21

A. G. DE BAAS.

OVER HET

MIDDELPUNT VAN MASSA.

21

OVER HET

MIDDELPUNT VAN MASSA.

LEIDEN, BOEKDRUKKERIJ VAN E. J. BRILL.

21

OVER HET
MIDDELPUNT VAN MASSA.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^R. J. M. VAN BEMMELEN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op Vrijdag 24 MEI 1889, des namiddags ten 4 ure,

DOOR

ALEXANDER GERRIT DE BAAS,

GEBOREN TE LEIDEN.

LEIDEN. — E. J. BRILL.
1889.

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJNEN VADER

EN

AAN MIJNE MOEDER.

Het is mij aangenaam openlijk mijn dank te betuigen aan U, Hoogleeraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde; vooral U, Hooggeachte Promotor, Prof. VAN GEER, dank ik voor uw onderwijs en voor de welwillendheid, mij bij de voltooiing van dit proefschrift betoond.

Niet minder geldt deze dank U, Hooggeleerde Heeren BIERENS DE HAAN en LORENTZ voor de blijken van vriendelijke belangstelling, welke ik van U mocht ontvangen.

INLEIDING.

Wij kunnen de lichamen, die ons omringen, zoowel uit een mathematisch als uit een physisch oogpunt beschouwen.

In physischen zin zijn de lichamen stoffelijk, terwijl in de mathesis het begrip stof niet voorkomt.

In de mathesis treedt bij de beschouwing der lichamen een ruimer begrip op den voorgrond, namelijk dat van uitgebreidheid of volume.

Stof noemen wij, hetgeen wij waarnemen.

Door de *massa* van een lichaam verstaan wij de hoeveelheid stof in zijn volume begrepen. Wanneer wij nu het volume van een lichaam verdeelen, dan is het duidelijk, dat wij ook tegelijk de stof verdeelen. Is nu bij deze verdeeling de hoeveelheid stof evenredig aan het volume, dan noemen wij het lichaam gelijkslachtig of *homogeen.*

Is dit niet het geval, dan noemen wij het lichaam ongelijkslachtig of *heterogeen.*

Hebben wij de massa de hoeveelheid stof genoemd, dan hebben wij ook eene eenheid noodig ten einde deze hoeveelheid te meten.

Voor de eenheid van massa nemen wij de hoeveelheid stof begrepen in één cub. decimeter zuiver water van 4° C.

Bij *homogene* lichamen heet de standvastige verhouding $\frac{m}{v} = \delta$ de dichtheid en wij krijgen dan voor de massa: $m = v\,\delta$ of $m = \delta \int d\,v$.

De grenzen der integraal worden bepaald door den vorm van het lichaam.

Anders is het bij de *heterogene* lichamen, hier verandert $\frac{\Delta\, m}{\Delta\, v}$ met v en de plaats.

Bij overgang tot de grens krijgen wij:

$$\text{Gr} \frac{\Delta\, m}{\Delta\, v} = \frac{d\, m}{d\, v} = \delta_1.$$

δ_1 hangt af van de plaats en heeft in elk punt eene bepaalde waarde.

δ_1 is een puntfunctie, welke geheel bepaald en éénwaardig is. Voor de massa krijgen wij nu $m = \int \delta_1\, d\, v$.

De grenzen van deze bepaalde integraal worden evenals die van bovenstaande bepaald.

Bovenstaande integralen dienen ter bepaling van de massa eener ruimteuitgebreidheid. Beschouwen wij evenwel lijnen en vlakken physisch, dus als stoffelijk, dan kan er ook hierbij sprake zijn van massa. Wij vinden dan voor de massa eener stoffelijke lijn $m = \int \delta_1\, d\, s$ en voor de massa van een stoffelijk vlak $m = \int \delta_1\, d\, o$.

Daar de lichamen in mathematischen of physischen zin kunnen opgevat worden, is het van belang het onderscheid te kennen, dat er voor beide gevallen bestaat bij de oneindig kleine deelen. Bij de mathematische grens komen wij tot het mathematisch punt, terwijl wij bij de grens van stoffelijke deelen het stoffelijk punt verkrijgen.

Het stoffelijk punt kan nog eene gedaante hebben, welker afmetingen als differentialen moeten beschouwd worden. Ter vergelijking van stoffelijke punten is het noodig, dat zij van dezelfde afmeting zijn.

Stoffelijke punten hebben nog dichtheid en worden als homogeen beschouwd. Van een zelfde lichaam behoeven de punten niet dezelfde dichtheid te hebben. Is dit echter wel het geval dan heet het lichaam *homogeen* en in elk ander geval *heterogeen*.

Daar de lichamen kunnen beschouwd worden als te zijn opgebouwd uit stoffelijke punten, zijn deze bepalingen omtrent het al of niet homogeen zijn duidelijker dan de eerstgenoemde.

Verstaan wij onder het moment van een massadeeltje met betrekking tot een vlak, het product van de massa en de loodlijn uit dat massa-deeltje op het vlak neergelaten, dan vinden wij voor het middelpunt van massa van een stelsel stoffelijke punten gewoonlijk de volgende bepaling. Het middelpunt van massa van een stelsel stoffelijke punten is dat punt, waarvoor de som der momenten van die stoffelijke punten met betrekking tot elk door hetzelve gebracht vlak verdwijnt en voor elk niet daardoorgaand vlak gelijk is aan zijn moment, wanneer men in dit punt de gansche massa van het stelsel opgehoopt denkt.

In elk stelsel stoffelijke punten vinden wij slechts één bepaald punt, welke aan deze bepaling voldoet en wiens plaats onafhankelijk is van den stand (position) van het stelsel. De plaats van dit punt hangt alleen af van den vorm van het stelsel en de verdeeling der massa. Dit punt is een zuiver mathematisch punt, dat niet binnen de massa behoeft gelegen te zijn, maar er ook buiten kan liggen. Bij een *homogeen* lichaam zal de plaats van dit punt alleen afhangen van den vorm, en dus uit den vorm en meetkundige eigenschappen van het lichaam kunnen gevonden worden.

In vele werken over Mechanica (vooral in de Fransche leerboeken) wordt bovengenoemd punt het zwaartepunt (centre de gravité) genoemd.

Dit leidt in de eerste plaats tot de vraag of het middelpunt van massa en het zwaartepunt een en hetzelfde punt zijn.

De beantwoording dezer vraag zullen wij in het tweede hoofdstuk nader uiteenzetten. Het zal ons dan blijken, dat het zwaartepunt met het middelpunt van massa zal samenvallen, wanneer men omtrent de zwaartekracht eenige bizondere onderstellingen maakt.

Deze onderstellingen omtrent de zwaartekracht worden in bovenbedoelde werken aangenomen, zoodat het zich laat verklaren, waarom het middelpunt van massa steeds zwaartepunt wordt genoemd.

HOOFDSTUK I.

Geschiedkundig overzicht.

De geschiedenis van het middelpunt van massa van een stelsel gelijke stoffelijke punten vangt reeds aan in de laatste helft der derde eeuw voor het begin van onze jaartelling.

Dit punt wordt ten onrechte zwaartepunt genoemd, hetgeen slechts bij benadering nauwkeurig is. Bij ARCHIMEDES (287—212 v. C.), die als grondlegger der Statica moet beschouwd worden, vindt men het eerste denkbeeld omtrent het zwaartepunt. Zijn statica is als het ware er geheel op gebouwd. In zijn werk getiteld »'Επιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων", uit twee boeken en eene tusschenverhandeling bestaande, behandelt hij het evenwicht van vlakke figuren en de bepaling van hare zwaartepunten. Hij zet namelijk een achttal stellingen voorop, hetzij als axioma's, uit zich zelve duidelijk, of als uitkomsten der ervaring verkregen.

Tot deze laatste onderstelling zijn wij volkomen gerechtigd, indien wij rekenschap houden met de omstandigheid, dat de mechanica vóór den tijd van ARCHIMEDES geheel op de ervaring berustte. Dit blijkt duidelijk uit het werk van ARISTOTELES

(384—322 v. C.) getiteld »Quaestiones mechanicae", waarin wij wel eene scherpzinnige redeneering doch geen enkel wiskundig bewijs aantreffen.

De eerste der acht stellingen, waarvan Archimedes uitgaat, luidt aldus: »Even zware grootheden op gelijken afstand werkende zijn in evenwicht".

Hierbij valt op te merken:

1°. dat hier stilzwijgend aangenomen is, dat de beschouwde grootheden gelijksoortig en de gewichten evenredig zijn aan de grootheden, zoodat uit de gelijkheid der gewichten tot die der grootheden zelve kan besloten worden en omgekeerd.

