DISSERTATIO
GEOMETRICO-PHILOSOPHICA.
DE
CIRCULORUM TANGENTIUM CENTRORUM SITU IN CURVIS.

QUAM,

CUM THESIBUS ANNEXIS,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI,

SIMONIS SPEYERT VAN DER EYK,

A. L. M. PHIL. DOCT. MATHES. SUBLIM. ET PHYSIC. PROFESSORIS ORDINARII,

ET

AMPLISSIMI SENATUS CONSENSU,

NEC NON

NOBILISSIMAE FACULTATIS DISSIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORATUS ET MAGISTERII,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPIA NATURALI HONORIBUS ET PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA,

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO AC SOLEMNI EXAMINI SUBMITTIT,

SEERP BROUWER, *Med. et Art. Obst. Doct.*

FRANEQUERA-FRISIUS.

Ad diem XV. *Octobris* MDCCCXVII. *Horâ* XI–XII.

IN AUDITORIO MAJORI.

LUGDUNI BATAVORUM
APUD L. HERDINGH ET FILIUM,
MDCCCXVII.

VIRO

CELEBERRIMO

CORNELIO EKAMA,

ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRO, PHILOSOPHIAE DOCTORI, MATHESEOS ET ASTRONOMIAE IN HAC NOBILISSIMA ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA PROFESSORI ORDINARIO, INSTITUTI NEERLANDICI REGII CLASSI PRIMAE ADSCRIPTO,

DE SE SUISQUE STUDIIS INSIGNITER MERITO, FAUTORI BENIGNISSIMO, PROMOTORI SUO AESTUMATISSIMO, AD ROGUM USQUE VENERANDO, COLENDO,

Hancce qualemcunque Dissertationem in animi grati tesseram,

D. D. D.

SEERP BROUWER.

In istis decretis ſyntheticis, quibus creſcit cognitio atque augetur, omne conſilium vertitur cognitionis noſtrae a priori efformandae.

KANT.

P R A E F A T I O.

Academico curriculo tandem finem imposituro liceat quaedam praefari, uti constet de modo, quo me et hoc exercitium Geometricum spectatum vellem.

Impetuosa tempora, tranquille me studiorum potuisse scopum attingere vetuere: primo enim Academiae fui civis Illustrissimae Franequeranae, quae decreto Gallorum Imperatoris suppressa fuit: dein Musarum sedem nobilem, Lugdunum-Batavorum petii, ubi novus rerum ordo vigere tunc incepit: paulo post omnibus valedicere studiis cogebar, quia eidem placebat Gallorum Imperatori, sub nomine satis glorioso, militis Galli me partes agere. Cito tamen hisce finis imponebatur fracta vi Napoleonis; et post annum fere hocce tumultu perditum, in patriam a tyrannide liberam, et ad studia redire mihi licuit. Dein vero invasio nova in Europam, tyrannidem minitans denuo insurgentem, officium dictabat, ad arma rursus confugere:

re-

rerum ſuccesſus felix, inutilem quidem monſtrabat noſtram opem, verum voluisſe et valuisſe, ſi ipſius rei actionem non conſtituant, prope tamen accedunt. Studiis interim hae turbae parum proficuae. Organiſatio nova Academiarum ſequebatur reditum in patriam, ſecunda quam Leydae videre mihi contigit, auſpiciis vero maxime diverſis.

Ab altera vero parte, ſtudiorum, quibus indulgebam, campus inmenſus, parum cum vitae genere variabili conveniebat: Medicinae nempe Univerſae, et Philoſophiae Naturali nec non Matheſi praecipue operam dedi.

Nemini igitur mirum videbitur, in tanta rerum varietate et temporibus adeo disruptis, doctrinam ſolidam me adeptum non fuisſe. Ipſe ſentio, quantum vires excedat ſtudiorum haec congeries. Medicinae vero ſtudium ideo eligeram, quia cognitionibus Philoſophiae Naturalis pro parte est ſundata, vel potius ipſius Philoſophiae Naturalis pars dici poteſt, ad quam animus ſemper me impulit: accedit, quod mihi contigit in Philoſophicis uti Praeceptoribus, qui ad ſtudia divina continuo me revocarent, cum ſoli Medicinae jam dare operam mihi propoſueram.

Quod potui tamen, tempus adhibui, ut praecipua in variis hisce ſtudiis capita mihi haud esſent incognita; ſimul vero illud, in Academiis ſtudia incipi non perſici posſe, animum erexit.

Medicinae Doctoratum et Artis Obſtetriciae, praecedente anno ambivi, jamque hic ſubſiſtere animus fuit. Impulit vero conſilium et promisſum auxilium Fautoris Clarisſimi, EKAMA, *ut et ad ſummos in Matheſi et Philoſophia Naturali honores aspirarem:*

rem: per annum et quod excurrit, ſoli Medicinae dedito, difficilius hoc erat; vicit tamen haec obſtacula, virium intentio et ſingularis Virorum Clarisſimorum indulgentia.

Examinibus rite ſuſtentis in Germaniam profectus ſum, ut Medicinae Practicae ulterius operam navarem. Gottingae inprimis, duce Viro Celeberrimo C. HIMLY, *huic ſcopo ſatisfacere mihil icuit, cui Viro, quantum debeo, non lingua debilis dicere valet, quod vero memoria grata ſervabit. Celeberrimum ibi quoque audivi, Hiſtoriam Naturalem docentem,* BLUMENBACHIUM, *cui pro humanitate, uti ſolet Senex Venerandus et praeceptis ſagacibus, maximas ago gratias habeoque. Heydelbergam et Tubingam dein adii, Virosque Praeclaros multos illic videre licuit, methodumque docendi et inſtituta Academica varia conferre potui; neque defuit occaſio in Germaniae Meridionalis urbibus majoribus noſocomia et multa notatu digna videndi et examinandi. Hinc vero profectus ſum in regiones Helvetiae, Naturaeque ultimos in percellendo Majestate conatus vidi; unde in patriam redux, priusquam ad Medicinae praxin me conferam, Philoſophiae Naturalis doctoratum ambire jam mihi propoſueram.*

Quantum vero attinet ad hoc ſpecimen, Gottingae id perfeci interſtitiis Medicinae demtis, ſimplicitate argumenti adductus: non enim eos, qui Academiae valedicunt, quid proferre debere puto, quo ſcientiarum masſam proveherent: vetat hoc juvenilis aetas et paucum ad ſtudia adhibitum tempus, quo diſcere, non docere doceamur; neque compilatio arida et congeries ſententiarum, atque ita commentatio commentationum mihi placebat;

ſty-

ſtylus enim polemicus ſemper taedioſus ſtudioſo minime decet: absque docto apparatu potius pauca et cum exilitate mea convenientia afferre volui, quae aliquam ſpontaneitatem ſaltem monſtrarent. Anne materies hujus ſpeciminis usquam ſit pertractata, vel anne notatu digna ſit habenda, id ſane nescio: trado ut mihi ſubvenit, neque ut gloriam exinde peterem, trado, ſed ut inſtitutis Academicis taliter ſatisfacerem, qualiter me ſatisfacere poſſe putabam.

Hisce praemiſſis, Inſtitutis Academicis ultimum jam vale dico. Praeceptoribus, Viris Clariſſimis, quos docentes audire mihi contigit, pro inſignibus praeceptis, animum gratum affero, neque me discipulum indignum ſpectent, precor. Amicis, quibus uſus ſum, jucundiſſimis, ſodalibus et fratribus optimis, vitam fore beatam gratamque ſpero; neque amicitiae mutuae ſint immemores, etiam atque etiam rogo.

DIS

DISSERTATIO
GEOMETRICO-PHILOSOPHICA

DE

CIRCULORUM TANGENTIUM CENTRORUM SITU IN CURVIS.

INTRODUCTIO.

CAPUT PRIMUM.

§. 1.

Cum mihi olim tradebatur Problema, „ datis tribus circulis „ inaequalibus, invenire centrum quarti circuli, qui tres datos „ tangat, " eaque de re mecum computabam, reperi hoc Problema pendere ab alio, quod prius folvi deberet, nempe „ datis „ duobus circulis inaequalibus, invenire lineam, in qua omnia „ centra posfibilia esfent fita Circulorum ad duos datos Tangen„ tium. " Hoc enim Problemate refoluto, facili modo prius folvi posfet, fumendo punctum, quo hae lineae fe invicem fecarent, pro centro circuli quarti quaefiti. Simul vero vidi, pro circulis inaequalibus non in rectâ lineâ esfe fita centra quaefita,

qua-

quare non credo Problema illud propositum, directo et Geometrico modo, strictiore sensu, solvi posse (*).

Mihi vero indignus non videbatur labor, propius paulo spectare, quae denique essent istae lineae, sive rectae sive curvae, in qua centra omnium Circulorum ad duos datos Tangentium essent sita, simulque si loco unius circuli esset posita linea recta, adeoque datus circulus et recta, quamtumvis prolongata. Cum haec haud difficulter procedebant, haud abs re putavi, hoc exercitium Geometricum assumere pro materia Disputationis publicae; eo magis adductus, quod in Philosophicis tyroni, atque aliis insuper studiis dedito, nempe Medicinae, difficile fuisset talem eligere, quae experimentis nitens longum examen requireret, vel calculis operosis indigens vires tenues superaret.

§. 2.

Brevitatis causa et ne aequivocationi detur locus, modos loquendi quosdam, saepius obvios definire necessarium fuit visum, ut dein absque ulteriore explicatione rite intelligi possent.

Si duo dati sint circuli, vel recta linea et circulus quocunque modo relative siti; circulus cujus centrum taliter sit situm, cujusque radius talis sit magnitudinis, ut datos circulos vel datum circulum et datam rectam tangat, dicitur horum circulorum, vel hujus circuli et datae lineae rectae, *Circulus Tangens*.

Si fingamus ad duos datos circulos, vel ad datum circulum et lineam rectam, infinitum numerum duci Circulorum Tangentium; li-

(*) Resolutio nempe Geometrica alicujus Problematis, strictiore sensu est talis, quae linea recta et circulo perficitur. Cf. Celeberr. VAN SWINDEN, *Grondbeginsels der Meetkunde. Inleid. tot de Werkstukk.* — Hujus operis praestantissimi citationes continuo occurrent, quae sunt desumtae ex editione secunda; numerus major indicat librum, numerus minor ipsam propositionem citatam.

linea per centra omnium horum Circulorum Tangentium tranſeuns, ſive recta ſive curva, dicitur *Linea centrorum Circulorum Tangentium.*

Si ſint dati duo circuli inaequales, operatio illa, qua minorem in locum majoris, majoremque in locum minoris ſubſtitui fingamus, ita ut centrum circuli *a* jam ſiet centrum circuli *b*, et centrum circuli *b* jam ſiat centrum circuli *a*, dicitur *Permutatio Circulorum.*

Si duo ſint dati circuli, ſive aequales ſive inaequales, vel circulus et linea recta: linea centra Circulorum uniens, vel linea e centro circuli dati ad datam lineam rectam perpendiculariter dimisſa, et quantumvis prolongata, dicitur *Linea Centralis.*

Ut facilius conſtet de variis modis, quo Circuli Tangentes duci posſunt, diſtinguo concavitatem et convexitatem circulorum; diciturque adeo Circulus Tangens vel convexitate vel concavitate ſua, tangere circulorum datorum convexitatem vel concavitatem.

Horum rationem habenti patet ſex dari modos, quibus Circulus Tangens ad duos datos circulos in variis caſubus duci posſet; hos vero modos dicemus ordines. (*)

1. Circulus Tangens convexitate tangit, circulorum datorum convexitates.
2. Circulus Tangens concavitate tangit, circulorum datorum convexitates.
3. Circulus Tangens convexitate tangit, circulorum datorum concavitates.
4. Circulus Tangens convexitate et concavitate tangit, circulorum datorum convexitates.

5.

(*) Quia pro circulo et linea recta datis, minor numerus ordinum Circulorum Tangentium et caſus tantum duo occurrunt ſitus relativi, eorum annumerationem hic omiſi, ne confuſio exinde oriretur: notandum vero in hac enumeratione omnes adesſe caſus posſibiles, eos vero ſimul nusquam in caſu dato occurrere.

5. Circulus Tangens convexitate tangit, unius circuli dati concavitatem, alterius convexitatem.

6. Circulus Tangens concavitate ſua tangit, unius circuli dati convexitatem, convexitate ſua alterius concavitatem.

Hisce ita conſtitutis, varios hos Circulos Tangentes dicemus ordinis primi, ſecundi, etc. ſecundum hanc enumerationem, quia haec diſtinctio facilis est, et diverſis aliquando curvis dare locum varios ordines, dein patebit.

§. 3.

In his exponendis ſequenti modo pergere propoſitum est: ut prius ſpectemus Circulos Tangentes pro circulo et data linea recta, dein pro circulis aequalibus, tandem pro inaequalibus datis, atque pro ſingulis varias poſitiones relativas conſideremus: tum vero recapitulationem addamus, atque corollaria quaedam et conſiderationes quasdam de curvarum deſcriptione earumque connubio.

CAPUT SECUNDUM.

DE LINEA CENTRORUM CIRCULORUM TANGENTIUM CIRCULUM DATUM ET LINEAM RECTAM.

§. 4.

Prout linea data recta ſit ſita extra circulum datum, vel circulum datum ſecet, diſtinguimus duos caſus; prius vero conſideramus caſum ſi linea ſit extra circulum data, dein ubi linea ſecet circulum datum.

Sit

Sit FROQ circulus datus (Fig. 1.) et extra eum linea recta EZ quantumvis prolongata; ſitque FN linea centralis.

