SPIN-TRIËDERS

JACOBI'SCHE SPINOREN ALS SPIN-ANALOGA DER POLAIRE BOLFUNCTIES

P. A. COENEN

SPIN-TRIËDERS

JACOBI'SCHE SPINOREN ALS SPIN-ANALOGA
DER POLAIRE BOLFUNCTIES

SPIN-TRIËDERS

JACOBI'SCHE SPINOREN ALS SPIN-ANALOGA DER POLAIRE BOLFUNCTIES

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr P. C. FLU, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 4 APRIL 1939 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

PIERRE ALEXANDRE COENEN,
GEBOREN TE 'S GRAVENHAGE

AMSTERDAM - H. J. PARIS - MCMXXXIX

PROMOTOR: PROF. DR H. A. KRAMERS

AAN DE NAGEDACHTENIS
MIJNER MOEDER

SAMENVATTEND VOORWOORD

Bij de wiskundige formuleering van natuurkundige uitspraken wordt het feit, dat daarbij de oriënteering van het assenkruis of grondtriëder, waarop de coördinaten betrokken worden, geen wezenlijke rol speelt, mede tot uitdrukking gebracht door het gebruik van mathematische grootheden, wier beteekenis van die oriënteering eveneens onafhankelijk is. De *vectoren* zijn wel het meest bekende voorbeeld van zulke grootheden. Hebben we met een *vectorveld* te maken, dan behoeven de vector-componenten in de verschillende ruimte-punten niet alle betrokken te worden op één en hetzelfde grondtriëder. Integendeel, men kan in elk punt der ruimte een orthogonaal triëder aanbrengen en daarop de componenten van den plaatselijken vector betrekken. Er ontstaat dan een vectorveld, dat beschreven is op een *distributie van triëders* over de punten der ruimte.

Onder de bovenbedoelde grootheden vormen de vectoren een bijzonder geval van de *tensoren*, die in het algemeen meer dan drie componenten bezitten, waarmede ze op een willekeurig triëder gedefinieerd kunnen worden.

Er is echter nog een andere groep van zulke grootheden, die slechts *twee* componenten bezitten. Zij worden *spinoren* genoemd, omdat zij voor de spin-theorie van Pauli van fundamenteele beteekenis zijn. De twee-componentige golffunctie van Pauli is namelijk op te vatten als zulk een spinor of liever als een *spinorveld*, omdat haar componenten functies van de ruimte-coördinaten zijn. Geheel analoog met het vectorveld kunnen we dit spinorveld gaan beschrijven op een distributie van triëders, die we in dit geval *spin-triëders* willen noemen, welk denkbeeld we in dit proefschrift in toepassing gebracht hebben. Het bleek, dat er eenige interessante resultaten mede te bereiken zijn.

Wij hebben namelijk niet alleen de transformatie van de golffunctie van Pauli op een distributie van spin-triëders in het oog gevat, maar ook de transformatie van daarop werkende operatoren. Deze operatoren zijn, zooals bekend, te schrijven als matrices met 2 rijen en 2 kolommen, waarvan de elementen zelve differentiaal-operatoren zijn. Zoo is bijvoorbeeld de transformatie onderzocht van den vector-operator $\vec{I}$ van het totale impulsmoment van een electron, alsmede van den operator I^2, die aan het kwadraat daarvan is toegevoegd. Daarbij vonden we, dat zoowel $\vec{I}$ als I^2 op een speciale distributie, die wegens haar samenhang met de ruimtelijke poolcoördinaten de *spherische distributie van spin-triëders* wordt genoemd, in *diagonaalvorm* verschijnen, d.w.z. dat hun matrices nà transformatie slechts van nul verschillende elementen bezitten in den hoofddiagonaal. Opgemerkt zij, dat bij de spherische distributie de ζ-as der spin-triëders steeds gericht is volgens den radius-vector, terwijl de ξ- en η-as respectievelijk langs den meridiaan- en parallelcirkel gericht zijn. Dit bracht voor den operator $\vec{M}$ van het baan-impulsmoment de vereenvoudiging met zich, dat hij, als vectorveld beschreven op de genoemde distributie, slechts twee van nul verschillende componenten bezit, hetgeen aanleiding gaf tot het invoeren van den operator

$$\hbar \mathcal{O} = M_\vartheta + i\, M_\varphi,$$

opgebouwd uit die twee componenten. Wanneer $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ het spin-impulsmoment (of kortweg den spin) van het electron voorstelt, neemt de operator $(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M})$, die bij Dirac reeds optreedt, nà transformatie op de spherische distributie den volgenden vorm aan:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M})} = \hbar\,(\mathfrak{K} - 1)$$

waarin:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{O}^* \\ \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix}$$

Uitgedrukt in den laatstgenoemden operator wordt voor de getransformeerden van I^2 en M^2 gevonden:

$$\overline{I^2} + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = \hbar^2 \mathfrak{K}^2$$

$$\overline{M^2} = \hbar^2 (\mathfrak{K} - 1)\, \mathfrak{K},$$

waaruit hun verwisselbaarheid nog eens blijkt.

Voor het oplossen van het simultaan-eigenwaarde-probleem van de onderling verwisselbare operatoren I^2 en I_z is het feit, dat zij op de spherische distributie diagonaal-matrices worden, van groote beteekenis. Daardoor worden er immers onmiddellijk afzonderlijke vergelijkingen verkregen voor elk der beide componenten van de simultaan-eigenspinoren, deze laatsten natuurlijk eveneens getransformeerd op die distributie. Daardoor kan het genoemde probleem een geheel zelfstandige oplossing verkrijgen, d.w.z. zonder gebruik te maken, zooals veelal geschiedt, van de polaire bolfuncties, die naar men weet optreden als simultaan-eigenfuncties van de twee overeenkomstige operatoren M^2 en M_z voor het spinlooze geval.

Bij onze behandeling van het probleem speelt de bovengevonden operator $\mathfrak{K}$ een belangrijke rol. Deze operator blijkt met I_z verwisselbaar te zijn, zoodat het voor de hand ligt naar simultaan-eigenspinoren te vragen van het drietal operatoren I^2, I_z en $\mathfrak{K}$. Worden de eigenwaarden dier operatoren uitgedrukt in de bekende quantumgetallen en worden de eigenwaarden van den operator $\mathfrak{K}$ met $\pm k$ aangeduid, waarbij $k = j + \frac{1}{2}$, dan luiden de uitdrukkingen voor de gevonden belangrijke spinoren:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k} = \frac{e^{i\mu\varphi}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}} E_j^{-\mu} \\ \\ E_j^{\mu} \end{pmatrix}$$

De eigenwaarden $\pm k$ van $\mathfrak{K}$ vallen samen met het quantumgetal k van Dirac, dat zoowel positief als negatief kan zijn.

De gevonden eigenspinoren blijken nu ook simultaan-eigenspinoren te zijn voor het drietal operatoren I^2, I_z en M^2.

Daarbij geldt dan de volgende relatie:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k} = \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\, l=j\mp\frac{1}{2}}.$$

Ons onderzoek leidt tot deze gedaante der eigenspinoren, waarbij de e-functie als factor optreedt, doordat op de spherische distributie de merkwaardige uitkomst

$$\overline{I_z} = M_z$$

wordt verkregen.

Daar de optredende E_j^μ-functies speciale Jacobi'sche polynomia zijn, hebben wij de $\mathfrak{P}_{j,\pm k}^\mu$ *Jacobi'sche spinoren* genoemd. Zooals wij op verschillende plaatsen in dit proefschrift hebben doen uitkomen, kunnen deze Jacobi'sche spinoren met recht worden aangezien voor de aangewezen *spin-analoga* der polaire bolfuncties. Worden deze laatsten eveneens in spinor-gedaante geschreven, dan blijkt er namelijk een vèrgaande overeenstemming in vorm te bestaan, terwijl de verschillen ten duidelijkste samenhangen met het optreden van den spin. Ze blijken bovendien overeenkomstige eigenschappen te bezitten, waardoor de matrix-elementen der electrische dipoolstraling berekend kunnen worden op een wijze, die geheel analoog is met de berekeningswijze dier matrix-elementen in het spinlooze geval met behulp van de bekende betrekkingen tusschen de polaire bolfuncties. Verder bestaat er een formule, die het analogon is van het bijzondere geval van het additie-theorema voor de polaire bolfuncties, dat van belang is voor de afleiding van symmetrie-eigenschappen der ladingsverdeeling.

Niet alleen echter in de benaderende spin-theorie van Pauli brengt het introduceeren der Jacobi'sche spinoren voordeelen met zich, óók in de streng relativistische theorie van Dirac blijken ze van beteekenis te zijn. Zoo bleek, dat zij bij de oplossing van het energie-eigenwaarde-probleem in Diracs theorie van het electron in een centraal-krachtveld als het ware automatisch de separatie bewerkstellingen van de hoek-afhankelijkheid en de afhankelijkheid van r. De energie-operator H verschijnt daarbij nà transformatie op de spherische distributie uitgedrukt in den operator $\mathfrak{K}$, waardoor diens eigenwaarden $\pm k$ weer optreden.

De transformatie van de vergelijking van Dirac op de spherische distributie wordt verkregen als een bijzonder geval van een zeer eenvoudig transformatie-resultaat, dat betrekking heeft op de transformatie van Diracs vergelijking op een algemeene distributie van spin-triëders, die samenhangt met in te voeren willekeurige orthogonale kromlijnige coördinaten. Voor dit resultaat moge verwezen worden naar Hoofdstuk V.

INHOUD

LITERATUUR

Courant–Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, I.
Dirac, P. A. M., Die Prinzipien der Quantenmechanik.
Frenkel, J., Wave Mechanics, Advanced General Theory.
Kramers, H. A., Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung.
Whittaker–Watson, Modern Analysis.
Whittaker, E. T., Analytical Dynamics.

INLEIDING

DE GOLFFUNCTIE VAN PAULI ALS SPINORVELD

1 - NULVECTOR EN SPINOR; SPIN-TRIËDER

Op het grondtriëder, bepaald door de drie eenheidsvectoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definieeren we een vector met de lengte nul. Voor dezen *nulvector* met complexe componenten geldt dan:

$$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \tag{1}$$

en

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0. \tag{2}$$

Bij veranderlijke a, b, c kan de verzameling dezer nulvectoren worden beheerscht door invoering van twee complexe getallen u, v, welke als volgt, op een factor ± 1 nà, worden bepaald:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{a - ib} \\ v &= \sqrt{-a - ib} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ b &= \tfrac{i}{2}(u^2 + v^2) \\ c &= -uv \end{aligned} \tag{3}$$

Zij kunnen worden opgevat als de componenten van een vlakken vector S, die ter onderscheiding *spinor* wordt genoemd. Met eenheidsvectoren ξ, η in het *spinorvlak* geldt dan in analogie met (1)

$$S = u\xi + v\eta. \tag{4}$$

We schrijven den spinor met zijn componenten ook als

$$S = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{5}$$

in matrix-gedaante.

Blijkens (3) behoort bij een gegeven stel spinorcomponenten slechts één nulvector; omgekeerd zijn er steeds twee stellen spinorcomponenten, met tegengesteld teeken, aan een gegeven nulvector toegevoegd, welke omstandigheid ook tot uitdrukking kan worden gebracht door te spreken van de *tweeduidigheid* van den aan een nulvector toegevoegden spinor. In verband met dit laatste waren de twee stellen spinorcomponenten als twee *spinor-elementen* te beschouwen, in analogie met het begrip functie-element.

Betrekt men $\vec{N}$ op een nieuw grondtriëder met eenheidsvectoren $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, dat door draaiing over de reëele hoeken Θ, Φ, Ψ van Euler (fig. 1) uit het oorspronkelijke triëder kan ontstaan, dan

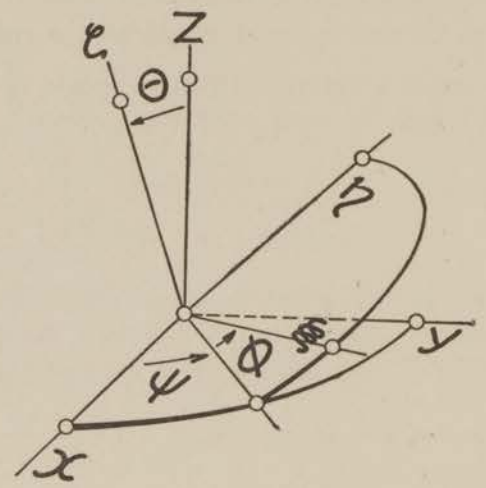

Fig. 1.

gaan zijn componenten over in a', b', c'. Wordt de bedoelde draaiing bepaald door de draai-parameters van Cayley–Klein:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\tfrac{1}{2}\Theta e^{\frac{i}{2}(\Phi+\Psi)} \\ \beta &= i\sin\tfrac{1}{2}\Theta e^{\frac{i}{2}(\Phi-\Psi)} \end{aligned} \qquad \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \tag{6}$$

dan verkrijgt de matrix, waarmede a, b, c in a', b', c' worden getransformeerd, de gedaante:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) & \frac{i}{2}(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & \gamma\delta-\alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & -i(\alpha\beta+\gamma\delta) \\ \beta\delta-\alpha\gamma & i(\beta\delta+\alpha\gamma) & \alpha\delta+\beta\gamma \end{pmatrix} \tag{7}$$

waarin

$$\gamma = -\beta^*,$$
$$\delta = \alpha^* \tag{8}$$

Voluit opgeschreven en nà invulling van de waarden van a, b, c uit (3) kan deze transformatie in den volgenden vorm gebracht worden:

$$\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}\,[(\alpha u + \beta v)^2 - (\gamma u + \delta v)^2] = \tfrac{1}{2}\,(\overline{u}^2 - \overline{v}^2) \\ b' &= \tfrac{i}{2}\,[(\alpha u + \beta v)^2 + (\gamma u + \delta v)^2] = \tfrac{i}{2}\,(\overline{u}^2 + \overline{v}^2) \\ c' &= -(\alpha u + \beta v)\,(\gamma u + \delta v) = -\overline{u}\overline{v}, \end{aligned} \tag{9}$$

waaruit we, in verband met (3) aflezen, dat de componenten u, v van S zich bij de draaiing in $\overline{u}$, $\overline{v}$ transformeeren volgens de formules:

$$\overline{S} = \pm\, TS$$
$$\begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{10}$$

De hierin optredende matrix, die volgens (8) ook geschreven kan worden als

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{11}$$

is blijkens (6) unitair, zoodat bij reëele ruimtedraaiingen de spinorcomponenten zich unitair transformeeren.

Dat de nulvector een beteekenis bezit, welke onafhankelijk is van de keuze van het triëder, waarop zijn componenten worden gegeven, wordt uitgedrukt door de volgende gelijkheden:

$$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = a'\vec{i'} + b'\vec{j'} + c'\vec{k'}. \tag{12}$$

De $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ transformeeren zich contragrediënt aan de a, b, c. In de correspondentie tusschen nulvector en spinor wordt deze onafhankelijkheid overgedragen van den nulvector op den spinor. Geheel analoog met (12) kan immers geschreven worden:

$$S = u\xi + v\eta = \overline{u}\xi' + \overline{v}\overline{\eta} \tag{13}$$

waarin de ξ, η zich contragrediënt transformeeren aan de u, v.

De samenhang van spinor en nulvector maakt, dat we kunnen spreken van een triëder, waarop de spinor met zijn componenten is betrokken. Het is het triëder, waarop de componenten van den toegevoegden nulvector zijn betrokken en we noemen het *spin-triëder*.

Bij draaiing van dit spin-triëder transformeeren zich de spinor-componenten volgens (10) en de eenheidsvectoren in het spinor-vlak contragrediënt daaraan, zoodat (13) geldt. In dezen zin is een spinor op te vatten als een *draaiings-invariante* grootheid, waarbij de bovenbedoelde tweeduidigheid nog een wezenlijke rol speelt.

De onbepaaldheid van het teeken in (10) hangt namelijk samen met deze tweeduidigheid. Bij gegeven eindstand van het spin-triëder is die onbepaaldheid onophefbaar; eerst door het aangeven van een continue opeenvolging van tusschenstanden en met de afspraak, dat u en v zich daarbij continu veranderen, wordt het teeken bepaald. Terwijl dus de componenten van den nulvector volkomen bepaald zijn bij gegeven eindstand, weet men niet welk teeken aan de spinor-componenten moet worden toegekend, m.a.w. welk spinor-element moet worden gekozen, omdat de eindstand langs verschillende reeksen van continu opvolgende tusschen-standen kan worden bereikt. Er is dus slechts een volledige correspondentie tusschen nulvector en zijn toegevoegden spinor mogelijk dank zij de tweeduidigheid van den laatste.

De onbepaaldheid van het teeken in (10) correspondeert overigens met het feit, dat in den eindstand de hoeken Θ, Φ, Ψ slechts bepaald zijn op een veelvoud van 2π nà, dus α en β op een gemeenschappelijken factor ± 1 nà. Het dubbele teeken in (10) kan dus worden weggelaten en voor de transformatie-matrix kan eenvoudig de matrix (11) genomen worden.

Draait men het spin-triëder bijvoorbeeld zoodanig, dat de hoeken Θ en Φ of Θ en Ψ constant blijven, doch de hoek Ψ resp. Φ continu toeneemt van 0 tot 2π, dan zal de eindstand samenvallen met den beginstand; de componenten van den spinor zullen daarbij echter van teeken omkeeren, of wel: de spinor-elementen worden daarbij onderling verwisseld.

Opgemerkt zij nog, dat we de assen van een spin-triëder steeds aanduiden met ξ-, η- en ζ-as, als in fig. 1. De in (4) optredende ξ en η hebben met deze aanduidingen geenerlei verband.

2 - SPINORVELD; DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Is in elk punt der ruimte een spinor $S(x, y, z)$ gegeven, dan spreken we van een *spinorveld,* wanneer de componenten van de toegevoegde nulvectoren continue en differentieerbare éénduidige functies van de coördinaten zijn.

Om te komen tot een analytische beschrijving van het spinorveld, voegen we aan elk punt een eigen spin-triëder toe en betrekken daarop de componenten van den plaatselijken spinor. Het spinorveld verschijnt dan beschreven op een *distributie van spin-triëders*. Daar we later de transformatie-matrix (11) willen gebruiken, die uitsluitend geldt voor draaiingen, moeten de locale triëders den draaizin bezitten van het grondtriëder. Zulk een distributie van spin-triëders kunnen we geheel bepalen door de hoeken van Euler, welke een willekeurig triëder der distributie maakt met het grondtriëder, te geven als continue functies van de coördinaten.

3 - ORTHOGONALE KROMLIJNIGE COÖRDINATEN EN DAARMEDE SAMENHANGENDE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Voeren we met de formules

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{14}$$

orthogonale kromlijnige coördinaten ξ, η, ζ in, dan vormen de oppervlakken:

$$\xi = C_1, \quad \eta = C_2, \quad \zeta = C_3 \tag{15}$$

bij veranderlijke C-waarden, een tripel-orthogonaal stelsel van oppervlakken. De drie door het punt x, y, z gaande exemplaren van dit stelsel snijden elkaar volgens de drie coördinaatlijnen, waarop uitsluitend ξ, η of ζ verandert. De raak-eenheidsvectoren in het beschouwde punt aan deze krommen en wijzende in de richting van toenemende coördinaatwaarden, bepalen een orthogonaal triëder. Beschouwen we de aldus bepaalde triëders in de punten van de ruimte, waarin de Jacobiaan van de transformatie

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \tag{16}$$

van nul verschillend is en die behooren bij de punten van een exemplaar van het stelsel $\zeta = C_3$, dan zullen deze triëders denzelfden draaizin bezitten, omdat twee exemplaren van dit stelsel elkaar binnen het bedoelde ruimtegebied niet snijden. Bij veranderlijke C_3 blijft die draaizin behouden, welke dus voor alle zoo bepaald triëders dezelfde is. Verschilt hij van den draaizin van het grondtriëder, dan kunnen we door de substitutie $\zeta' = -\zeta$ dit verschil opheffen. We kunnen ons de coördinaten ξ, η, ζ dus steeds zóó gekozen denken, dat de triëders den draaizin van het grondtriëder bezitten. Zij vormen dan een distributie van spin-triëders over het beschouwde ruimtegebied, die innig samenhangt met de ingevoerde orthogonale kromlijnige coördinaten. De determinantwaarde van de bijbehoorende matrix (7), luidende:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_\xi}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{1}{E_\xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{1}{E_\xi}\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{1}{E_\eta}\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{1}{E_\eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{1}{E_\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{1}{E_\zeta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{1}{E_\zeta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{1}{E_\zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{17}$$

waarin

$$E_i = + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad i = \xi, \eta, \zeta$$

bedraagt dan juist $+1$. Aan de andere kant is deze waarde ook gelijk aan

$$\frac{J}{E_\xi E_\eta E_\zeta}$$

zoodat voor het meerbedoelde ruimtegebied geldt:

$$J = E_\xi E_\eta E_\zeta. \tag{18}$$

De punten, waarin $J = 0$, zijn de singuliere punten der transformatie. De stand van de daarbijhoorende spin-triëders is onbepaald.

Dikwijls vormen de singuliere punten slechts een ééndimensionale verzameling of ze liggen geïsoleerd, zoodat het bovenbedoelde ruimtegebied de geheele ruimte omvat op enkele punten of krommen, resp. deelen daarvan, nà.

Wordt er een distributie van spin-triëders gedefinieerd door de hoeken van Euler te geven als willekeurige continue functies van de coördinaten, dan zal deze in het algemeen niet op de bovenomschreven wijze samenhangen met orthogonale kromlijnige coördinaten.

Veronderstellen we namelijk, dat er het tripel-orthogonale stelsel van oppervlakken bij hoort, dat gegeven wordt door

$$\xi\,(x,\,y,\,z) = C_\xi$$
$$\eta\,(x,\,y,\,z) = C_\eta$$
$$\zeta\,(x,\,y,\,z) = C_\zeta$$

of ook door

$$z = f_i\,(x,\,y,\,C_i) \qquad\qquad i = \xi,\,\eta,\,\zeta$$

nà oplossing naar z, dan zullen de normalen in het gemeenschappelijke punt x, y, z dier oppervlakken, richtingscosinussen hebben, welke evenredig zijn met de grootheden uit het schema:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x},\ \frac{\partial f_i}{\partial y},\ -1 \qquad\qquad i = \xi,\,\eta,\,\zeta$$

De richting dezer normalen moeten echter samenvallen met de richtingen van de ξ, η en ζ-as van het aan dit punt toegevoegde spin-triëder. Noemen we nu de richtingscosinussen dier assen, die door de elementen van de matrix (7) worden gegeven

$$a\,(i,\,k) \qquad\qquad i = \xi,\,\eta,\,\zeta\ ;\ k = x,\,y,\,z$$

dan moeten dus de volgende evenredigheden bestaan:

$$\frac{a\,(i,\,x)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x}} = \frac{a\,(i,\,y)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial y}} = \frac{a\,(i,\,z)}{-1} \qquad\qquad i = \xi,\,\eta,\,\zeta$$

Lossen we hieruit $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ en $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ op, dan vinden we uit de identiteit

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y} \qquad\qquad i = \xi,\,\eta,\,\zeta$$

de volgende betrekkingen, waaraan de elementen van de matrix L uit formule (7) moeten voldoen:

$$\sum_{cycl} \left[a(i, x) \frac{\partial}{\partial z} a(i, y) - a(i, y) \frac{\partial}{\partial z} a(i, x)\right] = 0 \qquad i = \xi, \eta, \zeta \tag{19}$$

waarin bij de sommatie x, y en z cyclisch verwisseld moeten worden. Het voldaan zijn aan deze betrekkingen is, zooals bekend, niet alleen noodig maar ook voldoende voor het bestaan van bij de gegeven distributie behoorende orthogonale kromlijnige coördinaten.

We willen uit (19) nog een betrekking afleiden, die ons later te pas zal komen (Hoofdstuk IV, paragraaf 3).

Tellen we de drie betrekkingen (19) op, dan kunnen we de verkregen som met behulp van de bestaande relaties tusschen de richtingscosinussen herleiden tot:

$$\sum_{cycl} \left[a(\xi, x) \frac{\partial}{\partial z} a(\xi, y) + a(\eta, x) \frac{\partial}{\partial z} a(\eta, y) + a(\zeta, x) \frac{\partial}{\partial z} a(\zeta, y)\right] = 0 \tag{20}$$

Vullen we hierin de uitdrukkingen voor de richtingscosinussen in uit (7), dan wordt na eenige herleiding de gezochte relatie:

$$\begin{aligned} &\beta\delta' - \delta\beta' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma' + i(\beta\delta'' - \delta\beta'' + \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + \\ &\qquad + \alpha\delta''' - \delta\alpha''' + \beta\gamma''' - \gamma\beta''' = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

gevonden. Hierin hebben we ter afkorting de differentiatie naar x, y en z met 1, 2 resp. 3 accenten aangeduid.