2°. dat er steeds van zware vlakke figuren sprake is.

Van de zeven overige grondstellingen zullen we er nog eene vermelden n.l.:

»De zwaartepunten van ongelijke doch gelijkvormige vlakke figuren zijn gelijkstandig".

Nu bewijst Archimedes eenige wetten waarvan de vierde aldus luidt:

»Wanneer twee even zware grootheden niet hetzelfde zwaartepunt hebben dan ligt het zwaartepunt van eene uit beide samengestelde grootheid in het midden der rechte lijn, die de zwaartepunten der beide grootheden verbindt".

Deze wet, door hem uit het ongerijmde bewezen, kunnen wij beschouwen als eene nadere omschrijving van de eerste grondstelling, wanneer wij er eene verklaring aan toevoegen, ontleend aan Eutocius, den eenigen commentator uit de oudheid van bovengenoemd werk.

Archimedes verstaat volgens Eutocius onder het zwaartepunt van twee grootheden het steunpunt van eene als hefboom gedachte rechte lijn, welke de zwaartepunten der beide grootheden vereenigt, wanneer zij in den horizontalen stand in evenwicht is.

In de volgende wet beschouwt hij drie even zware grootheden wier zwaartepunten zoodanig op eene rechte lijn gelegen zijn, dat de beide uiterste op gelijke afstanden van het middelste zich bevinden. Hij toont nu aan dat het zwaartepunt van eene grootheid uit deze drie bestaande samenvalt met dat der middelste.

Als gevolgen hiervan vermeldt hij:

1°. Wanneer wij een willekeurig *oneven* aantal grootheden hebben, wier zwaartepunten zoodanig op eene rechte lijn gelegen zijn, dat die van even zware grootheden zich op gelijke afstanden van de middelste bevinden, dan zal het zwaartepunt van eene uit deze grootheden samengestelde grootheid met dat der middelste samenvallen.

2°. Wanneer wij een *even* aantal grootheden hebben, wier zwaartepunten zoodanig op eene rechte lijn gelegen zijn, dat die van even zware grootheden zich aan de uiteinden en op gelijke afstanden daarvan geplaatst zijn, dan zal het zwaartepunt van eene uit deze grootheden samengestelde grootheid gelegen zijn in het midden der rechte lijn.

In de zesde wet breidt Archimedes zijne eerste grondstelling veel ruimer en algemeener uit, en zegt:

»Twee niet even zware meetbare grootheden zijn in evenwicht, als hunne afstanden tot het steunpunt omgekeerd evenredig zijn met die grootheden".

Door de grootheden te verdeelen in verschillende even zware deelen en ze op gelijke afstanden van het steunpunt te plaatsen bewijst hij deze stelling.

Vervolgens bewijst hij door middel van de exhaustie-methode dezelfde wet voor onmeetbare grootheden.

Door deze wetten heeft Archimedes als het ware de theorie van den hefboom geleverd, doch daar het ons hier om zwaartepuntbepalingen te doen is, kunnen wij de wijzingen, welke de latere schrijvers zooals Stevin, Galilei, Huygens e. a. ter vereenvoudiging van de bewijzen van Archimedes hebben aangebracht, achterwege laten.

Met deze kennis toegerust, bepaalt Archimedes nu langs synthetischen weg, doch op zeer scherpzinnige wijze, het zwaartepunt van het parallelogram, den driehoek en het trapezium en maakt hiervan gebruik om in zijne verhandeling tusschen het eerste en tweede boek geplaatst, de quadratuur der parabool te bepalen.

Hoewel Cantor [1]) omtrent dit werk zich terecht aldus uit: »Eine Stetigkeit des Inhaltes vom I^em^ Buche zum Zwischenabhandlung, von diese zum II^em^ Buche ist unverkennbar, so unverkennbar, dass es schwer wird zu sagen, welcher einzelne Satz für Archimed mit der Geltung eines mechanischen, welcher mit der eines geometrischen Satzes versehen ist", zal men toch moeten erkennen dat de uitspraak van Fourier in zijne »Mémoires sur la statique" [2]) omtrent Archimedes juist is n.l.: Archimède appliqua la géometrie à la statique et même la statique à la géometrie; il trouva de cette manière la première quadrature d'une aire curviligne. Ses découvertes en mécanique servent de fondement à cette science".

Bepaalde Archimedes slechts het zwaartepunt van vlakke figuren, Pappus (die omstreeks het jaar 390 n. C. te Alexandrië leefde) daarentegen ging verder en leerde het zwaartepunt van lichamen vinden.

1) Cantor, »Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Band I, S. 278.
2) Cahier V du Journal de l'école polytechn., pag. 20.

Zijn werk getiteld »Συναχωγαι Μαθηματικαι" bevat de voornaamste geschriften der meest beroemde wiskundigen der oudheid, waarvan vele door hem nader toegelicht worden. In dit werk vermeldt Pappus eene door hem gevondene methode om den cubieken inhoud van lichamen, ontstaan door de wenteling van vlakke figuren om vaste assen en tevens om de grootte te bepalen van oppervlakken, die door wenteling van lijnen op dezelfde wijze ontstaan zijn [1]).

Deze methode, die wij in de voorrede van het zevende boek van bovengenoemd werk vinden [2]), luidt aldus:

»De door volledige omwenteling ontstane figuren hebben tot elkaar eene verhouding, welke uit de wentelende figuren en uit de door de zwaartepunten der figuren naar de omwentelingsassen op gelijke wijze getrokkene rechte lijnen is samengesteld".

Deze wijze van uitdrukken is onbepaald. Rühlmann [3]) meent dit aan twee oorzaken te moeten toeschrijven, en zegt:

»Theils vielleicht, weil die alten Abschreiber die ursprünglichen Worte nicht genau widergegeben haben, theils vielleicht, weil Pappus damit zwei Lehrsätze zugleich hat aussprechen wollen".

Deze beide oorzaken zijn niet onwaarschijnlijk en wij zullen bovenstaande aldus moeten lezen.

De inhouden (of de oppervlakken) van lichamen, die door omwenteling van figuren met de omwentelingsassen in hetzelfde

---

1) Van deze methode van Pappus wordt voor het eerst in Europa melding gemaakt door Montucla in zijn werk: „Histoire des mathématiques" T. I. p. 329.

2) „Pappi Alexandrini collectiones quae supersunt e libris manuscriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit". Berlini, apud Weidmannos MDCCCLXXVII. Vol. II. p. 683.

3) Dr. M. Rühlmann. Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik und der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1885. Th. I. S. 25.

vlak gelegen, ontstaan zijn, staan tot elkaar in eene verhouding, welke samengesteld is uit de vlakke inhouden (of de omtrekken) der wentelende figuren en de door de zwaartepunten der vlakke figuren (of der omtrekken) tot de omwentelingsassen onder gelijke hoeken getrokkene rechte lijnen.

Verder zegt Pappus:

»Bij de door onvolledige omwenteling ontstane figuren is de verhouding samengesteld uit de wentelende figuren en de lengten der bogen, die door de zwaartepunten dezer figuren bij de wenteling beschreven worden".

»De verhouding dezer bogen bestaat klaarblijkelijk uit de door de assen getrokkene rechte lijnen en de hoeken tusschen hare uiteinden, wanneer deze loodrecht zijn op de assen der door wenteling ontstane lichamen".

Het is zeer waarschijnlijk dat Pappus een bewijs voor deze theorema's gehad heeft, doch in geen der uitgaven van zijn werk is dit te vinden [1]).

Bovengemelde theorema's treden in de zeventiende eeuw weder in de geschiedenis op onder den naam van regel van Guldin.

Pappus geeft in het achtste boek nog eenige stellingen, welke betrekking hebben op het zwaartepunt van vlakke figuren en waarvan enkele reeds door Archimedes bewezen zijn. Wij treffen hieronder eene door Pappus gevondene stelling aan, die wegens haar belangrijkheid niet onvermeld mag blijven, zij is deze: [2])

1) Behalve de reeds genoemde uitgave van Dr. Hultsch, bestaan er van F. Commandinus twee uitgaven verschenen in de jaren 1588 en 1589 en eene van Manolessi in 1660. Men vindt ook nog eenen Griekschen tekst van de voorrede van het zevende boek van Pappus in het werk van E. Halley „de sectione rationis". In de uitgave van Gerhardt „Die Sammlung des Pappus von Alexandrien" (Grieksch-Duitsch). Halle 1871, ontbreken deze theorema's geheel.

2) Pappus, ed. Hultsch. Vol. III. p. 1035.

»Het zwaartepunt van een driehoek is tegelijk zwaartepunt van een anderen driehoek wiens hoekpunten zoodanig op de drie zijden van den eersten liggen, dat daardoor deze zijden in gelijke verhouding verdeeld worden".

