten β_k alle positief zijn. Wij vinden door tot reële stukken over te gaan als oplossing:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{G}}_y &= A e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha \right\} \\ &\quad + B e^{\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{v_p} \right) + \beta \right\}, \\ \bar{\mathfrak{G}}_z &= A_1 e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha_1 \right\} \\ &\quad - B_1 e^{\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{v_p} \right) + \beta_1 \right\}.\end{aligned}\tag{17}$$

waarin:

$$\begin{aligned}A_1 &= A \frac{c}{v_p} \sqrt{1 + \mu_p^2 v_p^2}, & B_1 &= B \frac{c}{v_p} \sqrt{1 + \mu_p^2 v_p^2}, \\ \alpha_1 &= \alpha - \text{bg tg } \mu_p v_p, & \beta_1 &= \beta - \text{bg tg } \mu_p v_p.\end{aligned}$$

Het is nu echter duidelijk, dat geen toestand kan bestaan, die door deze vergelijkingen beschreven wordt, want de eerste term in de tweede leden van (17) nadert voor negatieve zeer groote x tot oneindig, de tweede voor positieve zeer groote x . Wij kunnen echter weer door samenstelling van dergelijke vormen eene oplossing van het stel I vinden, die tusschen bepaalde grenzen aan een werkelijken toestand beantwoordt, n.l. zóó, dat voor $x = 0$, $\bar{\mathfrak{G}}_y$ en $\bar{\mathfrak{G}}_z$ tusschen bepaalde grenzen

met gegeven functies van t overeenkomen. Over den aard der vraagstukken, die hiermee worden opgelost, kunnen we hier en in de vorige § weer dezelfde opmerking maken als in Hoofdstuk II.

In (17) worden $\overline{\mathcal{E}}_y$ en $\overline{\mathcal{H}}_z$ elk weer uitgedrukt als eene som van twee termen, waarvan de eerste eene golf voorstelt, die zich naar rechts, de andere een golf die zich naar links voortplant. Deze golven onderscheiden zich echter van de tot nog toe beschouwde door de eigenaardigheid, dat de amplitudo afneemt in de richting der voortplanting. Wij zullen weldra zien, dat bij de voortplanting van zulke golven een gedeelte der energie in 't medium achterblijft. In dit geval hebben we dus te doen met absorptie.

Wanneer we eene oplossing noodig hebben, waarbij voor $t = 0$, $\overline{\mathcal{E}}_y$ en $\overline{\mathcal{H}}_z$ binnen bepaalde grenzen met gegeven functies van x overeenkomen, zullen we de elementaire oplossing brengen in een vorm overeenkomend met (16'). Om nu het verband tusschen p' en V'_p te vinden, denken we ons $\overline{\mathcal{E}}_y$ voorgesteld als $C e^{i p' V'_p t}$, waarbij C complex zal zijn en afhangen van de coördinaten. Door geheel dezelfde redeneering als vroeger vinden we dan:

$$\frac{1}{V'_p{}^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \Sigma \frac{e_p{}^2 N_k}{-m_k V'_p{}^2 p'^2 + i \beta_k V'_p p' + a_k - s_k} \right\}.$$

Uit deze vergelijking moet nu V'_p worden opgelost. Het is gemakkelijk in te zien, dat als één wortel is:

$$V'_{p_1} = -v'_p + i \mu'_p,$$

ook zal voldoen:

$$V'_{p_2} = +v'_p + i \mu'_p.$$

De bijzondere oplossing, die wij nu zoeken, kan worden voorgesteld door:

$$\overline{\mathcal{E}}_y = A' e^{i p' (x + V'_{p_1} t)} + B' e^{i p' (x + V'_{p_2} t)},$$

$$\overline{\mathcal{H}}_z = -\frac{c}{V'_{p_1}} A' e^{i p' (x + V'_{p_1} t)} - \frac{c}{V'_{p_2}} B' e^{i p' (x + V'_{p_2} t)},$$

of, als we tot reële stukken overgaan, weer $A' = A'e^{i\alpha'}$, $B' = B'e^{i\beta'}$ en nog $p'\mu'_p = \kappa'_p$ stellend:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}}_y &= A'e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \{ p'(x - v'_p t) + \alpha' \} \\ &\quad + B'e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \{ p'(x + v'_p t) + \beta' \}, \\ \overline{\mathfrak{G}}_z &= A_1 e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \{ p'(x - v'_p t) + \alpha'_1 \} \\ &\quad - B_1 e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \{ p'(x + v'_p t) + \beta'_1 \},\end{aligned}\tag{17}$$

waarin:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{c}{\sqrt{v'_p{}^2 + \mu'_p{}^2}} A', & B_1 &= \frac{c}{\sqrt{v'_p{}^2 + \mu'_p{}^2}} B' \\ \alpha'_1 &= \alpha' + \text{bg tg} \frac{\mu'_p}{v'_p} & \beta'_1 &= \beta' - \text{bg tg} \frac{\mu'_p}{v'_p}\end{aligned}$$

Voor de toepassing van reeksen van Fourier die tusschen andere grenzen dan $-\pi$ en $+\pi$ gelden, moeten we weer met eenige wijziging in de notaties, (17) en (17') brengen in de vormen:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}}_y &= A e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + a \right\} \\ &\quad + B e^{+\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t + \frac{x}{v_p} \right) + \beta \right\}, \\ \overline{\mathfrak{G}}_z &= A_1 e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + a \right\} \\ &\quad - B_1 e^{+\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{t_0} p \left(t + \frac{x}{v_p} \right) + \beta_1 \right\},\end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}}_y &= A'e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p'(x - v'_p t) + \alpha' \right\} \\ &\quad + B'e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p'(x + v'_p t) + \beta' \right\}, \\ \overline{\mathfrak{G}}_z &= A_1 e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p'(x - v'_p t) + \alpha'_1 \right\} \\ &\quad - B_1 e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p'(x + v'_p t) + \beta'_1 \right\}.\end{aligned}$$

Tusschen de oplossingen (17) en (17') bestaat een zeer in het oog vallend verschil. In (17) zijn voor een bepaalde x in de beide golven de amplitudines onafhankelijk van t , terwijl in (17') voor bepaalde x de amplitudines met toenemende t afnemen. Daarentegen zijn in (17') voor bepaalde t de amplitudines constant, terwijl in (17) die der eerste termen afnemen met toenemende x en die der tweede termen met afnemende x . De oorzaak van dit verschil ligt echter niet in het wezen van het medium maar in den aard der problemen die we met deze oplossingen willen behandelen. De oplossing (17) hebben we zoo *geconstrueerd* dat voor een bepaalde x door elk der termen een enkelvoudig periodieke toestand met constante amplitudo wordt voorgesteld en (17') hebben we zoo *geconstrueerd*, dat voor een bepaalde t de bovenbedoelde toestand bestaat. Om in te zien dat we in (17') te doen hebben met absorptie, evenals in (17), hebben we slechts in beide gevallen den toestand op den tijd t in een punt x te vergelijken met dien op den tijd $t + t_1$ in $x + v_p t_1$ voor (17) of $x + v'_p t_1$ voor (17'). Toch verdient het opmerking dat we hier niet meer hebben, wat in de andere dergelijke gevallen, die wij tot nog toe behandelden, doorging, dat de beide oplossingen geheel gelijkwaardig waren, zoodat we eenvoudig door eene wijziging van de notaties, de eene in de andere konden doen overgaan. We kunnen ook hier weer eene meetkundige illustratie van beide oplossingen geven. Wanneer we ons eenvoudigheidshalve tot de eerste termen beperken, vinden we de voorstelling van (17') door eene sinusoïde met de snelheid v'_p langs de X-as te verschuiven en daarbij te gelijker-tijd alle ordinaten regelmatig te verkleinen, zoodat ze in een tijd t in de verhouding $e^{-\kappa' p t}$ afnemen; de voorstelling van (17) vinden we door eene sinusoïde met afnemende golven op dezelfde wijze, onder verkleining der ordinaten, te verschuiven. De oorspronkelijke kromme moet dan zoo *geconstrueerd* zijn, dat na de verschuiving over eene geheele golflengte, elke golf door de verkleining der ordinaten, de gedaante gekregen heeft die oorspronkelijk de eerstvolgende golf had.

§ 7. *Bewerking met complexe vormen.*

Nu we eenmaal de beteekenis der bewerking met complexen hebben aangegeven, kunnen we de oplossing steeds op deze wijze voorstellen. De vormen:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}}_y &= A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})} + B e^{ip(t + \frac{x}{V_p})}, \\ \overline{\mathcal{H}}_z &= \frac{c}{V_p} A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})} - \frac{c}{V_p} B e^{ip(t + \frac{x}{V_p})}.\end{aligned}\quad (18)$$

en:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}}_y &= A' e^{ip'(x + V'_{p_1}t)} + B' e^{ip'(x + V'_{p_2}t)}, \\ \overline{\mathcal{H}}_z &= -\frac{c}{V'_{p_1}} A' e^{ip'(x + V'_{p_1}t)} - \frac{c}{V'_{p_2}} B' e^{ip'(x + V'_{p_2}t)}.\end{aligned}\quad (18')$$

gelden dan zoowel als V_p en V'_{p_1} en V'_{p_2} reëel als wanneer deze grootheden complex zijn, in 't eerste geval is $V'_{p_1} = -V'_{p_2}$, in 't tweede geval zijn de reële stukken van V'_{p_1} en V'_{p_2} elkaars tegengestelde de imaginaire stukken aan elkaar gelijk. We kunnen, zoolang we met linaire formules te doen hebben, met deze uitdrukkingen werken en aan het eind van de bewerking de reële stukken nemen. In vele gevallen zal deze wijze van werken aanzienlijke vereenvoudiging geven.

§ 8. *Beschouwing der energie.*

Wij zullen nu, evenals we voor den vrijen aether gedaan hebben, ook voor dispergeerende media eenige opmerkingen over de energie maken.

Daartoe moeten we vooreerst eene uitdrukking kennen voor de energie per volume-eenheid in een bepaald punt.

Wij zullen daarbij weer niet letten op de veranderingen, die zullen voorkomen over moleculaire afstanden, maar de middelwaarde der energie over physisch oneindig kleine ruimten aangeven.

Wij zullen bewijzen, dat daarvoor eene uitdrukking geldt, analoog aan die voor den vrijen aether. Is n.l. E de bedoelde middelwaarde, dan is:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{D}}}) + (\overline{\mathfrak{H}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{B}}}). \quad (19)$$

Voor dit bewijs maken we gebruik van een kunstgreep. We denken ons het ponderabele medium, begrensd door een oppervlak S en beschrijven daaromheen in den vrijen aether een willekeurig oppervlak σ . Beschouwen we nu:

$$\int \{ (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{D}}}) + (\overline{\mathfrak{H}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{B}}}) \} d\tau,$$

uitgestrekt over de geheele ruimte binnen het oppervlak σ . We moeten dan vooreerst opmerken, dat in den vrijen aether $\overline{\mathfrak{C}}$ in eenig punt niet merkbaar kan verschillen van \mathfrak{C} , omdat we vooronderstellen, dat de eindige veranderingen, die voorkomen over fysisch oneindig kleine afstanden, alleen aan de electronen te wijten zijn en dus in den vrijen aether wegvallen. Op dezelfde wijze is in den vrijen aether $\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$ en dus ook $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$, verder $\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$ en $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$. We kunnen dus daar de formule (19) toepassen volgens het in hoofdstuk II bewezene. Verder kunnen we nog opmerken, dat we in den vrijen aether dus b.v. aan het oppervlak σ voor den energiestroom op dezelfde wijze vinden:

$$c [\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{H}}].$$

Door toepassing der vergelijkingen I vinden we:

$$\int \{ (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{D}}}) + (\overline{\mathfrak{H}} \cdot \dot{\overline{\mathfrak{B}}}) \} d\tau = \\ c \int \{ (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \text{Rot } \overline{\mathfrak{H}}) - (\overline{\mathfrak{H}} \cdot \text{Rot } \overline{\mathfrak{C}}) \} d\tau.$$

Bij deze integralen moeten ook de elementen $d\tau$ als fysisch oneindig klein worden opgevat.

Beschouwen we nu de integraal in het tweede lid als de som van twee integralen, de eerste uitgestrekt over de ruimte T_1 binnen S , de tweede over de ruimte T_2 tusschen S en σ .

Door dan in beide den eersten term partiëel te integreeren, vinden we:

$$\int \{ (\overline{\mathbb{E}} \cdot \overline{\mathbb{D}}) + (\overline{\mathbb{H}} \cdot \overline{\mathbb{B}}) \} d\tau = -c \int_{\sigma} \{ \text{Cos } \lambda (\overline{\mathbb{E}}_y \overline{\mathbb{H}}_z - \overline{\mathbb{E}}_z \overline{\mathbb{H}}_y) + \\ + \text{Cos } \mu (\overline{\mathbb{E}}_z \overline{\mathbb{H}}_x - \overline{\mathbb{E}}_x \overline{\mathbb{H}}_z) + \text{Cos } \nu (\overline{\mathbb{E}}_x \overline{\mathbb{H}}_y - \overline{\mathbb{E}}_y \overline{\mathbb{H}}_x) \} d\sigma - \quad (20) \\ - c \int_S \{ \text{Cos } l [(\overline{\mathbb{E}}_y)_I (\overline{\mathbb{H}}_z)_I - (\overline{\mathbb{E}}_z)_I (\overline{\mathbb{H}}_y)_I - (\overline{\mathbb{E}}_y)_{II} (\overline{\mathbb{H}}_z)_{II} + \\ + (\overline{\mathbb{E}}_z)_{II} (\overline{\mathbb{H}}_y)_{II}] + \dots \} dS.$$

Hierin zijn λ , μ , ν de hoeken tusschen de naar buiten getrokken normaal van het oppervlak σ en de coördinaat-assen en l , m , n , die tusschen de naar den vrijen aether toe getrokken normaal aan S en de coördinaat-assen. De index I heeft betrekking op de ruimte binnen S , II op die tusschen S en σ .

De laatste integraal in (20) kunnen we schrijven in den vorm:

$$-c \int_S \left\{ \begin{vmatrix} \overline{\mathbb{E}}_{xI} & \overline{\mathbb{E}}_{yI} & \overline{\mathbb{E}}_{zI} \\ \overline{\mathbb{H}}_{xI} & \overline{\mathbb{H}}_{yI} & \overline{\mathbb{H}}_{zI} \\ \text{Cos } l & \text{Cos } m & \text{Cos } n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overline{\mathbb{E}}_{xII} & \overline{\mathbb{E}}_{yII} & \overline{\mathbb{E}}_{zII} \\ \overline{\mathbb{H}}_{xII} & \overline{\mathbb{H}}_{yII} & \overline{\mathbb{H}}_{zII} \\ \text{Cos } l & \text{Cos } m & \text{Cos } n \end{vmatrix} \right\} dS.$$

De eerste determinant stelt den inhoud voor van een parallelepipedum, beschreven op de vectoren $\overline{\mathbb{E}}_I, \overline{\mathbb{H}}_I$ en een eenheidsvector in de richting der normaal op S als ribben. Evenzoo de tweede den inhoud van een parallelepipedum op $\overline{\mathbb{E}}_{II}, \overline{\mathbb{H}}_{II}$ en dezen eenheidsvector. De inhouden dezer lichamen veranderen niet als men in plaats van $\overline{\mathbb{E}}_I, \overline{\mathbb{H}}_I$ en $\overline{\mathbb{E}}_{II}$ en $\overline{\mathbb{H}}_{II}$ hun tangentele componenten neemt. Uit de grensvoorwaarden (5) en (6) volgt dan dat deze inhouden gelijk zijn en dus de integraal nul.

Voor den eersten term in het tweede lid van (20) kunnen we, volgens 't geen over de middelwaarden in den vrijen aether werd opgemerkt, met de notatie van hoofdstuk II, schrijven:

$$-c \int \mathfrak{B}_n d\sigma.$$

Splitsen we nu eindelijk ook de integraal in het eerste lid van (20) in twee stukken, 't eerste over T_1 , 't tweede over T_2 , dan vinden we:

$$\int_{T_2} \frac{\partial E}{\partial t} d\tau + \int_{T_1} \{(\bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\mathcal{D}}}) + (\bar{\mathcal{H}} \cdot \dot{\bar{\mathcal{B}}})\} d\tau = -c \int_{\sigma} \mathfrak{R}_n d\sigma. \quad (20')$$

In deze vergelijking stelt nu het tweede lid de hoeveelheid energie voor, die aan het oppervlak σ per tijdseenheid instroomt, de eerste term in het eerste lid stelt de vermeerdering der energie in den aether tusschen de oppervlakken S en σ per tijdseenheid voor. De andere term moet dus de energie-vermeerdering per tijdseenheid in de ruimte binnen het oppervlak S , dat is in het ponderabele medium, voorstellen, hetgeen met formule (19) overeenkomt. Daar we tot hetzelfde resultaat komen onverschillig hoe groot de ruimte is, die door de ponderabele stof wordt ingenomen, komen we er toe, dit ook toe te passen wanneer we ons voorstellen, dat we te doen hebben met een medium, dat zich tot in het oneindige uitstrekt.

§ 9. *Theorema van Poynting.*

Hieruit kunnen we nu gemakkelijk den energiestroom in een punt van het medium bepalen. Daartoe beschouwen we de energie binnen een gesloten oppervlak S , dat geheel in het medium ligt. We vinden dan, als we de energie binnen dit oppervlak E noemen, volgens (19):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \{(\bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\mathcal{D}}}) + (\bar{\mathcal{H}} \cdot \dot{\bar{\mathcal{B}}})\} d\tau,$$

waaruit we door toepassing van I vinden:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \int \{(\bar{\mathcal{E}} \cdot \text{Rot } \bar{\mathcal{H}}) - (\bar{\mathcal{H}} \cdot \text{Rot } \bar{\mathcal{E}})\} d\tau,$$

en door integratie:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c \int_S \{ \cos l (\overline{\mathcal{E}}_y \overline{\mathcal{H}}_z - \overline{\mathcal{E}}_z \overline{\mathcal{H}}_y) + \cos m (\overline{\mathcal{E}}_z \overline{\mathcal{H}}_x - \overline{\mathcal{E}}_x \overline{\mathcal{H}}_z) \\ + \cos n (\overline{\mathcal{E}}_x \overline{\mathcal{H}}_y - \overline{\mathcal{E}}_y \overline{\mathcal{H}}_x) \} dS,$$

waarbij l , m , n de hoeken voorstellen tusschen de naar buiten getrokken normaal op het oppervlak S en de coördinaat-assen. Noemen we dus weer:

$$\mathfrak{B} = c [\overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{H}}], \quad (21)$$

dan kunnen we deze vergelijking schrijven:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c \int_S \mathfrak{B}_n dS.$$

Deze formules geven voor ons geval de algemeene uitdrukking van het theorema van Poynting. Zij komen geheel overeen met die voor den vrijen aether, (13) en (14) van hoofdstuk II. De natuurlijke interpretatie vinden we weer door aan te nemen, dat aan ieder element dS van 't oppervlak S , gedurende den tijd dt eene hoeveelheid energie $\mathfrak{B}_n dS dt$ aan de omgeving wordt afgestaan, of daar het oppervlak S willekeurig gekozen kan worden, dat in ieder punt een energiestroom bestaat, waarvan de sterkte, per tijdseenheid en per vlakte-eenheid berekend, door den vector \mathfrak{B} wordt voorgesteld.

§ 10. *Toepassing op periodieke toestanden.*
Medium zonder absorptie.

Beschouwen we nu weer vooreerst het geval, dat de geheele toestand periodiek is met een trillingstijd $\frac{2\pi}{p}$ en nemen we aan, dat geen electronen voorkomen, waarbij de coëfficiënt β

in aanmerking komt, dan is volgens de formules voor dit geval, (12) en (14):

$$\overline{\mathfrak{D}} = \frac{c^2}{V_p^2} \overline{\mathfrak{E}},$$

en dus:

$$\dot{\overline{\mathfrak{D}}} = \frac{c^2}{V_p^2} \dot{\overline{\mathfrak{E}}},$$

waaruit blijkt:

$$(\overline{\mathfrak{E}} \dot{\overline{\mathfrak{D}}}) = (\dot{\overline{\mathfrak{E}}} \overline{\mathfrak{D}}).$$

Voor dit geval kunnen we dus uit (19) afleiden, als we nog bedenken dat $\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{H}}$ is:

$$E = \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{E}} \cdot \overline{\mathfrak{D}}) + \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{H}} \cdot \overline{\mathfrak{B}}), \quad (22)$$

geheel analoog aan de formule, die in den vrijen aether geldt. Dat in (22) geen term onafhankelijk van t behoeft te worden opgeteld zien we gemakkelijk in, door op te merken, dat zoolang $\overline{\mathfrak{E}}$ en $\overline{\mathfrak{H}}$ beide nul zijn, ook $E = 0$ moet zijn.

De energie (22) bestaat uit de energie die in den aether is opgehoopt, vermeerderd met de kinetische en potentiële energie der electronen. Wij kunnen nog opmerken, dat de geheele arbeid door de electriche kracht op de electronen verricht, wordt teruggevonden in deze kinetische en potentiële energie der negatieve deeltjes. Om dit aan te toonen is het natuurlijk voldoende als we bewijzen, dat het voor ieder electron afzonderlijk geldt. We gaan daartoe uit van de bewegingsvergelijkingen, die we kunnen samenvatten in de vectorvergelijking:

$$m\ddot{r}' + ar' = -e \mathfrak{E}.$$

Voor de som van kinetische en potentiële energie van het electron hebben we:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}'^2 + \frac{1}{2} a r'^2,$$

en dus voor de vermeerdering dezer grootheid gedurende den tijd dt :

$$(m\ddot{r}' + ar') \dot{r}' dt,$$

of door toepassing der bewegings-vergelijking:

$$- e \mathcal{E} r' dt,$$

wat juist de uitdrukking is voor den arbeid door de electricische kracht verricht.

Hieruit volgt nog, dat wanneer de electronen weer in den evenwichtsstand gekomen zijn, de geheele arbeid door de electricische kracht verricht, nul is. Er blijft dus geen deel van de energie der lichtgolven in het medium achter.

Wij zullen nu de uitkomst (22) toepassen op het geval van een enkelvoudige golf, die zich in de richting der positieve X-as voortplant, waarbij dus:

$$\overline{\mathcal{E}}_y = A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\},$$

$$\overline{\mathcal{D}}_z = \frac{c}{V_p} A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\},$$

of:

$$\overline{\mathcal{E}}_y = A \text{Cos} \left\{ p' (x - V_p' t) + a \right\},$$

$$\overline{\mathcal{D}}_z = \frac{c}{V_p} A \text{Cos} \left\{ p' (x - V_p' t) + a \right\}.$$

Uit den eersten vorm vinden we de gemiddelde energie per trillingstijd, door toepassing van:

$$I = \frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{1}{2} (\overline{\mathcal{E}}_y \overline{\mathcal{D}}_y + \overline{\mathcal{D}}_z^2) dt,$$

waarbij I evenals vroeger deze gemiddelde energie voorstelt.

Daar nu $\overline{\mathcal{D}}_y = \frac{c^2}{V_p^2} \overline{\mathcal{E}}_y$, vinden we:

$$I = \frac{1}{2} A^2 \frac{c^2}{V_p^2} \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} dt = \frac{1}{2} A^2 \frac{c^2}{V_p^2}. \quad (23)$$

Evenzoo vinden we voor de energie, opgehoopt in een cylinder met de as in de richting der voortplanting, wiens lengte de golflengte is en wiens grondvlak gelijk is aan de eenheid, door toepassing van den tweeden vorm, als we deze energie E noemen:

$$E = \int_0^{\frac{2\pi}{p'}} \frac{1}{2} (\overline{\mathcal{E}}_y \overline{\mathcal{D}}_y + \overline{\mathcal{H}}_z^2) dx = \frac{\pi}{p'} A^2 \frac{c^2}{V_p^2}. \quad (23')$$

Dit komt alles vrij wel overeen met hetgeen in hoofdstuk II behandeld is voor het geval van den vrijen aether. Maar wanneer we te doen hebben met een golf, die door een reeks wordt voorgesteld, hebben we verschillen. Evenmin als vroeger is in dit geval de energie op een bepaald tijdstip gelijk aan de som van de energieën der enkelvoudige golven op dat tijdstip in hetzelfde punt, maar in den vrijen aether konden we bewijzen, dat de gemiddelde energie over den tijd, dat de oplossing den toestand in 't bedoelde punt juist voorstelt, gelijk is aan de som van die, welke voor de afzonderlijke golven gevonden worden. Dit gaat nu niet meer op, omdat de tijd gedurende welken de oplossing geldig is, volgens het in de inleiding besprokene, niet meer voor al de enkelvoudige golven een geheel aantal perioden bevat. Wanneer echter deze tijd vele malen grooter is dan de grootste trillings-tijd, die in de reeks voorkomt in een term met merkbaaren coëfficiënt, dan zal de eigenschap bij benadering blijven gelden.

Geheel analoge opmerkingen kunnen we maken met betrekking tot de energie binnen een cylinder met de eenheid van grondvlak die de X-as tot as heeft en 't geheele deel der X-as, waar de oplossing geldig is, bevat en met betrekking tot de energie, die volgens het theorema van Poynting gedurende den geheelen tijd, dat de oplossing geldig is, door een bepaald vlaktedeel stroomt.

§ 4. *Medium met absorptie.*

Wanneer we te doen hebben met een geval, waarbij de invloed der coëfficiënten β merkbaar is, geldt in de eerste plaats niet meer, dat de verandering der energie van een electron gelijk is aan den arbeid op dat electron verricht door de electriche kracht. Wij hebben weer voor de vermeerdering der energie van 't electron gedurende den tijd dt :

$$(m\ddot{r}' + ar') \dot{r}' dt,$$

en daar nu: $m\ddot{r}' + \beta\dot{r}' + ar' = -e\mathcal{E},$

kunnen we in dit geval voor de vermeerdering der energie van 't electron stellen:

$$-e\mathcal{E}\dot{r}' dt - \beta\dot{r}'^2 dt.$$

De arbeid, door de electriche kracht verricht, is weer $-e\mathcal{E}\dot{r}' dt$. Wij komen dus tot de conclusie, dat gedurende den tijd dt hier eene hoeveelheid energie, voorgesteld door $\beta\dot{r}'^2 dt$ in anderen vorm overgaat. Deze energie moet aan het ponderabel molecuul zijn meegedeeld en zal als warmte worden waargenomen. Wij vinden dus, dat in zulk een medium de voortplanting der lichtgolven met warmteontwikkeling gepaard gaat.

De ontwikkelde warmte zal zich gedeeltelijk door geleiding aan de omgevende deelen van 't medium mededeelen, gedeeltelijk ook door straling uitbreiden. In 't laatste geval wordt ze dus weer tijdelijk in electromagnetische energie omgezet. Is het lichaam begrensd, dan zal het op deze wijze ook een stralingstoestand in den omringenden aether teweegbrengen. Houden we hiermee rekening, dan blijft in (20') het tweede lid de energie voorstellen, die aan het oppervlak σ per tijdseenheid naar binnen stroomt en de eerste term in het eerste lid de vermeerdering der energie in den vrijen aether tusschen de oppervlakken S en σ per tijdseenheid. Hieruit volgt dat de geheele vermeerdering der energie in het medium binnen S per tijdseenheid wordt voorgesteld door $\int_{T_1} \{(\overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{D}}) + (\overline{\mathcal{H}} \cdot \overline{\mathcal{B}})\} d\tau.$

Daar door de warmtegeleiding deze energie niet verandert, blijft de uitkomst ook geldig als we deze warmtegeleiding buiten beschouwing laten. Op deze wijze komen we er toe de geheele verandering der energie per volume-eenheid en per tijds-eenheid, behalve die tengevolge der warmtegeleiding, voor te stellen door $(\overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{D}}) + (\overline{\mathcal{H}} \cdot \overline{\mathcal{B}})$, evenals in de formule (19). Dat in deze formule de warmtegeleiding niet inbegrepen kan zijn, ziet men onmiddellijk in door te bedenken, dat deze eene bepaalde waarde kan hebben, al zijn $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{D}}$, $\overline{\mathcal{H}}$ en $\overline{\mathcal{B}}$ alle nul.

We kunnen overigens het vraagstuk vereenvoudigen door ons voor te stellen, dat de beschouwde middenstof een zoo slechte warmtegeleider is, dat we den invloed dier geleiding kunnen verwaarloozen.