Als voorbeelden van met orthogonale kromlijnige coördinaten samenhangende distributies van spin-triëders noemen we:

a. de lineaire distributie, bij de lineaire orthogonale coördinaten:

$$\xi = x, \ \eta = y, \ \zeta = z \ ; \ \Theta = \Phi = \Psi = 0 \tag{22}$$

alle spin-triëders staan evenwijdig aan het grondtriëder. We hebben

$$J = 1 \tag{22, a}$$

zoodat er geen singuliere punten optreden.

b. de spherische distributie, bij de spherische coördinaten, (fig. 2),

$$\xi = \vartheta, \ \eta = \varphi, \ \zeta = r \ ; \ \ \Theta = \vartheta, \ \Phi = -\frac{\pi}{2}, \ \Psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

de ζ-as is steeds langs den radius-vector gericht.
We hebben

$$J = r^2 \sin \vartheta \tag{23, a}$$

dus zijn alle punten op de z-as singulier.

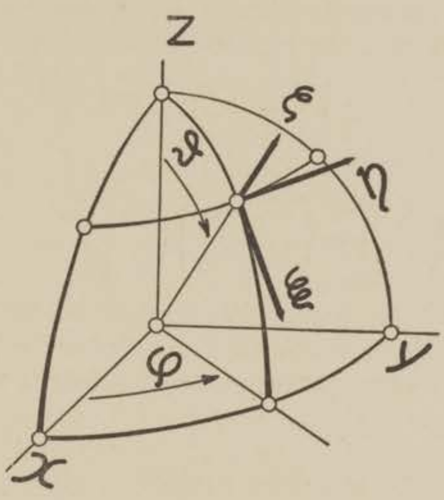

Fig. 2.

c. de cylindrische distributie. bij de cylinder-coördinaten:

$$\xi = r,\ \eta = \varphi,\ \zeta = z\ ;\ \Theta = 0 \quad \Phi + \Psi = \varphi. \tag{24}$$

We hebben

$$J = r \tag{24, a}$$

dus is de oorsprong een geïsoleerd singulier punt.

4 - DE GOLFFUNCTIE VAN PAULI ALS SPINORVELD

In de spin-theorie van Pauli wordt de physische situatie van een electron door de twee-componentige golffunctie

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\frac{1}{2}} \\ \Psi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{25}$$

beschreven, waarvan de componenten éénduidige functies van de coördinaten en den tijd zijn. Daar deze golffunctie van Pauli identiek blijkt te zijn met een spinorveld, is de invariantie dier beschrijving tegenover ruimte-draaiingen gewaarborgd. Dit spinorveld verschijnt hier gedefinieerd op de lineaire distributie (22) van spin-triëders, we kunnen het echter zonder bezwaar op een willekeurige andere distributie transformeeren, omdat er dan, op grond van de genoemde draaiings-invariantie, een volkomen aequivalente beschrijving der physische situatie wordt verkregen.

Volgens de voorgaande paragrafen, moet deze transformatie geschieden met de matrix (11), waarbij de golffunctie overgaat in:

$$\overline{\Psi} = T\Psi$$

of, voluit geschreven, in:

$$\begin{pmatrix} \overline{\Psi}_{\frac{1}{2}} \\ \overline{\Psi}_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\frac{1}{2}} \\ \Psi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Daar de distributie bepaald wordt door de hoeken van Euler te geven als continue functies der coördinaten, zullen α en β, als continue functies dier hoeken, eveneens continue functies van de coördinaten zijn.

Ook de matrix T zal dus op continue wijze van de coördinaten afhangen, maar niet steeds op éénduidige wijze.

De spin-triëders, die in de distributie aan de punten van een gesloten kromme zijn toegevoegd, kunnen namelijk uit het triëder, dat hoort bij een willekeurig punt daarvan, worden afgeleid, door het, uitgaande van dat punt, langs de kromme te bewegen en het op continue wijze van stand te laten veranderen. De transformatiematrix T zal daarbij evenzeer op continue wijze veranderen, om te blijven passen bij de continue opeenvolging van standen. Bij terugkomst in het punt van uitgang zal het bewogen triëder weer den ouden stand hebben aangenomen; de dan verkregen matrix T hoort ook weer bij dien stand, maar het zal van de doorloopen tusschenstanden kunnen afhangen, met welk teeken zij moet worden genomen. De matrix T kan dus tweeduidig blijken te zijn als functie van de coördinaten.

Waren de componenten van Ψ éénduidige functies, dit behoeft dus voor de componenten van $\overline{\Psi}$ niet meer het geval te zijn. Deze laatste kunnen tweeduidige functies worden, waarbij de tweeduidigheid uitsluitend een teekenkwestie is, zooals bij een tweedemachtswortel.

De matrix T behoorende bij de *spherische distributie* luidt:

$$T_{sph} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{i}{2}\varphi} & \sin \frac{1}{2}\vartheta e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ -\sin \frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{i}{2}\varphi} & \cos \frac{1}{2}\vartheta e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \tag{27}$$

en voor de *cylindrische distributie:*

$$T_{cyl} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Zij hangen beide op tweeduidige wijze van de coördinaten af. Groeit φ continu met 2π aan door beweging in den zin van bovenstaande beschouwing langs een kromme rond de z-as, dan keert het teeken der matrices om. Nà transformatie op één dezer distributies geldt dus voor de golffunctie:

$$\overline{\Psi}(\varphi + 2\pi) = -\overline{\Psi}(\varphi). \tag{29}$$

In (25) hebben de spinorcomponenten de physische beteekenis, dat

$$|\Psi_{\frac{1}{2}}|^2 \, dxdydz \text{ resp. } |\Psi_{-\frac{1}{2}}|^2 \, dxdydz$$

de waarschijnlijkheid aangeeft, waarmede het electron ten tijde t op de plaats met coördinaten x, y, z zal worden gevonden met de z-component van den spin wijzend in de positieve resp. negatieve z-as-richting. In dat geval zal nà transformatie (met J uit formule (16)),

$$|\overline{\Psi}_{\frac{1}{2}}|^2 \, Jd\xi d\eta d\zeta \text{ resp. } |\overline{\Psi}_{-\frac{1}{2}}|^2 \, Jd\xi d\eta d\zeta$$

de waarschijnlijkheid aangeven, waarmede het electron daar zal worden aangetroffen met den component van den spin langs de ζ-as van het aan het bedoelde punt toegevoegde spin-triëder wijzend in de positieve resp. negatieve richting dier as.

5 - TRANSFORMATIE VAN OPERATOREN OP EEN DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

In de spin-theorie van Pauli treden Hermite'sche operatoren op van de gedaante:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}, \qquad \omega^{\dagger}_{ik} = \omega^{*}_{ki}\ ^{1)} \tag{30}$$

waarin de ω_{ik} operatoren zijn, die werken op de coördinaten; gewoonlijk zijn het differentiaaloperatoren. Wordt een nieuwe distributie van spin-triëders ten grondslag gelegd, dan zullen ook de operatoren daarop getransformeerd moeten worden. Uit de transformatiewijze (26) van golffuncties volgt, dat de transformatie van operatoren wordt gegeven door:

$$\overline{\Omega} = T\Omega T^{-1}. \tag{31}$$

Dit levert uitgeschreven:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{11} &= \alpha\ \omega_{11}\alpha^* + \alpha\ \omega_{12}\beta^* + \beta\ \omega_{21}\alpha^* + \beta\ \omega_{22}\beta^* \\ \overline{\omega}_{12} &= -\alpha\ \omega_{11}\beta + \alpha\ \omega_{12}\alpha - \beta\ \omega_{21}\beta + \beta\ \omega_{22}\alpha \\ \overline{\omega}_{21} &= -\beta^*\omega_{11}\alpha^* - \beta^*\omega_{12}\beta^* + \alpha^*\omega_{21}\alpha^* + \alpha^*\omega_{22}\beta^* \\ \overline{\omega}_{22} &= \beta^*\omega_{11}\beta - \beta^*\omega_{12}\alpha - \alpha^*\omega_{21}\beta + \alpha^*\omega_{22}\alpha \end{aligned} \tag{32}$$

Omdat T unitair is zal $\overline{\Omega}$ wederom Hermite'sch zijn:

$$\overline{\omega}^{\dagger}_{ik} = \overline{\omega}^{*}_{ki}. \tag{33}$$

Daar (31) de gedaante heeft van een gelijkvormigheidstransformatie zullen alle algebraïsche vergelijkingen tusschen operatoren in onveranderden vorm blijven bestaan voor de getransformeerde operatoren. In het bijzonder behouden de relaties, die betrekking hebben op de commutatoren van operatoren, hare geldigheid.

6 - DIAGONALISEERENDE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Wordt bij transformatie van een gegeven operator Ω op een bepaalde distributie

$$\overline{\omega}_{12} = 0$$

dan volgt uit (33), dat dan ook

$$\overline{\omega}_{21} = 0$$

zal zijn. $\overline{\Omega}$ neemt dan dus den diagonaalvorm aan en we noemen

---

1) De geadjungeerde van een operator wordt met † aangeduid; zoo geldt bijvoorbeeld: $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger} = -\frac{\partial}{\partial x}$.

die bepaalde distributie: *een diagonaliseerende distributie voor den operator Ω.*

Er kan zich daarbij het bijzondere geval voordoen, dat bovendien geldt:

$$\overline{\omega}_{11} = \overline{\omega}_{22}.$$

Dan wordt $\overline{\Omega}$ als het ware een ,,veelvoud'' van de eenheidsmatrix.

7 - OPERATOREN VAN DE 1STE ORDE

Zijn de ω_{ik} in (30) differentiaaloperatoren van de n-de orde, dan noemen we $\Omega^{(n)}$ een operator van de n-de orde. De meest algemeene Hermite'sche operator van de 1ste orde kan, met aan de vector-analyse ontleende notatie, geschreven worden in de gedaante:

$$\Omega^{1)} = \begin{pmatrix} i\,(\vec{V}_{11}\,.\,\mathrm{grad} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{V}_{11}) + S_{11} & i\,(\vec{V}_{12}\,.\,\mathrm{grad} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{V}_{12}) + S_{12} \\ i\,(\vec{V}^*_{12}\,.\,\mathrm{grad} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{V}^*_{12}) + S^*_{12} & i\,(\vec{V}_{22}\,.\,\mathrm{grad} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{V}_{22}) + S_{22} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Hierin bezit de ,,vector'' $\vec{V}_{ik}$ de componenten $V^{(1)}_{ik}$, $V^{(2)}_{ik}$, $V^{(3)}_{ik}$ die functies zijn van de coördinaten, met dien verstande, dat componenten met twee gelijke indices reëele functies zijn. Dit laatste geldt ook voor de functies S_{ik}.

De omvorming van de algemeene Hermite'sche matrix met elementen:

$$\omega_{ik} = a_{ik}\frac{\partial}{\partial x} + b_{ik}\frac{\partial}{\partial y} + c_{ik}\frac{\partial}{\partial z} + d_{ik} \tag{35}$$

in de bovenstaande gedaante, geschiedt op grond van (30) met behulp van relaties van de soort:

$$\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger} = -\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x}\right).$$

Substitutie van (35) in (30) levert namelijk:

$$(a^*_{ki} + a_{ik})\frac{\partial}{\partial x} + (b^*_{ki} + b_{ik})\frac{\partial}{\partial y} + (c^*_{ki} + c_{ik})\frac{\partial}{\partial z} + d^*_{ki} - d_{ik} +$$
$$+ \frac{\partial a_{ik}}{\partial x} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial y} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial z} = 0,$$

waaruit we afleiden:

$$a^*_{ki} + a_{ik} = 0$$
$$b^*_{ki} + b_{ik} = 0$$
$$c^*_{ki} + c_{ik} = 0$$

en

$$d^*_{ki} - d_{ik} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial y} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial z} = 0.$$

Voor $i = k$ volgt hieruit:

$$a_{kk} = iV^{(1)}_{kk},\ b_{kk} = iV^{(2)}_{kk},\ c_{kk} = iV^{(3)}_{kk}$$

en

$$d_{kk} = S_{kk} + \frac{i}{2}\operatorname{div} \vec{V}_{kk},$$

waarin $\vec{V}_{kk}$ een reëele „vector" is en S_{kk} een reëele functie. De omvorming van de beide andere elementen van $\Omega^{(1)}$ geschiedt op geheel analoge wijze.

8 - DIAGONALISEERENDE DISTRIBUTIES VOOR OPERATOREN VAN DE 1STE ORDE

Met behulp van de formules (32) kunnen we de elementen $\bar{\omega}^{(1)}_{ik}$ van $\bar{\Omega}^{(1)}$ berekenen. We volstaan hier met de bepaling van $\bar{\omega}^{(1)}_{12}$, met het doel de vergelijking:

$$\bar{\omega}_{12}{}^{(1)} = 0 \tag{36}$$

te onderzoeken. Onder invoering van de verhouding $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ en onder toepassing van de relatie:

$$F \operatorname{div} \vec{K} = \operatorname{div} F\vec{K} - \vec{K} \,.\, \operatorname{grad} F$$

die geldt voor een willekeurigen vector $\vec{K}$ en een willekeurige functie F der coördinaten, kan (36) in een voor het onderzoek geschikte gedaante worden gebracht. Daarbij moet er op gelet worden, dat voor de operatie DF, waarin D een differentiaal-operator van de 1ste orde moge voorstellen en F een willekeurige functie, waarop deze kan werken, het volgende geldt:

$$DF \equiv FD + (DF)$$

waarin we met (DF) het resultaat der werking van D op F hebben aangegeven.

Na eenige herleiding wordt dan voor (36) gevonden:

$$\vec{V} \cdot \text{grad} + \frac{1}{\alpha} \vec{V} \cdot \text{grad}\, \alpha + \tfrac{1}{2} \operatorname{div} \vec{V} + \tfrac{1}{2} (\vec{V}_{11} + \vec{V}_{22}) \cdot \text{grad}\, \gamma - iS = 0. \quad (37)$$

Hierin werd ter afkorting gesteld:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \gamma^2 \vec{V}_{12}^* + \gamma (\vec{V}_{11} - \vec{V}_{22}) - \vec{V}_{12} \\ S &= \gamma^2 S_{12}^* + \gamma (S_{11} - S_{22}) - S_{12} \end{aligned} \quad (38)$$

Het is duidelijk, dat aan (37) niet kan worden voldaan zonder de „coëfficiënt" van den operator grad nul te maken. Dit vereischt:

$$\vec{V} = 0. \quad (39)$$

Hierdoor vereenvoudigt zich (37) ingrijpend. Er blijft nog een partieele differentiaalvergelijking van de eerste orde over, luidende:

$$\tfrac{1}{2} (\vec{V}_{11} + \vec{V}_{22}) \cdot \text{grad}\, \gamma = i\, (\gamma^2 S_{12}^* + \gamma (S_{11} - S_{22}) - S_{12}). \quad (40)$$

In (39) en (40) treedt uitsluitend de verhouding γ op. Merkwaardigerwijs hangt het dus uitsluitend van

$$\gamma = i \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta e^{-i\Psi} \quad (41$$

af, of de distributie diagonaliseerend karakter zal bezitten ten opzichte van $\Omega^{(1)}$ of niet. Slechts de knoopenlijn en de ζ-as worden vastgelegd; een draaiing om de laatste blijft nog vrij.

9 – DIAGONALISEERBARE OPERATOREN VAN DE 1STE ORDE

De eisch (39) valt uiteen in de 3 kwadratische vergelijkingen:

$$\gamma^2 V_{12}^{(i)*} + \gamma (V_{11}^{(i)} - V_{22}^{(i)}) - V_{12}^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

voor γ. Daar deze in het algemeen geen gemeenschappelijke wortels zullen bezitten, zal de operator $\Omega^{(1)}$ in het algemeen geen diagonaliseerende distributies bezitten. Maar zelfs indien het in een bepaald geval voorkomt, dat aan (42) kan worden voldaan door één functie γ, dan zal in het algemeen deze functie (40) weer niet bevredigen. In het geval, dat de eisch (39) komt te vervallen, zullen er steeds diagonaliseerende distributies bestaan, want dan behoeft γ slechts te voldoen aan (40). Nu vervalt de eisch (39) slechts, indien:

$$\vec{V}_{11} = \vec{V}_{22} = \vec{A} \text{ en } \vec{V}_{12} = \vec{V}^*_{12} = 0.$$

De operator

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} i\,(\vec{A}\,.\,\mathrm{grad} + \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{A}) + S_{11} & S_{12} \\ S^*_{12} & i\,(\vec{A}\,.\,\mathrm{grad} + \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\vec{A}) + S_{22} \end{pmatrix} \tag{43}$$

verkeert dus in het diagonaliseerbare geval. De *diagonaliseerende verhouding* γ moet daarbij voldoen aan de vergelijking:

$$\vec{A}\,.\,\mathrm{grad}\,\gamma = i\,(\gamma^2 S^*_{12} + \gamma\,(S_{11} - S_{22}) - S_{12}). \tag{44}$$

10 - HERMITE'ISEERING VAN DIFFERENTIAALOPERATOREN ω BIJ INVOERING VAN KROMLIJNIGE COÖRDINATEN

Is een differentiaal-operator ω oorspronkelijk als Hermite'sche operator gedefinieerd met betrekking tot de lineaire coördinaten x, y, z, dan zal bij invoering van kromlijnige coördinaten ξ, η, ζ, zooals bekend, het Hermite'sche karakter verloren gaan, wegens het optreden van de dichtheidsfunctie J, die gelijk is aan den Jacobiaan (16) der transformatie. Men kan dan overgaan tot hermite'iseering van den operator door hem te vervangen door

$$J^{-\frac{1}{2}}\omega J^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

11 - BESCHRIJVING VAN EEN VECTORVELD OP EEN DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Is er een vectorveld $V\,(x, y, z)$ gegeven door middel van componenten V_x, V_y, V_z ten opzichte van het grondtriëder, d.i. ten opzichte van de lineaire distributie van spin-triëders, dan kunnen we dit vectorveld beschrijven op een distributie van spin-triëders, die hoort bij een gegeven spinorveld. De componenten V_ξ, V_η, V_ζ ten opzichte van het plaatselijke spin-triëder worden dan uit V_x, V_y, V_z gevonden door ze te transformeeren met de matrix L, formule (17).

12 - DE MATRIX-VECTOR $\vec{\sigma}$ VAN PAULI EN ZIJN TRANSFORMATIE

Met de waarden:

$$\begin{array}{lll} \omega_x, & 0, & 0 \\ \omega_y, & -\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0, & \omega_z \end{array}$$

voor de hoeken van Euler, verkrijgen we, als we de ω's zeer klein nemen, achtereenvolgens de infinitesimale draaiingen ω_x, ω_y, ω_z om de assen van het grondtriëder. Door substitutie van deze waarden in (6) vinden we voor de bijbehoorende unitaire matrices:

$$T_x = 1 + \frac{i}{2}\,\omega_x\,\sigma_x, \quad T_y = 1 + \frac{i}{2}\,\omega_y\,\sigma_y, \quad T_z = 1 + \frac{i}{2}\,\omega_z\,\sigma_z$$

waarin:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

de componenten zijn van de *matrix-vector $\vec{\sigma}$ van Pauli*. De benaming „vector" is gerechtvaardigd, omdat zijn component σ_n in de richting $\vec{n}$ blijkens:

$$T_x T_y T_z = 1 + \frac{i}{2}\,(\omega_x\sigma_x + \omega_y\sigma_y + \omega_z\sigma_z) = 1 + \frac{i}{2}\,\omega(\vec{n}\,.\,\vec{\sigma}) = 1 + \frac{i}{2}\,\omega\sigma_n$$

hoort bij de infinitesimale draaiing $\vec{\omega} = \omega\vec{n} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ om een as in die richting.

De componenten σ_ξ, σ_η, σ_ζ van $\vec{\sigma}$, hoorende bij infinitesimale draaiingen om de assen van een spin-triëder worden dus gevonden met behulp van de matrix L bedoeld in de vorige paragraaf:

$$\vec{\sigma}' = L\,\vec{\sigma}.$$

Bij transformatie van deze $\vec{\sigma}'$ op een distributie van spin-triëders hebben we

$$\vec{\vec{\sigma}}' = T\,\vec{\sigma}'\,T^{-1},$$

en het is duidelijk, dat dan

$$\vec{\sigma}' = \vec{\sigma} \tag{47}$$

moet zijn. Dit volgt uit het verband tusschen de matrices L en T, maar kan ook direct worden ingezien. Nà transformatie toch, worden de infinitesimale draaiingen op elk spin-triëder met dezelfde operatoren beschreven als daartoe op het grondtriëder werden gebruikt.

Voor de componenten van $\vec{\sigma}$ gelden de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 1, \quad \sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \\ \sigma_y^2 &= 1, \quad \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x \\ \sigma_z^2 &= 1, \quad \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y \end{aligned} \tag{48}$$

HOOFDSTUK I

DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS ALS DIAGONALISEERENDE DISTRIBUTIE VOOR DEN OPERATOR $\vec{I}$ VAN HET TOTALE IMPULSMOMENT

1 - DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

De spherische distributie van spin-triëders wordt gedefinieerd door de formules (23). De betrokken matrix T wordt in (27) gevonden, waaruit we aflezen:

$$\alpha = \cos \tfrac{1}{2}\vartheta e^{\frac{i}{2}\varphi}, \quad \beta = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta e^{-\frac{i}{2}\varphi} \tag{49}$$

dus

$$\gamma = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta e^{-i\varphi} \tag{50}$$

terwijl de matrix L (7,17) luidt:

$$L_{sph} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{51}$$

2 - DE OPERATOR $\vec{I}$ VAN HET TOTALE IMPULSMOMENT

In de spin-theorie van Pauli is aan het totale impulsmoment de operator

$$\vec{I} = \vec{M} + \vec{S} \tag{52}$$

toegevoegd, waarin:

$\vec{M}$, de vector-operator is van het baan-impulsmoment met de componenten:

$$\begin{aligned} M_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ M_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ M_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{53}$$

en $\vec{S}$, de vector-operator van den spin; hiervoor geldt:

$$\vec{S} = \tfrac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}. \tag{54}$$

Zoodoende verkrijgt $\vec{I}$ de componenten:

$$I_x = \begin{pmatrix} M_x & \tfrac{1}{2}\hbar \\ \tfrac{1}{2}\hbar & M_x \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} M_y & -\frac{i}{2}\hbar \\ \frac{i}{2}\hbar & M_y \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} M_z + \tfrac{1}{2}\hbar & 0 \\ 0 & M_z - \tfrac{1}{2}\hbar \end{pmatrix} \tag{55}$$

Het zijn operatoren van de 1ste orde.

3 - $\vec{I}$ IS EEN DIAGONALISEERBARE OPERATOR

Nemen we in (43) achtereenvolgens:

$$\vec{A} \equiv (0,\ \hbar z,\ -\hbar y),\quad S_{11} = S_{22} = 0, \qquad S_{12} = \tfrac{1}{2}\hbar$$

$$\vec{A} \equiv (-\hbar z,\ 0,\ \hbar x),\quad S_{11} = S_{22} = 0, \qquad S_{12} = -\frac{i}{2}\hbar$$

$$\vec{A} \equiv (\hbar y,\ -\hbar x,\ 0),\quad S_{11} = \tfrac{1}{2}\hbar,\ S_{22} = -\tfrac{1}{2}\hbar,\ S_{12} = 0$$

dan krijgen we juist de componenten (55). Elk dier componenten verkeert dus in het diagonaliseerbare geval. De diagonaliseerende verhoudingen moeten, overeenkomstig (44), achtereenvolgens bepaald worden uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial\gamma}{\partial z} - z\frac{\partial\gamma}{\partial y} &= -\frac{i}{2}(\gamma^2 - 1) \\ z\frac{\partial\gamma}{\partial x} - x\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \tfrac{1}{2}(\gamma^2 + 1) \\ x\frac{\partial\gamma}{\partial y} - y\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= -i\gamma \end{aligned} \tag{56}$$

Vermenigvuldigen we deze vergelijkingen achtereenvolgens met x, y en z, en tellen we ze daarna op, dan vinden we de kwadratische vergelijking:

$$\gamma^2 + \frac{2z}{x + iy}\gamma - \frac{x - iy}{x + iy} = 0$$

of in ruimtelijke poolcoördinaten:

$$\gamma^2 + 2 \cot \vartheta e^{-i\varphi} \gamma - e^{-2i\varphi} = 0. \tag{57}$$

Bestaat er een gemeenschappelijke oplossing van het stelsel (56) dan moet deze aan (57) voldoen. De wortels daarvan zijn:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\cos \vartheta \pm 1}{\sin \vartheta} e^{-i\varphi}. \tag{58}$$

Wordt het stelsel (56) eveneens in poolcoördinaten geschreven — bijvoorbeeld met behulp van de betrekkingen (53) — dan kan door eenvoudige substitutie geverifieerd worden, dat beide wortels inderdaad een gemeenschappelijke oplossing voorstellen.