Het bewijs dat PAPPUS er van geeft berust geheel op het theorema van PTOLEMAEUS [1]) dat voorloopig als bekend verondersteld en later door hem bewezen wordt.

Deze stelling is door de wiskundigen uit den lateren tijd toegepast op vlakke en schele veelhoeken.

Men treft haar ook aan in dezen vorm:

Indien drie lichamen, welke in de hoekpunten eens driehoeks geplaatst, zich op hetzelfde oogenblik in beweging zetten en de zijden van den driehoek respectievelijk in denzelfden zin met snelheden evenredig aan de lengten der zijden doorloopen, dan zal hun gemeenschappelijk zwaartepunt onbewegelijk blijven.

MONTUCLA, meenende dat het bewijs dezer stelling langs zuiver meetkundigen weg moeilijkheden zou opleveren, bewijst haar door mechanische beschouwingen in de »Récréations mathématiques d'OZANAM".

Kenmerkt de geschiedenis der wiskunde en hare toegepaste wetenschappen zich door eenen stationairen toestand van af de oudheid tot het begin der zestiende eeuw, dan kan het ons niet bevreemden, dat men omtrent de begrippen van het zwaar-

1) Het theorema van PTOLEMAEUS luidt aldus:

»Wanneer de zijden van een driehoek of hare verlengden door eene transversaal gesneden worden, zijn de producten der beurtelingsche segmenten gelijk".

Deze stelling was reeds aan MENELAUS bekend.

tepunt en het gebruik ter bepaling van oppervlakken niet verder gekomen is dan die van ARCHIMEDES, terwijl de theorema's van PAPPUS, zooals reeds vermeld is, eerst later in de wiskunde aangewend worden.

Daar de wiskundigen der zestiende eeuw niet veel oorspronkelijks leverden, maar zich grootendeels onledig hielden met het vertalen der oude Grieksche werken en het daaraan toevoegen van nadere verklaringen, ontstond hierdoor toch eene aanleiding tot nader onderzoek en verdere uitbreiding der wiskundige wetenschappen.

Voordat wij zullen nagaan tot welke uitbreiding van de theorie en toepassing van het zwaartepunt deze werken aanleiding hebben gegeven, mogen wij LEONARDO DA VINCI (1452—1519) niet onvermeld laten.

Deze Italiaansche wiskundige, die als schilder, beeldhouwer en musicus uitblonk, stond niet alleen verre boven zijne tijdgenooten wat de kennis der mechanica betreft, maar kan als een der baanbrekers in deze nieuwe periode der mathematische wetenschappen beschouwd worden. Hij vond het zwaartepunt van de pyramide en is dus de eerste der nieuwere wiskundigen, die zich met het bepalen van het zwaartepunt der lichamen bezig gehouden heeft. Bij de bepaling van het zwaartepunt van een stelsel lichamen, zoekt hij eerst het zwaartepunt van elk lichaam afzonderlijk genomen en daarna vindt hij, door gebruik te maken van het beginsel van den hefboom en ze twee aan twee te verbinden, het middelpunt van evenwijdige krachten, dat tevens het zwaartepunt dezer lichamen is. Zijne geschriften bevatten evenals die zijner latere vakgenooten wiskundige gevolgen van het vraagstuk van ARCHIMEDES, terwijl tevens het vaste begrip der mechanische eigenschap van het zwaartepunt namelijk, dat het gewicht van het geheele lichaam in dit punt vereenigd kan gedacht worden zonder daardoor de mechanische uitwerking te veranderen, als grondslag dient. Hij vindt, dat het zwaartepunt van de pyramide gelegen is op de lijn, die den top met het zwaartepunt van de basis verbindt. De figuur, welke men hierbij aantreft, toont aan, dat DA VINCI de pyramide in vlakken, evenwijdig aan het grondvlak verdeelde, zooals het heden nog gedaan wordt.

Zijne manuscripten zijn zeer lang verborgen gebleven, zoodat het zwaartepunt van de pyramide op nieuw door MAUROLYCUS gevonden moest worden.

Hiermede hield MAUROLYCUS (1494—1575) zich in het jaar 1548 bezig en bepaalde bovendien het zwaartepunt van den kegel en der omwentelings-paraboloïden.

MAUROLYCUS leverde eene vertaling van de werken van ARCHIMEDES, welke eerst ruim honderd jaren na zijn dood in 1685 te Palermo werd uitgegeven. In dit werk zijn de resultaten van de door hem verrichte zwaartepuntbepalingen der bovengemelde lichamen opgenomen (pag. 156—180).

Verder vinden wij hierin eene zoogenaamde statische bepaling van het zwaartepunt van vlakke figuren, die door MAUROLYCUS wordt omschreven en aangewend, om de verhouding te vinden tusschen de oppervlakken van een cirkelquadrant, het segment en den driehoek, waarin dit quadrant door de koorde verdeeld wordt.

Hij drukt zich ongeveer aldus uit:

Wanneer men eene vlakke figuur in een punt ophangt en nadat zij onder de werking der zwaartekracht in rust gekomen is, door dit punt eene verticale lijn trekt, dan zal, als men dit voor een tweede punt herhaalt, het zwaartepunt gelegen zijn in de doorsnede dezer beide lijnen.

Op deze wijze vindt men het zwaartepunt van een cirkelquadrant, van het segment tusschen koorde en boog van 90° en van den driehoek tusschen de stralen en koorde.

Zoo voortredeneerende komt hij tot het besluit, dat de drie zwaartepunten in eene rechte lijn liggen en dat de inhouden van den driehoek en het segment omgekeerd evenredig zijn met de afstanden hunner zwaartepunten tot dat van het quadrant.

De tijdgenoot van MAUROLYCUS namelijk FEDERICUS COMMANDINUS (1509—1575) geneesheer en wiskundige, bekend wegens zijne goede vertalingen der werken van PAPPUS en andere Grieksche schrijvers, hield zich langen tijd bezig met de verbetering van eene latijnsche vertaling der boeken van ARCHIMEDES »de iis quae vehuntur in aqua", hem door paus MARCELLUS II, toen deze nog kardinaal was, geschonken.

Van wien deze vertaling was, is niet bekend, maar zeker is het dat COMMANDINUS, in de meening zijnde dat ARCHIMEDES iets over het zwaartepunt van lichamen geschreven had, omdat deze een wet van het zwaartepunt der omwentelingsparaboloïde aanneemt, zich zeer teleurgesteld zag.

Deze teleurstelling mag wel als de oorzaak aangemerkt worden dat COMMANDINUS het zwaartepunt van lichamen bepaalde en zijn werk [1]) »De centro gravitatis solidorum" schreef. In de voorrede merkt hij op, dat ARCHIMEDES den stand van het zwaartepunt der omwentelingsparaboloïde kende, maar dat de geschriften, welke zijne onderzoekingen bevatten, te loor zijn geraakt. Tevens vermeldt hij, dat zijn tijdgenoot MAUROLYCUS reeds vóór hem het zwaartepunt van lichamen bepaald had.

---

1) Men vindt dit aan het einde van het werk getiteld:
»ARCHIMEDIS de iis quae vehuntur in aqua; libri duo a F. COMMANDINE restituti" Bononae 1565.

Deze mededeeling is uit een geschiedkundig oogpunt van groot belang, daar de uitgave van Commandinus werk die van Maurolycus voorafging en sommige geschiedschrijvers de prioriteit, die aan da Vinci toekomt, aan beide eerstgenoemde wiskundigen betwisten.

Commandinus begint met de bepaling van het zwaartepunt van vlakke figuren, welke in een cirkel en ellips kunnen beschreven worden en geeft dan eenige bepalingen omtrent de assen van prisma's, pyramiden en kegels. Zoo noemt hij bijv. de as van een prisma de rechte lijn, die de zwaartepunten van grond en bovenvlak vereenigt en de as van een pyramide en kegel de lijn, die den top met het zwaartepunt hunner grondvlakken vereenigt. Na eene korte uiteenzetting van hetgeen hij verstaat door het zwaartepunt van een lichaam, gaat hij tot de zwaartepuntbepalingen der lichamen over.

