

J. E. COUVÉE.

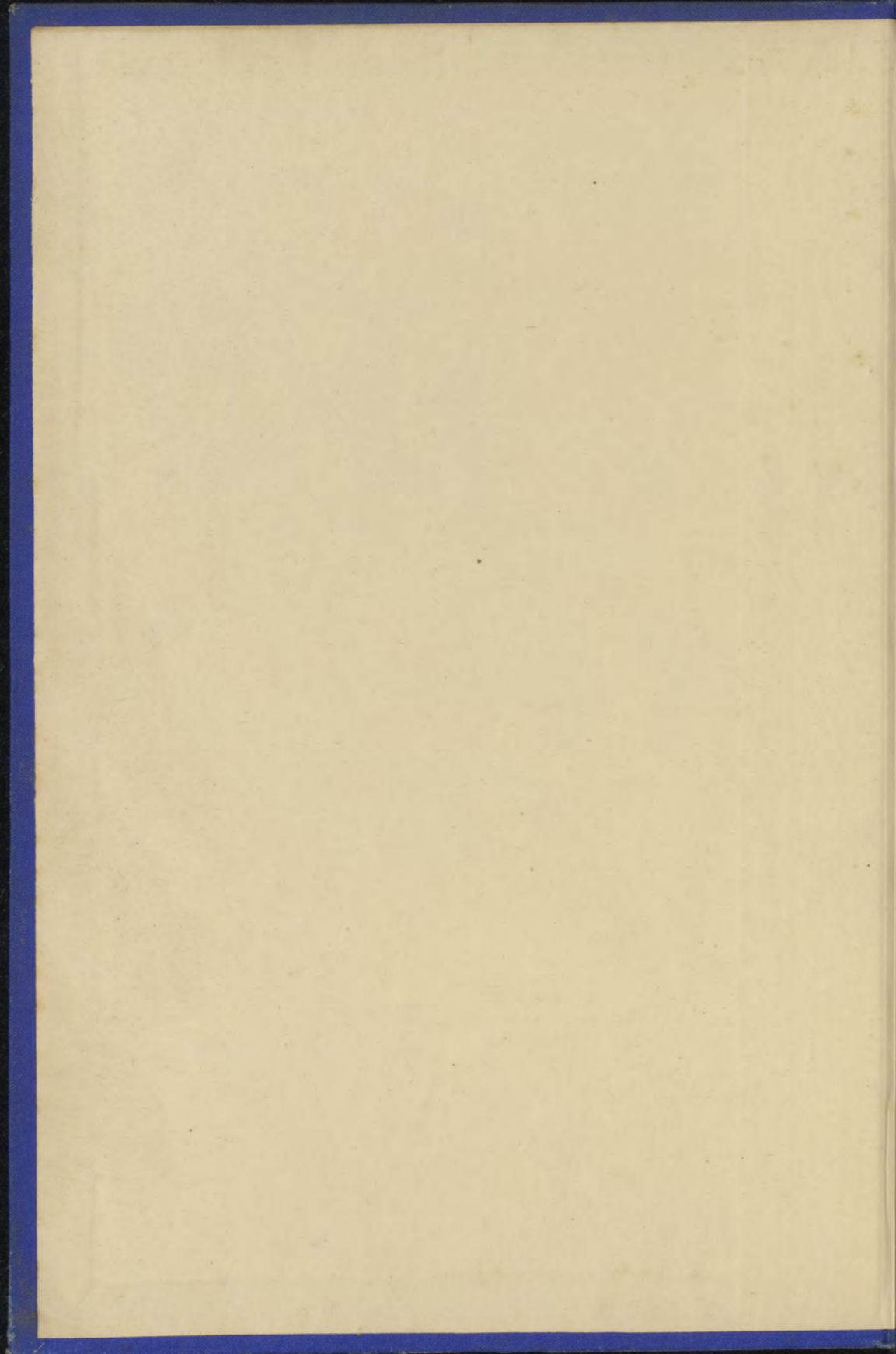


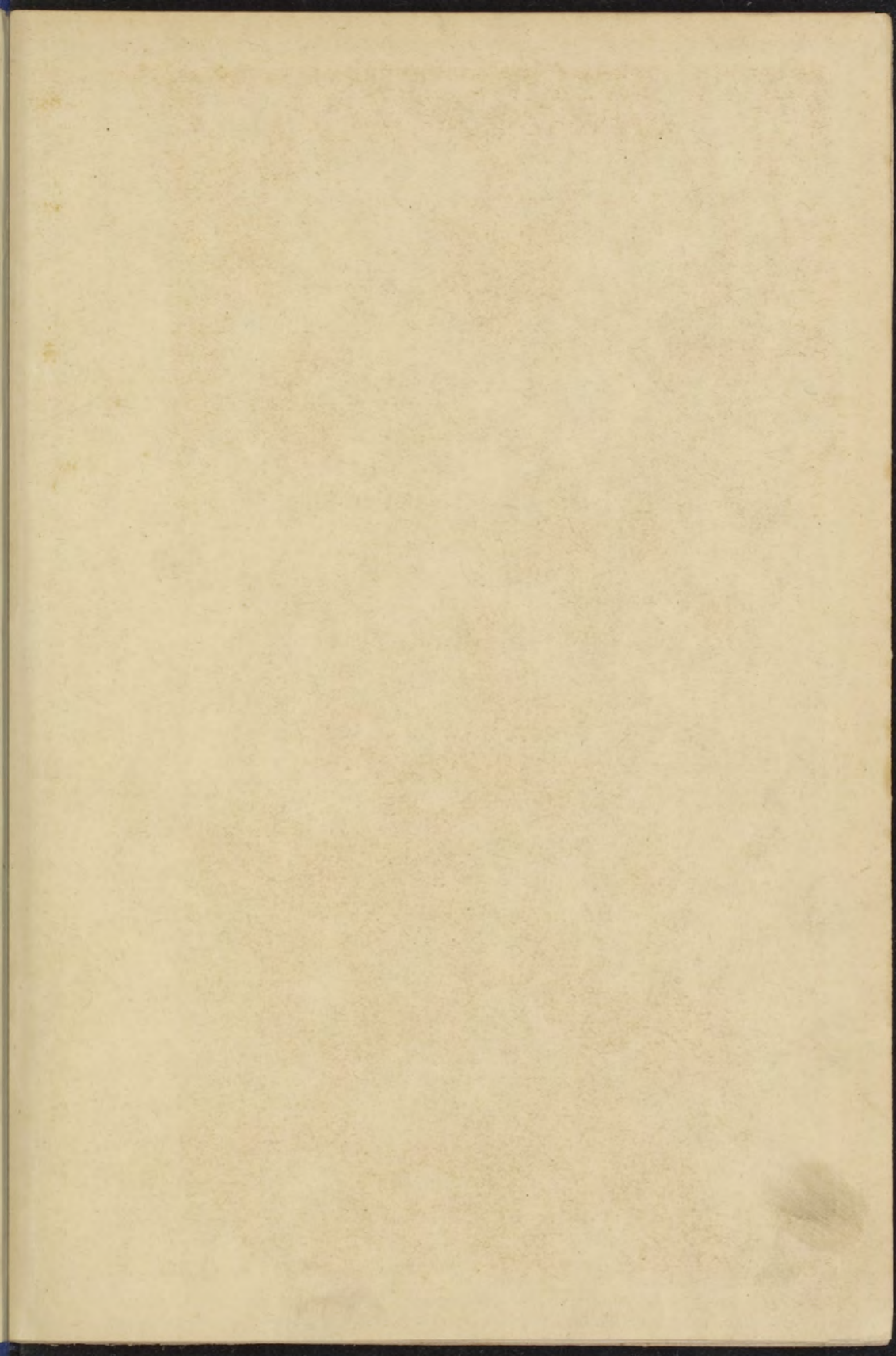
PROEFSCHRIJF

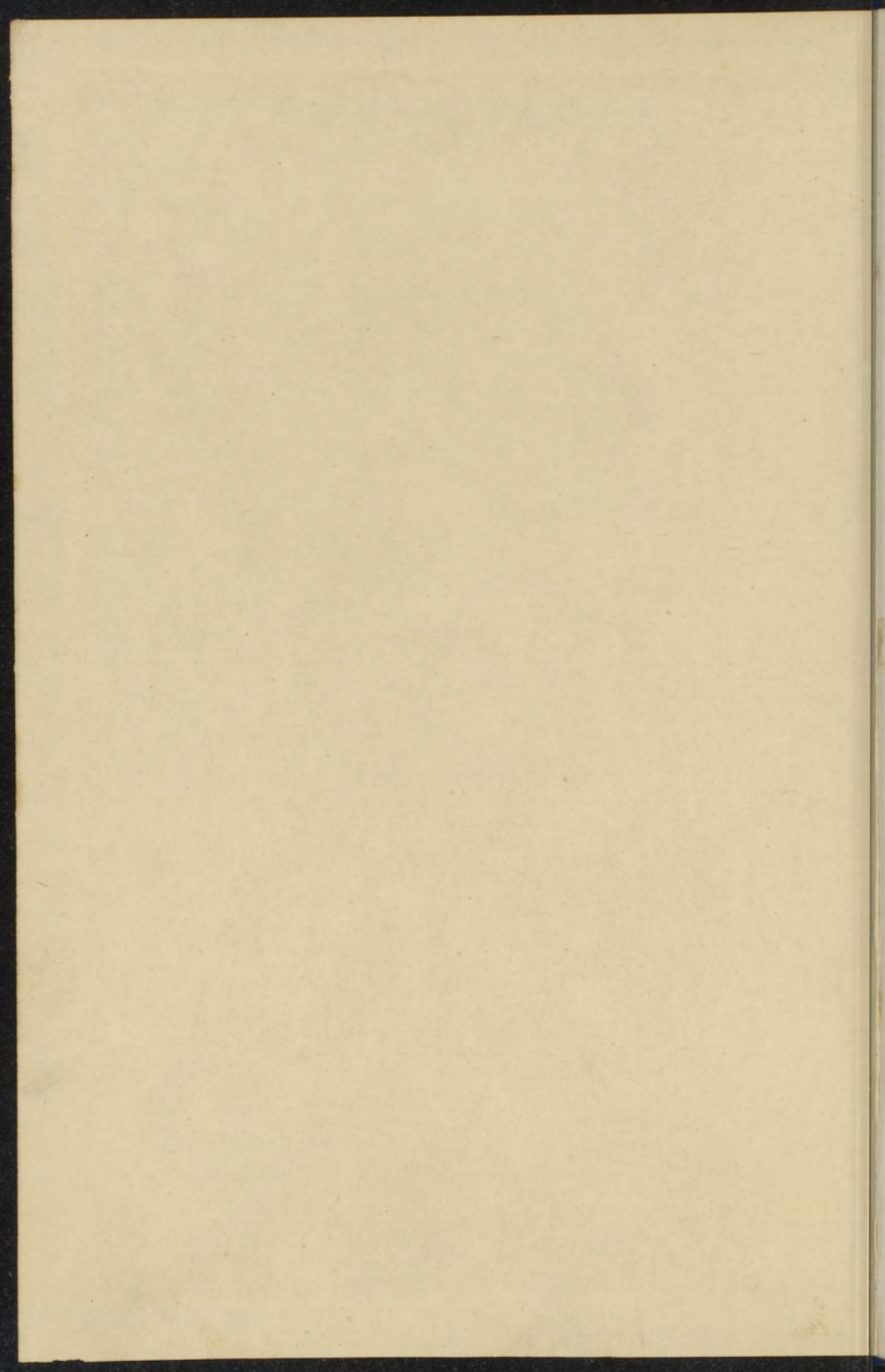


Diss Leiden

1887 nr 35







EENIGE BESCHOUWINGEN

OVER DE

VOORTPLANTING VAN GOLFSTELSELS.

2

ENIGE BESCHOUWINGEN

VOORLEZING VAN GILLESPIES

AAN DE WETENSCAPEN

IN DE WETENSCAPEN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

OP DEN 17 DE SEPTEMBER 1854

IN DE WETENSCAPEN

IN DE WETENSCAPEN

OP VERZOEN VAN DE RECTOR, DE WETENSCAPEN

JACQUES EVERARD GUYER

LEIDEN 1854

---

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.

EENIGE BESCHOUWINGEN  
OVER DE  
VOORTPLANTING VAN GOLFSTELSELS.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,  
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN  
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,  
AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,  
OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS  
DR. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN,  
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,  
VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Vrijdag den 8<sup>ten</sup> Juli 1887, des namiddags te 3 uren,

DOOR

JACQUES EVERARD COUVÉE,  
GEBOREN TE LEIDEN.

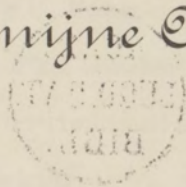
---

DELFT,  
M. J. COUVÉE.  
1887.





Aan mijne Ouders.





Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij eene aangename taak, mijn dank te betuigen aan U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor het genoten onderricht. Ook U, Hooggeleerde RUKKE, ben ik erkentelijk voor de lessen, welke ik gedurende mijne eerste studiejaren mocht volgen.

Niet het minst dank ik U, Hooggeleerde LORENTZ, Hooggeschatte promotor, zoowel voor het uitstekend onderwijs, als voor de hulp mij bewezen en de bereidwilligheid mij betoond gedurende de bewerking van dit proefschrift.

Die Bedeutung der Wissenschaft ist nicht nur in der  
Kultur, sondern auch in der Natur zu finden. Die  
Wissenschaft ist die Kunst, die Natur zu verstehen  
und die Gesetze der Natur zu entdecken. Sie ist  
die Grundlage aller Fortschritte in der  
Menschheit. Die Wissenschaft ist die Kunst,  
die Natur zu verstehen und die Gesetze der  
Natur zu entdecken. Sie ist die Grundlage  
aller Fortschritte in der Menschheit.

## EERSTE HOOFDSTUK.

---

**Over trillingen met eene voortplantingssnelheid, die niet  
van de periode afhangt.**

De voortplanting van trillende bewegingen wordt, welke ook de aard moge zijn van de middenstof, waarin zij plaats heeft, wiskunstig altijd door differentiaalvergelijkingen van eene bepaalde klasse beschreven. De vergelijkingen zijn nl. steeds partieel en in de gevallen, waarmede wij ons zullen bezighouden, bovendien lineair.

Partieel zijn zij, omdat er niet alleen de tijd, maar ook de drie coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$  als onafhankelijk veranderlijken in voorkomen; lineair, omdat zij de differentiaalquotienten van de componenten  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  der evenwichtsverstoring, slechts tot de eerste macht bevatten. Het lineair zijn geeft ons een middel in de hand, om, wanneer twee oplossingen der differentiaalvergelijking bekend zijn, eene derde te verkrijgen. Dit geschiedt door

de som of het verschil van die twee oplossingen te nemen. Dat beginsel heet: het beginsel van superpositie.

Als algemeene gedaante van zulk eene lineaire partieele differentiaalvergelijking kan dienen de volgende:

$$\begin{aligned} \Sigma A \frac{\partial^n \xi}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3} \partial t^{n_4}} + \Sigma B \frac{\partial^n \eta}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3} \partial t^{n_4}} + \\ + \Sigma C \frac{\partial^n \zeta}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3} \partial t^{n_4}} = 0 \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Hierin kan  $n$  verschillende waarden hebben, doch altijd moet  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$  zijn. De hoogste getalwaarde van  $n$  geeft de orde der differentiaalvergelijking aan. De coëfficiënten  $A, B, C, \dots A', B', C', \dots$  enz. zijn veeltijds constant; dit is het geval wanneer het lichaam, waardoor zich de trillingen voortplanten, in alle punten dezelfde eigenschappen vertoont. Die coëfficiënten worden geheel bepaald door den aard van het lichaam. We kunnen hen physische constanten noemen.

Als bijzondere oplossing van vergelijking (1) kan eene oplossing dienen met goniometrische functiën. Door vele van die oplossingen te nemen, ze ieder met een onbepaalden coëfficiënt te vermenigvuldigen, en ze daarna op te tellen, krijgen we eene algemeene oplossing.

Deze algemeene oplossing moet zich aansluiten aan eene gegeven begintoestand. Deze ligt opgesloten in de volgende voorwaarden: voor een bepaald tijpstip moeten de verplaatsingen en de snelheden der deeltjes als functiën van  $x, y$  en  $z$  gegeven zijn. Het theorema van FOURIER bewijst ons groote diensten in het bepalen van de zoeven vermelde onbepaalde coëfficiënten.

In verschillende gevallen nemen de bewegingsvergelijkingen een zelfden bijzonder eenvoudigen vorm aan.

Laat b.v. in een veerkrachtig homogeen vast lichaam door zekere, van buiten aangewende, oorzaken, deformaties worden opgewekt. We onderstellen dat de componenten der verplaatsing  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  van een deeltje  $(x, y, z)$ , in de richting der drie coördinaat-assen, oneindig klein zijn. Er treden spanningen op. Noemen wij de normale spanningen  $X_x$ ,  $Y_y$  en  $Z_z$  en de tangentieele spanningen  $X_y = Y_x$ ,  $Z_x = X_z$  en  $Y_z = Z_y$ .

De elasticiteitstheorie leert ons de krachten vinden, die op een oneindig klein parallelepipedum werken, en houden wij daarbij het theorema van D'ALEMBERT in het oog, dan krijgen wij de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X_1 &= \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y_1 &= \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z_1 &= \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Hierin is  $\rho$  de dichtheid van de middenstof in het beschouwde punt;  $X_1$ ,  $Y_1$  en  $Z_1$  zijn de drie componenten der uitwendige kracht op de eenheid van massa.

Aan den anderen kant kan men de spanningen in de deformaties uitdrukken. De theorie levert ons:

$$\left. \begin{aligned} X_y = Y_x &= K \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ Y_z = Z_y &= K \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ Z_x = X_z &= K \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$K$  is hier de weerstand van de stof tegen eene vormverandering.

Stelt men korthedshalve  $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  door  $P$  voor, dan is:

$$X_x = 2K \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta P \right)$$

$$Y_y = 2K \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \theta P \right)$$

en 
$$Z_z = 2K \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \theta P \right).$$

Hierin is  $\theta = \frac{1}{2} \frac{K}{A} - \frac{1}{3}$ , waarin  $A$  den weerstand van de stof tegen eene volumeverandering voorstelt.

$A$  en  $K$  zijn twee elasticiteits-coëfficiënten en afhankelijk van den aard der stof.  $P$  kan men noemen de cubieke dilatatie.

Substitueeren we de waarden der spanningen in de vergelijking (2) dan verkrijgen wij:

$$\left. \begin{aligned} K \Delta \xi + K \frac{\partial P}{\partial x} (1 + 2\theta) + \rho X_1 &= \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ K \Delta \eta + K \frac{\partial P}{\partial y} (1 + 2\theta) + \rho Y_1 &= \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ K \Delta \zeta + K \frac{\partial P}{\partial z} (1 + 2\theta) + \rho Z_1 &= \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\Delta$  is de bekende notatie voor  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ .

Deze vergelijkingen zijn lineaire partieele differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Er komen slechts verplaatsingen in voor. We zullen nu aannemen dat er geen uitwendige krachten zijn; dan worden  $X_1$ ,  $Y_1$  en  $Z_1$



nul. Verder zullen wij aannemen dat de verplaatsingen  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  alleen van  $x$  en van  $t$  afhangen; daardoor wordt  $P = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , en reduceert  $\Delta \xi$  zich tot  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ,  $\Delta \eta$  tot  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  en  $\Delta \zeta$  tot  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ .

De vergelijkingen worden dan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} 2K(1 + \theta) &= \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} K &= \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} K &= \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Hierin zijn de veranderlijken  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  van elkaar gescheiden; d. w. z. de drie bewegingen voorgesteld door (5), kunnen onafhankelijk van elkander plaats grijpen. In de eerste vergelijking geschiedt de beweging in eene richting evenwijdig aan de  $X$ -as, en de voortplanting in dezelfde richting; hier hebben we dus te maken met longitudinale trillingen. In de tweede en derde vergelijking heeft de beweging plaats in richtingen resp. evenwijdig aan de  $Y$ - en  $Z$ -as, terwijl de beweging zich voortplant in eene richting evenwijdig aan de  $X$ -as. Deze laatste trillingen zijn transversaal.

De grondvergelijking der trillingen kan men dus brengen in den vorm

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \dots \dots \dots (6)$$

Wanneer  $\phi$  de verplaatsing  $\xi$  voorstelt, is de beweging longitudinaal; stelt  $\phi$  daarentegen  $\eta$  of  $\zeta$  voor, dan is de beweging transversaal.  $a^2$  is in deze beide gevallen verschillend van waarde, doch telkens constant.

Dezelfde vergelijking treft men aan bij nog andere vraagstukken. Bij de snaren vindt men, voor transversale trillingen, wanneer de snaar de richting der X-as heeft,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

$\eta$  is de verplaatsing evenwijdig aan de Y-as en  $a^2 = \frac{S}{\rho}$ .  $S$  is de aanvankelijke spanning der snaar in de richting der X-as,  $\rho$  de massa van de lengte-eenheid der snaar.

Ook op de voortplanting van het geluid in de lucht is vergelijking (6) van toepassing. Hierin stelt dan  $\phi$  de condensatie voor;  $a^2$  is eene functie van de oorspronkelijke dichtheid  $\rho_0$  en den oorspronkelijken druk  $p_0$ ; uit de wet van Poisson berekent men  $a = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} k}$ , waarin  $k$  de verhouding der soortelijke warmte bij constanten druk en constant volume voorstelt.

Bij torsie-trillingen van een omwentelingscilinder geldt de vergelijking  $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ , wanneer de lengte van de staaf evenwijdig aan de X-as loopt;  $K$  is de weerstand tegen eene afschuiving en  $\rho$  de dichtheid van de staaf;  $\alpha$  is de hoek van wenteling van eene doorsnede.

De bewegingsvergelijking voor watergolven in een weinig diep kanaal, laat zich afleiden uit die voor de watergolven in een kanaal van willekeurige diepte, welke wij naderhand zullen opstellen. De uitkomst is, dat voor eene niet zeer groote diepte  $h$  de bewegingsvergelijking is:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2};$$

$g$  is de versnelling der zwaartekracht. De X-as ligt in den

bodem van het kanaal, en de vergelijking geldt voor rechtlijnige golven, die loodrecht op deze as staan.

Wij zien nu inderdaad in al deze voorbeelden de bewegingsvergelijking den vorm:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} . . . . . (6)$$

aannemen. Wanneer wij dus hiervan eene algemeene oplossing vinden, geldt deze voor alle behandelde voorbeelden; het verschil schuilt alleen in den vorm van  $a^2$ , en in de beginvoorwaarden.

Thans zullen wij eene algemeene oplossing zoeken van de vergelijking (6).

Als beginvoorwaarden dienen deze, dat, op een tijdstip  $t=0$  de functie  $\Phi = f(x)$  en  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(x)$  gegeven zijn.

Dat wil zeggen: op den tijd  $t=0$ , zijn de uitwijkingen en snelheden van ieder deeltje gegeven door de betrekkingen:

$$\Phi = f(x) \text{ en } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(x) . . . . (7)$$

Wij zien reeds aanstonds in, dat eene functie van  $x \pm a t$  voldoet aan vergelijking (6). Het tweede differentiaalquotient van die functie naar  $t$  is gelijk aan het tweede differentiaalquotient naar  $x$ , vermenigvuldigd met  $a^2$ . Als meest algemeene oplossing dient de vergelijking:

$$\Phi = \chi(x + a t) + \psi(x - a t) . . . . (8)$$

Om te bewijzen dat dit de algemeene oplossing is, gaan wij aldus te werk. Voer  $x + at = u$  en  $x - at = v$  als nieuwe onafhankelijk veranderlijken in; dan is:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

want  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$  en  $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ . Door nog eens te differentieeren komt er:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}. \quad (9)$$

Differentieeren we  $\phi$  tweemaal naar  $t$  dan komt er:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right). \quad (10)$$

Substitueeren we deze waarden uit (9) en (10) in de differentiaalvergelijking (6) dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0.$$

Dat wil zeggen  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$  moet eene functie zijn van  $v$ , en niet van  $u$ .

Derhalve is  $\frac{\partial \phi}{\partial v} = \psi_1(v)$ , waaruit door integratie volgt:

$$\phi = \int \psi_1(v) dv + C.$$

Deze constante  $C$  mag niet van  $v$  afhangen, en, daar we hier met partieele differentiaalvergelijkingen te doen hebben, is  $C$  eene functie van  $u$ , derhalve is:

$$\xi = \psi(v) + \chi(u) = \psi(x - at) + \chi(x + at).$$

Deze oplossing stemt geheel overeen met (8).

De oplossing (8) moeten wij nu aanpassen aan de beginvoorwaarden (7). We krijgen dat:

$$f(x) = \chi(x) + \psi(x) \dots \dots \dots (11)$$

en

$$F(x) = a[\chi'(x) - \psi'(x)] \dots \dots \dots (12)$$

moet zijn.

Hieruit volgt na integratie:

$$\chi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int F(x) dx + C \dots \dots (13)$$

Deze  $C$  is hier klaarblijkelijk eene werkelijke constante.

Lossen wij uit (13) en (11),  $\chi(x)$  en  $\psi(x)$  op, dan verkrijgen wij:

$$\chi(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{a} \int F(x) dx + C \right],$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{a} \int F(x) dx - C \right].$$

Vervangen wij in de eene uitdrukking  $x$  door  $x + at$ , en in de andere uitdrukking  $x$  door  $x - at$ , terwijl wij voor  $\frac{1}{a} \int F(x) dx$ ,  $f_1(x)$  schrijven, dan is:

$$\Phi = \chi(x + at) + \psi(x - at)$$

of

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ f(x+at) + f_1(x+at) \right] + \frac{1}{2} \left[ f(x-at) - f_1(x-at) \right] \quad (14)$$

de gezochte oplossing.

Daar  $f(x - at)$  niet verandert wanneer  $t$  toeneemt met  $T$  en  $x$  met  $aT$ , zal de verplaatsing van een deeltje ( $x$ ) op den tijd  $t$ , op den tijd  $t + T$  worden aangetroffen op de plaats  $x + aT$ . De verplaatsing plant zich dus met constante snelheid  $a$  door de middenstof voort. De eerste twee termen van (14) duiden op eene voortplanting in

de richting der negatieve X-as, de twee laatsten op eene voortplanting in de richting der positieve X-as.

De eenvoudigste functiën, welke aan de conditie voldoen, dat we telkens na een zekeren tijd, op eene bepaalde plaats weer denzelfden toestand hebben, zijn goniometrische functiën.

Neem  $\phi = A \cos. 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ , dan zal de waarde van  $\phi$  dezelfde zijn als  $t$  toegenomen is met  $T$ ; de verplaatsing heeft zich dan over een weg  $\lambda$  voortgeplant.  $T$  noemen we den trillingsduur en  $\lambda$  de golflengte. Tusschen dezen bestaat de betrekking:

$$\lambda = a T.$$

We hebben hier te doen met trillingen waarbij de voortplantingssnelheid  $a$  niet van den trillingstijd afhangt.

In den regel heeft de voortplanting gelijktijdig naar twee tegengestelde richtingen plaats.

Van de vergelijking  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  is ook op eene andere wijze eene algemeene oplossing te verkrijgen. We substitueeren een vorm als:

$$\phi = e^{\alpha x + \beta t}.$$

De substitutie geeft als resultaat:

$$\beta^2 = a^2 \alpha^2 \text{ of } \alpha = \pm \frac{\beta}{a}.$$

Terstond treden twee oplossingen op; beiden vermenigvuldigen wij met eene willekeurige constante, en tellen ze daarna op tot:

$$\phi = e^{\beta t} \left( M e^{\frac{\beta}{a} x} + N e^{-\frac{\beta}{a} x} \right).$$

Om nu trillingen te krijgen, nemen we voor  $\beta$ ,  $\beta i$  en

houden de betrekking  $e^{i\psi} = \cos. \psi + i \sin. \psi$  in het oog, zoodat de oplossing wordt:

$$\Phi = (\cos. \beta t + i \sin. \beta t) \left( M \cos. \frac{\beta}{a} x + N \cos. \frac{\beta}{a} x + i M \sin. \frac{\beta}{a} x - i N \sin. \frac{\beta}{a} x \right),$$

of:

$$\begin{aligned} \Phi = & (M + N) \cos. \beta t \cos. \frac{\beta}{a} x + i (M - N) \cos. \beta t \sin. \frac{\beta}{a} x + \\ & + i (M + N) \sin. \beta t \cos. \frac{\beta}{a} x - (M - N) \sin. \beta t \sin. \frac{\beta}{a} x. \end{aligned}$$

Neemt men in aanmerking, dat het reële en het imaginaire deel elk op zich zelf aan de bewegingsvergelijking voldoen moeten, dan komt men tot de uitdrukking:

$$\begin{aligned} \Phi = & a_1 \sin. \frac{\beta}{a} (x - a t) + a_2 \sin. \frac{\beta}{a} (x + a t) + \\ & + b_1 \cos. \frac{\beta}{a} (x - a t) + b_2 \sin. \frac{\beta}{a} (x + a t) . \quad (19) \end{aligned}$$

waarin  $a_1$   $a_2$   $b_1$  en  $b_2$  constanten zijn.

Als algemeene oplossing kan dienen de som van zulke vergelijkingen als (19);  $\frac{\beta}{a}$  stellen wij gemakshalve  $= k$ ; dan moet de som worden uitgestrekt over alle waarden van  $k$  van 0 tot  $\infty$ .

Nu moet voor  $t = 0$ :

$$(\Phi)_{t=0} = f(x) \quad \text{en} \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=0} = F(x) \quad \text{zijn.}$$

Deze voorwaarden leveren ons:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} [(a_1 + a_2) \sin. k x + (b_1 + b_2) \cos. k x] = f(x) . \quad (20)$$

en,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} [-(a_1 - a_2) \beta \cos. k x + (b_1 - b_2) \beta \sin. k x] = F(x) \quad (21)$$

Passen wij hierop het theorema van FOURIER toe, in den vorm:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \cos. k(\xi - x) d\xi. \quad (22)$$

Dezen vorm kunnen wij splitsen in de som:

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \sin. k\xi d\xi \cdot \sin. kx + \int_0^{\infty} \frac{dk}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \cos. k\xi d\xi \cdot \cos. kx;$$

vergelijken wij dit met (20) en (21), dan gaat in (22),  $\psi(x)$  over in  $f(x)$  en  $F(x)$ , en de coëfficiënten uit (20) en (21) worden:

$$a_1 + a_2 = \frac{dk}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin. k\xi \cdot d\xi,$$

$$b_1 + b_2 = \frac{dk}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos. k\xi \cdot d\xi,$$

$$a_1 - a_2 = -\frac{dk}{\beta\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cos. k\xi \cdot d\xi,$$

en 
$$b_1 - b_2 = \frac{dk}{\beta\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \sin. k\xi \cdot d\xi.$$

We lossen hieruit de coëfficiënten  $a_1$   $b_1$   $a_2$  en  $b_2$  op, en substitueeren die in de algemeene oplossing, waardoor deze ten slotte den volgenden vorm verkrijgt:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin. k\xi d\xi - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cos. k\xi d\xi \right] \sin. k(x-at) + \\ & + \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos. k\xi d\xi + \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \sin. k\xi d\xi \right] \cos. k(x-at) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin. k \xi d \xi + \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cos. k \xi d \xi \right] \sin. k(x + at) + \\
& + \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos. k \xi d \xi - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \sin. k \xi d \xi \right] \cos. k(x + at) \Big\} dk.
\end{aligned}$$

Zijn dus gegeven de beginvoorwaarden van  $\phi$  en  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , dan kan men de integraties uitvoeren en  $\phi$  voor alle waarden van  $x$  en  $t$  leeren kennen. De goniometrische functiën met het argument  $(x - at)$  wijzen op eene voortplanting in de richting der positieve  $X$ -as, die met het argument  $(x + at)$  op eene voortplanting in de richting der negatieve  $X$ -as; doch beide voortplantingen geschieden met de snelheid  $a$ .

We hebben nu slechts nagegaan hoe de voortplanting van longitudinale of transversale trillingen in ééne richting geschiedt. De vraag kan rijzen, of de voortplanting in drie richtingen evenzoo plaats heeft. Wij kunnen in het geval van een vast veerkrachtig lichaam met de vergelijkingen (4), waarin wij de uitwendige krachten buiten rekening laten, een tweetal bewerkingen doen, die voeren tot enkelvoudige differentiaalvergelijkingen. Deze blijken dan voor te stellen de voortplanting in alle richtingen, van condensaties en dilataties met de voortplantingssnelheid van longitudinale trillingen, en van afschuingen met de voortplantingssnelheid van transversale trillingen. Wij mogen dus aannemen dat de voortplanting van trillingen in drie dimensies, in hoofdzaak dezelfde blijft als die in ééne richting.

---

## TWEEDE HOOFDSTUK.

---

Voortplanting van golfstelsels, waarbij de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen van de golflengte afhangt.

Wij zagen in het eerste hoofdstuk dat in vraagstukken, welke aanleiding gaven tot de differentiaalvergelijking  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ , als oplossingen goniometrische functiën gebruikt werden, waarin de voortplantingssnelheid niet van den trillingsduur afhing. Om meer samengestelde verschijnselen te beschrijven, hebben we minder eenvoudige differentiaalvergelijkingen noodig. We zullen thans zien dat ook hieraan kan voldaan worden door goniometrische functiën. Het zal daarbij echter blijken, dat de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen van de golflengte, (of wel, van den trillingstijd) afhangt.

Om een eerste voorbeeld te geven van een meer ingewikkelden vorm van eene partieele differentiaalvergelijking, zullen wij de bewegingsvergelijkingen opstellen voor trillingen van een homogeen vast veerkrachtig lichaam, op de wijze zooals CAUCHY deed.

De deeltjes van dit lichaam oefenen eene werking op elkander uit, welke wij onderstellen een functie van den onderlingen afstand te zijn. Zij die aantrekking  $F(r)$ , als  $r$  den onderlingen afstand voorstelt. Wij beschouwen vooreerst den evenwichtstoestand. De werking van een deeltje  $M'(x + x', y + y', z + z')$  (Fig. 1) op een deeltje  $M(x, y, z)$ , heeft tot componenten in de richting der coördinaat-assen,

$$\frac{x'}{r} F(r), \quad \frac{y'}{r} F(r), \quad \frac{z'}{r} F(r).$$

Als wij nu  $\frac{1}{r} F(r) = f(r)$  stellen, dan worden deze componenten :

$$x' f(r), \quad y' f(r), \quad z' f(r) \dots (1)$$

De functie  $f(r)$  heeft slechts merkbare waarde wanneer  $r$  zeer klein is. Voor alle deeltjes  $M' M''$  enz. echter, voor welke  $r$  klein genoeg is, krijgt men dergelijke componenten. We sommeeren die; zal  $M$  onder al die attracties in evenwicht zijn dan moet :

$$\Sigma x' f(r) = 0 \quad \Sigma y' f(r) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma z' f(r) = 0 \dots (2)$$

zijn.

Verplaatsen zich nu de deeltjes tengevolge van eene deformatie dan veranderen  $r$ , de krachten, en de richting der krachten; zijn voor het deeltje  $M$ , de verplaatsingen  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$ , voor het deeltje  $M'$ ,  $\xi + \xi'$ ,  $\eta + \eta'$  en  $\zeta + \zeta'$ , dan zijn  $\xi'$ ,  $\eta'$  en  $\zeta'$  de relatieve verplaatsingen van  $M'$  ten opzichte van  $M$ . Door de drie relatieve coördinaten  $x' + \xi'$ ,  $y' + \eta'$  en  $z' + \zeta'$  zijn  $r$  en de kracht op nieuw te bepalen.

In de uitdrukking (1) vervangen we  $x'$  door  $x' + \xi'$  en de krachtcomponente wordt, daar de deformatie oneindig

klein is en  $\xi'$ ,  $\eta'$  en  $\zeta'$  zeer klein zijn ten opzichte van  $x'$ ,  $y'$  en  $z'$ ,

$$x' f(r) + \xi' \frac{\partial}{\partial x'} [x' f(r)] + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} [x' f(r)] + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} [x' f(r)]$$

voor zoover het de richting der  $X$ -as betreft. Iets dergelijks is voor alle deeltjes  $M$ ,  $M''$  enz. om  $M$  heen op te maken en de totale krachtcomponente in de richting der  $X$ -as wordt

$$\Sigma x' f(r) + \Sigma \xi' \frac{\partial}{\partial x'} [x' f(r)] + \Sigma \eta' \frac{\partial}{\partial y'} [x' f(r)] + \Sigma \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} [x' f(r)].$$

Volgens (2) kan men hiervoor schrijven:

$$\Sigma \xi' \frac{\partial}{\partial x'} [x' f(r)] + \Sigma \eta' \frac{\partial}{\partial y'} [x' f(r)] + \Sigma \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} [x' f(r)],$$

of, als wij de differentiatie uitvoeren:

$$\Sigma \xi' \left[ f(r) + \frac{x'^2}{r} f'(r) \right] + \Sigma \eta' \frac{x' y'}{r} f'(r) + \Sigma \zeta' \frac{x' z'}{r} f'(r). \quad (3)$$

Wat wij voor een deeltje  $M$  gedaan hebben kunnen we voor alle punten van het lichaam doen, en we krijgen dan oneindig veel van die uitdrukkingen. Om hiermede iets te doen, kunnen wij den volgenden weg inslaan;  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  namelijk zijn functiën van  $x$ ,  $y$  en  $z$ ;  $\xi'$  is het verschil tusschen de verplaatsing van  $M$  en  $M'$ , dus  $\xi'$  is de aangroeiing van  $\xi$  als men van het eene deeltje op het andere overgaat. De grootheden  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  kunnen ontwikkeld worden naar het theorema van TAYLOR, waarbij de waarde der differentiaalquotienten genomen moet worden in het punt  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} \zeta \xi = & \frac{\partial \xi}{\partial x} x' + \frac{\partial \xi}{\partial y} y' + \frac{\partial \xi}{\partial z} z' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} x'^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} z'^2 + \\ & + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} x' z' + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} y' z' + \dots \end{aligned}$$

Dergelijke uitdrukkingen krijgen wij bij de ontwikkeling van  $\eta'$  en  $\zeta'$  welke wij, met die voor  $\xi'$ , substitueeren in (3). Wij zullen die substitutie hier achterwege laten, doch vermelden alleen dat we, na die bewerking, sommeeren over alle moleculen rondom  $M$ .