Er bestaan dus diagonaliseerende verhoudingen voor de drie componenten tegelijk, m.a.w. $\vec{I}$ is een diagonaliseerbare operator.

4 - DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS ALS DIAGONALISEERENDE DISTRIBUTIE VOOR DEN OPERATOR $\vec{I}$

Welke zijn nu de distributies, waarop de drie componenten van $\vec{I}$ in diagonaalvorm verschijnen?

Schrijven we (41) als

$$\gamma = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta \, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \Psi\right)}$$

en de wortels (58) als

$$\gamma_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta e^{-i\varphi} \, , \quad \gamma_2 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta - \pi) \, e^{-i\varphi},$$

dan lezen we onmiddellijk af, dat de bijbehoorende stellen hoeken van Euler luiden:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \vartheta \\ \Psi_1 &= \varphi + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (59) \qquad\qquad \begin{aligned} \Theta_2 &= \vartheta - \pi \\ \Psi_2 &= \varphi + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (60)$$

terwijl de derde hoek van Euler Φ nog volkomen onbepaald blijft. Is deze eenmaal gekozen dan is de ligging van de ξ-as vastgelegd en daardoor ook de richting van de η-as.

De knoopenlijnen van de distributies (59) en (60) vallen samen, terwijl de ζ-assen langs den radius-vector liggen, bij (59) in zijn positieve richting, bij (60) juist tegengesteld. Nemen we $\Phi = -\frac{\pi}{2}$

dan verkrijgen we uit (59) blijkens (23) de spherische distributie. *Onder de diagonaliseerende distributies van $\vec{I}$ komt dus de spherische voor.*

Met diezelfde waarde van Φ geeft (60) een distributie, die van de spherische afwijkt, in zooverre de η- en ζ-as daarvan tegengesteld gericht zijn.

5 - EENIGE HERLEIDINGEN OP BASIS VAN DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE

De vergelijkingen (56) gelden, zooals hierboven bleek, voor de spherische distributie. Blijkens (53) kunnen ze ook in de gedaante

$$\begin{aligned} (M_x\gamma) &= -\tfrac{1}{2}\,\hbar\,(\gamma^2-1) \\ (M_y\gamma) &= -\tfrac{i}{2}\,\hbar\,(\gamma^2+1) \\ (M_z\gamma) &= -\,\hbar\gamma \end{aligned} \tag{61}$$

geschreven worden. We schreven hier $(M_x\gamma)$ om het resultaat der werking van den operator M_x op γ aan te duiden, ter onderscheiding van den operator $M_x\gamma$, welke in zijn werking gelijk is aan

$$\gamma M_x + (M_x\gamma).$$

Het gebruik van haakjes dient in het volgende dikwijls voor het maken dezer onderscheiding (zie ook: Inleiding, paragraaf 8).

Voeren we als volgt operatoren P en Q in:

$$\begin{aligned} \hbar P &= M_x + iM_y = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \hbar Q &= M_x - iM_y = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \end{aligned} \tag{62}$$

waarvoor geldt:

$$P^* = -\,Q \tag{63}$$

dan kunnen we uit de twee eerste vergelijkingen van (61) afleiden:

$$(Q\gamma) = -\,\gamma^2. \tag{64}$$

We bewijzen nu het bestaan van de volgende gelijkheden:

$$1^\circ. \qquad \alpha\ (P\alpha^*) + \beta\ (P\beta^*) + \alpha\beta^* = \quad W \tag{65, a}$$

$$\alpha^*\ (P\alpha\ ) + \beta^*\ (P\beta\ ) - \alpha\beta^* = - W \tag{65, b}$$

$$\alpha\ (Q\alpha^*) + \beta\ (Q\beta^*) + \alpha^*\beta = \quad W^* \tag{65, c}$$

$$\alpha^*\ (Q\alpha\ ) + \beta^*\ (Q\beta\ ) - \alpha^*\beta = - W^* \tag{65, d}$$

met

$$W = \frac{e^{i\varphi}}{2 \sin \vartheta} \tag{65, e}$$

$$2^\circ. \quad \alpha\,(M_z\alpha^*) + \beta\ (M_z\beta^*) + \tfrac{1}{2}\hbar\,(\alpha\alpha^* - \beta\beta^*) = \quad U \tag{66, a}$$

$$\alpha\,(M_z\alpha\ ) + \beta^*\ (M_z\beta\ ) - \tfrac{1}{2}\hbar\,(\alpha\alpha^* - \beta\beta^*) = - U^* \tag{66, b}$$

met

$$U = 0. \tag{66, c}$$

Bewijs van 1°. Uit $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ volgt: $P\,(\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) = 0$.

Hiermede herleiden we (65, *a*) tot

$$W = -\,[\alpha^*\,(P\alpha) + \beta^*\,(P\beta) - \alpha\beta^*]$$

hetgeen in (65, *b*) vermeld staat. Nemen we van beide leden van (65, *a*) de complex-geconjugeerde waarden dan vinden we met in achtneming van (63)

$$W^* = -\,[\alpha^*\,(Q\alpha) + \beta^*\,(Q\beta) - \alpha^*\beta]$$

hetwelk identiek is met (65, *d*). Evenzoo wordt (65, *c*) uit (65, *b*) afgeleid. Om de waarde van W te vinden gaan we uit van (64), waaruit we door complexe conjugatie afleiden:

$$(P\gamma^*) = \gamma^{*2}$$

hetwelk gelijk is aan

$$\alpha^*\,(P\beta^*) - \beta^*\,(P\alpha^*) = \beta^{*2}.$$

Anderzijds hebben we

$$\alpha^*\,(P\beta^*) + \beta^*\,(P\alpha^*) = (P\alpha^*\beta^*).$$

Dit zijn twee vergelijkingen waaruit we $(P\beta^*)$ en $(P\alpha^*)$ kunnen oplossen; substitutie in (65, *a*) en herleiding geeft dan:

$$W = \frac{1}{2\alpha^*\beta^*}\,(P\alpha^*\beta^*) + \tfrac{1}{2}\gamma^*.$$

Benutten we nu de uitdrukking (62) voor P dan vinden we met

$$\alpha^*\beta^* = \tfrac{1}{2}\sin\vartheta,\ \ \gamma^* = \frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,e^{i\varphi}$$

gemakkelijk de uitdrukking (65, e) voor W.

Bewijs van 2°. Met

$$M_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\ \text{uit (53)}$$

leiden we uit (49) af:

$$\alpha\,(M_z\alpha^*) = -\tfrac{1}{2}\hbar\alpha\alpha^*$$
$$\beta\,(M_z\beta^*) = \ \ \tfrac{1}{2}\hbar\beta\beta^*$$

waaruit de juistheid van (66, a) en (66, c) onmiddellijk volgt, terwijl (66, b) wegens

$$M_z^* = -M_z$$

door complexe conjugatie uit (66, a) ontstaat.

6 - TRANSFORMATIE VAN $\vec{I}$ OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Daar $\vec{I}$ op de spherische distributie den diagonaalvorm aanneemt, kunnen we zijn transformatie gemakkelijk uitvoeren. Letten we namelijk op de transformatieformules (32), alsmede op de formules (65) resp. (66), dan vinden we voor de getransformeerden van

$$I_x + iI_y = \hbar\begin{pmatrix} P & 1 \\ 0 & P \end{pmatrix}\ \text{en}\ I_x - iI_y = \hbar\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 1 & Q \end{pmatrix}$$

onmiddellijk:

$$\overline{I}_x + i\overline{I}_y = \hbar\begin{pmatrix} P+W & 0 \\ 0 & P-W \end{pmatrix} = \hbar P + \tfrac{1}{2}\hbar\frac{e^{i\varphi}}{\sin\vartheta}\,\sigma_z$$

$$\overline{I}_x - i\overline{I}_y = \hbar\begin{pmatrix} Q+W^* & 0 \\ 0 & Q-W^* \end{pmatrix} = \hbar Q + \tfrac{1}{2}\hbar\frac{e^{-i\varphi}}{\sin\vartheta}\,\sigma_z$$

en voor de getransformeerde van I_z:

$$\overline{I}_z = \begin{pmatrix} M_z + U & 0 \\ 0 & M_z - U^* \end{pmatrix} = M_z.$$

$\vec{I}$ bezit dus de componenten:

$$\begin{aligned}\overline{I}_x &= M_x + \tfrac{1}{2}\hbar\,\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\sigma_z \\ \overline{I}_y &= M_y + \tfrac{1}{2}\hbar\,\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\sigma_z \qquad (67) \\ \overline{I}_z &= M_z\end{aligned}$$

Merkwaardig is de uitkomst voor $\overline{I}_z$.

HOOFDSTUK II

TRANSFORMATIE VAN DEN OPERATOR I^2 OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS; DE OPERATOR $\mathcal{O}$

1 - DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS ALS DIAGONALISEERENDE DISTRIBUTIE VOOR DEN OPERATOR I^2

Op grond van de opmerking aan het eind van paragraaf 5 der Inleiding, zal de transformatie van den operator:

$$I^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 \tag{68}$$

op een distributie van spin-triëders volgens het voorschrift:

$$\overline{I^2} = (\overline{I_x})^2 + (\overline{I_y})^2 + (\overline{I_z})^2 \tag{69}$$

onmiddellijk kunnen geschieden, zoodra de componenten van $\vec{I}$ daarop getransformeerd zijn. Daar de som van kwadraten van diagonaalmatrices weer een diagonaalmatrix is, zal elke diagonaliseerende distributie voor $\vec{I}$ eveneens I^2 diagonaliseeren. *In het bijzonder zal I^2 dus op de spherische distributie in diagonaalvorm verschijnen.* De transformatie daarop zullen we echter niet uitvoeren volgens (69), maar langs een anderen weg, waardoor we de diagonaal-elementen van $\overline{I^2}$ vanzelf in een interessanten vorm verkrijgen.

2 - HERLEIDING VAN HET KWADRAAT VAN EEN MET $\vec{\sigma}$ VERWISSELBAREN VECTOR-OPERATOR

Is $\vec{V}$ een vector-operator, welke uitsluitend werkt op de coördinaten, dan is hij verwisselbaar met $\vec{\sigma}$. Betrekken we het scalaire product

$$(\vec{\sigma} \,.\, \vec{V}) = \sigma_x V_x + \sigma_y V_y + \sigma_z V_z$$

in de beschouwing, dan kunnen we het kwadraat van $\vec{I}$ als volgt herleiden. We vinden namelijk onder toepassing van de formules (48):

$$(\vec{\sigma}\,.\,\vec{V})^2 = \sum_{cycl.} \sigma_x^2 V_x^2 + \sum_{cycl.} (\sigma_x\sigma_y V_x V_y + \sigma_y\sigma_x V_y V_x)$$

$$= \sum_{cycl.} V_x^2 + i \sum_{cycl.} \sigma_z (V_x V_y - V_y V_x)$$

$$= V^2 + i\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{W})$$

met

$$W_x = V_y V_z - V_z V_y,\ \text{cycl.} \tag{70}$$

waaruit we afleiden:

$$V^2 = (\vec{\sigma}\,.\,\vec{V})^2 - i\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{W}). \tag{71}$$

Hier staat V^2 uitgedrukt in scalaire producten, hetgeen voordeelig is met het oog op zijn transformatie op een distributie van spin-triëders. Beschrijven we namelijk $\vec{\sigma}$ en $\vec{V}$ als vectorvelden op zoo'n distributie dan geldt volgens de opmerkingen in paragraaf 11 van de Inleiding:

$$\vec{V}' = L\,\vec{V}$$

$$\vec{\sigma}' = L\,\vec{\sigma}$$

en

$$(\vec{\sigma}\,.\,\vec{V}) = (\vec{\sigma}'\,.\,\vec{V}') \tag{72}$$

omdat zulk een scalair product invariant is. Opgemerkt zij, dat bij deze invariantie de door ons gekozen volgorde der factoren in het scalaire product een wezenlijke rol speelt.

Wordt zij omgekeerd, dan is in het algemeen

$$(\vec{V}\,.\,\vec{\sigma}) \neq (\vec{V}'\,.\,\vec{\sigma}'),$$

omdat $\vec{V}'$ en $\vec{\sigma}'$ niet meer verwisselbaar behoeven te zijn. Dit zal het geval zijn als de operator $\vec{V}$ een differentiaaloperator is, die werkt op coördinaten, waarvan L afhangt.

Door transformatie op een distributie van spin-triëders gaat (72) met in achtneming van (47) over in:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{V})} = (\overline{\vec{\sigma}}'\,.\,\overline{\vec{V}}') = (\vec{\sigma}\,.\,\overline{\vec{V}}') \tag{73}$$

3 - HERLEIDING VAN DEN OPERATOR M^2

Uit de bekende verwisselingsrelaties voor de componenten van $\vec{M}$, luidende

$$M_y M_z - M_z M_y = i\hbar M_x \text{ (cycl)}$$

volgt, dat we ter herleiding van M^2 in de gedaante (71)

$$\vec{W} = i\hbar\vec{M}$$

moeten nemen. We verkrijgen zoodoende:

$$M^2 = (\vec{\sigma} \, . \, \vec{M})^2 + \hbar \, (\vec{\sigma} \, . \, \vec{M}). \tag{74}$$

We vermelden nog de volgende gedaante dezer formule:

$$M^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = [(\vec{\sigma} \, . \, \vec{M}) + \tfrac{1}{2}\hbar]^2. \tag{75}$$

4 - HERLEIDING VAN DEN OPERATOR I^2

Daar met (48) gemakkelijk het bestaan van de volgende verwisselingsrelaties

$$\sigma_x I_y - I_y \sigma_x = 2i\sigma_z \text{ (cycl)}$$

wordt bewezen, is I^2 niet verwisselbaar met $\vec{\sigma}$. Ter herleiding van I^2 kunnen we ons dan niet rechtstreeks op (71) baseeren. We herleiden nu als volgt:

$$I^2 = (M_x + S_x)^2 + (M_y + S_y)^2 + (M_z + S_z)^2$$

$$= M^2 + \tfrac{3}{4}\hbar^2 + \hbar \, (\vec{\sigma} \, . \, \vec{M}),$$

hetgeen met (74) overgaat in:

$$I^2 = (\vec{\sigma} \, . \, \vec{M})^2 + 2\hbar(\vec{\sigma} \, . \, \vec{M}) + \tfrac{3}{4}\hbar^2.$$

Analoog met (75) laat zich dit weer schrijven als:

$$I^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = [(\vec{\sigma} \cdot \vec{M}) + \hbar]^2. \tag{76}$$

5 - DE OPERATOR $\vec{M}$ HEEFT, ALS VECTOR-VELD BESCHREVEN OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS, SLECHTS TWEE VAN NUL VERSCHILLENDE COMPONENTEN; HERMITE'ISEERING DIER COMPONENTEN

Wordt de operator $\vec{M}$ in den zin van paragraaf 11 der Inleiding beschreven op de spherische distributie dan vinden we zijn componenten M'_ϑ, M'_φ, M'_r op de assen van een spin-triëder met de formule:

$$\vec{M}' = L\vec{M}.$$

Voor L moet in dit geval de matrix (51) genomen worden. Er wordt gevonden:

$$\begin{aligned} M'_\vartheta &= \quad i\hbar \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ M'_\varphi &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\vartheta} \\ M'_r &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

In de beschrijving treden dus slechts twee van nul verschillende componenten op, zooals ook het geval zou zijn geweest als we het impulsmoment classiek gingen beschrijven op locale Cartesische stelsels met de ζ-as langs den radius-vector. Dat dàn de ζ-component steeds nul zou zijn is duidelijk. De twee componenten willen we met (23, a) hermite'iseeren en daarna aanduiden met dezelfde symbolen, maar zonder accent. We vinden volgens (45):

$$M_\vartheta = i\hbar \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} = M'_\vartheta \text{ en}$$

$$M_\varphi = -i\hbar \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sqrt{\sin\vartheta} = M'_\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar i \cot\vartheta. \tag{78}$$

6 - DE OPERATOR $\mathcal{O}$

Op de lineaire distributie wordt dikwijls met voordeel het stel operatoren P en Q (62) ingevoerd, waartusschen het verband (63) bestaat. Op de spherische distributie gaan we analoog te werk, maar voeren slechts één symbool in, gedefinieerd door:

$$M_\vartheta + iM_\varphi = \hbar\mathcal{O}. \tag{79}$$

Hieruit volgt:

$$M_\vartheta - iM_\varphi = -\hbar\mathcal{O}^*. \tag{80}$$

Uit (78) leiden we af:

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sqrt{\sin\vartheta} + \frac{i}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{81}$$

We berekenen nog:

$$\mathcal{O}^*\mathcal{O} = \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \sqrt{\sin\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{82}$$

7 - TRANSFORMATIE VAN $\vec{M}'$ OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

De formules (67) schrijven we kort als:

$$\vec{\bar{I}} = \vec{M} + \vec{R} \tag{83}$$

waarin $\vec{R}$ dus de componenten bezit:

$$\tfrac{1}{2}\hbar \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\sigma_z,\ \tfrac{1}{2}\hbar \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\sigma_z,\ 0. \tag{84}$$

Uit de definitie-vergelijking (52) van $\vec{I}$ volgt door transformatie:

$$\vec{\bar{I}} = \vec{\bar{M}} + \vec{\bar{S}}. \tag{85}$$

Gelijkstelling van (83) en (85) levert:

$$\vec{\bar{M}} = \vec{M} + \vec{R} - \vec{\bar{S}}. \tag{86}$$

Beschrijven we deze laatste gelijkheid met behulp van de matrix (51) op de spherische distributie, dan gaat ze over in:

$$\vec{\bar{M}}' = \vec{M}' + \vec{R}' - \vec{\bar{S}}' \tag{87}$$

waarbij in verband met (47) geldt:

$$\vec{\bar{S}}' = \vec{S}.$$

Uit

$$\vec{R}' = L\,\vec{R}$$

berekenen we nu gemakkelijk, dat de componenten van $\vec{R}'$ luiden

$$\tfrac{1}{2}\hbar\cot\vartheta\sigma_z,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_z. \tag{88}$$

Substitutie dezer resultaten in (87) geeft ten slotte:

$$\begin{aligned} \overline{M}'_\vartheta &= M'_\vartheta + \tfrac{1}{2}\hbar\cot\vartheta\sigma_z - \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_x \\ \overline{M}'_\varphi &= M'_\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_y \\ \overline{M}'_r &= 0 + \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_z - \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_z = 0. \end{aligned} \tag{89}$$

De laatste dezer uitkomsten was in verband met (77) te verwachten en levert dus een zekere contrôle.

8 - TRANSFORMATIE VAN $\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M})}$ OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Op grond van (73) kunnen we met de uitkomsten (89) onmiddellijk schrijven:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M})} = \sigma_x\,(M'_\vartheta + \tfrac{1}{2}\hbar\cot\vartheta\sigma_z - \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_x) + \sigma_y\,(M'_\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_y)$$
$$= \sigma_x M'_\vartheta + \sigma_y\,(M'_\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar i\cot\vartheta) - \hbar.$$

Voeren we de gehermite'iseerde componenten (78) in, dan verkrijgen we de eenvoudige uitdrukking:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M})} = \sigma_x M_\varphi + \sigma_y M_\vartheta - \hbar. \tag{90}$$

De som van de twee eerste termen in het rechterlid duiden we aan met $\hbar\mathfrak{L}$; uitgeschreven luidt de aldus ingevoerde operator:

$$\hbar\mathfrak{L} = \sigma_x M_\vartheta + \sigma_y M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & M_\vartheta - iM_\varphi \\ M_\vartheta + iM_\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{91}$$

Voeren we hierin den operator $\mathcal{O}$ in, dan verkrijgen we:

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{O}^* \\ \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix} \tag{92},$$

9 - TRANSFORMATIE VAN DEN OPERATOR I^2 OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Substitutie van (90) in de getransformeerde van formule (76) luidende

$$\overline{I^2} + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = [\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{M}) + \hbar}]^2 \tag{93}$$

geeft onmiddellijk met (91):

$$\overline{I^2} + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = (\sigma_x M_\vartheta + \sigma_y M_\varphi)^2 = \hbar^2\mathfrak{L}^2 \tag{94}$$

of uitgeschreven, overeenkomstig (92):

$$\overline{I^2} + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{O}^* \\ \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix}^2 = -\hbar^2\begin{pmatrix} \mathcal{O}^*\mathcal{O} & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\mathcal{O}^* \end{pmatrix} \tag{95}$$

We voegen hieraan nog de getransformeerde gedaante van M^2 toe. Uit (74) volgt door transformatie

$$M^2 = \overline{(\vec{\sigma} \, . \, \vec{M})} \, [\overline{(\vec{\sigma} \, . \, \vec{M})} + \hbar]$$

dus vinden we met (90) en (91):

$$\overline{M^2} = \hbar^2 \, (\mathfrak{K} - 1) \, \mathfrak{K} \tag{96}$$

of uitgewerkt, overeenkomstig (92):

$$\overline{M^2} = - \hbar^2 \begin{pmatrix} \mathcal{O}^* \mathcal{O} & -\mathcal{O}^* \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\mathcal{O}^* \end{pmatrix} \tag{97}$$

HOOFDSTUK III

OPLOSSING VAN EENIGE EIGENWAARDE-PROBLEMEN; JACOBI'SCHE SPINOREN

1 - EIGENWAARDE-PROBLEMEN

Zooals bekend, wordt het eigenwaarde-probleem van den operator (28) als volgt geformuleerd: gezocht worden de éénduidige en normeerbare oplossingen van de vergelijking:

$$\Omega\Psi = a\Psi. \tag{98}$$

De gestelde eischen worden de (oneigenlijke) *randvoorwaarden* van het probleem genoemd. Bij het gebruik van poolcoördinaten moet bijvoorbeeld op grond van den eenduidigheidseisch de periodiciteit in het azimuth φ gevorderd worden, hetgeen uitgedrukt wordt door:

$$\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi). \tag{99}$$

Daarbij denken we aan een continue aangroeiing van φ met 2π. In het algemeen kan het probleem slechts opgelost worden voor bepaalde waarden van *a, de eigenwaarden,* die we met $e(\Omega)$ zullen aanduiden. De bijbehoorende oplossingen heeten *eigenfuncties;* het zijn in ons geval dus *eigenspinoren.*

Het simultaan-eigenwaarde-probleem van eenige operatoren is slechts oplosbaar, wanneer die operatoren onderling verwisselbaar zijn. De simultaan-eigenspinoren moeten dan tegelijk aan meerdere vergelijkingen van de gedaante

$$\Omega_i\Psi = a_i\Psi$$

voldoen.

2 - HET EIGENWAARDE-PROBLEEM VAN EEN DIAGONALISEERBAREN OPERATOR

Schrijven we de eigen-spinoren als

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}$$

dan luidt (98) uitgeschreven:

$$(\omega_{11} - a)\,\Psi_1 + \omega_{12}\Psi_2 = 0$$

$$\omega_{21}\Psi_1 + (\omega_{22} - a)\,\Psi_2 = 0$$

Dit zijn twee differentiaalvergelijkingen voor de componenten van de eigen-spinoren. In het algemeen zullen beide vergelijkingen zoowel Ψ_1 als Ψ_2 bevatten. Om het eigenwaarde-probleem op te lossen moeten dus eerst vergelijkingen worden afgeleid voor elk der componenten afzonderlijk, hetgeen de verdere behandeling zeer kan compliceeren, doordat verhooging van de orde der differentiaalvergelijkingen optreedt. Deze omstandigheden leveren nu een aanknoopingspunt voor doeltreffende benutting van de transformatie op een distributie van spin-triëders. Hebben we namelijk te doen met een diagonaliseerbaren operator, dan transformeeren we op een zijner diagonaliseerende distributies, waardoor het eigenwaarde-probleem — afgezien nog van de te transformeeren randvoorwaarden — de gedaante aanneemt van:

$$(\overline{\omega}_{11} - a)\,\overline{\Psi}_1 = 0$$

$$(\overline{\omega}_{22} - a)\,\overline{\Psi}_2 = 0$$

Dan zijn dus de componenten gesepareerd zonder dat orde-verhooging optreedt.