Hetgeen hij door het zwaartepunt van een lichaam verstaat, drukt hij aldus uit: »Centrum gravitatis unius cuiusque solidae figurae, est punctum illud intra positum, circa quod undique partes aequalium momentorum consistunt. Si enim per tale centrum ducatur planum, figuram quomodocunque secans, semper in partes aequeponderantes ipsam dividet". Zijne zwaartepuntbepalingen der lichamen vangen aan met die van het prisma, waarbij hij aantoont, dat het zwaartepunt van eene doorsnede in de as ligt, welke evenwijdig loopt aan de opstaande ribben. Uit de plaats van het zwaartepunt der doorsnede leidt hij vervolgens af, dat het zwaartepunt van het prisma in het midden der as gelegen is. Dit geschiedt met buitengewone wijdloopigheid en eene menigte figuren. Na eerst voor elk lichaam, dat eene as bezit, afzonderlijk te hebben aangetoond, dat het zwaartepunt moet gelegen zijn op die as, gaat hij over tot de zwaartebepaling der pyramiden. Hij beschouwt eerst eene pyramide, die eenen driehoek tot grondvlak heeft en bepaalt daarvan het zwaartepunt op de volgende wijze. Elk der zijvlakken wordt beurtelings tot grondvlak genomen en de assen getrokken; nu bewijst hij, dat deze assen elkaar in een punt snijden, dat krachtens het voorafgaande het zwaartepunt der pyramide is. Vervolgens verdeelt hij de pyramide in vier kleinere, die elk een der zijvlakken tot grondvlak en het zwaartepunt der geheele pyramide tot top hebben en bewijst, dat deze gelijk zijn, zoodat daardoor de pyramide in vier gelijke deelen verdeeld is. De as van elk dezer pyramiden valt samen met eene der assen van de geheele en het is nu gemakkelijk in te zien, dat het zwaartepunt der geheele pyramide op eenen afstand van elken top gelegen is, welke drie vierde van de as bedraagt. Vervolgens beschouwt hij pyramiden, die eenen vierhoek, vijfhoek of willekeurigen veelhoek tot grondvlak hebben. De eerste verdeelt hij in twee pyramiden, die eenen driehoek tot grondvlak hebben door een vlak te brengen door den top en eene diagonaal van het grondvlak; zoekt hare zwaartepunten en krijgt na vereeniging dezer punten door eene rechte lijn, welke de as der geheele pyramide snijdt, het zwaartepunt der pyramide, die eenen vierhoek tot grondvlak heeft. Het zwaartepunt van eene pyramide, die eenen vijfhoek tot grondvlak heeft, bepaalt hij op dezelfde wijze door verdeeling in twee pyramiden, waarvan de eene eenen vierhoek en de andere eenen driehoek tot grondvlak heeft. Zoo gaat hij voort en zoekt eindelijk het zwaartepunt van eene veelhoekige pyramide, om daarna het zwaartepunt van een kegel te bepalen, door eene pyramide te beschouwen, welke, daarin beschreven, zoo juist mogelijk tot den kegel nadert. Op dezelfde wijze bepaalt hij het zwaartepunt van den afgeknotten kegel uit den stand van dat der afgeknotten pyramide. Bij deze zwaartepuntbepalingen gebruikt hij de exhaustie-methode [1]), welke hij in het overige deel van zijn werk voortdurend toepast. Zijne zwaartepuntbepaling van de omwentelingsparaboloïde berust geheel op de aanwending dezer methode. Hij snijdt eene omwentelingsparaboloïde door een vlak loodrecht of schuin op de as. Om en in dit stuk der omwentelingsparaboloïde, dat aldus begrensd wordt, beschrijft hij cilinders en cilinderstukken [2]) van gelijke hoogte, zoodat van de lichamelijke figuur, die door deze om of ingeschrevene ontstaat, het zwaartepunt van dat der omwentelingsparaboloïde eenen kleineren afstand heeft dan eene gegevene lijn. De zwaartepunten der om en ingeschreven figuur naderen het zwaartepunt der omwentelingsparaboloïde des te meer hoe meer cilinders ieder der beide figuren heeft en hoe kleiner de om- en hoe grooter de ingeschrevene figuur wordt, maar nooit komen zij in het paraboloïdezwaartepunt zelf, doch het verschil zal minder bedragen dan eenige grootheid, hoe klein ook genomen.

Volledigheidshalve willen wij nog vermelden, dat Guido Ubaldus, Markies del Monte (1545—1607), in 1588 eene vertaling leverde van Archimedes' werken. Deze vertaling aan Frans

---

1) De exhaustie-methode bestaat hierin, dat men de eigenschappen onderzoekt van rechtlijnige of veelvlakkige figuren, die in kromme lijnen of oppervlakken beschreven of deze omsluiten, steeds tot hen naderende bij de grens daarmede samenvallen. Hoewel de figuren nooit samenvallen, zegt men bij deze methode, een lichaam is de grens van een ander lichaam, als het laatste steeds tot het eerste naderende daarvan minder zal verschillen dan eenige willekeurige grootheid, hoe klein ook genomen. Als voorbeeld hiervan noemen wij het beschouwen van eene kromme lijn als de grens, waartoe de in en omgeschreven regelmatige veelhoeken voortdurend naderen als hun aantal zijden door verdubbeling steeds toeneemt.

Ook de figuren in den vorm van trapjes, die men bij de bepaling van lichamelijke inhouden aantreft, behooren hiertoe.

Deze methode is het eerst door Archimedes en daarna door de voornaamste wiskundigen der oudheid gebruikt.

2) Commandinus verstaat hier onder cilinderstukken deelen van den cilinder, die door ellipsen begrensd worden wanneer het cilindervlak de as van de omwentelingsparaboloïde schuin snijdt.

Marie II, Hertog van Urbino, opgedragen moest strekken om zijn werk »Mechanicorum Liber", dat elf jaren geleden uitgekomen was en waarin Ubaldus eenige stellingen van den Griekschen schrijver als zeer vernuftig vooropzet, meer bijval te doen verkrijgen. In de voorrede, welke uitsluitend over het zwaartepunt handelt, verontschuldigt hij Archimedes, omdat deze slechts over het zwaartepunt van vlakke figuren geschreven heeft. Hoewel Ubaldus zich niet schijnt te hebben afgevraagd op welke wijze Archimedes aan de plaats van het zwaartepunt der omwentelingsparaboloïde gekomen is, blijkt toch, dat deze vertaling met groote zorg bewerkt is; want behalve de verbeteringen in den Griekschen tekst aangebracht, heeft hij elke wet met ophelderingen en toepassingen nader uiteengezet.

Kan men het ontbreken van de zwaartepuntbepalingen van lichamen bij de ouden als aanleiding beschouwen, dat de wiskundigen der zestiende eeuw zich daarmede bezighielden, met niet minder recht kan dit ook van Lucas Valerius (1552—1618) gezegd worden.

Deze Italiaansche wiskundige, volkomen bekend met de werken van Archimedes en Commandinus, beproefde de zwaartepuntbepalingen voor meerdere lichamen dan laatstgenoemde gedaan heeft uit te breiden. In zijn werk, getiteld: »de centro gravitatis solidorum" in 1604 te Rome uitgegeven, slaagt hij daarin volkomen. Hij bepaalde niet alleen de zwaartepunten van lichamen door de wenteling van kegelsneden ontstaan, maar ook van hunne segmenten, verkregen door de snijding van vlakken evenwijdig aan de basis.

Bij deze bepalingen gebruikt hij de exhaustie-methode, waarvan hij de gewichtigste en vruchtbaarste gedeelten tot eenige algemeene leerstellingen terugbrengt. Hierdoor schijnt hij de wiskundigen der zeventiende eeuw op het denkbeeld gebracht te hebben, zich de meetkundige figuren voortestellen, als te bestaan uit oneindig vele en oneindig kleine deelen en de wijdloopige methode van bewijzen der ouden te verkorten.

De Duitsche sterrenkundige KEPLER (1571—1631) voerde het eerst het begrip en het gebruik van het oneindige in de meetkunde in en paste het toe in zijne nieuwe stereometrie [1]) bij de bepaling vau de inhouden van lichamen, ontstaan door de wenteling van eene kegelsnede om eene lijn in haar vlak gelegen. Hij verkreeg op deze wijze een groot aantal tot nogtoe onbekende lichamen, wier inhouden hij trachtte te vinden.

Hiermede was hij niet gelukkig, want hij moest vele der door hem voorgestelde inhoudsbepalingen onopgelost laten. Dit was zeer zeker een machtige drijfveer voor de wiskundigen van dien tijd om zich langs andere wegen de oplossingen te verschaffen.

Het is zeer waarschijnlijk, dat hieraan het ontstaan van de centrobarica methodus [2]) van GULDIN en de methodus indivisibilium van CAVALERIUS moet worden toegeschreven.

De eerstgenoemde methode leert den inhoud van een vlak of van een lichaam, ontstaan door de wenteling van eene lijn of figuur om eene as, vinden door middel van het zwaartepunt der beschrijvende lijn of figuur. Zij is, zooals wij gezien hebben, reeds door PAPPUS uitgesproken, doch door GULDIN (1577—1643) in zijn »Centrobarica" of »de centro gravitatis", uitge-

---

1) Nova stereometria doliorum, etc. Accessit stereometriae Archimediae supplementum, in fol. Lincii 1615.