Est FR radius circuli dati et RN minima rectae datae a circuli peripheria diſtantia. Sumatur in RN punctum M, taliter conſtitutum, ut ſit $MR = MN$; patet ex puncto M cum radio MR posſe deſcribi Circulum Tangentem:, porro, quia centra Circulorum Tangentium necesſario ab utraque parte lineae centralis FN aequali modo ſita ſunt, potest MF prolongata, ſi necesſe fuerit, conſiderari, tanquam axis curvae, in qua illa centra erunt ſita, dividens curvam in duas partes aequales, vel potius uti axis ita conſtitutus, ut puncta curvae relative ad hunc axin aequaliter ſita ſint; erit porro punctum M ipſius curvae vertex; quare ab M et in axi MF abſcisſae computari debebunt.

Sint d et D puncta in radiis productis Fd et FD, taliter conſtituta, ut poſitis de et $DE \perp EZ$, erunt $de = dO$ et $DE = DQ$ et d et D centra Circulorum Tangentium, ex d nempe cum radio de et ex D cum radio DE.

Dimittantur porro ex d et D perpendicularia dl et DL ad lineam centralem vel axin curvae quaerendae; erunt dl et DL ordinatae, Ml et ML abſcisſae pro punctis d et D.

Erit $dl^2 = dF^2 - Fl^2$. (v. sw. II, 16 coroll. 2.)

$dF = FO + Od = FR + de = FR + lN$, quia $\angle l = \angle N = \angle e = \angle d = \llcorner$ (v. sw. I, 31.)

$dF = FR + lM + MN = FR + lM + MR$.

$dF = FM + lM$. Hinc $dF^2 = (FM + lM)^2$.

$Fl = FM - Ml$. Hinc $Fl^2 = (FM - Ml)^2$.

$dl^2 = (FM + lM)^2 - (FM - Ml)^2$. ex praeced.

$dl^2 = FM^2 + Ml^2 + 2FM, Ml - FM^2 - Ml^2 + 2FM, Ml$.

$dl^2 = 4\ FM, Ml$.

eodem modo et $DL^2 = FD^2 - FL^2$.

$FD = FQ + QD = FR + DE = FR + LN$. (v. sw. I, 31.)

$$FD = FR + LM + MN = FR + LM + MR = FM + LM.$$
$$\text{et } FL = FM - LM.$$

$$DL^2 = (FM + LM)^2 - (FM - LM)^2$$
$$\text{vel } DL^2 = 4\,FM,\,ML.$$

Sic pro omnibus punctis curvae, vel pro centro quovis Circuli Tangentis, eadem illa lex constabit, quod sit quadratum ordinatae aequale quater F M multiplicato per abscissam correspondentem: ea vero lex est Parabolae cujus focus sit in F, et cujus vertex sit in M situm; nam F M tunc erit distantia foci a vertice $= \frac{1}{4}$ parameter $= a$, et pro omnibus curvae punctis, posita ordinata quacumque $= y$, et abscissa correspondente $= x$, erit $y^2 = 4\,a\,x = p\,x$. cf. v. SWINDEN *Posit. Phys. Introd.* 57. B. Hinc evidenter patet centra omnium Circulorum Tangentium ad circulum datum, et datam rectam extra circulum positam, esse sita in Parabola, cujus focus est circuli dati centrum, vertex vero in linea centrali, et quidem ad medium lineae minimae a circuli peripheria ad rectam perpendiculariter ductae (v. sw. V. 11). Haecce vero duo puncta Parabolam determinant, adeoque conscribi potest linea centrorum pro hoc casu quaesita.

§. 5.

Superest ut alterum spectemus casum, ubi data linea recta secet circulum datum: re vera autem hic casus a praecedente non differt; quia vero singulos casus spectare nostrum propositum est, atque praeterea hoc in casu duae lineae centrorum Circulorum Tangentium dantur, fusius et haec considerabimus.

Sit datus Circulus F Z C B... (Fig. 2.), et linea recta X L, quantum vis producta, circulumque datum quoquo modo secans; et sit Z M n linea centralis: duo aderunt Circulorum Tangentium ordines, qui nempe convexitate, circuli dati concavitatem et

qui

qui ejus convexitatem tangunt. Hi ordines vero ſeparari nequeunt, quia centra Circulorum convexitatem Tangentium circuli dati, a parte lineae XL, quae est verſus A, ſunt in eadem curva ſita, quam centra circulorum, qui concavitatem tangant, ſintque ſiti verſus partem lineae XL, quae est verſus r, et vice verſa. Quare perſpicuum est duas hic dari curvas ſe invicem decusſantes in punctis W et H, ubi data recta ſecat circuli dati peripheriam; hae curvae ſeparatim jam erunt examinandae.

§. 6.

Si d ſit punctum in MZ taliter conſtitutum, ut ſit $dM = dZ$, erit d centrum Circuli Tangentis, cujus radius est aequalis $dZ = dM$; ſimul vero patet dFn esſe axin curvae quaerendae, circa quem puncta curvae aequaliter erunt ſita, ad quem ergo et ordinatae erunt dimittendae, atque esſe d verticem curvae, unde abſcisſae computandae.

Si porro in radio FC asſumatur punctum a, aequidiſtans a circuli circumferentia et a linea XL, vel ut ſit $aV = aC$ poſito $aV \perp ML$, erit a centrum Circuli alicujus Tangentis, cujus radius $= aC$.

Ex a dimittatur $aN \perp MZ$, erit dN abſcisſa et aN ordinata curvae eritque $aN^2 = aF^2 - FN^2$. (v. sw. II, 16, cor. 1.)
$aF = FC - Ca = FC - aV = FZ - NM$. (v. sw. I, 31.)
$aF = Fd + dZ - NM = Fd + dM - NM = Fd + dN$
et $FN = Fd - dN$.

$$aN^2 = (Fd + dN)^2 - (Fd - dN)^2$$
$$= Fd^2 + 2Fd, dN + dN^2 - Fd^2 + 2Fd, dN - dN^2.$$
$$aN^2 = 4Fd, dN.$$

vel uti ſupra, punctum a ſitum est in Parabola, cujus focus est F, cujus vertex d, et cujus parameter $= 4dF$.

Si porro producatur radius FE, et in eo asſumatur punctum

A,

A, aequidistans a circuli peripheria et data linea recta, vel ut sit $AE = AL$ posito $AL \perp XL$, erit A centrum Circuli Tangentis, cujus radius aequalis $AE = AL$; dimittatur ex A perpendicularis ad lineam centralem, vel sit $An \perp ZMn$; erit $An^2 = AF^2 - Fn^2$. (v. sw. II, 16, cor. 1.)

$AF = FE + AE = FZ + AL = FZ + nM$. (v. sw. I, 31.)

$AF = nM + Fd + dZ = nM + Fd + dM = Fd + dn$

et $Fn = dn - Fd$.

$An^2 = (Fd + dn)^2 - (dn - Fd)^2 = 4\,Fd, dn.$

vel punctum A est situm in Parabola, cujus focus est F, vertex vero d, vel cujus parameter $= 4\,dF$.

Hinc patet puncta a et A in eadem Parabola esse sita; quia vero haec demonstratio pro omnibus punctis valet, quae centra sint Circulorum Tangentium internorum ab una parte lineae HL, externorumque ab illius opposita parte, perspicuum est omnia centra horum Circulorum Tangentium esse sita in Parabola eadem.

§. 7.

Eadem illa, quae in praecedente paragrapho fuere dicta, obtinent pro centris Circulorum Tangentium inverso modo sitorum.

Sit nempe D punctum in nZ taliter situm, ut $yD = DM$, erit D centrum Circuli Tangentis, DF axis curvae et D vertex; sumto in radio FG, puncto R, ut sit $RG = RV$, si $RV \perp ML$, erit punctum R denuo Circuli Tangentis centrum, et ducta $Rp \perp$ ad lineam centralem,

erit $Rp^2 = FR^2 - Fp^2$. (v. sw. II, 16, cor. 1.)

$RF = FG - GR = Fy - pM = FD + Dy - pM = Fd + DM - pM$.

$RF = FD + Dp$ atque $Fp = DF - Dp$.

$Rp^2 = (FD + Dp)^2 - (FD - Dp)^2 = 4FD, Dp.$

Itidem si in producto radio FB sumatur punctum r, ita ut sit

rL

$rL = rB$ si $rL \perp XL$, erit r Circuli Tangentis centrum; sique ex r dimittatur $rP \perp Zn$ erit $rP^2 = Fr^2 - FP^2$.

$Fr = FB + Br = Fy + rL = FD + Dy + PM = FD + DM + PM = FD + DP$.

et $FP = DP - FD$.

---

hinc rursus $rP^2 = (FD + DP)^2 - (DP - FD)^2 = 4FD, DP$. sequiturque in eadem Parabola esse sita puncta R et r, nempe in ea cujus focus sit F, et cujus parameter $= FD$, vertex vero in linea centrali situs; nam, pro omnibus centris Circulorum Tangentium possibilibus haec demonstratio valebit, et $Y^2 = 4aX = pX$ est aequatio Parabolae characteristica.

§. 8.

In genere igitur, si sit data linea recta, quovis modo sita, quantumvis prolongata, et datus circulus, centra omnium Circulorum Tangentium possibilium erunt sita in Parabolis, quarum parametri, Foci, axis directiones et vertices cogniti sunt, vel aliis verbis, erit Parabola linea centrorum Circulorum Tangentium ad circulum datum, et datam lineam rectam quocunque modo relative ad circulum sitam, et quantumvis prolongatam.

CAPUT TERTIUM.

DE CIRCULIS TANGENTIBUS PRO DUOBUS CIRCULIS AEQUALIBUS DATIS.

§. 9.

Ad circulos aequales datos, differentia situs est notanda, quippe quae differentibus Circulorum Tangentium ordinibus originem praebeat; erunt ergo casus diversi separatim spectandi. Circuli nempe dati sunt extra se invicem positi, vel se invicem secant: tertius casus non datur; nam quia aequales sunt circuli, unus alterum continere nequit: si vero se invicem tangant, revera sunt extra se invicem positi, et tanquam casus singularis hujus positionis erit talis situs considerandus (*).

Si circuli sunt extra se invicem positi, tres adsunt series Circulorum Tangentium diversi ordinis, nempe (†) primi α, secundi β et quarti γ ordinis, qui separatim erunt examinandi.

Si circuli aequales se invicem secent, dantur quatuor series Circulorum Tangentium diversi ordinis, nempe primi a, secundi b, tertii c et quinti d ordinis, quos iterum singulos spectabimus.

§. 10.

(*) Notandum vero, si circuli dati se invicem tangant, duos tantum oriri series Circulorum Tangentium, nempe primi et secundi ordinis, ordine quarto inpossibili reddito ex ipso attactu; atque eatenus differentia intercedit cum casu, ubi circuli sint extra se invicem positi. Ad circulos inaequales vero haec magis generaliter spectabuntur, ideoque ulterior horum disquisitio hoc loco praetermittitur.

(†) Cf. §. 2. in fine.

§. 10.

α. Sint CDHN et OBGL (Fig. 3.) duo circuli aequales extra ſe invicem poſiti et ML linea centralis producta ad circulorum peripherias, centra circulorum in C et O: ſumatur in linea CO punctum A, dividens CO in duas partes aequales, erit A centrum Circuli Tangentis primi ordinis; nam $AC = AO$ et $DC = OB$, hinc $AC - DC = AO - OB$, vel $AB = AD$; ſi porro ad punctum A erigatur linea recta ad CO perpendicularis, erit pro illius puncto quocunque E,
$AO = AC$, et $\angle EAC = \llcorner EAO = \llcorner$, ergo $EO = EC$. (v. sw. I, 21.) et demto radio, aequali ex hypotheſi, erit $EG = EH$ et E centrum Circuli Tangentis hujus ordinis (v. sw. V, 11.): ergo quodcumque punctum in linea FAE ſumtum, erit taliter ſitum, ut ſit centrum alicujus Circuli Tangentis hujus ordinis; et quia pro nullis punctis niſi in hoc linea ſitis posſet esſe $EH = EG$, patet, in hoc caſu, pro primo ordine Circulorum Tangentium centrorum lineam esſe rectam.

β. In eadem linea recta ſita ſunt centra Circulorum Tangentium ſecundi ordinis; nam quia

$$\begin{array}{ll} AC = AO & EO = EC \\ \underline{LO = CM} & \underline{OI = CK} \text{ (v. sw. V, 11.)} \\ AL = AM & EI = EK \end{array}$$

ergo perſpicuum, eandem rectam, EAF lineam esſe centrorum Circulorum Tangentium ſecundi ordinis pro circulis aequalibus datis.

γ. Non amplius vero ſita ſunt in linea recta centra Circulorum Tangentium quarti ordinis, qui concavitate et convexitate tangunt Circulorum datorum convexitates, nam ſi ſumatur in BM punctum R, dividens BM in duas partes aequales, vel ſit $BR = RM$, erit R quidem centrum Circuli Tangentis hujus ordinis cum radio RM; verum ſi ducatur NRP perpendicularis ad lineam centralem per punctum R, in hac recta nulla centra porro aderunt quaesita; requireretur enim, quod sumto in ea, puncto quocumque P, et ex P per C et O, transeuntibus lineis PO et PT esset PV = PT; id vero supposuisse esset absurdum; nam ducantur ex P, ad puncta ubi secat linea centralis circulorum datorum peripherias ab eadem parte, lineae PB et PM; quia RB = RM, et ∠ BRP = PRM = ∟, et PR = PR

est PB = PM, (v. sw. I, 21.)

PV < PB. PB = PM < PT. (v. sw. V, 10 et 11.)

PV < PT; unde sequitur lineam perpendicularem ad lineam centralem rectamque non esse centrorum quaesitam; aliam vero rectam assumere velle quam perpendicularem pro linea centrorum Circulorum Tangentium hujus ordinis aeque esset absurdum; quod vel ex eo patet, quod tunc ab utraque lineae centralis parte, centra quaesita non essent simili et analoga ratione sita.

Quia vero pro hoc ordine Circulorum Tangentium, circuli aequales in eodem casu versantur ac inaequales, linea centrorum quaesita illic loci indicabitur, ubi de eis erit sermo; quod vero hic, ne repetitioni inutili concedatur locus, omittimus. (*)

§. 11.