Daar we nu met een homogeen lichaam te doen hebben, kunnen we aannemen dat met een deeltje  $(x + x', y + y', z + z')$  altijd een deeltje  $(x - x', y - y', z - z')$  overeenkomt. Daardoor vallen bij het optellen, die termen weg, welke onevene machten van  $x', y'$  of  $z'$  bevatten; daarmede vallen dan ook de differentiaalquotienten van onevene orde weg. Brengen wij nu ten slotte nog, volgens het theorema van D'ALEMBERT, de bewegingskrachten aan, dan is het eindresultaat de volgende lineaire partieele differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = & A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \dots + A' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + B' \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} \dots + \\ & + E \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Zoo krijgen wij nog eene vergelijking voor  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  en voor  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ .

De coëfficiënten zijn sommen, die geheel afhangen van de rangschikking en onderlinge werking der moleculen van het lichaam; zij zijn dus physische constanten.

Nemen wij nu nog aan, dat alleen de verplaatsing  $\xi$

bestaat, en dat deze slechts van  $x$  en van  $t$  afhangt, dan krijgt men de vergelijking:

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} = A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} . . . . (4a)$$

Hierbij laten wij de hoogere differentiaalquotienten dan van de vierde orde buiten rekening. Van deze vergelijking is eene bijzondere oplossing:

$$\xi = \cos. \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x),$$

waardoor men verkrijgt, na substitutie in (4a),

$$V^3 = A - B \frac{4\pi^2}{\lambda^2} . . . . . (4b)$$

De snelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  hangt hier van den trillingsduur af, een gevolg van den samengestelden vorm der differentiaalvergelijking.

Als tweede voorbeeld geven wij de bewegingsvergelijking voor transversaal trillende staven.

Wanneer eene horizontale staaf aan het eene uiteinde is bevestigd, en aan het andere uiteinde met een gewicht  $P$  wordt belast (Fig. 2), worden overal in de staaf de lengtevezels aan de bovenzijde gerekt, aan de benedenzijde samengedrukt. Daaruit volgen longitudinale spanningen en drukkingen, die het deel der staaf aan de eene zijde van eene willekeurige doorsnede, op het deel aan de andere zijde uitoefent. De staaf, die wij in vergelijking met hare lengte zeer dun nemen, wordt gebogen, en we

zullen aannemen dat de eené hoofdas der doorsneden horizontaal ligt; daardoor heeft de buiging slechts in een vertikaal vlak plaats.

Dit vertikale vlak nemen we voor het  $XZ$ -vlak, de  $X$ -as langs de as der staaf en de  $Z$ -as naar beneden.

De theorie der buiging leert nu, dat de laag der vezels van onveranderlijke lengte door de zwaartepunten der doorsneden gaat; boven die laag en beneden die laag zijn de vermelde tangentele spanningen en drukkingen. Deze reduceeren zich tot een koppel in het buigingsvlak. De grootte van dit koppel hangt af van de kromming der staaf; d. w. z. van de kromming der laag der vezels van onveranderlijke lengte, in het beschouwde punt.

Zij  $R$  de kromtestraal,  $E$  de elasticiteits-coëfficiënt,  $I$  het traagheidsmoment der doorsnede ten opzichte van de horizontaal liggende hoofdas, dan is het bedoelde koppel:

$$\frac{EI}{R}.$$

Als wij nu de verplaatsing in de richting der  $Z$ -as,  $\zeta$  noemen dan is de kromtestraal in het punt ( $x$ ):

$$R = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}};$$

verwaarloozen wij bij deze beweging, die oneindig klein is, de grootheid  $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2$  dan is:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Het koppel wordt dus:

$$EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Met dit koppel moet evenwicht maken het moment der kracht  $P$  ten opzichte van het zwaartepunt der beschouwde doorsnede. Is  $x$  de abscis van het aangrijpingspunt der kracht  $P$  dan is:

$$EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = P(x - x).$$

De staaf mag zich naar het oneindige uitstrekken (Fig. 3). Onderstel nu dat niet ééne kracht  $P$  werkt, maar een groot aantal van die krachten, allen in het buigingsvlak en loodrecht op de  $X$ -as, werken; zij zijn bovendien doorlopend over de lengte der staaf verdeeld, zoodat, op eenig element  $dx$  der staaf, de kracht  $Z dx$  werkt.  $Z$  is dan de kracht per lengte-eenheid in het punt ( $x$ ).

De deelen der staaf aan weerszijden van eene bepaalde doorsnede  $S$  (in het punt  $x$ ) oefenen een koppel  $EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$  op elkaar uit. Dit moet gelijk zijn aan de som der momenten van alle krachten  $Z dx$ , die werken in die punten der staaf, welke aan de zijde der positieve  $X$ -as van de doorsnede  $S$  liggen, ten opzichte van het zwaartepunt dier doorsnede.

Dus is:

$$EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \int_x^{\infty} (x - x) Z dx.$$

Differentieert men dit naar  $x$ , dan komt er:

$$EI \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = - \int_x^{\infty} Z dx.$$

Eene tweede differentiatie geeft:



$$EI \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = Z \dots \dots \dots (5)$$

Onder  $Z$  is hier te verstaan de waarde in het punt  $(x)$ . Volgens het beginsel van D'ALEMBERT kunnen wij de bewegingskrachten aanbrengen, die op een element der staaf werken. Elk punt van een zich bewegend veerkrachtig lichaam heeft eene versnelling  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ . Wanneer wij op een zekeren tijd  $t$  het lichaam in den stand willen houden, dien het op dat oogenblik heeft, dan moeten wij de krachten:

$$-m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, -m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, -m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

aanwenden. Bij deze transversaal trillende staaf zijn de grootste verplaatsingen, snelheden en versnellingen die, welke loodrecht op de staaf in het trillingsvlak geschieden. Wij gebruiken hier dus slechts de kracht  $-m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ .

Daar nu  $m = S \rho \cdot dx$  is, wanneer  $S$  de doorsnede,  $\rho$  de dichtheid en  $dx$  de dikte van het element is, is deze kracht:

$$- \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx.$$

Dit is wat wij boven  $Z dx$  noemden en de bewegingsvergelijking der transversaal trillende staaf wordt derhalve:

$$EI \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = - S \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \dots \dots \dots (6)$$

Stellen we nu  $\frac{EI}{\rho \cdot S} = b^2$ , dan voldoet als oplossing der vergelijking

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - b^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \dots \dots \dots (7)$$

de vergelijking met goniometrische functie:

$$\zeta = A \cos. 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos. \frac{2 \pi}{\lambda} (Vt - x).$$

Substitueert men dit in de vergelijking (7) dan volgt er uit dat:

$$\frac{4 \pi^2 b^2}{\lambda^2} = V^2$$

of: 
$$V = \frac{2 \pi b}{\lambda} \dots \dots \dots (8)$$

We zien dus, dat ook deze goniometrische oplossing eene voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  geeft, welke van de golflengte afhangt. De oorzaak ligt wederom in den samengestelden vorm der bewegingsvergelijking.

Als derde voorbeeld beschouwen wij de bewegingsvergelijking van golven in het water onder den invloed van de zwaartekracht en van de moleculaire krachten.

We nemen als  $XZ$ -vlak (Fig. 4) den waterspiegel in den toestand van rust; de  $Z$ -as vertikaal naar beneden. Verder veronderstellen wij alleen te doen te hebben met verplaatsingen evenwijdig aan het  $XZ$ -vlak en tevens dat deze verplaatsingen niet van  $y$  afhangen.

Er bestaat eene snelheidspotentiaal  $\phi$ . Wij hebben alleen de snelheden  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  en  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ , waardoor de continuïteitsvergelijking wordt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Hieraan moet  $\phi$  voldoen binnen de vloeistof, en aan elke waarde van  $\phi$ , die hieraan voldoet, beantwoordt een bewegingstoestand, die binnen in de vloeistof aan alle eischen voldoet. Daarbij behoort een bepaalde druk  $p$ .

Van de drie bewegingsvergelijkingen van EULER hebben wij noodig die, welke de beweging in de richtingen der  $X$ - en  $Z$ -as beschrijven:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

$\rho$  is de dichtheid der vloeistof en  $X$  en  $Z$  zijn de twee componenten der uitwendige kracht per massa-eenheid. We substitueeren hierin, daar er eene snelheidspotentiaal bestaat,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

en nadat wij naar  $x$  en naar  $z$  geïntegreerd hebben, reduceeren zich die twee vergelijkingen tot ééne, n.l.:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = -V - \frac{p}{\rho} + F(t). \quad (10)$$

$V$  is de potentiaal der uitwendige krachten, zoodat de componenten dier kracht zijn  $-\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $-\frac{\partial V}{\partial y}$  en  $-\frac{\partial V}{\partial z}$ . Is de uitwendige kracht de zwaartekracht dan is:

$$V = -gz.$$

$F(t)$  is eene willekeurige functie. Nemen wij de bewegingen oneindig klein dan gaat de vergelijking (10) over in:

$$\frac{p}{\rho} = +gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + F(t) \dots \dots (11)$$

De vloeistof is begrensd aan de bovenzijde door een oppervlak, waarbij wij den zoogenaamden moleculairen druk in rekening hebben te brengen.

In een punt onmiddellijk onder de grenslaag moet de druk gelijk zijn aan den druk van den dampkring, vermeerderd met den moleculairen druk. De druk van den dampkring zal echter geen invloed op de verschijnselen uitoefenen, evenmin als het standvastige deel van den moleculairen druk. Doch het gedeelte van den laatste, dat van de kromming der oppervlakte afhangt, houden wij over. Dit is nl.:

$$p = \frac{H}{2R}$$

wanneer  $H$  de bekende constante en  $R$  de kromtestraal van het wateroppervlak is; de laatste wordt positief genomen als hij binnen de vloeistof valt. De andere hoofdkromtestraal is oneindig groot, daar wij de golven als cilindervlakken beschouwen, met de beschrijvende lijn evenwijdig aan de  $Y$ -as.

Is  $\zeta$  de verplaatsing in de richting der  $Z$ -as, dan is:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

dus is de druk:

$$p = \frac{H}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Aan het vrije oppervlak moet dus volgens (11):

$$\frac{H}{2\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = +g\zeta - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + F(t) \dots \dots (12)$$

zijn. De waarden van  $\zeta$  en  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  moest men eigenlijk nemen in het werkelijke oppervlak op den tijd  $t$ , dus in

punten, die niet meer in het oorspronkelijk oppervlak liggen; doch als wij de waarden nemen voor  $z=0$ , verschillen deze eene oneindig kleine grootheid van hoogere orde van de waarden, die men zou verkrijgen in punten, die een oneindig kleinen afstand boven of beneden dat oorspronkelijk oppervlak liggen. We nemen dus in (12) het differentiaalquotient  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  en  $\zeta$  in het vlak  $z=0$ .

De andere grensvoorwaarde is deze, dat aan een vasten, gladden bodem waarvoor  $z=h$  zij,

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (13)$$

is; daar houdt alle vertikale beweging op.

Laat nu  $\Phi = e^{\alpha_1 t + \beta_1 x + \gamma_1 z}$  eene bijzondere oplossing van (9) zijn, dan moet  $\beta_1^2 + \gamma_1^2 = 0$ , of  $\gamma_1 = \pm i \beta_1$  zijn. We hebben dus:

$$\Phi = e^{\alpha_1 t + \beta_1 x \pm i \beta_1 z}.$$

Nu kiezen we  $\alpha_1$  en  $\beta_1$  imaginair, om trillingen te krijgen, en stellen daarom  $\alpha_1 = i \alpha$ ,  $\beta_1 = i \beta$ , dan wordt:

$$\Phi = e^{i(\alpha t + \beta x) \pm \beta z}.$$

Derhalve voldoet ook:

$$\Phi = e^{\pm \beta z} \cos. (\alpha t + \beta x) \dots \dots \dots (14)$$

We zullen  $\beta$  positief nemen. We kunnen van (14) weer twee oplossingen vormen en ieder met eene constante vermenigvuldigen, waardoor we krijgen:

$$\Phi = (C_1 e^{\beta z} + C_2 e^{-\beta z}) \cos. (\alpha t + \beta x) \dots \dots (15)$$

De waarde van  $\Phi$  uit (15) moet nu zoo bepaald worden, dat zij voldoet aan de voorwaarden aan het vrije oppervlak (12), en aan den bodem (13). Nu is:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \beta (C_1 e^{\beta z} - C_2 e^{-\beta z}) \cos. (\alpha t + \beta x);$$

dit moet volgens (13) verdwijnen voor  $z = h$ , waaruit volgt dat

$$C_1 e^{\beta h} - C_2 e^{-\beta h} = 0$$

is. Hieruit volgt:

$$C_2 = C_1 e^{2\beta h} = C_1 e^{\beta h} \cdot e^{\beta h} = C \cdot e^{\beta h}.$$

Nu is  $C$  eene nieuwe constante, zoodat:

$$C_1 = C e^{-\beta h} \text{ en } C_2 = C e^{+\beta h}$$

kan geschreven worden, waardoor (15) overgaat in:

$$\Phi = C [e^{\beta(z-h)} + e^{\beta(h-z)}] \cos. (\alpha t + \beta x) . \quad (16)$$

Hieruit berekenen wij  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$  op de volgende wijze:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \beta C [e^{\beta(z-h)} - e^{\beta(h-z)}] \cos. (\alpha t + \beta x)$$

en dit wordt geïntegreerd naar  $t$ :

$$\zeta = \frac{\beta}{\alpha} C [e^{\beta(z-h)} - e^{\beta(h-z)}] \sin. (\alpha t + \beta x).$$

Den term, welke, door de integratie, er bij zou komen, laten we weg, omdat wij eene bijzondere oplossing zoeken die trillingen voorstelt. Differentieeren wij nu deze laatste vergelijking tweemaal naar  $x$ , dan verkrijgen wij:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\beta^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} C [e^{\beta(z-h)} - e^{\beta(h-z)}] \sin. (\alpha t + \beta x).$$

Differentieeren we (16) naar  $t$ , dan verkrijgen we:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\alpha C [e^{\beta(z-h)} + e^{\beta(h-z)}] \sin. (\alpha t + \beta x).$$

Aldus kunnen wij de vergelijking (12) veranderen in:

$$-\frac{H}{2\rho} \frac{\beta^3}{\alpha} (e^{-\beta h} - e^{\beta h}) = g \frac{\beta}{\alpha} (e^{-\beta h} - e^{\beta h}) + \alpha (e^{-\beta h} + e^{\beta h}). \quad (17)$$

Hierbij is in aanmerking genomen, dat aan (12) voldaan moet worden voor  $z = 0$ , maar voor alle waarden van  $x$  en  $t$ .

Daar dus ook de vergelijking gelden moet voor die waarden van  $x$ , welke bij eene willekeurige waarde van  $t$ ,  $\sin. (\alpha t + \beta x) = 0$  maken, moet  $F(t) = 0$  zijn.

Laat men het eerste lid der vergelijking (17) weg, dan stelt de vergelijking het verband tusschen voortplantings-snelheid en golflengte voor bij de golven onder de werking der zwaartekracht. Laat men den term  $g \frac{\beta}{\alpha} (e^{-\beta h} - e^{\beta h})$  weg, dan zijn het zuiver golven onder de werking der moleculaire krachten.

Heeft de moleculaire werking de overhand boven de werking der zwaartekracht, dan wordt, in aanmerking genomen dat  $\frac{2\pi}{\lambda} = \beta = K$  en  $\alpha = KV$  is,

$$\frac{H}{2\rho} \frac{K}{V} = V \frac{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}$$

Hieruit volgt wanneer  $\beta h$  zeer groot, dat wil zeggen, wanneer de diepte zeer veel grooter dan de golflengte is:

$$V^2 = \frac{H}{2\rho} K$$

of:

$$V = \sqrt{\frac{H}{2\rho}} \cdot \sqrt{K} \dots \dots \dots (18)$$

De snelheid van enkelvoudige trillingen bij de moleculaire watergolven bevat  $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ .

Bestaan èn de zwaartekracht èn de moleculaire werking, dan volgt uit vergelijking (17) voor zeer diep water:

$$\frac{H}{2\rho} \frac{K^2}{V} = -g \frac{1}{V} + KV, \dots \dots \dots (19)$$

waaruit:

$$V = \sqrt{\frac{H}{2\rho} K + \frac{g}{K}}$$

Heeft de zwaartekracht de overhand boven de moleculaire werking dan gaat vergelijking (17) over in:

$$\beta \frac{g}{\alpha} (e^{\beta h} - e^{-\beta h}) = \alpha (e^{\beta h} + e^{-\beta h})$$

of, daar nog  $\beta = K$  is,

$$V = \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{g}{K} \frac{e^{Kh} - e^{-Kh}}{e^{Kh} + e^{-Kh}}} \dots \dots \dots (20)$$

Wanneer nu  $Kh$  steeds aangroeit, dat wil zeggen, wanneer de diepte zeer veel grooter wordt dan de golflengte, wordt:

$$V = \sqrt{\frac{g}{K}} \dots \dots \dots (21)$$

Dit is dan de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen bij zoogenaamde diep-water-golven.

We kunnen uit vergelijking (17) ook nog bepalen wanneer we te doen zullen hebben met golven onder de werking der zwaartekracht, of met golven onder de werking der moleculaire krachten. Daartoe bepalen wij wanneer een der termen:

$$\frac{H}{2\rho} \frac{\beta^3}{\alpha} \quad \text{en} \quad g \frac{\beta}{\alpha}$$

den anderen in grootte zal overtreffen. Daar  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  is

zoo kan  $\frac{H}{2\rho} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < g$  of  $\lambda > \sqrt{\frac{2\pi^2 H}{g\rho}}$  zijn.

Is nu voor water van 20° C.,  $H$  in CGS eenheden = 162,  $g = 981$ ,  $\rho = 0.998$  dan kan:



$$\lambda \begin{cases} > \\ < \end{cases} \sqrt{\frac{2 \pi^2 \cdot 162}{981 \cdot 0,998}}$$

dat is:  $\lambda \begin{cases} > \\ < \end{cases} 1,8$  centimeter zijn.

Zijn de golflengten der watergolven dus veel grooter dan 1,8 centimeter dan heeft de zwaartekracht de overhand, zijn zij veel kleiner dan 1,8 centimeter dan heeft de moleculaire werking de overhand op de golfvorming.

Voor kwik is die kritische golflengte ongeveer 1,3 voor aethylaether ongeveer 0,98 centimeter.

De golven onder moleculaire werking, kan men waarnemen bij de beweging van een half onder water gedompeld mes, in eene richting loodrecht op het vlak van het mes. Er ontstaan vóór het mes een aantal rimpels die zeer snel verdwijnen. (Zie THOMSON, Phil. Mag. IV, 42, p. 371).

Het is niet van belang ontbloomt hier eenige bijzonderheden te vermelden aangaande de golfbeweging in het water, wanneer de zwaartekracht alleen werkt, en aangaande de daarbij plaats hebbende beweging der individueele vloeistofdeeltjes.