2) Van κέντρον middelpunt en βάρυς zwaar.

geven in de jaren 1635 tot 1642, wederom bekend gemaakt, bewezen en door eenige toepassingen nader verklaard.

In zijn Centrobarica, welke uit vier deelen bestaat, zet GULDIN in de beide eerste de theorie der zwaartepunten van vlakke figuren en kromme lijnen uiteen en bepaalt tevens de zwaartepunten van cirkelbogen en van cirkelvormige zoowel als van elliptische segmenten. Vele dezer zwaartepuntbepalingen waren reeds bekend gemaakt door den Vlaamschen wiskundige JOANNES DELLA FAILLE (1597—1652) in een geschrift getiteld: »Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis", in 1632 bij J. MEURS te Antwerpen uitgegeven. In dit geschrift tracht hij de quadratuur van den cirkel uit de plaatsen der zwaartepunten zijner deelen afteleiden in navolging van ARCHIMEDES, die dit voor de parabool deed en daarna een meetkundig bewijs daarvan gaf.

DELLA FAILLE geeft een veertigtal theorema's waarvan er een en dertig betrekking hebben op de zwaartepuntbepalingen van sectoren en segmenten des cirkels, terwijl de overigen op de zwaartepuntbepalingen van de deelen der ellips betrekking hebben.

De wijdloopige en vermoeiende bewijzen, welke hij levert, bestaan uit meetkundige constructies, waarbij hij, wat de mogelijkheid daarvan betreft, telkenmale naar de meetkunde der ouden verwijst.

Ten slotte geeft DELLA FAILLE nog een viertal corollaria, waarvan het eerste aldus luidt: Wanneer men de quadratuur van den cirkel heeft, dan heeft men ook het zwaartepunt van elken cirkelsector hetzij deze kleiner of grooter dan de halve cirkel, ja zelfs daaraan gelijk is. Ook kan men dan het zwaartepunt van een segment vinden, als de verhouding van den boog tot de omtrek bekend is. Hetzelfde geldt ook voor elliptische figuren. Het tweede is: Heeft men het zwaartepunt, dan heeft men de quadratuur. Het derde corollarium is onverstaanbaar en luidt als volgt:

»Lunularum quarumvis, à quibuslibet duabus circumferentiae portionibus comprehensarum; similiter spatiorum inter duas lineas parallelas, vel non parallelas interceptorum; Arbelorum quoque et scalprorum, seu securicularum, et quarumvis figurarum, vel ex arcubus circuli, vel arcubus et rectis lineis compositarum, dabuntur centra gravitatis, quae omnes subtensis rectis lineis sub arcubus, in segmenta circulorum, et rectilineas figuras resolventur. Et haec in ellipsi quoque locum habent." En het vierde handelt over lichamen, die door den cirkel bepaald worden.

In de laatste helft van het tweede deel en verder in het overige gedeelte van zijn werk behandelt GULDIN die toepassingen van de theorie van het zwaartepunt in de wiskunde, welke wij reeds boven vermeld hebben. Hij geeft namelijk voor het gebruik van het zwaartepunt in de meetkunde den volgenden regel [1]:

»Quantitas rotanda in viam rotationis (centri gravitatis) ducta, producit potestatem rotundam uno gradu altiorem, potestate sive quantitate rotata".

Deze regel, zegt hij, is algemeen en eenvoudig en kan niet alleen toegepast worden als het zwaartepunt van de grootheid zich beweegt volgens eenen cirkel tengevolge van de wenteling om eene vaste as, maar ook als het zwaartepunt van de beschrijvende grootheid eene rechte lijn beschrijft bij hare beweging evenwijdig aan zich zelve, zooals hij dit in hetzelfde hoofdstuk verklaard heeft [2].

---

1) P. GULDIN, Centrobarica, Lib. II. Cap. VIII, Prop. III. art. 3 pag. 147.
2) idem. Lib. II. Cap. VIII. Prop. I, art. 1, pag. 134.

Hij past dit vervolgens toe op lichamen, ontstaan door de wenteling van lijnen en vlakke figuren om eene vaste as, zoowel wat hunne oppervlakken als inhouden betreft en komt dan tot den volgenden regel:

»Elke figuur, ontstaan door de wenteling van eene lijn of een oppervlak om eene onbeweeglijke as, is gelijk aan het produkt van de beschrijvende grootheid en den weg van haar zwaartepunt".

Deze regel wordt dan ook naar hem de regel van Guldin genoemd, hoewel het toch eenige bevreemding opwekt, dat Guldin in het geheel geen melding maakt van de omstandigheid, dat deze stelling reeds door Pappus uitgesproken was, daar het werk van laatstgenoemde door hem met zorg schijnt bestudeerd te zijn, zooals blijkt uit de vele plaatsen, welke Guldin hieruit herhaaldelijk aanhaalt.

Het bewijs, dat hij voor zijnen regel geeft, bestaat daarin, dat hij ten eerste zijne gevolgtrekking uit bizondere gevallen voor het algemeene afleidt, daar hij namelijk zoodanige gevallen beschouwt, waar de beschrijvende grootheid eene reeds bekende en bewezene verhouding tot de ontstane heeft en de plaats van het zwaartepnnt der laatste ook bekend is.

Vervolgens tracht hij een rechtstreeksch bewijs te leveren dat echter geheel mislukt is. Hij meende, omdat de afstand van het zwaartepunt tot de as van wenteling een gemiddelde was van de afstanden der deelen van de beschrijvende grootheid en omdat dit punt een eenig punt was, dat aan dit punt boven allen anderen punten de in deze wet aangegevene eigenschappen moest toekomen.

Guldin had echter beter gedaan dit bewijs achterwege te laten en zich alleen bij de toepassing van den naar hem genoemden regel te bepalen.

Bonaventura Cavalerius (1598—1647) verwijt in zijn laatste werk: [1]) »Exercitationes Geometricae. Bonon. 1647" aan Guldin de onjuistheid van zijn bewijs [2]), doch geeft tevens een bewijs van zijn regel in de exercitatio tertia van genoemd werk, en wel in het veertiende hoofdstuk. In dit hoofdstuk, dat tot opschrift heeft »Uiteenzetting, hoe Guldin van de indivisibilia, als hij die had willen toepassen, partij had kunnen trekken voor zijn Centrobarica", wenschte hij nog bij het leven van Guldin er op gewezen te willen hebben, dat, indien deze de indivisibilia niet verworpen had, hij daarin juist een uitstekend middel zou gevonden hebben om zijnen regel te bewijzen. Nu hij echter overleden is, zegt Cavalerius, zou ik er niet over gesproken hebben, als hij niet zelf op pag. 349 in een aanhangsel van zijn Centrobarica zeide, dat hij met de indivisibilia een proef genomen had om een bewijs te vinden, waardoor de Usus, Fructus en Gloria van het zwaartepunt meer in het licht trad, doch (hij voegt er bij) dat hij dit te vergeefs beproefd heeft.

Voordat hij nu tot de uiteenzetting der zaak overgaat, merkt hij op, dat deze afkomstig is van zijn oudleerling Joannes Antonius Roccha, die haar, twee jaren voordat het werk van Guldin het licht zag, reeds had medegedeeld en aangetoond dat voormelde regel afhangt van de volgende stelling: »Indien men eene vlakke figuur om eene rechte lijn, die haar snijdt, wentelt, dan zullen de momenten der segmenten van de figuur tot elkaar staan als de ronde lichamen beschreven door de seg-

---

1) De strekking van dit werk is om de methodus indivisibilium, bekend gemaakt in het werk getiteld: Geometria indivisibilibus continuorum nova quodam ratione promota. Bononiae 1635, nader uiteen te zetten.

Cavalerius verdedigt zich hierin tegenover tegenover Guldin, die in 1640 vele bezwaren tegen deze methode geopperd had.

2) Zie Exercit. 1 en 2.

menten zelven, welke om die lijn wentelen". De juistheid dezer stelling blijkt uit hetgeen men vindt in de Opera geometrica van TORRICELLI [1]), doch wordt hier in navolging van ROCCHA door middel van de indivisibilia bewezen en daarna tot het bewijs van den regel van GULDIN overgegaan.

Hoewel dit bewijs door WHEWELL [2]) het eerste bevredigende voor dezen regel genoemd wordt, meenen wij het toch achterwege te moeten laten. De reden hiervan is ten eerste de groote omslachtigheid van dit bewijs en ten tweede het gebruik der bovengemelde methode, welke, wel is waar, gedurende het vijftigtal jaren, dat zij de integraalrekening voorafging, aangewend werd om de oppervlakken, inhouden en zwaartepunten van lichamen te bepalen, doch schier voor elk afzonderlijk vraagstuk eene daartoe geschikte wijziging moest ondergaan.