Beschouwen we dan een element, waarin de geheele evenwichtsverstoring beperkt blijft tusschen de tijden t_1 en t_2 , dan vinden we voor de geheele ontwikkelde warmte in dat element als de grootte van het element de volume-eenheid is:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ (\overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{D}}) + (\overline{\mathcal{H}} \cdot \overline{\mathcal{B}}) \} dt.$$

Beschouwen we nu nog eens de energie bij een enkelvoudige platte golf, die zich in de richting der positieve X-as voortplant. We zullen ons daarbij om de verschillende vectoren uit te drukken, bedienen van de bewerking met complexe vormen. We hebben volgens (18):

$$\overline{\mathcal{E}}_y = A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})}, \quad \overline{\mathcal{H}}_z = \frac{c}{V_p} A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})},$$

verder is volgens (13) en (15): $\overline{\mathcal{D}}_y = \frac{c^2}{V_p^2} \overline{\mathcal{E}}_y$ en dus:

$$\dot{\overline{\mathcal{D}}}_y = ip \frac{c^2}{V_p^2} A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})}, \quad \dot{\overline{\mathcal{H}}}_z = ip \frac{c}{V_p} A e^{ip(t - \frac{x}{V_p})}.$$

Voeren we nu weer onze vroegere notaties in:

$$A = A e^{i\alpha},$$

$$\frac{1}{V_p} = \frac{1}{v_p} - i \frac{\kappa_p}{p},$$

$$A_1 = A \frac{c}{v_p} \sqrt{1 + \frac{\kappa_p^2 v_p^2}{p^2}}, \quad a_1 = a - \text{bg tg } \frac{\kappa_p v_p}{p},$$

dan worden de reële waarden dezer uitdrukkingen:

$$\overline{\mathfrak{E}}_y = A e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha \right\},$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\mathfrak{D}}}_y &= 2c^2 \frac{\kappa_p}{v_p} A e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha \right\} - \\ &- p c^2 \left(\frac{1}{V_p^2} - \frac{\kappa_p^2}{p^2} \right) A e^{-\kappa_p x} \text{Sin} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha \right\}, \end{aligned}$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = A_1 e^{-\kappa_p x} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha_1 \right\},$$

$$\dot{\overline{\mathfrak{S}}}_z = -p A_1 e^{-\kappa_p x} \text{Sin} \left\{ p \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + \alpha_1 \right\}.$$

We kunnen nu de energie, die gedurende een trillingstijd $\frac{2\pi}{p}$ wordt opgehoopt in een volume-element bij een bepaald punt x_1 , berekenen. Per volume-eenheid uitgedrukt, vinden we dit door de uitdrukking $\overline{\mathfrak{E}}_y \dot{\overline{\mathfrak{D}}}_y + \overline{\mathfrak{S}}_z \dot{\overline{\mathfrak{S}}}_z$ te integreeren tusschen de grenzen 0 en $\frac{2\pi}{p}$. Eene eenvoudige integratie geeft dan:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{\partial E}{\partial t} dt &= 2c^2 \frac{\kappa_p}{v_p} A^2 e^{-2\kappa_p x_1} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t - \frac{x_1}{v_p} \right) + \alpha \right\} dt \\ &= 2\pi c^2 \frac{\kappa_p}{p v_p} A^2 e^{-2\kappa_p x_1}. \end{aligned}$$

Daar we ons voorstellen dat de energie der golf geheel geabsorbeerd is als de golf zich over een oneindig grooten afstand heeft voortgeplant, kunnen we hiermede ook berekenen welk arbeidsvermogen het deel der golf, dat gedurende een trillingstijd het punt x_1 passeert, in dat punt vertegenwoordigt. Wij vinden daarvoor:

$$E = \int_{x_1}^{\infty} 2 \pi c^2 \frac{\kappa_p}{p v_p} A^2 e^{-2 \kappa_p x} dx = \pi \frac{c^2}{p v_p} A^2 e^{-2 \kappa_p x_1}. \quad (24)$$

Zooals te voorzien was neemt deze energie in de richting der voortplanting af. Wij vinden uit onze uitkomsten nog voor de verhouding der energie, die in een bepaald punt gedurende een trillingstijd per volume-eenheid wordt geabsorbeerd, tot die, welke in dat punt gedurende dien tijd aankomt:

$$2 \kappa_p.$$

De uitdrukking (24) voor de energie die gedurende een trillingstijd in het punt x_1 aankomt, kunnen we ook vinden met behulp van het theorema van Poynting, door te integreeren:

$$c \int_0^{\frac{2 \pi}{p}} \overline{\mathfrak{E}_y} \overline{\mathfrak{H}_z} dt.$$

§ 12. Berekening der grootheid s .

Wij zullen dit hoofdstuk besluiten met aan te geven, hoe in 't geval dat slechts één groep electronen voorkomt, de in § 2 ingevoerde grootheid s , kan worden berekend. ¹⁾

Volgens het daar behandelde komt het er op aan de electricische kracht die op het negatieve deeltje werkt, nader te bepalen. Daartoe beschrijven we weer den bol B_1 waarvan in § 3 sprake was en verdeelen de electricische kracht in drieën:

¹⁾ Vgl. H. A. Lorentz. La théorie électro-magnétique enz.

- 1°. die tengevolge der electronen binnen den bol B;
- 2°. die tengevolge der overige electronen;
- 3°. die welke onafhankelijk van de electronen nog bestaan kan.

(De invloed der kracht tengevolge van het electrisch veld dat het deeltje, waartoe het beschouwde electron behoort, zelf teweeg brengt is reeds in de termen van de eerste leden der vergelijkingen (7) in rekening gebracht.)

Voor de berekening der eerste twee stukken, moeten we de werking kennen die een willekeurig electron in het beschouwde punt (x, y, z) uitoefent. Deze wordt volgens (2), hoofdstuk III, bepaald door:

$$-\frac{1}{c} \ddot{\mathfrak{S}} - \text{grad. } \Omega,$$

waarbij volgens (19) van hoofdstuk III:

$$4 \pi \Omega = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{r} \right)' - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_y}{r} \right)' - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_z}{r} \right)'$$

en volgens (20) aldaar:

$$4 \pi c \ddot{\mathfrak{S}}_x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_x}{r} \right)'$$

enz.

We hebben hierbij ter vereenvoudiging der notaties, geschreven $\left(\frac{p_x}{r} \right)'$ in plaats van $\left(\frac{p_x}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}$. Voor de componenten van het deel der electrische kracht, dat in het punt (x, y, z) te danken is aan een der electronen, vinden we hieruit:

$$\frac{1}{4 \pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{p_x}{r} \right)' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{p_y}{r} \right)' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{p_z}{r} \right)' \right\} -$$

$$-\frac{1}{4 \pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{p_x}{r} \right)'$$

enz.

Bij de berekening van het eerste deel der electrische kracht, waarbij dus de afstand r steeds zeer kleine waarden heeft,

kunnen we den laatsten term tegenover de andere verwaarloozen en bovendien $\left(\frac{p_x}{r}\right)'$ enz. vervangen door $\frac{p_x}{r}$ enz. Daar p , de waarde van het moment van het deeltje dat zich in x', y', z' bevindt, niet afhangt van x, y, z , kunnen we voor de componenten van het eerste deel der gezochte electricische kracht schrijven:

$$\frac{1}{4\pi} \Sigma \left[p_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + p_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + p_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right],$$

de sommatie uit te strekken over alle electronen binnen B.

Bij isotrope stoffen zullen we hiervoor, onder eenige vereenvoudigende onderstellingen, nul vinden. We kunnen n.l. p_x enz., door bepaalde gemiddelde waarden vervangen, verder hebben we:

$$\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = 3 \Sigma \frac{(x' - x)(y' - y)}{r^5},$$

en $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = 3 \Sigma \frac{(x' - x)(z' - z)}{r^5},$

en deze sommen zijn wegens de volkomen grillige verdeling der punten waarover gesommeerd moet worden, nul. Bovendien is:

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \Sigma \frac{3(x' - x)^2 - r^2}{r^5} \\ &= \Sigma \frac{3(y' - y)^2 - r^2}{r^5} = \Sigma \frac{3(z' - z)^2 - r^2}{r^5}. \end{aligned}$$

De laatste drie sommen zijn weer gelijk volgens de volkomen grillige verdeling der electronen, ze zijn dus ieder $\frac{1}{3}$ van haar som, dus nul.

Ook voor de magnetische kracht zullen de electronen binnen den bol B eene bijdrage nul opleveren.

Wij gaan nu over tot de beschouwing van den invloed der overige electronen. Voor de componenten der electricische kracht tengevolge van één deeltje geldt weer de uitdrukking (25). Bij

het sommeeren kunnen we nu de som van p_x voor alle electronen binnen eene physisch oneindig kleine ruimte $d\tau'$ (van dezelfde orde van grootte als T) weer vervangen door N -maal de gemiddelde waarde, dus volgens § 1 door $\mathfrak{P}_x d\tau'$. Daar we den bol B nog groot onderstelden in vergelijking met T , kunnen we voor alle punten van ieder element $d\tau'$, dat hierbij ter sprake komt, r als constant beschouwen en dus ook $\Sigma \left(\frac{p_x}{r}\right)'$ over $d\tau'$ vervangen door $\left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau'$. Op deze wijze vinden we voor de componenten van het tweede deel der electriche kracht die wij zoeken:

$$\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\mathfrak{P}_y}{r}\right)' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\mathfrak{P}_z}{r}\right)' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' \right] d\tau'. \quad (26)$$

enz.

Om deze uitdrukking te herleiden, hebben we volgens de stelling, die door (9) van hoofdstuk III wordt uitgedrukt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau' = -\frac{1}{R^2} \int (x' - x) (\mathfrak{P}_x)' dB + \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau'$$

daar B physisch oneindig klein is, kunnen we in de eerste integraal van het tweede lid $(\mathfrak{P}_x)'$ als constant beschouwen, waardoor blijkt dat deze integraal evenredig met R is en dus wegvalt. Dus:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau' = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau'$$

Door hierop weer dezelfde stelling toe te passen, vinden we:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau' = -\frac{1}{R} \int (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' dB + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r}\right)' d\tau'.$$

In den eersten term van het tweede lid kan $(\mathfrak{P}_x)'$ weer vervangen

worden door de waarde \mathfrak{P}_x in het punt x, y, z , de integratie kan dan worden uitgevoerd en we vinden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r} \right)' d\tau' = -\frac{4}{3} \pi \mathfrak{P}_x + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathfrak{P}_x}{r} \right)' d\tau'. \quad (27)$$

Op dezelfde wijze vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_y}{r} \right)' d\tau' &= \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\mathfrak{P}_y}{r} \right)' d\tau', \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int \left(\frac{\mathfrak{P}_z}{r} \right)' d\tau' &= \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\mathfrak{P}_z}{r} \right)' d\tau'. \end{aligned}$$

Wij zullen dit nu in (26) substitueeren en daarbij nog invoeren den vector \mathfrak{M} , bepaald door $\mathfrak{M} = \int \left(\frac{\mathfrak{P}}{r} \right)' d\tau'$. Wij vinden dan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Div } \mathfrak{M} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{M}}_x \right), \\ \text{enz.} \end{aligned}$$

voor de componenten van het tweede deel der electricische kracht in het punt (x, y, z) .

Om deze uitdrukking straks nog verder te herleiden, zullen we ook het overeenkomstige deel der magnetische kracht in het beschouwde punt bepalen. Daarvoor vinden we, door toepassing van (1), hoofdstuk III:

$$\Sigma \text{Rot } \mathfrak{F} = \frac{1}{4 \pi c} \Sigma \frac{\partial}{\partial t} \text{Rot} \left(\frac{\mathfrak{p}}{r} \right)',$$

de som weer over alle electronen buiten B uit te strekken. Deze uitdrukking kunnen we weer vervangen door:

$$\frac{1}{4 \pi c} \text{Rot} \int \left(\frac{\mathfrak{P}}{r} \right)' d\tau'$$

of door:

$$\frac{1}{4 \pi c} \text{Rot } \mathfrak{M}.$$

Het derde deel der electriche kracht in (x, y, z) zullen we \mathfrak{E}_o noemen, daaraan beantwoordt eene magnetische kracht \mathfrak{H}_o enz., tusschen welke vectoren de vergelijkingen I, van hoofdstuk II, gelden.

Door nu de gevonden uitkomsten te substitueeren in de vergelijkingen (7), worden deze:

$$m\ddot{p}_x + \beta \dot{p}_x + a p_x = e^2 \left\{ \mathfrak{E}_{o_x} + \frac{1}{3} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Div } \mathfrak{M} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{M}}_x \right) \right\}.$$

enz.

Door deze nu te sommeeren over alle electronen binnen de ruimte T , vinden we:

$$m\ddot{\mathfrak{P}}_x + \beta \dot{\mathfrak{P}}_x + a \mathfrak{P}_x = N e^2 \left\{ \mathfrak{E}_{o_x} + \frac{1}{3} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Div } \mathfrak{M} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{M}}_x \right) \right\}. \quad (29)$$

enz.

Hieruit kan nu nog \mathfrak{M} geëlimineerd worden door toepassing der vergelijkingen I van dit hoofdstuk. Wij hebben:

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_o + \frac{1}{4\pi c} \text{Rot } \mathfrak{M},$$

en dus:

$$\frac{1}{c} (\overline{\mathfrak{E}} + \dot{\mathfrak{P}}) = \text{Rot } \mathfrak{H}_o + \frac{1}{4\pi c} \text{Rot Rot } \mathfrak{M},$$

waaruit:

$$\overline{\mathfrak{E}}_x + \mathfrak{P}_x = \mathfrak{E}_{o_x} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Div } \mathfrak{M} - \Delta \mathfrak{M}_x \right),$$

enz.

Dit in (29) substitueerend, vinden we:

$$m\ddot{\mathfrak{P}}_x + \beta \dot{\mathfrak{P}}_x + a \mathfrak{P}_x = N e^2 \left\{ \overline{\mathfrak{E}}_x + \frac{4}{3} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{4\pi} (\Delta \mathfrak{M}_x - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{M}}_x) \right\},$$

enz.

Nu volgt uit (27), door toepassing van § 3 van hoofdstuk III:

$$\Delta \mathfrak{M}_x - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{M}}_x = -4\pi \mathfrak{P}_x,$$

dus:

$$m \ddot{\mathfrak{P}}_x + \beta \dot{\mathfrak{P}}_x + a \mathfrak{P}_x = N e^2 (\overline{\mathfrak{E}}_x + \frac{1}{3} \mathfrak{P}_x),$$

enz.,

of:

$$m \ddot{\mathfrak{P}}_x + \beta \dot{\mathfrak{P}}_x + (a - \frac{1}{3} N e^2) \mathfrak{P}_x = N e^2 \overline{\mathfrak{E}}_x, \quad (30)$$

enz.

De in § 3 ingevoerde grootheid s blijkt dus voor het hier beschouwde geval te zijn $\frac{1}{3} N e^2$. Wij vinden nu verder, als V_p weer de voortplantingssnelheid is en we nu maar β buiten rekening laten:

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{N e^2}{a - \frac{1}{3} N e^2 - m p^2} \right)$$

en dus als we den bijbehorenden brekingsindex n_p noemen:

$$n_p^2 = 1 + \frac{N e^2}{a - \frac{1}{3} N e^2 - m p^2},$$

waaruit blijkt dat:

$$\frac{n_p^2 - 1}{n_p^2 + 2} = \frac{N e^2}{3(a - m p^2)}$$

evenredig is met N , dus met de dichtheid, het bekende resultaat dat reeds in 1878 door Lorentz ¹⁾ werd gevonden. Wanneer verschillende electronengroepen voorkomen zijn echter de beschouwingen in dit hoofdstuk niet geheel juist, daar dan de verhouding $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_3}$ van p zal afhangen en dus ook s_1 , evenzoo s_2 enz. Daar echter s_1 steeds klein is in vergelijking met a_1 (zie 't volgende hoofdstuk) is de invloed dezer fout uiterst gering.

¹⁾ Over het verband tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen.

HOOFDSTUK VI.

Experimenteetele gegevens.

§ 1. *Dispersie-formules.*

Wanneer men nu de waarde wil nagaan der in de vorige hoofdstukken besproken theorie en der hypothese, waarop ze berust, dan zal men in de eerste plaats vragen, in hoeverre hare uitkomsten niet alleen, wat het algemeen karakter aangaat aan de ervaring beantwoorden, maar ook numeriek met de waarnemingen overeenkomen.

Verder kan men zich afvragen of de onderstellingen ook eene uitbreiding toelaten, waardoor ook andere dispersiever-schijnselen, in het bijzonder die bij kristallen, op geschikte wijze verklaard worden.

Eindelijk dient nagegaan te worden in hoeverre de functie die wij voor de voortplantingssnelheid vinden, voldoet aan den eisch der theorie, die in de inleiding werd besproken.

Wat het eerste punt betreft, de vergelijking met de waarnemingen, levert de theorie twee grootheden die zich daartoe in 't bijzonder schijnen te leenen, n.l. den brekingsindex en den absorptiecoëfficiënt. Over den laatsten zijn echter uit proeven nog niet vele gegevens beschikbaar. We zullen ons dus bepalen tot den brekingsindex.

Wij kunnen dezen vinden uit vgl. 14 (c.q. 15) van het vorige hoofdstuk, waaruit we gemakkelijk afleiden de dispersieformule:

$$n^2 = 1 + \sum_k \left\{ \frac{N_k e_k^2}{m_k} \frac{\lambda_k^2}{1 - \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2} \right\}, \quad (1)$$

waarin $\lambda = \frac{2\pi c}{p}$ de golflengte der beschouwde trillingen met de frequentie p in den vrijen aether is en $\lambda_k = \frac{2\pi c}{q_k}$ de golflengte in den vrijen aether behoorend bij de frequentie q_k .

Deze formule komt geheel overeen met (22) hoofdstuk I, die uit de theorie van Helmholtz werd gevonden.

Zooals daarbij reeds werd opgemerkt, kan men ze, voor 't geval, dat onder de waarden van λ_k er geen voorkomt die gelijk is aan de tot 't zichtbare spectrum behorende golflengten of grooter, herleiden tot de dispersieformule van Cauchy:

$$n = a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4}. \quad (2)$$

In 't algemeen voert ze tot eene formule van den vorm:

$$n = a\lambda^2 + a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2}, \quad (3)$$

waar, zoo noodig, nog termen bijgevoegd kunnen worden, evenredig met λ^4 en met $\frac{1}{\lambda^4}$ enz.

Het is gemakkelijk in te zien, dat ook de dispersieformule die Ketteler met de waarnemingen vergeleken heeft, n.l.:

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D \lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (4) \quad ^1)$$

een bijzondere vorm van (1) is, even algemeen als (3).

¹⁾ Ketteler Theoretische Optik, 1885, pag. 541.

§ 2. *Vergelijking met de waarnemingen.*

Doorgaans is de formule (2) reeds zeer voldoende. Als voorbeeld diene het vloeispaath. Uit de waarnemingen van Sarasin ¹⁾ vind ik voor de waarden der constanten:

$$a_0 = 1,42633 \quad a_2 = 2789,71 \cdot 10^{-14} \quad a_4 = -47127000 \cdot 10^{-28}$$

als de golflengten in centimeters zijn uitgedrukt.

In het volgende tafeltje zijn de hiermede berekende waarden voor enkele spectraal-lijnen met de waarnemingen vergeleken:

Spectraallijn	λ	n (berekend)	n (waargen.)	verschil
A	$760,40 \cdot 10^{-7}$	1,43101	1,43101	0
B	$686,71 \cdot 10^{-7}$	1,43203	1,43200	+ 3
C	$656,18 \cdot 10^{-7}$	1,43255	1,43257	- 2
D	$589,20 \cdot 10^{-7}$	1,43397	1,43394	+ 3
F	$486,07 \cdot 10^{-7}$	1,43729	1,43705	+ 24
H	$396,81 \cdot 10^{-7}$	1,44214	1,44214	0

Toch krijgt men in vele gevallen nog betere overeenstemming door ook groote waarden van λ_k in rekening te brengen, dus een der formules (3) of (4) te gebruiken. Ter vergelijking neem ik hier de volgende tabel van Ketteler over, die met behulp van formule (4) uit dezelfde waarnemingsreeks voor het vloeispaath berekend is als de bovenstaande. In C.G.S.-eenheden wordt:

$$k = 0,004878 \cdot 10^8$$

$$D = 0,62371$$

$$a^2 = 2,04020$$

$$\lambda_k^2 = 0,00957 \cdot 10^{-8}$$

Spectraallijn	λ	n (berekend)	n (waargen.)	verschil
A	$760,40 \cdot 10^{-7}$	1,43104	1,43101	+ 3
a	$718,36 \cdot 10^{-7}$	1,43159	1,43157	+ 2
B	$686,71 \cdot 10^{-7}$	1,43206	1,43200	+ 6
C	$656,18 \cdot 10^{-7}$	1,43257	1,43257	0

¹⁾ Arch. d. Sc. phys. Genève, 10, p. 303, 1883.

Spectraallijn	λ	n (berekend)	n (waargen.)	verschil
D	$589,20 \cdot 10^{-7}$	1,43394	1,43394	0
F	$486,07 \cdot 10^{-7}$	1,43714	1,43705	+ 9
h	$410,12 \cdot 10^{-7}$	1,44118	1,44121	- 3
H	$396,81 \cdot 10^{-7}$	1,44215	1,44214	+ 1
Cd. 9	$360,90 \cdot 10^{-7}$	1,44535	1,44535	0
10	$346,55 \cdot 10^{-7}$	1,44693	1,44697	- 4
11	$340,15 \cdot 10^{-7}$	1,44771	1,44775	- 4
12	$325,25 \cdot 10^{-7}$	1,44973	1,44987	- 14
17	$274,67 \cdot 10^{-7}$	1,45960	1,45958	+ 2
18	$257,13 \cdot 10^{-7}$	1,46473	1,46476	- 3
23	$231,25 \cdot 10^{-7}$	1,47507	1,47517	- 10
24	$226,45 \cdot 10^{-7}$	1,47752	1,47762	- 10
25	$219,35 \cdot 10^{-7}$	1,48149	1,48150	- 1
26	$214,41 \cdot 10^{-7}$	1,48457	1,48462	- 5
Zn 27	$209,88 \cdot 10^{-7}$	1,48765	1,48765	0
28	$206,10 \cdot 10^{-7}$	1,49044	1,49041	+ 3
29	$202,43 \cdot 10^{-7}$	1,49333	1,49326	+ 7

Men kan trouwens ook onmiddellijk de formule (1) gebruiken; daar echter geen voldoende waarnemingen der grootheden λ_k (de golflengte waarbij de sterkste absorptie plaats heeft) voorhanden zijn, moet men dan in hoofdzaak door probeeren de waarden der constanten bepalen. Nemen we twee absorptiestrepen aan, één in 't ultrarood en één in 't ultraviolet, dan kunnen we voor (1) schrijven:

$$\begin{aligned}
 n^2 &= 1 + \frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{N_2 e_2^2}{m_2} \frac{\lambda_2^2}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} \\
 &= 1 + \frac{N_1 e_1^2 \lambda_1^2}{m_1} + \frac{N_2 e_2^2 \lambda_2^2}{m_2} + \frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{\lambda_1^4}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{N_2 e_2^2}{m_2} \frac{\lambda_2^4}{\lambda^2 - \lambda_2^2} \\
 &= b^2 + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Op deze wijze zijn door Paschen ¹⁾ gevonden de waarden:

$$b^2 = 6,09104 \quad \lambda_1^2 = 0,008884 \cdot 10^{-8} \quad \lambda_2^2 = 1258,47 \cdot 10^{-8}$$

$$M_1 = 0,00612093 \cdot 10^{-8} \quad M_2 = 5099,15 \cdot 10^{-8}$$

Met behulp daarvan heeft Paschen de waarden die de formule (5) geeft vergeleken met waarnemingen. Voor golflengten van $185,6 \cdot 10^{-7}$ c.M. tot $410,12 \cdot 10^{-7}$ c.M. gebruikte hij de reeds genoemde waarnemingen van Sarasin, voor groote golflengten tot $9429,1 \cdot 10^{-7}$ waarnemingen van hem zelf en van Carvallo. Deze vergelijking loopt dus over een nog veel grooter deel van het spectrum dan die van Ketteler.

Voor de grootste golflengte is het verschil tusschen waarneming en berekening 36 eenheden der laatste decimaal; overigens komt geen grooter verschil dan 19 voor (behalve voor de golflengte $193,1 \cdot 10^{-7}$, waar de fout echter wel aan de waarneming zal liggen). Deze verschillen vallen geheel binnen de grenzen der waarnemingsfouten. Inderdaad zijn de onderlinge verschillen tusschen de door Paschen opgegeven resultaten en de bijna tegelijkertijd gepubliceerde waarnemingen (waarbij de golflengten echter minder nauwkeurig bepaald zijn) van Rubens²⁾ grooter.

De ligging van het absorptiemaximum, op deze wijze berekend, $\lambda_2 = 35475 \cdot 10^{-7}$ komt wel ongeveer, maar niet geheel overeen met hetgeen later door Aschkinass³⁾ direct gevonden is. Deze vindt twee absorptiestrepen in het ultrarood bij $31600 \cdot 10^{-7}$ en $24000 \cdot 10^{-7}$. Eene dispersieformule met een term meer zal dus volgens de theorie nog beter moeten voldoen.

Rubens en Nichols⁴⁾ hebben voor eenige stoffen de golflengte der sterkst geabsorbeerde stralen van het ultrarode

¹⁾ F. Paschen. Dispersion des Fluorits. Ann. d. Phys. 53 (1894) pag. 820.

²⁾ H. Rubens. Dispersionsformel. Ann. d. Phys. 53 (1894), pag. 273.

³⁾ E. Aschkinass. Anomale Dispersion. Ann. d. Phys. 1 (1900) pag. 67.

⁴⁾ H. Rubens u. E. F. Nichols. Wärmestrahlen von grosser Wellenlänge. Ann. d. Phys. 60 (1897) pag. 418.

spectrum bepaald en met behulp daarvan dispersieformules opgesteld. Zij zonderden deze stralen af door gebruik te maken van de eigenschap dat ze tevens 't meest worden teruggekaatst. Na een vier of vijftal terugkaatsingen aan oppervlakken der te onderzoeken stof, verkregen zij eene straling die stralen van andere golflengte dan de sterkst geabsorbeerde slechts in geringe mate bevatte.

Zij onderzochten hunne dispersieformule in het bijzonder voor groote golflengten.

Voor klipzout zijn de uitkomsten de volgende:

$$b^2 = 5,1790 \quad \lambda_1^2 = 0,01621 \cdot 10^{-8} \quad \lambda_2^2 = 3149,3 \cdot 10^{-8}$$

$$M_1 = 0,018496 \cdot 10^{-8} \quad M_2 = 8977,0 \cdot 10^{-8}$$

Een vergelijking van de uitkomsten der formule (5) met de waarnemingen geeft dan het volgende tabelletje.

λ	n (berekend)	n (waargen.)	verschil
$434 \cdot 10^{-7}$	1,5606	1,5607	- 1
$589 \cdot 10^{-7}$	1,5441	1,5441	0
$8670 \cdot 10^{-7}$	1,5030	1,5030	0
$20570 \cdot 10^{-7}$	1,3735	1,3735	0
$22300 \cdot 10^{-7}$	1,3403	1,340	

Voor sylvien worden deze getallen:

$$b^2 = 4,5531 \quad \lambda_1^2 = 0,0234 \cdot 10^{-8} \quad \lambda_2^2 = 4517,1 \cdot 10^{-8}$$

$$M_1 = 0,0150 \cdot 10^{-8} \quad M_2 = 1074,7 \cdot 10^{-8}$$

waarmee we vinden:

λ	n (berekend)	n (waargen.)	verschil
$434 \cdot 10^{-7}$	1,5048	1,5048	0
$589 \cdot 10^{-7}$	1,4899	1,4900	- 1
$7080 \cdot 10^{-7}$	1,4653	1,4653	0
$20600 \cdot 10^{-7}$	1,3882	1,3882	0
$22500 \cdot 10^{-7}$	1,3688	1,389	

§ 3. Over de waarden van $\frac{e^2}{m}$ en $\frac{e}{m}$.

Met behulp van deze getallen zijn we ook in staat eene waarde te vinden voor de grootheden $\frac{N_1 e_1^2}{m_1}$ en $\frac{N_2 e_2^2}{m_2}$. Wij hebben n.l.:

$$\frac{N_1 e_1^2}{m_1} \lambda_1^4 = M_1, \quad \frac{N_2 e_2^2}{m_2} \lambda_2^4 = M_2.$$

Hieruit volgt voor het vloeispaath:

$$\frac{N_1 e_1^2}{m_1} = 7,76.10^9 \quad (\lambda_1^2 = 0,008884.10^{-8}),$$

$$\frac{N_2 e_2^2}{m_2} = 3,22.10^5 \quad (\lambda_2^2 = 1258,47.10^{-8}),$$

voor het klipzout:

$$\frac{N_1 e_1^2}{m_1} = 5,56.10^9 \quad (\lambda_1^2 = 0,01621.10^{-8}),$$

$$\frac{N_2 e_2^2}{m_2} = 9,05.10^4 \quad (\lambda_2^2 = 3149,3.10^{-8}),$$

en voor het sylvien:

$$\frac{N_1 e_1^2}{m_1} = 2,74.10^9 \quad (\lambda_1^2 = 0,0234.10^{-8}),$$

$$\frac{N_2 e_2^2}{m_2} = 5,27.10^4 \quad (\lambda_2^2 = 4517,1.10^{-8}).$$

Uit deze resultaten blijkt, dat de waarde der grootheid $\frac{N_1 e_1^2}{m_1}$ steeds belangrijk grooter is voor die electronen, waarbij de frequentie der eigen trillingen met die van 't ultraviolette licht overeenkomt, dan voor de electronen, waarbij deze aan 't ultrarode licht beantwoordt. Bovendien schijnt het, dat deze grootheid regelmatig toeneemt als de frequentie der eigen trillingen toeneemt. Het kan nu de vraag zijn of dit daaraan toe te schrijven is, dat bij de electronen met groote frequentie der eigen trillingen de massa zooveel kleiner is dan bij de andere of wel dat de lading zooveel grooter is; de derde mogelijkheid n.l. dat N_1 steeds grooter is dan N_2 , lijkt niet erg waarschijnlijk. De eenvoudigste onderstelling is wel, dat N_1 en N_2 beide gelijk zijn aan 't aantal moleculen per volume-eenheid.

Al ligt het in verband met de uitdrukking voor de frequentie der eigen trillingen ($q^2 = \frac{a_1}{m_1}$) voor de hand te denken aan de eerstgenoemde oorzaak, toch zal nader experimenteel onderzoek noodig zijn om deze quaestie te beslissen.

Van het overwinnen der moeilijkheden, aan dit onderzoek ongetwijfeld verbonden, kan men als resultaat verwachten, dat het ons in staat zal stellen de voorstellingen over het wezen der materie meer te praeciseeren.

De weg dien men zal kunnen inslaan is reeds door Lorentz ¹⁾ aangewezen. Nemen we namelijk aan, dat de hier beschouwde electronen de zelfde zijn als die welke de uitstraling te weeg brengen, dan kunnen we de grootheden $\frac{e_1}{m_1}$ en $\frac{e_2}{m_2}$ vinden door metingen over het verschijnsel van Zeeman. Zijn op deze wijze voor een electronengroep zoowel $\frac{Ne^2}{m}$ als $\frac{e}{m}$ bekend dan kunnen met behulp van schattingen over N daaruit e en m berekend worden.

Voor de electronen, die in natriumdamp voorkomen vindt men als e in dezelfde eenheid, die wij nog steeds gebruikt hebben, wordt uitgedrukt $\frac{e}{m} = 17.10^{17}$. De golflengte der natriumlijn ($\lambda^2 = 3,47.10^{-9}$) verschilt echter te veel van die, welke voorkomen bij de electronengroepen, waarvoor we $\frac{Ne^2}{m}$ bepaald hebben, om eene behoorlijke vergelijking mogelijk te maken. Alleen kunnen we besluiten, dat m veel kleiner zal zijn dan de massa van een atoom.

Uit de waarden die wij voor $\frac{Ne^2}{m}$ gevonden hebben blijkt nog, daar deze alle zeer klein zijn in vergelijking met p^2 , dat s zeer klein is in vergelijking met a , (zie hoofdstuk V § 12).

H. A. Lorentz. Over verschijnselen die met de massa der ionen in verband staan. Zittingsverslagen der K. A. v. W. te Amsterdam VI pag. 506.