3 - FORMULEERING VAN HET SIMULTAAN-EIGENWAARDE-PROBLEEM VAN DE OPERATOREN I^2 EN I_z, NÀ TRANSFORMATIE OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Het transformeeren van I^2 op de spherische distributie is, gezien de bevindingen in de vorige paragraaf, voor zijn eigenwaarde-probleem dus wel zeer belangrijk. In verband daarmee is het ook van beteekenis, dat de operator I_z, die reeds den diagonaalvorm bezat, nà transformatie een veelvoud van de eenheidsmatrix is geworden.

Daar de operator $\mathcal{O}$ met $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ verwisselbaar is, kan gemakkelijk worden nagegaan, dat I^2 en I_z onderling verwisselbaar zijn. Hun simultaan-eigenwaarde-probleem luidt:

$$\begin{pmatrix} -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi} & 0 \\ 0 & -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}^*\mathcal{O} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\mathcal{O}^* + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \end{pmatrix} = -\varepsilon \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \end{pmatrix} \tag{101}$$

Hierbij gebruikten we (95) en (67) en stelden we:

$$e\,(I^2) = \varepsilon\hbar^2$$

$$e\,(I\ ) = \mu\hbar$$

De getransformeerde randvoorwaarden luiden identiek met de oorspronkelijke randvoorwaarden op één bijzonderheid nà, die ontstaat uit den eisch (99). Deze laatste gaat door transformatie namelijk over in:

$$\overline{\Psi}\,(\varphi + 2\pi) = -\overline{\Psi}\,(\varphi) \tag{102}$$

geheel overeenkomstig formule (29).

4 - ALGEMEENE GEDAANTE DER EIGENSPINOREN VAN I_z OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Door (100) in componenten te schrijven, verkrijgen we:

$$\frac{\partial\overline{\Psi}_1}{\partial\varphi} = i\mu\overline{\Psi}_1$$

$$\frac{\partial\overline{\Psi}_2}{\partial\varphi} = i\mu\overline{\Psi}_2$$

waarvan de algemeene oplossing luidt:

$$\overline{\Psi}_1 = F_1 e^{i\mu\varphi}$$

$$\overline{\Psi}_2 = F_2 e^{i\mu\varphi}$$

De waarden van μ, welke hieruit de componenten der eigenspinoren lichten, vinden we uit de randvoorwaarde (102).

Daaruit volgt in dit geval:

$$e^{2\pi i\mu} = -1$$

zoodat $|\mu|$ halfoneven genomen moet worden:

$$\pm \mu = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots \text{ enz.} \tag{103}$$

De algemeene gedaante van de eigenspinoren, behoorende bij de eigenwaarden

$$e\,(I_z) = \mu \hbar$$

wordt dus gegeven door:

$$\Psi = e^{i\mu\varphi} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \tag{104}$$

De eigenspinoren van I_z vertoonen op de spherische distributie dus een interessante analogie met de eigenfuncties

$$F e^{im\varphi} \tag{105}$$

van den overeenkomstigen operator M_z voor het spinlooze geval, behoorende bij de eigenwaarden:

$$\pm m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \text{ enz.} \tag{106}$$

Deze analogie was op grond van (67) overigens te verwachten.

5 - HERLEIDING VAN HET SIMULTAAN-EIGENWAARDE-PROBLEEM VAN I^2 EN I_z

De simultaan-eigenspinoren van I^2 en I_z zullen de gedaante (104) bezitten. Substitutie van (104) in (101) geeft de volgende vergelijkingen voor F_1 en F_2:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \sqrt{\sin\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}(-\mu^2 + \mu\cos\vartheta) + \varepsilon + \tfrac{1}{4}\right] F_1 = 0$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \sqrt{\sin\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}(-\mu^2 - \mu\cos\vartheta) + \varepsilon + \tfrac{1}{4}\right] F_2 = 0$$

waarbij we gebruik maakten van (82).

Substitueeren we $x = \cos\vartheta$ en schrijven we ter afkorting

$$L\,(x,\ \varepsilon,\ \mu) = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{d}{dx} + \left(\frac{\varepsilon}{1-x^2} - \frac{\tfrac{1}{4}+\mu x+\mu^2}{(1-x^2)^2}\right), \tag{107}$$

dan gaan de verkregen vergelijkingen over in:

$$L\,(x,\ \varepsilon,\ -\mu)\, F_1 = 0 \tag{108, a}$$

$$L\,(x,\ \varepsilon,\ \ \mu)\, F_2 = 0 \tag{108, b}$$

6 - ONDERZOEK DER VERGELIJKING:

$$L(x,\ \varepsilon,\ \mu)\, y = 0.$$

Hierin was $x = \cos\vartheta$ en daar ϑ in het interval $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ ligt, zullen ons de oplossingen der vergelijking slechts interesseeren voor waarden van x uit het interval

$$-1 \leqq x \leqq 1 \tag{109}$$

Wij zoeken speciaal de eigenfuncties, die hooren bij de volgende randvoorwaarden, die voortspruiten uit de in de eerste paragraaf van dit Hoofdstuk opgestelde algemeene randvoorwaarden. De bedoelde randvoorwaarden zijn gelegen in den eisch, dat de eigenfuncties in het interval (109) éénduidig en normeerbaar zullen zijn.

Bij het volgende onderzoek van meer algemeenen aard zullen we onze vergelijking opvatten als een vergelijking in het complexe gebied.

Duiden we de coëfficiënten in (107) van links naar rechts met eerste en tweede coëfficiënt aan, dan kunnen we direct vaststellen, dat deze coëfficiënten in de punten $x = \pm 1$ polen bezitten van de 1ste resp. 2de orde. Voor het onderzoek in die punten luiden de met $z = x \mp 1$ getransformeerde vergelijkingen:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2(z \pm 1)}{z(z \pm 2)}\frac{d}{dz} - \left(\frac{\varepsilon}{z(z \pm 2)} + \frac{(\mu \pm \frac{1}{2})^2 + \mu z}{z^2 (z \pm 2)^2}\right)\right] y = 0$$

Voor het onderzoek in het punt $x = \infty$ transformeeren we de vergelijking met $z = \dfrac{1}{x}$ in:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2z}{z^2 - 1}\frac{d}{dz} + \left(\frac{\varepsilon}{z^2 (z^2 - 1)} - \frac{(\mu^2 + \frac{1}{4})\, z + \mu}{z (z^2 - 1)^2}\right)\right] y = 0$$

waaruit we aflezen, dat de eerste coëfficiënt in het punt $x = \infty$ geen singulier gedrag vertoont, terwijl de tweede coëfficiënt daar een pool van de 2de orde bezit. Andere singuliere punten dan $x = \pm 1$ en $x = \infty$ bezitten de coefficiënten niet.

Uit de verkregen resultaten besluiten we, dat de gegeven vergelijking behoort tot de klasse van Fuchs. Haar oplossingen kunnen dus slechts niet-wezenlijke singulariteiten vertoonen, die gelegen zijn in de punten $x = \pm 1$, $x = \infty$. In deze punten moeten ook de eventueele vertakkingspunten gelegen zijn.

Uit de betreffende getransformeerde vergelijkingen leiden we af, dat de indices voor de gevonden singuliere punten luiden:

$$a_{-1} = \pm \tfrac{1}{2}(\mu - \tfrac{1}{2})$$
$$a_{+1} = \pm \tfrac{1}{2}(\mu + \tfrac{1}{2})$$
$$a_{\infty} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon + \tfrac{1}{4}}$$

zoodat de algemeene oplossing volgens Riemann kan worden gesymboliseerd door:

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & \infty & \\ \tfrac{1}{2}(\mu - \tfrac{1}{2}) & \tfrac{1}{2}(\mu + \tfrac{1}{2}) & \tfrac{1}{2} + \sqrt{\varepsilon + \tfrac{1}{4}} & x \\ -\tfrac{1}{2}(\mu - \tfrac{1}{2}) & -\tfrac{1}{2}(\mu + \tfrac{1}{2}) & \tfrac{1}{2} - \sqrt{\varepsilon + \tfrac{1}{4}} & \end{array}\right\} \qquad (110)$$

De index-verschillen voor de punten $x = \pm 1$ zijn $\mu \pm \tfrac{1}{2}$, dus in verband met (103) gelijk aan een geheel getal, zoodat er bij het opstellen van bij die punten behoorende fundamentaalstelsels, het optreden van een oplossing met logarithmische term kan worden verwacht. Dit laatste is zeker het geval voor $\mu = -\tfrac{1}{2}$ resp. $\mu = \tfrac{1}{2}$, want dan is het index-verschil juist nul. Zulk een oplossing zal oneindig worden in één der punten $x = \pm 1$ of in beide punten. Daar wij slechts de normeerbaarheid en niet het overal-eindig-blijven voor de gezochte eigenfuncties eischen, zouden wij de oplossingen met logarithmische term mede in de beschouwing moeten betrekken, ware het niet, dat we ze om nader aan te geven redenen toch moeten verwerpen.

De formuleering van het in paragraaf 3 van dit Hoofdstuk aan de orde gestelde simultaan-eigenwaarde-probleem geschiedde nà transformatie van de operatoren I^2 en I_z op de spherische distributie van spin-triëders onder gelijktijdige invoering van spherische coördinaten. Dit laatste brengt met zich, dat het aan twijfel onderhevig is of de aldus verkregen formuleering van het probleem nog wel gelijkwaardig is met de formuleering daarvan op de oorspronkelijke lineaire coördinaten, in die punten, waarin de Jacobiaan der transformatie, $r^2 \sin \vartheta$, nul wordt. Dit zijn de punten van de z-as van het grondtriëder, zooals we vroeger reeds vaststelden. Daarin wordt $\cos \vartheta = x = \pm 1$, zoodat ook het optreden der bovengevonden singuliere punten met het nulworden van den Jacobiaan samenhangt.

Kiest men nu bij de bepaling van de hoek-afhankelijkheid van het probleem — in ons geval komt uitsluitend deze afhankelijkheid ter sprake — een oplossing met logarithmische term, dan zal deze het oneindig worden van de volledige oplossing veroorzaken in de punten van de z-as, waardoor deze as een uitzonderingspositie gaat innemen, die zij in de oorspronkelijke probleemstelling niet bezat, welk feit dus als het ware door de transformatie is ingevoerd. In de oorspronkelijke formuleering immers, is hoogstens het nulpunt van het grond-triëder, als momentenpunt, een uitzonderlijk punt, maar zijn alle ruimte-richtingen volkomen gelijkwaardig. Daarom zijn de oplossingen met logarithmische term bij de bepaling van de hoek-afhankelijkheid, te verwerpen. Bij de bepaling van de r-afhankelijkheid, die, zooals opgemerkt hier niet optreedt, maar bijvoorbeeld wel bij het energie-eigenwaarde-probleem uit Hoofdstuk VI, mogen eventueele oplossingen, die in het nulpunt oneindig worden, niet a priori worden uitgesloten, omdat dit punt dan inderdaad een uitzonderingspunt is. Blijken die oplossingen normeerbaar te zijn, dan zijn zij golfmechanisch zeker bruikbaar.

Bij ons onderzoek kunnen we ons dus bepalen tot de beschouwing van de oplossingen, die in de punten $x = \pm 1$ eindig blijven. Laat onder deze oplossingen $y(x, \varepsilon, \mu)$ een eigenfunctie zijn, behoorende bij de eigenwaarde ε en bij een positieve of negatieve waarde van μ, dan geldt dus identiek in x:

$$L(x, \varepsilon, \mu)\, y(x, \varepsilon, \mu) = 0. \tag{111}$$

Doordat de differentiaaloperator (107) de eigenschap

$$L(-x, \varepsilon, -\mu) = L(x, \varepsilon, \mu)$$

bezit, mogen we voor (111) ook schrijven:

$$L(-x, \varepsilon, -\mu)\, y(x, \varepsilon, \mu) = 0$$

of ook:

$$L(x, \varepsilon, -\mu)\, y(-x, \varepsilon, \mu) = 0.$$

Daar de teekenverandering van x de éénduidigheid en normeerbaarheid van $y(x, \varepsilon, \mu)$ niet beïnvloedt, lezen we uit het laatste af dat we bij elke eigenfunctie, behoorende bij de eigenwaarde ε

en een zekere waarde van μ, een eigenfunctie kunnen bepalen, die bij dezelfde eigenwaarde ε behoort, maar bij de tegengestelde waarde van μ, dus bij $-\mu$.

Tusschen zulk een paar van eigenfuncties bestaat dan de betrekking:

$$y(x, \varepsilon, -\mu) = Cy(-x, \varepsilon, \mu) \tag{112}$$

waarin C een nader te bepalen constante voorstelt.

We kunnen dus volstaan met het geval $\mu \geqq \frac{1}{2}$ te onderzoeken. In dat geval zullen de oplossingen, die in de punten $x = \pm 1$ eindig blijven de gedaante

$$y(x, \varepsilon, \mu) = \sqrt{p(x, \mu)}\, v(x, \varepsilon, \mu) \tag{113}$$

moeten bezitten, waarin

$$p(x, \mu) = (1-x)^{\mu+\frac{1}{2}}(1+x)^{\mu-\frac{1}{2}}. \tag{114}$$

Bestaat er een oplossing van deze gedaante, dan zal de functie v in de punten $x = \pm 1$ geen vertakkingspunten meer bezitten, dus ook niet in $x = \infty$. Daar zij dus overal éénduidig is en in $x = \infty$, in verband met het bovengevondene, slechts een niet-wezenlijke singulariteit kan bezitten, zal zij een polynomium moeten zijn. De eisch van het eindig-blijven in de punten $x = \pm 1$, brengt dus vanzelf mede, dat de functie $v(x, \varepsilon, \mu)$ een polynomium moet zijn.

Vormen we (110) om overeenkomstig (113), dan verkrijgen we:

$$y = \sqrt{p(x, \mu)}\,.\,P\left\{\begin{matrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\mu+\sqrt{\varepsilon+\frac{1}{4}} & x \\ -(\mu-\frac{1}{2}) & -(\mu+\frac{1}{2}) & \frac{1}{2}+\mu-\sqrt{\varepsilon+\frac{1}{4}} & \end{matrix}\right\} \tag{115}$$

waaruit we aflezen, dat het polynomium $v(x, \varepsilon, \mu)$ zou moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2[(\mu+1)x+\tfrac{1}{2}]\frac{d}{dx} + (\varepsilon-\mu-\mu^2)\right]v = 0. \tag{116}$$

Door vermenigvuldiging met $p(x, \mu)$ kunnen we haar ook de zelftoegevoegde gedaante

$$\frac{d}{dx}\left[p(x, \mu)(1-x^2)\frac{dv}{dx}\right] + (\varepsilon-\mu-\mu^2)\,p(x, \mu)\,v = 0 \tag{117}$$

geven. We zien hieraan, dat $p(x, \mu)$ opgevat kan worden als beleggingsfunctie. Op grond van haar vorm kunnen we onmiddellijk vaststellen, dat de gezochte polynomia inderdaad bestaan en dat zij een bijzonder geval zijn van de zoogenaamde *Jacobi'sche Polynomia* [1]). Wij zullen ons in het volgende echter niet baseeren op de theorie dezer polynomia, doch een zelfstandige behandeling onzer vergelijking geven, ten einde tot een geschikten vorm voor de resultaten te geraken.

Nu het bestaan van oplossingen van de gedaante (113) verzekerd is, kunnen we het onderzoek naar deze eigenfuncties voortzetten. Nemen we in (113) bijvoorbeeld het positieve teeken van den wortel, dan hebben we een éénduidige functie verkregen, die in het interval (109) normeerbaar is, omdat haar kwadraat een polynomium is.

In verband met (112) vinden we zoo voor de gezochte eigenfuncties aanvankelijk:

$$y(x, \varepsilon, \mu) = \sqrt{p(x, \mu)}\, v(x, \varepsilon, \mu) \tag{118}$$

$$y(x, \varepsilon, -\mu) = C\sqrt{p(-x, \mu)}\, v(-x, \varepsilon, \mu) \tag{119}$$

waarin $\mu \geqq \frac{1}{2}$. De laatste uitdrukking kunnen we met behulp van de betrekking

$$p(-x, \mu)\, p(x, -\mu) = 1$$

die voor elke waarde van μ geldt, omvormen tot

$$y(x, \varepsilon, -\mu) = \sqrt{p(x, -\mu)}\, Cp(-x, \mu)\, v(-x, \varepsilon, \mu).$$

Hierin is het product der drie laatste factoren een polynomium, dat we met $v(x, \varepsilon, -\mu)$ zullen aanduiden. Met

$$v(x, \varepsilon, -\mu) = Cp(-x, \mu)\, v(-x, \varepsilon, \mu) \tag{120}$$

kunnen we dan voor (119) schrijven:

$$y(x, \varepsilon, -\mu) = \sqrt{p(x, -\mu)}\, v(x, \varepsilon, -\mu). \tag{121}$$

Op grond van de overeenkomst van dit resultaat met (118) zal de vergelijking, waaraan het nieuw-ingevoerde polynomium voldoet, worden gevonden door in (114) eenvoudig μ door $-\mu$ te vervangen.

1) Zie o.a. Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, I.

Ten slotte kunnen we dus voor de eigenfuncties noteeren:

$$y\,(x,\ \varepsilon,\ \mu) = \sqrt{p\,(x,\ \mu)}\ v\,(x,\ \varepsilon,\ \mu) \tag{122}$$

waarin μ zoowel positieve als negatieve waarden kan aannemen Schrijven we de relatie (112), die immers voor alle waarden van μ geldt, als

$$y\,(x,\ \varepsilon,\ \mu) = Cy\,(-x,\ \varepsilon,\ -\mu)$$

dan kunnen we uit (122) nog een tweeden vorm voor onze eigenfuncties afleiden, namelijk:

$$y\,(x,\ \varepsilon,\ \mu) = C\sqrt{p\,(-x,\ -\mu)}\ v\,(-x,\ \varepsilon,\ -\mu). \tag{123}$$

Is n de graad van het polynomium $v\,(x,\ \varepsilon,\ \mu)$ uit (122), dan zal één der indices voor $x = \infty$ in (115) gelijk aan $-n$ moeten zijn. In ieder geval zal echter gelden:

$$\varepsilon + \tfrac{1}{4} = (n + \mu + \tfrac{1}{2})^2$$

waaruit we voor de eigenwaarde vinden:

$$\varepsilon = (n + \mu)\,(n + \mu + 1). \tag{124}$$

Vermenigvuldigen we (117) met v en integreeren we daarna over het interval (109), dan verkrijgen we

$$\int_{-1}^{+1} p\,(1 - x^2)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = (\varepsilon - \mu - \mu^2)\int_{-1}^{+1} pv^2 dx,$$

welke relatie voor elke waarde van μ blijkt te gelden, als we letten op de uitdrukkingen (118) en (119) voor de eigenfuncties. In verband met $p \geqq 0$ leiden we hieruit de volgende ongelijkheid af:

$$\varepsilon \geqq \mu\,(\mu + 1). \tag{125}$$

Het gelijkteeken geldt uitsluitend voor $n = 0$.

Voor $n > 0$ volgt uit (124) en (125) aanvankelijk

$$(n + \mu)\,(n + \mu + 1) > \mu\,(\mu + 1)$$

of herleid

$$n\,(n + 2\mu + 1) > 0$$

dus ook

$$n + 2\mu + 1 > 0$$

Daar $n + 2\mu$ een geheel getal is mogen we de laatste ongelijkheid nog omvormen tot:

$$n + 2\mu \geqq 0. \tag{126}$$

Nu zien we uit (124) dat ε uitsluitend een functie is van $n + \mu$. Willen we de oplossingen gaan groepeeren in groepen, die bij éénzelfde eigenwaarde behooren, dan is het dus aangewezen om

$$n + \mu = j \text{ dus } n = j - \mu \tag{127}$$

te stellen. Dan vinden we

$$\varepsilon = j\,(j + 1). \tag{128}$$

Het aantal der bij deze eigenwaarde behoorende oplossingen wordt dan bepaald door de bijpassende μ-waarden.

Met de substitutie (127) gaat (126) over in

$$-j \leqq \mu$$

welke relatie gold voor $n > 0$ dus voor

$$\mu < j.$$

Voor $n = 0$ geldt verder $\mu = j$, zoodat voor alle mogelijke waarden van den graad n moet gelden:

$$-j \leqq \mu \leqq j. \tag{129}$$

Hieruit volgt meteen, dat j een *positief getal* is, dat op grond van (103) en in verband met (127) slechts *halfoneven* waarden kan aannemen, dus:

$$j = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2},\ \ldots\ldots \text{ enz.} \tag{130}$$

Het aantal μ-waarden, d.i. de *ontaardingsgraad* der bij de eigenwaarde ε hoorende eigenfuncties, bedraagt blijkens (129):

$$2j + 1. \tag{131}$$

Er rest ons nu nog de nadere bepaling van de $2j + 1$ polynomia dezer eigenfuncties. Doorloopt μ de waarden uit (129) dan loopt de graad der gezochte polynomia van $2j$ tot 0.

Alvorens tot de nadere bepaling der polynomia over te gaan merken we op, dat we met de waarde van ε uit (128) de uitdrukking (115) nog verder kunnen omvormen tot:

$$y = \sqrt{p\,(x, \mu)}\; P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & j+\mu+1 & \frac{1+x}{2} \\ -(\mu-\frac{1}{2}) & -(\mu+\frac{1}{2}) & -(j-\mu) & \end{Bmatrix}$$

waaruit we direct aflezen, dat de gezochte polynomia ook worden voorgesteld door de volgende hypergeometrische polynomia, met dien verstande, dat ze slechts kunnen dienen voor de opstelling van uitdrukkingen voor de eigenfuncties op basis van de formules (118) en (119), want zij gelden slechts voor $\mu \geqq \frac{1}{2}$:

$$F\left(j + \mu + 1, -(j-\mu), \mu + \tfrac{1}{2}, \frac{1+x}{2}\right).$$

Voor het polynomium bedoeld in (121) zouden we dan ook nog wel

$$C p\,(-x, \mu)\, F\left(j + \mu + 1, -(j-\mu), \mu + \tfrac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

kunnen nemen, maar het is ons te doen om een uitdrukking voor de polynomia te vinden, die geldt voor alle waarden van μ. Daartoe gaan we als volgt te werk.

Substitutie van de waarde van ε in (116) geeft de vergelijking

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2\,[(\mu+1)\,x + \tfrac{1}{2}]\frac{d}{dx} + (j+\mu+1)(j-\mu)\right] v\,(x, \varepsilon, \mu) = 0. \quad (132)$$

Differentieeren we éénmaal naar x, dan komt er:

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2\left\{[(\mu+1)+1]\,x + \tfrac{1}{2}\right\}\frac{d}{dx} + \right.$$
$$\left. + [j + (\mu+1) + 1]\,[j - (\mu+1)]\right] \frac{dv\,(x, \varepsilon, \mu)}{dx} = 0.$$

De operator dezer vergelijking verschilt van den voorgaande slechts, doordat daarin μ door $\mu + 1$ is vervangen. We besluiten daaruit tot het bestaan der betrekking:

$$\frac{dv\,(x, \varepsilon, \mu)}{dx} = v\,(x, \varepsilon, \mu + 1).$$

Door k-malige differentiatie laat zich dus bewijzen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k v\,(x, \varepsilon, \mu) = v\,(x, \varepsilon, \mu + k).$$

Op grond van (129) mogen we hierin $\mu = -j$ stellen, waarmede we verkrijgen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k v(x, \varepsilon, -j) = v(x, \varepsilon, -j + k)$$

Daar we eveneens weten, dat $j + \mu \geqq 0$, mogen we

$$k = j + \mu$$

nemen. Dan komt er:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} v(x, \varepsilon, -j) = v(x, \varepsilon, \mu). \tag{133}$$

Laten we hierin μ de waarden uit (129) doorloopen, dan krijgen we de $2j + 1$ gezochte polynomia door differentiatie uit het ééne van den hoogsten graad $2j$. Kunnen we dit laatste nog bepalen, dan zijn we klaar. Dit kan geschieden met behulp van betrekking (120). Zij geldt voor $\mu \geqq \frac{1}{2}$, dus mogen we daarin μ gelijk aan j nemen. Dan vinden we

$$v(x, \varepsilon, -j) = Cp(-x, j)\, v(-x, \varepsilon, j)$$

of, daar $v(-x, \varepsilon, j)$ het polynomium van den nulden graad is, op een constanten factor nà:

$$v(x, \varepsilon, -j) = p(-x, j).$$

Substitutie van dit resultaat in (133) levert:

$$v(x, \varepsilon, \mu) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x, j), \tag{133, a}$$

waarmede de verlangde uitdrukking voor de polynomia is gevonden.