C.'s methodus indivisibilium bestond daarin, dat hij zich de lichamen voorstelde als te bestaan uit een oneindig aantal deelen (indivisibilia), verkregen door snijding van evenwijdige vlakken en vervolgens de maat der figuren of hare onderlinge verhouding zoekt in de betrekking volgens welke deze indivisibilia aangroeien of afnemen. Hierbij zij nog opgemerkt dat C. zich nergens duidelijk verklaart omtrent zijne indivisibilia, ja zelfs in de voorrede van het zevende boek van zijn »Geometria etc." zich eenigzins angstvallig toont omtrent de onbepaaldheid van het begrip ondeelbare grootheid en dat van het oneindige en dan ook hierin andere bewijzen voor zijne te voren bewezene stellingen geeft zonder van het oneindige gebruik te maken.

Tegelijkertijd dat C. zich hiermede onledig hield, bepaalden zijne Fransche vakgenooten de zwaartepunten van kromme

---

1) Problema I, de Dimensione Parabolica. pag. 77.

2) LITTROW (Whewell), „Geschichte der inductiven Wissenschaften". Bd. II, S. 14.

lijnen en van de lichamen ontstaan door hare wenteling om eene as in haar vlak gelegen. De lijnen, die zij beschouwden waren voornamelijk parabolen van hoogeren graad en sinds 1636 het onderwerp van hun onderzoek uitmaakten, zooals uit de briefwisseling tusschen deze wiskundigen gehouden, blijkt [1]).

Fermat (1590—1663) bepaalde de zwaartepunten dezer lijnen en lichamen door gebruik te maken van eene methode, die als eene verkorting der Archimedische te beschouwen is, doch van berekening vergezeld gaat. Dit trok zoozeer de aandacht van den Père Mersenne, die zich ook hiermede bezig hield, dat hij in eenen brief Fermat's zwaartepuntbepalingen der omwentelingsparaboloïden aan Descartes (1596—1651) toezond.

In de beantwoording van dezen brief gaf Descartes de door hem op andere wijze gevondene zwaartepuntbepalingen der verschillende parabolen [2]).

Ook Roberval (1602—1673) deed deze zwaartepuntbepalingen door gebruik te maken van zijne indivisibilia, bestaande uit rechthoekjes of prisma's, welke volgens eene bepaalde wet afnemen [3]).

Hij wendde vervolgens zijne methode aan bij zijne onderzoekingen van de Cycloïde (Roulette of Trochoïde).

Deze kromme was van 1630 tot 1640 het onderwerp, waarmede de wiskundigen in Frankrijk en Italië zich bezig hielden.

Het ligt niet op onzen weg om de achtereenvolgende ont-

---

1) Fermatii. Opera.

2) Lettres de Descartes, tome 1 et 2.

3) Deze bepalingen vindt men achter eene verhandeling van Roberval over zijne indivisibilia, twintig jaren na diens dood opgenomen in de „Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences", Tome VI. In hetzelfde deel dezer Mémoires vindt men nog eenen brief van Roberval aan Toricelli uit het jaar 1644, waarin hij verzekert reeds lang, voordat de Italiaansche wiskundige Cavalerius zijne methodus indivisibilium bekend maakte, in het bezit van de zijne te zijn geweest.

wikkelingen dier beschouwingen na te gaan en uit te maken aan welke dezer beide natiën de prioriteit toekomt de meest volledige oplossing van het vraagstuk betreffende de cycloïde geleverd te hebben.

De eerste zwaartepuntbepalingen dezer kromme lijn en van hare segmenten, zoowel als van de omwentelingslichamen daar door beschreven, zijn door Pascal (1623—1662) gedaan. Wij vinden deze, benevens andere zwaartepuntbepalingen, zooals die van een lichaam, welke hij l'escalier noemt wegens de overeenkomst met de wenteltrap, in zijn werk getiteld: A. Dettonville, »Traité général de la Roulette" [1]). Vervolgens treffen wij ze aan bij Wren, Huygens, Wallis, Sluze, Lalouère, e. a.

Die van Wallis (1616—1703) vinden wij niet in zijne verhandeling over de cycloïde verschenen in 1659, maar in zijne Mechanica in 1684 te Leiden uitgegeven.

Hij bedient zich daarbij van eene methode, welke hij in zijn vroeger verschenen werk »Arithmetica infinitorum" heeft uiteengezet.

Sluze (1623—1685) bepaalt ook nog de zwaartepunten van spiralen, van de conchoïde en van de lichamen door omwenteling der conchoïde verkregen. Hij maakte deze zwaartepuntbepalingen bekend in de tweede uitgave van zijn »Mesolabum. 1668".

Huygens (1629—1695) geeft in zijne verhandeling »De causa gravitatis 1691", de eerste zwaartepuntbepalingen van de Logarithmica en daardoor ontstane omwentelingsoppervlakken.

Behalve door de zwaartepuntbepalingen van kromme lijnen en omwentelingsoppervlakken, waarvan wij eenige der voornaamsten vermeld hebben, kenmerkt de laatste helft dezer eeuw

---

1) A. Dettonville is het anagram van Louis de Montalte, onder welke benaming hij zijne »lettres provinciales" schreef.

zich door geometrische toepassingen van het zwaartepunt. Zoo heeft de Vlaamsche wiskundige TACQUET, door gebruik te maken van het zwaartepunt van vlakke figuren, het oppervlak en den inhoud van omwentelingslichamen in het algemeen bepaald en daarvan bewijzen gegeven volgens de methoden der ouden, die hoewel eenigszins langwijlig, toch volkomen streng zijn [1]). Men kan deze met recht als nieuwe bewijzen voor de zoogenaamde regels van GULDIN aanmerken, te meer daar hij zijne stellingen in dezelfde bewoordingen als GULDIN uitspreekt. Hij bepaalt in het overige gedeelte van dit boek de oppervlakken en inhouden der lichamen door de wenteling van kegelsneden om assen ontstaan.

LEIBNITZ (1646—1716) gaat nog verder en past de theorie van het zwaartepunt in de mechanica toe en wel in de volgende eigenschap:

»Indien eenige krachten (mouvements), die op een punt »werken, in richting en grootte door rechte lijnen worden »voorgesteld, zal hare resultante (mouvement composé) door »het zwaartepunt der uiterste punten dezer lijnen gaan en gelijk »zijn, wat hare grootte betreft, aan den afstand van het aan»grijpingspunt tot dit zwaartepunt vermenigvuldigd met het »aantal krachten" [2]).

LEIBNITZ spreekt hier niet van krachten, maar van »mouvements" hetgeen in den aard der zaak hetzelfde is, want bewegingen zijn de uitwerkingen der krachten. Hij toont eerst door eene redeneering aan, dat deze krachten (mouvements)

---

1) R. P. ANDREAE TACQUET. Cylindricorum et annularium, Liber V. Pars I et II. Dit vijfde boek vindt men in: A. TACQUET, Opera Mathematica. Antverpiae, apud H. et C. VERDUSSEN. 1707.

2) Journal des Sçavans Sept. 1693.

G. G. LEIBNITII, Opera omnia 1768. Tom. III. pag. 283.

tot eene enkele resultante (mouvement composé) kunnen samengesteld worden, welke in richting en grootte aan bovenstaande stelling voldoet. Vervolgens bewijst hij deze stelling voor het geval, dat alles in een plat vlak gelegen is, door de krachten te ontbinden volgens twee in het aangrijpingspunt loodrecht op elkaar staande rechte lijnen en geeft daarna de wijze aan, waarop men te werk moet gaan als deze krachten (mouvements) worden voorgesteld door willekeurige rechte lijnen in de ruimte.

Zij is ongeveer deze:

Neem het aangrijpingspunt tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel. Zijn nu de coördin. van de uiteinden der lijnen, welke deze krachten voorstellen $x_1, x_2, x_3 \ldots, y_1, y_2, y_3 \ldots, z_1, z_2, z_3 \ldots,$ dan zijn de coördinaten van het zwaartepunt der uiteinden:

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n} \text{ en } Z = \frac{\Sigma z}{n};$$

als n het aantal krachten voorstelt.