Secundus casus hic spectandus occurrit, si circuli aequales semetipsos secent, uti in (Fig. 4.): iterum varios ordines Circulorum Tangentium in hac positione circulorum singulos spectabimus.

a. Eodem modo res se habet pro primi ordinis Circulis Tangentibus, eorumque situ, ac in praecedente §. in *α* pro circulis aequalibus extra se invicem positis fuit monstrata. Punctum A in medio lineae centralis itidem est in medio intersectionis, et linea centrorum transit per puncta intersectionis peripheriarum circulorum datorum, quod necessario ita se habere facile visu est: erit tunc pro-

(*) Cf. IV. §. 15.

pro puncto quocumque E extra circulos in hac recta situm EY = EZ etc.

b. Et pro secundo ordine eadem adsunt, ac si circuli extra se invicem essent posita, et demonstratio eodem modo pergit; est pro puncto quocumque E: EO = EC, hinc et EI = EK.

c. Tertio ordini Circulorum Tangentium hic locus est, qui nempe convexitate tangit circulorum datorum, concavitates: est vero casus simplex, et pro circulis aequalibus in eadem recta ac praecedentium ordinum centra sunt sita Circulorum Tangentium hujus ordinis. Nam pro puncto quocumque in PN sumto, v. g. n est C'A' = OA; $\angle n$AO' = $\angle n$ AC = ⊾ et An = An. Hinc On = nC (v. sw. I, 21). Hinc Cr − nC' = Cq − On vel $nr = nq$; unde sequitur ex n tanquam centro Circulum Tangentem hujus ordinis cum radio nq posse duci; neque aliunde nisi ex hac linea posse centra desumi facile est visu.

Ergo eadem linea recta pro tribus ordinibus memoratis est linea centrorum Circulorum Tangentium, notandum tamen, 1°. quod pro *primo* ordine, omnia puncta in linea hac quantumvis producta sumi possunt, exceptis eis, quae in intersectione circulorum datorum PN sita sunt; 2°. quod pro secundo ordine, omnis lineae quaevis puncta assumi possunt uti centra; 3°. quod pro tertio ordine, ea tantum pars lineae assumi debeat, pro centris, quae est in intersectione circulorum datorum sita, nempe PN. Ubi ergo in linea dicta, cessant centra pro primo ordine, incipiunt ea pro tertio ordine; quare hucusque nulla differentia est cum casu praecedente, ubi circuli extra se invicem positi erant, nisi quod pro parte, tangantur circulorum datorum concavitates per circulos tangentes.

d. Alio modo res se habet cum ordine quinto Circulorum Tangentium. Sumatur enim in BM punctum X, taliter situm, ut sit XB = XM, erit X centrum Circuli Tangentis hujus ordinis quinti; si vero ex X erigatur UXT perpendicularis ad lineam centralem, haec linea recta non erit linea centrorum quaesita;

nam ſumatur in ea punctum quodlibet H, atque per H ducatur radius CHK, et ex H ad centrum circuli alterius O recta HO, ſecans circuli peripheriam in Q; requireretur ut esſet $HQ = KH$, ſi H centrum esſe posſet. Verum in $\triangle\, OXH$, $\angle OXH = \llcorner$ ex hypotheſi. Hinc $\angle X > \angle H$.

et $HO > XO$ (v. sw. I, 15, corol. 4 et I, 17.)

$$\begin{array}{l} OQ = OB \\ \hline HQ > XB \end{array}$$

et quia $XB = XM$ est $HQ > MX$.

porro $CM = CK$

$$\begin{array}{l} CX < CH \\ \hline XM > HK \end{array}$$

(v. sw. I, 15 coroll. 14 et I, 17.)

hinc $HQ > HK$, ergo H centrum quaeſitum esſe nequit, quia vero nulla alia recta datur, in qua deſideratis ſatis fieri posſet, patet in curva haec centra debere esſe ſita: quae vero ſit illa curva hic praetermittimus, quia hoc in caſu, circuli aequales eodem modo ſe habent uti inaequales, de quibus in ſequente capite erit ſermo. (§. 22.)

CAPUT QUARTUM.

DE CIRCULIS TANGENTIBUS AD DATOS DUOS CIRCULOS INAEQUALES, QUOCUMQUE MODO SITOS.

§. 12.

Generaliore modo jam erit ſpectandus curſus centrorum Circulorum Tangentium ad circulos datos; in praecedente capite enim una relatio tantum erat data, quantum ad circulorum magnitudinem, ea nempe aequalitatis; hic vero omnes posſibiles adesſe posſunt:

funt: a priore ergo jam cernere est, fingularem tantum cafum esfe, problematis generalis, fi circuli dati fint aequales, quod et dein ulterius monftrabimus.

Quatuor potisfimum modis, varius esfe potest fitus circulorum datorum, quorum vero duo tantum esfentiales, omnes vero funt fpectandi, quia novis Circulorum Tangentium ordinibus originem praebere posfunt; funt autem fequentes:

A. Circuli dati funt extra fe invicem pofiti, fe invicem vero non tangunt.

B. Circulorum datorum major minorem continet absque contactu.

C. Circuli dati fe invicem fecant.

D. Circuli dati fe invicem tangunt quocumque modo.

De hisce variis cafubus jam feparatim agemus.

§. 13.

A. Uti vidimus de circulis aequalibus, fic et hoc in cafu pro circulis inaequalibus tres ordines Circulorum Tangentium funt dati: nempe *a* primus, *b* fecundus et *c* quartus ordo.

a. Sint (Fig. 5.) OBU*r*S et CD*tms*, duo circuli dati inaequales, quorum radii OB et CD vel R et *r*, centra vero in O et C: fitque MCOL linea centralis ad circulorum peripherias producta.

Si fumatur in BD, linea ducta e punctis ubi linea centralis fecat circulorum datorum peripherias, punctum A, taliter fitum ut fit AB = AD, erit A centrum Circuli Tangentis primi ordinis cum radio AB.

Porro, fi asfumta OC uti bafi, defcribatur △ OEC, taliter conftitutum, ut fit OE = R + *a* (*) et CE = *r* + *a*, erit

(*) Brevitatis caufa hic pro linea aliqua ad libitum fumta, adhibuimus figna *a* et *b*, quod in fequentibus continuo occurret: id vero notandum, non femerit punctum E centrum Circuli Tangentis, propter $ES = Em = EO - OS = EC - Cm = R + a - R = r + a - r = a$. Alterum adhuc defcribatur triangulum OFC, ut fit $OF = R + b$ et $CF = r + b$ erit itidem $Fs = Fs$, et F centrum alius Circuli Tangentis cujus radius $= R + b - R = r + b - r = b$.

Tria jam funt centra inventa Circulorum Tangentium, nempe A, E et F, quae necesfario fita funt in linea centrorum.

Hisce vero punctis lex generalis adest, nempe:

$$\begin{array}{lll} OA = R + BA = R + DA & OE = R + a & OF = R + b \\ AC \quad\quad = r + DA & CE = r + a & CF = r + b \\ \hline OA - AC = R - r. & OE - CE = R - r. & OF - CF = R - r. \end{array}$$

hinc, $OA - AC = OE - CE = OF - CF$; ficque pro centro quocumque, valet.

Ergo pofitio centrorum Circulorum Tangentium primi ordinis est talis, ut fit differentia linearum pergentium a centro quocumque ad centra circulorum datorum femper aequalis differentiae radiorum circulorum datorum ($R - r$): unde patet centra Circulorum Tangentium esfe fita in curva, cujus puncta funt taliter conftituta, ut differentia linearum a puncto quocumque ad duo alia puncta fixa ducta (centra circulorum datorum) fit conftans: vel haec centra esfe fita in Hyperbola, (cf. v. SWINDEN Pofit Phyfic. Introduct. §. 69. cujus foci funt O et C, et pro qua focorum diftantia $= OC$, differentia vero conftans aequalis differen-

femper omnes valores posfibiles pro a et b asfumi posfe, fed limitibus faepe eos circumfcriptos esfe; hi limites vero femper pendent ex eo, quod triangulum fecus foret imposfible ex conditione, qua conftruitur triangulum, cf. v. SWINDEN I, 19; continuo ergo addam hos limites pro valoribus a et b. In hoc cafu unus tantum est limes; requiritur nempe ut fumantur a et b majores quam BA, fecus enim bafis trianguli OC esfet $> R + r + 2a$. Quod fieri nequit, ex conditione, qua triangulum defcribitur. (v. sw. I, 19.)

rentiae radiorum circulorum datorum (*); porro punctum A erit Hyperbolae vertex et P illius centrum, si $PO = PC$. Hyperbolae vero alter ramus aderit si circuli fuerint permutati, tuncque determinata fuerint centra pro Circulis Tangentibus hujus ordinis. Sic v. g. in puncto X erit secundi rami vertex, si sumatur $OX = CA$.

§. 14.

b. Pro Circulis Tangentibus secundi ordinis analogo modo agendum est: dividatur ML in duas partes aequales in X, vel sit $MX = LX$, patet in X esse situm, centrum Circuli Tangentis duos datos circulos cum radio MX. Si porro ex M et L sumatur linea quaevis a longior quam LX (†) in linea centrali, et ex C et O cum hac linea $- r$ et $- R$, describatur triangulum ONC, erit $OR = a - R$ et $CR = a - r$, et productis RO et RC ad circulorum peripherias in I et Q erit $RI = OR + OI = a - R + R = a$.
et $RQ = RC + CQ = a - r + r = a$, vel $RI = RQ$, vel erit

(*) Distantiam focorum et differentiam constantem radiorum vectorum datas, definire Hyperbolam facile patet; tum et hisce datis inveniri posse axes, majorem et minorem Hyperbolae, sicque illa describi modis dein indicandis (Cap. V. §. 29.)

(†) Lineam a cujuscumque valoris posse sumi, sed non minoris quam LX, sequenti modo patet: ex conditione trianguli erit latus unum $= a - R$, alterum $= a - r$, tertium vero $= R + r + BD$.
ergo duo latera $= 2a - R - r$. est vero $LX = \frac{LM}{2} = \frac{2R + 2r + BD}{2}$
$LX = R + r + \frac{BD.}{2}$ jam si sumatur $a =$ vel $<$ LX: essent duo latera
$2a - R - r =$ vel $< 2R + 2r + BD - R - r$
$2a - R - r =$ vel $< R + r + BD$ vel $2a - R - r =$ vel $< OC$.
Quod fieri nequit. ex v. sw. I, 19.

erit R centrum Circuli Tangentis hujus ordinis (v. sw. V, 11.). Sit eodem modo et eadem conditione in triangulo ONC: ON $= b - R$ et CN $= b - r$; erit itidem, productis NO et NC; NO + OT $= b - R + R = b = b + r - r =$ NT $=$ NC + CK $=$ NK: eritque N centrum Circuli Tangentis. Pro centris vero quibusvis, X, N et R, generali illud valet respectu centrorum circulorum datorum, quod sit nempe

$$\begin{array}{l} CX = XM - CM = XL - r \\ OX = LX - OL = XL - R \\ \hline CX - OX = XL - r - (XL - R) = XL - XL + R - r = R - r. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{et } CN = a - r & \text{et } CR = b - r \\ \phantom{\text{et }} ON = a - R & \phantom{\text{et }} OR = b - R \\ \hline \phantom{\text{et }} CN - ON = R - r. & \phantom{\text{et }} CR - OR = R - r \end{array}$$

ergo $CX - OX = CN - ON = CR - OR$; vel differentia linearum ductarum e centris Circulorum Tangentium ad centra circulorum datorum est constans; vel omnia centra Circulorum Tangentium hujus ordinis, sunt sita in Hyperbola, cujus foci sunt centra Circulorum, hinc eorum distantia $=$ OC, et cujus differentia constans radiorum vectorum $= R - r$.

Patet porro hanc Hyperbolam esse illius, quae pro primo ordine Circulorum Tangentium fuit inventa, ramum oppositum. Si vero attendamus ad ea, quae illic de opposito ramo Hyperbolae fuere dicta, perspicuum est, centra Circulorum Tangentium secundi ordinis, pro circulis inaequalibus extra se invicem positis, coincidere cum centris Circulorum Tangentium primi ordinis, si circulorum datorum positio fuerit permutata; quod et modo inverso aeque valet. Convenientia analoga hinc obtinet pro linea centrorum Circulorum Tangentium primi et secundi ordinis, uti, si aequales essent dati circuli; tunc nempe in eadem recta sunt sita centra Circulorum Tangentium (§. 10), hic vero in ejusdem hyperbolae, ramis oppositis.

§. 15.

§. 15.

c. Pro Circulis Tangentibus quarti ordinis, qui nempe concavitate et convexitate tangunt circulorum datorum convexitates, linea centrorum fequenti modo invenitur.

Dividatur MB in duas partes aequales in α, vel fit $\alpha M = \alpha B$ erit α centrum Circuli Tangentis hujus ordinis cum radio αM; porro fi fumatur linea quaedam a (*), major quam $M\alpha$, et ex C cum $a - r$ et ex O cum $a + R$ defcribatur triangulum OoC fupra OC, erit producto oC ad d

$$oU = oO - OU = a + R - R = a.$$
$$oD = oC + Cd = a - r + r = a.$$

$oU = oD$, vel punctum o, centrum Circuli Tangentis quarti ordinis cum radio $oD = oU$.