HOOFDSTUK VII.

Dispersieverschijnselen in anisotrope media.

§ 1. *Hypothese.*

Wij zullen in dit hoofdstuk nagaan, hoe de theorie kan uitgebreid worden tot het geval van anisotrope media.

Gaan we de onderstellingen en redeneeringen der hoofdstukken III en V nog eens na, dan treffen we twee punten, waar wij eene wijziging kunnen aanbrengen, die geschikt is ons tot eene verklaring der optische verschijnselen in kristallen te brengen.

In de eerste plaats kunnen we ons denken, dat bij deze lichamen de vergelijkingen (21) van hoofdstuk III moeten gewijzigd worden. Bij het opstellen dier vergelijkingen hebben we ons gedacht, dat bij eene uitwijking van het bewegelijke electron uit zijn evenwichtsstand, eene terugwerkende kracht ontstaat in de richting der uitwijking. Door aan te nemen, dat deze terugwerkende kracht een hoek maakt met de richting der uitwijking, krijgen we eene wijziging in de vergelijkingen, die geschikt is om eene verklaring van de verschijnselen in kristallen te geven. De bewegingsvergelijkingen van het negatieve electron worden dan:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial t} - a_{11} \xi - a_{12} \eta - a_{13} \zeta - e \mathcal{E}_x \quad (1)$$

enz.

Deze onderstelling heeft betrekking op de eigenschappen der afzonderlijke moleculen, waarvan we ons kunnen voorstellen, dat ze in een kristal voor verschillende richtingen verschillend zijn.

Men kan echter ook tot eene verklaring der optische verschijnselen in anisotrope media geraken, alleen door de zeer gewone onderstelling dat daarin de moleculen en dus ook de electronen met een zekere regelmaat gerangschikt zijn. De beschouwingen van Hoofdstuk V, § 3, moeten dan eene wijziging ondergaan. Wel zullen de daar ingevoerde grootheden q_1 enz. nog als lineaire functies van \mathfrak{P} beschouwd moeten worden, maar we kunnen niet meer aannemen dat q dezelfde richting zal hebben als \mathfrak{P} .

In plaats van hoofdstuk V (8) vinden we dan :

$$\begin{aligned} q_{1x} &= s_{xx_1} \mathfrak{P}_{1x} + s_{xy_1} \mathfrak{P}_{1y} + s_{xz_1} \mathfrak{P}_{1z}, \\ q_{1y} &= s_{yx_1} \mathfrak{P}_{1x} + s_{yy_1} \mathfrak{P}_{1y} + s_{yz_1} \mathfrak{P}_{1z}, \\ q_{1z} &= s_{zx_1} \mathfrak{P}_{1x} + s_{zy_1} \mathfrak{P}_{1y} + s_{zz_1} \mathfrak{P}_{1z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Deze wijziging der formules zal voor anisotrope stoffen in ieder geval moeten worden aangebracht, want zonder eene zekere rangschikking der moleculen, komen de verschijnselen der dubbele breking niet voor; een stof die kristallen kan vormen is b.v. isotroop, zoolang ze in oplossing voorkomt.

Of nu de eerste wijziging ook zal moeten worden aangebracht zal met behulp der waarnemingen moeten worden beslist. Wij zullen ons eenvoudigheidshalve tot de tweede onderstelling beperken. Formeel krijgen we trouwens dezelfde uitkomsten, wanneer we beide oorzaken in rekening brengen.

Bij de kristallen van het regulaire systeem, waar we ons eene cubische rangschikking der moleculen moeten voorstellen, komen in plaats van de formules (2) weer de eenvoudige vergelijkingen (8) van Hoofdstuk V. Deze kristallen zijn dan ook optisch isotroop.

Overigens moeten op dezelfde wijze als door (2) voor de electronen der eerste groep wordt aangewezen, de uitdrukkingen die op de andere groepen betrekking hebben worden gewijzigd. We zullen ons echter vooreerst tot de beschouwing van één electronengroep beperken. De differentiaalvergelijkingen voor \mathfrak{P}_1 worden dan, als we den term met \mathfrak{P}_1 buiten beschouwing laten — dus afzien van absorptie —:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1x} + a_1 \mathfrak{P}_{1x} - s_{xx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{xy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{xz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{E}}_x, \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1y} + a_1 \mathfrak{P}_{1y} - s_{yx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{yy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{yz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{E}}_y, \quad (3) \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1z} + a_1 \mathfrak{P}_{1z} - s_{zx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{zy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{zz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^2 \overline{\mathfrak{E}}_z. \end{aligned}$$

Houden we ook rekening met de wijziging die door (1) wordt uitgedrukt, dan komt men tot formules van denzelfden vorm.

§ 2. Keuze van een nieuw coördinatenstelsel.

We kunnen de vergelijkingen zeer vereenvoudigen, door vooreerst een verband tusschen de coëfficiënten s op te sporen.

Volgens de beschouwingen van Hoofdstuk V, § 8, die hier onveranderd blijven gelden, hebben we, als we in de daar gevonden vergelijking (19) nog substitueeren $\overline{\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{C}} + \mathfrak{P}$ en $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{B}$,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{C}})^2 + \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{S}})^2 \right\} + (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{P}). \quad (4)$$

Daar nu in het medium geen energie wordt geabsorbeerd is E door den toestand in ieder punt geheel bepaald. Daarom volgt uit (4) dat $(\overline{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{P})$ ook het differentiaalquotient naar den tijd moet zijn van eene functie der beschouwde vectoren.

Wij vinden door substitutie van de waarden uit (3), daar voor dit geval \mathfrak{P} en \mathfrak{P}_1 hetzelfde beteekenen:

$$\begin{aligned} N_1 e_1^2 (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \dot{\mathfrak{P}}) &= m_1 (\ddot{\mathfrak{P}}_1 \cdot \dot{\mathfrak{P}}_1) + a_1 (\mathfrak{P}_1 \cdot \dot{\mathfrak{P}}_1) \\ &\quad - s_{xx_1} \mathfrak{P}_{1x} \dot{\mathfrak{P}}_{1x} - s_{yy_1} \mathfrak{P}_{1y} \dot{\mathfrak{P}}_{1y} - s_{zz_1} \mathfrak{P}_{1z} \dot{\mathfrak{P}}_{1z} \\ &\quad - s_{xy_1} \mathfrak{P}_{1y} \dot{\mathfrak{P}}_{1x} - s_{yx_1} \mathfrak{P}_{1x} \dot{\mathfrak{P}}_{1y} - s_{yz_1} \mathfrak{P}_{1z} \dot{\mathfrak{P}}_{1y} - s_{zy_1} \mathfrak{P}_{1y} \dot{\mathfrak{P}}_{1z} \\ &\quad - s_{zx_1} \mathfrak{P}_{1x} \dot{\mathfrak{P}}_{1z} - s_{xz_1} \mathfrak{P}_{1z} \dot{\mathfrak{P}}_{1x}, \end{aligned}$$

en opdat deze uitdrukking een differentiaal-quotient naar t zij, moet:

$$s_{xy_1} = s_{yx_1}, \quad s_{yz_1} = s_{zy_1}, \quad s_{zx_1} = s_{xz_1} \quad (5)$$

zijn.

Voor de energie per volume-eenheid vinden we dan:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{C}})^2 + \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{S}})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{N_1 e_1^2} \dot{\mathfrak{P}}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{N_1 e_1^2} \mathfrak{P}_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{2 N_1 e_1^2} \{ s_{xx_1} \mathfrak{P}_{1x}^2 + s_{yy_1} \mathfrak{P}_{1y}^2 + s_{zz_1} \mathfrak{P}_{1z}^2 \\ &\quad + 2 s_{xy_1} \mathfrak{P}_{1x} \mathfrak{P}_{1y} + 2 s_{yz_1} \mathfrak{P}_{1y} \mathfrak{P}_{1z} + 2 s_{zx_1} \mathfrak{P}_{1z} \mathfrak{P}_{1x} \}. \end{aligned}$$

Beschouwen we nu het oppervlak:

$$s_{xx_1} x^2 + s_{yy_1} y^2 + s_{zz_1} z^2 + 2 s_{xy_1} xy + 2 s_{yz_1} yz + 2 s_{zx_1} zx = C^2,$$

dat we momenten-ellipsoïde kunnen noemen. Het zal in onze theorie eene rol spelen, die eenigszins vergelijkbaar is met die der elasticiteits-ellipsoïde in de oudere theorieën der kristaloptica. Door de hoofd-assen dezer ellipsoïde tot coördinaat-assen te kiezen kunnen we zooals bekend is de vergelijking brengen in den vorm:

$$s_{x_1} x^2 + s_{y_1} y^2 + s_{z_1} z^2 = C^2.$$

Bij deze keuze van een coördinaten-stelsel wordt dus de uitdrukking voor de energie per volume eenheid:

$$E = \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{C}})^2 + \frac{1}{2} (\bar{\mathbb{S}})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{N_1 e_1^2} \dot{\mathbb{P}}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{N_1 e_1^2} \mathbb{P}_1^2 - \frac{1}{2N_1 e_1^2} \{ s_{x_1} \mathbb{P}_{1x}^2 + s_{y_1} \mathbb{P}_{1y}^2 + s_{z_1} \mathbb{P}_{1z}^2 \},$$

en de vergelijkingen (3) vereenvoudigen zich tot:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbb{P}}_{1x} + a_1 \mathbb{P}_{1x} - s_{x_1} \mathbb{P}_{1x} &= N_1 e_1^2 \bar{\mathbb{C}}_x, \\ m_1 \ddot{\mathbb{P}}_{1y} + a_1 \mathbb{P}_{1y} - s_{y_1} \mathbb{P}_{1y} &= N_1 e_1^2 \bar{\mathbb{C}}_y, \\ m_1 \ddot{\mathbb{P}}_{1z} + a_1 \mathbb{P}_{1z} - s_{z_1} \mathbb{P}_{1z} &= N_1 e_1^2 \bar{\mathbb{C}}_z. \end{aligned} \quad (6)$$

§ 3. *Verschillende kristalstelsels.*

Wanneer we nu verschillende groepen electronen hebben, zullen we voor elke groep eene momenten-ellipsoïde kunnen construeeren en in 't meest algemeene geval zullen de assen dezer ellipsoïden niet samenvallen.

Bij de kristallen van het quadratische en bij die van het hexagonale stelsel die symmetrisch zijn rondom de kristallographische hoofdas moeten we, als we ons de moleculen alle als volkomen gelijk denken, aannemen, dat dezelfde symmetrie moet bestaan voor de electronen van elke groep. De momenten-ellipsoïde moet dus voor elke groep eene omwentelings-ellipsoïde zijn, die de kristallographische hoofdas tot omwentelingsas heeft. Kiezen we deze tot Z-as, dan kunnen we de bewegings-vergelijkingen voor elke groep in de gedaante (6) brengen, terwijl bovendien voor alle waarden van k , $s_{x_k} = s_{y_k}$ wordt. De richtingen der X- en Y-as zijn hierbij nog onbepaald.

Ook bij de kristallen van het rhombische stelsel zullen wegens de symmetrie van het kristal de assen der momenten-ellipsoïde voor iedere groep vallen in de richting der kristallographische assen, maar hierbij zullen die oppervlakken in 't algemeen drie-assige ellipsoïden zijn.

Bij deze drie stelsels vinden we dus bij geschikten stand van het coördinatenstelsel de uitdrukking voor de energie per volume-eenheid in den vorm:

$$E = \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{C}})^2 + \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{S}})^2 + \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{N_k e_k^2} \dot{\mathfrak{P}}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\alpha_k}{N_k e_k^2} \mathfrak{P}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{N_k e_k^2} (s_{x_k} \mathfrak{P}_{k_x}^2 + s_{y_k} \mathfrak{P}_{k_y}^2 + s_{z_k} \mathfrak{P}_{k_z}^2),$$

waarbij is aangenomen, dat deze energie zal gevonden worden, door voor elke electronengroep eene bijdrage in rekening te brengen, zooals in § 2 voor de eerste groep werd gevonden; de bewegingsvergelijkingen der electronen krijgen voor elke groep de gedaante (6).

Door dergelijke redeneeringen als we hier volgden toe te passen op de kristallen van het regulaire systeem, zouden we weer vinden, wat we reeds opmerkten, dat deze zich als isotrope lichamen gedragen.

Over de monokline en trikline kristallen zullen we 't later hebben. We zullen nu vooreerst uitbreiding van periodieke toestanden in de kristallen der drie eerstgenoemde stelsels beschouwen.

§ 4. Enkelvoudig periodieke toestand.

Zij de frequentie p , zoodat we $\bar{\mathfrak{C}}$ en dus ook \mathfrak{P} evenredig kunnen stellen met e^{ipt} .

Noemen we nu:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{N_k e_k^2}{-m_k p^2 + \alpha_k - s_{x_k}} &= a_p, \\ \sum_k \frac{N_k e_k^2}{-m_k p^2 + \alpha_k - s_{y_k}} &= b_p, \\ \sum_k \frac{N_k e_k^2}{-m_k p^2 + \alpha_k - s_{z_k}} &= c_p, \end{aligned} \quad (7)$$

dan wordt voor dit geval volgens (6):

$$\mathfrak{P}_x = a_p \bar{\mathfrak{C}}_x, \quad \mathfrak{P}_y = b_p \bar{\mathfrak{C}}_y, \quad \mathfrak{P}_z = c_p \bar{\mathfrak{C}}_z, \quad (6')$$

en hiermee kunnen we nu uit I hoofdstuk V een stel vergelijkingen afleiden, die alleen de componenten van $\bar{\mathcal{E}}$ bevatten. We vinden:

$$\begin{aligned}\frac{1 + a_p}{c^2} \ddot{\bar{\mathcal{E}}}_x &= \Delta \bar{\mathcal{E}}_x - \frac{\partial}{\partial x} \text{Div } \bar{\mathcal{E}}, \\ \frac{1 + b_p}{c^2} \ddot{\bar{\mathcal{E}}}_y &= \Delta \bar{\mathcal{E}}_y - \frac{\partial}{\partial y} \text{Div } \bar{\mathcal{E}}, \\ \frac{1 + c_p}{c^2} \ddot{\bar{\mathcal{E}}}_z &= \Delta \bar{\mathcal{E}}_z - \frac{\partial}{\partial z} \text{Div } \bar{\mathcal{E}}.\end{aligned}\quad (8) \text{ } ^1$$

Om nu na te gaan of en hoe zich in eene bepaalde richting een enkelvoudige platte golf met frequentie p kan voortplanten, substitueeren we hierin:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_x &= A e^{ip} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{V_p} \right), \\ \bar{\mathcal{E}}_y &= B e^{ip} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{V_p} \right), \\ \bar{\mathcal{E}}_z &= C e^{ip} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{V_p} \right),\end{aligned}\quad (9)$$

waarbij m, n, p de richtingscosinussen voorstellen der normaal op het golffront

Wij kunnen nu vooreerst opmerken, dat wegens de vergelijkingen:

$$\text{Div. } \bar{\mathcal{D}} = 0,$$

en

$$\bar{\mathcal{D}}_x = (1 + a_p) \bar{\mathcal{E}}_x, \quad \bar{\mathcal{D}}_y = (1 + b_p) \bar{\mathcal{E}}_y, \quad \bar{\mathcal{D}}_z = (1 + c_p) \bar{\mathcal{E}}_z,$$

die onmiddellijk uit (6') volgen:

$$(1 + a_p) A m + (1 + b_p) B n + (1 + c_p) C p = 0. \quad (10)$$

¹⁾ Deze vergelijkingen komen overeen met die van Drude Lehrbuch der Optik, pag. 292, verg. (12). In plaats van de daar voorkomende constanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ vinden wij nu echter de grootheden $1 + a_p, 1 + b_p, 1 + c_p$, die van de frequentie afhangen. De volgende herleiding komt overeen met de door Drude gegevene.

waaruit blijkt dat de vector $\overline{\mathfrak{D}}$ in het golffront ligt, de vector $\overline{\mathfrak{E}}$ echter niet, $\overline{\mathfrak{H}}$ daarentegen weer wel, omdat $\text{Div } \overline{\mathfrak{H}} = 0$ is.

Door (9) in (8) te substitueeren vinden we:

$$\begin{aligned}\frac{1 + \alpha_p}{c^2} A &= \frac{1}{V_p^2} A - \frac{m}{V_p^2} (A m + B n + C p), \\ \frac{1 + \beta_p}{c^2} B &= \frac{1}{V_p^2} B - \frac{n}{V_p^2} (A m + B n + C p), \\ \frac{1 + \gamma_p}{c^2} C &= \frac{1}{V_p^2} C - \frac{p}{V_p^2} (A m + B n + C p).\end{aligned}$$

Noemen we nu:

$$\frac{c^2}{1 + \alpha_p} = a_p^2, \quad \frac{c^2}{1 + \beta_p} = b_p^2, \quad \frac{c^2}{1 + \gamma_p} = c_p^2, \quad (11)$$

$$A m + B n + C p = D,$$

dan volgt uit deze vergelijkingen onmiddellijk:

$$A = \frac{m a_p^2}{a_p^2 - V_p^2} D, \quad B = \frac{n b_p^2}{b_p^2 - V_p^2} D, \quad C = \frac{p c_p^2}{c_p^2 - V_p^2} D, \quad (12)$$

waaruit we A, B en C kunnen elimineeren door op te merken, dat volgens (10):

$$\frac{m}{a_p^2} A + \frac{n}{b_p^2} B + \frac{p}{c_p^2} C = 0,$$

en dus:

$$\frac{m^2}{a_p^2 - V_p^2} + \frac{n^2}{b_p^2 - V_p^2} + \frac{p^2}{c_p^2 - V_p^2} = 0. \quad (13)$$

Deze formule drukt eene uitbreiding van de wet van Fresnel¹⁾ uit. V_p^2 blijkt uit een vierkantsvergelijking opgelost te kunnen worden, als m, n en p bekend zijn. Als de normaal op het golffront eene willekeurige gegeven richting heeft, vinden we dus daarbij voor de voortplantingssnelheid twee verschillende waarden, die nu beide afhankelijk blijken van de frequentie.

¹⁾ Vgl. Drude Lehrbuch der Optik, pag. 293.

De grootheden a_p , b_p en c_p zullen we de hoofdsnelheden voor de frequentie p noemen. Uit (13) blijkt, dat wanneer de normaal op het golf-front samenvalt met een der assen van de momenten-ellipsoïden (coördinaat-assen), de snelheden door deze grootheden a_p , b_p en c_p worden voorgesteld. B.v. voor $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$, vinden we $V_p = b_p$ of $V_p = c_p$.

We hadden de vergelijkingen (13) ook kunnen vinden door uit I hoofdstuk V vergelijkingen af te leiden, die alleen componenten van $\bar{\mathfrak{S}}$ bevatten en daarmee op dezelfde wijze te werk te gaan als nu met (8) is geschied.

Uit (12) volgt dat elk der beide golven, die het golf-front loodrecht op eene bepaalde richting hebben, rechtlijnig gepolariseerd is. Immers we hebben als we de grootheden die op de beide golven betrekking hebben, door de indices 1 en 2 onderscheiden:

$$A_1 : B_1 : C_1 = \frac{m a_p^2}{a_p^2 - V_{p_1}^2} : \frac{n b_p^2}{b_p^2 - V_{p_1}^2} : \frac{p c_p^2}{c_p^2 - V_{p_1}^2}, \quad (14)$$

$$A_2 : B_2 : C_2 = \frac{m a_p^2}{a_p^2 - V_{p_2}^2} : \frac{n b_p^2}{b_p^2 - V_{p_2}^2} : \frac{p c_p^2}{c_p^2 - V_{p_2}^2}.$$

Het polarisatievlak blijkt dus voor elk der beide stralen van de frequentie af te hangen. Maar voor iedere frequentie staan de beide richtingen, die de dielectrische verplaatsing kan hebben, loodrecht op elkaar, want uit (14) kan men met behulp van (13) afleiden:

$$\frac{A_1}{a_p^2} \frac{A_2}{a_p^2} + \frac{B_1}{b_p^2} \frac{B_2}{b_p^2} + \frac{C_1}{c_p^2} \frac{C_2}{c_p^2} = 0.$$

§ 5. Eénassige kristallen.

Keeren we nu terug tot de beschouwing van het geval, dat zich in 't quadratische en het hexagonale stelsel altijd moet voordoen, dat voor alle waarden van k : $s_{xk} = s_{yk}$. Dan is volgens (7) en (11) voor iedere waarde der frequentie $a_p = b_p$ en

$a_p = b_p$. Twee der hoofdsnelheden zijn dus gelijk. Uit de formule (13) volgt dan verder dat voor golven, wier golffront loodrecht staat op de Z-as, de beide snelheden gelijk worden. De richting der Z-as wordt daarom optische as genoemd. Daar geen andere richting dezelfde eigenschap heeft, heeten deze kristallen éénassig.

Uit (14) zien we, dat als de normaal op het golffront met de optische as samenvalt, de richting der trillingen onbepaald is. Zulke golven kunnen zich dus in het kristal voortplanten zonder gepolariseerd te worden.

Uit (13) blijkt nog, dat één der beide golven wier golffront een bepaalde richting heeft, steeds de voortplantingssnelheid a_p heeft, onafhankelijk van deze richting.

Men spreekt hierbij van den gewonen straal. Tegenover dezen straal gedraagt het kristal zich als een isotroop medium (behalve wat den polarisatietoestand betreft). Men kan daarvoor dan ook uit (11) en (7) eene dispersie-formule afleiden, geheel overeenkomend met die voor isotrope media. Voor de vergelijking met de waarnemingen, — die bevredigende resultaten geeft — zij verwezen naar Ketteler (Theoretische Optik, pag. 545).

§ 6. Rhombische kristallen.

Bij de kristallen van het rhombische stelsel zullen in 't algemeen geen twee der grootheden a_p , b_p , c_p aan elkaar gelijk zijn.

Wij kunnen echter uit (13) ook in dit geval waarden van m , n , p zoeken, waarvoor de beide voortplantingssnelheden die bij eene bepaalde frequentie behooren, gelijk zijn. Schrijven we daartoe (13) in den vorm:

$$V_p^4 - V_p^2 \{ m^2 (b_p^2 + c_p^2) + n^2 (c_p^2 + a_p^2) + p^2 (a_p^2 + b_p^2) \} \\ + m^2 b_p^2 c_p^2 + n^2 c_p^2 a_p^2 + p^2 a_p^2 b_p^2 = 0,$$

en benoemen we de assen zoo, dat:

$$a_p > b_p > c_p.$$

De voorwaarde, dat bovenstaande vergelijking gelijke wortels heeft:

$$\{ m^2 (b_p^2 + c_p^2) + n^2 (c_p^2 + a_p^2) + p^2 (a_p^2 + b_p^2) \}^2 \\ - 4 m^2 b_p^2 c_p^2 - 4 n^2 c_p^2 a_p^2 - 4 p^2 a_p^2 b_p^2 = 0,$$

laat zich herleiden, wanneer we voor de laatste drie termen stellen:

$$4 m^2 b_p^2 c_p^2 = 4 m^4 b_p^2 c_p^2 + 4 m^2 n^2 b_p^2 c_p^2 + 4 m^2 p^2 b_p^2 c_p^2 \\ \text{enz.}$$

We brengen ze in den vorm:

$$\{ m^2 (b_p^2 - c_p^2) - n^2 (a_p^2 - c_p^2) - p^2 (a_p^2 - b_p^2) \}^2 \\ + 4 m^2 n^2 (b_p^2 - c_p^2) (a_p^2 - c_p^2) = 0.$$

Daar geen dezer beide termen negatief kan zijn, kan hieraan alleen voldaan worden als:

$$m^2 (b_p^2 - c_p^2) - n^2 (a_p^2 - c_p^2) - p^2 (a_p^2 - b_p^2) = 0,$$

en:

$$4 m^2 n^2 (b_p^2 - c_p^2) (a_p^2 - c_p^2) = 0.$$

Nu kan voor $m = 0$ aan de eerste dezer voorwaarden niet voldaan worden, we moeten dus hebben $n = 0$, waarbij we verder vinden:

$$m^2 (b_p^2 - c_p^2) - p^2 (a_p^2 - b_p^2) = 0.$$

De richtingen waarvoor de beide voortplantingssnelheden, behoorend bij de frequentie p , gelijk zijn, vinden we nu met

behulp van $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, als:

$$m_1 = + \sqrt{\frac{a_p^2 - b_p^2}{a_p^2 - c_p^2}}, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = + \sqrt{\frac{b_p^2 - c_p^2}{a_p^2 - c_p^2}},$$

en: (15)

$$m_2 = + \sqrt{\frac{a_p^2 - b_p^2}{a_p^2 - c_p^2}}, \quad n_2 = 0, \quad p_2 = - \sqrt{\frac{b_p^2 - c_p^2}{a_p^2 - c_p^2}}.$$

Deze richtingen, die de optische assen genoemd worden, staan dus beide loodrecht op die kristalassen, die beantwoordt aan de middelste hoofdsnelheid. Het kan echter volgens (7) en (11) voorkomen, dat voor ééne frequentie $a_p > b_p$ is en voor eene andere $a_p < b_p$. Daartusschen zal dan eene waarde van p liggen, waarvoor $a_p = b_p$ is; voor stralen van die frequentie is het kristal dan eenassig, terwijl de optische assenvlakken voor de stralen van grootere en die van kleinere frequenties loodrecht op elkaar staan. Een voorbeeld hiervan doet zich voor bij het brookiet.

Verder blijkt dat de optische assen met de andere kristalassen gelijke hoeken maken. Deze hoeken zijn echter voor verschillende frequenties verschillend. Dit is de verklaring voor het bekende verschijnsel der dispersie van de optische assen.

§ 7. *Monokline en trikline kristallen.*

In het meest algemeene geval zullen de momenten-ellipsoiden voor de verschillende electronengroepen de assen in verschillende richtingen hebben. We kunnen dan geen coördinatenstelsel kiezen, zoo dat voor alle electronengroepen de bewegingsvergelijkingen de gedaante (6) aannemen. Dit zal voorkomen bij de kristallen van het monokline en trikline stelsel.

Echter zullen wel bij een willekeurigen stand der coördinaatassen voor alle electronengroepen de vergelijkingen (5) gelden.

Beschouwen we nu weer een toestand met de frequentie p , dan geven de vergelijkingen (3) voor de electronen der k de groep:

$$\begin{aligned} (m_k p^2 - \alpha_k - s_{xxk}) \mathfrak{P}_{k_x} - s_{xyk} \mathfrak{P}_{k_y} - s_{xz_k} \mathfrak{P}_{k_z} &= N_k e_k^2 \bar{\mathfrak{E}}_x, \\ -s_{yxk} \mathfrak{P}_{k_x} + (m_k p^2 - \alpha_k - s_{yyk}) \mathfrak{P}_{k_y} - s_{yzk} \mathfrak{P}_{k_z} &= N_k e_k^2 \bar{\mathfrak{E}}_y, \\ -s_{zxk} \mathfrak{P}_{k_x} - s_{zyk} \mathfrak{P}_{k_y} + (m_k p^2 - \alpha_k - s_{zzk}) \mathfrak{P}_{k_z} &= N_k e_k^2 \bar{\mathfrak{E}}_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Hieruit lossen we op:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{k_x} &= \sigma_{xxk} \bar{\mathfrak{E}}_x + \sigma_{xyk} \bar{\mathfrak{E}}_y + \sigma_{zxk} \bar{\mathfrak{E}}_z, \\ \mathfrak{P}_{k_y} &= \sigma_{yxk} \bar{\mathfrak{E}}_x + \sigma_{yyk} \bar{\mathfrak{E}}_y + \sigma_{yzk} \bar{\mathfrak{E}}_z, \\ \mathfrak{P}_{k_z} &= \sigma_{zxk} \bar{\mathfrak{E}}_x + \sigma_{zyk} \bar{\mathfrak{E}}_y + \sigma_{zzk} \bar{\mathfrak{E}}_z, \end{aligned} \quad (17)$$

waarbij de grootheden σ_{xxk} enz. afhankelijk zijn van p , terwijl de betrekkingen bestaan:

$$\sigma_{xyk} = \sigma_{yxk}, \quad \sigma_{yzk} = \sigma_{zyk}, \quad \sigma_{zxk} = \sigma_{zxk}. \quad (18)$$

Het laatste toont men gemakkelijk aan, of door eene meetkundige beschouwing of door de coëfficiënten σ direct uit (16) te berekenen en (5) toe te passen.

Verder vinden we nu onmiddellijk:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= \bar{\mathfrak{E}}_x \sum_k \sigma_{xxk} + \bar{\mathfrak{E}}_y \sum_k \sigma_{xyk} + \bar{\mathfrak{E}}_z \sum_k \sigma_{zxk}, \\ \mathfrak{P}_y &= \bar{\mathfrak{E}}_x \sum_k \sigma_{yxk} + \bar{\mathfrak{E}}_y \sum_k \sigma_{yyk} + \bar{\mathfrak{E}}_z \sum_k \sigma_{yzk}, \\ \mathfrak{P}_z &= \bar{\mathfrak{E}}_x \sum_k \sigma_{zxk} + \bar{\mathfrak{E}}_y \sum_k \sigma_{zyk} + \bar{\mathfrak{E}}_z \sum_k \sigma_{zzk}, \end{aligned} \quad (19)$$

waarbij volgens (18):

$$\sum_k \sigma_{xyk} = \sum_k \sigma_{yxk}, \quad \sum_k \sigma_{yzk} = \sum_k \sigma_{zyk}, \quad \sum_k \sigma_{zxk} = \sum_k \sigma_{zxk}. \quad (20)$$

Blijkens deze vergelijkingen is het nu mogelijk een coördinatenstelsel te bepalen, waarvoor (19) de gedaante aanneemt:

$$\mathfrak{P}_x = a_p \bar{\mathfrak{E}}_x, \quad \mathfrak{P}_y = b_p \bar{\mathfrak{E}}_y, \quad \mathfrak{P}_z = c_p \bar{\mathfrak{E}}_z. \quad (21)$$

Het bewijs hiervoor is eenvoudig door de beschouwing der ellipsoïde:

$$x^2 \sum_k \sigma_{xxk} + y^2 \sum_k \sigma_{yyk} + z^2 \sum_k \sigma_{zzk} + 2xy \sum_k \sigma_{xyk} + 2yz \sum_k \sigma_{yzk} + 2zx \sum_k \sigma_{zxk} = C^2.$$

Het blijkt echter tevens dat de richtingen der in (21) ingevoerde coördinaatassen afhankelijk zijn van p .