Noemen wij R de resultante en a, b, c hare richtingscosinussen, dan is:

$$R.a = \Sigma x = n.X$$
$$R.b = \Sigma y = n.Y$$
$$R.c = \Sigma z = n.Z$$

waaruit:

$$R = n. \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\text{en } a = n.\frac{X}{R}, \quad b = n.\frac{Y}{R}, \quad c = n.\frac{Z}{R}.$$

Twee jaren later geeft Leibnitz nog den volgenden regel als uitbreiding van dien van Guldin, namelijk:

»Wanneer eene willekeurige vlakke kromme lijn A B zoo-
»danig wordt ontwikkeld, dat het eene uiteinde A hierbij eene

»andere kromme A D beschrijft en de lijn A B in de raaklijn »B D in het andere uiteinde B tot de lijn A B is overgegaan, »dan zal de inhoud van de vlakke figuur A B D gelijk zijn aan »het produkt van de lengte der lijn A B en den weg door het »zwaartepunt der lijn bij deze ontwikkeling beschreven" [1]).

Hetzelfde heeft men, wanneer A B de doorsnede voorstelt van een vlak loodrecht op de beschrijvende lijn van een willekeurig recht cylindervlak. Hierbij zal de inhoud van het lichaam beschreven bij eene analoge ontwikkeling van het cylindervlak tot een raakvlak aan hetzelve, gelijk zijn aan het produkt van den vlakken inhoud van het ontwikkelde vlak en den weg door deszelfs zwaartepunt afgelegd.

Leibnitz geeft hiervan geen bewijs maar zet de mogelijkheid der gemelde ontwikkeling uiteen.

Nog eene andere zeer belangrijke stelling als toepassing van de theorie van het zwaartepunt zij hier vermeld.

Het is namelijk die, welke Tschirnhausen (1651—1708) in 1695, zonder er een bewijs aan toe te voegen, bekend maakte en aldus luidt:

»Sit curva F G, quae descripta sit ope quatuor focorum »A, B, C, D, sitque E centrum gravitatis quatuor punctorum »A, B, C, D; Dico si ex quinque his punctis versus duo puncta »F et G pro lubitu assumpta in curva, ducantur rectae, spatia »A F G, B F G, C F G, D F G, quadrupla esse semper spatii »E F G; si autem qninque essent foci, fore quintupla, et sic »porro in infinitum" [2]).

---

1) De novo usu centri gravitatis ad dimensiones, etc.
Acta Eruditorum, Lipsiae, 1695.
Leibnitii, Op. omnia. T. III. p. 334.

2) Nova et singularis geometriae promotio, circa dimensionem quantitatum per D. T.
Acta Eruditorum. Lipsiae 1695.

Het eerste bewijs daarvoor is in de volgende eeuw door VARIGNON gegeven.

De groote vooruitgang, welke door de wiskundigen der zeventiende eeuw vooral door DESCARTES, NEWTON en LEIBNITZ gemaakt was, deed zijnen invloed duidelijk uitkomen in de wijze waarop men in het vervolg de plaats van het zwaartepunt bepaalde.

VARIGNON (1654—1722) gaf in 1714 het eerst voor de samenstelling van evenwijdige krachten de volgende bekende formules:

$$R = \Sigma P, \; x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \; y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} \text{ en } z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P};$$

in eene verhandeling getiteld: »Réflexions sur l'usage que la Mécanique peut avoir en Géométrie" [1]). In deze verhandeling gaat hij uit van de theorie van den hefboom en neemt aan, dat daarop geene andere krachten werken dan die welke onderling evenwijdig op de daaraan bevestigde gewichten aangrijpen. Hij bewijst een tweetal stellingen, die als grondslag zijner verhandeling dienen.

De eerste heeft betrekking op de bepaling der plaats van het zwaartepunt, wanneer de hefboom op verschillende plaatsen met gewichten belast in evenwicht is.

Voor den afstand A van het zwaartepunt der gewichten p tot het steunpunt krijgt hij, als x_1, x_2, ... hunne respectievelijke afstanden tot het steunpunt voorstellen, $A = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p}$. De

---

1) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. 1714.

tweede stelling heeft betrekking op de bepaling der plaats van het zwaartepunt met betrekking tot een vertikaal vlak van eenige willekeurig in de ruimte geplaatste gewichten. De afstand van dit punt tot het vertikaal vlak wordt door dezelfde formule als boven uitgedrukt, waarin dan de x_1, x_2, ... de afstanden der gewichten tot het vlak voorstellen. Ditzelfde, zegt hij, geldt ook, indien het beschouwde vlak niet vertikaal is, maar een willekeurigen stand heeft. Het overige gedeelte dezer verhandeling bestaat uit eene menigte gevolgen, wier inhoud ten doel heeft tot een bewijs voor den regel van GULDIN en de uitbreiding daarvan door LEIBNITZ bekend gemaakt te geraken. De weg, dien hij inslaat, is ongeveer de volgende.

Hij beschouwt eenige ten opzichte van een plat vlak willekeurig in de ruimte geplaatste gewichten en trekt hieruit benevens uit hun gemeenschappelijk zwaartepunt naar het vlak in schuine richting evenwijdige rechte lijnen of evenwijdige gebroken of evenwijdige gelijkvormige kromme lijnen en komt dan tot de volgende stelling:

»Het product van de som der gewichten en de lengte der lijn uit het gemeenschappelijk zwaartepunt naar het vlak getrokken is gelijk aan de algebraïsche som der producten van elk gewicht en de lengte der lijn daaruit naar het vlak getrokken".

Bewegen nu deze gewichten zich volgens bovenbedoelde lijnen naar het vlak toe of er van af, dan zal daarbij hun gemeenschappelijk zwaartepunt eene aan deze lijnen evenwijdige en gelijkvormige lijn beschrijven.

Hierbij geldt voor de afgelegde wegen nog de zooeven genoemde stelling.

Het is nu gemakkelijk in te zien, hoe men tot een bewijs van den regel van GULDIN en zijne uitbreiding kan geraken; ofschoon VARIGNON er eenige bladzijden mede vult. Wij zullen echter nog mededeelen de wijze, waarop hij tot een bewijs voor den regel van TSCHIRNHAUSEN komt.

Op eene lijn A B heeft hij n driehoeken A P_1 B, A P_2 B, A P_3 B enz. geconstrueerd, die A B tot gemeenschappelijke basis hebben. Zij nu G het zwaartepunt der toppen $P_1, P_2, P_3, \ldots$, die zoowel aan dezelfde zijde als aan weerszijden van A B kunnen gelegen zijn; dan zal n maal den driehoek A G B (centrale driehoek) gelijk zijn aan de algebraïsche som der n driehoeken A P B.

Want laat men uit de punten P en G loodlijnen P E en G F op A B neer, dan is:

$$n \,.\, GF = \Sigma\, PE.$$

Dit met $\frac{1}{2}$ A B vermenigvuldigd, geeft:

$$n \,.\, \tfrac{1}{2} GT \,.\, AB = \tfrac{1}{2} \Sigma\, PE \,.\, AB$$

of:

$$n \,.\, \triangle AGB = \Sigma \triangle APB.$$

Dat ditzelfde geldt voor pyramiden met gemeenschappelijk grondvlak behoeft geen nader betoog.

Denkt men zich een willekeurigen boog, waarvan A B de koorde is, dan heet de sector A G B, hetzij deze aan de holle of aan de bolle zijde van den boog gelegen is, centrale sector.

Wij krijgen dus:

Het product van den centralen sector en het aantal van de overige sectoren is gelijk aan de algebraïsche som dier sectoren.

Zijn al de sectoren gelegen aan dezelfde zijde der kromme dan ziet men gemakkelijk in, dat wij slechts de stelling van TSCHIRNHAUSEN hebben.

Hetgeen van de sectoren gezegd is, breidt VARIGNON nog voor figuren in de ruimte uit, doch wij zullen ons hierbij bepalen.

CLAIRAUT (1713—1765) gaf in 1731 de formules voor de bepaling van het zwaartepunt door middel van de integraalrekening in zijne verhandeling: »Nouvelle manière de trouver les formules des centres de gravité". [1]). Hij wijst in het begin der verhandeling er op, dat hij geen nieuwe methode aangeeft om de zwaartepunten te vinden, maar alleen eene andere wijze om de reeds bekende formules afteleiden. Zijn uitgangspunt is de bekende handelwijze om het zwaartepunt van twee lichamen te vinden, nl. door de lijn, die de zwaartepunten daarvan vereenigt, in twee deelen te verdeelen, welke omgekeerd evenredig zijn met de gewichten.

Vervolgens redeneert hij aldus:

»En partant de ce principe, je considère la figure que l'on me propose comme variant d'une différence infinement petite; et prenant le centre de gravité de cette différence ou accroissement de la figure, qui est toujours fort aisé à trouver, je suppose une ligne tirée au centre de gravité cherché de la figure proposée, ensuite, divisant cette ligne dans la raison du petit poids d'accroissement au poids de la figure donnée, c'est-à-dire, dans la raison de la différence de la figure donnée, à la figure même, je forme une équation qui me détermine le centre de gravité des deux figures".