Itidem fi fumto valore b fub eadem conditione ac pro a fuit dictum, fique ex C cum $b - r$ et ex O cum $b + R$ defcribatur fupra OC triangulum OcC, erit producto cC ad κ.

$$c\kappa = Cc + C\kappa = b - r + r = b.$$
$$cr = cO - Or = b + R - R = b.$$

Hinc $c\kappa = Cr$, et c itidem centrum Circuli Tangentis; est vero $C\alpha = M\alpha - MC = B\alpha - r$

$$O\alpha = B\alpha + BO = B\alpha + R$$

$$O\alpha - C\alpha = B\alpha + R - (B\alpha - r) = R + r$$

et $Oc = R + b$ $\qquad$ $Oo = R + a$

$$Cc = b - r \qquad Co = a - r$$

$$Oc - Cc = R + r \qquad Oo - Co = R + r.$$

(*) Est $BM = 2r + BD$, ergo $M\alpha = \frac{2r + BD}{2}$ et OC aequalis $R + r + BD$; duo vero caetera trianguli confcribendi latera fimul fumta $= a - r + a + R = 2a + R - r$. Si ergo fumeretur $a =$ vel $< M\alpha$, essent $2a + R - r =$ vel $< 2r + BD + R - r$, vel $2a + R - r =$ vel $< BD + R + r$. vel $2a + R - r =$ vel $< OC$; quod fieri nequit ex v. s w. I, 19.

vel $O\alpha - C\alpha = Oc - Cc = Oo - Co$, vel patet esse differentiam linearum ductarum e centris Circulorum Tangentium hujus ordinis ad centra circulorum datorum, constantem; vel ea centra esse sita in Hyperbola cujus foci sunt centra circulorum datorum, et pro qua differentia radiorum vectorum constans aequalis sit summae radiorum circulorum datorum $= R + r$, et cujus vertex sit situs in α.

Permutatis vero circulis oppositus ramus Hyperbolae inveniretur pro centris Circulorum Tangentium hujus ordinis.

Perspicuum etiam ejusdem ordinis Circulos Tangentes adesse, si Circulus Tangens concavitate tangit Circulum $OBUr$, nam describatur, uti supra $\triangle\ OfC$, ita ut sit $Of = b - R$ et $Cf = r + b$, erit, producto fO ad Z, $fZ = ft$, ergo f centrum erit Circuli Tangentis, itidemque e, si OeC eadem conditione descriptum sit triangulum; tum, sumto H ad medium LD, erit et centrum Circuli Tangentis in H: erit vero $CH - OH = CD + DH - LH + LO = R + r$ et $Cf - fO = R + r = Ce - eO$. Unde patet in Hyperbola itidem haec centra esse sita, et quidem in ramo prioris opposito; nam foci sunt iidem et differentia constans radiorum vectorum aequalis est. Hinc vero et sequitur, duos series centrorum Circulorum Tangentium quarti ordinis, exhibere lineas centrorum hyperbolicas; et quidem in ejusdem Hyperbolae ramis oppositis esse sita centra pro diversis seriebus: porro lineam centrorum Circulorum Tangentium hujus ordinis, pro datis circulis inaequalibus, ita ut v. c. tangat circulum O, concavitate, circulum C vero convexitate, eandem esse ac si tangat Circulum O convexitate, et circulum C concavitate, si circuli fuerint permutati.

Quia vero haec solutio generalis pro circulis cujuscumque radii, videre est itidem in Hyperbola esse sita centra Circulorum Tangentium quarti ordinis pro circulis aequalibus; illic vero est $R = r$. Hinc differentia constans radiorum vectorum $= 2R = 2r$ (§. 10.)

§. 16.

§. 16.

B. Si sint dati duo circuli inaequales, quorum major continet minorem, vario modo situs circuli minoris relativus esse potest. Nam vel centra coincidunt, vel centra non coincidunt, simul vero circuli se invicem non tangunt: hi duo casus jam separatim examinandi, differentia hinc enim oritur in linea centrorum Circulorum Tangentium, quamvis haud essentialis, hic tamen non praetermittenda.

Sive vero coincidant centra circulorum datorum, sive non coincidant, duo ordines Circulorum Tangentium occurrunt, quintus nempe et sextus, pro quibus variis ordinibus separatim lineam centrorum examinabimus.

§. 17.

Sint duo circuli dati B F K et A D P S, (Fig. 6.) quorum centrum commune sit in O: si quaeratur Circulus Tangens quinti ordinis, qui nempe convexitate tangit unius circuli dati convexitatem, alterius concavitatem; ducatur radius O B, sitque in eo punctum C taliter situm ut $BC = CA$ erit C centrum Circuli Tangentis quaesiti; si porro ex O cum radio $OC = BO - BC = R - \left(\frac{R - r}{2}\right)$

$OC = \frac{2R - R + r}{2} = \frac{R + r}{2}$ describatur ⊙ O C E, dico hunc circulum esse lineam centrorum Circulorum Tangentium hujus ordinis; nam per punctum illius quodcunque E, ducto radio O F erit $ED = CA = BC = EF$.

Eodem modo pro sexto ordine Circulorum Tangentium invenitur linea centrorum; sit punctum N ad dimidium P B, erit N Circuli Tangentis quaesiti centrum cum radio N P.

si porro ex O uti centro, cum radio $ON = PN - OP = \frac{R + r}{2} - r$

$ON = \frac{R - r}{2}$ ducatur circulus ONR, ille erit linea centrorum desiderata; nam sumto quocumque hujus circuli puncto R et ducta recta FRS transeunte per centrum circuli, erit semper $RS = NP = NB = RF$.

Ergo pro utraque Circulorum Tangentium ordine erit linea centrorum circulus. Singulare autem quod hic obtinet est, omnes Circulos Tangentes ejusdem ordinis esse aequales.

Quia vero in circulo omnia centra Circulorum Tangentium sunt sita hic casus est talis, ut pro eo, linea centrorum, sensu Geometrico strictiore inveniri posset. (v. sw. Introd. ad Problemata.)

§. 18.

Si circulorum datorum centra non coincidant, ordo quintus Circulorum Tangentium hoc fere modo se habet.

Sit (Fig. 7) FAP circulus minor, cujus radius $FA = r$, inclusus circulo majore fHN, cujus radius $fH = R$, sitque HI linea centralis producta ad circuli majoris circumferentiam: si sint A et O puncta, ubi linea centralis secat circumferentiam circuli minoris, sumanturque in HA et OI, duo puncta g et G taliter sita, ut sit $gH = gA$, et $GO = GI$, erunt haec puncta G et g centra Circulorum Tangentium hujus ordinis.

Si porro assumantur aliae quaedam lineae, (*) a et b, quae vero sint

(*) Casus hic occurrit ubi ex conditione, qua triangulum construitur necessario duo sunt limites pro a, ultra quos valor ipsius excedere nequit, nisi triangulum esset impossibile; sumendus nempe est $a > GI$ et $< gA$.

Est sumendus $a > GI$, nam

$GI = \frac{FI - FO - Ff}{2} = \frac{R - r - Ff}{2}$, sique sumeretur $a = \text{vel} > GI$ esset $R - a = > R - \left(\frac{R - r - Ff}{2}\right) = > \frac{R + r + Ff}{2} = > r + \frac{R - r + Ff}{2}$

$= > r + Ff + \frac{R - r - Ff}{2} = > Ff + r + a$

vel

fint majores quam GI et minores quam Hg, atque fupra fF defcribatur $\triangle\ fEF$, ita conftitutum ut fit $EF = a+r$ et $Ef = R - a$, erit E, centrum Circuli Tangentis, nam, producto fE ad circuli peripheriam in K est, $EK = fK - fE$ $EK = R - (R - a) = a$, et $Ek = EF - Fk = r + a - r = a$. ergo $EK = Ek = a$; fic et valet pro puncto D, fi $DF = b + r$ et $Df = R - b$, estque tunc rurfus $DN = DP = b$.
Quatuor fic adfunt puncta inventa, quae funt centra Circulorum Tangentium hujus ordinis, nempe G, E, D et g, quaeque dum omnia eadem lege inveniuntur, lineam centrorum determinant.
Pro omnibus vero hisce punctis:

$$\begin{array}{ll}
fg = fH - \underline{\underline{Hg}} & FG = FO + \underline{\underline{OG}} \\
Fg = FA + \overline{Ag} & fG = fI - \overline{IG} \\
\hline
fg + Fg = fH + FA = R + r. & FG + fG = FO + fI = R + r \\
FE = r + a & fD = R - b \\
fE = R - a & FD = r + b \\
\hline
FE + fE = R + r & fD + FD = R + r
\end{array}$$

praeterea $FG = FO + OG = FO + \frac{OI}{2} = FO + \frac{fI - fF - FO}{2}$

$$FG = \frac{2FO + fI - fF - FO}{2}$$

$$FG = \frac{FO + fI - fF}{2} = \frac{R + r - fF}{2}$$

et

vel $R - a$ unum latus trianguli esfet $=$ vel $>$ quam $Ff + (r + a)$ quae est fumma duorum caeterorum laterum, quod fieri nequit.

Si vero asfumeretur $a =$ vel $> Hg$, in partem contrarium peccaretur; nam $Hg = fH = fA - Hg$ vel $2Hg = fH - fA = fH - FA + Ff$ $Hg = \frac{R - r + Ff}{2}$, esfetque $R - a + Ff = < R + Ff - \left(\frac{R - r + Ff}{2}\right)$ $= < \frac{R + r + Ff}{2} = < \frac{R - r + Ff}{2} + r = < r + a$; vel esfet fumma duorum laterum trianguli $(R - a)$ et $Ff =$ vel $< r + a$, qui valor est tertii lateris; quod fieri nequit ex v. SWINDEN I, 19.

$$\text{et } fg = f\text{H} - \text{H}g = f\text{H} - \frac{\text{AH}}{2} = f\text{H} - \left(\frac{\text{FH} - \text{FA}}{2}\right)$$

$$fg = f\text{H} - \left(\frac{\text{F}f + f\text{H} - \text{FA}}{2}\right)$$

$$fg = \text{R} - \left(\frac{\text{F}f + \text{R} - r}{2}\right) = \frac{2\text{R} - \text{F}f - \text{R} + r}{2} = \frac{\text{R} + r - \text{F}f}{2}$$

hinc $\text{F G} = fg$, et ab utraque parte additi $\text{F}f$; $\text{F}g = f\text{G}$

$$\text{et } f\text{G} + fg = \frac{\text{R} + r - \text{F}f}{2} + \text{F}f + \frac{\text{R} + r - \text{F}f}{2}$$

$$f\text{G} + fg = \frac{2\text{R} + 2r + 2\text{F}f - 2\text{F}f}{2} = \text{R} + r = g\text{G}.$$

Ergo valet pro centro quovis Circuli Tangentis, ut ſit ſumma linearum ductarum ex hoc centro ad centra circulorum datorum, aequalis $\text{R} + r = \text{G}g$, vel ſit conſtans; centra vero in linea centrali ſita, aequidiſtent ab his centris datis ($\text{F G} = fg$): unde patet lineam centrorum Circulorum Tangentium hujus ordinis eſſe Elipſin, cujus foci ſunt F et f, centra circulorum datorum, cujus axis major $= g\text{G} = \text{R} + r$, centrum vero in C, ſi ponatur $\text{C}f = \text{CF}$, ſuntque $f\text{E}$ et FE illius radii vectores, quorum ſumma aequalis est axi majori. cf. Cl. v. SWINDEN *Poſ. Phyſ. Introd.* §. 61. F.

§. 19.

Superest ut videamus de Circulis Tangentibus ſexti ordinis, qui nempe concavitate tangunt circuli unius dati convexitatem, convexitate vero alterius concavitatem.

Si dividantur OH in duas partes aequales in B et AI in b, erunt $\text{BH} = \text{BO}$ atque $\text{A}b = b\text{I}$, hinc B et b, centra Circulorum Tangentium hujus ordinis, cum radiis BH et bI. Si porro as-

aſſumantur lineae quaevis a et b (*), majores quam Ab et minores quam BO, atque ſupra Ff deſcribatur triangulum Fdf, ita conſtitutum, ut ſit $Fd = a - r$ atque $fd = R - a$, dico punctum d itidem eſſe centrum Circuli Tangentis hujus ordinis; nam producto dF ad U, et fd ad n, vel ad circulorum circumferentias;

$$\text{erit } dn = fn - fd = R - (R - a) = R - R + a = a$$
$$\text{et } dU = dF + FU = a - r + r = a$$

ergo $dn = dU$, vel d centrum quaeſitum. (v. sw. V, 11.)

Si

(*) Neceſſario aſſumi debent a et $b > Ab$ et $< BO$, ex conditione, qua ſupra Ff conſtruuntur triangula feF, fdF etc.

eſt enim $BO = FO + Ff + fB = FO + fF + fH - HB$

$BO + HB = 2BO = FO + fF + fH = R + r + fF$

$$BO = \frac{R + r + fF}{2}$$

hinc ſi ſumeretur $a =$ vel $> BO$ eſſet, $R - a + Ff = < R - \left(\frac{R + r + Ff}{2}\right) + Ff$

$$R - a + Ff = < \frac{2R - R - r - Ff + 2Ff}{2} = < \frac{R - r + Ff}{2}$$

$$R - a + Ff = < \frac{R + r + Ff}{2} - r = < a - r$$

vel eſſet ſumma duorum laterum $((R - a) + Ff)$ aequalis vel minor tertio latere trianguli $(a - r)$. Quod fieri nequit ex v. sw. I, 19.

Itidem $Ab = AI - bI = Af + fI - bI$

$Ab + bI = 2Ab = Af + fI = AF - fF + fI = R + r - fF$

$Ab = \frac{R + r - Ff}{2}$. Hinc, ſi ſumeretur $a =$ vel $< Ab$

eſſet $a - r + Ff = < \frac{R + r - Ff}{2} - r + Ff = < \frac{R + r - 2r - Ff + 2Ff}{2}$

$$a - r + Ff = < \frac{R - r + Ff}{2} = < \frac{2R - R - r + Ff}{2} = < R - \left(\frac{R + r - Ff}{2}\right)$$

$$a - r + Ff = < R - a$$

vel eſſet ſumma duorum laterum $((a - r) + Ff)$ aequalis vel minor tertio latere trianguli $(R - a)$, quod fieri nequit ex v. sw. I, 19. ergo aſſumendi valores a et b etc. majores Ab, minoresque quam BO.

Si eodem modo fiat triangulum feF, erit et e centrum Circuli Tangentis, posito nempe $Fe = b - r$ et $fe = R - b$.