Voor golven van bepaalde frequentie kunnen wij nu weer de vergelijkingen (8) afleiden en blijven de daaraan vastgeknoopte beschouwingen gelden. We vinden dus weer dat zich in elke richting twee loodrecht op elkaar gepolariseerde golven kunnen voortplanten met snelheden die door de wet van Fresnel bepaald worden. Er zullen echter voor elke frequentie twee richtingen zijn (in bijzondere gevallen één), waarvoor deze snelheden gelijk worden en waarin 't licht zich ongepolariseerd voortplant. Deze zullen we weer optische assen noemen.

We vinden ook hier dispersie der optische assen. Terwijl echter in het eerst behandelde geval de assen steeds in een zelfde vlak liggen is dit hier niet meer het geval, daar de richting der coördinaatassen van de frequentie afhangt. Dit verschijnsel noemen we dispersie van het optisch-assenvlak.

Bij de monokline kristallen moeten we echter nog eene bijzonderheid opmerken. Hier is n.l. het vlak loodrecht op de ortho-diagonaal een symmetrie-vlak en daarom zal van de momenten-ellipsoïden voor alle electronengroepen één der assen loodrecht op dat vlak staan. Het is gemakkelijk in te zien dat dan ook één onzer coördinaatassen voor alle frequenties in deze richting zal vallen. Wij kunnen nu verschillende gevallen onderscheiden naarmate deze as beantwoordt aan de middelste hoofdsnelheid of aan een der andere.

In 't eerste geval hebben we geen dispersie van het optisch-assenvlak. De kristallen onderscheiden zich echter van die van het rhombische stelsel, doordat de lijnen, die de hoeken tusschen de optische assen middendoor deelen, optische middel-

lijnen, voor verschillende frequenties verschillende richtingen hebben. Dit geval doet zich b.v. voor bij het gips.

Wanneer de ortho-diagonaal samenvalt met de grootste of kleinste hoofdsnelheid zal een der optische middellijnen steeds volgens deze richting loopen. Het vlak der optische assen kan echter met verschillende vlakken door die lijn samenvallen en ook de hoek tusschen de optische assen is, evenals in het vorige geval, voor verschillende frequenties verschillend. Een voorbeeld hiervan hebben we bij het borax.

Ook is het geval denkbaar, dat voor frequenties beneden eene bepaalde waarde de ortho-diagonaal beantwoordt aan de middelste hoofdsnelheid en voor frequenties boven die waarde aan een der beide andere of omgekeerd. Dan zou het kristal voor de eerste tot de groep van het gips en voor de andere tot die van het borax behooren, terwijl het tegenover golven van de overgangsfrequentie zich als éénassig zou gedragen. Hiervan is mij echter geen voorbeeld bekend.

Bij de trikline kristallen zullen we in 't algemeen zoowel dispersie vinden van het optisch-assenvlak als van de optische middellijnen.

§ 8. Absorptie in kristallen.

We zullen nu met een enkel woord spreken over de verschijnselen die zich voordoen in absorbeerende kristallen. Om deze te beschrijven zullen we in plaats van de vergelijkingen (3) moeten stellen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1x} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1x} + \alpha_1 \mathfrak{P}_{1x} - s_{xx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{xy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{xz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^3 \overline{\mathfrak{E}}_x, \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1y} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1y} + \alpha_1 \mathfrak{P}_{1y} - s_{yx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{yy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{yz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^3 \overline{\mathfrak{E}}_y, \\ m_1 \ddot{\mathfrak{P}}_{1z} + \beta_1 \dot{\mathfrak{P}}_{1z} + \alpha_1 \mathfrak{P}_{1z} - s_{zx_1} \mathfrak{P}_{1x} - s_{zy_1} \mathfrak{P}_{1y} - s_{zz_1} \mathfrak{P}_{1z} &= N_1 e_1^3 \overline{\mathfrak{E}}_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Wij kunnen nu met deze vergelijkingen dezelfde herleidingen uitvoeren als we met (3) gedaan hebben. De grootheid V_p wordt dan echter steeds complex.

Zonderen we nu vooreerst de monokline en de trikline kristallen uit, dan komen we tot de volgende conclusies. De twee golven die zich in eene bepaalde richting in het kristal kunnen voortplanten, hebben zoowel verschillende absorptie-index als verschillende voortplantingssnelheid. De golven zijn echter niet meer rechtlijnig maar elliptisch gepolariseerd, want de grootheden A, B, C in formule (14) worden complex.

Bij de eenassige kristallen zullen voor golven wier golfvront loodrecht op de optische as staat, niet alleen de beide voortplantingssnelheden maar ook de absorptie-indices aan elkaar gelijk zijn en wel voor alle frequenties.

Bij het rhombische stelsel echter zullen we in 't algemeen geen richtingen kunnen vinden waarvoor de grootheden V_{p_1} en V_{p_2} gelijk worden. Stellen we echter $\frac{1}{V_{p_1}} = \frac{1}{v_p} - i\mu_p$, en $\frac{1}{V_{p_2}} = \frac{1}{v_{p_2}} - i\mu_{p_2}$, zoodat v_{p_1} en v_{p_2} de eigenlijke voortplantingssnelheden en $\kappa_{p_1} = p\mu_{p_1}$ en $\kappa_{p_2} = p\mu_{p_2}$ de absorptie-indices zijn, dan zullen we twee richtingen vinden, waarvoor $v_{p_1} = v_{p_2}$ is, deze zullen we optische assen blijven noemen, en twee richtingen waarvoor $\kappa_{p_1} = \kappa_{p_2}$ is; die zullen we absorptie-assen noemen.

De absorptie-index hangt verder evenals de voortplantingssnelheid van de richting der golven af en wel zoo, dat voor verschillende richtingen 't maximum van absorptie in verschillende deelen van 't spectrum valt, 't kristal zal dus verschillende kleuren vertoonen naarmate men er in verschillende richtingen doorheen ziet. Op deze wijze verklaart onze theorie het pleochroïsme.

Voor monokline en trikline kristallen is dit alles ingewikkelder. Daar de coëfficiënten in de vergelijkingen (19) complex zijn is het in 't algemeen niet mogelijk een coördinatenstelsel te kiezen, waarvoor deze vergelijkingen den eenvoudigen vorm (21) aannemen.

Men kan nu toch nog doen zien, dat het algemeen karakter der verschijnselen met het reeds besprokene overeenkomt. Ik laat

daarbij de lange maar niet moeilijke berekeningen achterwege.

Door te letten op het reële stuk in (20) vindt men dat het mogelijk is een coördinatenstelsel aan te brengen, zoodat (19) den vorm aanneemt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_x &= a_p \overline{\mathfrak{E}_x} + i(f_{p_{xx}} \overline{\mathfrak{E}_x} + f_{p_{xy}} \overline{\mathfrak{E}_y} + f_{p_{xz}} \overline{\mathfrak{E}_z}), \\ \mathfrak{P}_y &= b_p \overline{\mathfrak{E}_y} + i(f_{p_{yx}} \overline{\mathfrak{E}_x} + f_{p_{yy}} \overline{\mathfrak{E}_y} + f_{p_{yz}} \overline{\mathfrak{E}_z}), \\ \mathfrak{P}_z &= c_p \overline{\mathfrak{E}_z} + i(f_{p_{zx}} \overline{\mathfrak{E}_x} + f_{p_{zy}} \overline{\mathfrak{E}_y} + f_{p_{zz}} \overline{\mathfrak{E}_z}),\end{aligned}$$

waarin de coëfficiënten a_p , b_p , c_p , $f_{p_{xx}}$ enz. reëel zijn en:

$$f_{p_{xy}} = f_{p_{yx}}, \quad f_{p_{yz}} = f_{p_{zy}}, \quad f_{p_{zx}} = f_{p_{xz}}.$$

Door nu op dezelfde wijze te werk te gaan als vroeger: vinden we in plaats van (10) en vlgd.:

$$\begin{aligned}(1 + a_p) A m + (1 + b_p) B n + (1 + c_p) C p \\ + i \{ f_{p_{xx}} A m + f_{p_{yy}} B n + f_{p_{zz}} C p + f_{p_{xy}} (A n + B m) \\ + f_{p_{yz}} (B p + C n) + f_{p_{zx}} (C m + A p) \} = 0. \quad (23)\end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned}\frac{1 + a_p}{c^2} A + \frac{i}{c^2} (f_{p_{xx}} A + f_{p_{xy}} B + f_{p_{xz}} C) \\ = \frac{1}{V_p^2} A - \frac{m}{V_p^2} (A m + B n + C p), \\ \frac{1 + b_p}{c^2} B + \frac{i}{c^2} (f_{p_{yx}} A + f_{p_{yy}} B + f_{p_{yz}} C) \\ = \frac{1}{V_p^2} B - \frac{n}{V_p^2} (A m + B n + C p), \quad (24) \\ \frac{1 + c_p}{c^2} C + \frac{i}{c^2} (f_{p_{zx}} A + f_{p_{zy}} B + f_{p_{zz}} C) \\ = \frac{1}{V_p^2} C - \frac{p}{V_p^2} (A m + B n + C p).\end{aligned}$$

De drie vergelijkingen (24) zijn in A, B en C homogeen en van den eersten graad en het is gemakkelijk aan te toonen dat (23) van het stel (24) afhankelijk is. Nu kunnen uit (23) en twee willekeurige van (24) A, B en C geëlimineerd worden door uit te drukken dat aan deze drie vergelijkingen, die ook homogeen en lineair zijn, andere waarden moeten voldoen dan $A = B = C = 0$. Men vindt dan eene vergelijking (in determinantvorm) die in $\frac{1}{V_p^2}$ van den tweeden graad is.

Wij vinden dus ook hier in iedere richting twee golven waarbij zoowel de voortplantingssnelheid als de absorptie-index verschillend zijn. Beide golven zullen elliptisch gepolariseerd zijn.

Optische assen en absorptie-assen zullen in 't algemeen niet samenvallen.

HOOFDSTUK VIII.

Beschouwing van een denkbeeldig medium.

§ 1. *Behandeling met het theorema van Fourier.*

Ten slotte komen we terug op de quaestie die in het begin der inleiding werd aangeroerd.

Wanneer we het theorema van Fourier toepassen bij een vraagstuk, waarbij op een gegeven tijd de toestand gegeven is als eene tot een eindig gebied beperkte evenwichtsverstoring, vinden we dan eene golf, die, een eindigen tijd na het gegeven tijdstip, nog tot een eindig gebied beperkt is?

Zooals reeds werd opgemerkt moet dit het geval zijn als we werkelijk te doen hebben met eene lichtuitbreiding overeenkomend met onze gewone voorstelling over voortplanting. Wel zijn er, voor zoover mij bekend, geen proeven gedaan, die uitsluitel geven over de vraag wat we hieromtrent moeten verwachten, maar in de onderstellingen der electromagnetische theorie zelf is eene reden waarom wij niet tevreden kunnen zijn, wanneer we bij de oplossing van het boven bedoelde vraagstuk zouden vinden, dat na een eindig tijdsverloop op oneindigen afstand eene evenwichtsverstoring bestaat.

Denken we, om dit nader in te zien, den toestand gegeven door \mathcal{E} en \mathcal{H} , waaruit we $\overline{\mathcal{E}}$ en $\overline{\mathcal{H}}$ afleiden. Voor deze laatste moeten we in den natuurlijken toestand steeds nul vinden. We kunnen gemakkelijk aantoonen, dat bij ons vraagstuk op oneindigen afstand na een eindigen tijd nog de natuurlijke toestand

bestaan zal. Daartoe merken we op dat de toestand beschreven door \mathfrak{E} en \mathfrak{H} , zich moet voortplanten gedeeltelijk door den vrijen aether gedeeltelijk door de electronen. Op die deelen van zijn weg die in den vrijen aether liggen, weten we zeker dat een eindige voortplantingssnelheid bestaat, waaruit onmiddellijk blijkt, dat die toestand zich niet in een eindigen tijd over een oneindigen afstand kan voortplanten en dus \mathfrak{E} en \mathfrak{H} na een eindigen tijd op oneindigen afstand nog nul zijn.

De behandeling van 't vraagstuk: „op een willekeurig tijdstip den toestand te bepalen, als op een bepaald tijdstip \mathfrak{E} en \mathfrak{H} als functies van de coördinaten gegeven zijn”, wijkt eenigszins van hetgeen in de inleiding is behandeld af, wanneer het medium tevens absorbeerend is, zooals volgens de theorie in het algemeen 't geval moet zijn.

Beperken we ons tot het geval van platte golven en van rechtlijnig gepolariseerd licht. We kunnen uitgaan van de oplossing:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_y = \Sigma A'_p e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x - v'_p t) + \alpha'_p \right\} \\ + \Sigma B'_p e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x + v'_p t) + \beta'_p \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{H}}_z = \Sigma A'_{1p} e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x - v'_p t) + \alpha'_{1p} \right\} \\ + \Sigma B'_{1p} e^{-\kappa'_p t} \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{x_0} p' (x + v'_p t) + \beta'_{1p} \right\}, \end{aligned}$$

waarbij voor iedere waarde van p' :

$$A'_{1p} = \frac{c}{\sqrt{v_p'^2 + \frac{\kappa_p'^2}{p'^2}}} A'_p, \quad B'_{1p} = \frac{c}{\sqrt{v_p'^2 + \frac{\kappa_p'^2}{p'^2}}} B'_p,$$

$$\alpha'_{1p} = \alpha'_p + \text{bg tg} \frac{\kappa'_p}{p' v'_p}, \quad \beta'_{1p} = \beta'_p - \text{bg tg} \frac{\kappa'_p}{p' v'_p}.$$

Stellen we de voor $t = 0$ gegeven waarde van $\overline{\mathfrak{E}}_y$ in een

punt x , voor als $\varphi(x)$ en evenzoo die van $\overline{\mathfrak{S}}_z$ als $\psi(x)$, dan moet voor alle waarden van x tusschen $-x_0$ en $+x_0$:

$$\varphi(x) = \Sigma A'_p \text{Cos} \left(\frac{\pi}{x_0} p'x + a'_p \right) + \Sigma B'_p \text{Cos} \left(\frac{\pi}{x_0} p'x + \beta'_p \right),$$

$$\psi(x) = \Sigma A'_{1p} \text{Cos} \left(\frac{\pi}{x_0} p'x + a'_{1p} \right) + \Sigma B'_{1p} \text{Cos} \left(\frac{\pi}{x_0} p'x + \beta'_{1p} \right).$$

Hieruit kunnen we met behulp van 't theorema van Fourier de grootheden A'_p , a'_p , enz. bepalen.

De vraag is nu: zijn de functies v'_p , κ'_p , zooals die in hoofdstuk V bepaald zijn, van dien aard, dat, wanneer φ en ψ slechts in een eindig gebied van nul verschillen, het zelfde zal gelden van de waarden, die we voor een willekeurig tijdstip uit onze formules voor $\overline{\mathfrak{E}}_y$ en $\overline{\mathfrak{S}}_z$ berekenen.

Wij kunnen evenals we voor het overeenkomstige vraagstuk in den vrijen aether (hoofdstuk II) gedaan hebben, de oplossing meetkundig toelichten. We hebben de kromme $y = \varphi(x)$ die den begintoestand met betrekking tot de electricische kracht voorstelt op bepaalde wijze ontbonden in twee krommen $y = \varphi_1(x)$ en $y = \varphi_2(x)$ — het zelfde geldt mutatis mutandis voor de kromme der magnetische kracht $y = \psi(x)$ — de eerste, $y = \varphi_1(x)$ stelt den beginstand voor van de golf die zich naar rechts voortplant, de tweede dien van de naar links loopende golf. Tot zoover komt de bewerking overeen met die in hoofdstuk II, maar er is nu een belangrijk verschil. In den vrijen aether vielen de krommen $y = \varphi_1(x)$ en $y = \varphi_2(x)$ met de X-as samen behalve in het eindige gebied, waar ook $y = \varphi(x)$ van de X-as afweek. Dit geldt nu niet, zooals men gemakkelijk inziet door voor dit geval de berekening van blz. 48 te herhalen. Ook in een disperseerend medium zonder absorptie zou het niet gelden. Wel zal, als v'_p slechts weinig met p' veranderlijk is, blijken, dat in 't gebied, waar $y = \varphi(x)$ met de X-as samenvalt, $y = \varphi_1(x)$ en $y = \varphi_2(x)$ slechts weinig daarvan afwijken.

We hebben verder de beide krommen $y = \varphi_1(x)$ en $y = \varphi_2(x)$ ontbonden in sinusoiden — feitelijk is deze ontbinding reeds

toegepast om de verdeeling van φ in φ_1 en φ_2 te krijgen. De voorstelling der lichtvoortplanting verkrijgen we door de sinusoiden van het eene stel naar rechts, die van het tweede stel naar links te verschuiven met snelheden, die voor de verschillende sinusoiden verschillend zijn. Daarbij moeten tegelijkertijd voor iedere sinusoïde alle ordinaten op de in Hoofdstuk V aangegeven wijze verkleind worden, waarbij ook de mate der verkleining afhangt van de golflengte. Het komt er nu op aan na te gaan of de sinusoiden, nadat deze verschuiving gedurende een eindigen tijd heeft plaats gehad, elkaar weer overal buiten een bepaald gebied zullen ophieven.

Vooreerst kunnen we opmerken, dat als v'_p en α'_p slechts weinig met p' veranderlijk zijn, zooals we steeds onderstellen, φ_1 en φ_2 buiten bepaalde grenzen zeer klein zullen blijken. Maar, opdat we voor deze grootheden bepaald nul vinden, behalve in een eindig gebied, moeten v'_p en α'_p bijzondere functies van p' zijn. Het is nu natuurlijk niet onmogelijk, dat de uitkomst die wij voor $V'_p = v'_p + i \frac{\alpha'_p}{p'}$ gevonden hebben, voor v'_p en α'_p dergelijke functies oplevert. Maar daartoe zouden we toch zeer bijzondere onderstellingen moeten maken omtrent de grootheden $e_k, m_k, a_k, \beta_k, N_k$ voor de verschillende electronen-groepen.

§ 2. *Critiek der theorie.*

Wij komen dus tot het besluit, dat onze theorie in dit opzicht niet voldoet aan de eischen die de mathematische analyse ons doet vinden en zoo worden we er toe geleid, de manier waarop wij tot eene uitdrukking voor V'_p geraken nog eens te herzien. Daarbij merken we in de eerste plaats op, dat we bij de afleiding der vergelijkingen tusschen de middelwaarden allerlei benaderingen hebben toegepast, zoodat ook onze uitkomst voor V'_p slechts als benaderd kan worden beschouwd. Het is dus stellig niet geoorloofd gevolgtrekkingen te maken over

de waarden van e_k enz. door na te gaan of de op deze wijze gevonden uitdrukkingen voor v'_p en κ'_p voldoen aan eischen, waarbij het op zoo groote nauwkeurigheid aankomt als in het onderhavige geval.

Er is echter een tweede punt, dat nog meer onze aandacht verdient en dat reeds in hoofdstuk IV werd aangestipt, n.l. dat de beschouwing der middelwaarden hare physische beteekenis verliest wanneer we te doen hebben met golven met zeer kleine golflengten. Nu komen bij de toepassing van het theorema van Fourier golflengten van alle mogelijke orden van grootte voor. Wel zullen in 'talgemeen de termen behoorend bij de zeer kleine golflengten (en evenzoo die bij de zeer groote) zeer kleine coëfficiënten hebben, maar toch is een nader onderzoek dezer quaestie o. a. met het oog op mogelijke gevallen waarbij stralen met kleine golflengten meer op den voorgrond treden, niet zonder belang.

Bij eene volkomen strenge behandeling der quaestie zouden we analytische uitdrukkingen moeten vinden waardoor \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z op ieder tijdstip voor ieder punt worden voorgesteld, zoodanig, dat ze voor $t = 0$ overeenkomen met gegeven functies der coördinaten — we verlangen hierbij dus ook eene grootere nauwkeurigheid in de gegevens en wel eene die niet direct door waarnemingen kan opgeleverd worden — aan het eind der bewerking zouden we dan om resultaten te vinden, die met de vorige vergelijkbaar zijn, weer de middelwaarden moeten bepalen. Zooals reeds is opgemerkt (vgl. blz. 80) is echter een disperseerend medium een te ingewikkeld systeem om eene dergelijke behandeling toe te laten.

Wij zullen echter eenige besluiten kunnen trekken naar analogie van de uitkomsten die we verkrijgen bij een fictief systeem dat we beschouwen zullen. We zullen ons dit zóó denken, dat het in die opzichten die hier ter sprake komen, zoo goed mogelijk met natuurlijke disperseerende media overeenkomt en dat we de strenge oplossing geheel kunnen geven of althans sommige resultaten dier oplossing kunnen afleiden.

Eerst kunnen we echter nog eene opmerking maken, waartoe de fundamenteele hypothese van hoofdstuk III aanleiding geeft. Stellen we ons daartoe een oogenblik voor, dat we konden onderscheiden, wat in de ruimte tusschen de electronen plaats vindt. Beschouwen we dan een deel dezer ruimte. Hierin zullen in 't algemeen, ook in den natuurlijken toestand \mathcal{E} en \mathcal{H} van nul verschillende waarden hebben. Denken we ons nu echter, dat bovendien in de beschouwde ruimte nog eene evenwichtsverstoring bestaat, die zich in de richting der X-as voortplant. Deze zal weldra een electron ontmoeten; dit wordt dan tot medetrillen gebracht¹⁾ en wordt daarbij zelf het centrum van eene zich naar alle zijden uitbreidende evenwichtsverstoring.

De vraag rijst nu: is het wel mogelijk, dat in een medium met tallooze electronen een lichtstraal zich in bepaalde richting voortplant? Men ziet dat deze beschouwing eenige overeenkomst heeft met de behandeling der diffractie (in den vrijen aether) door toepassing van het beginsel van Huygens, waarbij ook ieder punt dat door de golf bereikt wordt als centrum wordt beschouwd eener evenwichtsverstoring die zich naar alle zijden voortplant. Bovenbedoelde vraag komt dus hierop neer, of door de aanwezigheid eener disperseerende middenstof de diffractieverschijnselen zullen gewijzigd worden en wellicht meer op den voorgrond treden. Mathematisch kunnen we deze quaestie aldus formuleeren: wanneer op zeker tijdstip de toestand van dien aard is, dat de middelwaarden van \mathcal{E} en \mathcal{H} gelijk zijn voor alle punten van ieder willekeurig vlak loodrecht op eene bepaalde richting, zal dan na een zekeren tijd nog zulk een toestand bestaan?

Onze theorie antwoordt hierop bevestigend. Men zou na het bovenstaande misschien geneigd zijn dit zonder meer voor onjuist te verklaren. Men bedenke echter dat, wanneer we niet de middelwaarden maar de grootheden \mathcal{E} en \mathcal{H} zelf be-

¹⁾ Vgl. Hertz Wied. Ann. 36, 1889.

schouwen, zooals noodig is als we de verspreiding door de afzonderlijke electronen willen nagaan, dat dan noch bij den zoeven bedoelden begintoestand, noch bij den toestand op een willekeurig tijdstip sprake kan zijn van evenwijdige platte golf-fronten, maar dat het toch heel goed mogelijk is, dat die wel gevonden worden als we de middelwaarden gaan beschouwen. De theorie moet, voor zoover ze nauwkeurig is, van den invloed dezer terugkaatsingen wel rekenschap geven, daar we eenvoudig een oplossing hebben gezocht van differentiaalvergelijkingen, waaraan de middelwaarden moeten voldoen bij iederen bestaenden toestand en het er niet toe doet, hoe die toestand ontstaan is.

De theorie geeft echter slechts eene benadering en de vraag blijft dus bestaan of we bij nauwkeurige beschouwing zouden vinden dat een merkbaar deel der golf in verschillende richtingen verspreid wordt. Om dit na te gaan kunnen we trachten te vinden van welke orde van grootte de invloed der verspreiding door de electronen is. Daartoe zouden we komen door de uitkomsten eener beschouwing, waarbij op deze verspreiding niet gelet wordt te vergelijken met die der beschouwingen met middelwaarden of nog liever eener volkomen strenge theorie.

Ook dit zullen we kunnen doen voor het fictieve medium tot welks beschouwing we nu overgaan.

§ 3. *Een denkbeeldig medium.*

Wij denken ons een medium met laagsgewijze structuur, de lagen afgescheiden door evenwijdige vlakken; loodrecht op deze vlakken zetten we onze X-as. Verder stellen we ons voor dat we afwisselend eene laag hebben, die eenvoudig de eigenschappen van den vrijen aether heeft en eene laag met andere eigenschappen. Zoowel van de eerste soort als van de tweede zullen echter onderling alle lagen geheel gelijk zijn, de eerste zullen eene dikte d hebben, de tweede eene dikte d_1 ; deze beide grootheden denken we ons van de orde der moleculaire afmetingen. In de lagen der tweede soort denken we ons vooreerst

eene positieve lading met overal gelijke dichtheid $+ \rho$ en bovendien eene negatieve lading met overal gelijke dichtheid $- \rho$, zoodat de geheele lading van elk volume-element nul is, we kunnen ons voorstellen dat elk der ladingen de laag geheel vult en dat ze elkaar volkomen doordringen. Wij stellen ons de positieve lading onbewegelijk voor, maar denken ons de negatieve verdeeld in oneindig dunne schillen evenwijdig aan de grensvlakken, die zich alle in haar geheel kunnen bewegen evenwijdig aan de grensvlakken, zoodat dus de negatieve lading steeds de zelfde (oneindige) laag blijft vullen. Bij deze beweging blijft de lading van elk volume-element voortdurend nul. De stand van elk der oneindig dunne lagen, waarin we de negatieve laag verdeeld hebben, is bepaald door de coördinaten, met betrekking tot de Y- en Z-as, van een bepaald punt dier laag.

We zullen daartoe het punt kiezen, dat in de X-as ligt als de laag in rust is; bij een willekeurigen stand noemen we zijn coördinaten η en ζ . We denken ons daarbij dat op ieder oogenblik op elk der deelen der negatieve laag eene kracht werkt, evenredig met den afstand van het gekozen punt tot de X-as, dus met de uitwijking der laag uit den stand der rust. Verderop zullen we er toe geleid worden bovendien een weerstand aan te nemen, dien we evenredig met de snelheid der uitwijking, dus met $\sqrt{\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}$, en tegengesteld aan die snelheid gericht zullen denken, maar dezen laten we voor eerst buiten beschouwing. We zeiden van de lagen der tweede soort, dat ze onderling geheel gelijk zouden zijn, daaronder moet echter niet verstaan worden, dat ook op ieder tijdstip de uitwijkingen der negatieve ladingen alle zullen overeenkomen.

De bewegingsvergelijkingen voor eën element der negatieve laag zijn:

$$\begin{aligned} m d\tau \ddot{\eta} + a d\tau \dot{\eta} &= - \rho d\tau \mathfrak{E}_y, \\ m d\tau \ddot{\zeta} + a d\tau \dot{\zeta} &= - \rho d\tau \mathfrak{E}_z, \end{aligned} \tag{1}$$

waarbij m en a constanten zijn. Wij onderstellen dat deze voor ieder element dezelfde waarden hebben.

In de lagen der eerste soort hebben we nu weer de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (a) \operatorname{Rot} \mathfrak{S} &= \frac{1}{c} \mathfrak{C}, & \operatorname{Rot} \mathfrak{C} &= -\frac{1}{c} \mathfrak{B}, \\ (b) \mathfrak{C} &= \mathfrak{D}, & \mathfrak{D} &= \mathfrak{C}, & \mathfrak{B} &= \mathfrak{S}, \\ (c) \operatorname{Div} \mathfrak{C} &= 0, & \operatorname{Div} \mathfrak{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{I}$$

maar in die der tweede soort moet de eerste van (b) vervangen worden door:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} - qv, \quad \text{II}$$

waarin v , de snelheid der negatieve lading tot componenten heeft $0, \eta, \xi$.

Bij deze vergelijkingen moeten gevoegd worden de voorwaarden aan elk der grensvlakken der lagen, want aan zulk een vlak hebben we eene sprongsgewijze verandering van de eigenschappen van ons medium. In dezen zin zullen we ze discontinuïteitsvlakken noemen. Onderscheiden we de ruimten binnen de lagen der eerste en der tweede soort door de indices I en II, dan hebben we aan ieder grensvlak:

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{C}_h)_I &= (\mathfrak{C}_h)_{II}, & (\mathfrak{S}_h)_I &= (\mathfrak{S}_h)_{II}, \\ (\mathfrak{C}_x)_I &= (\mathfrak{C}_x)_{II}, & (\mathfrak{B}_x)_I &= (\mathfrak{B}_x)_{II}, \end{aligned} \right\} \quad \text{III}$$

waarin h eene willekeurige richting loodrecht op de X-as voorstelt.

§ 4. *Beschouwing met middelwaarden.*

Wanneer we nu voor dit geval de beschouwing der middelwaarden willen toepassen, zullen we als ruimte T , waarover we de middelwaarden bepalen steeds een cylinder nemen met de as langs de X-as en met de eenheid van doorsnede. De lengte $2x_0$ van dezen cylinder zal klein zijn maar toch vele malen $d + d_1$ bevatten. De middelwaarde die wij dan vinden, zullen we toeschrijven aan het middelpunt van den cylinder.

Uit het in hoofdstuk IV bewezene volgt weer gemakkelijk, dat $\text{Rot } \bar{\mathfrak{H}} = \frac{1}{c} \bar{\mathfrak{C}}$ enz., alleen het verband tusschen $\bar{\mathfrak{E}}$ en $\bar{\mathfrak{C}}$ moeten we nader beschouwen. We zullen daarbij onmiddellijk overgaan tot het geval dat we te doen hebben met platte golven met het golffront loodrecht op de X-as, waarbij weer $\bar{\mathfrak{E}}_x, \bar{\mathfrak{H}}_x$, enz. overal nul zijn. Bovendien zullen we ons denken, dat de geheele toestand periodiek is met de periode $\frac{2\pi}{p}$.