Voor de eigenfuncties in de gedaante (122) kunnen we zoodoende schrijven:

$$y(x, \varepsilon, \mu) = \sqrt{p(x, \mu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x, j). \tag{134}$$

Thans kunnen we gemakkelijk de constante in (123) bepalen. We vinden daarvoor

$$C = (-1)^{\mu - \frac{1}{2}} \frac{(j + \mu)!}{(j - \mu)!},$$

zoodat de eigenfuncties in de gedaante (123) komen te luiden als:

$$y(x, \varepsilon, \mu) = (-1)^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{(j+\mu)!}{(j-\mu)!} \sqrt{p(-x, -\mu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu} p(x, j) \qquad (135)$$

7 - NORMEERING

Bij de berekening van de normeeringsintegraal voor de in de vorige paragraaf gevonden oplossing kunnen we als volgt gebruik maken van haar beide gedaanten, (134) en (135). We schrijven:

$$(N_j^\mu)^2 = \int_{-1}^{+1} [y(x, \varepsilon, \mu)]^2 \, dx = (-1)^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{(j+\mu)!}{(j-\mu)!} I_j^\mu \qquad (136)$$

waarin:

$$I_j^\mu = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x, j) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu} p(x, j) \, dx.$$

Door partieele integratie herleiden we dit tot:

$$I_j^\mu = \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x, j) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu-1} p(x, j) \Bigg|_{-1}^{+1} -$$

$$- \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu+1} p(-x, j) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-(\mu+1)} p(x, j) \, dx. \qquad (137)$$

Dat hierin het uitgeïntegreerde stuk steeds wegvalt zullen we hier niet uitvoerig nagaan. Dit onderzoek kan gemakkelijk geschieden aan de hand van de expliciete uitdrukking voor $p(\pm x, j)$, die uit formule (114) volgt. Na het geconstateerd te hebben kunnen we onmiddellijk de volgende recursieve betrekking opschrijven:

$$I_j^\mu = - I_j^{\mu+1}.$$

Hieruit leiden we verder af:

$$I_j^\mu = (-1)^{j-\mu} I_j^j.$$

Het gaat er dus nog om

$$I_j^j = \int_{-1}^{+1} p(x,j)\left(\frac{d}{dx}\right)^{2j} p(-x,j)\,dx = (-1)^{j-\frac{1}{2}}(2j)!\int_{-1}^{+1} p(x,j)\,dx$$

te bepalen. Voor de integraal

$$\int_{-1}^{+1} p(x,j)\,dx = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{j+\frac{1}{2}}(1+x)^{j-\frac{1}{2}}\,dx$$

vinden we verder gemakkelijk de waarde:

$$\frac{(j-\frac{1}{2})!\,(j+\frac{1}{2})!}{(2j)!}\cdot\frac{2^{2j+1}}{2j+1},$$

zoodat we voor I_j^μ vinden

$$I_j^\mu = (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}(j-\tfrac{1}{2})!\,(j+\tfrac{1}{2})!\,\frac{2^{2j+1}}{2j+1}$$

en dus voor het kwadraat van de normeeringsconstante:

$$(N_j^\mu)^2 = \frac{2^{2j+1}}{2j+1}(j-\tfrac{1}{2})!\,(j+\tfrac{1}{2})!\,\frac{(j+\mu)!}{(j-\mu)!}.$$

Hiermede verschijnen nu de uitdrukkingen (134) en (135) als volgt in de genormeerde gedaante, waarbij we ze ter onderscheiding met een nieuw symbool E_j^μ aanduiden:

$$E_j^\mu = \frac{1}{2^j(j-\frac{1}{2})!}\sqrt{\frac{(j-\mu)!}{(j+\mu)!}}\,p(x,\mu)\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x,j) \tag{138}$$

$$= \frac{(-1)^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^j(j-\frac{1}{2})!}\sqrt{\frac{(j+\mu)!}{(j-\mu)!}}\,p(-x,-\mu)\left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu} p(x,j) \tag{139}$$

We leiden uit deze formules nog de volgende betrekking af:

$$E_j^{-\mu}(-x) = (-1)^{j-\frac{1}{2}}E_j^\mu(x). \tag{140}$$

8 – VOORTGEZETTE HERLEIDING VAN HET SIMULTAAN-EIGEN-WAARDE-PROBLEEM VAN I^2 EN I_z

In paragraaf 5 van dit Hoofdstuk verkregen we de vergelijkingen (108, *a*) en (108, *b*) voor F_1 en F_2. Met de oplossing E_j^μ, uit de vorige paragraaf, van de vergelijking (108, *b*) vinden we dus:

$$F_1 = C_1 E_j^{-\mu}$$
$$F_2 = C_2 E_j^{\mu}$$

waarin C_1 en C_2 nog willekeurige functies van r kunnen zijn. Voor de simultaan-eigenspinoren van I^2 en I_z vinden we zoo aanvankelijk volgens (104):

$$\Psi_j^{\mu} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 E_j^{-\mu} e^{i\mu\varphi} \\ C_2 E_j^{\mu} \; e^{i\mu\varphi} \end{pmatrix} \tag{141}$$

Willen we genormeerde eigenspinoren hebben dan moeten C_1 en C_2 voldoen aan:

$$2\pi \int_0^{\infty} (|\,C_1\,|^2 + |\,C_2\,|^2)\, r^2\, dr = 1. \tag{142}$$

Er geldt dus

$$\bar{I}^2 \Psi_j^{\mu} = j\,(j+1)\,\hbar^2 \Psi_j^{\mu}. \tag{143}$$

In paragraaf 10 zullen we een specialen vorm onzer oplossing aangeven. Daartoe is het noodig eerst eenige andere zaken te behandelen.

9 - DE SIMULTAAN-EIGENSPINOREN DER OPERATOREN: I^2, I_z EN $\mathfrak{K}$; JACOBI'SCHE SPINOREN

Thans betrekken we formule (94) in de beschouwing, welke luidt:

$$\bar{I}^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = \hbar^2 \mathfrak{K}^2 \tag{144}$$

terwijl volgens (92) geldt:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{O}^* \\ \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix}. \tag{145}$$

Vroeger merkten we reeds op, dat $\mathcal{O}$ verwisselbaar is met $\frac{\partial}{\partial\varphi}$; daarom is I_z ook verwisselbaar met $\mathfrak{K}$. We kunnen dus met recht vragen naar de simultaan-eigenspinoren van de drie onderling verwisselbare operatoren I^2, I_z en $\mathfrak{K}$. Deze zullen de gedaante (141) moeten bezitten.

Noemen we

$$e\,(\mathfrak{K}) = \nu \tag{146}$$

dan moeten we dus de C's zóó zien te bepalen, dat geldt:

$$\mathfrak{K}\Psi_j^\mu = \nu\Psi_j^\mu. \tag{147}$$

Door herhaalde toepassing van de operatie $\mathfrak{K}$ volgt hieruit:

$$\mathfrak{K}^2\Psi_j^\mu = \nu^2\Psi_j^\mu$$

of met (144)

$$(\overline{I}^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2)\,\Psi_j^\mu = \nu^2\hbar^2\Psi_j^\mu$$

of nog verder herleid:

$$\overline{I}^2\Psi_j^\mu = (\nu^2 - \tfrac{1}{4})\,\hbar^2\Psi_j^\mu.$$

Vergelijken we deze uitkomst met (143), dan kunnen we vaststellen, dat er tusschen ν en j de volgende betrekking bestaat:

$$\nu^2 - \tfrac{1}{4} = j\,(j+1)$$

waaruit we afleiden:

$$\nu = \pm\,(j + \tfrac{1}{2}).$$

Noemen we ter afkorting het *positieve geheele getal*

$$j + \tfrac{1}{2} = k \tag{148}$$

dan vinden we dus:

$$e\,(\mathfrak{K}) = \pm\,k,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \text{enz.} \tag{149}$$

Dientengevolge kunnen we twee stellen eigenspinoren

$$\Psi_{j,\,\pm k}^\mu$$

verwachten met $C_1^{\pm}$ en $C_2^{\pm}$. Om de verhouding dezer functies van r, die ook nog van j en μ kunnen afhangen, gaat het nu verder. Stellen we:

$$C_1^{\pm} : C_2^{\pm} = \lambda^{\pm}$$

dan vinden we door gelijkstelling van de eerste spinorcomponenten in (147):

$$-\mathcal{O}^*\,\Psi_2 = \pm\,k\lambda^{\pm}\Psi_1. \tag{150}$$

Substitueeren we in (81) $x = \cos\vartheta$, dan neemt $\mathcal{O}$ de gedaante

$$-(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}+i(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

aan en gaat (150) over in:

$$\left[(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}-\mu(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]E_j^{\mu}=\pm k\lambda^{\pm}E_j^{-\mu} \qquad (151)$$

als we de differentiatie naar φ reeds uitvoeren en verder herleiden. Door uitvoering van de differentiatie naar x kunnen we dit onder toepassing van (138) en (139) verder omvormen tot

$$(1-x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu+1}(1-x^2)^{j-\frac{1}{2}}(1+x)-(\mu+\tfrac{1}{2})\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu}(1-x^2)^{j-\frac{1}{2}}(1+x)\mp$$

$$\mp k\lambda^{\pm}(-1)^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu}(1-x^2)^{j-\frac{1}{2}}(1-x)=0$$

waarvan het eerste lid een polynomium van den graad $j-\mu$ is, dat voor de gezochte verhouding identiek in x gelijk aan nul moet zijn. Door nulstelling van den coëfficiënt van den hoogste macht vinden we zoo:

$$\lambda^{\pm}=(-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}} \qquad (152)$$

Op grond van dit resultaat verkrijgen we dus:

$$\Psi_{j,\pm k}^{\mu}=C^{\pm}\begin{pmatrix}(-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}}E_j^{-\mu}e^{i\mu\varphi}\\ E_j^{\mu}e^{i\mu\varphi}\end{pmatrix}$$

De hierin optredende spinoren willen we met een speciaal symbool aangeven, nadat we ze nog genormeerd hebben:

$$\mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu}=\frac{e^{i\mu\varphi}}{2\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}(-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}}E_j^{-\mu}\\ E_j^{\mu}\end{pmatrix} \qquad (153)$$

Wij zullen ze *Jacobi'sche spinoren* noemen wegens hun samenhang met de speciale Jacobi'sche polynomia E_j^{μ}. Wanneer we in het vervolg spreken van de Jacobi'sche spinoren, dan bedoelen we het bovenstaande spinoren-paar, dat hoort bij de waarden $\pm k$.

Afgezien dus van een multiplicatieve functie van r, hebben de genormeerde simultaan-eigenspinoren der operatoren I^2, I_z en Ω de gedaante

$$\Psi^{\mu}_{j,\,\pm k} = \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} \tag{154}$$

Ze hooren bij de eigenwaarden:

$$e\,(I^2) = j\,(j+1)\,\hbar^2,\quad e\,(I_z) = \mu\hbar,\quad e\,(\Omega) = \pm\,k. \tag{155}$$

Betreffende de boven-ingevoerde Jacobi'sche spinoren willen we nog vaststellen, dat zij een *paar onderling loodrechte eenheidsspinoren* voorstellen, zooals gemakkelijk kan worden nagegaan door berekening van het scalaire product. We vinden namelijk:

$$(\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k}\cdot\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k}) = -\int\limits_{-1}^{+1}(E_j^{-\mu})^2\,dx + \int\limits_{-1}^{+1}(E_j^{\mu})^2\,dx = -1+1=0.$$

Er volgt uit, dat elke spinor van de gedaante:

$$\begin{pmatrix} C_1 E_j^{-\mu}\, e^{i\mu\varphi} \\ \\ C_2 E_j^{\mu}\quad e^{i\mu\varphi} \end{pmatrix}$$

kan worden geschreven als een lineaire combinatie dezer Jacobi'sche spinoren.

10 – DE ALGEMEENE GEDAANTE DER SIMULTAAN-EIGENSPINOREN VAN I^2 EN I_z

Thans kunnen we de algemeene gedaante der eigenspinoren van de operatoren I^2 en I_z in een geschikten vorm brengen. Op grond van de laatste opmerkingen van de voorgaande paragraaf kunnen we namelijk, gezien de uitdrukking (141), onmiddellijk voor deze simultaan-eigenspinoren noteeren:

$$\Psi^{\mu}_{j} = R_{+}\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k} + R_{-}\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k} \tag{156}$$

waarin de R's nog willekeurige normeerbare functies van r zijn. Deze eigenspinoren hooren dus bij de eigenwaarden:

$$e\,(I^2) = j\,(j+1)\,\hbar^2,\quad e\,(I_z) = \mu\hbar.$$

11 - DE SIMULTAAN-EIGENSPINOREN DER OPERATOREN: I^2, I_z EN M^2

Het is interessant op te merken, dat de Jacobi'sche spinoren nu ook simultaan-eigenspinoren zijn voor het drietal onderling verwisselbare operatoren I^2, I_z en M^2. Dat deze operatoren inderdaad onderling verwisselbaar zijn kan heel eenvoudig worden nagegaan. Voor de operatoren I^2 en M^2 bijvoorbeeld het best met behulp van hun uitdrukkingen (94) en (96) in $\mathfrak{K}$. Met deze uitdrukkingen willen we ook onze eerste bewering bewijzen. We hebben namelijk:

$$\overline{M}^2\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k} = \hbar^2(\mathfrak{K}^2 - \mathfrak{K})\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k}$$

$$= \hbar^2(k^2 \mp k)\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k},$$

waaruit het gestelde volgt. Noemen we nu

$$e(M^2) = \delta\hbar^2$$

dan volgt hieruit:

$$\delta = k(k \mp 1) = (j + \tfrac{1}{2})(j + \tfrac{1}{2} \mp 1).$$

Schrijven we δ in den golfmechanischen vorm:

$$\delta = l(l+1) \tag{157}$$

dan zien we, dat de Jacobi'sche spinoren

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k}$$

hooren bij

$$l = j \mp \tfrac{1}{2}.$$

We kunnen dus schrijven:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k} = \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,l=j\mp\frac{1}{2}}. \tag{158}$$

12 - VECTOR-MODEL

Aangaande de golfmechanische beteekenis van de in de vorige paragrafen gevonden eigenwaarden en hun onderlingen samenhang brengen we nog het volgende in herinnering. Daartoe merken we eerst op, dat voor den operator S^2, die toegevoegd is aan het kwadraat van den spin, volgens (48) en (54) geldt:

$$S^2 = \tfrac{1}{4}\hbar^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \tfrac{3}{4}\hbar^2,$$

zoodat hij als het ware een veelvoud van de eenheidsmatrix is. Voor hem zijn dus alle spinoren eigenspinoren en wel steeds bij de eigenwaarde $\frac{3}{4}\hbar$, waarvoor we in analogie met (128) en (157) schrijven:

$$e\,(S^2) = s\,(s + 1)\,\hbar^2$$

met $s = \frac{1}{2}$.

Aan het drietal onderling verwisselbare operatoren I^2, M^2 en I_z kunnen we dus S^2 nog toevoegen; géén der operatoren M_z of S_z komt daarvoor verder in aanmerking. De Jacobi'sche spinoren zijn dus simultaan-eigenspinoren voor het viertal operatoren: I^2, M^2, S^2 en I_z.

In physische situaties van een deeltje met spin, die beschreven kunnen worden met behulp van een spinorveld, waarvan de hoekafhankelijkheid wordt gegeven door de Jacobi'sche spinoren, zullen dus de volgende physische grootheden gelijktijdig de daarbijvermelde scherpe waarden kunnen bezitten:

1. kwadraat v/h baan-impulsmoment: $l\,(l + 1)\,\hbar^2, l = 0, 1, 2, \ldots$
2. kwadraat v/d spin: $s\,(s + 1)\,\hbar^2$, $s = \frac{1}{2}$.
3. kwadraat v/h totale impulsmoment: $j\,(j + 1)\,\hbar^2$, $j = l \pm s = = l \pm \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{2}$.
4. projectie v/h totale impulsmoment op de z-as van het grondtriëder: $\mu\hbar$, $\pm\,\mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots\ldots j$.

De projectie op de z-as van het baan-impulsmoment en van den spin zijn dan onbepaald.

De getallen l, s, j zijn achtereenvolgens het quantumgetal van het baan-impulsmoment, van den spin en van het totale impulsmoment, terwijl μ het magnetisch quantumgetal wordt genoemd.

De geschetste stand van zaken in bedoelde situatie wordt, zooals bekend, op de volgende wijze door middel van het *vector-model* aanschouwelijk voorgesteld. De twee vectoren van het baanimpulsmoment en van den spin, met lengten $\sqrt{l\,(l + 1)}$ en $\sqrt{s\,(s + 1)}$, gemeten in de eenheid $\hbar$, worden tot een totaalmoment samengesteld van de grootte $\sqrt{j\,(j + 1)}$.

Overeenkomstig het optreden van twee stellen simultaan-eigenspinoren, die hooren bij $j = l \pm \frac{1}{2}$, kan deze samenstelling in het algemeen op twee manieren geschieden. Alleen het geval $l = 0$

maakt een uitzondering, daarbij kan j slechts de waarde $\frac{1}{2}$ verkrijgen.

Een situatie als bovenbedoeld treedt bijvoorbeeld op, wanneer een zwak magnetisch veld wordt aangelegd in de richting van de z-as. Zulk een situatie wordt dan door de $2j+1$ Jacobi'sche spinoren, die bij éénzelfde eigenwaarde ε én bij een bepaalde waarde van het quantumgetal l behooren, in voldoende benadering beschreven, want zij vormen dan de aan de, door het magnetische veld veroorzaakte kleine storing, aangepaste eigen-spinoren. De $(2j+1)$-voudige ontaarding wordt dan opgeheven en het totale impulsmoment stelt zich, uniform precedeerend rond de veldrichting, zóó in, dat zijn projectie op die richting juist één der waarden van μ aanneemt.

Ten slotte merken we nog op, dat er voor de drie onderling verwisselbare operatoren I_z, M_z en S_z simultaan-eigenspinoren zullen bestaan, waarbij eigenwaarden behooren, die wegens

$$I_z = M_z + S_z$$

aan de betrekking

$$e\,(I_z) = e\,(M_z) + e\,(S_z)$$

zullen voldoen. Uit

$$S_z = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lezen we onmiddellijk af:

$$e\,(S_z) = \pm\tfrac{1}{2}\hbar$$

zoodat we met (106) mogen schrijven:

$$\mu = m \pm \tfrac{1}{2}. \tag{159}$$

De eigenspinoren van S_z zijn op de lineaire distributie blijkbaar

$$F_{\frac{1}{2}}(r,\vartheta,\varphi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{en } F_{-\frac{1}{2}}(r,\vartheta,\varphi)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{160}$$

behoorende bij de eigenwaarde $\frac{1}{2}\hbar$ en $-\frac{1}{2}\hbar$.

13 - VERGELIJKING VAN ONZE UITKOMSTEN MET DE OP DE LINEAIRE DISTRIBUTIE VERKREGEN RESULTATEN

Volgens de in de vorige paragrafen verkregen resultaten, formules (153, 130, 148, 103, 129, 138, 139, 114), bezitten de twee bij elkaar behoorende Jacobi'sche spinoren de gedaante:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k} = \frac{e^{i\mu\varphi}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (-1)^{\mu \pm \frac{1}{2}} E_j^{-\mu} \\ \\ E_j^{\mu} \end{pmatrix} \tag{161}$$

waarin $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ enz., (162)

$$k = j + \tfrac{1}{2}; \ |\mu| = \text{half oneven} \tag{163}$$

$$-j \leqq \mu \leqq j, \tag{164}$$

$$E_j^{\mu} = \frac{1}{2^j (j-\frac{1}{2})!} \sqrt{\frac{(j-\mu)!}{(j+\mu)!}}\, p(x,\mu) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x,j) \tag{165}$$

$$= \frac{(-1)^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^j (j-\frac{1}{2})!} \sqrt{\frac{(j+\mu)!}{(j-\mu)!}}\, p(-x,-\mu) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu} p(x,j) \tag{166}$$

met $p(x,a) = (1-x)^{a+\frac{1}{2}}(1+x)^{a-\frac{1}{2}}, \ x = \cos\vartheta.$ (167)

Voor de E_j^{μ}-functies geldt de betrekking:

$$E_j^{-\mu}(-x) = (-1)^{j-\frac{1}{2}} E_j^{\mu}(x). \tag{168}$$

Zooals wij vonden, treden de Jacobi'sche spinoren op bij de golfmechanische beschrijving van de beweging van een deeltje met spin, als bij die beschrijving de spherische distributie van spin-triëders wordt benut. Worden de spin-effecten buiten beschouwing gelaten, dan nemen, zooals bekend, de polaire bolfuncties een centrale plaats in bij de beschrijving op de lineaire distributie. Wij plaatsen hieronder de formules voor de polaire bolfuncties in spinor-gedaante en in een van de gebruikelijke afwijkende notatie, alles ter wille van de vergelijkbaarheid:

$$\mathfrak{P}^{m}_{l} = \frac{e^{im\varphi}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (-1)^{m} E_l^{-m} \\ \\ E_l^{m} \end{pmatrix} \tag{169}$$

waarin $l = 0, 1, 2, 3, \ldots .$ enz., (170)

$|m| =$ geheel getal, (171)

en $-l \leqq m \leqq l,$ (172)

$$E_l^m = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}(l+\tfrac{1}{2})}\,(1-x^2)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(x^2-1)^l \tag{173}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(l+\tfrac{1}{2})}\,(1-x^2)^{-m}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-m}(x^2-1)^l \tag{174}$$

met $x = \cos\vartheta.$

Voor de E_l^m-functies geldt echter de betrekking:

$$E_l^{-m}(x) = (-1)^m E_l^m. \tag{175}$$

Met behulp dezer betrekking werden de polaire bolfuncties in den spinor-vorm (169) geschreven.

Er valt dus een vergaande overeenstemming tusschen de $\mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu}$ en de $\mathfrak{P}_l^m$ te constateeren, terwijl de afwijkingen ten duidelijkste samenhangen met het optreden van den spin. Zoo het verschijnen van twee bij elkaar behoorende spinoren, die hooren bij $j = l \pm \frac{1}{2}$ en het daarmee correspondeerende splitsen van $(-1)^m$ in $(-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}}$, dat geheel met (159) overeenstemt.

Het heeft er dus alle schijn van, dat de Jacobi'sche spinoren de aangewezen spin-analoga van de polaire bolfuncties zijn. In ieder geval zijn er door hun invoering voordeelen te bereiken, zooals uit het hier volgende nog moge blijken en we in de volgende Hoofdstukken nog nader zullen illustreeren.

Op de lineaire distributie gaat men bij de bepaling van de simultaan-eigenspinoren van de operatoren I^2, M^2 en I_z uit van de simultaan-eigenfuncties van de operatoren M^2 en M_z, welke gegeven worden door de polaire bolfuncties. In verband met (160) vindt men dan eerst de twee stellen simultaan-eigenspinoren van de operatoren M^2, M_z en I_z als:

$$Q_l^{m,(+)} = \begin{pmatrix} e^{im\varphi} E_l^m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{176}$$

behoorende bij $\mu = m + \frac{1}{2}$, en:

$$Q_l^{m,(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{im\varphi} E_l^m \end{pmatrix} \tag{177}$$

behoorende bij $\mu = m - \frac{1}{2}$.

Hieruit construeert men vervolgens door lineaire combinatie de twee stellen simultaan-eigenspinoren van de operatoren M^2, I^2 en I_z:

$$\begin{aligned} a_1 Q_l^{m,(+)} + \beta_1 Q_l^{m+1,(-)} &= Q_{l,\, j=l+\frac{1}{2}}^{\mu=m+\frac{1}{2}} \\ a_2 Q_l^{m,(+)} + \beta_2 Q_l^{m+1,(-)} &= Q_{l,\, j=l-\frac{1}{2}}^{\mu=m+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{178}$$

waarin de constanten de volgende waarden hebben:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\,, \quad \beta_1 = -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\;; \\ a_2 &= \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\,, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\,, \end{aligned} \tag{179}$$

zoodat op de lineaire distributie de analoga van onze $\mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu}$ als volgt luiden:

$$Q_{l,\, j=l+\frac{1}{2}}^{\mu=m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l+m+1}{2l+1}}\, e^{im\varphi} E_l^m \\ -\sqrt{\dfrac{l-m}{2l+1}}\, e^{i(m+1)\varphi} E_l^{m+1} \end{pmatrix} \tag{180}$$

$$Q_{l,\, j=l-\frac{1}{2}}^{\mu=m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l-m}{2l+1}}\, e^{im\varphi} E_l^m \\ \sqrt{\dfrac{l+m+1}{2l+1}}\, e^{i(m+1)\varphi} E_l^{m+1} \end{pmatrix} \tag{181}$$

Zij zijn hier met een factor $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$ genormeerd, terwijl zij wegens hun herkomst uitgedrukt staan met behulp van de quantumgetallen l en m. Door transformatie dezer spinoren op de spherische distributie met de matrix (27) en herleiding kunnen we de $\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\pm k}$ verkrijgen, op een factor met modulus 1 nà. Het door die transformatie verkregen voordeel springt in het oog. Niet alleen het optreden van één en dezelfde e-macht, zoodat deze als een factor vóór den spinor geschreven kan worden, is een welkome verbetering, maar ook het verdwijnen van de lastige worteluitdrukkingen.