Quatuor ergo adſunt jam puncta b, e, d, B, centra Circulorum Tangentium, atque quot volueris, inveniri posſent; est vero

$$\begin{array}{ll} FB = \underline{\underline{OB}} - FO & Fb = \underline{\underline{Ab}} - AF \\ fB = -\overline{HB} + fH & fb = -\overline{Ib} + If \\ \hline FB + fB = fH - FO = R - r. & Fb + fb = If - AF = R - r. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Fe = b - r & Fd = a - r \\ fe = - b + R & fd = - a + R \\ \hline Fe + fe = R - r & Fd + fd = R - r \end{array}$$

vel $FB + fB = Fb + fb = Fe + fe = Fd + fd$

porro $Fb = FI - Ib = fI - fF - \frac{IA}{2} = fI - fF - \left(\frac{If + fA}{2}\right)$

$Fb = fI - fF - \left(\frac{If + FA - Ff}{2}\right) = R - Ff - \left(\frac{R + r - Ff}{2}\right)$

$Fb = \frac{2R - 2Ff - R - r + Ff}{2} = \frac{R - r - Ff}{2}$

et $fB = fH - HB = fH - \frac{HO}{2} = fH - \left(\frac{Hf + Ff + FO}{2}\right)$

$fB = R - \left(\frac{R + r + Ff}{2}\right) = \frac{2R - R - r - Ff}{2} = \frac{R - r - Ff}{2}$

ergo $Fb = fB$

$$\begin{array}{ll} Ff = Ff & \text{et } FB + fB = fb + fB = Bb = R - r \\ \hline fb = FB & \text{et } Fb + fb = Fb + FB = Bb = R - r \end{array}$$

Ergo ſumma linearum ductarum ex quovis centro Circuli alicujus Tangentis hujus ordinis, ad centra circulorum datorum est $= R - r$, adeoque conſtans; atque centra linea centrali ſita, aequidiſtant a centris circulorum datis: ideo omnia centra Circulorum Tangentium ſita ſunt in Ellipſi, cujus foci ſunt centra circulorum datorum, cujus axis major aequalis differentiae radiorum circulorum datorum, centrum vero ſitum in C, ſi $Cf = CF$;

erunt-

eruntque fd et Fd radii vectores quorum summa constans aequalis axi majori.

Notanda adhuc analogia quae obtinet sive centra coincidant circulorum datorum, sive non coincidant.

Ubi centra coincidunt, repertus est radius circuli, qui erat linea centrorum Circulorum Tangentium quinti ordinis, aequalis $\frac{R + r}{2}$ (§ 17), ergo diameter $= R + r$.

Si centra non coincidant, axis major ellipseos, qui pro eodem ordine Circulorum Tangentium est linea centrorum, fuit itidem inventus $= R + r$ (§ 18)

Ubi centra coincidunt, pro linea centrorum Circulorum Tangentium sexti ordinis fuit inventus radius $= \frac{R - r}{2}$, ergo diameter $= R - r$ (§ 17.)

Si centra non coincidant, pro eodem Circulorum Tangentium ordine, est ellipseos axis major $= R - r$; uti mox demonstratum. Sive igitur coincidant centra, sive non coincidant, erit semper diameter maximus curvae, quae est linea centrorum ejusdem valoris relative ad radios datos, pro eodem ordine Circulorum Tangentium.

§. 20.

C. Si circuli dati inaequales se secent, ut et apud aequales fuit dictum (§. 11), quatuor dantur Circulorum Tangentium ordines. Est vero hic casus complicatio praecedentium de quibus in A et B sermo fuit; excipiuntur tamen duo ordines quorum conditio est quod circulorum circumferentiae se non secent, nempe ordo quartus et sextus; ex ipsa vero sectione oritur novus ordo nempe tertius; quare ordines Circulorum Tangentium supersunt hic spectandi, primus, secundus, tertius et quintus.

Primo igitur videamus de ordine primo et tertio conjunctim. Eadem hic obtinent pro primo ordine Circulorum Tangentium ac in (A § 13 a) fuit demonſtratum; centra nempe ſita ſunt in Hyperbola, pro qua differentia conſtans radiorum vectorum eſt $= R - r$, et foci in centris circulorum datorum F et f (fig. 8). Perſpicuum vero, quia conditio hujus ordinis Circulorum Tangentium eſt, quod convexitate ad convexitates appulſant, horum centra necesſario esſe ſita extra circulos datos, v. g. in Z: N: etc.

In ea vero Hyperbolae parte, in qua non ſunt ſita centra Circulorum Tangentium primi ordinis, adſunt centra pro Circulis Tangentibus tertii ordinis. Eſt v. g. (*) $f N = R + a$ et $F N = r + a$, erit $fM - FN = R + a - (r + a)$ $fN - FN = R + a - a - r = R - r$.

Sumatur porro punctum U, ita conſtitutum ut ſit $fU = R - b$ et $FU = r - b$, erit productis fU et FU ad R et r, $UR = fR - fU = R - (R - b) = b$ et $Ur = Fr - FU = r - (r - b) = b$.

Ergo punctum U, centrum Circuli Tangentis tertii ordinis cum radio $Ur = UR$; ſumto porro in linea centrali puncto ν, ita, ut ſit $\nu A = \nu I$, itidem erit ν centrum Circuli Tangentis tertii ordinis;

verum $FU = r - b$ $\qquad$ $f\nu = fI - \nu I$

$fU = R - b$ $\qquad$ $F\nu = AF - \nu A$

$fU - FU = R - b - (r - b) = R - r$ $\qquad$ $f\nu - F\nu = fI - AF = R - r$

Unde patet centra hujus ordinis U et ν, esſe ſita in eadem Hyperbola, ac centra primi ordinis Circulorum Tangentium; ergo eadem hic obtinent, quae in (§ 11 c) fuere notata, quod nempe linea centrorum ſit eadem pro Circulis Tangentibus primi et tertii ordinis; ubi vero deſinunt adesſe centra pro hoc ordine, incipiunt pro illo.

§. 21.

(*) Valores pro a et b asſumendi derivantur ex eisdem, quae ad §. 13. fuere notata.

§. 21.

Supra (§ 14) fuit demonſtratum, centra pro ſecundo ordine Circulorum Tangentium esſe ſita in Hyperbolae, pro centris primi ordinis, ramo oppoſito; nam $a - r - (a - R) = R - b - (r - b)$, quicumque valor asſumitur pro a et b; et ſi centra circulorum datorum, relative ad radiorum magnitudinem ſibi ſint propriora, hoc equidem differentiam efficiet in curvatura Hyperbolae, ſemper vero Hyperbola hic remanet uti linea centrorum Circulorum Tangentium, quamdiu hic ordo est posſibilis. Ordo vero ſecundus tamdiu adeſt, quamdiu pars circuli dati extra circumferentiam alterius est ſita (§ 23. b); quomodo autem puncta curvae hujus inveniantur ſupra abundanter fuit monſtratum.

§. 22.

Pro ordine Circulorum Tangentium quinto, linea centrorum est Ellipſis in hoc caſu, aeque ac ſi circulus major minorem contineret absque contactu (§ 18).

Si ſumantur in IO et AK, duo puncta g et G, taliter ſita in linea centrali, ut ſit $GI = GO$ et $Kg = gA$ cum radiis gK et GO, ſi porro ſupra Ff conſcribatur $\Delta\, fFE$, ita ut ſit (*) $FE = a + r$ et $fE = R - a$, erit $EP = fP - fE$ $= R - R + a = a$.
et $El = FE - Fl = r + a - r = a$; ergo et E centrum Circuli Tangentis, et $fE + FE = R + r$.
porro $FG + fG = fI + IG + FO - OG = fI + FO = R + r$. etc.

Unde perſpicuum est centra Circulorum Tangentium quinti ordinis in hoc caſu etiam esſe ſita in Ellipſi, cujus foci ſunt centra circulorum datorum, et cujus axis major $= R + r = Gg$.

Differentia unica, quae intercedit in hoc caſu, cum eo, ubi circu-

(*) Valor ipſius a hic eidem legi ſubjectus, quae ad §. 18. fuit notata.

culus major continet minorem, in eo est, quod in Ellipſeos parte L G M Circuli Tangentes appulſent ad circuli, cujus centrum est f, convexitatem, ad circuli vero cujus Centrum est F, concavitatem: in caetera vero ejus parte L E g M, Circuli Tangentes appulſent ad circuli, cujus centrum est F, convexitatem, et ad circuli, cujus centrum est f, concavitatem in eo caſu; verum ubi ſe non ſecent circuli dati, unius circuli conſtanter convexitas, alterius vero concavitas tangatur.

Notandum porro, puncta L et M, ubi circulorum datorum circumferentiae ſe invicem ſecent, eſſe puncta per quae Hyperbola pro centris circulorum primi et tertii ordinis tranſit, itidemque Ellipſis pro centris Circulorum Tangentium quinti ordinis; ergo Hyperbola et Ellipſis hic ſe invicem quaſi decusſant: idemque obtinet pro ramo Hyperbolae oppoſito, in quo centra ſecundi ordinis Circulorum Tangentium ſita ſunt. Est enim,

$f\mathrm{L} + \mathrm{FL} = \mathrm{R} + r$ et $f\mathrm{L} - \mathrm{FL} = \mathrm{R} - r$ etc.

Ex hisce vero punctis L et M revera Circulus Tangens duci nequit, quia ſita ſunt in ipſis circulorum datorum circumferentiis; posſunt vero conſiderari, uti puncta, ubi centra variorum ordinum (primi, tertii et quinti) confluunt, vel uti limites ad quos hae ſeries Circulorum Tangentium tendunt. Eodem modo et Hyperbola pro ſecundo ordine Tangentium Circulorum, ſecat Ellipſin pro quinto ordine in duobus punctis, eaque puncta igitur ſunt talia, ut ex eis circulus tangens ſecundi et quinti ordinis duci posſit, variis radiis.

Patet vero lineam centrorum pro quinto ordine Circulorum Tangentium eſſe eandem, ſive circuli fuere aequales, ſive inaequales; ſi fuerint aequales dati, erit loco $\mathrm{R} + r$, axis major Ellipſeos $= 2\,\mathrm{R} = 2\,r$, vel aequalis diametro circuli dati erit nempe ſi asſumantur (Fig. 4.) puncta Z et X ad medium B M et L D.

$\mathrm{ZX} = \mathrm{ZB} + \mathrm{BX}$

$\mathrm{ZX} = \mathrm{ZB} + \mathrm{XM} = \mathrm{ZB} + \mathrm{ZL} = \mathrm{LB}$ (§. 11, d)

23.

§. 23.

D. Pauca addenda hic ſunt pro caſubus ubi circuli dati ſe tangant, quae quidem pro parte et pro circulis aequalibus valent; (§. 9.) unus modus attactus illic nempe tantum datur. Pro uti attactus est limes ſectionis, et poſitionis circulorum extra aut intra ſe invicem, ſic revera caſus hic est intermedius inter ea, quae fuere dicta ad A et C, vel ad B et C.

Duo vero adſunt caſus attactus ſeparatim conſiderandi:

a Convexitates circulorum datorum ad ſe invicem appulſant.

b Convexitas circuli minoris appulſat ad circuli majoris concavitatem; qui modus tangendi pro circulis aequalibus impoſſibilis.

a Si circuli OBU et CDT*ms* (Fig. 5.) fingantur ſibi tangere, ut nempe punctum D coincidat cum punctis A et B, diſpareatque linea BD, aderunt, ut in genere pro circulis extra ſe invicem poſitis, ordo Circulorum Tangentium primus et ſecundus; quartus vero non amplius aderit, quia puncta B et D confluunt; loco vero illius oritur quintus ordo Circulorum Tangentium, uti in eo caſu ubi circuli ſe invicem ſecent; linea centrorum vero non amplius est Ellipsis, ſed limes illius, linea recta, et quidem lineae centralis pars quae intra centra circulorum datorum continetur. Nam ſi asſumamus punctum aliquod in ea ſitum X erit $OX + XC = R + r$, hinc triangula ſupra OC cum $R - a$ et $r + a$ ſunt inposſibilia, nam $R - a + r + a = R + r$; vel posſet dici centra esſe tunc ſita in Ellipſi, cujus axis major ſit aequalis diſtantiae focorum, qualis vero non datur; abit enim tunc Ellipſis in lineam rectam.

b. Si (Fig. 7.) circulus minor FO*k*P fingatur tangere majorem *f*I*n*K, ita ut coincidant puncta O, G et I, vel diſpareat linea OI, poterunt duci Circuli Tangentes ordinis quinti uti (B §. 18) fuit demonſtratum pro caſu, ubi circulus major continet minorem absque contactu; ordinis ſexti Circuli Tangentes vero ipſo attactu redduntur imposſibiles; oriuntur vero loco illius novi duo

or-

ordines, nempe primus et fecundus, cujus vero centra non fita in Hyperbola fed in ejus limite, linea recta; nam ex hypothefi est $fF = R - r$, hinc triangulum fupra Ff defcribi nequit, cujus unum latus $= R + a$, alterum $= r + a$, esfet enim $(R - r) + (r + a) = R + a$; quod fieri nequit (v. sw. I, 19.) itidemque non defcribi potest triangulum fupra Ff cujus unum latus $= a - r$, alterum $= a - R$, nam $Ff = R - r$; hinc esfet $(R - r) + (a - R) = (a - r)$ quod fieri nequit ex eodem principio. Ergo puncta quaefita erunt fita in linea recta, et quidem in lineae centralis productione, ab utraque parte; pro primo ordine nempe omnia puncta extra circulum fita verfus P, pro fecundo ordine omnia puncta fita in linea centrali ad alteram partem puncti F, uti B, g, H etc: nam v. g. asfumatur punctum quodcumque P, erit $PO = PI$ quia I et O coincidunt, et PI brevisfima linea ex P ad circulum fIn ducta; estque $fP - FP = Ff = R - r$.