We hebben in de lagen der tweede soort $\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{C}} - \rho v$ en deze vergelijking geldt ook in de andere lagen, want daar is $\rho v = 0$. We vinden dus:

$$\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{C}} - \rho v.$$

Om nu ρv te vinden, merken we op dat de vergelijkingen (1) voor de lagen der tweede soort nu den vorm:

$$\begin{aligned} (-mp^2 + a)\eta &= -\rho \mathfrak{E}_y, \\ (-mp^2 + a)\zeta &= -\rho \mathfrak{E}_z \end{aligned}$$

aannemen, of als we de frequentie der eigen trillingen der laag $\sqrt{\frac{a}{m}} = q$ noemen:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\rho}{m(q^2 - p^2)} \mathfrak{E}_y, \\ \zeta &= -\frac{\rho}{m(q^2 - p^2)} \mathfrak{E}_z, \end{aligned} \tag{2}$$

waaruit:

$$v = -\frac{\rho}{m(q^2 - p^2)} \bar{\mathfrak{C}},$$

en dus:

$$\rho v = -\frac{\rho^2}{m(q^2 - p^2)} \bar{\mathfrak{C}}. \tag{3}$$

Wij kunnen nu de middelwaarde van qv over den cylinder T vinden door eerst het stuk te beschouwen dat hiervan wordt afgesneden door twee op elkaar volgende lagen. In deze kan \mathfrak{C} geacht worden hetzelfde te zijn, terwijl qv in de eene 0 is, in de andere de waarde (3) heeft. De gemiddelde waarde is dus

$-\frac{q^2}{m(q^2-p^2)} \frac{d_1}{d+d_1} \mathfrak{C}$ en hieruit vinden we onmiddellijk voor de middelwaarde over de geheele ruimte T :

$$\overline{qv} = -\frac{q^2}{m(q^2-p^2)} \frac{d_1}{d+d_1} \dot{\mathfrak{C}},$$

en dus:

$$\overline{\mathfrak{C}} = \dot{\mathfrak{C}} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2-p^2)} \frac{d_1}{d+d_1} \right\}.$$

De redeneering waardoor we deze vergelijking hebben afgeleid, geldt niet meer als we te doen hebben met golfengten van de orde van d en d_1 .

Het stel vergelijkingen wordt nu:

$$\left. \begin{aligned} \text{Rot } \overline{\mathfrak{S}} &= \frac{1}{c} \overline{\mathfrak{C}}, & \text{Rot } \overline{\mathfrak{C}} &= -\frac{1}{c} \dot{\overline{\mathfrak{B}}}, \\ \overline{\mathfrak{C}} &= \dot{\mathfrak{C}} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2-p^2)} \frac{d_1}{d+d_1} \right\}, & \overline{\mathfrak{B}} &= \overline{\mathfrak{S}}, \\ \text{Div } \overline{\mathfrak{C}} &= 0, & \text{Div } \overline{\mathfrak{B}} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

waaruit, als $\frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2-p^2)} \frac{d_1}{d+d_1} \right\} = \frac{1}{V_p^2}$, de volgende vergelijkingen gevonden worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{V_p^2} \dot{\overline{\mathfrak{C}}}_y &= -\frac{\partial \overline{\mathfrak{S}}_z}{\partial x}, & \frac{1}{c} \dot{\overline{\mathfrak{S}}}_y &= \frac{\partial \overline{\mathfrak{C}}_z}{\partial x}, \\ \frac{c}{V_p^2} \dot{\overline{\mathfrak{C}}}_z &= \frac{\partial \overline{\mathfrak{S}}_y}{\partial x}, & \frac{1}{c} \dot{\overline{\mathfrak{S}}}_z &= -\frac{\partial \overline{\mathfrak{C}}_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \text{V}$$

We kunnen ons dus weer bepalen tot de beschouwing van $\overline{\mathfrak{G}}_y$ en $\overline{\mathfrak{H}}_z$ en vinden daarvoor:

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{G}}_y}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{G}}_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{H}}_z}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{H}}_z}{\partial x^2}. \quad \text{VI}$$

De voortplantingssnelheid die wij uit deze beschouwing afleiden, wordt dus bepaald door:

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \frac{d_1}{d + d_1} \right\}. \quad (4)$$

De oplossing van V , die voldoet aan de onderstellingen, bij de afleiding dezer vergelijkingen gemaakt, is:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}}_y &= A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} + B \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\}, \\ \overline{\mathfrak{H}}_z &= \frac{c}{V_p} A \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{V_p} \right) + a \right\} - \frac{c}{V_p} B \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{V_p} \right) + \beta \right\}, \end{aligned}$$

wat we ook kunnen brengen in den vorm:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}}_y &= A \text{Cos} \{ p' (x - V'_p t) + a \} + B \text{Cos} \{ p' (x + V'_p t) + \beta \}, \\ \overline{\mathfrak{H}}_z &= \frac{c}{V'_p} A \text{Cos} \{ p' (x - V'_p t) + a \} - \frac{c}{V'_p} B \text{Cos} \{ p' (x + V'_p t) + \beta \}. \end{aligned}$$

Zulke oplossingen hebben we nu voor alle waarden van p of p' . Door samenstelling daarvan en toepassing van het theorema van Fourier kunnen we oplossingen verkrijgen, die aan gegeven beginvoorwaarden voldoen, geheel analoog aan het op blz. 48 behandelde.

We staan nu weer voor de vraag: is de functie V_p die we gevonden hebben (en V'_p die we daaruit afleiden) van dien aard, dat voor een willekeurige waarde van t :

$$\Sigma A'_p \text{Cos} \{ p' (x - V'_p t) + a'_p \} + \Sigma B'_p \text{Cos} \{ p' (x + V'_p t) + \beta'_p \}$$

enz. slechts in een eindig interval van nul verschillend zijn, wanneer hetzelfde gegeven is van den vormen waarin deze overgaan voor $t = 0$:

$$\Sigma A'_p \text{Cos}(p'x + a'_p) + \Sigma B'_p \text{Cos}(p'x + \beta'_p).$$

Dat dit werkelijk het geval moet zijn als de manier, waarop we tot deze vormen gekomen zijn goed is, blijkt door de voortplanting der golf van laag tot laag geleidelijk na te gaan. Het moet gelden welke waarden we ook kiezen voor de constanten a , m , q , d en d_1 , die ons medium karakteriseeren. Bij benadering zal het altijd uitkomen, als we ons medium zoo denken, dat V_p slechts weinig met p veranderlijk is, maar streng zal het niet doorgaan, we konden dat ook niet verwachten, daar we bij de afleiding der formules reeds benaderingen hebben aangewend. Voegen we hier nog bij, dat ook in dit geval de beschouwing der middelwaarde hare physische beteekenis verliest bij golven van kleine golflengten, dan zien we dat de analogie met de natuurlijke disperseerende media ten opzichte van het probleem, dat wij onder handen hebben, werkelijk zeer ver gaat.

§ 5. *Strenge theorie.*

Wij kunnen nu in dit geval het vraagstuk ook streng behandelen. Daartoe moeten we vooreerst de ruimte binnen elke laag afzonderlijk beschouwen. We vinden dan voor de lagen der eerste soort weer:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial x}, \quad \text{VII}$$

waaruit:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2}. \quad \text{VIII}$$

Voor de lagen der tweede soort vinden we uit II met behulp van (2), als we nog:

$$\frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \right\} = \mathfrak{B}_p^2 \quad (5)$$

noemen:

$$\frac{c}{\mathfrak{B}_p^2} \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial x}, \quad \text{IX}$$

en dus:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{G}_y}{\partial t^2} = \mathfrak{B}_p^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{G}_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \mathfrak{B}_p^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2}. \quad \text{X}$$

Wij zullen nu eene willekeurige der lagen van de eerste soort de eerste noemen en de overige rangnummers geven opklimmend in de richting der positieve X-as. Evenzoo nummeren we de lagen der tweede soort, waarbij we als eerste kiezen die tusschen de eerste en tweede laag van de eerste soort.

Wij zullen binnen elk der lagen een coördinaat x invoeren, gemeten op een as evenwijdig aan de X-as, met het nulpunt in het linkzijdvlak der laag. In de lagen der eerste soort loopt dus x van 0 tot d ; in die der tweede soort van 0 tot d_1 . Differentiatie naar x komt op hetzelfde neer als differentiatie naar x .

Bij een toestand waar alles de periode $\frac{2\pi}{p}$ heeft, kunnen we door toepassing van complexe uitdrukkingen voor de lagen der eerste soort volgens VII en VIII stellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_y &= a_k e^{ip \left(t - \frac{x}{c} \right)} + b_k e^{ip \left(t + \frac{x}{c} \right)}, \\ \mathfrak{H}_z &= a_k e^{ip \left(t - \frac{x}{c} \right)} - b_k e^{ip \left(t + \frac{x}{c} \right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Met den index k wijzen we grootheden aan, die op de k^{de} laag betrekking hebben.

Voor de lagen der tweede soort vinden we uit IX en X:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_k e^{ip(t - \frac{x}{\mathfrak{B}_p})} + \beta_k e^{ip(t + \frac{x}{\mathfrak{B}_p})}, \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_k e^{ip(t - \frac{x}{\mathfrak{B}_p})} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_k e^{ip(t + \frac{x}{\mathfrak{B}_p})}. \end{aligned} \quad (7)$$

Door nu de grensvoorwaarden III achtereenvolgens toe te passen op een grensvlak van twee lagen met gelijk rangnummer en op een tusschen twee lagen met verschillend rangnummer, vinden we dat voor alle waarden van k moet voldaan zijn aan:

$$\begin{aligned} a_k e^{ip(t - \frac{d}{c})} + b_k e^{ip(t + \frac{d}{c})} &= a_k e^{ipt} + \beta_k e^{ipt}, \\ a_k e^{ip(t - \frac{d}{c})} - b_k e^{ip(t + \frac{d}{c})} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_k e^{ipt} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_k e^{ipt}, \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{aligned} a_k e^{-ip \frac{d}{c}} + b_k e^{ip \frac{d}{c}} &= a_k + \beta_k, \\ a_k e^{-ip \frac{d}{c}} - b_k e^{ip \frac{d}{c}} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_k - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_k, \end{aligned} \quad (8)$$

en aan:

$$\begin{aligned} a_k e^{ip(t - \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p})} + \beta_k e^{ip(t + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p})} &= a_{k+1} e^{ipt} + b_{k+1} e^{ipt}, \\ \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_k e^{ip(t - \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p})} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_k e^{ip(t + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p})} &= a_{k+1} e^{ipt} - b_{k+1} e^{ipt}, \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{aligned} a_k e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} + \beta_k e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} &= a_{k+1} + b_{k+1}, \\ \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_k e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_k e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} &= a_{k+1} - b_{k+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Het komt er nu op aan voor a_k , b_k , a_k en β_k zulke functies van k te vinden, dat aan deze vergelijkingen voldaan wordt voor alle waarden van k . De aard van het vraagstuk doet ons verwachten dat deze grootheden periodiek met k veranderen.

De volgende berekening leert dan ook dat we aan de genoemde voorwaarden kunnen voldoen door te stellen:

$$a_k = a e^{ink}, b_k = b e^{ink}, \alpha_k = a e^{ink}, \beta_k = \beta e^{ink},$$

waarbij n nog geschikt bepaald moet worden.

Door dit te substitueeren vinden we uit (8), na deeling van beide leden door e^{ink} :

$$\left. \begin{aligned} a e^{-ip \frac{d}{c}} + b e^{ip \frac{d}{c}} - a - \beta &= 0, \\ a e^{-ip \frac{d}{c}} - b e^{ip \frac{d}{c}} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta &= 0, \end{aligned} \right\} (10)$$

en uit (9):

$$\left. \begin{aligned} a e^{in} + b e^{in} - a e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} - \beta e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} &= 0, \\ a e^{in} - b e^{in} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Het blijkt dus, dat de grensvoorwaarden voor de verschillende vlakken telkens de zelfde vergelijkingen opleveren. We hebben dus alleen aan deze vier vergelijkingen (10) te voldoen. Zij zijn homogeen en lineair in a, b, a en β ; daar we ons met de oplossing $a = b = a = \beta = 0$ niet kunnen tevreden stellen, kunnen we er in de eerste plaats eene vergelijking uit afleiden, die alleen n bevat en vervolgens a, b, a en β in verhouding oplossen. Het is ons vooral om n te doen.

Wij vinden:

$$\left| \begin{array}{cccc} e^{-ip \frac{d}{c}} & e^{ip \frac{d}{c}} & -1 & -1 \\ e^{-ip \frac{d}{c}} & -e^{ip \frac{d}{c}} & -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \\ e^{in} & e^{in} & -e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & -e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \\ e^{in} & -e^{in} & -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{array} \right| = 0.$$

Door ontwikkeling volgens de onderdeterminanten van de eerste twee kolommen vinden we:

$$\begin{aligned}
 & -2e^{2in} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \end{vmatrix} - e^{in} \left(-e^{-ip\frac{d}{c}} + e^{ip\frac{d}{c}} \right) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & -e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{vmatrix} \\
 & + e^{in} \left(-e^{-ip\frac{d}{c}} - e^{ip\frac{d}{c}} \right) \begin{vmatrix} -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \\ -e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & -e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{vmatrix} \\
 & + e^{in} \left(e^{-ip\frac{d}{c}} + e^{ip\frac{d}{c}} \right) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{vmatrix} \\
 & - e^{in} \left(e^{-ip\frac{d}{c}} - e^{ip\frac{d}{c}} \right) \begin{vmatrix} -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \\ -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{vmatrix} \\
 & - 2 \begin{vmatrix} -e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & -e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \\ -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{-ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} & \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{ip\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}} \end{vmatrix} = 0,
 \end{aligned}$$

waaruit door ontwikkeling der determinanten na eenige herleiding:

$$\begin{aligned}
 & e^{2in} - 2e^{in} \left\{ \cos p \frac{d}{c} \cos p \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \right) \sin p \frac{d}{c} \sin p \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} \right\} + 1 = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Dit is ten opzichte van e^{in} een tweede-machtsvergelijking. De wortels zijn toegevoegd complex en hun product is 1, we

kunnen ze dus voorstellen als e^{in} en e^{-in} , of als we nog de nieuwe notatie invoeren:

$$n = p \frac{d + d_1}{V_{p_1}},$$

door:

$$e^{ip \frac{d + d_1}{V_{p_1}}} \text{ en } e^{-ip \frac{d + d_1}{V_{p_1}}}.$$

Door nu de som der wortels op te maken, vinden we:

$$\begin{aligned} \text{Cos } p \frac{d + d_1}{V_{p_1}} &= \text{Cos } p \frac{d}{c} \text{Cos } p \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \right) \text{Sin } p \frac{d}{c} \text{Sin } p \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Wanneer we nu uit deze formule V_{p_1} bepalen, kunnen we den toestand beschrijven door formules als:

$$\mathfrak{E}_y = a e^{ip \left(t - k \frac{d + d_1}{V_{p_1}} - \frac{x}{c} \right)} + b e^{ip \left(t - k \frac{d + d_1}{V_{p_1}} + \frac{x}{c} \right)} \quad (6')$$

voor punten binnen eene laag der eerste soort, of:

$$\mathfrak{E}_y = a e^{ip \left(t - k \frac{d + d_1}{V_{p_1}} - \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right)} + \beta e^{ip \left(t - k \frac{d + d_1}{V_{p_1}} + \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right)} \quad (7')$$

voor punten binnen eene laag der tweede soort.

Een waarnemer die slechts het systeem in zijn geheel overziet, zonder te kunnen onderscheiden wat op afstanden van de orde van d en d_1 gebeurt, bemerkt niet den invloed van de laatste termen in de exponenten; hij neemt dus eene voortplantings-snelheid V_{p_1} waar. Door den anderen wortel van verg. (11) te beschouwen vinden we, dat ook een toestand kan bestaan waarbij eene even groote voortplantings-snelheid in tegengestelden zin wordt waargenomen. De meest algemeene toestand met de periode p , die in het systeem kan voorkomen, wordt gevonden door superpositie der twee genoemde toestanden. In de vergelijkingen (6') en (7') moeten dan nog twee termen worden toegevoegd.

Zoolang we te doen hebben met golflengten groot in vergelijking met d en d_1 , zoolang dus $\frac{c}{p}$ en $\frac{V_p}{p}$ groot zijn in vergelijking met d en d_1 , kunnen we uit (11) eene goede benadering voor V_p vinden met behulp van reeks-ontwikkelingen:

$$1 - \frac{1}{2} p^2 \frac{(d + d_1)^2}{V_{p_1}^2} = \left(1 - \frac{1}{2} p^2 \frac{d^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} p^2 \frac{d_1^2}{\mathfrak{B}_p^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p}\right) p^2 \frac{d d_1}{c \mathfrak{B}_p},$$

waaruit we vinden:

$$\frac{1}{V_{p_1}^2} = \frac{d^2}{(d + d_1)^2} \frac{1}{c^2} + \frac{d_1^2}{(d + d_1)^2} \frac{1}{\mathfrak{B}_p^2} + \frac{d d_1}{(d + d_1)^2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{\mathfrak{B}_p^2}\right) = \frac{d}{d + d_1} \frac{1}{c^2} + \frac{d_1}{d + d_1} \frac{1}{\mathfrak{B}_p^2}$$

en dus door substitutie der waarde van \mathfrak{B}_p uit (5):

$$\frac{1}{V_{p_1}^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{d_1}{d + d_1} \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \right\}. \quad (13)$$

Deze uitdrukking komt geheel overeen met de formule (4) die we uit de beschouwing der middelwaarden voor de voortplantings-snelheid gevonden hebben.

Het blijkt dus dat we de beschouwing met behulp van middelwaarden zonder bezwaar kunnen toepassen, zoolang we niet met kleine golflengten te doen hebben, zooals we ook verwachtten.

§ 6. Invloed der terugkaatsingen aan de discontinuïteits-vlakken.

Het in de vorige § beschouwde medium kan niet met een natuurlijke dispergeerende middenstof op één lijn gesteld worden, wat betreft de in § 2 aangeroeerde verspreiding van het licht

door de electronen. Toch vertoont het een eenigzins analoog verschijnsel, daar aan ieder grensvlak een deel van het invallend licht wordt teruggekaatst.

Men zou licht meenen, dat wegens deze terugkaatsingen voorplanting eener enkelvoudige golf niet mogelijk was, zonder dat de golf daarbij haar karakter verliest. Zoowel uit de beschouwing der middelwaarden als uit de strenge theorie blijkt echter, dat althans wat de waarneembare verschijnselen betreft, enkelvoudige golven zich door ons systeem kunnen voortplanten.

De eenige waarneembare invloed dien de terugkaatsingen nog op de voortlopende golf kunnen hebben, is eene wijziging der voortplantingssnelheid.

Om dit te onderzoeken kunnen we eene waarde voor de voortplantingssnelheid afleiden zonder op deze terugkaatsingen te letten. We merken dan op, dat eene golf met de frequentie p zich beurtelings voortplant met eene snelheid c over een afstand d en met eene snelheid \mathfrak{B}_p over een afstand d_1 . Een afstand L , die zeer groot is in vergelijking met $d + d_1$ wordt afgelegd in een tijd:

$$n \left(\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} \right),$$

waarbij $n = \frac{L}{d + d_1}$.

Hierbij is ondersteld dat n een geheel getal is. In 't algemeen is dit natuurlijk niet het geval en zouden we dus nog een breukdeel van $\frac{d}{c}$ of $\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}$ moeten optellen (of aftrekken).

Daar echter L zeer groot gedacht wordt in vergelijking met $d + d_1$, zoodat n zeer groot is, kunnen we dit verwaarloozen. Op deze wijze vinden we voor de gemiddelde voortplantingssnelheid:

$$V_{p_2} = \frac{L}{n \left(\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} \right)} = \frac{d + d_1}{\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}}. \quad (14)$$

Wij zullen nu deze uitkomst vergelijken met de grootheid V_p (vgl. 4) die we uit de beschouwing met middelwaarden gevonden hebben en die zich daartoe wegens haar eenvoudigen vorm beter leent dan de uitdrukking (12) die de strenge theorie voor V_{p_1} geeft.

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat V_p en V_{p_2} overeenkomen, als we mogen aannemen dat $\frac{q^2}{m} \frac{1}{q^2 - p^2}$ zoo klein is tegenover de eenheid, dat de tweede en hoogere machten verwaarloosd kunnen worden. Dan volgt uit (13):

$$\frac{1}{V_p} = \frac{1}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{d_1}{d + d_1} \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \right\},$$

en evenzoo uit (5):

$$\frac{1}{\mathfrak{B}_p} = \frac{1}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \right\},$$

waaruit door eliminatie van $\frac{1}{2} \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)}$:

$$(d + d_1) \left(\frac{1}{V_p} - \frac{1}{c} \right) = d_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{B}_p} - \frac{1}{c} \right),$$

en dus:

$$\frac{1}{V_p} = \frac{\frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} + \frac{d}{c}}{d + d_1}$$

overeenkomend met (14).

De invloed der terugkaatsingen op de voortplantingssnelheid zal dus onmerkbaar zijn zoolang de aangegeven verwaarloozing geoorloofd is. Deze komt hierop neer, dat V_p en \mathfrak{B}_p slechts weinig met p veranderlijk zijn, wat we zullen moeten aannemen, als we de analogie tusschen het beschouwde systeem en de gewone dispergeerende media zoo goed mogelijk willen maken.

§ 7. Denkbeeldig medium met absorptie.

Voor het stelsel, zooals wij het ons tot nog toe gedacht hebben, is de verwaarloozing die in de vorige § werd toegepast, zeker niet geoorloofd als p zeer weinig van q verschilt. Bij zulke waarden van p zullen volgens (2) de uitwijkingen en snelheden der negatieve lading zeer groot worden, voor $p = q$ zelfs oneindig groot en dit is oorzaak, dat de redeneering, waardoor we tot IV gekomen zijn, niet meer doorgaat. Wanneer we willen, dat ook voor dit geval ons systeem analoog zal zijn aan natuurlijke media, zullen we een weerstand moeten invoeren, die zich tegen de beweging der negatieve lading verzet en maakt dat zoo groote waarden der uitwijkingen en snelheden niet zullen voorkomen.

We zullen weer aannemen, dat deze weerstand evenredig is aan de snelheid der negatieve lading en daaraan tegengesteld gericht. In plaats van de vergelijkingen (1) moet dan gesteld worden:

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} + \beta\dot{\eta} + a\eta &= -\varrho\mathfrak{E}_y, \\ m\ddot{\xi} + \beta\dot{\xi} + a\xi &= -\varrho\mathfrak{E}_z. \end{aligned} \quad (15)$$

We vinden dus, als we $-\frac{\varrho}{m} = a$, $\frac{\beta}{m} = r$, $\frac{a}{m} = q^2$ stellen, voor een toestand met de frequentie p :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{a}{q^2 - p^2 + rip} \mathfrak{E}_y, \\ \xi &= \frac{a}{q^2 - p^2 + rip} \mathfrak{E}_z. \end{aligned}$$

En dus voor de lagen der tweede soort:

$$\frac{c}{\mathfrak{B}_p^2} \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

enz.

waarbij gesteld is:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{a \rho}{q^2 - p^2 + r i p} \right\}. \quad (16)$$

Zooals te verwachten was hebben we dus absorptie in de lagen der tweede soort, daar voor \mathfrak{B}_p een complexe uitdrukking wordt gevonden.

In de lagen der eerste soort hebben we natuurlijk een voortplantingsnelheid c zonder absorptie.

Gaat men nu de voortplanting van een golf met de frequentie p door de achtereenvolgende lagen na, zonder op de terugkaatsingen te letten, dan vindt men als gevolg van het doorloopen (van links naar rechts) van een laag der eerste soort, dat in den exponent een term $-ip \frac{d}{c}$ moet worden opgeteld en voor eene laag der tweede soort een term $-ip \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}$.

Tengevolge van het doorloopen van een afstand $L = n(d + d_1)$, waarbij n een groot getal is, zoodat we het zonder merkbare fout als geheel kunnen beschouwen, gaat dus de uitdrukking $A e^{ip t}$ over in:

$$A e^{ip} \left\{ t - n \left(\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} \right) \right\}.$$

Zoowel wat de voortplanting der phase als wat de absorptie betreft kunnen we dus den toestand beschrijven met behulp eener complexe voortplantingsnelheid:

$$V_{p_2} = \frac{L}{n \left(\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p} \right)} = \frac{d + d_1}{\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}}. \quad (17)$$

Deze uitdrukking zullen we nu vergelijken met de uitkomst der beschouwing van middelwaarden. Wij vinden nu voor het verband tusschen $\bar{\mathfrak{C}}$ en \mathfrak{C} :

$$\bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \left\{ 1 - \frac{d_1}{d + d_1} \frac{a \rho}{q^2 - p^2 + r i p} \right\}.$$

Als we dus stellen:

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{d_1}{d+d_1} \frac{a\rho}{q^2 - p^2 + r\rho} \right\}, \quad (18)$$

vinden we:

$$\frac{c}{V_p^2} \dot{\mathfrak{G}}_y = -\frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}_z}{\partial x} \quad \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{G}}_z = -\frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}_y}{\partial x},$$

waaruit blijkt dat ook hier eene complexe voortplantings-snelheid V_p (18) gevonden wordt. Wanneer nu (17) en (18) voor V_{p_2} en V_p gelijke waarden opleveren, dan kunnen we besluiten, dat zoowel wat betreft de voortplantingssnelheid, als wat betreft de absorptie, de beschouwing der middelwaarden en de beschouwing waarbij niet op de terugkaatsing aan de grensvlakken wordt gelet, dezelfde resultaten opleveren.

Het is nu weer gemakkelijk aan te toonen, dat dit het geval zal zijn als we de tweede en hoogere machten van $\frac{a\rho}{q^2 - p^2 + r\rho}$ kunnen verwaarloozen, m. a. w. als de geheele dispersie slechts gering is. In dit geval volgt uit (16):

$$\frac{1}{\mathfrak{B}_p} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{a\rho}{q^2 - p^2 + r\rho} \right\},$$

en uit (18):

$$\frac{1}{V_p} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{d_1}{d+d_1} \frac{a\rho}{q^2 - p^2 + r\rho} \right\},$$

waaruit weer door eliminatie van $\frac{1}{2} \frac{a\rho}{q^2 - p^2 + r\rho}$:

$$\frac{1}{V_p} = \frac{\frac{d}{c} + \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}}{d+d_1},$$

waaruit door vergelijking met (17) blijkt, dat V_p en V_{p_2} overeenkomen.

Het verdient opmerking dat ook voor het geval, dat de lagen der tweede soort absorbeërend zijn, de voortplantings-

snelheid kan gevonden worden volgens de methode van § 5. Inderdaad kan de bewerking onveranderd worden overgenomen, in de formule (12) zijn dan \mathfrak{B}_p en dus ook V_{p_1} complexe grootheden.

Stellen we weer $\frac{1}{V_{p_1}} = \frac{1}{v_{p_1}} - i \frac{\kappa_{p_1}}{p}$, dan kunnen we op dezelfde wijze als vroeger doen zien, dat v_{p_1} de voortplantingssnelheid is en κ_{p_1} den absorptiecoëfficiënt voorstelt.

Om dit met de uitkomst van de theorie der middelwaarden te vergelijken kunnen we ook hier op (12) de reeksontwikkelingen toepassen, die ook voor complexen gelden, als de moduli van $p \frac{d+d_1}{V_{p_1}}$, $p \frac{d}{c}$ en $p \frac{d_1}{\mathfrak{B}_p}$ slechts kleiner zijn dan 1, en dus zeker kunnen worden aangewend zolang we niet met zeer kleine golflengten te doen hebben.

Op deze wijze vinden we ook voor V_{p_1} dezelfde complexe uitdrukking als voor V_p , dus ook de strenge theorie levert, behalve in 't genoemde uitzonderingsgeval, zoowel voor de voortplantingssnelheid als voor den absorptie-index dezelfde uitkomsten als de beschouwing der middelwaarden.

§ 8. *Overzicht der uitkomsten.*

Het blijkt dus, dat, onverschillig of wij in het onderstelde systeem absorptie aannemen of niet, de beschouwing der middelwaarden dezelfde uitkomst oplevert als de strenge theorie, behalve voor kleine golflengten en deze overeenkomst gaat door, onverschillig welke waarden we toekennen aan de constanten ρ , m , a en β , die het systeem karakteriseeren.

Stellen we den toestand voor door eenvoudig eene voortplantingssnelheid V_{p_1} aan te nemen (vergl. 12), dan vinden we formules die alleen volkomen juist zijn voor punten in de grensvlakken der lagen. Bij de beschouwing die ons tot deze

grootheid gevoerd heeft hebben we namelijk op den voorgrond gesteld¹, en ook bewezen, dat in iedere volgende laag zich het zelfde vertoont als in een vorige; alleen de phase verschilt — en voor het geval van absorbeerende lagen ook de amplitudo. Formules die een enkelvoudige golf met de frequentie p en de voortplantingssnelheid V_{p_1} voorstellen, bepalen volkomen juist het phaseverschil tusschen den toestand in ééne laag en het overeenkomstige punt in een volgende, voor den toestand in een bepaalde laag geven ze echter slechts eene benadering. Volkomen juist wordt die eerst voorgesteld door de formules (6') en (7'), waarin nog in den exponent de termen $i \frac{x}{c}$ voorkomen. Doorgaans is het voldoende den toestand in de grensvlakken te kennen, alleen juist voor kleine golflengten zullen we pas een goed inzicht van den toestand krijgen, als we nagaan hoe het er binnen eene laag uitziet. Voor zoover hierbij nog sprake is van eene voortplantingssnelheid der golf, moet evenwel nog steeds de door (12) bepaalde grootheid V_{p_1} daarvoor worden aangenomen.

Verder blijkt dat de invloed der terugkaatsingen aan de discontinuïteitsvlakken gering is, zoolang de voortplantingssnelheid slechts weinig met de frequentie varieert. Daar wij dit echter gevonden hebben door vergelijking der grootheden V_{p_2} (14) en V_p (4), en V_p voor kleine golflengten de voortplantingssnelheid niet juist voorstelt, kunnen we dit besluit niet volhouden voor kleine golflengten. Daar zal dus de invloed der terugkaatsingen meer op den voorgrond treden.

Uit de overeenstemming van V_p en V_{p_2} blijkt echter aan den anderen kant dat V_p ook voor kleine golflengten nog een zekere beteekenis heeft, n.l. de snelheid waarmee zich voortplant het uiterste punt, waar een bepaald deel eener evenwichtsverstoring nog zijn invloed doet gevoelen.

Door generalisatie komen wij er toe aan te nemen dat eene geheel uitgewerkte theorie voor natuurlijke disperseerende media tot overeenkomstige resultaten zou leiden.

HOOFDSTUK IX.

Vervolg.

§ 1. Waarden van n .