Ten slotte merken we nog het volgende op. Transformeeren we (178) met de matrix (27) dan verkrijgen we twee vergelijkingen, waaruit de getransformeerden van de eigenspinoren (176) en (177) kunnen worden opgelost, uitgedrukt in de Jacobi'sche spinoren. Het is duidelijk, dat daarbij weer dezelfde worteluitdrukkingen zullen optreden, omdat de determinant van het stelsel juist 1 is. De eenvoudige eigenspinoren, waarvan op de lineaire distributie wordt uitgegaan, vertoonen op de spherische distributie juist een ingewikkelde gedaante.

HOOFDSTUK IV

TRANSFORMATIE VAN DEN OPERATOR $(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})$ OP DE ALGEMEENE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS; BIJZONDERE GEVALLEN

1 - DE OPERATOR $(\vec{\sigma}.\,\mathrm{grad})$

Deze operator is het scalaire product van den matrix-vector $\vec{\sigma}$ van Pauli en den gradiënt-vector. Uitgeschreven luidt hij dus:

$$(\vec{\sigma}.\,\mathrm{grad}) = \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{182}$$

In verband met de opmerking in paragraaf 2 van Hoofdstuk II omtrent de volgorde der factoren in het scalaire product, hebben we hier den operator $\vec{\sigma}$ voorop geplaatst.

2 - VOORBEREIDENDE BESCHOUWINGEN

In de volgende paragraaf zullen we de transformatie van den operator (182) ter hand nemen. Eenige voorbereidende zaken mogen in deze paragraaf een plaats vinden.

1°. Daar we uitsluitend distributies van spin-triëders in de beschouwing betrekken, die innig samenhangen met orthogonale coördinaten, is de inhoud van paragraaf 3 der Inleiding voor ons van belang. In plaats van ξ, η, ζ schrijven we in het vervolg echter q_1, q_2, q_3; in verband daarmede schrijven we voor (18) ook

$$J = E_1 E_2 E_3.$$

Uit de transformatie-matrix (17) lezen we af:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = E_i \cos(x, q_i), \frac{\partial y}{\partial q_i} = E_i \cos(y, q_i), \frac{\partial z}{\partial q_i} = E_i \cos(z, q_i); i = 1, 2, 3,$$

Wegens

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_i}$$

leiden we uit deze betrekkingen af:

$$\frac{\partial E_i \cos(x, q_i)}{\partial q_k} = \frac{\partial E_k \cos(x, q_k)}{\partial q_i}.$$

Evenzoo voor y en z. Uitgeschreven geeft dit de relaties:

$$\cos(x, q_i)\frac{\partial E_i}{\partial q_k} + E_i\frac{\partial \cos(x, q_i)}{\partial q_k} = \cos(x, q_k)\frac{\partial E_k}{\partial q_i} + E_k\frac{\partial \cos(x, q_k)}{\partial q_i}$$

$$\cos(y, q_i)\frac{\partial E_i}{\partial q_k} + E_i\frac{\partial \cos(y, q_i)}{\partial q_k} = \cos(y, q_k)\frac{\partial E_k}{\partial q_i} + E_k\frac{\partial \cos(y, q_k)}{\partial q_i}$$

$$\cos(z, q_i)\frac{\partial E_i}{\partial q_k} + E_i\frac{\partial \cos(z, q_i)}{\partial q_k} = \cos(z, q_k)\frac{\partial E_k}{\partial q_i} + E_k\frac{\partial \cos(z, q_k)}{\partial q_i}.$$

Vermenigvuldigen we de eerste relatie met $\cos(x, q_k)$, de tweede met $\cos(y, q_k)$ en de derde met $\cos(z, q_k)$ en tellen we ze daarna op, dan verkrijgen we:

$$\cos(x, q_k)\frac{1}{E_k}\frac{\partial \cos(x, q_i)}{\partial q_k} + \cos(y, q_k)\frac{1}{E_k}\frac{\partial \cos(y, q_i)}{\partial q_k} +$$

$$+ \cos(z, q_k)\frac{1}{E_k}\frac{\partial \cos(z, q_i)}{\partial q_k} = \frac{1}{E_i E_k}\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = \frac{1}{E_i}\frac{\partial \log E_k}{\partial q_i},$$

als we ten slotte nog door $E_i E_k$ deelen. Geven we hierin k de waarden 1, 2, 3 en tellen we wederom op, dan kunnen we het resultaat schrijven als:

$$\left[\cos(x, q_1)\frac{1}{E_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \cos(x, q_2)\frac{1}{E_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cos(x, q_3)\frac{1}{E_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right]\cos(x, q_i) +$$

$$\left[\cos(y, q_1)\frac{1}{E_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \cos(y, q_2)\frac{1}{E_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cos(y, q_3)\frac{1}{E_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right]\cos(y, q_i) +$$

$$\left[\cos(z, q_1)\frac{1}{E_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \cos(z, q_2)\frac{1}{E_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cos(z, q_3)\frac{1}{E_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right]\cos(z, q_i) =$$

$$= \frac{1}{E^i}\left[\frac{\partial \log E_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \log E_2}{\partial q_i} + \frac{\partial \log E_3}{\partial q_i}\right] = \frac{\partial \log E_1 E_2 E_3}{E_i\,\partial q_i} =$$

$$= \frac{\partial \log J}{E_i\,\partial q_i} = 2J^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{E^i}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}J^{\frac{1}{2}}\right),$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial \cos(x, q_i)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(y, q_i)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(z, q_i)}{\partial z} = 2J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} J^{\frac{1}{2}} \right). \quad (183)$$

2°. Zijn de elementen van de matrix

$$m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

functies van een veranderlijke λ, dan kunnen we voor den operator

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} m \quad (184)$$

schrijven:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} m = m \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial m}{\partial \lambda}. \quad (185)$$

Het bewijs hiervan volgt onmiddellijk uit de herleiding van het resultaat der werking van (184) op een willekeurigen spinor.

3 - TRANSFORMATIE VAN DEN OPERATOR $(\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad})$ OP DE ALGEMEENE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

De transformatie van den operator $(\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad})$ geschiedt als volgt. Vooreerst schrijven we met (182) en onder toepassing van (185):

$$\overline{(\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad})} = T (\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad}) T^{-1} = T\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} T^{-1} + T\sigma_y \frac{\partial}{\partial y} T^{-1} + T\sigma_z \frac{\partial}{\partial z} T^{-1} =$$

$$= \left(T\sigma_x T^{-1} \frac{\partial}{\partial x} + T\sigma_y T^{-1} \frac{\partial}{\partial y} + T\sigma_z T^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \right) +$$

$$+ \left(T\sigma_x \frac{\partial T^{-1}}{\partial x} + T\sigma_y \frac{\partial T^{-1}}{\partial y} + T\sigma_z \frac{\partial T^{-1}}{\partial z} \right).$$

De *eerste term* hiervan is blijkbaar gelijk aan:

$$(\vec{\overline{\sigma}} \,.\, \mathrm{grad}).$$

Dit scalaire-product is invariant tegenover transformatie met de matrix L. Dan gaat de operator grad over in grad′ met de componenten:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{1}{E_2} \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad \frac{1}{E_3} \frac{\partial}{\partial q_3},$$

terwijl voor den getransformeerde van $\vec{\sigma}$ formule (47) geldt. Voor de *eerste term* vinden we dus:

$$\sigma_x \frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \sigma_y \frac{1}{E_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \sigma_z \frac{1}{E_3} \frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Ter herleiding van de *tweede term* berekenen we eerst met

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \; T\sigma_x = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}, \; T\sigma_y = i \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}, \; T\sigma_z = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Schrijven we ter afkorting 1, 2 resp. 3 accenten ter aanduiding van de differentiatie naar de coördinaten x, y en z, dan wordt voor het *tweede deel* aanvankelijk gevonden:

$$\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta' & -\beta' \\ -\gamma' & \alpha' \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta'' & -\beta'' \\ -\gamma'' & \alpha'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta''' & -\beta''' \\ -\gamma''' & \alpha''' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \beta\delta' - \gamma'\alpha + i\,(\beta\delta'' + \alpha\gamma'') + (\alpha\delta''' + \beta\gamma''') & \\ & - \beta\beta' + \alpha\alpha' + i\,(-\beta\beta'' - \alpha\alpha'') - \alpha\beta''' - \beta\alpha''' \\ \delta\delta' - \gamma\gamma' + i\,(\delta\delta'' + \gamma\gamma'') + (\gamma\delta''' + \delta\gamma''') & \\ & - \delta\beta' + \gamma\alpha' + i\,(-\delta\beta'' - \gamma\alpha'') - \gamma\beta''' - \delta\alpha''' \end{pmatrix}.$$

Schrijven we dit weer als

$$A + X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z,$$

dan vinden we voor de aldus ingevoerde grootheden:

$$2A = (\beta\delta' - \delta\beta' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma') + i\,(\beta\delta'' - \delta\beta'' + \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + \\ + (\alpha\delta''' - \delta\alpha''' + \beta\gamma''' - \gamma\beta'''),$$

$$2X = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta') + i\,(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'' + \delta\delta'') + \\ + (\gamma\delta''' + \delta\gamma''' - \alpha\beta''' - \beta\alpha'''),$$

$$2Y = i\,(\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta') + (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' + \delta\delta'') - \\ - i\,(\gamma\delta''' + \delta\gamma''' + \alpha\beta''' + \beta\alpha'''),$$

$$2Z = (\beta\delta' + \delta\beta' - \alpha\gamma' - \gamma\alpha') + i\,(\beta\delta'' + \delta\beta'' + \alpha\gamma'' + \gamma\alpha'') + \\ + (\alpha\delta''' + \delta\alpha''' + \beta\gamma''' + \gamma\beta''').$$

De grootheid A is blijkens (21) gelijk aan nul. Voor de drie laatste grootheden kunnen we schrijven:

$$2X = \tfrac{1}{2}\,(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)' + \tfrac{i}{2}\,(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)'' + (\gamma\delta - \alpha\beta)''',$$

$$2Y = \tfrac{i}{2}\,(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)' + \tfrac{1}{2}\,(\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)'' - i\,(\alpha\beta + \gamma\delta)''',$$

$$2Z = (\beta\delta - \alpha\gamma)' + i\,(\alpha\gamma + \beta\delta)'' + (\alpha\delta + \beta\gamma)'''.$$

Een blik op (7) bevestigt, dat deze uitdrukkingen gelijk zijn aan:

$$2X = \frac{\partial \cos(x, q_1)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(y, q_1)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(z, q_1)}{\partial z},$$

$$2Y = \frac{\partial \cos(x, q_2)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(y, q_2)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(z, q_2)}{\partial z},$$

$$2Z = \frac{\partial \cos(x, q_3)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(y, q_3)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(z, q_3)}{\partial z}.$$

waarvoor volgens (183) geschreven kan worden:

$$X = J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1} J^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$Y = J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2} J^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$Z = J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3} J^{\frac{1}{2}}\right).$$

Ten slotte vinden we dus voor de *tweede term:*

$$\sigma_x J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1} J^{\frac{1}{2}}\right) + \sigma_y J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2} J^{\frac{1}{2}}\right) + \sigma_z J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3} J^{\frac{1}{2}}\right).$$

Voor de som van eerste en tweede term wordt zoodoende gevonden:

$$\sigma_x \left[\frac{1}{E_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1} J^{\frac{1}{2}}\right)\right] + \sigma_y \left[\frac{1}{E_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2} J^{\frac{1}{2}}\right)\right] +$$

$$+ \sigma_z \left[\frac{1}{E_3}\frac{\partial}{\partial q_3} + J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3} J^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Dit kan nog in de volgende interessante gedaante gebracht worden:

$$\sigma_x J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial q_1} J^{\frac{1}{2}} + \sigma_y J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_2} \frac{\partial}{\partial q_2} J^{\frac{1}{2}} + \sigma_z J^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{E_3} \frac{\partial}{\partial q_3} J^{\frac{1}{2}}.$$

Denken we aan paragraaf 10 van de Inleiding, dan kunnen we opmerken, dat hierin de gehermite'iseerde componenten van grad' staan. Er bestaat dus het zeer eenvoudige transformatie-voorschrift:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = (\vec{\sigma}\,.\,J^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{grad}'\,J^{\frac{1}{2}}) \tag{186}$$

hetgeen we ook nog kunnen schrijven als:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = J^{-\frac{1}{2}}(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')\,J^{\frac{1}{2}}. \tag{187}$$

4 - EENIGE BELANGRIJKE BIJZONDERE GEVALLEN

1°. *de spherische distributie van spin-triëders.*

Met

$$q_1 = \vartheta,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = r,$$

vinden we:

$$E_1 = r,\ E_2 = r \sin\vartheta,\ E_3 = 1,\ J = r^2 \sin\vartheta.$$

Op de spherische distributie geldt dus:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = \frac{1}{r\sqrt{\sin\vartheta}}(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')\,r\sqrt{\sin\vartheta} =$$

$$= \sigma_x \frac{1}{r\sqrt{\sin\vartheta}} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\sqrt{\sin\vartheta} + \sigma_y \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sigma_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r. \tag{188}$$

2°. *de cylindrische distributie van spin-triëders.*

Met

$$q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z,$$

vinden we:

$$E_1 = 1,\ E_2 = r,\ E_3 = 1,\ J = r.$$

Op de cylindrische distributie geldt dus:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = \frac{1}{\sqrt{r}}(\vec{\sigma}.\mathrm{grad}')\sqrt{r} = \sigma_x \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r} + \sigma_y \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (189)$$

Wij merken nog op, dat Frenkel [1]) formules heeft afgeleid voor de transformatie van den operator $-i\hbar(\vec{\gamma}\,.\,\mathrm{grad})$, waarin

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

die dus rechtstreeks vergelijkbaar zijn met de hier door ons verkregen resultaten. Daar hij de afleiding dier formules baseert op de foutieve herleidingsformule

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \log L = \frac{\partial L}{\partial q_k} L^{-1}$$

zijn zij eveneens onjuist. De hierin optredende matrix L heeft niets uitstaande met onze matrix L, doch stemt geheel overeen met de matrix (194). Dat de genoemde formule geen algemeene geldigheid kan bezitten is direct in te zien, door haar toe te passen op de willekeurige matrix

$$L = L_1 L_2$$

Eenerzijds hebben we dan:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \log L_1 L_2 = \frac{\partial L_1}{\partial q_k} L_1^{-1} + L_1 \left(\frac{\partial L_2}{\partial q_k} L_2^{-1}\right) L_1^{-1},$$

anderzijds echter:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \log L_1 L_2 = \frac{\partial}{\partial q_k} \log L_1 + \frac{\partial}{\partial q_k} \log L_2 = \frac{\partial L_1}{\partial q_k} L_1^{-1} + \frac{\partial L_2}{\partial q_k} L_2^{-1}.$$

De rechterleden zijn in het algemeen echter niet gelijk, want twee willekeurige matrices L_1 en L_2 voldoen niet aan de betrekking:

$$L_1 \left(\frac{\partial L_2}{\partial q_k} L_2^{-1}\right) L_1^{-1} = \frac{\partial L_2}{\partial q_k} L_2^{-1}.$$

---

1) J. Frenkel, Wave Mechanics, Advanced General Theory (1934), blz. 363, e.v.

Ook voor de speciale matrices L, waarop Frenkel de formule toepast blijkt deze gelijkheid niet te gelden.

Wellicht stelde hij de onjuiste formule op naar aanleiding van een door hem ingevoerde misleidende symboliek. Wat deze laatste betreft zij opgemerkt, dat reeds zijn eerste formule luidende:

$$A'' = e^{\frac{i}{2}\phi\sigma_z} \cdot e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y} = e^{\frac{i}{2}(\phi\sigma_z + \theta\sigma_y)} \text{ [1]},$$

niet juist kan zijn. Daaraan verandert zijn toevoeging omtrent de niet-verwisselbaarheid van de twee factoren in het tweede lid niets, want in het derde lid is met die restrictie geen rekening te houden.

Dat er fouten ontstaan bij het gebruik van de symboliek van Frenkel vindt meestal zijn grond in het feit, dat voor twee niet-verwisselbare matrices A en B steeds geldt:

$$e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}.$$

5 - TRANSFORMATIE VAN DEN OPERATOR Δ VAN LAPLACE

We voegen aan dit Hoofdstuk nog de transformatie toe van den operator Δ van Laplace, waarvoor in orthogonale rechtlijnige coördinaten geldt:

$$\Delta = (\vec{\sigma} \cdot \text{grad})^2$$

Voeren we in beide leden dezer gelijkheid zonder meer nieuwe orthogonale kromlijnige coördinaten in, door Δ daarin uit te drukken en den gradiënt in die coördinaten te schrijven, dan blijft de gelijkheid dier leden niet bestaan. Gaan we echter bovendien op de bijbehoorende distributie van spin-triëders over, dan geldt de gelijkheid weer, als we ten minste den gehermite'iseerden gradiënt nemen. Dan hebben we blijkens (186) immers:

$$\overline{\Delta} = (\vec{\sigma} \cdot J^{-\frac{1}{2}} \text{grad}' J^{\frac{1}{2}})^2. \tag{190}$$

1) loc. cit., blz. 353.

HOOFDSTUK V

TRANSFORMATIE VAN DE VERGELIJKING VAN DIRAC OP DE ALGEMEENE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

1 - DE VERGELIJKING VAN DIRAC

In de theorie van Dirac van het electron wordt de physische situatie beschreven met behulp van een spinoren-paar $\Psi^{(1)}$ en $\Psi^{(2)}$, zoodat een 4-componentige golffunctie

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)} \\ \\ \Psi^{(2)} \end{pmatrix} \tag{191}$$

optreedt. De spinoren voldoen aan de vergelijkingen:

$$(d_t + mc^2)\, \Psi^{(1)} + c\,(\sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z)\, \Psi^{(2)} = 0$$

$$(d_t - mc^2)\, \Psi^{(2)} + c\,(\sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z)\, \Psi^{(1)} = 0$$

waarin:

$$d_t = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi$$

$$d_x = p_x + \frac{e}{c} A_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x, \text{ cycl.}$$

Deze twee vergelijkingen kunnen we tot de vergelijking van Dirac voor Ψ samenstellen in de gedaante:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \tag{192}$$

waarbij dan voor den energie-operator H, in een voor ons doel geschikten vorm, wordt gevonden:

$$H = \begin{pmatrix} -e\varphi + mc^2 & e(\vec{\sigma}.\vec{A}) - i\hbar c(\vec{\sigma}.\text{grad}) \\ \\ e(\vec{\sigma}.\vec{A}) - i\hbar c(\vec{\sigma}.\text{grad}) & -e\varphi - mc^2 \end{pmatrix} \tag{193}$$

2 - TRANSFORMATIE VAN DE GOLFFUNCTIE Ψ VAN DIRAC EN VAN DAAROP WERKENDE OPERATOREN OP EEN DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

De transformatie van de golffunctie (191) op een distributie van spin-triëders moet als spinoren-paar blijkbaar geschieden met de super-matrix van de 2de orde:

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \tag{194}$$

waarvan de elementen in den hoofddiagonaal gelijk zijn aan de matrix (11); 0 staat voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alle operatoren Ω uit de spin-theorie van Pauli moeten nu geschreven worden als veelvouden van de eenheidssupermatrix van de 2de orde. Hun transformatie geschiedt als volgt:

$$\overline{\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Omega} & 0 \\ 0 & \overline{\Omega} \end{pmatrix} \tag{195}$$

De algemeene operator uit de theorie van Dirac heeft, zooals bijvoorbeeld H, de gedaante:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \tag{196}$$

Zijn getransformeerde luidt:

$$\begin{pmatrix} \overline{\Omega}_{11} & \overline{\Omega}_{12} \\ \overline{\Omega}_{21} & \overline{\Omega}_{22} \end{pmatrix}. \tag{197}$$

3 - TRANSFORMATIE VAN DE VERGELIJKING VAN DIRAC OP DE ALGEMEENE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Voor deze transformatie moeten we $\overline{H}$ bepalen volgens het voorschrift (197). Daar de elementen in den hoofddiagonaal onveranderd blijven, komt deze bepaling neer op de transformatie van den operator:

$$e(\vec{\sigma} \, . \, \vec{A}) - i\hbar c(\vec{\sigma} \, . \, \text{grad}). \tag{198}$$

Schrijven we:

$$\vec{A}' = L\,\vec{A},$$

dan hebben we met inachtneming van (47):

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\vec{A})} = \overline{(\vec{\sigma}'\,.\,\vec{A}')} = (\vec{\sigma}\,.\,\vec{A}')$$

want:
$$\overline{\vec{A}'} = \vec{A}'.$$

Onder toepassing van (187) volgt hiermede verder voor den getransformeerde van (198):

$$e\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{A}') - i\hbar c\, J^{-\frac{1}{2}}\,(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')\, J^{\frac{1}{2}}. \tag{199}$$

Zoodoende vinden we:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} -e\varphi + mc^2 & e(\vec{\sigma}\,.\,\vec{A}') - i\hbar c\, J^{-\frac{1}{2}}(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')\, J^{\frac{1}{2}} \\ e(\vec{\sigma}\,.\,\vec{A}') - i\hbar c\, J^{-\frac{1}{2}}(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')\, J^{\frac{1}{2}} & -e\varphi - mc^2 \end{pmatrix} \tag{200}$$

waarvoor we ook kunnen schrijven:

$$\overline{H} = J^{-\frac{1}{2}}\, H'\, J^{\frac{1}{2}}. \tag{201}$$

Hierin slaat het accent op de vervanging van grad en $\vec{A}$ in H door grad$'$ en $\vec{A}'$. Met (201) vinden we voor de vergelijking van Dirac, nà transformatie op de algemeene distributie van spintriëders, onder gelijktijdige invoering van de bijbehoorende kromlijnige coördinaten:

$$J^{-\frac{1}{2}} H' J^{\frac{1}{2}}\, \overline{\Psi} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \overline{\Psi}. \tag{202}$$

Voeren we hierin nog een nieuwe golffunctie in volgens

$$\Psi' = J^{\frac{1}{2}}\, \overline{\Psi}, \tag{203}$$

dan vinden we de volgende gedaante:

$$H'\Psi' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi'. \tag{204}$$

Hierin speelt dan

$$|\,\Psi'\,|^2 = J\,|\,\overline{\Psi}\,|^2 \tag{205}$$

direct de rol van waarschijnlijkheidsdichtheid.