Sique ab alia parte asfumatur punctum quodvis g, erit $gO = gI$, ex O et I coincidentibus; fimul vero $Fg - fg = Ff = R - r$: vel erunt fita haec centra in Hyperbola, cujus focorum diftantia est aequalis differentiae conftanti radiorum vectorum, tunc vero Hyperbola non amplius adest, fed linea recta.

CAPUT QUINTUM.

RECAPITULATIO, COROLLARIA ET ADDENDA.

§. 24.

Omnes feparatim tractati jam funt cafus et modi, quibus circulus, circulum datum et lineam rectam datam, nec non circu-

los

los duos datos tangere posſet. Supereſt ut generaliore modo reſultata ex his deſumamus, atque inter ſe invicem conferamus. Primo vero ſermo nobis erit de linea centrorum Circulorum Tangentium ad circulum et datam rectam, tum de linea centrorum Circulorum ad circulos duos datos Tangentium, dein vero modos aliquos deſcribendi dictas curvas proponemus, tandem curvas inter ſe invicem, et prouti ex Coni ſectione derivantur, conſiderabimus.

§. 25.

Si ſit data linea recta et circulus, erit in genere linea centrorum Circulorum Tangentium Parabola; (Cap. III.) ſint M, d, et D talia centra in Parabola ſita (Fig. 1.), est $DE = DQ$.

$de = dO$ et $MN = MR$,

hinc, $Fd - de = Fd - do = FO = R$

$FM - MN = FM - MR = FR = R$

$FD - DE = FD - DQ = FQ = R.$

vel differentia conſtans est linearum e quovis centro ductarum ad centrum circuli dati, et perpendicularium ad datam rectam dimisſarum; centra vero ſita ſunt in Parabola, hinc quicquid pro quovis centro valet, et pro omnibus punctis Parabolae valet; ergo ſequens dari poteſt Parabolae definitio:

„ Si ſit data linea recta (EZ), quantumvis producta, et
„ extra hanc lineam punctum quodlibet (F); curva, cujus
„ omnia puncta ſunt taliter conſtituta, ut differentia diſtantiae
„ illorum, a puncto dato, et perpendicularis ad lineam datam
„ ductae ($FD - DE$, $Fd - de$ etc.), ſit conſtans, est Pa-
„ rabola, cujus Focus in puncto dato, Vertex vero in linea ex
„ puncto dato ad lineam datam perpendiculariter demisſa."

Patet vero hanc datam lineam nusquam esſe Parabolae directricem niſi ſit differentia data conſtans $= o$: ſi vero differentia conſtans ſit major, quam diſtantia puncti dati a linea data recta; obtinet idem caſus, quam ſi linea data ſecet circulum datum, et quaeratur linea centrorum: aeque in hoc caſu ea linea Parabola est, cadit tamen pro parte, ad alteram partem lineae datae rectae; hinc vero fit perpendicularis negativa per se, et si ei praefigatur signum —, positiva. Sit exempli causa, (Fig. 2) punctum datum F, linea data X L, et differentia constans determinata = F Z > F M; transiet Parabola per puncta D, R, W, *r* etc.; jam pro punctis supra X W sitis, erunt perpendiculares ad lineam datam negativae, respectu lineae datae X L, hinc:

$$FR - (-RV) = FR - (-RG) = FR + RG = FG = FZ:$$

pro punctis vero infra W X sitis, erit $Fr - rL = Fr - rB = FB = FZ$. In omni casu ergo definitio Parabolae proposita pergit; si, cum differentia constans major data est, quam distantia puncti a recta data, signorum permutatio tantum notetur, prouti perpendiculares a diversis partibus ad lineam datam dimittantur.

§. 26.

Ut in spectandis convenientiis et differentiis linearum centrorum Circulorum Tangentium ad duos circulos datos ordine pergamus secundum ordines supra propositos (§. 2.) eas hic recensebimus.

Primi ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita in *linea recta*, vel in *Hyperbola* (§. 10 *a*, §. 11 *a*, §. 13 et §. 23 *b*.)

Secundi ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita, in *linea recta* vel in *Hyperbola*, (§. 10 *b*, §. 11 *b*, §. 14, §. 21.)

Tertii ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita in *linea recta* vel *Hyperbola*. (§. 11 *c*, §. 20.)

Quarti ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita in *Hyperbola*. (§. 10, §. 15.)

Quinti ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita in *Circulo*, *Ellipsi* vel *linea recta* (§. 17, §. 18, §. 23 *a*.)

Sexti ordinis Circulorum Tangentium centra sunt sita in *Circulo* vel *Ellipsi*, (§. 17, §. 19.) Dif-

Differentiae vero istae quae sunt in diversitate linearum centrorum pro Circulis Tangentibus ejusdem ordinis, non sunt essentiales, sed pendent a causis specialibus, quae pro casubus singularibus has diversitates constituunt: quod vero pro singulis ordinibus monstrare jam liceat.

Pro primo ordine Circulorum Tangentium, linea centrorum est Hyperbola, quae in limitem transire potest, nempe in lineam rectam. Duplici autem modo hoc fit:

Determinant Hyperbolam, distantia focorum et differentia constans, vel quod eodem redit, axis major et minor (§. 29.); ob faciliorem comparationem nos vero distantiam focorum et differentiam constantem radiorum vectorum uti Hyperbolae momenta hic spectamus.

Jam si distantia focorum ponatur ad differentiam constantem radiorum vectorum $= 1 : 0$, transiet Hyperbola in lineam rectam; hoc vero obtinet (§. 10 *a* et §. 11 *a*), si circuli aequales, hinc $R - r = 0$, atque pro eis quaeratur linea centrorum Circulorum Tangentium primi ordinis; tuncque haec linea recta est ad lineam centralem perpendicularis.

Itidem si distantia focorum ponatur ad differentiam constantem radiorum vectorum $= 1 : 1$, transibit Hyperbola in lineam rectam; hoc vero obtinet, si (§. 23 *b.*) circulus minor datus, convexitate appulsat ad circuli majoris dati concavitatem; tunc vero linea centrorum Circulorum Tangentium primi ordinis est lineae centralis productio.

Intermediae vero omnes relationes horum duorum momentorum minores nempe quam $\frac{1}{0}$ et majores quam $\frac{1}{1}$ constituunt Hyperbolas curvaturae diversae.

Pro secundo ordine Circulorum Tangentium eadem et modo obtinent analogo.

Pro tertio ordine itidem res sic se habet; estque tantum hic ordo variatio primi; ubi cessant centra primi ordinis Circulorum

Tangentium, inchoant illa tertii, et modo inverso. (§. 11, et §. 20.)

Pro quarto ordine Hyperbola semper adest, quod est ex eo, quod differentia constans sit $= R + r$, et Circuli Tangentes hujus ordinis non adesse possunt, nisi sit distantia centrorum circulorum datorum, (focorum hyperbolae) major quam $R + r$, i. e. nisi circuli dati sint extra se invicem positi absque contactu circumferentiarum.

Pro quinto ordine Circulorum Tangentium, linea centrorum in genere est Ellipsis, quae vero in limites abire potest, nempe in circulum vel lineam rectam.

Pendet Ellipsis nempe ab axi majore vel summa radiorum vectorum et focorum distantia; si axis major ad focorum distantiam $= 1 : 0$, aderit circulus, quod obtinet (§. 17) si circulorum inaequalium datorum centra coincidant; nam haec centra et foci sunt pro Ellipsi; si vero axis major ad focorum distantiam $= 1 : 1$, transibit Ellipsis in lineam rectam, uti obtinet, (§. 23 *a*) si circuli dati se invicem tangant, ita ut convexitates sibi appulsent; tunc est distantia centrorum, ergo et focorum Ellipseos, $= R + r$; quae itidem est summa radiorum vectorum vel aequalis axi majori.

Pro sexto ordine Circulorum Tangentium, Ellipsis eodem modo ac pro quinto ordine transit in circulum; nusquam vero in lineam rectam; quia axis major $= R - r$, simul vero requiratur, quod circulus major contineat minorem absque contactu, vel sit focorum distantia minor quam $R - r$.

§. 27.

Patet ergo ex praecedentibus (§ 26), duas tantum dari diversitates linearum centrorum Circulorum Tangentium ad duos circulos datos, essentiales, nempe Hyperbolam et Ellipsin; quae ad limites transeundo, caeteras diversitates accidentales constituunt.

Ad-

Adest igitur ſemper Hyperbola pro primo, ſecundo, tertio et quarto ordine Circulorum Tangentium: Ellipſis vero pro quinto sexto ordine.

Reſpicienti tabulam variorum ordinum (§ 2) porro perſpicuum, nullam in linea centrorum esſe diverſitatem, pro uti Circulus Tangens, tangat convexitate vel concavitate, ſed eam pendere a modis quo tangat circulos datos. Si nempe circulorum datorum convexitates, vel concavitates eodem tempore tangantur Circulo Tangente alicujus ordinis, ſeries centrorum talium Circulorum Tangentium erit in Hyperbola; ſi vero circuli unius dati convexitas, alterius vero concavitas tangatur aliquo Circulo Tangente, ſeries centrorum talium Circulorum Tangentium erit in Ellipſi ſita.

§. 28.

Determinatis curvis, in quibus centra Circulorum Tangentium ſita ſunt, ſuperest ut quaedam videamus de earum deſcriptione. Geometrico ſenſu ſtrictiore hae curvae non conſtrui posſent, non enim recta linea vel circulo deſcribuntur; cum vero ſtricto modo punctorum numerum quemvis invenire posſimus, haec quidem deſcriptionem harum curvarum conſtituunt, et quantum velis accuratam eam reddunt. Prius ergo videamus pauca de Parabolae deſcriptione, quam triplicem variisque fundamentis nitentem hic addere liceat.

Primo notandum est diſtantiam foci a vertice determinare Parabolam, eamque esſe ſemper $= \frac{1}{4}$ parameter, est praeterea radius vector $= x + \frac{1}{4}p$: vel diſtantia foci a quocunque peripheriae Parabolae puncto est aequalis, perpendiculari ex eodem illo puncto dimisſo ad Directricem parabolae; hinc data $\frac{1}{4}p$, pro Parabola aliqua, illa ſic deſcribitur: ducatur linea recta a foco Parabolae distans $= \frac{1}{2}p$ in axin mesurata et ad eum perpendicularis, erit haec linea directrix, ad eam directricem erigantur perpendiculares quotvis, simulque ducanter lineae ex puncto, ubi quaevis perpendicularis exsurgit ex directrice, ad focum; si ad ultimae hujus lineae medium denuo erigatur perpendicularis; puncta ubi perpendiculares correspondentes se invicem secant, erunt sita in Parabola.

Secunda descriptio Parabolae nititur eo quod sit $y^2 = p\,x$ aequatio pro quacunque ordinata; hinc data p constanti, pro quavis abscissa x invenitur ordinata correspondens y.

Sumatur in axi majore, abscissa quaevis x, ei adde quadruplicem distantiam foci a vertice, seu p, et supra lineam $x + p$ describatur semi circulus cum radio $\frac{p + x}{2}$ et erigatur ad abscissam datam perpendicularis; locus ubi haec secat circulum descriptum, est punctum in Parabola situm, qualium numerus quivis facile invenitur.

Tertius describendi Parabolam modus sit per lineas goniometricas, quae eandem relationem ad se invicem monstrant, quam Parabolae abscissae ad ordinatas.

Ducatur, (Fig. 9.) circulus CADHI cujus centrum in C; ducantur chordae AD, AH etc., ex D et H, dimittantur ad diametrum AI perpendiculares DF et HC; hae perpendiculares producantur donec sit $FE = AD$ et $CH = AH$ etc., erunt puncta E et G sita in Parabola; est enim

$FE^2 = AD^2 = AF^2 + FD^2 = AF^2 + AF \times FI$

$FE^2 = (AF + FI)\,AF = AI,\ AF.$

$GC^2 = AH^2 = AC^2 + CH^2 = AC^2 + AC \times CI$

$GC^2 = (AC + CI)\,AC = AI,\ AC$ (v. sw. II, 16 et V, 13.)

hinc $FE^2\ GC^2 = AI,\ AF : AI,\ AC = AF : AC$. (v. SWINDEN VIII, 23.)

vel ordinatarum quadrata uti abscissae pergun', quae relatio Pararabolae est characteristica: quia vero $FE^2 = AI \times AF$, necessario AI est hujus Parabolae parameter, nam $y^2 = px$.

Porro patet FE : AF esse relationem, quae est uti chordae ad Sin. v. anguli determinati ACD; unde probatur esse Chordarum quadrata uti Sin. v: focus vero hujus Parabolae situs ad $\frac{1}{4}p$ a vertice, necessario erit ad quartam partem ipsius Diametri; Sin. v. vero, qui est aequalis semiradio est Sin. v. 60° nam Sin. v. $60^\circ = 1 - \text{Cos}\,60^\circ = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ (v. sw. VIII, 32, N°. 2). et Correspondens ordinata tunc $=$ Ch. 60° $=$ rad. $= \frac{1}{2}p$; quod convenit cum eo, quod ordinata integra per focum transiens sit $= p$.

Construi ergo posset scala Sin. vers. et Chordarum, modo (*) triangulari, ut pro quocunque radio assumi possent valores: haec vero scala non ulterius progredi potest quam ad 180°, i. e. ad illud punctum quo Sin. v. $=$ Ch; neque ulterius lineae hae goniometricae definitae procedentes vetant Parabolae descriptionem ultra istum locum, ubi sit $x = p$, hinc $y^2 = px = x^2$ vel $y = x$, quia vero plerumque haec pars sufficit, ob facilem et accuratum adhibendi modum huc addidi.

§. 29.

(*) Sequenti fere modo haec scala construi posset; fiat triangulum aequilaterum satis magnum ad chartam crassiorem; ad unum latus hujus trianguli, quod assumtum v. g. pro Sin. v. $180^\circ = 2$, fiat divisio pro Sin. v. singulorum 10° vel 5°, derivata ex tabulis Sin. v. naturalium et mensurata in linea proportionali; his peractis ex angulo opposito ducantur lineae ad puncta divisionis hujus lateris; poterunt assumi diametri quicunque circulorum in hoc triangulo, qui analogo modo erunt divisi, ducendo lineas lateri diviso parallelas. (v. sw. IV. 1.)