In het vorige hoofdstuk is gebleken, dat in het door ons beschouwde medium twee toestanden kunnen bestaan met de frequentie p . Bij den eenen is in de lagen der eerste soort:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a e^{i(p t - k n - p \frac{x}{c})} + b e^{i(p t - k n + p \frac{x}{c})}, \\ \mathfrak{H}_z &= a e^{i(p t - k n - p \frac{x}{c})} - b e^{i(p t - k n + p \frac{x}{c})}, \end{aligned} \right\} (1)$$

en in die der tweede soort:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a e^{i(p t - k n - p \frac{x}{\mathfrak{B}_p})} + \beta e^{i(p t - k n + p \frac{x}{\mathfrak{B}_p})}, \\ \mathfrak{H}_z &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a e^{i(p t - k n - p \frac{x}{\mathfrak{B}_p})} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta e^{i(p t - k n + p \frac{x}{\mathfrak{B}_p})}, \end{aligned} \right\}$$

De formules voor den tweeden toestand vinden we door de grootheid n te vervangen door haar tegengestelde. Beide waarden van n worden gevonden uit de formule:

$$\cos n = \cos \nu \cos \nu_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \right) \sin \nu \sin \nu_1, \quad (2)$$

waarbij gesteld is:

$$p \frac{d}{c} = \nu, \quad p \frac{d_1}{\mathfrak{S}_p} = \nu_1.$$

De vergelijking (2) geeft voor n oneindig veel oplossingen, die telkens 2π verschillen. Wij konden dit trouwens verwachten, daar de grootheid n ons aangeeft hoe de phase verandert als men van de eene laag tot de andere overgaat en een zeker phaseverschil φ op 't zelfde neerkomt als een phaseverschil $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ enz. Willen wij uit n op de in het vorige hoofdstuk aangegeven wijze eene uitdrukking voor de voortplantingssnelheid afleiden, dan ligt het voor de hand de waarde van n tusschen 0 en π te nemen. Willen we de daar gebruikte reeksontwikkelingen toepassen, dan is dit ook noodig. Zelfs werd voorondersteld dat n dicht bij 0 zou liggen.

§ 2. Voortplanting der energie.

Beschouwen wij nu een der beide toestanden wat nauwkeuriger, dan zien we, dat toch nog in elk der lagen twee golven in tegengestelde richting bestaan. Om nu na te gaan in hoeverre we hierbij nog kunnen spreken van eene voortplanting in een der beide richtingen, zullen we den energiestroom \mathfrak{B} beschouwen. In de lagen der eerste soort waar we met den vrijen aether te doen hebben, is natuurlijk (vgl. hoofdstuk II):

$$\mathfrak{B}_x = c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z,$$

terwijl de andere componenten van \mathfrak{B} voor ons geval nul zijn.

Om den energiestroom in de lagen der tweede soort te vinden, beschouwen we een cylinder met zijn as langs de X-as en met de vlakke-eenheid tot doorsnede, die geheel in eene laag der tweede soort ligt. Voor de geheele energie binnen deze

ruimte hebben we, als de coördinaten der eindvlakken x_1 en x_2 zijn:

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 + m\dot{\eta}^2 + a\eta^2) dx.$$

Voor de verandering dezer energie per tijdseenheid vinden we:

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ \mathfrak{E}_y \dot{\mathfrak{E}}_y + \mathfrak{H}_z \dot{\mathfrak{H}}_z + (m\ddot{\eta} + a\eta) \dot{\eta} \} dx.$$

Nu is volgens (1) van 't vorige hoofdstuk $m\ddot{\eta} + a\eta = -\varrho \mathfrak{E}_y$ en daar we een toestand met de frequentie p beschouwen volgens (2) van 't vorige hoofdstuk $\dot{\eta} = -\frac{\varrho}{m(q^2 - p^2)} \mathfrak{E}_y$, waardoor bovenstaande formule overgaat in:

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ \mathfrak{E}_y \dot{\mathfrak{E}}_y \left(1 + \frac{\varrho^2}{m(q^2 - p^2)}\right) + \mathfrak{H}_z \dot{\mathfrak{H}}_z \} dx.$$

Nu is:

$$1 + \frac{\varrho^2}{m(q^2 - p^2)} = \frac{c^2}{\mathfrak{B}_p^2}, \quad \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \dot{\mathfrak{E}}_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}}_z = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x},$$

en we vinden dus voor de verandering der energie binnen den beschouwden cylinder:

$$-c \int_{x_1}^{x_2} \left(\mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \right) dx = c(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z)_{x_1} - c(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z)_{x_2}.$$

Wij vinden dus ook in de lagen der tweede soort een energiestroom, voorgesteld door:

$$\mathfrak{W}_x = c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z.$$

De energiestroom moet natuurlijk aan een discontinuïteitsvlak doorlopend zijn, wat ook uit de formules blijkt, daar \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z doorlopend zijn.

Willen we dit nu toepassen op den toestand door de vergelijkingen (1) voorgesteld, dan moeten we daaruit vooreerst

zoals reeds in hoofdstuk II werdt opgemerkt, reële uitdrukkingen afleiden. Zij $a = a_1 e^{i a_2}$, $b = b_1 e^{i b_2}$, $\alpha = \alpha_1 e^{i \alpha_2}$, $\beta = \beta_1 e^{i \beta_2}$, dan hebben we binnen de k^{de} laag der eerste soort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_1 \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} + b_1 \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}, \\ \mathfrak{E}_z &= a_1 \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} - b_1 \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}. \end{aligned} \quad (1')$$

en dus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= c a_1^2 \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} \\ &\quad - c b_1^2 \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}, \end{aligned}$$

evenzoo vinden we in de k^{de} laag der tweede soort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \frac{c^2}{\mathfrak{B}_p} \alpha_1^2 \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t - \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + \alpha_2 - kn \right\} \\ &\quad - \frac{c^2}{\mathfrak{B}_p} \beta_1^2 \text{Cos}^2 \left\{ p \left(t + \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + \beta_2 - kn \right\}. \end{aligned}$$

Elk der beide golven, die in eene willekeurige laag bestaan, brengt dus een energiestroom te weeg en de geheele energiestroom is op ieder tijdstip gelijk aan de algebraïsche som dezer twee.

We kunnen nu nog de geheele hoeveelheid energie bepalen, die gedurende een trillingstijd stroomt door een willekeurig vlak, loodrecht op de X-as (per vlakke-eenheid). Eene eenvoudige integratie geeft hiervoor in de lagen der eerste soort:

$$\frac{\pi c}{p} (a_1^2 - b_1^2),$$

en in die der tweede soort:

$$\frac{\pi c^2}{p \mathfrak{B}_p} (\alpha_1^2 - \beta_1^2).$$

Deze beide uitdrukkingen zijn echter aan elkaar gelijk, zooals men op verschillende wijzen kan aantonen, 't eenvoudigst

door twee naast elkaar liggende lagen te beschouwen, waarbij we dus alleen hebben te doen zien, dat $\int \mathfrak{B}_x dt$ aan beide zijden van 't grensvlak gelijke waarden heeft, 't geen onmiddellijk volgt uit de voorwaarde, dat \mathfrak{B}_x doorlopend is.

Wij hebben dus voortplanting der energie in den éénen zin, als $a_1 > b_1$ en dus ook $a_1 > \beta_1$, en in den tegengestelden in het omgekeerde geval.

§ 3. Omkeering der golf.

Het ligt nu voor de hand te denken, dat deze voortplanting ook van richting zal omkeeren als n , dus de voortplantings-snelheid V_{p_1} (vgl. 12, Hoofdstuk VIII) van teeken wisselt.

Inderdaad moeten we daarbij een toestand vinden, die opgevat kan worden als het spiegelbeeld van den eerst beschouwden. Dat vinden we dan ook uit de vergelijkingen (10) van 't vorige hoofdstuk, die de verhoudingen der grootheden a , b , α en β bepalen.

Is n.l. aan deze vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a e^{-i\nu} + b e^{i\nu} &= \alpha + \beta, \\ a e^{-i\nu} - b e^{i\nu} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \alpha - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta, \\ a e^{in} + b e^{in} &= \alpha e^{-i\nu_1} + \beta e^{i\nu_1}, \\ a e^{in} - b e^{in} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \alpha e^{-i\nu_1} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta e^{i\nu_1}, \end{aligned} \tag{3}$$

voldaan door:

$$a = a_1 e^{i a_2} \quad b = b_1 e^{i b_2} \quad \alpha = \alpha_1 e^{i a_2} \quad \beta = \beta_1 e^{i \beta_2},$$

dan vinden we, door toepassing van den regel, dat eene gelijk-

heid tusschen complexe vormen zal blijven gelden als men daarin i door $-i$ vervangt, als oplossing van:

$$\begin{aligned} ae^{-iv} + be^{iv} &= a + \beta, \\ ae^{-iv} - be^{iv} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta, \\ ae^{-in} + be^{-in} &= ae^{-iv_1} + \beta e^{iv_1}, \\ ae^{-in} - be^{-in} &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} ae^{-iv_1} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta e^{iv_1}, \end{aligned}$$

de uitdrukkingen:

$$a = b_1 e^{-ib_2}, \quad b = a_1 e^{-ia_2}, \quad a = \beta_1 e^{-i\beta_2}, \quad \beta = \alpha_1 e^{-i\alpha_2}.$$

§ 4. Berekening van $\left| \frac{a}{b} \right|$.

Om de voortplantingsrichting, die aan een bepaald teeken van n beantwoordt, vast te stellen, hebben we uit te maken welke van de grootheden a_1 en b_1 de grootste is. Daartoe kunnen we uit de vergelijkingen (3) de verhouding $\frac{a}{b}$ oplossen, (want a_1 en b_1 zijn de moduli van a en b).

De verhouding is gelijk aan die der determinanten:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} e^{iv} & -1 & -1 \\ -e^{iv} & -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & +\frac{c}{\mathfrak{B}_p} \\ e^{in} & -e^{-iv_1} & -e^{iv_1} \end{vmatrix} = \\ & = -2 \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{in} + e^{iv} \left\{ \frac{c}{\mathfrak{B}_p} (e^{iv_1} + e^{-iv_1}) + (e^{iv_1} - e^{-iv_1}) \right\}, \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} & - \begin{vmatrix} e^{-iv} & -1 & -1 \\ e^{-iv} & -\frac{c}{\mathfrak{B}_p} & +\frac{c}{\mathfrak{B}_p} \\ e^{in} & -e^{-iv_1} & -e^{iv_1} \end{vmatrix} = \\ & = 2 \frac{c}{\mathfrak{B}_p} e^{in} - e^{-iv} \left\{ \frac{c}{\mathfrak{B}_p} (e^{iv_1} + e^{-iv_1}) - (e^{iv_1} - e^{-iv_1}) \right\}. \end{aligned}$$

Wij vinden dus:

$$\frac{a}{b} = \frac{-c e^{in} + e^{i\nu} (c \cos \nu_1 + i \mathfrak{B}_p \sin \nu_1)}{c e^{in} - e^{-i\nu} (c \cos \nu_1 - i \mathfrak{B}_p \sin \nu_1)} = \quad (4)$$

$$\frac{(-c \cos n + c \cos \nu \cos \nu_1 - \mathfrak{B}_p \sin \nu \sin \nu_1) + i(-c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}{-(-c \cos n + c \cos \nu \cos \nu_1 - \mathfrak{B}_p \sin \nu \sin \nu_1) + i(+c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}$$

Door toepassing van (2) kunnen we dit nog in den vorm brengen:

$$\frac{a}{b} = - \frac{(\mathfrak{B}_p^2 - c^2) \sin \nu \sin \nu_1 - 2i \mathfrak{B}_p (-c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}{(\mathfrak{B}_p^2 - c^2) \sin \nu \sin \nu_1 + 2i \mathfrak{B}_p (+c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}. \quad (4')$$

Hieruit blijkt dat $|a|^2 - |b|^2$ het zelfde teeken zal hebben als:

$$- \sin n (c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1).$$

In gewone gevallen, waarbij ν , ν_1 en n kleiner dan $\frac{\pi}{2}$ zijn, is het gemakkelijk in te zien dat $|a|^2 - |b|^2$ het tegengestelde teeken van n zal hebben. Bij de formules (1), waarin n negatief genomen is, hebben we dus eene energievoortplanting in de richting der positieve X-as, zoo als ook te verwachten was.

§ 5. *Complexen waarden van n .*

Wij hebben ons tot nog toe steeds gedacht, dat de vergelijking (2) voor n reële waarden oplevert. Dit zal dan ook stellig het geval zijn als het beschouwde medium eenige analogie vertoont met natuurlijke dispergeerende middenstoffen en we niet met zeer hooge frequenties te doen hebben, want dan zijn ν en ν_1 zeer kleine reële grootheden en \mathfrak{B}_p reëel. We vinden dus voor $\cos n$ eene reële waarde kleiner dan 1.

Het is echter interessant eenige bijzonderheden te bespreken, die zich voordoen als we het systeem zoo inrichten dat n complex wordt.

In de eerste plaats zal dit voorkomen als de grootte

\mathfrak{B}_p , bepaald door:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{m(q^2 - p^2)} \right\},$$

zelf imaginair is, dus als:

$$q^2 < p^2 < q^2 + \frac{q^2}{m}. \quad (5)$$

Het volgt uit de gewone theorie van het meetrillen¹⁾, dat wanneer de bewegelijke laag wordt getroffen door eene periodieke elektrische kracht met grooter frequentie dan die van haar eigen trillingen, zij zich zoo gaat bewegen dat hare uitwijking op ieder tijdstip tegengesteld is aan de elektrische kracht die op haar werkt. Deze uitwijking wordt grooter, naarmate de frequentie p der uitwendige kracht dichter bij q , de frequentie der eigen trillingen ligt, en als p maar dicht genoeg bij q ligt, zal de geheele elektrische stroom steeds tegengesteld kunnen zijn aan de elektrische kracht. De voorwaarden daartoe zijn door (5) bepaald. Wij zullen nu doen zien dat zulk een golf zich niet door het medium kan voortplanten. We dienen echter op te merken dat dergelijke toestanden in de natuur niet voorkomen, omdat dan steeds de wrijving op den voorgrond treedt.

Wij zullen nu vooreerst den toestand in de lagen der tweede soort voor dit geval beschouwen. De vergelijkingen IX en X van het vorige hoofdstuk blijven gelden; stellen we nu $\mathfrak{B}_p^2 = -\kappa_p^2$, dan is κ_p reëel en we vinden:

$$\frac{c}{\kappa_p^2} \mathfrak{G}_y = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial x},$$

en:

$$\ddot{\mathfrak{G}}_y = -\kappa_p^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{G}_y}{\partial x^2} \quad \ddot{\mathfrak{H}}_z = -\kappa_p^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2},$$

waaruit:

$$\mathfrak{G}_y = a_1 e^{-\frac{px}{\kappa_p}} \text{Cos}(pt + a_2),$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{c}{\kappa_p} a_1 e^{-\frac{px}{\kappa_p}} \text{Sin}(pt + a_2).$$

¹⁾ Vgl. Rayleigh; Theory of Sound. Ch. III.

We vinden een andere oplossing door in plaats van κ_p , — κ_p te nemen en de meest algemeene oplossing met de frequentie p wordt verkregen door superpositie dezer beide.

Er is hier dus geen sprake van voortplanting. De formules stellen een staande golf voor, hoewel nog al wat verschillend van de gewone staande golven die door interferentie verkregen worden. De amplitudo neemt naar de eene zijde snel af.

De bewerking, waardoor we in § 2 den energiestroom gevonden hebben, blijft ook hier gelden. We hebben dus weer:

$$\mathfrak{B}_x = c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z = \frac{c^2}{\kappa_p} a_1^2 e^{-\frac{2p}{\kappa_p} x} \cos (pt + a_2) \sin (pt + a_2),$$

waaruit blijkt, dat de geheele energie die gedurende een trillingstijd door een vlak stroomt, nul is.

Daar aan het grensvlak tusschen twee lagen \mathfrak{B} steeds doorlopend is, vinden we dat ook in de lagen der eerste soort aan de grensvlakken de geheele energie die per trillingstijd door een vlak stroomt, nul is. Volgens § 2 is echter deze grootheid, voorgesteld door $\frac{\pi c}{p} (a_1^2 - b_1^2)$, in de geheele laag constant, zij moet dus ook overal nul zijn, waaruit volgt $a_1 = \pm b_1$. Wij hebben dus ook in deze lagen staande golven, maar hierbij natuurlijk in ééne laag niet met afnemende amplitudo. Dit volgt onmiddellijk uit de formules, want voor dit geval wordt, als we $a_1 = + b_1$ nemen voor de k^{de} laag:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_{k_1} \left\{ \cos \left[p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_{k_2} \right] + \cos \left[p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_{k_2} \right] \right\} \\ &= 2 a_{k_1} \cos \left\{ p t + \frac{1}{2} (a_{k_2} + b_{k_2}) \right\} \cos \left\{ p \frac{x}{c} + \frac{1}{2} (b_{k_2} - a_{k_2}) \right\}, \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z &= a_{k_1} \left\{ \cos \left[p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_{k_2} \right] - \cos \left[p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_{k_2} \right] \right\} \\ &= 2 a_{k_1} \sin \left\{ p t + \frac{1}{2} (a_{k_2} + b_{k_2}) \right\} \sin \left\{ p \frac{x}{c} + \frac{1}{2} (b_{k_2} - a_{k_2}) \right\}. \end{aligned}$$

Voor $a_1 = -b_1$ stelt de eerste uitdrukking \mathfrak{S}_z , de tweede \mathfrak{E}_y voor.

We vinden dus in dit geval in elke laag staande golven, terwijl we in de lagen der tweede soort daarbij afnemende amplitudo vinden. De grootheden a_k , en a_{k_1} moeten dus ook afnemen in de ééne richting, hetgeen ook werkelijk blijkt, als we in:

$$a_{k_1} = |a_k| = |a e^{ink}| \text{ en } a_k = |a_{k_1}| = |a e^{ink}|$$

de waarde van n substitueeren, die we uit (2) vinden.

Ook bij reële \mathfrak{B}_p kan n nog complex blijken en wel als:

$$\text{Cos } \nu \text{ Cos } \nu_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\mathfrak{B}_p} + \frac{\mathfrak{B}_p}{c} \right) \text{Sin } \nu \text{ Sin } \nu_1 > 1$$

is, of als deze uitdrukking < -1 is.

In beide gevallen geeft de vergelijking (11) van het vorige hoofdstuk voor e^{in} reële wortels, wier product nog steeds 1 is, in 't eerste geval zijn die wortels positief, in het tweede negatief. Voor n vinden we dus steeds twee tegengestelde waarden, in het eerste geval zijn beide zuiver imaginair en kunnen we ze dus voorstellen door $\pm i\kappa$, in het tweede geval is het reële stuk π en kunnen we ze voorstellen door $\pm (\pi + i\kappa)$.

In het eerste geval hebben we in de lagen der eerste soort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 \right\} + b_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 \right\}, \\ \mathfrak{S}_z &= a_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 \right\} - b_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 \right\}, \end{aligned}$$

en in die der tweede soort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + a_2 \right\} + \beta_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + \beta_2 \right\}, \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{\mathfrak{B}_p} a_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t - \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + a_2 \right\} - \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \beta_1 e^{xk} \text{Cos} \left\{ p \left(t + \frac{x}{\mathfrak{B}_p} \right) + \beta_2 \right\}. \end{aligned}$$

Weer kunnen we een tweede oplossing vinden door het teeken von \varkappa om te keeren en wordt de meest algemeene toestand met frequentie p verkregen door superpositie dezer beide.

Maken we nu ook hier weer den energiestroom op, dan vinden we voor de energie die gedurende den trillingstijd stroomt door een willekeurig vlak loodrecht op de X-as binnen de k^{de} laag der eerste soort:

$$\frac{\pi c}{p} (a_1^2 - b_1^2) e^{2\varkappa k},$$

en in de k^{de} laag der tweede soort:

$$\frac{\pi c^2}{p \mathfrak{B}_p} (\alpha_1^2 - \beta_1^2) e^{2\varkappa k},$$

Beide uitdrukkingen zijn binnen de laag waarvoor ze gelden constant. Voor twee aangrenzende lagen zijn ze bovendien wegens de voorwaarden aan het grensvlak gelijk en dus zijn ze in alle lagen gelijk. Aan deze voorwaarde kan alleen voldaan zijn als:

$$a_1 = \pm b_1, \quad \alpha_1 = \pm \beta_1.$$

Dat dit werkelijk zoo zijn moet, hadden we ook kunnen vinden door de berekening van § 4. De formule (4) wordt n.l. voor dit geval:

$$\frac{a}{b} = \frac{-ce^{\varkappa} + c \cos \nu \cos \nu_1 - \mathfrak{B}_p \sin \nu \sin \nu_1 + i \{ c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1 \}}{ce^{\varkappa} - c \cos \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \sin \nu \sin \nu_1 + i \{ c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1 \}},$$

waaruit onmiddellijk blijkt dat a en $-b$ toegevoegd complex zijn en dus gelijke moduli hebben.

Wij hebben dus ook hierbij in alle lagen staande golven, waarbij de amplitudines van laag tot laag afnemen, maar in iedere laag slechts periodiek veranderen. Met behulp eener meetkundige voorstelling is het gemakkelijk in te zien, hoe dit afnemen kan plaats hebben, zonder dat \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z aan 't grens-

vlak ondoorlopend zijn. Daartoe construeeren we voor elke laag eene sinusoïde, door in ieder punt der X-as de grootste uitwijking, die in dat punt kan voorkomen, als ordinaat uit te zetten. We verkrijgen dan voor twee naast elkaar liggende lagen sinusoïden met verschillende amplitudines, maar het is duidelijk dat deze toch met gelijke ordinaten aan elkaar kunnen sluiten, wanneer aan het grensvlak een phaseverschil bestaat of wanneer daar een knoop ligt, dus beide sinusoïden de ordinaat nul hebben. Tevens vinden we dat aan een grensvlak geen buik kan liggen van de staande golf aan die zijde, waarheen de amplitudines toenemen.

Voor het geval $n = \pm (\pi + i\kappa)$ hebben we een dergelijken toestand en kunnen we dezelfde conclusies trekken.

Op deze wijze blijkt, dat het theoretisch mogelijk is een medium samen te stellen uit lagen in elk waarvan een golf met bepaalde frequentie zich wel kan voortplanten, zoodanig dat in het samengestelde medium de voortplanting van zulk een golf niet mogelijk is, daar in elk der afzonderlijke vakken staande golven ontstaan. Daartoe moeten we echter laten zien dat het werkelijk mogelijk is, dat:

$$\cos \nu \cos \nu_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \right) \sin \nu \sin \nu_1 > 1$$

of kleiner dan -1 is. Wij zullen een voorbeeld aangeven hoe aan elk dezer voorwaarden voldaan zou kunnen worden. Kiezen we eerst eene frequentie p , zoodat de uitdrukking $\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p}$, (die altijd > 2 is) eene bepaalde waarde P heeft, grooter dan 4 , dan is het mogelijk d en d_1 zoo te bepalen, dat $\sin \nu \sin \nu_1 > \frac{4}{P}$ is en dus $\frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}_p}{c} + \frac{c}{\mathfrak{B}_p} \right) \sin \nu \sin \nu_1 > 2$. Aan één van bovengenoemde voorwaarden is dan zeker voldaan en door d of d_1 dan zoo te bepalen, dat ν of ν_1 met π wordt vermeerderd, krijgen we een stel waarden waarbij aan de tweede voldaan is.

Ten slotte zal n steeds complex zijn in het geval dat reeds in het vorige hoofdstuk § 7 genoemd is, wanneer de lagen der tweede soort absorbeerend zijn. In deze lagen kunnen nu door de superpositie van twee tegengesteld loopende golven geen staande golven ontstaan.

Wij hebben hierbij dus steeds golven, waarbij de amplitudines in de richting der voortplanting afnemen. Beschouwen we weer een cylinder met de as in de richting der X-as en waarvan de eindvlakken in twee verschillende lagen van de eerste soort liggen. We vinden dan dat gedurende een trillings-tijd aan het eene zijvlak meer energie den cylinder binnenkomt dan aan het andere uittreedt. Het verschil is natuurlijk in de tusschenliggende lagen van de tweede soort in warmte omgezet.

§ 6. Vereenvoudigde onderstelling.

Zooals we ons het medium tot nog toe voorgesteld hebben, geeft het allicht aanleiding tot zeer omslachtige berekeningen. Wij kunnen vereenvoudiging verkrijgen, als we ons denken, dat d_1 , de dikte der lagen van de tweede soort, oneindig klein wordt. We zullen ons daarbij dan moeten denken — om te zorgen, dat niet de geheele invloed dier lagen oneindig klein wordt — dat de ruimtedichtheid der lading zoodanig toeneemt, dat

$$\lim_{d_1=0} \rho d_1 = \sigma$$

eene eindige grootheid is.

De lagen der tweede soort ontaarden dus hierbij in discontinuïteitsvlakken, waarin eene stilstaande positieve lading met de oppervlakedichtheid σ en een bewegelijke negatieve lading met de dichtheid $-\sigma$ bestaat.

We zullen verder aannemen, dat $\lim_{d_1=0} m d_1$ en $\lim_{d_1=0} a d_1$ eindig zijn. Voor deze grootheden zullen we hier de letters m en a gebruiken. Den afstand tusschen twee discontinuïteits-

vlakken blijven we d noemen en ook overigens behouden we dezelfde notaties als in het vorige geval.

Laten we wrijvingsweerstand buiten beschouwing, dan is de bewegingsvergelijking voor de negatieve lading:

$$m\ddot{\eta} + a\dot{\eta} = -\sigma\mathfrak{E}_y.$$

Wij hebben nu verder alleen te letten op de vergelijkingen in de verschillende vakken tusschen de discontinuïteitsvlakken die natuurlijk dezelfde zijn als in den vrijen aether en op de grensvoorwaarden aan de discontinuïteitsvlakken.

Deze laatste leiden we weer af uit de bekende stellingen uit de electriciteitsleer over de lijn-integralen der elektrische en magnetische kracht.

$$\int_s \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c} \int_\sigma \mathfrak{B}_n d\sigma \quad \text{en} \quad \int_s \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c} \int_\sigma \mathfrak{C}_n d\sigma.$$

Kiezen we voor de lijn s een zeer kleinen rechthoek in een vlak loodrecht op de Y - of op de Z -as, waarvan twee evenwijdige zijden langs verschillende zijden van 't discontinuïteitsvlak loopen; terwijl de andere in vergelijking met het eerste paar oneindig klein zijn. We vinden dan als we de laag links van het discontinuïteitsvlak door den index I, die rechts door II aanwijzen:

$$(\mathfrak{E}_y)_I = (\mathfrak{E}_y)_II, \quad (\mathfrak{H}_z)_I - (\mathfrak{H}_z)_II = -\frac{\sigma}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Wanneer we ons houden aan het geval dat d klein is in vergelijking met de golflengte, kunnen we ook hier door toepassing der beschouwingen van hoofdstuk IV, bij elke frequentie p eene voortplantingssnelheid V_p afleiden. De geheele bewerking komt overeen met die van § 4 van 't vorige hoofdstuk, wanneer we daar ϱ door $\frac{\sigma}{d_1}$, m door $\frac{m}{d_1}$ en a door $\frac{a}{d_1}$ vervangen en in 't oog houden, dat we overal moeten overgaan tot de limiet,

waarbij $d_1 = 0$ is. We vinden:

$$\frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \frac{1}{d} \frac{\sigma^2}{m(q^2 - p^2)} \right\}. \quad (6)$$

De beschouwing van dit medium geeft over het geheel tot dezelfde conclusies aanleiding, als die van het vorige hoofdstuk.

We zullen in 't bijzonder de resultaten der strenge theorie noodig hebben. Wij kunnen die door grensovergang uit de formules (10—12) van 't vorige hoofdstuk vinden, maar ze ook direct afleiden op dezelfde wijze als we de genoemde formules vonden. De bewerking is nu echter belangrijk eenvoudiger.

Kiezen we een willekeurig discontinuïteitsvlak als eerste en geven we de overige rangnummers, in de richting der positieve X-as telkens met één opklimmende, dan kunnen we in de ruimte tusschen het k^{ie} en $(k+1)^{\text{ste}}$ vlak stellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_k e^{ip(t - \frac{x}{c})} + b_k e^{ip(t + \frac{x}{c})}, \\ \mathfrak{H}_z &= a_k e^{ip(t - \frac{x}{c})} - b_k e^{ip(t + \frac{x}{c})}. \end{aligned}$$

We zullen aan de grensvoorwaarden kunnen voldoen door aan te nemen:

$$a_k = a e^{ikn}, \quad b_k = b e^{ikn},$$

waarbij n weer geschikt moet bepaald worden.

De eerste grensvoorwaarde geeft voor het $(k+1)^{\text{ste}}$ vlak:

$$\begin{aligned} a e^{i\{kn + p(t - \frac{d}{c})\}} + b e^{i\{kn + p(t + \frac{d}{c})\}} \\ = a e^{i\{(k+1)n + pt\}} + b e^{i\{(k+1)n + pt\}}, \end{aligned}$$

waaruit, als we weer $p \frac{d}{c} = v$ invoeren:

$$a e^{-iv} + b e^{iv} = a e^{in} + b e^{in}, \quad (7)$$

Deze voorwaarde wordt dus voor alle discontinuïteitsvlakken dezelfde.

De bewegingsvergelijking der negatieve lading geeft voor het $(k+1)$ ste vlak, als we de uitwijking in dat vlak door η_{k+1} aanduiden:

$$\eta_{k+1} = -\frac{\sigma}{m(q^2-p^2)} a_{k+1} e^{ipt} - \frac{\sigma}{m(q^2-p^2)} b_{k+1} e^{ipt},$$

dus:

$$\frac{\sigma}{c} \frac{\partial y_{k+1}}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 ip}{m(q^2-p^2)} \frac{1}{c} (a+b) e^{i\{pt+(k+1)n\}}. \quad (8)$$

Door dit te substitueeren vinden we uit de tweede grensvoorwaarde:

$$\begin{aligned} a e^{i\{(k+1)n+pt\}} - b e^{i\{(k+1)n+pt\}} - a e^{i\{kn+p(t-\frac{d}{c})\}} + b e^{i\{kn+p(t+\frac{d}{c})\}} \\ = -\frac{\sigma^2 ip}{m(q^2-p^2)} \frac{1}{c} (a+b) e^{i\{pt+(k+1)n\}}, \end{aligned}$$

of als we $\frac{\sigma^2 p}{m(q^2-p^2)} \frac{1}{c} = 2P$ stellen:

$$a \{ -e^{-i\nu} + (2iP+1)e^{in} \} + b \{ e^{i\nu} + (2iP-1)e^{in} \} = 0. \quad (9)$$

Ook deze voorwaarde blijkt voor alle vlakken dezelfde te zijn.