Willen wij de beweging der afzonderlijke waterdeeltjes nagaan, dan slaan wij den volgenden weg in. Laten  $\xi$  en  $\zeta$  de componenten zijn van de uitwijking van een deeltje op de plaats  $(x, y)$ , en op den tijd  $t$ , zoo hebben wij:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\beta C (e^{\beta(z-h)} + e^{\beta(h-z)}) \sin. (\alpha t + \beta x) \\ \text{en} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \beta C (e^{\beta(z-h)} - e^{\beta(h-z)}) \cos. (\alpha t + \beta x) \end{aligned} \right\} (22)$$

Deze vergelijkingen integreeren we naar  $t$ , terwijl  $x$  en  $z$  constant blijven, waardoor;

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\beta}{\alpha} C \left( e^{\beta(z-h)} + e^{\beta(h-z)} \right) \cos. (\alpha t + \beta x) \\ \text{en} \\ \zeta &= \frac{\beta}{\alpha} C \left( e^{\beta(h-z)} - e^{\beta(z-h)} \right) \sin. (\alpha t + \beta x) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Door samenstelling van deze twee bewegingscomponenten krijgen we de vergelijking van eene ellips, met de groote as in de richting der  $X$ -as, dus horizontaal. De verhouding der twee assen is:

$$\frac{e^{\beta(h-z)} - e^{\beta(z-h)}}{e^{\beta(h-z)} + e^{\beta(z-h)}}.$$

Deze wordt nul voor  $z = h$ , dus aan den bodem is de kleine as nul terwijl de groote as nog bestaan blijft.

Is de diepte van de vloeistof zeer groot, zoodat  $h$  oneindig groot wordt, dan gaan de vergelijkingen (23) over in:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= M \cdot e^{-\beta z} \cos. (\alpha t + \beta x) \\ \zeta &= -M \cdot e^{-\beta z} \sin. (\alpha t + \beta x) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (24)$$

waarin  $M$  eene constante is.

Stelt men de componenten der beweging uit (24) samen, dan is het resultaat de vergelijking van een cirkel.

Bij de voortplanting van golven over een wateroppervlak bewegen zich de vloeistofdeeltjes om hun evenwichtsstand heen in ellipsen, wanneer de diepte niet oneindig groot is met betrekking tot de golfengte.

Is de diepte echter zeer groot in vergelijking met de golfengte, dan bewegen zich de deeltjes in cirkels om hun evenwichtsstand heen.

Deze beide bewegingen nemen echter af met de diepte onder het vrije oppervlak, en wel nemen zij zeer snel af. Bijvoorbeeld de straal van den cirkel is  $Me^{-\beta z}$ ; gaat men nu over den afstand van een golflengte naar beneden, dan verhoudt zich de beweging aldaar tot die aan het vrije oppervlak als  $e^{-2\pi}$  tot 1, of als 1:535. Dit voorbeeld is voldoende om in te zien dat de golfbeweging aan de wateroppervlakte zich betrekkelijk op weinig diepte doet gevoelen.

Verder valt nog omtrent den zin, waarin een deeltje den cirkel of de ellips doorloopt, op te merken, dat het deeltje zich beweegt in denzelfden zin als de voortplantingsrichting, wanneer het gekomen is op den top van een golfberg, terwijl de beweging tegengesteld is aan de voortplantingsrichting wanneer het zich in een golfdal bevindt. Dit laat zich gemakkelijk uit de formules (24) afleiden.

---

Uit het hier behandelde blijkt dat de goniometrische oplossing van meer samengestelde differentiaalvergelijkingen eene voortplantingssnelheid doet te voorschijn komen, die van de golflengte afhangt. Nu zullen wij zien dat, naast die voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen, eene tweede voortplantingssnelheid kan onderscheiden worden, doch die alleen dan van de eerste verschilt wanneer de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen van den trillingstijd afhangt.

Deze laatste snelheid zullen wij  $V$  blijven noemen.

Wij zullen in een eenvoudig voorbeeld, dadelijk naast de snelheid  $V$  de bovenbedoelde tweede voortplantingssnel-

heid zien verschijnen, en het zal ons niet moeilijk vallen eene betrekking tusschen die twee op te sporen.

Eene trillende beweging:

$$a \cos. 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

plante zich in de richting der X-as voort. Eene tweede trillende beweging, met dezelfde amplitude:

$$a \cos. 2 \pi \left( \frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda'} \right),$$

welke van de eerste alleen in den trillingsduur en de golflengte zeer weinig verschilt, plante zich insgelijks in diezelfde richting voort. Volgens het beginsel van superpositie van kleine bewegingen krijgt een deeltje, dat getroffen wordt, de uitwijking:

$$\eta = a \cos. 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a \cos. 2 \pi \left( \frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda'} \right). \quad (25)$$

Voeren wij nu de notatiën  $S = \frac{2 \pi}{T}$ ,  $K = \frac{2 \pi}{\lambda}$ ,  $V = \frac{S}{K}$   
 $S' = \frac{2 \pi}{T'}$ ,  $K' = \frac{2 \pi}{\lambda'}$  en  $V' = \frac{S'}{K'}$  in, dan wordt de uitwijking:

$$\begin{aligned} \eta &= a \cos. K (V t - x) + a \cos. K' (V' t - x) \\ &= 2a \cos. \frac{1}{2} \left\{ (K V - K' V') t - (K - K') x \right\} \cos. \frac{1}{2} \left\{ (K V + K' V') t - (K + K') x \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

Hierin zien wij, dat de resulterende beweging kan opgevat worden als eene trillende beweging, waarvan de amplitude  $2 a \cos. \frac{1}{2} \left\{ (K V - K' V') t - (K - K') x \right\}$  zelf eene periodieke functie is van  $x$  en van  $t$ .

Beschouwen wij een bepaald punt in de voortplantingsrichting, dan wordt dat punt achtereenvolgens door alle

golven aangedaan; is op een zeker tijdstip dat punt aangedaan door een golf met bepaalde amplitude, dan zal een tijdstip  $\frac{2\pi}{K V - K' V'}$  later het punt door een golf met dezelfde amplitude worden aangedaan.  $\frac{2\pi}{K V - K' V'}$  kan men dus de periode van de amplitude noemen.

Beschouwen wij op een bepaald tijdstip den toestand in zeker punt, dan zal diezelfde toestand te vinden zijn een eind weegs  $\frac{2\pi}{K - K'}$  verder. Als golflengte van de amplitude kan men dan  $\frac{2\pi}{K - K'}$  beschouwen.

Wanneer nu het tijdstip en de plaats beiden veranderlijk genomen worden, zal, wanneer  $t$  toeneemt met een tijd  $\tau$ , de weg moeten toenemen met  $\frac{K V - K' V'}{K - K'} \tau$  om weer denzelfden toestand terug te vinden. Derhalve is  $\frac{K V - K' V'}{K - K'}$  de voortplantingssnelheid van de amplitude. Wanneer nu volgens onze onderstelling bij de synthese van vergelijking (26), de golflengten en trillingstijden van de twee samenstellende trillende bewegingen uiterst weinig van elkaar verschillen, kunnen wij de uitdrukking  $\frac{K V - K' V'}{K - K'}$  tot hare grens laten naderen. Zij gaat dan over in:

$$U = \frac{d(K V)}{d K} \dots \dots \dots (27)$$

Deze snelheid  $U$  is niet meer de snelheid van enkelvoudige trillingen, maar hangt er ten nauwste mede samen. Wanneer nu de snelheid  $V$  van de golflengte afhangt, zal  $U$  kunnen berekend worden uit vergelijking (27). Is niet

$V$ , maar  $U$  bekend, dan zal men, behoudens de onbepaalde constante, door integratie van (27) tot de waarde van  $V$  kunnen komen.

In het algemeen zal dus, wanneer de betrekking  $S = F(K)$  bestaat, de snelheid  $U$  van die van enkelvoudige trillingen  $V$  verschillen.

Omschrijven wij de snelheid  $U$ , door de waarden  $K V = \frac{2\pi}{T}$  en  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$  in (27) te substitueeren, dan is:

$$U = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{T} - \lambda \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda} \dots (28)$$

Hieruit zien wij, dat, is de snelheid van enkelvoudige trillingen de verhouding tusschen hare golflengte en trillingstijd, deze snelheid  $U$  is de differentiaalverhouding van de omgekeerde waarden van trillingsduur en golflengte. Verder zien wij ook uit vergelijking (28), dat, wanneer de snelheid van enkelvoudige trillingen niet van de golflengte afhangt,  $U$  dadelijk in  $\frac{\lambda}{T}$ , dus in  $V$  overgaat.

Naar analogie met de theorie van het licht kunnen wij de betrekking  $S = F(K)$  eene dispersieformule noemen, en nu verandert de laatste beschouwing in deze woorden: waar, bij de voortplanting van golven in een medium, geen dispersie bestaat, zijn de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen en de snelheid  $U$ , dezelfde; bestaat er echter dispersie in het medium, dan zijn de grootheden  $V$  en  $U$  verschillend.

In de door ons beschouwde voorbeelden kwamen wij tot vergelijkingen, die de afhankelijkheid van de snelheid  $V$

van de golflengte uitdrukten. Daaruit zullen wij nu de snelheid  $U$  berekenen.

In de vergelijking (4 b) is:

$$V^2 = A - B \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

waaruit volgt:

$$K V d(K V) = A K dK - 2 B K^3 dK,$$

en

$$U = \frac{d(K V)}{dK} = \frac{dS}{dK} = \frac{A - 2 B K^2}{V}.$$

Bij de behandeling der transversaal trillende staven vonden we de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen verg. (8):

$$V = \frac{2\pi b}{\lambda}.$$

De snelheid  $U$  is hierbij ingevolge (28):

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} = V - \lambda \cdot \frac{-2\pi b}{\lambda^2} = 2V.$$

Bij de voortplanting van watergolven onder den invloed van zwaartekracht en moleculaire krachten, doen zich drie gevallen voor, naarmate wij of de zwaartekracht alleen, of de moleculaire werking alleen, of deze twee te zamen laten werken. Werkt de zwaartekracht alleen, dan is:

$$V = \sqrt{\frac{g}{K} \frac{e^{Kh} - e^{-Kh}}{e^{Kh} + e^{-Kh}}}.$$

Hierin is  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Berekent men de snelheid  $U$ , dan komt er:

$$U = \frac{1}{2}V \left( 1 + \frac{4Kh}{e^{2Kh} - e^{-2Kh}} \right).$$

Naar mate het produkt  $Kh$  toeneemt, nadert de vorm

tusschen haakjes tot de eenheid, en dat geschiedt wanneer we te doen hebben met diepwatervolven. Bij diepwatervolven, die onder de werking der zwaartekracht ontstaan is de snelheid  $U$  de helft van de snelheid van de enkelvoudige trillingen. Wordt de verhouding  $\frac{h}{\lambda}$  kleiner en kleiner, dat wil zeggen is de diepte klein vergeleken met de golflengte dan is  $U = V$ .

Heeft de moleculaire werking de overhand boven de werking der zwaartekracht dan is, als de diepte zeer groot is:

$$V = \sqrt{\frac{H}{2\rho}} \cdot \sqrt{K},$$

waaruit:

$$U = \frac{d(KV)}{dK} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{H}{2\rho}} \cdot \sqrt{K} = \frac{3}{2} V.$$

Werken beide krachten op het water, dan vinden wij, wanneer weer  $h$  zeer groot ondersteld wordt:

$$V = \sqrt{\frac{H}{2\rho} K + \frac{g}{K}},$$

waaruit het volgende blijkt:

$$K^2 V^2 = \frac{H}{2\rho} K^3 + gK,$$

of:

$$2KV d(KV) = \frac{3H}{2\rho} K^2 dK + g dK,$$

zoodat ten slotte:

$$U = \frac{3H}{4\rho} \frac{K}{V} + \frac{1}{2} \frac{g}{KV}.$$


---



Een zeer goed denkbeeld krijgt men van de verschillende snelheden, die wij leerden kennen, wanneer men de zoogenaamde zwevingen beschouwt, die zich bij het geluid voordoen. Plaatsen wij twee stemvorken, die van elkaar iets in toonhoogte verschillen, bij elkander, dan hooren wij in de lucht om hen heen zwevingen. Is  $n$  het verschil in aantal trillingen per secunde van beide stemvorken, dan hoort men  $n$  zwevingen in de secunde. Dit getal zij klein ten opzichte van het aantal trillingen per secunde van een der stemvorken. Noemen wij nu  $n_1$  en  $n_2$  het getal trillingen per secunde der twee stemvorken, verder  $2\pi n_1 = S_1$ ,  $2\pi n_2 = S_2$  dan kan men zonder bezwaar  $2\pi(n_1 - n_2) = dS$  stellen. Evenzoo  $2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = dK$ . Laten wij nu de golfstelsels, die van die twee stemvorken in de lucht worden voortgeplant, voorstellen door

$$a_1 \cos.(Kx - St) \text{ en } a_2 \cos.\{(K + dK)x - (S + dS)t\},$$

dan kan men ze samenstellen tot:

$$A \cos.(Kx - St + \psi),$$

waarin:

$$A = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos.(x \cdot dK - t \cdot dS)]^{\frac{1}{2}}$$

de resulterende amplitude is, en:

$$\psi = \text{boog tang. } \frac{a_2 \sin.(x \cdot dK - t \cdot dS)}{a_1 + a_2 \cos.(x \cdot dK - t \cdot dS)}$$

de resulterende phase is.

De resulterende golfbeweging wordt dan in haar geheel voorgesteld, als wij  $\frac{dS}{dK}$  door  $U$  vervangen, door:

$$\{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos. (x - U t) d K\}^{\frac{1}{2}} \cos. \{K(x - V t) + \psi\}.$$

De amplitude is eene functie van  $(x - U t)$ , evenals de phase, terwijl de enkelvoudige trillingen voorgesteld worden door eene functie van  $(x - V t)$ . Met andere woorden de zwevingen, die toch niets anders zijn dan afwisselend verzwakkingen en versterkingen van de amplitude, planten zich in de lucht voort met eene snelheid  $U$ , terwijl de enkelvoudige trillingen die den toon vormen, zich met de snelheid  $V$  voortplanten. Was er dus in de lucht dispersie voor de geluidstrillingen, dan zou het volgende opgemerkt worden. In de ruimte, waarin zich de zwevingen der twee stemvorken voldoende deden hooren, kon men zich personen denken op afstanden van elkaar en met registreertoestellen gewapend; ieder van die personen kon dan het tijdstip registreeren, waarop hij eene versterking of eene verzwakking van het geluid hoorde. Uit den afstand der waarnemers en uit het tijdsverloop tusschen de waarnemingen zou men dan kunnen bepalen de voortplantingssnelheid der zwevingen. Bepaalde men dan nog op de eene of andere wijze de voortplantingssnelheid der enkelvoudige trillingen in de lucht, dat is, de geluidssnelheid, dan zou  $U$ , de snelheid van voortplanting der zwevingen, van  $V$ , de geluidssnelheid, verschillend moeten gevonden worden. Voor zoover nu bekend is, bestaat er voor de geluidsgolven, die zich naar alle zijden in de lucht voortplanten geene dispersie, en zijn dus voor deze golven de grootheden  $U$  en  $V$  dezelfde.

Evenwel kan men de volgende vraag stellen: indien er werkelijk een middel bestond om de voortplantingssnelheid van zwevingen te bepalen, en men vond die verschillend

van  $V$ , zou men dan niet hieruit mogen besluiten tot het aanwezig zijn van dispersie voor geluidsgolven in de lucht? Na het boven medegedeelde zou men ten volle gerechtigd zijn, aan de lucht dispersie-vermogen voor geluidsgolven toe te kennen, wanneer de grootheden  $U$  en  $V$  verschillend bleken te zijn. Het verdient opmerking, dat bij de voortplanting van geluid in buizen wel dispersie voorkomt en dat dus in dit geval de grootheden  $U$  en  $V$  van elkander verschillen.

KUNDT vond reeds, bij de bepaling der voortplantings-snelheid van geluidsgolven in buizen, dat de snelheid afnam, naarmate de buizen nauwer en de tonen lager werden. VON HELMHOLTZ (Wissensch. Abhandl. I, pag. 383) zocht deze vermindering op te helderen door, bij de theoretische behandeling van het vraagstuk, de wrijving der gassen in aanmerking te nemen. Zijn onderzoek leidde tot eene formule, welke de wet uitdrukte, volgens welke de snelheidsvermindering afhing van den straal der buis, en van de hoogte van den toon. Bij zeer nauwe buizen schoot echter die formule te kort. Er was iets over het hoofd gezien, wat wel degelijk invloed had, naast de wrijving; dat was de warmtegeleiding. Wanneer zich geluidsgolven in de lucht voortplanten, hebben er dilataties en compressies plaats, welker duur zoo kort is dat men ze als adiabatisch beschouwen mag. Daardoor is de drukking niet alleen afhankelijk van het volume volgens de wet van BOYLE. Nu eens wordt de temperatuur hooger, dan weer lager en de warmtegeleiding kan niet haar vollen loop hebben. Dit heeft invloed op de voortplantingssnelheid van het geluid.

Om eenig oordeel te vellen over de grootte en den zin

dezer correctie, herinneren wij ons dat NEWTON de voortplantingssnelheid van het geluid bepaalde door de formule:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}},$$

waarin  $p$  den druk en  $\rho$  de dichtheid der lucht voorstellen.

Drukken wij alles in C. G. S.-eenheden uit, dan is  $p = 1033 \times 981$ ,  $\rho = 0,01293$  en

$$v = \sqrt{\frac{1033 \times 981}{0,01293}} = \text{ongeveer } 28000 \frac{\text{centimeter}}{\text{secunde}}.$$

Deze snelheid is dus ongeveer 280 Meter, dat is 50 Meter minder dan de snelheid van het geluid, die men proefondervindelijk bepaald heeft. LAPLACE veranderde de formule door den factor  $\frac{c_p}{c_v}$  onder het wortelteeken te voegen. Deze breuk stelt voor de verhouding van de soortelijke warmte bij constanten druk en die bij constant volume. Hij nam daarvoor in aanmerking de bovengenoemde temperatuur-veranderingen. Was echter de warmtegeleiding der lucht volkomen, dan zou de formule van NEWTON juist zijn. De correctie nu, welke ontstaat bij de voortplanting van geluidsgolven in nauwe buizen ten gevolge der warmtegeleiding zal een deel zijn van die 50 Meter van hierboven. In nauwe buizen toch, wordt aan de lucht, die gecompri-meerd en gedilateerd wordt in de nabijheid van een wand, gelegenheid gegeven iets van hare warmte aan den wand te geven of van dien wand te nemen.

KIRCHHOFF (Pogg. Ann. Bd. 134) nam behalve de wrijving, de warmtegeleiding in zijne theoretische beschouwingen op. Hij vond voor de waarde der voortplantingssnelheid van geluidstrillingen in nauwe buizen, de uitdrukking:

$$V = a - a \frac{\gamma}{2 r \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \dots \dots (29)$$

waarin  $a$  de voortplantingssnelheid in de vrije lucht is,  $r$  de straal der inwendige buisholte,  $n$  het aantal trillingen van den toon per secunde, terwijl  $\gamma$  eene constante is, die den volgenden vorm heeft:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sqrt{\nu}$$

Hierin is  $b$  de geluidssnelheid volgens NEWTON,  $\mu$  de wrijvingscoëfficiënt van het gas, en  $\nu$  de warmtegeleidingscoëfficiënt, welke volgens de kinetische gastheorie, ongeveer gelijk  $\frac{5}{2} \mu c_v$  is.

Voor de proeven met een bepaalde buis is  $\frac{\gamma}{2 r \sqrt{\pi}}$  constant.