HOOFDSTUK VI

OPLOSSING VAN HET ENERGIE-EIGENWAARDE-PROBLEEM IN DIRACS THEORIE VAN HET ELECTRON IN EEN CENTRAAL-KRACHTVELD DOOR TRANSFORMATIE OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

1 - HET ENERGIE-EIGENWAARDE-PROBLEEM IN DIRACS THEORIE VAN HET ELECTRON IN EEN CENTRAAL-KRACHTVELD

Wordt in (193) voor Ψ gesubstitueerd

$$e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\Psi,$$

dan verkrijgen we het algemeene energie-eigenwaarde-probleem:

$$H\Psi = E\Psi.$$

Stellen we in H nog $\vec{A} = 0$ en nemen we φ aan als functie van r alleen, dan wordt het door ons bedoelde probleem dus bepaald door den volgenden energie-operator:

$$H = \begin{pmatrix} -e\varphi + mc^2 & -i\hbar c(\vec{\sigma}\,.\,\text{grad}) \\ -i\hbar c(\vec{\sigma}\,.\,\text{grad}) & -e\varphi - mc^2 \end{pmatrix} \tag{206}$$

2 - TRANSFORMATIE VAN HET ONDERHAVIGE ENERGIE-EIGENWAARDE-PROBLEEM OP DE SPHERISCHE DISTRIBUTIE VAN SPIN-TRIËDERS

Deze transformatie geschiedt op grond van (200) met behulp van (188). Deze laatste formule luidt:

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\text{grad})} = \sigma_x \frac{1}{r\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sqrt{\sin\vartheta} + \sigma_y\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sigma_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r.$$

Letten we op de uitdrukkingen (78) dan kunnen we haar herleiden tot

$$-i\hbar\,\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = \frac{1}{r}\,(\sigma_x M\varphi - \sigma_y M\vartheta) - i\hbar\,\sigma_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r$$

$$= \frac{i}{r}\,\sigma_z\,(\sigma_y M\varphi + \sigma_x M\vartheta) - i\hbar\,\sigma_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r.$$

Met (91) vinden we dus:

$$-i\hbar\,\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad})} = \sigma_z\left(\frac{i\hbar}{r}\,\Omega + P_r\right) \tag{207}$$

als we nog stellen:

$$-i\hbar\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r = P_r.$$

Met dit resultaat vinden we onmiddellijk:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} -e\varphi + mc^2 & c\sigma_z\left(\frac{i\hbar}{r}\,\Omega + P_r\right) \\ c\sigma_z\left(\frac{i\hbar}{r}\,\Omega + P_r\right) & -e\varphi - mc^2 \end{pmatrix} \tag{208}$$

3 - HET ENERGIE-EIGENWAARDE-PROBLEEM ALS SIMULTAAN-EIGENWAARDE-PROBLEEM VAN DE OPERATOREN H, I^2 EN I_z

We bestudeeren de verwisselbaarheidsverhoudingen van $\overline{H}$ met de diverse operatoren. Daar de operatoren, zooals gezegd, in Diracs theorie veelvouden zijn van de eenheidssupermatrix, zullen zij met $\overline{H}$ verwisselbaar zijn als zij met den operator

$$\sigma_z\left(\frac{i\hbar}{r}\,\Omega + P_r\right),$$

verwisselbaar zijn.

Vroeger constateerden we reeds, dat $\overline{I}_z$ met Ω verwisselbaar was, dus is $\overline{I}_z$ met $\overline{H}$ verwisselbaar. Letten we op de uitdrukkingen (94) resp. (96) voor $\overline{I}^2$ resp. $\overline{M}^2$, luidende:

$$\overline{I}^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2 = \hbar^2\,\Omega^2,$$

$$\overline{M}^2 = \hbar^2\,(\Omega^2 - \Omega),$$

dan zien we, dat deze operatoren met $\overline{H}$ verwisselbaar zullen zijn als dit met σ_z het geval is. Nu volgt uit (91) met inachtneming der formules (48)

$$\sigma_z \mathfrak{K} + \mathfrak{K} \sigma_z = 0 \tag{209}$$

hetgeen met zich brengt:

$$\sigma_z \mathfrak{K}^2 - \mathfrak{K}^2 \sigma_z = 0.$$

We besluiten hieruit, dat $\overline{I}^2$ wel doch $\overline{M}^2$ niet met $\overline{H}$ verwisselbaar is.

Daar $\overline{H}$ dus met $\overline{I}^2$ en $\overline{I}_z$ verwisselbaar is kunnen we vragen naar de simultaan-eigen-functies van dit drietal operatoren en zoodoende het energie-eigenwaarde-probleem tot oplossing brengen.

4 - OPLOSSING VAN HET ENERGIE-EIGENWAARDE-PROBLEEM

In den zin van den vorigen paragraaf naar simultaan-eigenfuncties zoekend, gaan we allereerst met behulp van $\overline{H}$ uit (208) de vergelijkingen opstellen voor de afzonderlijke spinoren dier functies. Deze komen te luiden:

$$(E + e\varphi - mc^2)\, \Psi^{(1)} = c\sigma_z \left(\frac{i\hbar}{r} \mathfrak{K} + P_r \right) \Psi^{(2)},$$

$$(E + e\varphi + mc^2)\, \Psi^{(2)} = c\sigma_z \left(\frac{i\hbar}{r} \mathfrak{K} + P_r \right) \Psi^{(1)}.$$

Vermenigvuldigen we beide leden dezer vergelijkingen met σ_z en noemen we ter afkorting:

$$\frac{1}{c}(E + e\varphi - mc^2) = - A^-$$

$$\frac{1}{c}(E + e\varphi + mc^2) = - A^+$$

dan gaan zij over in:

$$\begin{aligned} - A^- \sigma_z \Psi^{(1)} &= \left(\frac{i\hbar}{r} \mathfrak{K} + P_r \right) \Psi^{(2)}, \\ - A^+ \sigma_z \Psi^{(2)} &= \left(\frac{i\hbar}{r} \mathfrak{K} + P_r^* \right) \Psi^{(1)}. \end{aligned} \tag{210}$$

De gezochte oplossingen zullen nu de gedaante (156) moeten bezitten. Dit leidt tot de substitutie:

$$\Psi^{(1)} = R_+^{(1)} \mathfrak{P}^{\mu}_{j,+k} + R_-^{(1)} \mathfrak{P}^{\mu}_{j,-k}, \tag{211}$$

$$\Psi^{(2)} = R_+^{(2)} \mathfrak{P}^{\mu}_{j,+k} + R_-^{(2)} \mathfrak{P}^{\mu}_{j,-k}.$$

Letten we nu op (154) en (155), waaruit volgt:

$$\mathfrak{K}\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} = \pm\, k\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} \tag{212}$$

en op de gemakkelijk te verifieeren gelijkheid:

$$\sigma_z\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} = -\ \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\mp k} \tag{213}$$

dan levert de substitutie van (211) in (210) de volgende vergelijkingen:

$$A^-\,(R^{(1)}_+\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k} + R^{(1)}_-\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k}) = \left(\frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(2)}_+\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k} + \\ + \left(-\frac{i\hbar}{r}k + P_r\right) R^{(2)}_-\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k},$$

$$A^+\,(R^{(2)}_+\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k} + R^{(2)}_-\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k}) = \left(\frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(1)}_+\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k} + \\ + \left(-\frac{i\hbar}{r}k + P_r\right) R^{(1)}_-\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,-k}\,.$$

Daar de Jacobi'sche spinoren onderling orthogonale eenheidsspinoren zijn, volgt hieruit door gelijkstelling van overeenkomstige componenten het bestaan der vier volgende vergelijkingen ter bepaling van de r-afhankelijkheid:

$$A^-\,R^{(1)}_+ = \left(-\frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(2)}_-, \tag{214}$$

$$A^+R^{(2)}_- = \left(\ \frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(1)}_+.$$

$$A^-\,R^{(1)}_- = \left(\ \frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(2)}_+, \tag{215}$$

$$A^+R^{(2)}_+ = \left(-\frac{i\hbar}{r}\,k + P_r\right) R^{(1)}_-.$$

Het verschijnsel, dat $R^{(1)}_+$ en $R^{(2)}_-$ bij elkaar blijken te hooren, evenals $R^{(1)}_-$ en $R^{(2)}_+$, is een gevolg van het feit, dat $\mathfrak{K}$ niet verwisselbaar is met $\overline{H}$. Er kan dan immers geen eigenfunctie verwacht worden, waarin uitsluitend $\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k}$ of $\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k}$ optreedt, hetgeen het geval was, wanneer $R_+^{(1)}$ en $R_+^{(2)}$ of $R_-^{(1)}$ en $R_-^{(2)}$ bij elkaar in één stel vergelijkingen voorkwamen.

Doordat $\overline{H}$ uitgedrukt staat in Ω treedt in de radiale deelen uitsluitend het quantum-getal k op, dat volgens (148) slechts positief geheel kan zijn.

De energie-eigenfuncties, welke hooren bij gegeven waarde van k kunnen bepaald worden, door uit (214) en (215) de radiale bestanddeelen op te lossen. Het is echter de vraag of dat wel gaat. We moeten namelijk bedenken, dat in de A's dezelfde energie-eigenwaarde E voorkomt, zoowel in (214) als in (215). Zijn de eigenwaarde-problemen (214) en (215) beide oplosbaar, dan zal het eigenwaardeprobleem

$$A^- f(r) = \left(-\frac{i\hbar}{r}k + P_r\right) g(r) \tag{216}$$

$$A^+ g(r) = \left(\frac{i\hbar}{r}k + P_r\right) f(r)$$

zoowel voor $+k$ als $-k$ oplossingen bezitten, want het stel vergelijkingen (214) gaat in dat van (215) over door vervanging van $+k$ door $-k$. Bezit omgekeerd (216) voor bedoelde waarde van k oplossingen

$$f_{\pm k}(r) \text{ en } g_{\pm k}(r), \tag{217}$$

welke bij $E_{\pm k}$ hooren, dan zullen deze dus voor $+k$ voldoen aan het probleem (214) en voor $-k$ aan (215). Nu zullen de functies (217) slechts kunnen dienen voor de vier functies R wanneer geldt:

$$E = E_{+k} = E_{-k}$$

m.a.w. wanneer de potentiaalfunctie φ zoodanig is, dat de eigenwaarden E_k *even* functies van k worden, dàn zullen er 4 bij elkaar passende functies R gevonden kunnen worden. In het algemeen zal dat echter niet het geval zijn. We moeten dan óf van het stelsel (214) óf van het stelsel (215) de nuloplossing nemen, welke oplossing immers geacht kan worden te behooren bij elke eindige waarde van E. Zoo vinden we dus twee energie-eigenfuncties, welke behooren bij verschillende energie-niveaux E_{+k} en E_{-k}. Wij kunnen zoodoende de simultaan-eigenfuncties van $\overline{H}$, $\overline{I}^2$ en $\overline{I}_z$ als volgt noteeren:

$$\Psi_{\pm k} = \begin{pmatrix} f_{\pm k}(r)\, \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,+k} \\ \\ g_{\pm k}(r)\, \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,-k} \end{pmatrix} \tag{218}$$

Ze hooren bij:

$$e\,(H) = E_{\pm k},\quad e\,(I^2) = j\,(j+1)\,\hbar^2,\quad e\,(I_z) = \mu\hbar. \tag{219}$$

Is het centraal-veld een zuiver Coulomb-veld, dan wordt, zooals bekend het discrete energie-spectrum bepaald door:

$$E_k = \frac{mc^2}{\left\{1 + \left(\frac{\beta}{n' + \sqrt{k^2 - \beta^2}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},\quad \beta = \frac{Ze^2}{\hbar c},$$

zijnde een *even* functie van k. Dan hooren bij $\pm k$ dezelfde energie-niveaux en hebben we met een ontaarding te doen.

Wijkt het centraal-veld af van het Coulomb-veld dan zal in het algemeen deze ontaarding opgeheven zijn. In dat geval ontstaat voor $\pm k$ een paar energie-niveaux, dat wel een „afschermings-doublet" genoemd wordt.

Om te geraken tot een modelmatige interpretatie der verkregen resultaten of ook om aansluiting te zoeken met de benaderende spin-theorieën, kan gebruik gemaakt worden van de gelijkheid (158). Van de boven-aangegeven energie-eigenfuncties kunnen we dan zeggen, dat zij voor $+k$ hooren bij $l = j - \frac{1}{2}$ en voor $-k$ bij $l = j + \frac{1}{2}$. Met deze aanwijzingen erbij vindt men ze in de literatuur.

Op de verdere oplossing van de radiale vergelijkingen gaan we hier niet in. Er kan gemakkelijk worden vastgesteld dat ze gelijkwaardig zijn met de in de literatuur gevonden vergelijkingen. Wij hebben slechts willen aantoonen, dat met onze simultaan-eigenfuncties (156) dus met de Jacobi'sche spinoren, de separatie van de hoekafhankelijkheid en de afhankelijkheid van r geheel automatisch geschiedt.

HOOFDSTUK VII

EENIGE EIGENSCHAPPEN DER JACOBI'SCHE SPINOREN; DE E_j^μ-FUNCTIES

1 - TABEL DER E_j^μ-FUNCTIES

In dit Hoofdstuk zullen we eenige formules en relaties afleiden voor de E_j^μ-functies en de Jacobi'sche spinoren, waarbij we het betreffende stelsel van formules uit paragraaf 13 van Hoofdstuk III zullen benutten. Met de daar te vinden uitdrukkingen voor de E_j^μ-functies hebben we onderstaande tabel samengesteld voor

Tabel	j	μ	E_j^μ-functie	$\sum_\mu (E_j^\mu)^2 = j + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sin \frac{1}{2}\vartheta$	1
		$-\frac{1}{2}$	$\cos \frac{1}{2}\vartheta$	
	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{6}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - \cos \vartheta)$	2
		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + 3 \cos \vartheta)$	
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - 3 \cos \vartheta)$	
		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + \cos \vartheta)$	
	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{30}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - \cos^2 \vartheta)$	3
		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + 4 \cos \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta)$	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (-1 + 2 \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta)$	
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (-1 - 2 \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta)$	
		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - 4 \cos \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta)$	
		$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{30}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - \cos^2 \vartheta)$	
	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{35}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta + \cos^3 \vartheta)$	4
		$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{5}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + 7 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta - 7 \cos^3 \vartheta)$	
		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{15}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - 3 \cos \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta + 7 \cos^3 \vartheta)$	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (3 + 15 \cos \vartheta - 15 \cos^2 \vartheta - 35 \cos^3 \vartheta)$	
		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (3 - 15 \cos \vartheta - 15 \cos^2 \vartheta + 35 \cos^3 \vartheta)$	
		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{15}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + 3 \cos \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta - 7 \cos^3 \vartheta)$	
		$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{5}\, \cos \frac{1}{2}\vartheta\, (1 - 7 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta + 7 \cos^3 \vartheta)$	
		$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{35}\, \sin \frac{1}{2}\vartheta\, (1 + \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta - \cos^3 \vartheta)$	

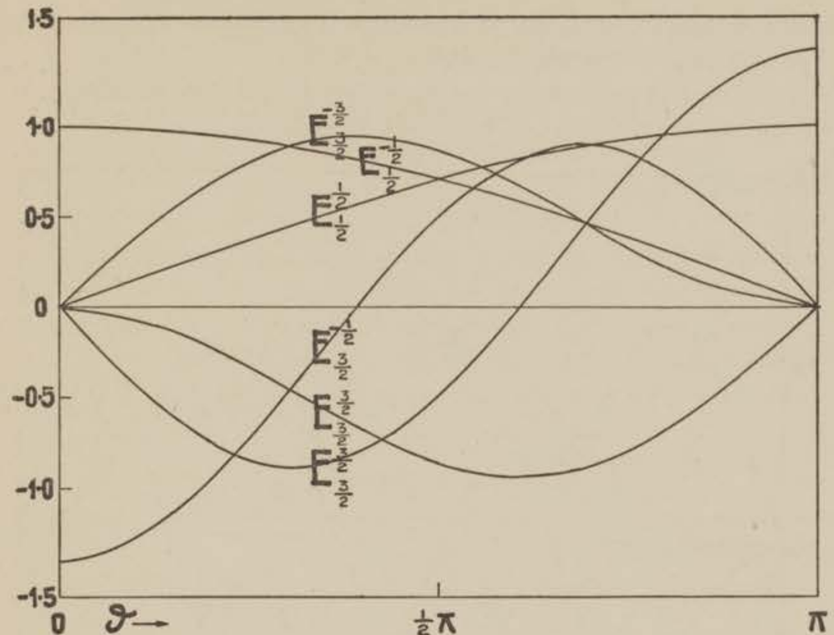

Fig. 3.

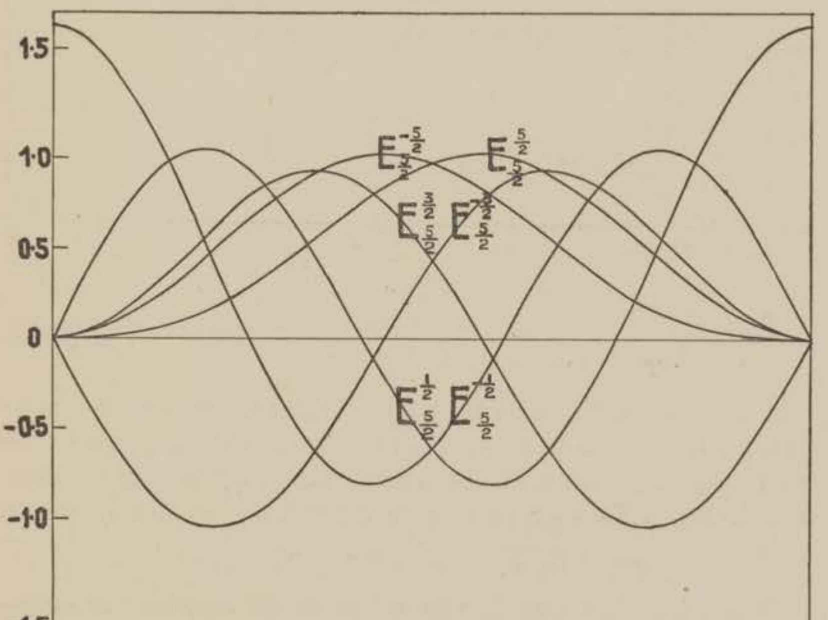

Fig. 4.

kleine waarden van j. In de figuren 3, 4 en 5 is het verloop dezer E_j^μ-functies grafisch voorgesteld.

Voor nadere toelichting op de laatste kolom van de tabel verwijzen we naar paragraaf 4 van dit Hoofdstuk.

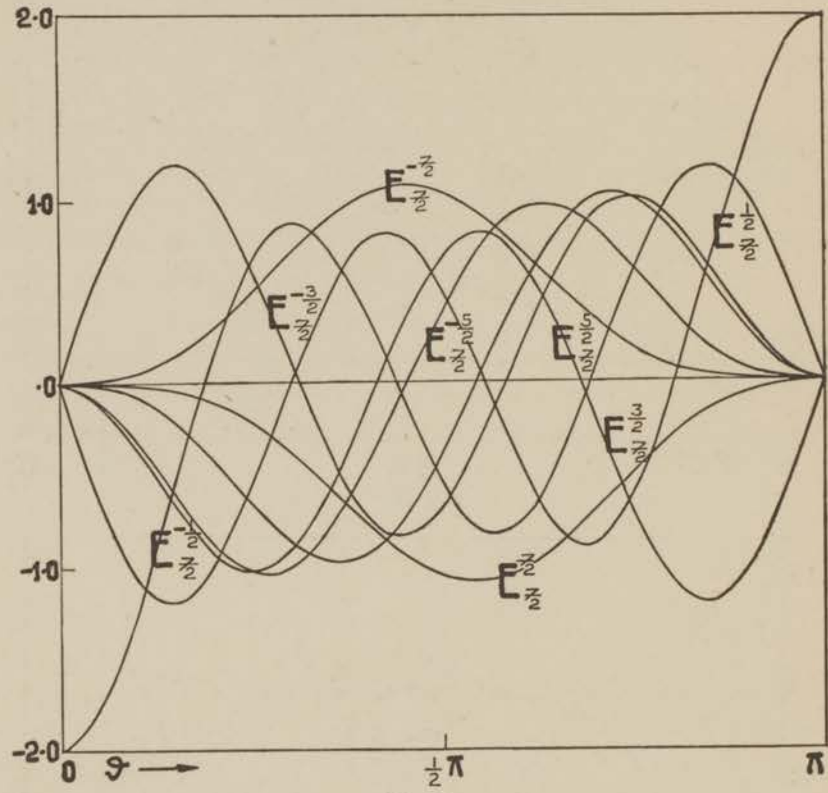

Fig. 5.

2 - AFLEIDING VAN EENIGE BETREKKINGEN, WAARAAN DE E_j^μ-FUNCTIES VOLDOEN

In paragraaf 6 van Hoofdstuk III merkten we op, dat de functie $p\,(x,\,\mu)$, waarmede de E_j^μ-functies zijn gedefinieerd, op te vatten is als beleggingsfunctie. Dit beteekent, dat de E_j^μ-functies ontstaan door orthogonaliseering en normeering van de functies uit de rij:

$$x^n\sqrt{p\,(x,\mu)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{enz.}$$

Bij een bepaalde waarde van μ zijn de E_j^μ-functies dus orthogonaal voor verschillende waarden van j, met het gevolg, dat de functies

$$e^{i\mu\varphi}\, E_j^\mu$$

een volledig orthogonaal stelsel van functies vormen.

Op grond van deze bevinding kan dus het bestaan van de volgende ontwikkelingen verwacht worden:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{i(\mu\pm 1)\varphi}\, E_j^\mu = \sum_{\mu',j'} a_{\mu',j'}\, e^{i\mu'\varphi}\, E_{j'}^{\mu'} \tag{220}$$

$$x e^{i\mu\varphi}\, E_j^\mu = \sum_{\mu',j'} b_{\mu',j'}\, e^{i\mu'\varphi}\, E_{j'}^{\mu'} \tag{221}$$

die we in paragraaf 3 zullen benutten.

Door beschouwing van de bekende uitdrukkingen voor de ontwikkelingscoëfficiënten vinden we, dat in (220) slechts termen voorkomen waarvoor $\mu' = \mu \pm 1$, terwijl in (221) $\mu' = \mu$ moet zijn. Beide leden van (220) resp. (221) kunnen we dus deelen door $e^{i(\mu\pm 1)\varphi}$ resp. $e^{i\mu\varphi}$. Kunnen we dus de volgende ontwikkelingen:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, E_j^\mu = \sum_{j'} a_{\mu\pm 1,j'}\, E_{j'}^{\mu\pm 1} \tag{222}$$

$$x E_j^\mu = \sum_{j'} b_{\mu,j'}\, E_{j'}^\mu \tag{223}$$

vinden, dan volgen daaruit vanzelf de gezochte ontwikkelingen. Beide ontwikkelingen kunnen we nu inderdaad afleiden uit eigenschappen der E_j^μ-functies, waartoe we als volgt te werk gaan. We schrijven (165) als

$$E_j^\mu = A_j^\mu \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p\,(-x,\, j) \tag{224}$$

met

$$A_j^\mu = \frac{1}{2^j\,(j-\frac{1}{2})!}\sqrt{\frac{(j-\mu)!}{(j+\mu)!}\, p\,(x,\, \mu)} \tag{225}$$

en gaan het tweede lid van (224) voor $j \to j+1$ herleiden.

Daar

$$p\,(-x, j+1) = (1-x)^{j+\frac{1}{2}}\,(1+x)^{j+\frac{1}{2}} = (1-x^2)\, p\,(-x, j)$$

vinden we

$$\left(\frac{d}{dx}\right) p\,(-x, j+1) = \left(\frac{j+\frac{3}{2}}{1+x} - \frac{j+\frac{1}{2}}{1-x}\right) p\,(-x, j+1) =$$
$$= [(j+\tfrac{3}{2})\,(1-x) - (j+\tfrac{1}{2})\,(1+x)]\, p\,(-x, j) =$$
$$= [1 - 2\,(j+1)\,x]\, p\,(-x, j).$$

en daarmede

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+1+\mu} p\,(-x, j+1) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} [1 - 2\,(j+1)\,x]\, p\,(-x, j) =$$
$$= [1 - 2\,(j+1)\,x] \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p\,(-x, j) -$$
$$- 2\,(j+1)\,(j+\mu) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+(\mu-1)} p\,(-x, j). \qquad (226)$$

Vermenigvuldigen we (226) met A^{μ}_{j+1}, dan gaat zij wegens

$$A^{\mu}_{j+1} = \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{j-\mu+1}{j+\mu+1}}\, A^{\mu}_{j} = \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{(j+\mu)(j+\mu+1)}}\, A^{\mu-1}_{j}$$

over in de volgende uitdrukking voor E^{μ}_{j+1}:

$$E^{\mu}_{j+1} = \frac{1-2\,(j+1)\,x}{2j+1} \sqrt{\frac{j-\mu+1}{j+\mu+1}}\, E^{\mu}_{j} -$$
$$- \frac{2\,(j+1)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2j+1} \sqrt{\frac{j+\mu}{j+\mu+1}}\, E^{\mu-1}_{j} \qquad (227)$$

Uit deze betrekking kunnen we nu allerhande relaties afleiden. Bij de daarbij optredende herleidingen kan dan met voordeel (168) worden toegepast. Zoo kunnen we daarmede uit de zoo juist gevonden betrekking de volgende afleiden:

$$E^{\mu}_{j+1} = -\frac{1+2\,(j+1)\,x}{2j+1} \sqrt{\frac{j+\mu+1}{j-\mu+1}}\, E^{\mu}_{j} +$$
$$+ \frac{2\,(j+1)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2j+1} \sqrt{\frac{j-\mu}{j-\mu+1}}\, E^{\mu+1}_{j} \qquad (228)$$

Schrijven we nu (227) op voor $j \to j+1$ en (228) voor $j \to j-1$ en $\mu \to \mu - 1$, dan vinden we de volgende twee relaties

$$E_j^\mu = \frac{1-2jx}{2j-1}\sqrt{\frac{j-\mu}{j+\mu}}\,E_{j-1}^\mu - \frac{2j\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2j-1}\sqrt{\frac{j+\mu-1}{j+\mu}}\,E_{j-1}^{\mu-1} \quad (j>\tfrac{1}{2}) \tag{229}$$

$$E_j^{\mu-1} = -\frac{1+2jx}{2j-1}\sqrt{\frac{j+\mu-1}{j-\mu+1}}\,E_{j-1}^{\mu-1} + $$

$$+\frac{2j\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2j-1}\sqrt{\frac{j-\mu}{j-\mu+1}}\,E_{j-1}^\mu \quad (j>\tfrac{1}{2}) \tag{230}$$

welke tezamen met (227) drie betrekkingen leveren tusschen de vijf functies E_{j-1}^μ, E_j^μ, E_{j+1}^μ, $E_j^{\mu-1}$ en $E_{j-1}^{\mu-1}$. Daaruit kunnen we dus $E_j^{\mu-1}$ en $E_{j-1}^{\mu-1}$ elimineeren om een betrekking tusschen E_{j-1}^μ, E_j^μ en E_{j+1}^μ over te houden, die als volgt kan worden geschreven:

$$xE_j^\mu = -\frac{1}{2j}\sqrt{j^2-\mu^2}\,E_j^\mu - \frac{\mu}{2j\,(j+1)}\,E_j^\mu -$$

$$-\frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j+1)^2-\mu^2}\,E_{j+1}^\mu \tag{231}$$

Hiermede hebben we blijkbaar de ontwikkeling (223) gevonden; de som bestaat slechts uit drie termen met de waarden j en $j \pm 1$ voor j'.