Uit (7) en (9) die in a en b homogeen en lineair zijn kunnen we evenals in 't vorige geval n bepalen. We vinden:

$$\begin{vmatrix} e^{-i\nu} & -e^{in} & e^{i\nu} & -e^{in} \\ -e^{-i\nu} & + (2iP+1)e^{in} & e^{i\nu} & + (2iP-1)e^{in} \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit bij ontwikkeling:

$$e^{2in} - 2e^{in} \{ \cos \nu - P \sin \nu \} + 1 = 0. \quad (10)$$

Dit is een tweedemachtsvergelijking in e^{in} . Daar het product der wortels 1 is, kunnen we ze voorstellen door e^{in} en e^{-in} . Door de som der wortels op te maken, vinden we:

$$\cos n = \cos \nu - P \sin \nu. \quad (11)$$

Dit is alles geheel analoog aan het in 't vorige hoofdstuk § 5 behandelde. Wij kunnen nu hier ook nog de notatie invoeren:

$$n = p \frac{d}{V_{p_1}}, \quad (12)$$

waardoor we eene voortplantingssnelheid V_{p_1} afleiden, die zoolang $\frac{c}{p}$ groot is in vergelijking met d , overeenkomt met V_p (form. 6).

Wij vinden ook nu weer voor n steeds twee gelijke doch tegengestelde waarden, die betrekking hebben op toestanden die als elkaars spiegelbeeld beschouwd kunnen worden. Deze waarden kunnen weer reëel of complex zijn. In het eerste geval dat zich voordoet als $|\cos \nu - P \sin \nu| \leq 1$, wordt, als wij de uitdrukkingen met $-n$ gebruiken, de toestand voorgesteld door:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= a_1 \cos \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} + b_1 \cos \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}, \\ \mathfrak{H}_z &= a_1 \cos \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} - b_1 \cos \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}, \end{aligned}$$

waarbij we weer gesteld hebben:

$$a = a_1 e^{i a_2}, \quad b = b_1 e^{i b_2}.$$

Wij hebben weer in ieder punt behalve in de discontinuïteitsvlakken een energiestroom:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z = c a_1^2 \cos^2 \left\{ p \left(t - \frac{x}{c} \right) + a_2 - kn \right\} \\ &\quad - c b_1^2 \cos^2 \left\{ p \left(t + \frac{x}{c} \right) + b_2 - kn \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Nu maakt echter de energiestroom aan de discontinuïteitsvlakken telkens een eindigen sprong. Uit de grensvoorwaarden voor \mathfrak{E}_y en \mathfrak{H}_z volgt:

$$(\mathfrak{B}_x)_I - (\mathfrak{B}_x)_{II} = -\sigma \mathfrak{E}_y \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (14)$$

Wat het teeken van dezen vorm betreft moeten we volgens formule (8) onderscheid maken tusschen de gevallen dat $p < q$ is en dat $p > q$ is. In het eerste geval is de richting der uitwijking der lading op ieder tijdstip gelijk gericht met die der kracht $-\sigma \mathfrak{E}_y$ die op haar werkt, en de kinetische energie in den evenwichtsstand is kleiner dan de potentieele energie in den uitersten stand¹⁾. Er moet dus, terwijl de laag zich uit haar evenwichtsstand verwijderd, energie aan afgestaan worden, deze wordt geleverd door het verschil tusschen den energiestroom naar de laag toe en dien er van af. Gedurende het andere deel der beweging verliest de laag arbeidsvermogen en dan is de energiestroom van de laag af het grootst, waardoor dit arbeidsvermogen wordt weggevoerd. Wanneer $p > q$ is, is dit alles juist anders om. In beide gevallen is echter de geheele energie die gedurende een trillingstijd wordt toegevoerd, even groot als die welke gedurende denzelfden tijd wordt weggevoerd. Dit volgt uit (14).

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p}} (\mathfrak{B}_x)_I dt - \int_0^{\frac{2\pi}{p}} (\mathfrak{B}_x)_{II} dt = -\sigma \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \mathfrak{E}_y \frac{\partial \eta}{\partial t} dt = \frac{\sigma^2}{m(q^2 - p^2)} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_y dt = 0.$$

Gedurende een trillingstijd stroomt dus evenveel energie naar het vlak toe als er van af, zoodat we in dit geval wel kunnen zeggen, dat die hoeveelheid er door heen is gegaan en deze hoeveelheid is dan dezelfde als voor ieder ander vlak en wel volgt uit (13) voor deze hoeveelheid de waarde:

$$\frac{\pi c}{p} (a_1^2 - b_1^2).$$

¹⁾ Rayleigh Theory of Sound, Ch. III.

Wij kunnen weer evenals in § 4 het teeken van $a^2 - b^2$ bepalen. Uit (7) volgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{-e^{iv} + e^{in}}{e^{-iv} - e^{-in}} = -\frac{(\cos v - \cos n) - i(\sin n - \sin v)}{(\cos v - \cos n) - i(\sin n + \sin v)}, \quad (15)$$

waaruit blijkt dat $|a|^2 - |b|^2$ het zelfde teeken zal hebben als:

$$- \sin n \sin v.$$

In gewone gevallen, waarbij n en v klein zijn, zal dus bij eene negatieve waarde van n eene energievoortplanting naar rechts gevonden worden, zooals te verwachten was.

Wij vinden voor n geen reële waarden als $(\cos v - P \sin v) > 1$ is of < -1 . In het eerste geval vinden we uit vgl. (10) voor e^{in} twee reële positieve waarden en dus voor n twee tegengestelde zuiver imaginaire waarden, die wij kunnen voorstellen door $\pm ix$, in 't tweede geval vinden we voor e^{in} twee reële negatieve waarden en kunnen we dus n voorstellen door $\pm (\pi + ix)$.

In 't eerste geval wordt:

$$\mathfrak{E}_y = a_1 e^{xk} \cos\left\{p\left(t - \frac{x}{c}\right) + a_2\right\} + b_1 e^{xk} \cos\left\{p\left(t + \frac{x}{c}\right) + b_2\right\}$$

$$\mathfrak{H}_z = a_1 e^{xk} \cos\left\{p\left(t - \frac{x}{c}\right) + a_2\right\} - b_1 e^{xk} \cos\left\{p\left(t + \frac{x}{c}\right) + b_2\right\}.$$

Voor den energiestroom volgt hieruit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x = c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z = c a_1^2 e^{2xk} \cos^2\left\{p\left(t - \frac{x}{c}\right) + a_2\right\} \\ - c b_1^2 e^{2xk} \cos^2\left\{p\left(t + \frac{x}{c}\right) + b_2\right\}. \end{aligned}$$

Door de vlakke-eenheid loodrecht op de X-as wordt dus per trillingstijd een energie gevoerd:

$$\frac{\pi c}{p} (a_1^2 - b_1^2) e^{2xk}.$$

Uit de grensvoorwaarden kunnen we evenals boven bewijzen,

dat deze hoeveelheid voor alle lagen gelijk moet zijn, waaraan alleen kan voldaan worden als $a_1^2 = b_1^2$.

Dezelfde uitkomst kunnen we ook verkrijgen uit formule (15), die voor dit geval geeft:

$$\frac{a}{b} = - \frac{-e^{-\kappa} + \cos \nu + i \sin \nu}{-e^{-\kappa} + \cos \nu - i \sin \nu},$$

waaruit weer blijkt, dat a en $-b$ toegevoegd complex zijn en dus gelijke moduli hebben.

Wij vinden dus weer staande golven, waarbij de amplitudo van laag tot laag afneemt, maar in iedere laag afzonderlijk slechts periodiek verandert.

We komen tot dergelijke conclusies, als n wordt voorgesteld door $\pm (\pi + i\kappa)$.

§ 7. *Opmerking over dispersie-theorieën.*

Eindelijk geeft de beschouwing van dit medium en van dat uit het vorige hoofdstuk nog aanleiding tot eene opmerking over de theorie der dispersie. We zullen ons daarbij alleen reële waarden van n denken. Beide media zijn disperseerend en de oorzaak daarvan is voor het eerst beschouwde medium voornamelijk daarin gelegen, dat in de lagen der tweede soort op zich zelf de voortplantingssnelheid reeds van de frequentie afhangt. 't Analogon hiervan voor het geval dat de lagen der tweede soort oneindig dun worden is, dat de grootheid P eene functie van p is. Het verdient nu echter opmerking, dat zelfs als we daarvan afzien, volgens de formules (2) en (10) toch in beide gevallen n en dus V_{p_1} nog van p zal afhangen, omdat ν en ν_1 ook expliciet van p afhankelijk zijn. Dit geeft dus aanleiding tot eene dispersie die alleen te wijten is aan de structuur van het medium. Door deze te beschouwen zouden we naderen tot de dispersie-theorie van Cauchy.

Het blijkt ook evenals daar, dat haar invloed onmerkbaar wordt als de golflengte groot is in vergelijking met de grootheden die aangeven over welken afstand het medium homogeen is (hier d en d_1).

Welke waarde men zal hechten aan de beschouwing van dergelijke fictieve systemen, hangt grootendeels van persoonlijke opvatting af. Men moet natuurlijk niet verwachten dat men alleen door de beschouwing van zulke stelsels eigenschappen van natuurlijke media zou kunnen vinden of bewijzen, maar wel kunnen ze dienen om ons op het rechte spoor te brengen als we eene verklaring van die eigenschappen willen zoeken.

Verder kan men, als de behandeling van natuurlijke gevallen te moeilijk wordt, van de beschouwing der fictieve gevallen gebruik maken om zich toch over de een of andere vraag eene meening te vormen. Dat is het wat ik mij in deze hoofdstukken voorstelde.

Eindelijk zij opgemerkt, dat men voor electriche golven, wel proeven zou kunnen inrichten met systemen die de hier behandelde vrij dicht naderen.

AANHANGSEL.

Over Lippmanns kleurenphotographie.

§ 1. *Vervaardiging van een photographie.*

De door ons beschouwde media met afwisselende lagen van verschillende eigenschappen, kunnen dienen om een ruw beeld te geven van eene volgens het procédé van Lippmann vervaardigde kleurenphotographie.

De in 1891 door Lippmann ¹⁾ uitgevonden kleurenphotographie is eene toepassing van het ontstaan van staande golven door terugkaatsing van loodrecht op een spiegel invallend licht.

Denken we ons eenvoudigheidshalve de amplitudo in het teruggekaatste licht gelijk aan die in het invallend licht, dan zullen we in de ruimte voor den spiegel de lichtbeweging kunnen beschrijven door formules als:

$$\mathfrak{E}_y = A \cos p \left(t - \frac{x}{c} \right) - A \cos p \left(t + \frac{x}{c} \right) = 2 A \sin p t \sin p \frac{x}{c}, \quad (1)$$

enz.

We hebben ons hierbij voorgesteld dat het Y-Z-vlak in het spiegelend oppervlak gelegd wordt.

Uit de waarnemingen blijkt dat het de electriche kracht is, die de chemische werking van het licht bepaalt. We hebben dus voor het onderzoek daarvan alleen op formule (1) te letten.

¹⁾ Comptes Rendus T. CXII, p. 274.

Aan het oppervlak van den spiegel vinden we volgens deze formule een knoop.

Aan de inwerking van deze staande golven wordt nu eene lichtgevoelige laag onderworpen en wel geschiedt dit, door dat deze van te voren aan het oppervlak van den spiegel is aangebracht. Als spiegel wordt een kwikoppervlak gebruikt.

Na ontwikkelen en fixeeren met de gewone photographie-reagentia, verkrijgt men dan eene laag met periodisch wisselende eigenschappen. De plaatsen waar zich een buik bevond zijn aan eene sterke lichtwerking bloot gesteld geweest; die waar een knoop der staande golven lag, aan nagenoeg geene.

Beschouwt men deze laag nu bij opvallend wit licht dan neemt men in het teruggekaatste licht dezelfde kleur waar als van het licht waarmee de plaat vroeger belicht werd, in het doorgelaten licht de complementaire kleur.

Op deze wijze vervaardigde Lippmann reeds in 1891 photographieën van 't spectrum. In de verslagen der volgende zittingen der Académie des sciences vindt men eene reeks mededeelingen van nieuwe proeven en verbeteringen in 't procédé, waardoor hij er ook in slaagde door het gebruik eener kleurgevoelige laag, beelden te verkrijgen van sommige — steeds sterk gekleurde — voorwerpen¹⁾, zooals een kerkraam, een schotel met sinaasappelen met een roode papaver, een groep vaandels, een papegaai enz.

§ 2. *Behandeling van Meslin.*

De eerste theoretische behandeling van 't verschijnsel is van Meslin²⁾ naar aanleiding van zijne waarneming dat de kleuren die de plaat vertoont, geen zuivere spectraalkleuren zijn.

Het komt er daarbij op aan het verband te vinden tusschen het invallende en teruggekaatste licht voor verschillende frequenties. Men moet er naar streven zich van de laag eene

¹⁾ Comptes Rendus T. CXIV, p. 961.

²⁾ Ann. de Chimie et de Physique (6) T. XXVII 1892, p. 369.

voorstelling te vormen, die eensdeels zich zoo goed mogelijk aan de werkelijkheid aansluit, aan den anderen kant een overzichtelijke berekening toelaat.

Meslin vat nu de laag op als een opvolging van oneindig dunne terugkaatsende lagen, wier onderlinge afstand gelijk is aan de halve golflengte van 't licht waaraan de photographie voor hare ontwikkeling is blootgesteld geweest. Zij komt dus eenigzins overeen met het medium dat wij in het vorige hoofdstuk beschouwden. Verder stelt Meslin zich voor dat de laag zich aan de eene zijde tot in het oneindige uitstrekt.

Wat de overeenstemming met de werkelijkheid betreft, laten deze onderstellingen nog al wat te wenschen over, vooral daar gebleken is dat men de beste photographieën verkrijgt als de plaat slechts 3—5 golflengten dik is.

We beschouwen nu loodrecht invallend licht met de amplitudo 1. Het teruggekaatste licht bestaat uit een aantal deelen, afkomstig van de verschillende terugkaatsende vlakken. Nemen we aan dat van elk dier vlakken de amplitudo van het teruggekaatste licht a maal die van 't invallende licht is en die van het doorgelatene b maal, dan kunnen we de amplitudines der verschillende deelen, waaruit het teruggekaatste licht bestaat, gemakkelijk aangeven. Om de phasen te vinden merken we vooreerst op dat bij de terugkaatsing een bepaalde phaseverandering zal optreden, maar deze is voor alle deelen gelijk en geeft dus geen phaseverschil. We hebben dus alleen te letten op het phaseverschil, dat daaraan te wijten is, dat elk volgend deel tweemaal den afstand tusschen twee vlakken meer heeft afgelegd dan het vorige. Noemen we de verandering van phase bij het doorloopen daarvan φ_p , voor licht van de frequentie p , dan hebben we voor de trillingen die wij moeten samenstellen:

amplitudo.	phase.
a ,	ξ ,
ab^2 ,	$\xi + \varphi_p$,
ab^4 ,	$\xi + 2\varphi_p$
enz.	

Zij worden dus voorgesteld door:

$$\begin{aligned}
 a \operatorname{Sin}(pt + \xi) & \quad \text{of} \quad a \operatorname{Sin}(pt + \xi) \\
 ab^2 \operatorname{Sin}(pt + \xi + \varphi_p) & \quad ab^2 \{ \operatorname{Sin}(pt + \xi) \operatorname{Cos} \varphi_p + \operatorname{Cos}(pt + \xi) \operatorname{Sin} \varphi_p \} \\
 ab^4 \operatorname{Sin}(pt + \xi + 2\varphi_p) & \quad ab^4 \{ \operatorname{Sin}(pt + \xi) \operatorname{Cos} 2\varphi_p + \operatorname{Cos}(pt + \xi) \operatorname{Sin} 2\varphi_p \} \\
 & \quad \text{enz. ,}
 \end{aligned}$$

waaruit wij voor de resulterende trilling vinden:

$$\begin{aligned}
 a \operatorname{Sin}(pt + \xi) + a \operatorname{Sin}(pt + \xi) \{ b^2 \operatorname{Cos} \varphi_p + b^4 \operatorname{Cos} 2\varphi_p + b^6 \operatorname{Cos} 3\varphi_p + \dots \} \\
 + a \operatorname{Cos}(pt + \xi) \{ b^2 \operatorname{Sin} \varphi_p + b^4 \operatorname{Sin} 2\varphi_p + b^6 \operatorname{Sin} 3\varphi_p + \dots \}
 \end{aligned}$$

of na sommatie der reeksen:

$$\operatorname{Sin}(pt + \xi) \left\{ a + \frac{ab^2(\operatorname{Cos} \varphi_p - b^2)}{1 + b^4 - 2b^2 \operatorname{Cos} \varphi_p} \right\} + \operatorname{Cos}(pt + \xi) \frac{ab^2 \operatorname{Sin} \varphi_p}{1 + b^4 - 2b^2 \operatorname{Cos} \varphi_p}$$

of:

$$\frac{a}{1 + b^4 - 2b^2 \operatorname{Cos} \varphi_p} \{ \operatorname{Sin}(pt + \xi) (1 - b^2 \operatorname{Cos} \varphi_p) + \operatorname{Cos}(pt + \xi) b^2 \operatorname{Sin} \varphi_p \}.$$

Door eenvoudige berekening volgt hieruit voor de intensiteit:

$$\frac{a^2}{1 + b^4 - 2b^2 \operatorname{Cos} \varphi}.$$

Deze zal zoo groot mogelijk zijn als de noemer zoo klein mogelijk is, dus voor $\varphi = 2\pi, 4\pi$ enz., m. a. w. voor licht waarvan de frequentie gelijk is aan die van 't licht waarmede de plaat vervaardigd is of aan een veelvoud daarvan.

Voor andere frequenties is de uitdrukking echter niet nul, waaruit dan blijkt dat de waargenomen kleuren geen zuivere spectraalkleuren zijn.

Tegen deze bewerking is nog aan te voeren, dat er niet is gelet op het licht dat naar buiten treedt na een willekeurig aantal malen tusschen de verschillende vlakken heen en weer gegaan te zijn.

§ 3. *Behandeling van Lippmann.*

Lippmann ¹⁾ heeft eene berekening gegeven over een medium dat zeker veel meer met de photographieën overeenkomt, maar dan ook veel ingewikkelder is. Hierbij is het reflecteerend vermogen periodiek veranderlijk in de richting der lichtvoortplanting. Werkelijk moet de bewerking die de laag ondergaan heeft het reflectievermogen, dat eene functie is van den brekingsindex wijzigen en wel meer op de plaatsen waar een buik dan op die waar een knoop der staande golven gelegen heeft. We zullen dus moeten aannemen dat dit reflectievermogen eene functie van x is — als we de X-as weer loodrecht op de grensvlakken der plaat zetten — en eene periode heeft gelijk aan de halve golflengte van het licht waarmee de plaat oorspronkelijk belicht was. We beschouwen het geval dat de bewerking met homogeen licht is verricht.

Lippmann stelt voor het terugkaatsend vermogen:

$$\varrho = \varepsilon \varphi \left(\text{Sin}^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \quad (2)$$

waarbij λ de bedoelde golflengte voorstelt; het YZ-vlak is gedacht in het grensvlak der plaat; φ stelt eene niet verder bepaalde functie voor en wel is ϱ aangenomen als eene functie van $\text{Sin}^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$, omdat deze grootheid evenredig is met de intensiteit die in het beschouwde punt werkzaam is geweest, tevens blijkt dan uit formule (2), dat ϱ de halve golflengte tot periode heeft; ε is eene constante, die door de wijze van ontwikkeling en andere omstandigheden der proef wordt bepaald.

Beschouwen we nu weer 't geval, dat op deze plaat wit licht valt en dat we het teruggekaatste licht waarnemen en vestigen we onze aandacht op een der homogene deelen waarin we dit gesplitst kunnen denken. Zij de golflengte daarvan λ' ,

¹⁾ Journal de Physique 3 (III) 1894, p. 97.

de trillingstijd T . In 't invallend licht geeft dit aanleiding tot formules van den vorm:

$$A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

die aan het grensvlak overgaat in:

$$A \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (3)$$

Om nu de lichtbeweging te vinden, die ontstaat door interferentie der stralen, die in verschillende deelen der laag worden teruggekaatst, gaat Lippmann als volgt te werk.

Het deel der lichtbeweging, dat is teruggekaatst in een element der laag gelegen op een afstand x van 't grensvlak en ter dikte dx heeft eene amplitudo $A \rho dx$, waarbij ρ door formule (2) wordt bepaald. Aan het grensvlak teruggekomen heeft het een weg $2x$ doorloopen en wordt dus voorgesteld door:

$$A \rho dx \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = A \rho dx \left(\cos \frac{4\pi x}{\lambda'} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \sin \frac{4\pi x}{\lambda'} \cos 2\pi \frac{t}{T} \right).$$

Het teruggekaatste licht is de resultante van een oneindig aantal dergelijke elementaire stralen, afkomstig uit verschillende deelen der laag. Wij vinden dus de voorstelling daarvan door bovenstaande uitdrukking naar x te integreeren tusschen de grenzen 0 en L , waarbij L de dikte der plaat voorstelt. Wij vinden dan:

$$A \sin \frac{2\pi t}{T} - B \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad (4)$$

als:

$$A = \int_0^L A \rho \cos \frac{4\pi x}{\lambda'} dx \quad B = \int_0^L A \rho \sin \frac{4\pi x}{\lambda'} dx. \quad (5)$$

Hieruit volgt voor de resulteerende amplitudo:

$$A' = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (6)$$

Bij de bespreking dezer grootheid is het geschikt in te voeren:

$$A + Bi = \int_0^L \rho e^{i \frac{4 \pi x}{\lambda'}} dx, \quad (7)$$

want:

$$A' = |A + Bi|.$$

De integraal die in (7) voorkomt zullen we in een aantal stukken verdeelen telkens loopend tusschen de grenzen 0 en $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ en λ , enz. ... $p \frac{\lambda}{2}$ en $(p+1) \frac{\lambda}{2}$. Er zal dan nog een vak overblijven kleiner dan $\frac{\lambda}{2}$, maar daar we toch L zeer groot zullen denken, kan de invloed daarvan verwaarloosd worden. Wij kunnen nu door nieuwe integratieveranderlijken in te voeren al deze stukken terugbrengen tot integralen tusschen 0 en $\frac{\lambda}{2}$, daartoe stellen we voor het vak tusschen $k \frac{\lambda}{2}$ en $(k+1) \frac{\lambda}{2}$, $x = y + k \frac{\lambda}{2}$. Daardoor verandert ρ niet van vorm, want deze functie heeft $\frac{\lambda}{2}$ tot periode. Verder wordt:

$$e^{i \frac{4 \pi x}{\lambda'}} = e^{i \frac{4 \pi y}{\lambda'}} \cdot e^{2 \pi k i \frac{\lambda}{\lambda'}}.$$

Stellen we dus:

$$e^{2 \pi i \frac{\lambda}{\lambda'}} = u,$$

dan vinden we:

$$\int_{k \frac{\lambda}{2}}^{(k+1) \frac{\lambda}{2}} \rho e^{i \frac{4 \pi x}{\lambda'}} dx = u \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \rho e^{i \frac{4 \pi x}{\lambda'}} dx.$$

en dus:

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{k=p} u^k \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \varrho e^{i \frac{4\pi x}{\lambda'}} dx. \quad (8)$$

Wij denken ons nu, dat L en dus ook p oneindig groot wordt. Lippmann neemt aan dat de grootheid ε , die in de formule (2) voorkomt daarbij tot nul nadert, zóó, dat $\varepsilon p = 1$ wordt. Nu is:

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \varphi \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{i \frac{4\pi x}{\lambda'}} dx$$

altijd eindig. $\sum u^k$ is wel geen convergente reeks, daar $|u| = 1$ is, maar ze is toch voor geen der in aanmerking komende waarden van u oneindig groot, behalve voor $u = 1$, dus behalve voor $\lambda = \lambda'$ of $\lambda =$ een veelvoud van λ' . Hieruit blijkt dat $\frac{1}{p} \sum_0^p u^k$ en dus ook $|A + Bi|$ steeds nul is, behalve als $\lambda' = \lambda$ of een evenmatig deel van λ .

We vinden dus, dat in 't teruggekaatste licht alleen die stralen eene merkbare intensiteit hebben, wier golflengte gelijk is aan die van 't licht, waarmee de plaat oorspronkelijk is belicht geweest, of een geheel aantal malen daarop begrepen. 't Laatste is echter niet van practisch belang daar het zichtbare spectrum zich niet zoover uitstrekt, dat de grootste golflengten, die er toe behooren het dubbele zijn van de kleinste. Het kan echter voorkomen, dat een deel der plaat met ultrarood licht is belicht geweest, waarvan de golflengte twee maal zoo groot is als die van het violette licht van het spectrum. Vandaar dat men bij photographieën van 't spectrum dikwijls voorbij 'troode licht weer violet ziet verschijnen.

Hoewel dus de uitkomsten goed met de waarnemingen overeenstemmen, en ook 't beschouwde medium een redelijk goed

beeld geeft van de ontwikkelde Lippmannsche laag, kan hiermee nog de quaestie niet als afgedaan beschouwd worden, omdat tegen de bewerking verschillende bezwaren te maken zijn.

De resultaten berusten weer op de onderstelling dat de dikte der laag zeer groot is, wat in de practijk niet het geval is.

Van meer belang is het echter, dat voor de onderstelling dat de grootheid ε daarbij niet eindig zou kunnen blijven, geen grond is aan te geven. Als men echter deze onderstelling niet maakt, zal volgens de formules voor $\lambda' = \lambda$ en wellicht ook voor andere golflengten de intensiteit in het teruggekaatste licht grooter gevonden worden dan die in het invallende licht, wat natuurlijk niet mogelijk is.

Bij de afleiding der formules (4) en (5) is er dan ook geen rekening mee gehouden, dat de intensiteit van 't licht, dat aan een vlak op den afstand x van 't grensvlak wordt teruggekaast, tengevolge van de terugkaatsingen die het reeds ondergaan heeft al verzwakt is. Deze invloed zal natuurlijk meer op den voorgrond treden, naarmate de laag dikker wordt. Bovendien wordt het vraagstuk ingewikkeld door dat het licht dat van 't vlak x teruggekaast wordt, niet rechtstreeks tot dat vlak behoeft doorgedrongen te zijn, maar ook daar gekomen kan zijn na een even aantal terugkaatsingen in de vóór x liggende lagen. Bij de bepaling van 't phaseverschil moet er ook nog rekening mee gehouden worden, dat bij de terugkaatsingen phaseverschillen kunnen ontstaan.

Om dit geval streng te behandelen zou men formules voor de lichtvoortplanting in een medium met enkelvoudig periodieke structuur moeten kennen, hetgeen als we zooveel mogelijk vereenvoudigingen aanbrengen, neerkomt op de oplossing van een vergelijking van den vorm:

$$a^2 \left(1 + \varepsilon^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

De coëfficiënt in het eerste lid is hierbij als een tweeterm voorgesteld om te doen uitkomen, dat de structuur van het

medium wordt opgevat als een wijziging van den normalen toestand, waarbij $\varepsilon = 0$ is en het medium dus homogeen. In den tweeden term is weer $\text{Sin}^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$ gesteld omdat de wijziging evenredig gedacht is aan de intensiteit van het licht, waardoor ze is voortgebracht. We kunnen bovenstaande vergelijking nog in den vorm brengen:

$$c^2 \left(1 + \delta \text{Cos} \frac{4\pi x}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (9)$$

§ 4. Oneindig kleine afwijking van de homogeniteit.

Van zulke vergelijkingen kan men echter geen algemeene oplossing geven. Wel is het mogelijk een benaderde oplossing op te stellen voor het geval dat de afwijking van de homogeniteit slechts gering is, dus δ tot nul nadert. We zullen ons daarbij voorstellen, dat de brekingsindex van de homogene laag 1 zou zijn; met het oog daarop is in de laatste vergelijking reeds de coëfficiënt c geschreven.

Substitueeren we om de gewenschte oplossing te verkrijgen in (9):

$$\varphi = A \text{Cos} p \left(t + \frac{x}{c}\right) + \delta \cdot \psi,$$

waarin ook ψ een functie met de frequentie p voorstelt, dan vinden we ter bepaling van ψ :

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + p^2 \psi = p^2 A \text{Cos} p \left(t + \frac{x}{c}\right) \text{Cos} \frac{4\pi x}{\lambda},$$

waarvan de oplossing is:

$$\psi = -\frac{1}{2} A p^2 \frac{\text{Cos} \left\{ \left(\frac{p}{c} + \frac{4\pi}{\lambda} \right) x + p t \right\}}{\frac{8\pi c p}{\lambda} + \frac{16\pi^2 c^2}{\lambda^2}} - \frac{1}{2} A p^2 \frac{\text{Cos} \left\{ \left(\frac{p}{c} - \frac{4\pi}{\lambda} \right) x + p t \right\}}{-\frac{8\pi c p}{\lambda} + \frac{16\pi^2 c^2}{\lambda^2}}.$$

We vinden dus:

$$\varphi = A \operatorname{Cos} p \left(t + \frac{x}{c} \right) - \frac{A p^2 \lambda^2}{16 \pi c} \frac{\delta}{2 \pi c + p \lambda} \operatorname{Cos} \left\{ \left(\frac{p \lambda + 4 \pi c}{c \lambda} \right) x + p t \right\} \\ - \frac{A p^2 \lambda^2}{16 \pi c} \frac{\delta}{2 \pi c - p \lambda} \operatorname{Cos} \left\{ \left(\frac{p \lambda - 4 \pi c}{c \lambda} \right) x + p t \right\} \quad (10)$$

en evenzoo kunnen we afleiden

$$\varphi = A \operatorname{Cos} p \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{A p^2 \lambda^2}{16 \pi c} \frac{\delta}{2 \pi c - p \lambda} \operatorname{Cos} \left\{ p t - \left(\frac{p \lambda - 4 \pi c}{c \lambda} \right) x \right\} \\ - \frac{A p^2 \lambda^2}{16 \pi c} \frac{\delta}{2 \pi c + p \lambda} \operatorname{Cos} \left\{ p t - \left(\frac{p \lambda + 4 \pi c}{c \lambda} \right) x \right\}. \quad (10')$$

De meest algemeene toestand met de frequentie p wordt natuurlijk verkregen door superpositie dezer beide.