Wat KIRCHHOFF hier onder  $V$  verstaat is de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen. Hier hangt  $V$  van den trillingsduur af en wordt weer de snelheid  $U$  van  $V$  verschillend. Om  $U$  te berekenen schrijven wij de vergelijking (29), wanneer wij nog  $\frac{\gamma}{2 r \sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \varepsilon$  stellen, in den vorm:

$$V = \frac{\lambda}{T} = a - a \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{T}$$

of:

$$\lambda = a T - \frac{1}{2} \varepsilon a T \sqrt{T}$$

Nu is:

$$U = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{dT}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{V^2}{\frac{d\lambda}{dT}}$$

of:

$$U = \frac{V^2}{a - \frac{3}{4} \varepsilon a \sqrt{T}} \dots \dots \dots (30)$$

Nu is  $\frac{1}{2} \varepsilon a$  zeer klein ten opzichte van  $a$ , zoodat we voor  $V^2$  kunnen schrijven:  $a^2 - \varepsilon a^2 \sqrt{T}$ , waardoor  $U$  overgaat in:

$$U = \frac{a^2 - \varepsilon a^2 \sqrt{T}}{a - \frac{3}{4} \varepsilon a \sqrt{T}} = a - \frac{1}{4} \varepsilon a \sqrt{T} \dots (31)$$

Wil men iets naders weten omtrent het verschil tusschen  $a$ ,  $V$  en  $U$ , dan moet de constante  $\varepsilon$ , en derhalve ook  $\gamma$ , bekend zijn. Theoretisch heeft KIRCHHOFF de waarde van  $\gamma$  bepaald op 0.00588. Proefondervindelijk is zij bepaald door H. KAYSER, (WIEDEMANN'S ANN. Bd. 2). Deze vergeleek zijne uitkomsten met de theorie van KIRCHHOFF. Hij vond de geluidssnelheid onafhankelijk van de grootte der amplitude, doch de hoogte van den toon had er invloed op. Zijne constante  $\gamma$  bleek echter te zijn 0.0235 en dus ongeveer viermaal zoo groot als die van KIRCHHOFF.

Slaan wij nu een blik op de verschillende uitkomsten:

$$U = a \left( 1 - \frac{1}{4} \varepsilon \sqrt{T} \right)$$

$$V = a \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{T} \right) \text{ (KIRCHHOFF)}$$

$$V = a (1 - 2 \varepsilon \sqrt{T}) \text{ (KAYSER),}$$

dan merken wij op dat het verschil tusschen  $U$  en  $V$  bij de voortplanting van geluidsgolven in eene buis, van dezelfde orde is als de invloed van warmtegeleiding en wrijving. Het verschil tusschen de door KAYSER gevondene

en de door KIRCHHOFF berekende waarde is nog onverklaard. Eerst wanneer  $V$  met zekerheid bekend is zal men van  $U$  hetzelfde kunnen zeggen. Bovendien zal het de vraag zijn of de demping der trillingen, die in eene buis plaats heeft, niet van invloed kan zijn op de betrekking tusschen  $U$  en  $V$ .

Met het bovenstaande hadden wij geen ander doel dan voorloopig aan te wijzen, hoe groot ongeveer het verschil tusschen de twee snelheden kan worden.

Nadat wij gezien hebben, dat bij de samenwerking van twee golfstelsels, die in golflengte iets verschillen, de enkelvoudige trillingen zich met de snelheid  $V$  voortplanten, terwijl de amplitude met de snelheid  $U$  voortschrijdt, lijdt het geen twijfel of bij de samenstelling van meer dan twee enkelvoudige golfbewegingen, die allen iets in golflengte verschillen, moet een dergelijk resultaat te voorschijn komen.

Zij zulk eene enkelvoudige trilling:

$$a \sin. \{(K + dK) x - (S + dS) t\};$$

dan zal de resulterende beweging van vele dergelijken zijn,

$$\Sigma a \sin. \{(K + dK) x - (S + dS) t\}.$$

Stelt men weer  $\frac{dS}{dK} = U$ , dan gaat de uitdrukking over in:

$$\begin{aligned} & \Sigma a \sin. \{(K + dK) x - (S + U dK) t\} = \\ & = \sin.(Kx - St) \Sigma a \cos.(x - Ut) dK + \cos.(Kx - St) \Sigma a \sin.(x - Ut) dK. \end{aligned}$$

Nu kan men:

$$\Sigma a \cos.(x - Ut) dK = F_1(x - Ut)$$

en

$$\Sigma a \sin.(x - Ut) dK = F_2(x - Ut)$$

stellen, daar, wat de grootheden  $a$  ook mogen zijn, eene som van termen als  $a \cos.(x - Ut) dK$ , altijd tot ééne functie van het argument  $(x - Ut)$  is terug te brengen.  $F_1(x - Ut)$  en  $F_2(x - Ut)$  kunnen dan amplituden voorstellen, en de twee samenstellende bewegingen kunnen we vereenigen tot de volgende,

$$\phi(x - Ut) \sin.(Kx - St + \psi)$$

waarin:

$$\phi(x - Ut) = \sqrt{[F_1(x - Ut)]^2 + [F_2(x - Ut)]^2}$$

de resulterende amplitude en

$$\psi = \text{boog tang} \frac{F_2(x - Ut)}{F_1(x - Ut)}$$

de resulterende phase is.

Wij hebben dus wederom verkregen de voortplanting der enkelvoudige trillingen met de snelheid  $V$ , terwijl amplitude en phase ook periodieke functiën zijn, waarbij de voortplantingssnelheid  $U$  behoort.

Deze samenstelling van vele golfstelsels met verschillende golflengte is van belang met het oog op de volgende omstandigheid. Heeft men eene trillende beweging, welke ontstaat uit een gegeven begintoestand bij welken de amplitude van een stelsel enkelvoudige trillingen van  $x$  afhangt, dan kan men die beweging opvatten als te behooren tot degenen welke samengesteld worden uit een stel golfstelsels van verschillende golflengte. Om dit eenigzins nader toe te lichten nemen wij als voorbeeld een homogenen lichtstraal. Deze bestaat in eene reeks enkelvoudige golven met dezelfde golflengte. Nemen wij echter van dien lichtstraal een begrensd gedeelte, bevattende



een eindig aantal golven, dan is men door het theorema van FOURIER in staat, die groep te ontbinden en op te vatten als bestaande uit verschillende golfstelsels, die verschillende golflengte hebben, maar ieder op zich zelf zich naar weerszijden tot in het oneindige uitstrekken. Heeft men derhalve tusschen twee punten, in de voortplantingsrichting gelegen, eene groep van enkelvoudige golven, dan zal de voortplanting van deze groep met behulp van beschouwingen als de bovenstaande kunnen bestudeerd worden. Het zal blijken, dat wanneer de groep vele enkelvoudige golven bevat, de golfstelsels, die men bij toepassing van het theorema van FOURIER invoert, weinig in golflengte verschillen; dan zal echter altijd de snelheid  $U$  optreden.

Wij zullen nu een viertal voorbeelden uitwerken, waarbij wij den begintoestand aangeven door de uitdrukking:

$$\eta = \Phi(x) \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

waarbij  $\lambda$  de golflengte is van de enkelvoudige trillingen en  $\eta$  de uitwijking in de richting der  $Y$ -as voorstelt, terwijl  $\Phi(x)$  de amplitude is. Wij nemen de trillende beweging transversaal, omdat het in teekening brengen gemakkelijker is, ofschoon onze beschouwingen evenzeer voor longitudinale golven gelden.

Wij stellen voorop dat de betrekking  $S = F(K)$  bestaat. Verder behandelen wij de gevallen waarin:

$$\text{I. } \Phi(x) = A \cos. 2\pi \frac{x}{L}$$

$$\text{II. } \Phi(x) = B + A \cos. 2\pi \frac{x}{L}$$

III.  $\phi(x)$  heeft een verloop zooals door de lijn  $PQR S \dots$  in Fig. (8) wordt voorgesteld.

IV.  $\phi(x)$  is eene willekeurige functie.

$$\text{I. } \phi(x) = A \cos. 2\pi \frac{x}{L}.$$

In dit geval is de amplitude eene periodieke functie met de golflengte  $L$ . In fig. (6) zien wij eenigermate het verloop er van voorgesteld. Met  $o b c d e$  is de kromme lijn aangeduid, die den begintoestand aangeeft voor de amplitude, de golflengte van die periodieke functie is  $L = oe$ . Tusschen de punten  $o$  en  $e$  liggen een zeer groot aantal enkelvoudige golven, waarvan de begintoestand aangeduid wordt door de dunnere lijn  $f$ . De lengte van deze golven is  $\lambda$  en wij zullen aannemen, dat  $L$  zeer veel grooter is dan  $\lambda$ .

We nemen dan voor den tijd  $t = 0$  de uitwijking:

$$\eta = A \cos. 2\pi \frac{x}{L} \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Om te zien welke uitwijking men voor een deeltje ( $x$ ) heeft een tijd  $t$  later, geven wij  $\eta$  den volgenden vorm:

$$\eta = \frac{1}{2} A \cos. 2\pi \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) x \right] + \frac{1}{2} A \cos. 2\pi \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) x \right].$$

$$\text{Stellen wij nu } 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) = K_1, \quad 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) = K_2$$

en nemen we aan dat voor  $t = 0$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$  is, dan splitst de trillende beweging zich in twee gelijke deelen, welke naar weerszijden zich voortplanten. Wij beschouwen gemaks-

halve het deel, dat zich in de richting der positieve  $X$ -as voortplant.

Daarvoor wordt de uitwijking na den tijd  $t$ :

$$\eta = \frac{1}{4} A \cos. \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) x - S_1 t \right] + \frac{1}{4} A \cos. \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) x - S_2 t \right].$$

Volgens de gestelde betrekking  $S = F(K)$  is:

$$S_1 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) \right], \quad S_2 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) \right].$$

Daar nu  $\frac{1}{L}$  zeer veel kleiner is dan  $\frac{1}{\lambda}$ , is:

$$S_1 = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) - \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad \text{en} \quad S_2 = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) + \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

De uitwijking wordt dan:

$$\eta = \frac{1}{4} A \cos. 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) x - \frac{1}{2\pi} F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t + \frac{1}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\} + \\ + \frac{1}{4} A \cos. 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) x - \frac{1}{2\pi} F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t - \frac{1}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\},$$

welke wij weder kunnen samenstellen tot:

$$\eta = \frac{A}{2} \cos. 2\pi \left\{ \frac{x}{L} - \frac{1}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\} \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\}.$$

We kunnen  $\frac{A}{2} \cos. 2\pi \left\{ \frac{x}{L} - \frac{1}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\}$  de amplitude noemen van de enkelvoudige trillingen. De amplitude zelf is eene veranderlijke grootheid die zich schikt naar eene kromme lijn welke met de snelheid  $U = F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$  in de richting der  $X$ -as voortschuift, en uit  $obcde$  verkregen wordt door de coördinaten tweemaal kleiner te maken.

$$\text{II. } \phi(x) = B + A \cos. 2\pi \frac{x}{L}.$$

De voorwaarde voor  $L$  is dezelfde als in het geval I. Hier komt echter bij de amplitude een constant stuk  $B$ . De begintoestand van de uitwijking:

$$\eta = \left( B + A \cos. 2\pi \frac{x}{L} \right) \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

wordt voorgesteld in Fig. (7). De lijn  $a b c d e$  stelt den begintoestand voor van de amplitude. Uit deze figuur blijkt, dat de amplitude hier, in tegenstelling met het eerste geval, nergens nul wordt.

Voor de bovenstaande uitdrukking kan men schrijven:

$$\eta = B \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2} A \cos. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) x + \frac{1}{2} A \cos. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) x.$$

Na den tijd  $t$  is de uitwijking, op dezelfde wijze als in I, geworden:

$$\eta = \frac{1}{2} B \cos. \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} - S t \right) + \frac{1}{4} A \cos. \left\{ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) x - S_1 t \right\} + \frac{1}{4} A \cos. \left\{ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) x - S_2 t \right\},$$

waarin:

$$S = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right), S_1 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{L} \right) \right], S_2 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{L} \right) \right].$$

Wij ontwikkelen de twee laatste uitdrukkingen weer volgens het theorema van TAYLOR in:

$$S_1 = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) - \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \text{ en } S_2 = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) + \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

waardoor de uitwijking  $\eta$  wordt:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} B \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} A \cos. 2\pi \left\{ \frac{x}{\lambda} - \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t + \frac{1}{L} F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} A \cos. 2\pi \left\{ \frac{x}{\lambda} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t - \frac{1}{L} F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\}. \end{aligned}$$

Deze beweging is samengesteld uit drie trillende bewegingen, welke wij kunnen samenstellen, nadat wij  $B = 2\theta A$  gesteld hebben tot:

$$\begin{aligned} \eta &= \theta A \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} + \\ &+ \frac{A}{2} \cos. \frac{2\pi}{L} \left\{ x - F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} \\ \text{of:} \\ \eta &= \frac{A}{2} \left\{ 2\theta + \cos. \frac{2\pi}{L} \left[ x - F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right] \right\} \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\}. \end{aligned}$$

Deze uitkomst leert ons: de amplitude van de samengestelde golfbeweging bevat een constant en een periodiek veranderlijk gedeelte. Dit veranderlijk gedeelte plant zich in de richting der  $X$ -as voort met eene snelheid  $U = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ .

III. De amplitude in den begintoestand wordt voorgesteld door de lijn  $PQR S$ . Fig. (8). Wij zijn thans genoodzaakt het theorema van FOURIER te hulp te roepen.

We nemen  $L = OW$  en nemen ook hier aan, dat tusschen de punten  $O$  en  $W$ , zeer veel enkelvoudige golven, zich bevinden, waardoor ook weer  $L$  zeer veel grooter is dan  $\lambda$ .

Stellen wij verder de lijn  $OE = y_1$ ,  $CD = y_2$  terwijl de stukken  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RS$  enz. evenwijdig blijven aan de  $X$ -as.

Tevens nemen wij den begintoestand zoo, dat de toestand, aan weerszijden van de  $Y$ -as, symmetrisch is. Daardoor vereenvoudigt de ontwikkeling van  $\phi(x)$  volgens het theorema van FOURIER, daar wij slechts de cosinussen noodig hebben.

De uitwijking, op den tijd  $t = 0$ , is dus voorgesteld door :

$$\eta = \phi(x) \cos. 2 \pi \frac{x}{\lambda}$$

waarin  $\phi(x)$  te ontwikkelen is naar de cosinussen van de veelvouden van den boog  $\frac{\pi x}{L}$ .

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos. \frac{\pi x}{L} + A_2 \cos. 2 \frac{\pi x}{L} + \\ & + A_3 \cos. 3 \frac{\pi x}{L} + \dots + A_n \cos. n \frac{\pi x}{L} \dots \end{aligned}$$

Nu is :

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) dx \text{ en } A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos. n \frac{\pi x}{L} dx.$$

Uit de figuur blijkt, dat volgens onze voorwaarden, voor :

$$x = 0 \text{ tot } x = \frac{1}{2} L \quad \phi(x) = y_1$$

is, en voor :

$$x = \frac{1}{2} L \text{ tot } x = L \quad \phi(x) = y_2.$$

Dan is :

$$A_0 = \frac{2}{L} y_1 \int_0^{\frac{1}{2}L} dx + \frac{2}{L} y_2 \int_{\frac{1}{2}L}^L dx = 2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$$

en

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{1}{2}L} y_1 \cos. n \frac{\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} y_2 \int_{\frac{1}{2}L}^L \cos. n \frac{\pi x}{L} dx.$$

Voor  $n$  even is  $A_n = 0$ ,

voor  $n$  oneven is  $A_n = 2 \frac{y_1 - y_2}{n \pi} (-1)^{n+1}$ .

De reeksontwikkeling voor  $\Phi(x)$ , gaat dus over in:

$$\Phi(x) = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{2(y_1 - y_2)}{\pi} \left\{ \cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \cos 3 \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{5} \cos 5 \frac{\pi x}{L} \dots \right\}.$$

Als contrôle kan dienen, dat de vorm tusschen accoladen voor  $x = 0$  overgaat in de reeks van LEIBNITZ.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$$

en dat derhalve voor  $x = 0$ :

$$\Phi(x) = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2} = y_1.$$

Voor  $x = L$  is:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{2(y_1 - y_2)}{\pi} \left\{ -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \dots \right\} = \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{(y_1 - y_2)}{2} = y_2, \end{aligned}$$

zooals ook zijn moest.

De uitwijking van een deeltje ( $x$ ) op den tijd  $t = 0$  is dus:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y_1 + y_2}{2} \cos 2 \pi \frac{x}{\lambda} + \frac{2(y_1 - y_2)}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2 \pi x}{\lambda} - \\ &- \frac{2(y_1 - y_2)}{3 \pi} \cos 3 \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2 \pi x}{\lambda} + \frac{2(y_1 - y_2)}{5 \pi} \cos 5 \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2 \pi x}{\lambda} - \dots \end{aligned}$$

Om de uitwijking te vinden op een tijdstip  $t$  later, laten wij de argumenten weer aangroeien op dezelfde wijze en onder dezelfde voorwaarden als in I. Nemen wij den eersten term: die wordt na den tijd  $t$ :

$$\frac{y_1 + y_2}{4} \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F \left( \frac{2\pi}{\lambda} t \right) \right\}.$$

Voor de volgende termen nemen wij den algemeenen vorm:

$$(-1)^n \frac{2(y_1 - y_2)}{(2n+1)\pi} \cdot \cos. (2n+1)\pi \frac{x}{L} \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Wij splitsen dezen vorm in twee deelen:

$$(-1)^n \frac{2(y_1 - y_2)}{(2n+1)\pi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos. 2\pi \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{1}{\lambda} \right] x + \cos. 2\pi \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \right] x \right\}.$$

Deze uitdrukking wordt na den tijd  $t$ , evenals in I:

$$(-1)^n \frac{2(y_1 - y_2)}{2(2n+1)\pi} \cdot \left\{ \cos. \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \right) x - S_1 t \right] + \cos. \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \right) x - S_2 t \right] \right\}.$$

Nu is:

$$S_1 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \right) \right] = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

en

$$S_2 = F \left[ 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \right) \right] = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

Deze ontwikkeling zou men willicht ongeoorloofd kunnen vinden, daar toch bij aangroeiing van het getal termen, dus bij aangroeiing van  $(2n+1)$ , de waarde van  $\frac{(2n+1)}{2} \frac{\lambda}{L}$  niet meer zeer klein was ten opzichte van  $\lambda$ .

Dit hangt geheel af van de vraag hoeveel termen men noodig heeft, d. w. z. uit hoeveel sinusoiden men den verlangden begintoestand kan opbouwen. Stel, men heeft aan  $n$  termen genoeg dan heeft  $\frac{(2n+1)}{2} \frac{\lambda}{L}$  een bepaalde waarde; en bevat die grootheid dan nog een zeer groot aantal  $\lambda$ 's, dan is de ontwikkeling geoorloofd. We zullen naderhand



bij het licht hiervan een voorbeeld ontmoeten, in de proeven van FIZEAU.

De algemeene term gaat dus over in:

$$(-1)^n \frac{y_1 - y_2}{2(2n+1)\pi} \left\{ \cos. 2\pi \left[ \frac{1}{\lambda} x - \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot t + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot x - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot t \right] + \right. \\ \left. + \cos. 2\pi \left[ \frac{1}{\lambda} x - \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot t - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot x + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot t \right] \right\},$$

welke uitdrukking terug te brengen is tot:

$$(-1)^n \frac{(y_1 - y_2)}{(2n+1)\pi} \cos. 2\pi \left\{ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot x - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot t \right\} \cos. \left\{ 2\pi \frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) t \right\}.$$

De eerste term der uitwijking  $\eta$ , levert ons eene enkelvoudige trillende beweging met constante amplitude, de andere termen leveren ook enkelvoudige trillende bewegingen doch met periodiek veranderlijke amplituden. De snelheid, waarmede de bij den aanvangstoestand voorgestelde kromme lijn  $\phi(x)$  zich voortplant, is weer  $U = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ .

Voeren wij deze  $U$  in de uitdrukking voor  $\eta$ , dan is ten slotte:

$$\eta = \left[ \frac{y_1 + y_2}{4} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(y_1 - y_2)}{(2n+1)\pi} \cos. \frac{2n+1}{L} \pi(x - Ut) \right] \cos. \frac{2\pi}{\lambda} (x - Vt).$$

IV. Wij kunnen ook de amplitude in den begintoestand voorstellen door eene willekeurige functie, welke zich van  $-\infty$  tot  $+\infty$  uitstrekt. Deze functie,  $\phi(x)$ , is ook dan te ontbinden in goniometrische functiën. Thans zullen wij kortheidshalve aannemen dat die willekeurige functie  $\phi(x)$  periodiek is met de periode  $2L$ , en ook, dat  $L$  zeer veel grooter is dan  $\lambda$ .

In de uitdrukking:

$$\eta = \phi(x) \cos. 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

ontwikkelen wij  $\phi(x)$  weer volgens het theorema van FOURIER.

$$\phi(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos. \frac{\pi x}{L} + A_2 \cos. 2 \frac{\pi x}{L} + A_3 \cos. 3 \frac{\pi x}{L} \dots + \\ + B_1 \sin. \frac{\pi x}{L} + B_2 \sin. 2 \frac{\pi x}{L} + B_3 \sin. 3 \frac{\pi x}{L} + \dots$$

De coëfficiënten worden op de gewone wijze bepaald:

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_{-L}^{+L} \phi(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \phi(x) \cos. n \frac{\pi x}{L} dx$$

en

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \phi(x) \sin. n \frac{\pi x}{L} dx.$$

De uitwijking van een deeltje  $(x)$  op den tijd  $t=0$  wordt dus:

$$\eta = \frac{1}{2} A_0 \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} + A_1 \cos. \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} + A_2 \cos. 2 \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} + \dots \\ + B_1 \sin. \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} + B_2 \sin. 2 \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} + \dots$$

Op dezelfde wijze als hierboven, splitsen wij de termen met produkten van cos. met cos. en sin. met cos. De algemeene termen zijn:

$$A_n \cos. n \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} = \\ = \frac{1}{2} A_n \left\{ \cos. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{2L} \right) x + \cos. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{2L} \right) x \right\}$$

en

$$B_n \sin. n \frac{\pi x}{L} \cos. \frac{2\pi x}{\lambda} = \\ = \frac{1}{2} B_n \left\{ \sin. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{2L} \right) x + \sin. 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{2L} \right) x \right\}$$

Wij nemen weder de termen welke op eene voortplan-

ting in de richting der positieve X-as wijzen. De uitwijking behoorende bij die algemeene termen, wordt na den tijd  $t$ , voor een deeltje ( $x$ ),

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4} A_n \cos. \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{2L} \right) x - S_1 t \right] + \\ & + \frac{1}{4} A_n \cos. \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{2L} \right) x - S_2 t \right] \\ \text{en} & \frac{1}{4} B_n \sin. \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{2L} \right) x - S_1 t \right] + \\ & + \frac{1}{4} B_n \sin. \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{2L} \right) x - S_2 t \right] \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Nu is:

$$S_1 = F \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{2L} \right) \right] = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) + \frac{2\pi n}{2L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

en

$$S_2 = F \left[ 2 \pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{2L} \right) \right] = F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) - \frac{2\pi n}{2L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right),$$

waardoor de waarden der uitdrukkingen (a) worden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} A_n \cos. 2 \pi \left[ \frac{n}{2L} \left( x - F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right) + \left( \frac{1}{\lambda} x - \frac{1}{2\pi} F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right) \right] + \\ & + \frac{1}{4} A_n \cos. 2 \pi \left[ \frac{n}{2L} \left( x + F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right) - \left( \frac{1}{\lambda} x + \frac{1}{2\pi} F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2} A_n \cos. 2 \pi \left\{ \frac{nx}{2L} - \frac{n}{2L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot t \right\} \cos. \left\{ 2 \pi \frac{x}{\lambda} - F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\}. \end{aligned}$$

Evenzoo krijgen we voor den algemeenen term die den sinus bevat:

$$\frac{1}{2} B_n \cos. 2 \pi \left\{ \frac{nx}{2L} - \frac{n}{2L} F' \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot t \right\} \sin. \left\{ 2 \pi \frac{x}{\lambda} - F \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) t \right\}.$$

Deze ontwikkeling is ook hier geoorloofd, wanneer wij

kunnen volstaan met een aantal termen der reeks, en wanneer dan nog  $\frac{n\lambda}{2L}$  zeer veel kleiner is dan  $\lambda$ .

Nemen wij nu bij den eersten term  $\frac{1}{2}A_0 \cos.\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t\right)$  de andere termen der reeksontwikkeling, dan komt men tot de uitdrukking voor de afwijking:

$$\eta = \left[ \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos.\frac{\pi n}{L} \left\{ x - F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} \right] \cos.\left\{ 2\pi\frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} + \\ + \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos.\frac{\pi n}{L} \left\{ x - F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\} \right] \sin.\left\{ 2\pi\frac{x}{\lambda} - F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)t \right\}.$$

Voor  $F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$  kunnen wij  $U$  schrijven; en uit deze uitkomst blijkt dat, ook wanneer de begintoestand voor de amplitude, tusschen  $O$  en  $L$ , zoo algemeen mogelijk wordt voorgesteld door elke willekeurige functie van  $x$ , de resulterende amplitude eene functie van  $(x - Ut)$  is.

Wij zagen in deze vier voorbeelden hoe de amplitude, wanneer zij in den begintoestand door elke willekeurige functie wordt voorgesteld, blijkt eene functie te zijn van  $(x - Ut)$ . De lijn, waardoor zij wordt voorgesteld, schuift zich met de snelheid  $U$  voort; de enkelvoudige trillingen planten zich voort met de snelheid  $V$ .

Verder kunnen wij nog het volgende opmerken. In voorbeeld III kan men de golven verdeeld denken in groepen, die elk voor zich eene constante amplitude hebben. De groep, die zich op het tijdstip  $t = 0$ , tusschen de pun-

ten  $Q$  en  $R$  bevindt (Fig. 8), kan men zelfs denken met de amplitude gelijk nul, dan gaat de figuur over in Fig. 9. Wij zien nu uit het bovenstaande dat men kan spreken van de snelheid, waarmede zich die verschillende groepen voortplanten. Die snelheid is de grootte  $U$ . RAYLEIGH heeft dan ook de snelheid  $U$  de groepsnelheid genoemd, in tegenstelling met de snelheid der individueele golven (of trillingen)  $V$ . Treden nu bij de voortplanting van golfstelsels,  $U$  en  $V$  in verschillende grootte op, dan kan men spreken van verschil tusschen groepsnelheid en snelheid der trillingen zelve.

Een verschijnsel, waarbij het bestaan van groepen, en dus ook van de groepsnelheid duidelijk te zien is, is de voortplanting van een systeem watergolven. Brengt men in een stil wateroppervlak eene verstoring teweeg, bijv. door het inwerpen van een klein voorwerp, dan ontstaat er om die plaats heen een systeem van concentrische golven. In dat systeem, dat begrensd is door twee concentrische cirkels, ziet men aan den binnenrand nieuwe golven ontstaan, deze zich voortplanten naar den buitenrand om daar weg te sterven; het systeem zelf plant zich ook over het wateroppervlak voort, doch zichtbaar langzamer dan de individueele golven zelve. Dit verschijnsel, dat veelvuldig op te merken is, werd het eerst verklaard door STOKES (RAYLEIGH, *On Sound*, Vol. II, pag. 297) uit de samenwerking van twee golfstelsels, die zich in gelijke richting voortplanten, gelijke amplituden hebben, doch in golflengte iets verschillen. Hierop is dan ook de formule van pag. 38 van toepassing.

Planten zich nu zulke golven voort in een kanaal met

steile gladde wanden, dan kan men de samengestelde golfbeweging uitstekend waarnemen door een punt van een dier wanden in het oog te houden. Dat punt, dat niet ver boven het wateroppervlak ligt, wordt afwisselend bevochtigd en de golven, die daar langs komen, zijn afwisselend groot en klein. De tijd, die er verloopt tusschen den voorbijgang van twee hoogste golven, in Fig. (5) door  $a$  en  $b$  aangegeven, is  $\frac{\pi}{KV - K'V'}$ ; de afstand van twee hoogste golven is  $\frac{\pi}{K - K'}$ . We kunnen dus  $\frac{2\pi}{KV - K'V'}$  de periode, en  $\frac{2\pi}{K - K'}$  de golflengte der amplitude van het systeem golven noemen. De groepsnelheid  $U$ , de verhouding van beide grootheden, is hier zooals wij zagen (pag. 36) juist de helft van de snelheid  $V$ .

### DERDE HOOFDSTUK.

---

#### Toepassing op de voortplanting van het licht.

Bij de tot hiertoe medegedeelde beschouwingen hebben wij gezien, hoe aan eene lineaire partieele differentiaalvergelijking, met constante coëfficiënten, van den vorm  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ , als oplossing voldeed eene enkelvoudige goniometrische functie. Deze stelde eene golfbeweging voor, waarbij de snelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  niet van de golflengte afhing. Was de differentiaalvergelijking samengestelder, doordat het verschijnsel meer ingewikkeld werd, dan kon nog aan die vergelijking eene enkelvoudige goniometrische functie voldoen; echter hing dan de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  wel van de golflengte af. De grootheid  $U$ , die wij als voortplantingssnelheid van de amplitude of van groepen van golven leerden kennen, verschilde in het eerste geval niet van  $V$ . Wel in het tweede geval. De betrekking  $S = F(K)$ , die wij reeds dispersie-formule ge-

noemd hebben, toonde ons hoe groot het verschil tusschen  $U$  en  $V$  zijn kon.

Al heeft men de bewegingsvergelijkingen niet, dan kan men toch een oordeel vellen over het verschil tusschen  $U$  en  $V$ , indien men slechts de betrekking kent, die er bij enkelvoudige trillingen tusschen de voortplantingssnelheid  $V$  en den trillingsduur  $T$  bestaat.

Dit laatste is het geval bij het licht. We kennen de betrekking tusschen  $V$  en  $T$ , want de dispersie is voor alle stoffen en aggregaatstoestanden nauwkeurig bekend. We behoeven slechts te herinneren aan de experimenteetele bepalingen door KETTELER, WÜLLNER, MASCART en VAN DER WILLIGEN e. a. verricht, wat aangaat de nauwkeurigheid, en aan die van LANGLEY, wat aangaat de uitgebreidheid van het spectrum. Zoo ergens, dan zal bij het licht de meest volledige discussie omtrent de twee voortplantingssnelheden kunnen geschieden.

In het vacuum ontbreekt alle dispersie. De snelheid  $U$  is dus hier van  $V$  niet verschillend. Laten wij voortaan deze snelheid in het vacuum  $V_0$  noemen.

Eer wij overgaan tot het onderzoek naar het verschil in grootte tusschen de voortplantingssnelheid  $U$  en  $V$ , voor gasvormige, vloeibare en vaste lichamen, zullen wij eerst de gevallen bespreken, waarbij wij met ieder van die twee snelheden te maken hebben.

---



Nadat ARAGO (Ann. de chim. et de phys. (2) I), bij eene herhaling van de spiegelproef van FRESNEL, de interferentie-strepen liet verdwijnen, door een der interfereerende lichtstralen te laten gaan door een glasplaat, verklaarde FRESNEL dit verschijnsel uit de vertraging, welke het licht bij den doorgang door het glas ondervond. FRESNEL voor-spelde, dat de proef, genomen met een dun micaplaatje, zou aantoonen eene verschuiving, en geene uitwissching der interferentie-strepen. Hij nam daarop de proef zelf. (Oeuvres Complètes, I, p. 75). Daar de snelheid van voortplanting van het licht in het micaplaatje kleiner is dan in de lucht, zal de onderschepte straal eene kleine vertraging ondergaan. Het is alsof de lichtstraal door lucht was blijven gaan, maar zijn weg iets verlengd was. De verschuiving der interferentie-strepen heeft dus plaats naar de zijde van het micaplaatje. Gebruiken wij homogeen licht, en is daarvan  $\lambda$  de golflengte in lucht,  $\lambda'$  die in het micaplaatje, de dikte van het plaatje  $d$ , dan is de vertraging van den eenen lichtstraal bij den anderen, in trillingstijden uitgedrukt:

$$\frac{d}{\lambda'} - \frac{d}{\lambda}.$$

Verschuift de middelste heldere streep over een afstand gelijk aan  $\mu$  afstanden van twee donkere strepen, dan is de vertraging:

$$\frac{d}{\lambda'} - \frac{d}{\lambda} = \mu.$$

Is  $n$  de brekingsindex van het plaatje, dan is  $n = \frac{\lambda}{\lambda'}$  en :

$$d \left( \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{d}{\lambda} (n - 1) = \mu,$$

of: 
$$d(n - 1) = \mu V I.$$

Ook bij den interferentiaalrefractor van JAMIN kan men verschuiving van interferentiestrepen waarnemen, zoodra de middenstoffen, waardoor de twee interfereerende stralen gaan, iets in breekbaarheid gaan verschillen. Dezen gevoeligen toestel heeft KETTELER gebruikt bij eene methode om de dispersie voor gassen te bepalen.

Houdt men voor het oculair van den kijker van een spectroscop een micaplaatje of microscoopdekglasje, zoodat de helft van het oculair bedekt wordt, en wel aan die zijde, waar men het violet ziet, dan neemt men in het spectrum donkere strepen waar, welke op regelmatige afstanden van elkander staan en evenwijdig aan de lijnen van FRAUENHOFER loopen. Deze strepen zijn het eerst door WREDE gezien en als strepen van TALBOT bekend. Zij vinden haar oorsprong in de interferentie van twee lichtstralen, komende van een homogeen gedeelte van het spectrum en waarvan de een, op zijn weg naar het netvlies van ons oog, door een doorzichtig medium eene kleine vertraging ondervindt.

Is de dikte van het plaatje  $d$ , de golflengte van een zekere kleur in het spectrum  $\lambda$  in de lucht,  $\lambda'$  in het plaatje, van een andere kleur  $\lambda_0$  in de lucht, en  $\lambda'_0$  in het plaatje, dan is de vertraging van de lichtstralen van de eerste kleur, als  $n$  de brekingsindex van het plaatje is:

$$\frac{d}{\lambda'} - \frac{d}{\lambda} = \frac{nd}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (n - 1),$$

de vertraging van de lichtstralen behoorende bij de andere kleur:

$$\frac{d}{\lambda_0} (n_0 - 1).$$

Het verschil van die twee vertragingen is gelijk aan het aantal strepen van TALBOT, dat tusschen die twee kleuren ligt. Zij dit aantal  $\mu$  dan is:

$$\frac{d}{\lambda_0} (n_0 - 1) - \frac{d}{\lambda} (n - 1) = \mu,$$

of:

$$\frac{d}{T_0} (n_0 - 1) - \frac{d}{T} (n - 1) = V\mu.$$

In deze drie interferentie-proeven hebben wij te doen met eene voortplantingssnelheid van het licht en deze is de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$ . Bij de verklaring van de interferentie-verschijnselen toch maken wij altijd gebruik van enkelvoudige trillingen en kunnen wij ons voorstellen, dat deze in eene eindeloze reeks op elkander volgen.

We zullen nu nagaan of wij met de snelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  of met de snelheid  $U$  te maken hebben bij de verschillende methoden ter bepaling der lichtsnelheid.

De aberratie van het licht geeft ons hoogst waarschijnlijk de snelheid van enkelvoudige trillingen  $V$ , omdat de lichtstralen, die van de hemellichamen tot ons komen, zich onafgebroken door de hemelruimte voortplanten.

Op de methode echter met het getande rad van FIZEAU kunnen wij, met eenige verandering, voorbeeld III van pag. 49 toepassen. Wij laten de amplitude voldoen aan de wet voorgesteld niet door de lijn  $PQRS$  in fig. 8, maar door de lijn  $OPQRWSI$  in fig. 9.

Wij stellen wederom den afstand  $OW = L$ . Het getande rad bezorgt ons door zijne wenteling nu eens licht met constante amplitude, na verloop van een kleinen tijd duisternis, na verloop van dienzelfden tijd weer licht met constante amplitude enz. De reeks ontwikkeling van  $\phi(x)$  uit voorbeeld III is hier van toepassing. Alleen is het noodig te onderzoeken of bij de ontwikkeling van  $S = F(K)$  de grootheid  $\frac{(2n+1)}{L}\lambda$  wel zeer veel kleiner blijft dan  $\lambda$ . Dat deze ontwikkeling ook nu weer geoorloofd is blijkt uit het volgende: een rad met 720 tanden had bij de proeven van FIZEAU 25 omwentelingen in de seconde; de duur tusschen twee achtereenvolgende uitdoovingen is dan ongeveer  $\frac{1}{18000}$  secunde; dat is ook de tijd, noodig om in fig. 9 van  $O$  in  $W$  te komen. Nu is de trillingsduur van natiumlicht ongeveer  $\frac{1}{5.10^{14}}$  secunde en de afstand  $OW$  bevat dan ongeveer  $3.10^{10}$  golfengten van het licht. Zonder bezwaar kan men dus  $\frac{(2n+1)}{L}\lambda$ , ook bij eenigszins groote waarden van  $n$  als zeer klein beschouwen ten opzichte van  $\lambda$ . En zooals wij gezien hebben, hebben wij niet eens een groot aantal termen van de reeks van FOURIER noodig.

Wij kunnen nu uit het vroeger besprokene onmiddellijk afleiden, dat, met deze methode, de voortplantingssnelheid  $U$  gemeten wordt, en niet de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen,

Met eenige wijziging is ook weder de beschouwing omtrent voorbeeld III van toepassing op de methode van RÖMER, waarbij de verduisteringen van Jupiter's satellieten gebezigd werden. Die afwisseling van licht

en duisternis vinden wij ook hier, doch den duur tus-  
schen het begin van licht en de eerstvolgende ver-  
duistering kunnen wij als oneindig groot beschouwen. De  
wet, waaraan wij hier de amplitude laten voldoen is  
dan voorgesteld in fig. 10 door de lijn  $PQOR$ . Een  
zeer groot aantal golven hebben elkander met standvastige  
amplitude opgevolgd, totdat plotseling de amplitude nul  
is geworden. We mogen dus ook hier aannemen dat het  
de voortplantingssnelheid  $U$  is, die men uit de waarne-  
mingen afleidt.