Ten einde nu ook de ontwikkelingen (222) te vinden schrijven we de laatstgevonden relatie op voor $\mu \rightarrow \mu + 1$. Dan luidt zij:

$$xE_j^{\mu+1} = -\frac{1}{2j}\sqrt{j^2-(\mu+1)^2}\,E_{j-1}^{\mu+1} - \frac{\mu+1}{2j\,(j+1)}\,E_j^{\mu+1} -$$

$$-\frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j+1)^2-(\mu+1)^2}\,E_{j+1}^{\mu+1}. \tag{232}$$

Nu schrijven we (228) voor $\mu \rightarrow \mu + 1$ als volgt, als het ware $xE_j^{\mu+1}$ oplossend.

$$xE_j^{\mu+1} = -\frac{2j+1}{2\,(j+1)}\sqrt{\frac{j+\mu+2}{j-\mu}}\,E_j^{\mu+1} + \frac{1}{2\,(j+1)}\,E_j^{\mu+1} -$$

$$-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{j+\mu+1}{j-\mu}}\,E_j^\mu \tag{233}$$

en stellen de rechterleden van de zoo verkregen uitdrukkingen aan elkander gelijk. De daaruit voortvloeiende betrekking kan geschreven worden als:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, E_j^\mu = \frac{1}{2j}\sqrt{(j-\mu)\,(j-\mu-1)}\; E_{j-1}^{\mu+1} +$$
$$+\frac{1}{2j\,(j+1)}\sqrt{(j-\mu)\,(j+\mu+1)}\; E_j^{\mu+1} -$$
$$-\frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j+\mu+1)\,(j+\mu+2)}\; E_{j+1}^{\mu+1}. \qquad (234)$$

Hiermede hebben we de ontwikkeling (222) gevonden voor het (+) -teeken, waarin eveneens slechts de waarden j en $j \pm 1$ voor j' voorkomen. Om de overeenkomstige ontwikkeling voor het (—) -teeken te vinden, passen we op het zoo juist verkregen resultaat weer de herleidingsformule (168) toe.

Dit levert de verlangde ontwikkeling:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, E_j^\mu = -\frac{1}{2j}\sqrt{(j+\mu)\,(j+\mu-1)}\; E_{j-1}^{\mu-1} +$$
$$+\frac{1}{2j\,(j+1)}\sqrt{(j+\mu)\,(j-\mu+1)}\; E_j^{\mu-1} +$$
$$+\frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j-\mu+1)\,(j-\mu+2)}\; E_{j+1}^{\mu-1}. \qquad (235)$$

Passen we (168) ook toe op (231) dan blijkt deze betrekking in zichzelf over te gaan.

Alhoewel blijkens (229) en (230) de gevonden betrekkingen met de beperking $j > \frac{1}{2}$ zijn afgeleid, kan gemakkelijk worden nagegaan, dat (231), (234) en (235) ook gelden voor $j = \frac{1}{2}$.

3 - SAMENSTELLING VAN EENIGE BETREKKINGEN, WAARAAN DE JACOBI'SCHE SPINOREN VOLDOEN; TOEPASSING OP DE ELECTRISCHE DIPOOLSTRALING

Allereerst hebben we de eigenwaarde-vergelijking:

$$\mathfrak{K}\, \mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^{\mu} = \pm\, k\, \mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^{\mu\,*}. \qquad (236)$$

Uit (168) leiden we af:

$$\mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^{-\mu}\,(-x) = (-1)^{j-\frac{1}{2}}\, \mathfrak{P}_{j,\,\mp k}^{\mu\,*}\,(x). \qquad (237)$$

Voor de werking van den matrix-vector $\vec{\sigma}$ van Pauli op de Jacobi'sche spinoren geldt:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} &= (-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}} \mathfrak{P}^{-\mu *}_{j,\,\mp k} \\
\sigma_y \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} &= i\,(-1)^{\mu\pm\frac{1}{2}} \mathfrak{P}^{-\mu *}_{j,\,\pm k} \\
\sigma_z \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} &= - \qquad \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\mp k}
\end{aligned}
\tag{238}
$$

We zien aan deze formules reeds, dat het voor de formuleering van de eigenschappen van één der twee Jacobi'sche spinoren gewenscht is ook den andere daarbij te betrekken. Dat de Jacobi'sche spinoren in dien zin een echt paar vormen is misschien nog beter te zien aan de volgende relaties, die geheel analoog zijn met de voor de polaire bolfuncties bekendstaande betrekkingen, formules (239),)240), (241), op blz. 84.

Zij kunnen door eenvoudige substitutie en herleiding onmiddellijk worden afgeleid uit de in de vorige paragraaf opgestelde ontwikkelingen, formules (231), (234) en (235).

Eigenlijk passen we hierbij de ontwikkelingen (220) en (221) toe zonder deze expliciet op te schrijven.

De twee laatsten der opgestelde ontwikkelingen kunnen weer uit elkander worden afgeleid door middel van (237).

Wij herinneren er verder aan, dat het paar Jacobi'sche spinoren onderling loodrechte eenheids-spinoren zijn. Op grond van de in de vorige paragraaf vermelde orthogonaliteit der E^{μ}_{j}-functies kunnen we nu omtrent de Jacobi'sche spinoren het volgende vaststellen:

De Jacobi'sche spinoren vormen een stelsel van onderling loodrechte eenheids-spinoren, hetgeen beteekent, dat het scalaire product

$$
(\mathfrak{P}^{\mu'}_{j',\,(\pm)'k'} \cdot \mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k}) \tag{242}
$$

slechts van nul verschillend is, wanneer:

$$
j' = j, \text{ (dus ook } k' = k), \ \mu' = \mu, \text{ en } (\pm)' = \pm.
$$

Het laatste beteekent, dat hetzelfde teeken genomen moet worden.

$$\cos\vartheta\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} = -\frac{1}{2j}\sqrt{j^2-\mu^2}\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j-1,\,\pm(k-1)} - \frac{\mu}{2j\,(j+1)}\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\mp k} - \frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j+1)^2-\mu^2}\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j+1,\,\pm(k+1)}. \tag{239}$$

$$e^{i\varphi}\sin\vartheta\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} = \frac{1}{2j}\sqrt{(j-\mu)\,(j-\mu-1)}\,\mathfrak{P}^{\mu+1}_{j-1,\,\pm(k-1)} + \frac{1}{2j\,(j+1)}\sqrt{(j-\mu)\,(j+\mu+1)}\,\mathfrak{P}^{\mu+1}_{j,\,\mp k} - \frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j+\mu+1)\,(j+\mu+2)}\,\mathfrak{P}^{\mu+1}_{j+1,\,\pm(k+1)}. \tag{240}$$

$$e^{-i\varphi}\sin\vartheta\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k} = -\frac{1}{2j}\sqrt{(j+\mu)\,(j+\mu-1)}\,\mathfrak{P}^{\mu-1}_{j-1,\,\pm(k-1)} + \frac{1}{2j\,(j+1)}\sqrt{(j+\mu)(j-\mu+1)}\,\mathfrak{P}^{\mu-1}_{j,\,\mp k} + \frac{1}{2\,(j+1)}\sqrt{(j-\mu+1)\,(j-\mu+2)}\,\mathfrak{P}^{\mu-1}_{j+1,\,\pm(k+1)}. \tag{241}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{P}^{\mu'}_{j',\,(\pm)'k'}\,.\,\cos\vartheta\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k})^* \neq 0 \text{ voor } \mu'=\mu \\ (\mathfrak{P}^{\mu'}_{j',\,(\pm)'k'}\,.\,e^{\pm i\varphi}\sin\vartheta\,\mathfrak{P}^{\mu}_{j,\,\pm k})^* \neq 0 \text{ voor } \mu'=\mu\mp 1 \end{array}\right\}\text{en}\left\{\begin{array}{l} j'=j,\ \text{met } (\pm)'k' = \mp k \\ \qquad\qquad \text{of} \\ j'=j\pm 1 \text{ met } (\pm)'k' = \pm(k\pm 1) \end{array}\right. \tag{243}$$

In de spin-theorie van Pauli wordt de intensiteit van de dipoolstraling, die bij niet al te kleine golflengten uitsluitend van electrischen oorsprong is, bepaald door de matrix-elementen van den vector-operator $\vec{r}$ De hoekafhankelijkheid dezer matrix-elementen is volkomen bepaald door de matrix-elementen van cos ϑ en $e^{\pm i\varphi}$ · sin ϑ te berekenen op basis van de Jacobi'sche spinoren. Met behulp van de boven-vastgestelde orthogonaliteits-eigenschappen dier spinoren en onder toepassing van de relaties (239), (240) en (241), vinden we voor de bedoelde matrix-elementen, behoorende bij den overgang $\mu, j \rightarrow \mu', j'$, slechts een van nul verschillende waarde bij de daarnaast vermelde waarden van μ' en j', formule (243), blz. 84.

Wij stellen de van nul verschillende waarden dezer matrix-elementen nog in de volgende tabel samen, alhoewel ze voldoende bekend zijn, ten minste wat hunne van μ-onafhankelijke verhoudingen betreft, die onmiddellijk uit groepentheoretische beschouwingen kunnen worden afgeleid. Ons eigenlijke doel was, om ze te berekenen op een wijze, die geheel overeenstemt met de berekeningswijze der overeenkomstige matrix-elementen in het spinlooze geval, ten einde de analogie tusschen de Jacobi'sche spinoren en de polaire bolfuncties nog eens te illustreeren.

In de boven aangeduide regels voor de verandering van $\pm k$ bij een overgang vinden we de eenvoudige k-regel van Dirac terug: k slaat van teeken om, of verandert, bij gelijkblijvend teeken, met $\pm$ 1. Het steeds bij elkaar optreden van de beide Jacobi'sche spinoren leverde dit resultaat automatisch. Oorspronkelijk werd deze regel overigens voor een getal k geformuleerd, dat zoowel positief als negatief kan zijn. Dan correspondeert met de verandering van negatieve k-waarden met $\pm$ 1 de overgang $j \rightarrow j \mp 1$.

μ' \ j'	$j-1$	j	$j+1$
$\mu-1$	$-\frac{1}{2j}\sqrt{(j+\mu)(j+\mu-1)}$	$\frac{1}{2j(j+1)}\sqrt{(j+\mu)(j-\mu+1)}$	$\frac{1}{2(j+1)}\sqrt{(j-\mu+1)(j-\mu+2)}$
μ	$-\frac{1}{2j}\sqrt{j^2-\mu^2}$	$-\frac{\mu}{2j(j+1)}$	$\frac{1}{2(j+1)}\sqrt{(j+1)^2-\mu^2}$
$\mu+1$	$\frac{1}{2j}\sqrt{(j-\mu)(j-\mu-1)}$	$\frac{1}{2j(j+1)}\sqrt{(j-\mu)(j+\mu+1)}$	$-\frac{1}{2(j+1)}\sqrt{(j+\mu+1)(j+\mu+2)}$

Slaat het teeken voor k om, dan gaat blijkens (158) $l = j \mp \frac{1}{2}$ over in $l' = j' \pm \frac{1}{2}$, terwijl $j' = j$. Hieruit volgt $l' = l \pm 1$, correspondeerende met $\pm k$ in den aanvangstoestand. Ook voor den overgang $j' = j \pm 1$ geldt: $l' = l \pm 1$, zoodat het quantumgetal l steeds met ± 1 verandert.

4 - HET ADDITIE-THEOREMA VOOR DE JACOBI'SCHE SPINOREN

Voor de polaire bolfuncties bestaat een algemeen additie-theorema, waarvan een bijzonder geval voor de golfmechanica van beteekenis is. Dit luidt voor de in spinor-gedaante geschreven bolfuncties:

$$\sum_{m=-l}^{m=l} | \mathfrak{P}_l^m |^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{244}$$

waarin met

$$| \mathfrak{P}_l^m |^2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ (E_l^{-m})^2 + (E_l^m)^2 \right\} \tag{245}$$

het kwadraat der „lengte" van den spinor in het spinorvlak is aangeduid.

Voor de Jacobi'sche spinoren bestaat nu de volgende met (244) analoge formule

$$\sum_{\mu=-j}^{\mu=j} | \mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu} |^2 = \frac{2j+1}{4\pi} \tag{246}$$

welke we kortweg het *additie-theorema voor de Jacobi'sche spinoren* zullen noemen. Overeenkomstig (245) hebben we hierbij:

$$| \mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu} |^2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ (E_j^{-\mu})^2 + (E_j^{\mu})^2 \right\}. \tag{247}$$

Voor het bewijs van (246) maken we gebruik van de volgende hulpstelling, waarmede we eveneens een bewijs zullen geven voor (244).

Hulpstelling.

We beschouwen de volgende som:

$$S = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k A^{(k)} B^{(n-k)} \tag{248}$$

waarin A en B willekeurige polynomia in de veranderlijke x zijn, van den graad n. De indices duiden k- resp. $(n-k)$-malige differentiatie naar x aan.

We beweren nu, dat deze som S niet van x afhangt en dus een constante is. Ten bewijze differentieeren we S naar x. We vinden:

$$\frac{dS}{dx} = [A^{(o)}B^{(n+1)} + A^{(1)}B^{(n)}] - [A^{(1)}B^{(n)} + A^{(2)}B^{(n-1)}] +$$
$$+[A^{(2)}B^{(n-1)} + A^{(3)}B^{(n-2)}] - \ldots . (-1)^{n-1}[A^{(n-1)}B^{(2)} + A^{(n)}B^{(1)}] -$$
$$-(-1)^{n-1}[A^{(n)}B^{(1)} + A^{(n+1)}B^{(o)}] = A^{(o)}B^{(n+1)} + (-1)^n A^{(n+1)}B^{(o)} = 0$$

waaruit het gestelde volgt.

Het bewijs der formules (244) en (246) kan nu met deze hulpstelling zeer eenvoudig worden geleverd, als we letten op de twee uitdrukkingen, die er voor E_l^m en E_j^μ bestaan. Onder toepassing van de formules (173) en (174) resp. (165) en (166) vinden we namelijk, dat de sommen:

$$\sum_{m=-l}^{m=l} (E_l^m)^2 = \frac{l+\frac{1}{2}}{[2^l l!]^2} \sum_{m=-l}^{m=l} (-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{l-m} (x^2-1)^l, \quad (249)$$

$$\sum_{\mu=-j}^{\mu=j} (E_j^\mu)^2 = \frac{1}{[2^j (j-\frac{1}{2})!]^2} \sum_{\mu=-j}^{\mu=j} (-1)^{\mu-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+\mu} p(-x, j) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\mu} p(x, j) \quad (250)$$

in bouw overeenstemmen met de som S uit onze hulpstelling, waarbij in (249)

$$A \equiv B = (x^2-1)^l, \quad n = 2l;$$

terwijl in (250) geldt:

$$A = p(-x, j) = (1+x)^{j+\frac{1}{2}} (1-x)^{j-\frac{1}{2}},$$
$$B = p(x, j) = (1-x)^{j+\frac{1}{2}} (1+x)^{j-\frac{1}{2}}, \quad n = 2j.$$

De sommen (249) en (250) zijn dus constant. Ten einde de constanten zelf te bepalen substitueeren we $x = 1$. Dit is een gunstige substitutie, want dan geldt:

$$E_l^m(1) = 0 \text{ voor } m \neq 0 \text{ en } E_j^\mu(1) = 0 \text{ voor } \mu \neq -\tfrac{1}{2},$$

zoodat we dan kunnen schrijven:

$$\sum_{m=-l}^{m=l} (E_l^m)^2 = [E_l^o(1)]^2,$$

$$\sum_{\mu=-j}^{\mu=j} (E_j^\mu)^2 = [E_j^{-\frac{1}{2}}(1)]^2.$$

Het komt dus ten slotte aan op de berekening van de rechterleden. Volgens een bekende formule van Leibnitz wordt daarvoor gevonden:

$$E_{ll}^o(1) = \sqrt{l+\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{2^l l!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x-1)^l (x+1)^l\right]^{x=1} = \sqrt{l+\tfrac{1}{2}},$$

$$E_j^{-\frac{1}{2}}(1) = \sqrt{j+\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{2^j\,(j-\frac{1}{2})!}\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j-\frac{1}{2}} (1-x)^{j-\frac{1}{2}}\,(1+x)^{j+\frac{1}{2}}\right]^{x=1} =$$

$$= (-1)^{j-\frac{1}{2}}\sqrt{j+\tfrac{1}{2}}.$$

Ten slotte verkrijgen we zoo:

$$\sum_{m=-l}^{m=l} (E_l^m)^2 = l + \tfrac{1}{2},$$

$$\sum_{\mu=-j}^{\mu=j} (E_j^\mu)^2 = j + \tfrac{1}{2}.$$

Niet alleen de formules (244) en (246) volgen hier onmiddellijk uit, maar het blijkt dat reeds de sommen over positieve en negatieve μ-waarden alleen constant zijn. Er geldt voor de $\mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^\mu$ bijvoorbeeld:

$$\sum_{\mu=-\frac{1}{2}}^{\mu=-j} |\,\mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^\mu\,|^2 = \sum_{\mu=\frac{1}{2}}^{\mu=j} |\,\mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^\mu\,|^2 = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu=-j}^{\mu=j} (E_j^\mu)^2 = \frac{2j+1}{2\pi}.$$

5 - DE JACOBI'SCHE SPINOREN VOLDOEN AAN DE BETREKKING

$$\overline{(\vec{\sigma}\,.\,\mathrm{grad}')}\, r^{\pm k-1}\, \mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^\mu = 0 \tag{251}$$

Constateerden we in de vorige paragrafen het bestaan van belangrijke overeenstemming tusschen de $\mathfrak{P}_{j,\,\pm k}^\mu$ en de $\mathfrak{P}_l^m$, thans willen we een interessant verschil aanwijzen. Wij herinneren daartoe aan het feit, dat voor de polaire bolfuncties geldt:

$$\Delta r^a \mathfrak{P}_l^m = 0$$

met $a = l$ of $-(l+1)$.

Zooals we in paragraaf 5 van Hoofdstuk IV reeds opmerkten, mogen we op de lineaire distributie hiervoor ook schrijven:

$$(\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad})^2 \, r^a \mathfrak{P}_l^m = 0.$$

We zien hieruit, dat $r^a \mathfrak{P}_l^m$ eerst geannuleerd wordt door den operator $(\vec{\sigma} \,.\, \mathrm{grad})$ tweemaal toe te passen. Blijkens (251) geschiedt dit bij de Jacobi'sche spinoren reeds bij den eersten keer. Daarbij moet dan den op poolcoördinaten getransformeerden en overeenkomstig gehermite'iseerden gradiënt genomen worden, zooals deze door (188) wordt geleverd.

Herleid volgens (207) luidt hij

$$(\vec{\sigma} \,.\, \overline{\mathrm{grad}'}) = \frac{1}{r} \sigma_z \left(-\mathfrak{K} + \frac{\partial}{\partial r} r\right),$$

hetgeen met (209)

$$\sigma_z \mathfrak{K} + \mathfrak{K} \sigma_z = 0$$

herleid wordt tot:

$$(\vec{\sigma} \,.\, \overline{\mathrm{grad}'}) = \frac{1}{r} \left(\mathfrak{K} + \frac{\partial}{\partial r} r\right) \sigma_z.$$

Met behulp van dit resultaat en de formules (236) en (238) herleiden we

$$(\vec{\sigma} \,.\, \overline{\mathrm{grad}'}) \, r^a \mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu} = \frac{1}{r} \left(\mathfrak{K} + \frac{\partial}{\partial r} r\right) \sigma_z r^a \mathfrak{P}_{j,\pm k}^{\mu} = 0$$

tot

$$r^{a-1} \left[\pm k + (a+1)\right] = 0$$

waaruit (251) volgt.

STELLINGEN

I

De in dit proefschrift beschouwde diagonalisatie van operatoren levert voor een bepaalde groep van simultane differentiaalvergelijkingen met twee onbekende functies een methode ter verkrijging van differentiaalvergelijkingen voor elk dier functies afzonderlijk, zonder dat orde-verhooging optreedt.

II

Het betoog, dat HEIËRMAN houdt op bladzijde 56 zijner dissertatie, is niet steekhoudend.

(J. H. HEIËRMAN, Absolute Intensiteitsmetingen in Alkalispectra, Dissertatie Utrecht 1937).

III

Het bijzondere geval van de beweging zonder draaimoment wordt door DIRAC op onjuiste wijze golfmechanisch toegelicht.

(P. A. M. DIRAC, Die Prinzipien der Quantenmechanik, 1930, blz. 149).

IV

THOMA noemt eenige oorzaken op, die aanleiding geven tot twijfel aan de betrouwbaarheid van de door hem benaderde radiale eigenfuncties, zonder zich daaromtrent op voor de handliggende eenvoudige wijze inzicht te verschaffen, waarbij terstond zou zijn gebleken, dat zijn benaderingen inderdaad weinig vertrouwen verdienen.

(A. THOMA, Über die kontinuierliche Absorption bei den Alkalien, Dissertatie Breslau 1935).

V

Er wordt ten onrechte gesproken over de „groepenpest" in de moderne natuurkunde. Geen middel voor de behandeling van de

P. A. COENEN

betrokken problemen kan de groepentheorie in eenvoud en klaarheid evenaren. Daarenboven wordt in haar een wiskundig apparaat gevonden, dat bij uitstek aansluit bij de natuurkundige denkwijze.

VI

De beschouwingen van MALLY over het waarschijnlijkheidsbegrip, doen het wezen daarvan volledig tot zijn recht komen. Daarentegen heeft bijvoorbeeld Slutsky's mathematische omvorming van de waarschijnlijkheidsdefinitie van Von Mises te dien opzichte weinig te beteekenen.

(E. MALLY, Wahrscheinlichkeit und Gesetz).

VII

Het trekken van conclusies, waartoe de rekenuitkomsten der mathematische statistiek wel suggereeren kunnen, moet met de grootstmogelijke voorzichtigheid geschieden. Uiteindelijk toch moeten de conclusies gebaseerd zijn op het *wezen* der verschijnselen.

VIII

Het is te betwijfelen of door de mathematische bewerking van het grondmateriaal, zooals deze tot nu toe wordt toegepast bij de samenstelling van de „Sterftetafels voor Nederland" de hoofdtrekken van het waargenomen sterfteverschijnsel nog wel juist worden weergegeven.

(Sterftetafels voor Nederland, Centraal Bureau voor de Statistiek).

IX

Het wiskunde-programma voor het middelbaar onderwijs is overladen. Goniometrie behoort in de eerste plaats ingrijpend te worden besnoeid.

X

Het meest wezenlijke der mythe, als oer-hypothese, en der magie, als oer-experiment, leeft nog krachtig voort in de moderne natuurkunde en draagt niet weinig bij tot haar charme.