Beide formules gelden voor alle waarden van p . Volgens onze onderstelling, dat δ tot nul nadert, heeft echter in (10) de tweede en in (10') de derde term nooit een merkbaaren invloed, terwijl de invloed van den derden term in (10) en den tweeden in (10') alleen merkbaar wordt voor golven met frequenties die zeer weinig verschillen van $\frac{2 \pi c}{\lambda}$. Het is duidelijk, dat deze termen de eigenaardige werking der laag bepalen, zij stellen golven voor die zich in beide richtingen met de snelheid $c \frac{p \lambda}{4 \pi c - p \lambda}$ kunnen voortplanten en die zullen ontstaan zoodra het medium door eene lichtbeweging met de frequentie p getroffen wordt, maar alleen merkbaar zijn voor de frequenties die dicht bij $\frac{2 \pi c}{\lambda}$ liggen. Het is nu gemakkelijk in te zien, dat alleen van deze golven een merkbaar deel door de plaat zal worden teruggekaatst.

Het geval dat de afwijking van de homogeniteit slechts oneindig klein is, dat wij hier zeer kort hebben besproken is interessant, omdat eene dergelijke behandeling kan gegeven

worden voor het geval van een oneindig kleine afwijking, die niet enkelvoudig periodiek is, zooals we dus zouden verkrijgen door belichting der plaat met niet homogeen licht. Nemen we het eenvoudigste geval, dat het inwerkende licht is samengesteld uit stralen met twee verschillende golflengten, dan vinden we voor het medium dat na 't ontwikkelen en fixeeren ontstaat eene differentiaalvergelijking van den vorm.

$$a^2 \left\{ 1 + (\varepsilon_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \varepsilon_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_2})^2 \right\} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

waarin we ter vereenvoudiging nog zullen aannemen, dat $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ is. Deze vergelijking kunnen we dan brengen in den vorm:

$$c^2 \left\{ 1 - \delta \cos \frac{4\pi x}{\lambda_1} - \delta \cos \frac{4\pi x}{\lambda_2} - 2\delta \cos \frac{4\pi x}{\lambda_3} + 2\delta \cos \frac{4\pi x}{\lambda_4} \right\} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

waarin gesteld is:

$$\lambda_3 = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ en } \lambda_4 = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Door deze vergelijking op dezelfde wijze te behandelen als we (9) gedaan hebben, vinden we dat nu in het teruggekaatste licht vier golflengten vertegenwoordigd kunnen zijn: λ_1 , λ_2 , λ_3 en λ_4 , eene uitkomst, die ons herinnert aan de theorie der combinatietonen.

§ 5. Algemeen geval.

Wij zullen nu verder de onderstelling van een oneindig kleine afwijking van de homogeniteit laten rusten.

De gedachtengang, volgens welken wij in hoofdstuk VIII gekomen zijn tot de theorie der lichtbeweging in het daar beschouwde medium, kan ons ook dienen om eenige besluiten te trekken bij een willekeurig medium, dat verdeeld kan worden in lagen, die geheel aan elkaar gelijk zijn. Zoowel de media

der hoofdstukken VIII en IX als dat waarop de verg. (9) betrekking heeft, zijn daarvan bijzondere gevallen.

We denken ons de grensvlakken der lagen weer loodrecht op de X-as en beschouwen alleen eene voortplanting in de richting der X-as met platte golffronten, en wel van rechtlijnig gepolariseerd licht.

Letten wij nu op een der lagen afzonderlijk, waarvan we de grensvlakken met A_k en B_k zullen aanwijzen. Denken wij ons daarin een toestand waarbij:

$$\begin{aligned} \text{in } A_k, & \quad \mathfrak{E}_y = s_k e^{ipt} \\ \text{en in } B_k, & \quad \mathfrak{E}_y = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Daardoor is de toestand bepaald en we zullen vinden:

$$\begin{aligned} \text{in } A_k, & \quad \mathfrak{H}_z = \alpha s_k e^{ipt} \\ \text{en in } B_k, & \quad \mathfrak{H}_z = \beta s_k e^{ipt}, \end{aligned} \quad (11')$$

waarbij de grootheden α en β alleen van den aard der laag en van de frequentie p afhangen en dus volgens onze onderstelling voor alle lagen gelijk zijn. Er kan nu in de laag nog een tweede toestand met de frequentie p zijn, waarbij n.l.:

$$\begin{aligned} \text{in } A_k, & \quad \mathfrak{E}_y = 0 \\ \text{en in } B_k, & \quad \mathfrak{E}_y = s'_k e^{ipt} \end{aligned} \quad (12)$$

en daarbij zullen we vinden:

$$\begin{aligned} \text{in } A_k, & \quad \mathfrak{H}_z = \gamma s'_k e^{ipt} \\ \text{en in } B_k, & \quad \mathfrak{H}_z = \delta s'_k e^{ipt}. \end{aligned} \quad (12')$$

De meest algemeene toestand zal weer gevonden worden door superpositie dezer beide. Beschouwen we nu het medium in zijn geheel en denken wij ons daarin een golf met de frequentie p . In al de lagen zal nu hetzelfde gebeuren,

alleen de phase en misschien de amplitudo van den bewegings-toestand zal verschillend zijn. Wij moeten den toestand dus kunnen beschrijven als we in bovenstaande formules aannemen:

$$s_k = \mu e^{ink} \quad s'_k = \mu' e^{ink},$$

waarbij met k evenals in de vorige hoofdstukken het rangnummer der laag is aangewezen. De voorwaarden, waardoor nu n en de verhouding van μ en μ' bepaald worden zijn weer, dat \mathfrak{G}_y en \mathfrak{H}_z aan elk grensvlak, doorlopend zijn. Dit geeft aan het grensvlak tusschen de k^{le} en $(k+1)^{\text{ste}}$ laag:

$$\begin{aligned} \mu' e^{i(nk+pt)} &= \mu e^{i(n(k+1)+pt)} \\ \beta \mu e^{i(nk+pt)} + \delta \mu' e^{i(nk+pt)} &= \alpha \mu e^{i(n(k+1)+pt)} + \gamma \mu' e^{i(n(k+1)+pt)}, \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu e^{in} \\ \beta \mu + \delta \mu' &= (\alpha \mu + \gamma \mu') e^{in} \end{aligned}$$

Beide voorwaarden worden dus weer voor alle grensvlakken dezelfde. Eliminatie van μ en μ' geeft

$$\gamma e^{2in} + (\alpha - \delta) e^{in} - \beta = 0.$$

Uit deze vergelijking kan n worden opgelost. Stellen we weer $n = p \frac{d}{V_p}$, waarbij d de dikte der lagen beteekent, dan is evenals in de vorige hoofdstukken V_p de snelheid waarmee zich een toestand met de frequentie p door het medium voortplant.

Wij zullen nu nog eenige vereenvoudiging aanbrengen door te vooronderstellen, dat al de lagen symmetrisch zijn ten opzichte van haar midden. In dat geval wordt $\beta = -\gamma$, $\delta = -\alpha$, omdat de toestand bepaald door (11) en (11') het spiegelbeeld zal zijn van dien bepaald door (12) en (12'). De vergelijking

ter bepaling van n wordt dan

$$e^{2in} + \frac{2\alpha}{\gamma} e^{in} + 1 = 0. \quad (13)$$

De verhouding van μ en μ' wordt gegeven door de eerste grensvoorwaarde $\frac{\mu'}{\mu} = e^{in}$. (14)

Uit de vergelijking (13) vinden we voor n weer twee gelijke en tegengestelde waarden, beantwoordende aan twee golven, die in tegengestelde richting door het medium loopen.

Denken wij ons nu uit het medium een stuk gesneden door twee der grensvlakken, en stellen we ons voor dat daarop van de eene zijde licht invalt met de frequentie p . We willen de terugkaatsing door de laag nagaan.

In de ruimte links van de laag hebben we dan :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= A e^{ip(t - \frac{x}{c})} + A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})}, \\ \mathfrak{H}_z &= A e^{ip(t - \frac{x}{c})} - A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})}, \end{aligned}$$

aan de grensvlakken binnen de laag :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= \mu e^{i(pt + nk)} + \mu_1 e^{i(pt - nk)}, \\ \mathfrak{H}_z &= (\alpha\mu + \gamma\mu') e^{i(pt + nk)} + (\alpha\mu_1 + \gamma\mu'_1) e^{i(pt - nk)}, \end{aligned}$$

en in de ruimte rechts van de laag :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= A_d e^{ip(t - \frac{x}{c})}, \\ \mathfrak{H}_z &= A_d e^{ip(t - \frac{x}{c})}. \end{aligned}$$

De grensvoorwaarden geven nu aan het linkergrensvlak,

waaraan wij het rangnummer 0 zullen toekennen en dat we tevens tot Y Z-vlak zullen kiezen:

$$A + A_r = \mu + \mu_1 \quad (15)$$

$$A - A_r = \mu (a + \gamma e^{in}) + \mu_1 (a + \gamma e^{-in}).$$

Aan de grensvlakken binnen de laag vinden we natuurlijk de voorwaarden (13) en (14), die we dan ook bij het opstellen van (15) reeds hebben toegepast. Aan het rechter grensvlak vinden we als we het aantal lagen, dat het beschouwde stuk van het medium bevat, k noemen:

$$A_d e^{-ip \frac{kd}{c}} = \mu e^{ink} + \mu_1 e^{-ink}, \quad (16)$$

$$A_d e^{-ip \frac{kd}{c}} = \mu (a + \gamma e^{in}) e^{ink} + \mu_1 (a + \gamma e^{-in}) e^{-ink}.$$

Uit (15) volgt:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{\mu (1 - a - \gamma e^{in}) + \mu_1 (1 - a - \gamma e^{-in})}{\mu (1 + a + \gamma e^{in}) + \mu_1 (1 + a + \gamma e^{-in})}$$

en uit (16):

$$\mu (1 - a - \gamma e^{in}) e^{ink} = -\mu_1 (1 - a - \gamma e^{-in}) e^{-ink},$$

waardoor de vorige vergelijking overgaat in:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{(1 - a - \gamma e^{in}) (1 - a - \gamma e^{-in}) - (1 - a - \gamma e^{-in}) (1 - a - \gamma e^{in}) e^{2ink}}{(1 + a + \gamma e^{in}) (1 - a - \gamma e^{-in}) - (1 + a + \gamma e^{-in}) (1 - a - \gamma e^{in}) e^{2ink}} \quad (17)$$

Deze uitkomsten zien er nu wel betrekkelijk eenvoudig uit, men moet echter bedenken, dat a en γ ingewikkelde functies van p kunnen zijn. Toch is het nu eenvoudig te bewijzen, dat voor eene waarde van p , waarvoor $n = \pi$ wordt

$A_r = A$ zal worden, als te gelijk de dikte der laag dus het getal k zeer groot wordt. Om niet op onbepaalde vormen te stuiten substitueeren we $n = \pi + \vartheta$, waarbij ϑ tot nul zal naderen, de verg. (13) geeft dan:

$$1 + 2i\vartheta - \frac{2a}{\gamma} - \frac{2a}{\gamma}i\vartheta + 1 = 0,$$

waaruit blijkt dat dan $a = \gamma$ moet zijn.

Door substitutie in (17) vinden we nu verder:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{-2i\vartheta k(1 + \gamma i\vartheta)(1 - \gamma i\vartheta)}{-4\gamma i\vartheta - 2i\vartheta k} = \frac{1}{1 + \frac{2\gamma}{k}}, \quad (18)$$

welke uitdrukking tot 1 nadert als k oneindig groot wordt.

Voor andere waarden moet $\left| \frac{A_r}{A} \right|$ natuurlijk kleiner dan 1 zijn.

Wij hebben nu nog na te gaan, wat de waarde $n = \pi$ beteekent. Daaraan beantwoordt eene voortplantings-snelheid

V_p zoodat $\pi = \frac{p d}{V_p}$, dus $V_p = \frac{p d}{\pi}$. De bijbehorende golf-

lengte is $V_p \frac{2\pi}{p} = 2d$, dus het dubbele van de dikte der lagen,

waaruit het medium bestaat.

We vinden dus ook in dit algemeene geval, dat voor een golf-lengte die gelijk is aan die, waarmee het medium vervaardigd moet zijn de straling geheel wordt teruggekaatst.

Dezelfde resultaten vinden we voor het geval dat n een veelvoud van π is.

§ 6. *Behandeling der media van hoofdstuk VIII en IX.*

Wij kunnen dit vraagstuk nog wat vollediger behandelen voor de in hoofdstuk VIII en IX beschouwde media, die echter geen goed beeld geven van eene Lippmannsche photographie;

het tweede komt overeen met het door Meslin behandelde medium.

Beschouwen we vooreerst de terugkaatsing van een golf met de frequentie p , door het medium van hoofdstuk VIII, waarbij we ons zullen voorstellen, dat dit zich naar rechts tot in het oneindige uitstrekt. Het linker grensvlak van het medium kunnen we ons in den vrijen aether denken, zóo dat vóór de eerste laag van de tweede soort een laag vrije aether ter dikte d ligt, die dan als eene laag van de eerste soort van het medium kan beschouwd worden. Deze laag zullen we het rangnummer 0 geven en het zoo bepaalde grensvlak van het medium tot YZ-vlak kiezen.

Wij hebben dan in de ruimte links van het grensvlak:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_y &= A e^{ip(t - \frac{x}{c})} + A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})}, \\ \mathfrak{G}_z &= A e^{ip(t - \frac{x}{c})} - A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})},\end{aligned}$$

waarbij A de amplitudo en phase bepaalt van het invallende licht en evenzoo A_r die van het teruggekaatste licht.

De toestand in de lagen van het beschouwde medium wordt bepaald door de vergelijkingen (6) en (7) van hoofdstuk VIII, terwijl de noodige betrekkingen tusschen de daar voorkomende constanten worden gegeven door de vergelijkingen (10) en (12) van dat hoofdstuk. Daar we echter in ons medium eene voortplanting naar rechts hebben zullen we daarin de waarde $-n$ moeten gebruiken. De voorwaarden aan het YZ-vlak geven nog:

$$A + A_r = a + b,$$

$$A - A_r = a - b,$$

waaruit: $\frac{A_r}{A} = \frac{b}{a}$ en dus volgens (4') van hoofdstuk IX, waarin we nu n door $-n$ moeten vervangen:

$$\frac{A_r}{A} = - \frac{(\mathfrak{B}_p^2 - c^2) \sin \nu \sin \nu_1 + 2i\mathfrak{B}_p(-c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}{(\mathfrak{B}_p^2 - c^2) \sin \nu \sin \nu_1 - 2i\mathfrak{B}_p(+c \sin n + c \sin \nu \cos \nu_1 + \mathfrak{B}_p \cos \nu \sin \nu_1)}.$$

Wanneer $n = \pi$ of een veelvoud van π wordt, worden teller en noemer dezer breuk toegevoegd complex, hun moduli dus gelijk, waaruit blijkt dat de amplitudo van het teruggekaatste licht gelijk is aan die van het invallende. De beteekenis van de waarde $n = \pi$ is dezelfde als voor het algemeene geval werd toegelicht.

Voor het medium van hoofdstuk IX kunnen we op dezelfde wijze tot dergelijke besluiten komen.

In dit geval kunnen we echter nog het een en ander opmerken.

Uit de vergelijking:

$$\cos n = \cos \nu - P \sin \nu$$

blijkt, dat $n = \pi$ is voor $\nu = \pi$. Verder zien we, dat als P positief is voor waarden van ν , die weinig kleiner zijn dan π , n niet reëel kan zijn; als P negatief is geldt hetzelfde voor waarden van ν , een weinig grooter dan π . Bij deze waarden van n kan zich de golf, volgens hetgeen in hoofdstuk IX § 6 daarover gezegd werd, niet voortplanten en het is gemakkelijk uit de formules af te leiden, dat ook voor deze golven de amplitudo van het teruggekaatste licht gelijk is aan die van het invallende.

Wanneer dus wit licht op het medium invalt, zullen we in het teruggekaatste licht niet alleen de golflengte $2d$ vertegenwoordigd vinden, maar alle golflengten in een gebied van het spectrum dat aan de eene zijde door de golflengte $2d$ begrensd wordt. Dit gebied zal des te kleiner zijn, dus de waargenomen kleur des te zuiverder, naarmate de grootheid P kleiner is.

Naar de andere zijde neemt daarentegen de intensiteit zeer snel af, zooals we kunnen doen zien op de volgende wijze.

Uit (15) hoofdstuk IX volgt voor ons geval:

$$\frac{A_r}{A} = - \frac{(\cos \nu - \cos n) - i(-\sin n + \sin \nu)}{(\cos \nu - \cos n) + i(\sin n + \sin \nu)}$$

waaruit we door modulus en argument te bepalen gemakkelijk afleiden:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{\sin \frac{1}{2}(n - \nu)}{\sin \frac{1}{2}(n + \nu)} e^{i(\pi + \nu)}. \quad (19)$$

De verhouding der amplitudines, in het teruggekaatste en in het invallende licht wordt dus bij reële n gegeven door:

$$f = \frac{\sin \frac{1}{2}(n - \nu)}{\sin \frac{1}{2}(n + \nu)},$$

waaruit we vinden:

$$\frac{df}{dp} = \frac{\sin \nu \frac{dn}{dp} - \sin n \frac{d\nu}{dp}}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu)}.$$

Nu is $\frac{d\nu}{dp} = \frac{d}{c}$ en uit: $\cos n = \cos \nu - P \sin \nu$ vinden we:

$$\frac{dn}{dp} = \frac{d \sin \nu + P \cos \nu}{\sin n} + \frac{\sin \nu}{\sin n} \frac{dP}{dp}.$$

Door dit te substitueeren vinden we:

$$\frac{df}{dp} = \frac{d \sin^2 \nu + P \sin \nu \cos \nu - \sin^2 n}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu) \sin n} + \frac{\sin^2 \nu \frac{dP}{dp}}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu) \sin n},$$

en daar:

$$\sin^2 n = 1 - \cos^2 n = \sin^2 \nu + 2 P \sin \nu \cos \nu - P^2 \sin^2 \nu$$

$$\frac{df}{dp} = -\frac{d P \sin \nu (\cos \nu - P \sin \nu)}{2c \sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu) \sin n} + \frac{\sin^2 \nu \frac{dP}{dp}}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu) \sin n},$$

eene uitdrukking die oneindig groot wordt, als n en ν tot π naderen, zooals men zonder moeite kan aantoonen.

Ten slotte zullen we de terugkaatsing behandelen door een

eindig stuk uit het laatst beschouwde medium. De beide grensvlakken denken wij ons nu in den vrijen aether telkens op een afstand d van het naastbijzijnd discontinuïteitsvlak.

In de ruimte links van het medium hebben we dan:

$$\mathfrak{E}_y = A e^{ip(t - \frac{x}{c})} + A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})},$$

$$\mathfrak{H}_z = A e^{ip(t - \frac{x}{c})} - A_r e^{ip(t + \frac{x}{c})},$$

waarbij de coördinaat x betrekking heeft op een coördinatenstelsel met het linker grensvlak van 't medium tot YZ-vlak. Binnen de lagen van het medium hebben we:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y = & a e^{i\{p(t - \frac{x}{c}) - kn\}} + b e^{i\{p(t + \frac{x}{c}) - kn\}} \\ & + a_1 e^{i\{p(t - \frac{x}{c}) + kn\}} + b_1 e^{i\{p(t + \frac{x}{c}) + kn\}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z = & a e^{i\{p(t - \frac{x}{c}) - kn\}} - b e^{i\{p(t + \frac{x}{c}) - kn\}} \\ & + a_1 e^{i\{p(t - \frac{x}{c}) + kn\}} - b_1 e^{i\{p(t + \frac{x}{c}) + kn\}}. \end{aligned}$$

De eerste laag zullen we het rangnummer 0 geven, de laatste zal dan de k^{de} zijn. Rechts van het medium hebben we:

$$\mathfrak{E}_y = A_d e^{ip(t - \frac{x'}{c})},$$

$$\mathfrak{H}_z = A_d e^{ip(t - \frac{x'}{c})},$$

waarbij de coördinaat x' betrekking heeft op een coördinatenstelsel met het Y'Z'-vlak in 't rechter grensvlak van 't medium.

De grensvoorwaarden geven nu:
aan het YZ-vlak:

$$A + A_r = a + b + a_1 + b_1,$$

$$A - A_r = a - b + a_1 - b_1,$$

aan de discontinuïteitsvlakken:

$$\frac{a}{b} = \varepsilon = - \frac{\sin \frac{1}{2}(n + \nu)}{\sin \frac{1}{2}(n - \nu)} e^{-i\nu}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \varepsilon_1 = - \frac{\sin \frac{1}{2}(n - \nu)}{\sin \frac{1}{2}(n + \nu)} e^{-i\nu}$$

aan het Y'Z'-vlak:

$$A_d = a e^{-ikn} + b e^{-ikn} + a_1 e^{ikn} + b_1 e^{ikn},$$

$$A_d = a e^{-ikn} - b e^{-ikn} + a_1 e^{ikn} - b_1 e^{ikn}.$$

Uit de laatste voorwaarde volgt:

$$b = -b_1 e^{2ikn}.$$

Uit de eerste:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{b + b_1}{a + a_1} = \frac{-e^{2ink} + 1}{-\varepsilon e^{2ikn} + \varepsilon_1}$$

en door substitutie van de waarden van ε en ε_1 :

$$\frac{A_r}{A} = \frac{(1 - e^{2ikn}) \sin \frac{1}{2}(n - \nu) \sin \frac{1}{2}(n + \nu)}{\sin^2 \frac{1}{2}(n + \nu) e^{2ikn} - \sin^2 \frac{1}{2}(n - \nu)} e^{i(\pi + \nu)}.$$

Door goniometrische herleiding en substitutie van:

$$\cos \nu - \cos n = P \sin \nu,$$

wordt dit:

$$\frac{A_r}{A} = P e^{i(\pi + \nu)} \frac{\sin \nu}{-2 \left(\sin^2 \frac{1}{2} n \cos^2 \frac{1}{2} \nu + \cos^2 \frac{1}{2} n \sin^2 \frac{1}{2} \nu \right) + i \sin n \sin \nu \cot g k r}$$

Dit geeft voor het geval dat n weinig van π verschilt:

$$\left| \frac{A_r}{A} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{P^2 k^2}}},$$

welke uitdrukking weer des te meer tot 1 nadert, naarmate k , dus de dikte der laag grooter wordt, maar ook naarmate P grooter wordt.

Met deze korte en op verschillende punten onvolledige behandeling is natuurlijk niets meer bedoeld dan het aangeven van een middel, waardoor men zich een oordeel zal kunnen vormen over het gedrag der volgens het procédé van Lippmann vervaardigde plaat, volstrekt niet eene theorie der kleurenphotographie en nog minder eene verklaring der verschillende daarbij waargenomen eigenaardigheden, waarop, naar het mij voorkomt, veelal juist de bijzondere omstandigheden der proefneming een overwegenden invloed hebben.

E R R A T A.

Pag.		staat $du\ pu,$	moet zijn $pu\ du.$
"	45 regel 6 v. b.	" $S,$	" " $I.$
"	58 " 7 v. o.	" $T_1,$	" " $T_2.$
"	89 " 10 v. b.	" $\mathfrak{P}_0,$	" " $\mathfrak{P}.$
"	104 formule 12 en 13	" § 4.	" " § 11.
"	120 regel 1 v. b.	" § 2,	" " § 3.
"	123 " 5 v. o.	" vergelijkingen,	" " vergelijking.
"	146 " 7 v. b.	} " $+ \Sigma,$	" " $- \Sigma.$
"	157 " 5 v. o.		
"	158 " 4 v. b.		

INHOUD.

	pag.
Inleiding	1.
HOOFDSTUK I.	
Oudere dispersietheorieën	17.
HOOFDSTUK II.	
Lichtvoortplanting in den vrijen aether	41.
HOOFDSTUK III.	
Hypothese over het wezen der disperseerende media	63.
HOOFDSTUK IV.	
Stellingen over middelwaarden	82.
HOOFDSTUK V.	
Lichtvoortplanting in disperseerende media	97.
HOOFDSTUK VI.	
Experimenteele gegevens	130.
HOOFDSTUK VII.	
Dispersieverschijnselen in anisotrope media	138.
HOOFDSTUK VIII.	
Beschouwing van een denkbeeldig medium	156.
HOOFDSTUK IX.	
Vervolg	182.
AANHANGSEL.	
Over Lippmanns kleurenphotographie	203.

STELLINGEN.

I.

In de mechanische lichttheorieën moet het feit, dat wij in de ledige ruimte geen dispersie waarnemen steeds aan onze onvoldoende hulpmiddelen worden toegeschreven. Bij den tegenwoordigen stand onzer kennis moet dit als een bezwaar tegen die theorieën worden beschouwd.

II.

Boussinesq zegt van de door hem beschouwde krachten tusschen de aetherdeeltjes en de materie (Journal de Liouville, 1868, pag. 317): „Bien que ces forces nous soient inconnues, il est naturel de penser que leur effet le plus grand et sensible provient d'une espèce de frottement entre les molécules d'éther et celles de la matière pondérable, qui passent très près les unes des autres...” De uitdrukking „espèce de frottement” is minder gelukkig.

III.

Helmholtz voert in zijn stuk: „Zur Theorie der anomalen Dispersion” (Pogg. Ann., Bnd 154) op pag. 590 eene onlogische

notatie in, die licht aanleiding kan geven tot verkeerde voorstellingen.

De formule 4 aldaar is niet geheel juist.

IV

In de theorie van Helmholtz wordt voor zeer kleine golflengten de brekingsindex 1 gevonden. Men moet hierbij opmerken dat bij nauwkeurige beschouwing de theorie niet meer doorgaat voor zeer kleine golflengten.

V.

Ten onrechte doet K. Exner in de duitsche bewerking van: É. Verdet, *Leçons d'Optique physique* (Bnd. II, pag. 39) het voorkomen alsof in de theorie van Helmholtz de afwezigheid van dispersie in de ledige ruimte een noodzakelijk gevolg is van de hypothesen waarop de theorie berust.

VI.

Exner (t.a.p. pag. 42) beweert: „Diese zweiconstantige Dispersionsformel (vergl. formule (19) van hoofdstuk I in dit proefschrift) und Cauchy's Dispersionsformel lassen sich leicht auf dieselbe Form bringen.“ Deze bewering is alleen juist als λ_m (in onze formule λ_p) klein is in vergelijking met de golflengten behorende bij het zichtbare spectrum.

VII.

De stelling van Ketteler (*Theoretische Optik*, pag. 447) „Die Anwendung complexer Formeln in der Physik ist nur als Nothbehelf gerechtfertigt, aus Bequemlichkeitsgründen meistens zu verwerfen und nie als endgültig anzusehen“ bevat

drie beweringen, waarvan de middelste onjuist is en de beide andere eenigszins zonderling zijn uitgedrukt.

VIII.

Drude zegt in zijn Lehrbuch der Optik, pag. 375: „Um zu einem Ansatz für Kristalle zu gelangen muss man berücksichtigen, dass die in den Gleichungen (1) S 350 der Dispersions-theorie auftretenden Constanten ϑ_1 , ν_1 von der Coördinaten-richtung abhängen.“ Hij laat daarbij de voornaamste eigenaardigheid der kristallen, n.l. hunne structuur, buiten beschouwing.

IX.

In de formule (15), hoofdstuk XIII van Heath, A Treatise

on Geometrical Optics: $\frac{1}{\varrho} = \frac{d \log n}{d \nu}$,

beteekent ν de richting der hoofdnormaal aan de lichtbaan en niet, zooals Drude waar hij die formule aanhaalt (Lehrbuch der Optik, pag. 285) beweert, de richting van het sterkste verval van n .

Het door Heath gegeven bewijs voor deze formule kan belangrijk vereenvoudigd worden.

X.

De proef die Planck (Vorlesungen über Thermodynamik, pag. 74) zich voorstelt om te doen zien, dat eene zekere hoeveelheid warmte geheel in arbeid kan worden omgezet, zonder dat andere omzettingen van arbeidsvermogen plaats hebben, is onuitvoerbaar.

XI.

De formule: $E = As [l + (l - r) \text{Cos } 2qr]$, die Schuster heeft afgeleid in Phil. Mag. V, Vol. 37, blz. 526 (1894), geeft

niet zooals Schuster zelf meent bij benadering de uitkomst der berekening maar volkomen juist.

Tegen de afleiding bestaat echter een theoretisch bezwaar, daar ze wegens de onderstellingen op blz. 523 (laatste alinea) betrekking heeft op eene lichtbeweging, waarbij de amplitudo van het invallende licht door eene divergente integraal zou worden voorgesteld.

XII.

Ook na de proeven van F. Himstedt en G. Meijer (Ann. d. Phys., Bnd. 15, blz. 184, 1904) over het ontstaan van helium uit de radiumemanatie is het nog niet onbetwifelbaar of dit verschijnsel werkelijk plaats heeft.

XIII

De verhandeling van L. Pfaundler (Ann. d. Phys., Bnd. 15, blz. 371, 1904) bevat geen volledige theorie der daar besproken „Zenkersche lijnen.”

XIV.

Het is van belang proeven over de dispersie en over het verschijnsel van Zeeman in verband met elkaar te verrichten.

XV.

De sommen $\Sigma \left(\frac{15 x^4}{r^{4+n}} - \frac{9 x^2}{r^{2+n}} \right)$ en $\Sigma \left(\frac{15 x^2 x^2}{r^{4+n}} - \frac{3 x^2}{r^{2+n}} \right)$, waarbij de sommaties moeten worden uitgestrekt over de hoekpunten van een zich in 't oneindige uitstrekkend cubisch net, zijn divergent voor $n \geq 3$ en convergent voor $n < 3$.

XVI.

Bij de behandeling der elliptische functies verdient het aanbeveling op 't voorbeeld van Tannery en Molk de notaties zoo te kiezen, dat de betrekkingen bestaan :

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

XVII.

Als Verdet uit Huygens' *Traité de la Lumière* aanhaalt : „Et tout cecy ne doit pas sembler estre recherché avec trop de soin ni de subtilité . . .”, verandert hij de beteekenis geheel door het woord „sembler” weg te laten. Dezelfde plaats is in de bekende uitgave in „Ostwalds Klassiker” onjuist vertaald.

XVIII.

Bij het onderwijs in de wiskunde doet men verkeerd door de leerlingen regels en stellingen van buiten te laten leeren.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Main body of faint, illegible text, appearing to be several lines of a letter or document.

Lower section of faint, illegible text, continuing the main body of the document.

Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a signature or footer.

6