De overwegingen omtrent de voortplantingssnelheid,  
welke bepaald wordt met deze methoden en vooral met  
de methode met den draaienden spiegel van FOUCAULT,  
hebben reeds RAYLEIGH en GOUY bezig gehouden. In zijn  
werk „On Sound”, heeft RAYLEIGH bij de behandeling der  
transversaal trillende staven de aandacht gevestigd op de  
groepsnelheid en aan het slot van dit werk (vol. II, pag.  
297) vat hij de kwestie nog meer algemeen op. In Na-  
ture (vol. 24 en 25) bespreekt hij de methoden ter be-  
paling der lichtsnelheid. Hij is van oordeel dat door de  
hierboven genoemde methoden de voortplantingssnelheid  
van de amplitude of de snelheid eener groep lichtgolven  
bepaald wordt. GOUY beschouwt in het „Journal de Liou-  
ville” van 1882 de zaak meer uit een mathematisch oog-  
punt, nadat hij in de Comptes-Rendus (1880—1881) een  
kort uittreksel van zijne theorie had gegeven. Hij beschouwt  
de voortplanting van lichtgolven in eene homogene, door-  
zichtige en optisch-isotrope middenstof, die het polarisatie-  
vlak niet draait. De dispersie-betrekking  $S = F(K)$  ont-  
wikkelt hij volgens het theorema van TAYLOR en voert

twee benaderingen uit, waarbij hij eerst de twee eerste en dan de drie eerste termen der reeksontwikkeling gebruikt. Het resultaat is in beide gevallen hetzelfde. De snelheid van voortplanting der amplitude  $U$  noemt hij de lichtsnelheid, de snelheid  $V$ , die der enkelvoudige golven.

De theorie der verschijnselen, welke zich voordoen bij de snelheidsbepaling met draaiende spiegels, is, naar 't mij voorkomt, niet gemakkelijk te geven. In de beschouwingen van RAYLEIGH (l. c.) SCHUSTER en GIBBS (Nature, Vol. 33), wordt op de omstandigheid gelet dat bij den draaienden spiegel in den teruggekaatste lichtbundel de op elkaar volgende golffronten niet evenwijdig aan elkaar loopen. Is nu de voortplantingssnelheid  $V$  afhankelijk van de golflengte, dan zal volgens deze natuurkundigen uit de genoemde omstandigheid eene verschillende voortplantingssnelheid der deelen van eenzelfde golffront voortvloeien.

Het golffront wordt diensgevolge gedraaid en keert tot den spiegel niet meer terug in den stand, dien het na de eerste terugkaatsing had. Bestond deze richtingsverandering niet, dan zou eene verplaatsing van het lichtbeeld worden waargenomen, die alleen aan de wenteling van den spiegel te wijten is en aan de voortplantingssnelheid  $V$  beantwoordt. Thans echter is de verplaatsing van het lichtbeeld toe te schrijven, deels aan de wenteling van den spiegel, deels aan die der golffronten gedurende hunnen heen- en weergang en blijkt het, dat wanneer men uit de verplaatsing van het lichtbeeld op de gewone wijze de snelheid van het licht afleidt niet de snelheid  $V$  ver-

kregen wordt, maar eene andere, die volkomen of nage-  
noeg aan  $U$  gelijk is.

Deze beschouwingwijze schijnt mij niet geheel bevredigend, want, terwijl  $V$  de voortplantingssnelheid is van een stelsel platte golven met evenwijdige golffronten, wordt thans  $V$  opgevat als de voortplantingssnelheid van individueele golven. Eerst wanneer de juistheid van deze opvatting nader bewezen wordt, en wanneer men nader het mechanisme heeft onderzocht van eene lichtbeweging met niet evenwijdige golffronten, zal elke twijfel kunnen worden opgeheven.

Intusschen is er eene overweging, die er onmiddellijk voor schijnt te pleiten, dat men met behulp van een draaienden spiegel niet de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$ , maar de snelheid  $U$  bepaalt. Immers bij elke omwenteling van den spiegel is slechts gedurende zeer korten tijd de teruggekaatste lichtbundel op den vasten spiegel gericht. Deze laatste wordt dus niet door eene eindelooze opeenvolging van platte golven getroffen, maar door eene begrensde groep van golven; het laat zich derhalve onmiddellijk verwachten, dat het van de voortplantingssnelheid dezer groep zal afhangen, hoe lang het duurt vóór de ronddraaiende spiegel op nieuw door de teruggekaatste lichtbeweging getroffen wordt.

De geheele zaak vereischt echter een nader onderzoek, dat mij tot nog toe niet gelukt is. Ik zal er mij daarom toe bepalen straks te vermelden dat proeven van MICHELSON en GOUY, genomen naar de methode van FOUCAULT met toevoeging van eene met zwavelkoolstof gevulde buis, ten sterkste pleiten voor de meening dat ook deze methode

ons de snelheid  $U$  doet kennen. Neemt men dit aan, dan zijn nl., zooals wij zien zullen, de uitkomsten der proeven in schoone overeenstemming met de waarde, die voor  $U$  verkregen werd.

Wij zullen nu het verschil opsporen, dat er in verschillende middenstoffen tusschen  $U$  en  $V$  kan bestaan.

In de lucht is eenige dispersie en daardoor  $U = \frac{d(KV)}{dK}$  niet gelijk  $V$ . Om dit in te zien laten wij een lichtstraal achtereenvolgens door twee disperseerende middenstoffen gaan. Zij de golflengte van dat licht in het eerste medium  $\lambda$ , en de daarbij behorende snelheid  $U$ ,  $U_1$ . Het licht heeft een trillingsduur  $T$ . Gelden voor het tweede medium de indices 2 dan is:

$$U_1 = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}, \text{ en } U_2 = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}.$$

Deelen we deze vergelijkingen op elkaar en voeren wij de bekende betrekking  $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{n}{\lambda_1}$  in, waarin  $n$  de relatieve brekingsindex is der twee middenstoffen, dan is:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} = \frac{d\left(\frac{n}{\lambda_1}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} = \frac{-\frac{n}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \frac{dn}{d\lambda_1}}{-\frac{1}{\lambda_1^2} d\lambda_1}$$

of:



$$\frac{U_1}{U_2} = n - \lambda_1 \frac{dn}{d\lambda_1} \dots \dots \dots (1)$$

Nemen wij voor het eerste medium het vacuum, dan wordt  $U_1 = V_0$ ; is verder  $\lambda$  de golflengte in het vacuum, dan gaat vergelijking (1) over in:

$$\frac{V_0}{U_2} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \dots \dots \dots (2)$$

Het eerste lid dezer vergelijking drukt de verhouding uit van de snelheid  $V$  in het vacuum tot de snelheid  $U$  in de middenstof. Om nu de verhouding te vinden tusschen de snelheid  $V$  in de middenstof en  $U$  in diezelfde stof, gaan wij aldus te werk.

De relatieve brekingsindex van twee stoffen is de verhouding der sinussen van invalshoek en brekingshoek van een invallenden lichtstraal. Uit elke lichttheorie volgt dat deze verhouding gelijk is aan de verhouding der voortplantingssnelheden van enkelvoudige trillingen in beide stoffen. Derhalve is  $n = \frac{V_1}{V_2}$ . Nemen wij nu voor de eerste der twee stoffen het vacuum, dan is de absolute brekingsindex  $n = \frac{V_0}{V_2}$ . Brengt men dit in verband met (2) dan komt er:

$$\frac{V_2}{U_2} = 1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \dots \dots \dots (3)$$

Daar nu voor alle brekende stoffen  $\frac{dn}{d\lambda}$  negatief is, is

$$\frac{V_2}{U_2} > 1.$$

Hieruit blijkt dat voor iedere brekende zelfstandigheid

de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen groter is dan de snelheid  $U$ . Tevens blijkt hieruit dat, aangezien de snelheid  $U$  in het vacuum gelijk  $V_0$  is, de verhouding  $\frac{V_0}{V_2}$  altijd kleiner moet zijn dan  $\frac{V_0}{U_2}$  of  $\frac{U_0}{U_2}$ . De verhouding  $\frac{U_0}{U_2}$  of  $\frac{V_0}{U_2}$  zullen wij nooit als brekingsindex mogen aanmerken.

Om het verschil tusschen  $U$  en  $V$  te bepalen, moeten we de waarde van  $\frac{dn}{d\lambda}$  kennen. Met Gouy berekenen wij die uit de dispersieformule:

$$n = A\lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^3} + \frac{D}{\lambda^4} + \dots \dots \dots (4)$$

Hierin zijn  $A, B, C, D \dots$  constanten, door de proeven bepaald.

Uit vergelijking (4) kan men door differentiatie komen tot de waarde van  $\lambda \frac{dn}{d\lambda}$ . Substitueert men die in vergelijking (2) dan verkrijgt men:

$$\frac{V_0}{U_2} = -A\lambda^2 + B + \frac{3C}{\lambda^2} + \frac{5D}{\lambda^4}.$$

Maken wij nu gebruik van de waarde der constanten  $A, B, C, D$  door MASCART voor lucht gevonden (Comptes Rendus, Tom. 78), dan kunnen wij  $\frac{V_0}{U_2}$  berekenen. Dit zullen wij doen voor drie kleuren, nl. voor de lijnen  $A, D$  en  $H$  van FRAUENHOFER.

Letten wij nu nog op de betrekking  $nV_2 = V_0$  dan verkrijgen wij ten slotte de volgende getalwaarden:

$$\text{voor } A\text{-licht, } \frac{V_2}{U_2} = 1,00001,$$

$$\text{voor } D\text{-licht, } \frac{V_2}{U_2} = 1,00001,$$

$$\text{en voor } H\text{-licht, } \frac{V_2}{U_2} = 1,00002.$$

Voor lucht is dus het verschil tusschen de snelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  en de snelheid  $U$  ongeveer  $\frac{1}{1000}$  procent.

Uit bovenstaande getallen kunnen wij nog het verschil opmaken, dat er in de lucht kan bestaan tusschen de snelheid  $U$  voor rood licht en die voor blauw licht. Nemen wij voor die kleuren die, welke overeenkomen met de lijnen  $A$  en  $H$  van FRAUENHOFER.

Uit het bovenstaande blijkt dat, voor lucht:

$$V_A = 1,00001 U_A,$$

$$V_H = 1,00002 U_H.$$

Daar nu volgens opgaven van KETTELER (Theoretische Optik, pag. 487):

$$n_A = \frac{V_0}{V_A} = 1,0002928 \text{ en } n_H = \frac{V_0}{V_H} = 1,0003009$$

is, kunnen wij de verhouding  $\frac{U_A}{U_H}$  berekenen. Zij wordt:

$$\frac{U_A}{U_H} = 1,00002.$$

Derhalve is het verschil in voortplantingssnelheid in de lucht van rood en van blauw licht ongeveer  $\frac{2}{1000}$  procent. Dit verschil ligt binnen de grens der waarnemingsfouten.

Bepaalt men derhalve volgens een der methoden van FOUCAULT of FIZEAU de lichtsnelheid in de lucht dan moet deze, en het is hier de snelheid  $U$  die gemeten wordt, voor rood en blauw licht hetzelfde zijn.

YOUNG en FORBES echter (Phil. Transactions, Vol. 173) bepaalden de lichtsnelheid volgens de methode van FIZEAU en vonden dat  $U_{\text{rood}}$  en  $U_{\text{blauw}}$  omstreeks 1,8 % in de lucht verschilden.

Deze uitkomsten zijn echter weerlegd door latere meer nauwkeurige bepalingen. Zelfs de nauwkeurige spectroscopische waarneming van het licht der tijdelijke en veranderlijke sterren (HUGGINS, Phil. Trans. Vol. 173, p. 288) is niet in staat geweest eenige kleurverandering aan te toonen.

YOUNG en FORBES beweren (l. c. pag. 288) dat hunne uitkomst gestaafd wordt door de mededeeling van HIND in WEBB'S „Celestial objects for common telescopes" (Ed. II, 1866, pag. 208) welke aldus luidt: „HIND thinks several „variable stars increase blue, are yellow after maximum, „und flash red in decreasing." Latere onderzoekingen hebben echter aangetoond dat er bij deze waarnemingen niet de minste kleurverandering is op te merken.

Doch ook, zooals wij zeiden, hebben latere nauwkeurige bepalingen de resultaten van YOUNG en FORBES als foutief doen kennen.

Deze zijn de metingen omtrent de voortplantingssnelheid van het licht door NEWCOMB (Astronomical Papers, Washington, Vol. II, pag. 107) en door MICHELSON (Ibidem, Vol. I, pag. 109 en Vol. II, pag. 231).

Eene korte beschrijving van deze proeven moge een

denkbeeld geven van de hooge mate van nauwkeurigheid, waarmede de proefnemers gewerkt hebben.

NEWCOMB volgde in hoofdzaak de methode van FOUCAULT; om echter een beeld te verkrijgen van meerdere lichtsterkte, bezigde hij een afzonderlijken collimator en een afzonderlijken kijker. Opdat de lichtstraal, uit den collimator op den draaienden spiegel vallende, uit dezelfde richting zou komen als waarin hij, na de terugkaatsingen, in den kijker zou vallen, waren kijker en collimator dicht boven elkaar in één vertikaal vlak geplaatst. Deze inrichting zou voor den waarnemer hinderlijk zijn, om welke reden de collimator, dicht bij de lens, knievormig gebogen, en in die knie voorzien was van een spiegel.

De draaiende spiegel bestond in een prisma, met vierkante doorsnede van 37.5 mm.<sup>2</sup>, terwijl de vertikaal staande ribbe 85 mm. lang was. Deze lengte werd met opzet aldus gekozen, opdat èn collimator èn waarnemingskijker er voor stonden.

De beweging van den kijker was om de as van den draaienden spiegel, en onafhankelijk van den collimator. De draaiende spiegel was van gepolijst staal en vernikkeld, aan het boven- en benedeneind voorzien van 12 schoepen, als in een waterrad; de as rustte, in zorgvuldig konisch afgedraaide tappen, op een diamant; de spiegel werd in beweging gebracht door een stroom lucht tegen de schoepen te blazen, welke luchtstroom, door den waarnemer achter den kijker gezeten, door middel van kranen en koorden, kon geregeld worden; hierdoor kon dan de rotatiesnelheid van den spiegel gewijzigd, en, zoo noodig, van richting veranderd worden.

De draaiende spiegel was, hoewel zorgvuldig vlak geslepen, toch nog min of meer convex, en deze convexiteit gaf aanleiding tot eene correctie van  $12 \frac{\text{K. M.}}{\text{Sec.}}$ . Ook was

de vorm van den spiegel niet altoos dezelfde; eens zelfs was het beeld onduidelijk door torsie-trillingen, veroorzaakt door een onregelmatig blazen van lucht tegen de schoepen. Mogelijke invloed van deze torsie werd vermeden door ook waarnemingen te doen, waarbij collimator en waarnemingskijker met elkaar van plaats verwisseld waren.

Het licht, dat uit den collimator op den spiegel viel, werd geworpen in twee verschillende richtingen. Deze proeven werden genomen in Washington en er waren op het Naval Observatory en bij het Washington-Monument twee vaste spiegels opgericht, terwijl de draaiende spiegel geplaatst was bij het Fort Myer. De afstanden Fort Myer—Monument en Fort Myer—Observatory, waren door nauwkeurige triangulatie bepaald op 3718.89 en 2550.92 Meters. De kromtestraal van de, 40 centimeter in diameter zijnde, vaste holle spiegels was bij benadering bepaald op ongeveer 300 meters.

Kwam het licht, na de terugkaatsing, weer op den draaienden spiegel, dan kon het door het objectief van den kijker een beeld vormen in het focus, dat op 235 centimeter afstand van het objectief lag. Het oculair was voorzien van drie verticale draden, die op 30" afstand van elkaar stonden. Het oculair-einde van den kijker bewoog zich over een verdeelde schaal, en de stand werd met twee aflezingsmicroscopen afgelezen. De waarde van een schaal-

deel werd zorgvuldig op twee van elkaar onafhankelijke wijzen bepaald. Door de eene vond men 1 verdeling =  $111'',784 \pm 0'',003$ , door de andere 1 verdeling =  $111'',785 \pm 0'',004$ .

De snelheid van den draaienden spiegel werd bepaald door een stel raderen, waardoor een galvanische stroom geopend werd telkens na 28 omwentelingen van den spiegel; dit openen werd geregistreerd op een chronograaf die 10 secunde per omwenteling noodig had en door een assistent werd bestuurd. De tijdsbepaling werd hoogst nauwkeurig uitgevoerd.

De waarneming geschiedde verder aldus: de waarnemer plaatste zich achter den kijker, liet den luchtstroom aanvangen en regelde dien met de genoemde kranen zoodanig, dat het beeld van de spleet stationair op den middelsten kruisdraad bleef. Daarbij werd de omdraaiingssnelheid van den spiegel bepaald, en de stand van den kijker afgelezen. Vervolgens werd de kijker verplaatst voorbij den nulstand over circa 206 schaaldeelen, en de luchtstroom weer toegelaten doch zoo, dat de spiegel in tegengestelde richting draaide als de eerste maal. Daardoor verscheen bij toenemende snelheid het beeld van de spleet van den anderen kant in den kijker dan straks; opnieuw werd de rotatie-snelheid bepaald wanneer het beeld stationair bleef. Uit den afgelegden weg en de twee omwentelings-snelheden kon, met de waarde van den afgelezen boog, de lichtsnelheid berekend worden.

Dit een en ander zij voldoende om te doen zien, dat alle deelen van het onderzoek hoogst nauwkeurig werden uitgevoerd. Voor verdere bijzonderheden moet ik verwijzen naar de fraaie verhandeling zelf.

De uitkomst was: de lichtsnelheid bedraagt in het vacuum

$$299860 \pm 30 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}.$$

Was de waarschijnlijke fout van YOUNG en FORBES 4000 kilometer, hier was zij slechts 30 kilometer. Berekent men uit deze waarde met die van den aardstraal 6378,2 K.M. (CLARK) en de aberratie-constante  $20'',492$  (NYRÉN, Pulkowa) de grootte der zonsparallaxe, dan krijgt men  $8'',794$ .

Bij deze proeven is ook gebleken dat er in de lucht geen verschil valt waar te nemen tusschen de snelheid van rood en van blauw licht. Had dit verschil 0,001 bedragen, dan zou men aan het beeld van de spleet gekleurde randen van  $15''$  hebben moeten zien; intusschen was geen spoor daarvan te bemerken.

Hiermede kunnen wij voor goed de foutieve uitkomsten van YOUNG en FORBES laten rusten.

MICHELSON nam zijne proeven onafhankelijk van NEW-COMB, zoowel wat de methode als wat de plaats van waarneming aangaat. Hij bezigde ook de methode van FOUCAULT. Het aantal omwentelingen van den spiegel bedroeg 257 in de secunde. De afstand van den draaienden en den vasten spiegel was 2000 voet. De afwijking van het beeld was 133 millimeter, welke hij met behulp van een micrometer-inrichting kon meten. Deze afwijking, welke tot op 3 à 4 honderdste millimeter nauwkeurig werd afgelezen, was 200maal grooter dan die bij FOUCAULT's bepalingen.

De spiegel werd door een luchtstroom tegen schoepen rond gedraaid. Het aantal omwentelingen werd aldus gemeten: een electromagnetische stemvork had aan het eene been een staalspiegeltje; deze stemvork volbracht 128 trillin-



gen per secunde. Zij was zoo geplaatst, dat het licht komende van den draaienden spiegel door dat spiegeltje teruggekaatst werd en daarna door een stukje glas met evenwijdig geslepen zijvlakken, vóór het oculair geplaatst, in het oog geworpen. Zijn vork en spiegel beiden in rust dan wordt er één beeld van de verlichte spleet gezien. Trilt de stemvork, dan wordt dat beeld een breede lichtband; begint de spiegel rond te draaien, dan wordt de lichtband opgelost in een aantal beelden, welke weer tot één samenvallen, wanneer de spiegel een even groot aantal malen draait als het trillingsgetal van de stemvork bedraagt. Bedraagt het getal omwentelingen van den spiegel een veelvoud van dat trillingsgetal, dan ziet men ook weer slechts één beeld. Aldus is de ronddraaiingssnelheid zeer nauwkeurig te meten.