§. 29

Hyperbolae descriptionem posse institui modo, quem adhibuimus in inveniendis centris Circulorum Tangentium ordinum quatuor priorum, patet; ut facilius adhuc hoc fiat et quaeri possent centra Circulorum Tangentium pro circulo dato et qui transirent per punctum aliquod datum, tunc esset $R \pm r = R$ et sumendo ab una parte $R + a$ et $R + b$, ab altera a et b, etc., triangula describi possunt, quorum vertices determinarent puncta Hyperbolae quod volueris, essentque.

$R + a - a = R + b - b = R$ etc., vel differentia radiorum vectorum constans.

Si dati essent axis major et minor Hyperbolae alicujus hoc etiam modo Hyperbola determinari potest; nam sit axis major $= a$, axis minor $= b$, et $x =$ abscissae ad focum e vertice ductae. Erit focorum distantia $= a + 2x$: Differentia vero constans radiorum vectorum $= a$: Hinc si inveniatur $a + 2x$, omnia ad istam descriptionem requisita erunt cognita: illa quantitas nempe aequalis focorum distantiae.

Est enim $x : b = b : a + x$. Cf. v. s.w. *Pos. Phys. introd.* §. 69 C.

Hinc $ax + x^2 = b^2$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$$

porro construatur triangulum rectangulum, cujus unum latus circa angulum rectum $= b$, alterum $= \frac{a}{2}$ erit hypothenusa $= x + \frac{a}{2}$, qui valor bis sumtus erit $= a + 2x =$ distantiae focorum.

Alium adhuc describendi Hyperbolam modum, lineis goniometricis fundatam addere liceat.

Ce-

Celeberrimus WOLFIUS (*) proponit problema huc faciens, quod ſic fere ſe habet.

„ Si diametro circuli (Fig. 10) jungatur ad angulum rectum „ linea (RK) et ducantur ex centro circuli ſecantes ad hanc „ lineam (CL et CK) et erigantur in L et K, perpendiculares „ (LV et KD), ita ut ſit $LV = LP$, et $KD = KQ$; in- „ vestigare naturam curvae, quae per puncta R, V, D etc., „ tranſit."

Ea curva vero est Hyperbola, cujus axis productio diametri circuli (SE); ex punctis enim V et D, dimittantur perpendiculares ad hunc axin VF et DE, erunt RF et RE abſcisſae, et VF et DE, ordinatae correspondentes;

porro $VF^2 = LR^2 = CL^2 - CR^2 = (CP + PL)^2 - CR^2$
(v. sw. II, 16, cor. 2.)

$VF^2 = (CR + RF)^2 - CR^2 = CR^2 + 2\,CR, RF + RF^2 - CR^2$

$VF^2 = 2\,CR, RF + RF^2 = RF\,(2\,CR + RF)$

$VF^2 = RF\,(SR + RF) = RF, SF$

itidem $ED^2 = RK^2 = CK^2 - CR^2 = (CQ + QK)^2 - CR^2$

$ED^2 = (CR + RE)^2 - CR^2 = CR^2 + 2\,CR, RE + RE^2 - CR^2$
(v. sw. II, 3.)

$ED^2 = 2\,CR, RE + RE^2 = RE\,(2\,CR + RE) = RE, SE.$

ergo $VF^2 : ED^2 = RF, SF : RE, SE.$

vel quadrata ordinatarum = abſcisſarum rectangulis, quae quidem proprietas est Hyperbolae cujus axes ſunt aequales, characteristica.

Quid vero hac in Hyperbola, axis major ſemper aequalis est axi minori, deſcriptio haec tantum est pro ea Hyperbola cujus asſymtota ſub angulo recto ſibi occurrunt:

nam $VF^2 : RF, SF = (\text{axis minor})^2 : (\text{axin maj.})^2$ (v. sw. *Poſ. Phyſ. Intr.* §. 69. F.)

et $VF^2 = RF, SF$; ergo et axis major = axi minori. (v. sw. III, 4.) Sim-

(*) Elementa Matheſeos Univerſalis Tom. II, Cap. VI, §. 513.

Simplici vero modo pro omnibus relationibus axium inter ſe, analoga fit Hyperbolae deſcriptio. Sumatur enim axis minor < axi majore, v. g. CN = ſemiaxis minor, CR = ſemiaxis major, deſcribaturque cum radio CN circulus CNAB, ducaturque itidem ad CN perpendicularis NO; ad puncta ubi ſecant CL et CK hanc lineam, ad P et O, erigantur perpendiculares PI et OU puncta I et U; ubi hae perpendiculares ſecant lineas FV et EU, erunt ſita in Hyperbola cujus ſemiaxis major = CR, ſemiaxis minor = CN.

Repertum enim est $FV^2 = RF, SR$ et $ED^2 = RE, SE$ est vero $CN : NP = CR : RL = CN : FI = CR : FV$. (v. sw. IV, 1 cor. 1.)

Hinc et $CN^2 : FI^2 = CR^2 : FV^2$ (v. sw. III, 10 cor. 1.)

et $FI^2 = FV^2 \left(\frac{CN^2}{CR^2}\right)$

itidemque $CN^2 : EU^2 = CR^2 : ED^2$

et $EN^2 = ED^2 \left(\frac{CN^2}{CR^2}\right)$

hinc $FI^2 = RF, SR \left(\frac{CN^2}{CR^2}\right)$

et $EU^2 = RE, SE \left(\frac{CN^2}{CR^2}\right)$

et $FI^2 : EU^2 = RF, SR : RE, SE$.

Quod fieri nequit niſi I et U ſint ſita in Hyperbola cujus ſemiaxis major = CR, ſemiaxis minor = CN, nam ex

$FI^2 = RF, SR \left(\frac{CN^2}{CR^2}\right)$

patet eſſe $FI^2 : RF, SR = CN^2 : CR^2$. (v. sw. *P. P. Intr.* §. 69. F); hisce conſtitutis videmus relationem ordinatarum ad abſcisſas posſe exprimi per lineas goniometricas: nam ſi ponantur axes Hyperbolae aequales, erat RF = PL, hinc CF = CL, et ſi abſcisſae e centro C computentur, ſique ſumatur abſcisſa CL

CL = Sec. $\angle$RCL, est ordinata FV = RL = Tang. $\angle$RCL. hinc abſcisſas ad ordinatas esſe, uti Secantes anguli determinati ad ejusdem anguli Tangentes, perſpicuum.

Si vero alia adſit axium relatio, idem adhuc obtinet; nam CF est Secans $\angle$ RCL, in partibus radii CR;

FI vero Tangens $\angle$ NCM vel $\angle$ RCL, in partibus radii CN et ſic in caeteris.

Quare in genere datis Hyperbolae axibus (*), eam ope Secantium et Tangentium deſcribere posſimus; ſumatur nempe abſcisſa e centro uti Secans 5°, in partibus radii aequalis ſemiaxi majori, erit ordinata correspondens = Tang. 5°, ſumto pro radio ſemiaxi minore, et ſic pro Secantibus et Tangentibus cujuslibet anguli; atque ita ope Circini Proportionalis Anglici facillime Hyperbola deſcribitur; ſi vero data esſent focorum diſtantia, et differentia conſtans radiorum vectorum, inveniri posſunt axes eodem modo, ac ſupra ex axibus datis, haec momenta derivata fuerunt.

§. 30.

Ellipſeos deſcriptionem posſe inſtitui ſecundum ea, quae ſuperius fuere dicta, patet, ſumendo nempe focis conſtitutis ex una parte $a + r$ vel $a - r$ et ab altera parte $R - a$, ſecundum §. 18 et 19, et valores varios asſumendo pro a, b etc.; eo enim mo-

(*) Duo limites Hyperbolae, (§. 26.) quae est recta linea a duabus partibus, per axes ſic exprimuntur. Si differentia conſtans radiorum vectorum, aequalis focorum diſtantiae, erit in $x : b = b : a + x$, quia $a + 2x = a$, hinc $x = 0$ est $0 : b = b : a + 0$ vel infinite magnus est axis major, prae axi minore, qui disparet.

Si vero differentia radiorum vectorum ad focorum diſtantiam uti $0 : 1$, erit $x : b = b : a + x$, et $a : a + 2x = 0 : 1$; quod fieri nequit niſi ſit x infinite magna quantitas prae a,
ergo et $ax + x^2 = b^2 = x^2$ vel b axis minor infinite magnus prae a axi majore qui vulgo dicitur, Hyperbolae vertices uniens.

modo summa radiorum vectorum constans semper est, et $= R + r$. Hac proprietate nititur etiam mechanica illa descriptio Ellipseos, quae instituitur ope styli directi per filum, cujus extrema in foco detinentur, quodque longius est quam punctorum ubi figitur distantia (s' GRAVESANDE *Lib.* I. *Cap.* 23. *com.* 625.)

Ex datis axi majore et focorum distantia, facile eruitur axis minor, cujus nempe quadratum est aequale differentiae quadratorum axis majoris, et semi focorum distantiae.

Verum prouti Circulus considerari potest, uti Ellipsis cujus foci coincidunt cum centra, sic et Ellipsis uti Circulus spectari posset, prolongatus in sensum diametri alicujus, diametro conjugato ejusdem remanente magnitudinis; quare non mirum lineas goniometricas, ex Circulo deductas, et hic locum invenire, verum duorum quasi systematum, nempe axeos majoris et minoris, prouti lineae huic vel illi parallelae ducantur.

Sit (Fig. 11.) BOA quarta pars Ellipseos, cujus semiaxis major $=$ BC, semiaxis minor $=$ AC; describantur ex C Ellipseos centro cum radiis CA et CB duo quadrantes, DqA et BPK; sumatur in Ellipsi punctum quodcumque O, et dimittatur ordinata OL ad axin majorem producenda ad P; porro ex P et O dimittantur Pm et On, ad KC perpendiculares, ducaturque PC; secabitur Circulus AqD, a lineis PC et On in eodem puncto q.

Nam $BC^2 : AC^2 = BC^2 - CL^2 : OL^2$ (v. sw. *Pos. Phys. Introd.* §. 61 A)

$BC^2 : AC^2 = CP^2 - CL^2 : OL^2 = PL^2 : OL^2$ (v. sw. II, 16.)

vel $BC : AC = PL : OL$ (v. sw. III, 10 cor. 1.)

$\quad\; = \quad\;\; = \quad\;\; = \quad\;\; =$

$CP : Cq = Cm : Cn$ ex hypothesi et v. sw. I, 31.

estque $\angle Cnq = \angle CmP = \llcorner$ ex hypothesi.

ergo $\triangle PCm \backsim \triangle qCn$ ex v. sw. IV, 5. et $\angle qCn = \angle PCm$, quod fieri nequit, nisi sit punctum q situm in lineis PC et On et in $\odot$ AqD:

por-

porro $BC : AC = PL : OL$, vid. ſupra.
et $PL : PC = PL : BC =$ Sin. $\angle PCB : 1$, ex v. sw. IX, 1.
vel $PL = BC$ Sin. $PCB = BC$ Cos. $\angle qCn$, quia $\frown qA$ complementum $\frown qD$.
unde $BC : AC = BC$ Cos. $qCn : OL$

$$\text{et } OL = \frac{BC \times AC \times \text{Cos. } qCn}{BC} = AC \text{ Cos } qCn$$

est vero et $AC^2 : BC^2 = AC^2 - Cn^2 : nO^2 = qC^2 - Cn^2 : nO^2$
$AC^2 : BC^2 = qn^2 : nO^2$
et $AC : BC = qn : nO$ ex. v. sw. III, 10. cor. 1.
estque $qn : qC = qn : AC =$ Sin. $qCn : 1$, ex v. sw. IX, 1
ergo $AC : BC = AC$ Sin. $qCn : nO$

$$LC = nO = \left(\frac{AC}{AC}\right) BC \text{ Sin. } qCn = BC \text{ Sin. } qCn.$$

hinc $OL : LC = AC$, Cos. $qCn : BC$ Sin. qCn.

Unde perſpicuum est, esſe ordinatas Ellipſeos ex centro computatas ad abſcisſas correspondentes, uti Cos. angulorum determinatorum, ad Sinus eorundem angulorum; ſi Coſinus ſumantur in partibus radii aequalis ſemiaxi minori, Sinus vero in partibus radii aequalis ſemiaxi majori.

Circulus ſic est quaſi Ellipſis cujus axes aequales, hinc Sinus et Coſinus ad eundem radium computantur.

Deſcribitur ergo facili modo Ellipſis, datis axibus, dividendo ſemiaxin majorem, poſitum $= 1$ in, Sin. 5^0, 10^0, 15^0 etc. ibique erigendo perpendiculares, quarum magnitudo ſit Cos. 5^0, 10^0, 15^0 etc., deſumti ex eadem diviſione ſupra ſemiaxin minorem conſtituta; quod quidem ope Circini Proportionalis Anglici optime inſtituitur.

§. 31.

Multa inter Parabolam et Hyperbolam analogia adest, ambo ſunt enim curvae divergentes continuo, et ex Coni ſectione erui

 pos-

posſunt; ea vero hic tantum ſpectemus, quae ex deſcriptione harum curvarum ſupra planum datum, ſequuntur.

Parabolam (§. 25.) ſpectavimus uti productam ex eo, quod dato puncto et linea recta, ea determinet puncta, a quibus differentia linearum ductarum ad punctum datum et perpendicularium ad lineam datam dimisſarum, ſit conſtans.

Idem vero illud pro Hyperbola valet, ſi loco puncti et lineae rectae, asſumantur duo puncta; Hyperbolae enim definitio haec est: ſi ſint duo puncta data in aliqua linea recta, curva ita conſtituta, ut differentia radiorum vectorum existis punctis ductorum ſit conſtans, est Hyperbola; quare Parabolam conſiderare posſemus tanquam Hyperbolam, cujus unus focus fixus, alter vero ambulatorius in linea recta. Qui quidem conſiderandi modus et convenit, cum Tangentium harum curvarum proprietate.