De uitkomst was, voor de snelheid van het licht in het vacuüm :

$$299853 \pm 51 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}$$

MICHELSON vond ook dat de snelheden van wit en rood licht, in de lucht, dezelfde waren; want bedekte hij de spleet van den collimator voor de helft met rood glas, dan viel steeds, in het beeld van de spleet, het roode gedeelte juist in het verlengde van het witte.

Een belangrijk deel van zijn onderzoek wijdde hij aan de vraag, of er voor eene brekende stof, zooals water of zwavelkoolstof, verschil bestond tusschen de snelheden  $U$  van verschillend gekleurd licht. Het zijn deze uitkomsten welke ons het een en ander leeren omtrent de grootheden  $V$  en  $U$ . Want terwijl in de lucht de grootheid  $U$

tennaastenbij gelijk aan  $V$ , voor sterker brekende stoffen geldt dit niet meer. Berekent men de verhouding van  $V$  en  $U$  in dezelfde middenstof, op dezelfde wijze, als wij hierboven voor lucht gedaan hebben, dan krijgt men de volgende getallen voor  $\frac{V}{U}$ :

	in	water en zwavelkoolstof.	
voor $A$ licht		1,0090	1,033
„ $D$ licht		1,0134	1,062
„ $H$ licht		1,0263	1,191 (Gouy l. c. p. 356).

Naarmate de doorzichtige stoffen meer brekend worden, wordt het onderscheid tusschen de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  en de voortplantingssnelheid  $U$  grooter en grooter; bij eene zelfde stof wordt het verschil nog grooter naar gelang wij van het rood naar het violet gaan.

Nu is de brekingsindex van zwavelkoolstof voor gemiddeld geel licht 1,64. Deze brekingsindex is de verhouding der voortplantingssnelheden van enkelvoudige trillingen van het licht in het vacuum en in de zwavelkoolstof, dus:

$$\frac{V_0}{V_{CS_2}} = 1,64. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

MICHELSON bepaalde de verhouding der snelheden  $U$  in de lucht en zwavelkoolstof en vond:

$$\frac{U_{\text{lucht}}}{U_{CS_2}} = 1,758.$$

Daar nu  $U_{\text{lucht}}$  zoo goed als de voortplantingssnelheid  $V$  in de lucht is en  $V$  bijna gelijk aan  $V_0$  is, mogen wij stellen:

$$\frac{V_0}{U_{CS_2}} = 1,758 \dots \dots \dots (6)$$

Deelen wij de vergelijkingen (5) en (6) op elkaar, dan vinden wij:

$$\frac{V_{CS_2}}{U_{CS_2}} = 1,07 \text{ ongeveer.}$$

Voor gemiddeld geel licht is dus de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen  $V$  in zwavelkoolstof ongeveer 7% grooter dan de snelheid  $U$  van het licht in zwavelkoolstof. Vergelijkt men dit met de tabel van hierboven, dan ziet men eene treffende overeenstemming, welke men voorzeker kan aanmerken als een der sterkste bewijzen voor de geldigheid der medegedeelde beschouwingen.

MICHELSON bepaalde nog het verschil in voortplantingssnelheid tusschen oranje-rood en groenachtig-blauw licht in zwavelkoolstof en vond daarvoor:

$$\frac{U_{\text{rood}}}{U_{\text{blauw}}} = 1,014.$$

Berekent men uit de waarden der brekingsindices voor de golflengten  $0,620\mu$  en  $0,490\mu$  van de kleuren welke hij bezigde de verhouding  $\frac{V_{\text{rood}}}{V_{\text{blauw}}}$ , dan verkrijgt men:

$$\frac{V_{\text{rood}}}{V_{\text{blauw}}} = 1,018.$$

Bepaalt men ook de waarde van  $\frac{U_{\text{rood}}}{U_{\text{blauw}}}$  voor diezelfde kleuren, zooals wij op pag. 71 voor lucht gedaan hebben, dan verkrijgt men:

$$\frac{U_{\text{rood}}}{U_{\text{blauw}}} = 1,022.$$

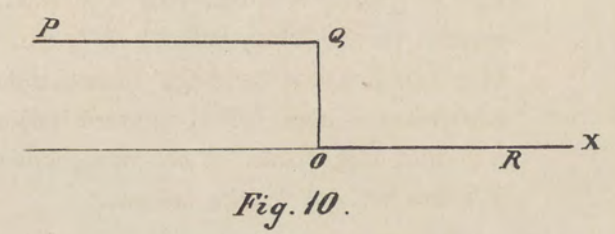
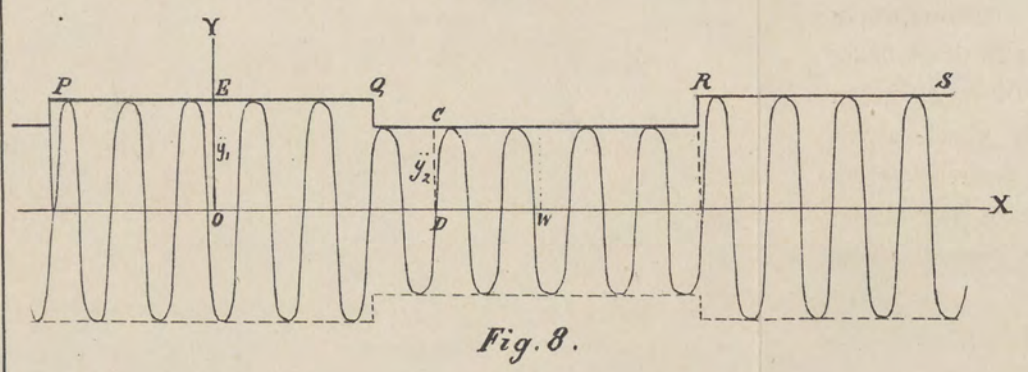
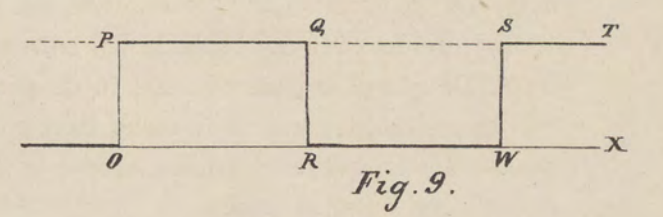
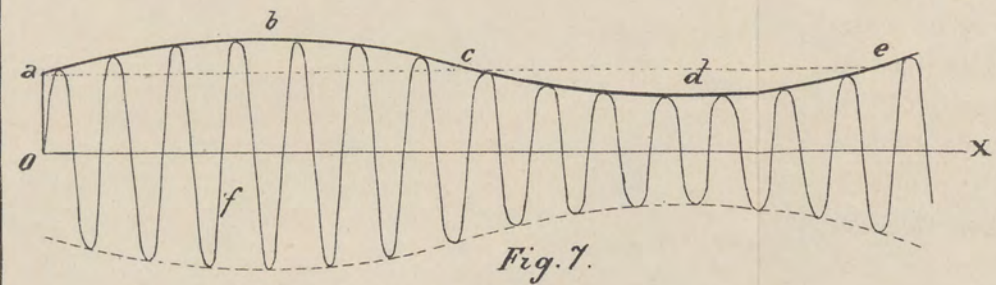
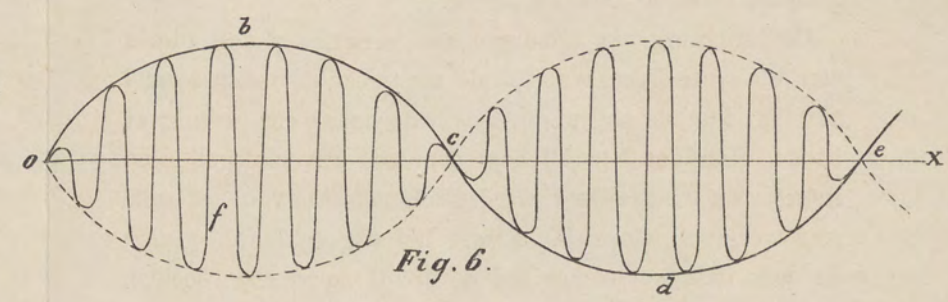
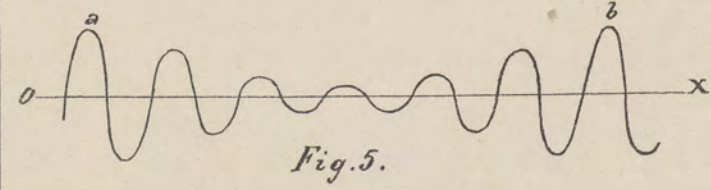
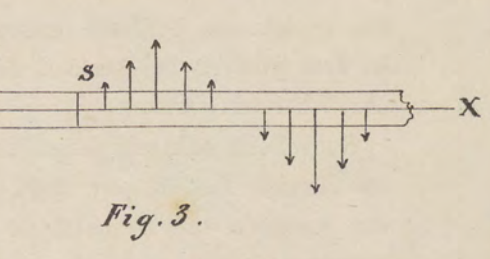
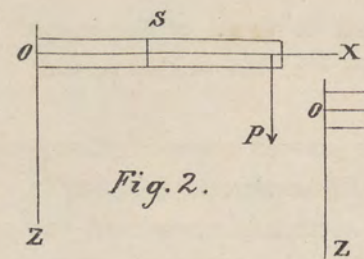
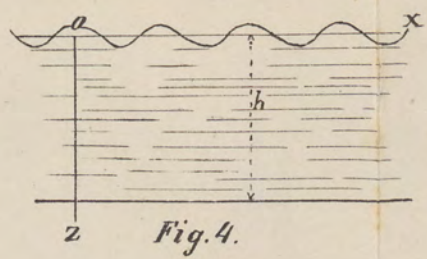
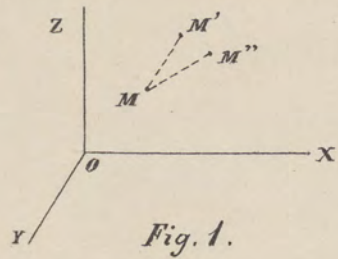
Het verschil tusschen deze twee verhoudingen is te klein

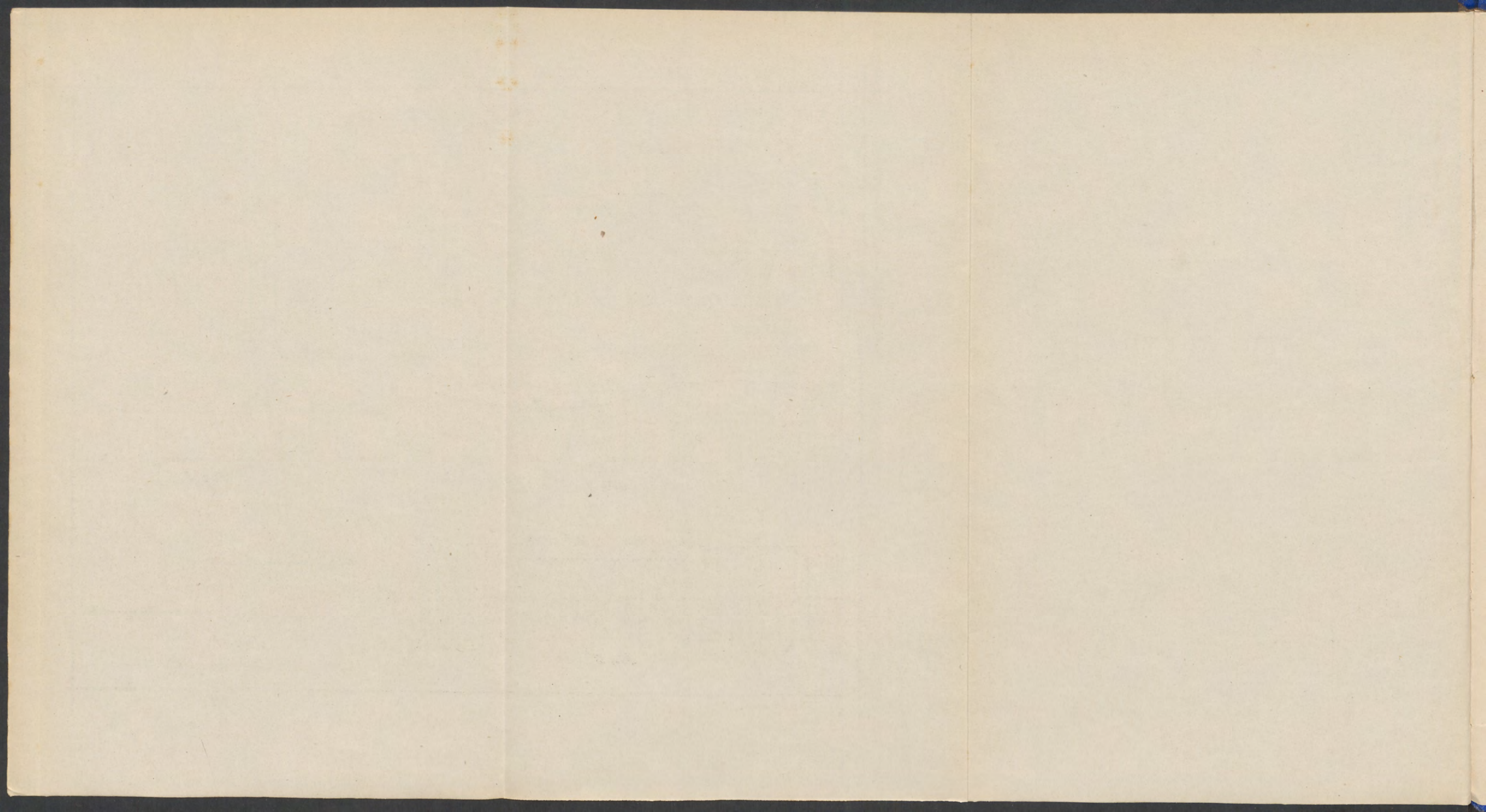
om te kunnen beslissen omtrent de vraag, of MICHELSON in deze proeven het verschil der  $V$ 's, dan wel het verschil der  $U$ 's heeft gemeten.

GOUY heeft ook zelf dergelijke proeven genomen: (Comptes Rendus T. 103, pag. 244). Hij onderzocht met behulp der methode van FOUCAULT de voortplantingssnelheid van gekleurd licht in zwavelkoolstof.

De inrichting van zijne proeven verschilt slechts hierin van die van FOUCAULT, dat de teruggekaatste lichtbundel niet in dezelfde collimator-lens valt, maar een weinig er boven. Hierdoor kon hij hem door een zilverspiegel laten reflecteeren en daardoor werd de lichtsterkte van het beeld zeer vergroot. GOUY hield voor het oog gekleurde glazen en was daardoor zeker dat de afwijking van de beelden behoorden bij de kleur van het glas waardoor hij waarnam. De golf lengten der kleuren van het glas (rood en blauw) werden telkens bepaald; zij bedroegen  $0,64\mu$  en  $0,49\mu$ . De spiegel draaide 800maal in de secunde. De buis met zwavelkoolstof was vier meter lang, en werd op zeer constante temperatuur gehouden, zoodat er geen vloeistofstromingen ontstaan konden.

Verscheidene goed overeenstemmende waarnemingsreeksen toonden aan dat de afwijking voor blauw licht ongeveer  $5''$  grooter was dan voor rood licht. Dit wijst op een verschil in afwijking, hetwelk  $5\%$  van de geheele afwijking van het rood bedraagt. Hoewel zijne theoretische beschouwingen hem  $0,053$  geleverd hebben, is ook hierbij nog niet uitgemaakt of het waargenomen verschil bij de  $V$ 's dan wel bij de  $U$ 's behoort.





STELLINGEN.

STATIONER  
STATIONER

The printer and binder of this book are  
Doubleday, Page, Gorton & Company, Inc.  
New York, N. Y.

ii

This book is published by Doubleday, Page, Gorton & Company, Inc., New York, N. Y., and is sold in the United States and Canada.

iii

The book is published by Doubleday, Page, Gorton & Company, Inc., New York, N. Y., and is sold in the United States and Canada.



## STELLINGEN.

---

### I.

Ten onrechte zegt CORNU (C. R. 91), sprekende over de theorie van GOUY, „ces conclusions sont complétement inexactes.”

### II.

Uit de aberratie van het licht wordt de snelheid van enkelvoudige trillingen bepaald, door de andere methoden leert men de snelheid  $U$  kennen.

### III.

De door Sir W. THOMSON in zijne „Lectures on molecular dynamics” gebezigde vergelijking tusschen den aether en „shoemakers wax” is niet geoorloofd.

## IV.

De verklaring van het verschijnsel van KERR moet niet gezocht worden in de gaslaag op de oppervlakte van den magneet.

## V.

De methode van H. F. WEBER ter bepaling van den warmtegeleidingscoëfficiënt van vloeistoffen is de beste methode.

## VI.

De theorie van LOMMEL is niet in staat de fluorescentie te verklaren.

## VII.

De verklaring der werking van den minimum-thermometer van RUTHERFORD, voorkomende in WÜLLNER's Experimentalphysik, is onwaar.

## VIII.

Ten onrechte beschouwt GLAZEBROOK (Brit. Assoc. Reports, 1885) als een bezwaar tegen de electro-magnetische lichttheorie, dat men zich geen mechanisch model kan denken van den zoogenaamden „displacement-current”.

## IX.

De „Isopyknen” van WROBLEWSKY hebben geene waarde voor de moleculaire theorie.

## X.

Als definitie van Besselsche functie is de genetische te verkiezen boven die van LOMMEL, welke haar als eene bepaalde integraal definieert.

## XI.

De electrostatische capaciteit van eene batterij is geene constante grootheid.

## XII.

De gevolgtrekkingen van FOLIE (Comptes Rendus T. 104), afgeleid uit de dagelijksche nutatie, zijn te betwijfelen.

## XIII.

Die einfacheren Experimente, die man selbstthätig macht, haben für das physikalische Studium mehr Werth, als die verwickelten, die man nur sieht.

(DÜHRING).

## XIV.

Het is wenschelijk dat eenige kennis van het Latijn en Grieksch gevorderd worde van hen, die, na afgelegd eind-examen der Hoogere Burgerschool, in de exacte wetenschappen gaan studeeren.

---

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

XI

XII

XIII

XIV

XV

# I N H O U D.

---

## EERSTE HOOFDSTUK.

	Bladz	
Over trillingen met eene voortplantingssnelheid die niet van de periode afhangt . . . . .		1

---

## TWEDE HOOFDSTUK.

Voortplanting van golfstelsels, waarbij de voortplantingssnelheid van enkelvoudige trillingen van de golflengte afhangt . . . . .	14
--	----

---

## DERDE HOOFDSTUK.

Toepassing op de voortplanting van het licht. . . . .	59
---	----

---

STELLINGEN. . . . .	81
---------------------	----

---

# THE HISTORY

## OF THE

PROGRESS OF THE

## ARTS AND

MANUFACTURES OF GREAT BRITAIN

## FROM THE

EARLIEST PERIODS TO THE PRESENT

BY