Nam in Hyperbola linea aliqua est Tangens puncto alicui, ſi bisſecet angulum a radiis vectoribus ad istud punctum ductis conſtitutum; in Parabola vero linea dicitur esſe Tangens alicui puncto curvae, ſi bisſecet angulum conſtitutum a radio vectore et perpendiculari ad directricem vel ejus parallelam quamvis, vel conſtitutum a radio vectore ad illud punctum ducto, et parallela ad axin tranſeunte per idem punctum.

§. 32.

Si conferamus Hyperbolam et Ellipſin, ubique cernimus oppoſitionem ſingularem ſub eadem forma obviam.

Hyperbola est curva divergens continuo; Ellipſis in ſe redit. Centrum Hyperbolae est in medio ramorum oppoſitorum convexitate, in axi majore ſitum; in Ellipſi itidem in medio axi in ipſa curva collocatum est.

Tum et ut redeamus, ad definitionem, ſi ſint duo puncta data, curva ita conſtituta, ut ſit ſumma linearum ex quovis illius puncto ad puncta data ductarum, conſtans, erit Ellipſis; ſi vero earum differentia conſtans erit Hyperbola.

Si

Si differentia conſtans radiorum vectorum Hyperbolae ſit aequalis focorum diſtantiae, abit in lineam rectam (§. 26.); ſi ſumma conſtans radiorum vectorum Ellipſeos ſit aequalis focorum diſtantiae, et Ellipſis abit in lineam rectam (§. 26.)

Tangens Hyperbolae bisſecat angulum a radiis vectoribus conſtitutum; Tangens Ellipſeos est perpendicularis ad lineam bisſecantem angulum a radiis vectoribus confectum. v. s w. *Poſ. Phyſ.* §. 62 A et 70 A.

Hyperbolae aequatio est, $a^2 : b^2 = ax - x^2 : y^2$.

Ellipſeos vero $a^2 : b^2 = ax + x^2 : y^2$; et ſic in multis aliis. Sic et ſi has curvas ſpectemus uti lineas centrorum Circulorum Tangentium, eadem illa oppoſitio est manifesta. Hyperbola est linea centrorum, ubi per Circulos Tangentes, eodem modo Circulorum datorum peripheria tangatur; Ellipſis vero erit ſi diverſo modo tangatur, uti ſupra demonſtratum est (§. 27.)

§. 33.

Si Conum conſideremus rectum atque porro quatuor ſectiones curvas in eo, nempe Circulum, Ellipſin, Parabolam et Hyperbolam, apparet ex uno puncto dato in Coni ſuperficie, unicam tantum ſectionem esſe Circulum, unicamque tantum Parabolam: Ellipticas vero et Hyperbolicas ſectiones infinito numero posſe inſtitui.

Generalis diſtinctio harum ſectionum est in curvas redeuntes in ſemetipſas, et in curvas continuo divergentes, neque haec diſtinctio arbitraria asſumta est; revera enim antagonismus hic obtinet.

Si ſecetur Conus per planum baſi parallelum aderit circulus; ſi ſub angulo cum plano ad baſin parallelo, aderit Ellipſis, donec hic angulus ſit aequalis angulo, quem conſtituit latus Coni cum baſeos diametro. Angulus hic aeque bene augeri quam diminui potest; diminuendo nempe vergit verſus parallelismum ad latus, augendo vero tandem cum latere coincidet, et tunc ſectio amplius non adest: in utroque vero caſu limes quantitatis, qua angulus, quo vergit planum cum plano baſi parallelo augeri vel diminui potest, est angulus lateris Coni cum diametro baſeos.

In

In ſerie talium ſectionum unus aderit Circulus, caeterae conſtituent Ellipſes; quare Circulus caſus ſingularis est ſectionum omnium Coni poſſibilium convergentium; quod et convenit cum proprietatibus harum curvarum, nam quicquid de Ellipſi demonſtratur, et de Circulo verum est, ſpectes tantum, focos ibi cum centro confluere.

Ubi vero ſecetur Conus plano lateri parallelo, mox divergit curva, novusque ordo incipit, Parabola adest.

Si jam haec ſectio aberret a parallelismo ad latus; ita ut angulus, quem facit axis ſectionis cum Coni latere continuo decreſcat, erunt omnes caeterae ſectiones hyperbolicae: itidem ergo ſingularis conditio est, qua fit, ut ſi ſectio Coni est divergens, ea ſit parabolica; hinc et Parabola analoga varia monſtrat cum Hyperbola (§. 31).

Non vero tantum convenit Parabola cum Hyperbola, quantum Circulus cum Ellipſi: Circulus est ſectio inter Ellipſes ab utraque parte ſita, quod et obtinet in ſectione Cylindri, et ſi conſideremus circulum uti lineam centrorum Circulorum Tangentium; Parabola vero ſeparat ſectiones Ellipticas ab Hyperbolicis, estque hinc magis inter has duas ſectiones oppoſitas intermedia: quod itidem confirmatur, ſi has curvas ſpectemus uti lineas centrorum Circulorum Tangentium.

Nam recta linea asſumta uti intermedia inter circuli peripheriam concavam et convexam, erunt centra Circulorum Tangentium ſita in Hyperbola ſi convexitates tangantur circulorum datorum duorum, per eos; erunt ſita in Parabola, ſi tangantur circuli dati convexitas et linea recta; erunt ſita in Ellipſi, ſi circuli unius dati convexitas alterius concavitas per eos tangatur. Ellipſes et Hyperbolae, oppoſitae indolis hinc curvae ſunt; (§ 32) Circulus Ellipſis ſingularis conditionis, relationisque determinati ſingularis axium; Parabola vero inter Ellipſin et Hyperbolam intermedia, magis tamen Hyperbolae proprietates participans.

THE-

THESES.

I.

Celeb. KANTIUS primus fuit, qui, accurata facultatis nostrae cognoscendi analysi instituta, vires mentis nostrae metiri aggressus est, ut constet, quo usque non pertingat, et quo usque tuto perducere nos possit; et eo saltem nomine de omni Philosophia optime meruit.

II.

Sententia Kantiana de spatio, quod sit intuitus purus, et forma sensus externi, sine ulla sensatione externa, aut intellectus operatione in anima existens, maxima specie veri defendi potest.

III.

Tempus non est aliquid reale objectivum, sed potius mere subjectivum.

IV.

Animae nostrae immortalitas non ex ejus natura sed ex voluntate Dei pendet.

V.

Auctoritas nusquam summum rationis momentum, neque sufficere potest ad evincendum de aliqua re; semper enim altiori ratiocinio subjiciendus est valor auctoritatis.

VI.

Objecta extra nos posita non inmediate cognoscimus, sed tantum per inpressionem, quam in organa nostra, et per organa in mentem faciunt; hinc merito quaeri potest, qua ratione certi simus illa accurate respondere conceptubus nostris.

VII.

Calculus Decimalis non est proprietas numerorum decimalium per se, sed systematis nostri numerarii.

VIII.

Cuicunque Cono scaleno proprie duo sunt axes.

IX.

Super planum quodcunque, si Geometrico sensu vox adhibeatur, atque excipiantur plana cum axi telluris parallela, et cum eo coincidentia, Horologium Solare potest construi, quod, versante Sole supra Horizontem, a Sole illustrabitur; hinc supra planum quodlibet datum omnes diei horae a Sole indicabuntur.

X.

Objecta, quae oculis percipiuntur, diminuuntur pro majore distantia, et quidem, sensationis ratione tantum habita, in ratione subduplicata distantiarum.

XI.

Glaciei gravitas specifica minor quam aquae, pro parte debetur ipsi crystallisationi, pro parte aëri distento et gaz evoluto.

XII.

Si glacies sit conductor pro calorico, quamdiu minus sit coacervatum, quam quod thermometrum Fahrenheytianum ascendere supra 32° cogeret, negare non possumus, differre ipsius glaciei temperaturam absolutam pro varia aëris circumsiti temperatura; hinc v. g. glaciei libram unam non semper reduci in statum liquidum posse, addita eadem quantitate aquae calentis ad gradum determinatum, nisi mora longior fuerit glaciei in temperatura aliqua determinata, semper adhibita.

XIII.

Unica libra aquae tantam presſionem edere valet, quantam centum millia librarum.

XIV.

Quo major est vis, qua globus e tormento, cujus poſitio conſtans ſupponatur, exploditur, non ſemper eo major est diſtantia ad quam projicitur.

XV.

Non ſolum coelum ſed et terra fulminat.

XVI.

Metalla non tantum ſunt conductores, ſed etiam excitatores electricitatis.

XVII.

Quamquam plures et ingentes mutationes olim pasſa fuit nostra tellus, et uti est veriſimile, adhuc in postremum patietur, nullam tamen a Cometis repeti posſe, eosque parum reformidandos esſe arbitramur.

XVIII.

Maculae ſolares variantes ſuperficiei Solis non adhaerent, ſed in illius atmosphaera innatant; hinc probabilis est conjectura, eas aliquam diverſitatem tempestatum ſeu climatis in Sole indicare.

XIX.

Stellae, ut vocantur, nebuloſae, videntur fixarum ſystemata esſe.

XX.

Thermometrum corpori vivo humano applicatum menſurat caloricum libere factum; hinc non valet illius applicatio ad ſiſtendam accuratam differentiam temperaturae ipſius corporis.

XXI.

Gaz oxygenium, reſpirationi animalium perfectiorum necesſarium, magis agere videtur in ſanguinem, tollendo partes certas in venoſo ſanguine praeſentes, quam eo ſcopo, ut ipſi ſanguini adderetur, quo ex venoſo ſanguine fieret arterioſus.

XXII.

Distinctionem inter regnum Animale et Vegetabile confluere negamus.

XXIII.

Humanus organismus per ſe praedispoſitus est ad plures morbos, quam animalium organiſatio inferior.

XXIV.

„ Omne vivum ex ovo," non mihi ab omni parte probata ſententia est.

XXV.

Vita conſtituit ſtructuram organiſatam.

T A N T U M.

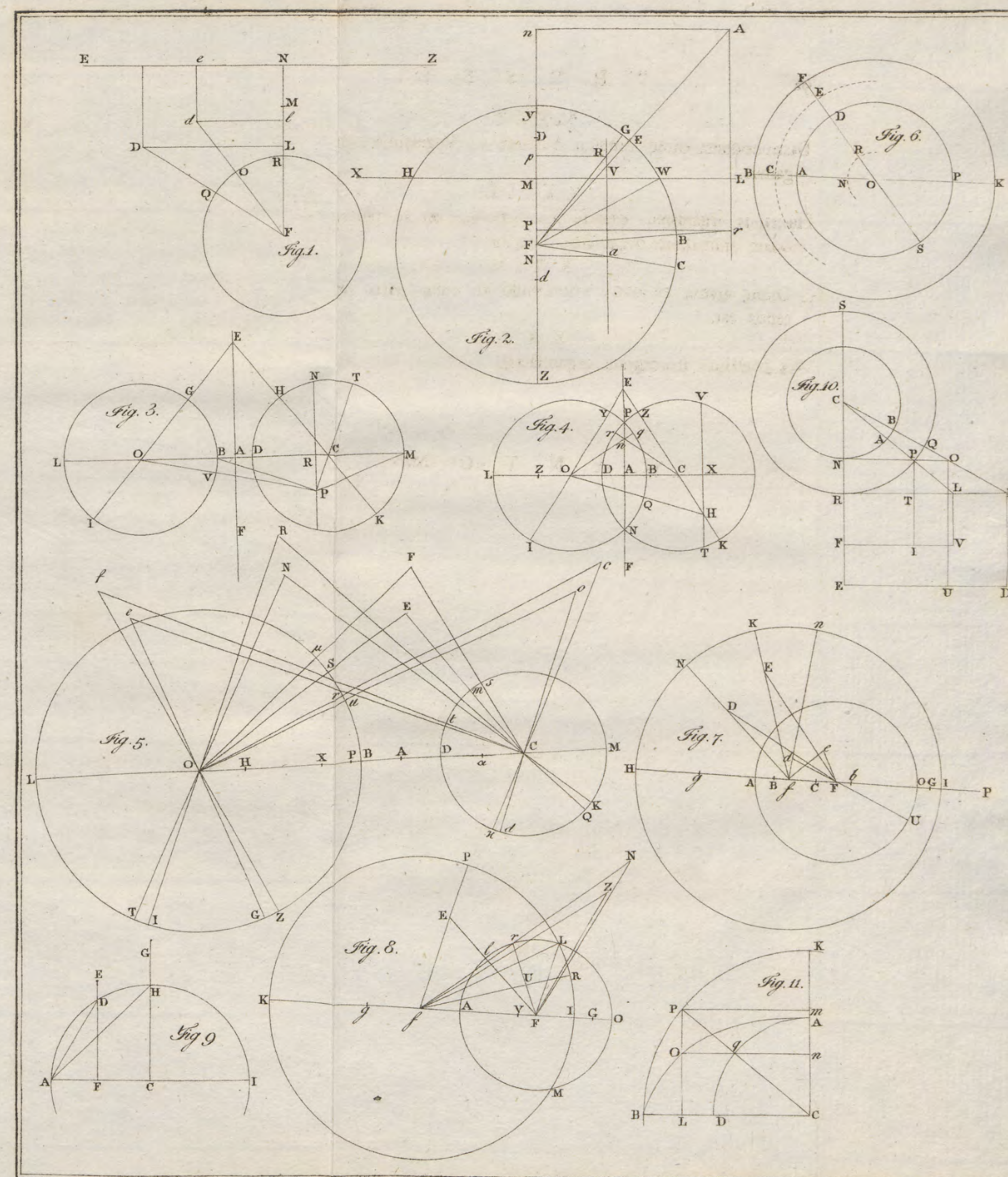
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.