Op deze wijze vindt hij de formules voor de zwaartepunten van eene vlakke kromme lijn en eene vlakteuitgebreidheid in een paar bizondere gevallen en besluit met te zeggen, dat men zich gemakkelijk van deze methode kan bedienen om de zwaartepunten van elke willekeurige lijn, van elke vlakteuitgebreidheid en van elk door een gebogen oppervlak begrensd lichaam te vinden.

Hoewel sedert dien tijd nog in enkele werken, zooals in dat

---

1) Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris. 1731.

van den abt DEIDIER [1]), bij de toepassing van het zwaartepunt gebruik gemaakt wordt van methoden zooals die van WALLIS e. a., treft men nu voortaan in alle volledige werken over de Mechanica in een afzonderlijk gedeelte, handelende over de zwaartepuntbepalingen, de integraalformules daarvoor aan.

Tot zooverre de geschiedenis van het onderwerp; thans gaan wij tot de behandeling over en zullen hierbij de beschouwingen der wiskundigen van den lateren tijd opnemen.

1) L'abbé DEIDIER. „La mesure des surfaces et des solides, par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité". 1740.

HOOFDSTUK II.

Afleiding en bepaling van het middelpunt van massa.

Beschouwen wij eene *heterogene* massa d. i. zulk eene massa, waarvan de stoffelijke punten niet dezelfde dichtheid hebben.

Zij deze massa in een bepaald volume begrepen.

Neem nu een punt A daarbuiten gelegen, wiens rechthoekige coördinaten x_o, y_o, z_o zijn. Vereenig dit punt met de punten P_1, P_2, P_3 enz. van dit stelsel.

Stel, dat de massa's dier stoffelijks punten $d\,m_1$, $d\,m_2$, $d\,m_3$ enz. en hunne rechthoekige coördinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 enz. zijn.

Zet op deze lijnen stukken $AP'_1 = AP_1 . dm_1$, $AP'_2 = AP_2 . dm_2$, $A\,P'_3 = A\,P_3 . d\,m_3$ enz. uit en zoek vervolgens de resultante dezer lijnen. Zijn $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ enz. de richthoeken dezer lijnen, dan hebben wij voor de projecties op de assen:

$$A\,P'_1 . \cos \alpha_1\,,\ A\,P'_1 . \cos \beta_1\,,\ A\,P'_1 \cos . \gamma_1 \text{ enz.}$$

of in het algemeen

$$A\,P'_k . \cos \alpha_k;\ A\,P'_k . \cos \beta_k;\ A\,P'_k . \cos \gamma_k .$$

Stellen wij nu: $A\,P_k = r_k$

dan krijgen wij voor bovengenoemde projecties

$$r_k . \, d\, m_k . \frac{x_k - x_0}{r_k}, \quad r_k . \, d\, m_k . \frac{y_k - y_0}{r_k}, \quad r_k . \, d\, m_k . \frac{z_k - z_0}{r_k}.$$

De projecties der resultante zijn:

op de X-as: $\quad R_x = \Sigma\, (x_k - x_0).dm_k,$

Y-as: $\quad R_y = \Sigma\, (y_k - y_0).dm_k,$

Z-as: $\quad R_z = \Sigma\, (z_k - z_0).dm_k.$

Hieruit zien wij, dat de resultante door het punt A gaat.

Hare vergelijking is, als X, Y en Z de loopende coördinaten voorstellen,

$$\frac{X - x_0}{\Sigma\, (x_k - x_0).dm_k} = \frac{Y - y_0}{\Sigma\, (y_k - y_0).dm_k} = \frac{Z - z_0}{\Sigma\, (z_k - z_0).dm_k}$$

of, daar $\Sigma\, (x_k - x_0).dm_k = \Sigma\, x_k.dm_k - x_0\, m$ is,

$$\frac{X - x_0}{\dfrac{\Sigma\, x_k.dm_k}{m} - x_0} = \frac{Y - y_0}{\dfrac{\Sigma\, y_k.dm_k}{m} - y_0} = \frac{Z - z_0}{\dfrac{\Sigma\, z_k.dm_k}{m} - z_0}.$$

Deze vergelijking drukt uit, dat de resultante door een punt gaat, waarvan de rechthoekige coördinaten zijn:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma\, x_k.dm_k}{m} \\ \eta &= \frac{\Sigma\, y_k.dm_k}{m} \\ \zeta &= \frac{\Sigma\, z_k.dm_k}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.$$

Daar nu hierin x_0, y_0 en z_0 niet voorkomen, ziet men, dat de plaats van dit punt onafhankelijk is van die van het punt A.

De sommaties in de tellers zijn integralen, bepaald door den vorm van het stelsel stoffelijke punten [1]).

1) Waar in dit hoofdstuk van stelsels stoffelijke punten sprake is, bedoelen wij steeds onveranderlijke stelsels, d. w. z. stelsels, waarin de onderlinge afstanden der stoffelijke punten niet kunnen veranderen.

Het punt (ξ, η, ζ) heet het *middelpunt van massa*, en wordt dus alleen bepaald door den vorm en de massa.

In de vergelijkingen (I.) is $m = \Sigma\, d\, m$ altijd bestaanbaar, éénwaardig en doorloopend.

Dit is ook het geval met $\Sigma\, x.dm$ en de beide andere sommaties, zoodat het punt (ξ, η, ζ), daar het dus bestaanbaar, éénwaardig en doorloopend is, ondubbelzinnig is bepaald.

Het middelpunt van massa is een zuiver mathematisch punt, dat voor elk stelsel stoffelijke punten bestaat en ook buiten het stelsel kan gelegen zijn.

Is een der coördinaten ξ, η, ζ gelijk nul, dan ligt het middelpunt van massa in een der coördinatenvlakken.

Zijn twee coördinaten nul, dan ligt het punt in een der coördinatenassen en is dit met alle drie het geval, dan ligt het punt in den oorsprong.

Om nu tot eene definitie voor het middelpunt van massa te geraken, stellen wij in de eerste der vergelijkingen (I.) $\xi = 0$, dan is $\Sigma\, x_k . dm_k = 0$, en schrijven wij haar in dezen vorm $m\, \xi = \Sigma\, x_k . dm_k$.

Dit is de mathematische uitdrukking voor de meest gebruikelijke definitie van het middelpunt van massa, welke aldus luidt:

Het middelpunt van massa van een stelsel stoffelijke punten is dat punt, waarvoor de som der momenten van die stoffelijke punten met betrekking tot elk door hetzelve gebracht vlak verdwijnt, en voor elk niet daardoor gaand vlak gelijk is aan zijn moment, wanneer men in dit punt de geheele massa van het stelsel vereenigd denkt.

Schrijven wij de vergelijkingen (I.) in dezen vorm:

$$\left.\begin{aligned} m\,\xi &= x_1\, d\, m_1 + x_2\, d\, m_2 + x_3\, d\, m_3 + \dots \\ m\,\eta &= y_1\, d\, m_1 + y_2\, d\, m_2 + y_3\, d\, m_3 + \dots \\ m\,\zeta &= z_1\, d\, m_1 + z_2\, d\, m_2 + z_3\, d\, m_3 + \dots \end{aligned}\right\} \quad \dots (a)$$

en merken wij op, dat

$$m = d\,m_1 + d\,m_2 + d\,m_3 + \ldots.$$

is, dan valt dadelijk de distributieve eigenschap in het oog.

Deze eigenschap kunnen wij verder uitbreiden dan voor de onsamenhangende of samenhangende deelen van een stelsel en wel voor meerdere stelsels.

Zijn van verschillende stelsels m_1, m_2, m_3 enz. de massa's en $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$, $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$, $\xi_3\,\eta_3\,\zeta_3$, enz. de coördinaten der respectievelijke middelpunten van massa, dan hebben wij, als

$$\mathrm{M} = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots. \text{ is,}$$

$$\mathrm{M}\,\xi = m_1\,\xi_1 + m_2\,\xi_2 + m_3\,\xi_3 + \ldots.$$

$$\mathrm{M}\,\eta = m_1\,\eta_1 + m_2\,\eta_2 + m_3\,\eta_3 + \ldots.$$

$$\mathrm{M}\,\zeta = m_1\,\zeta_1 + m_2\,\zeta_2 + m_3\,\zeta_3 + \ldots.$$

Hierin zijn de ξ's, η's en ζ's der tweede leden door de vergelijkingen (a) bepaald. Wij kunnen dit aldus uitdrukken:

Het middelpunt van massa van eenige onderling onveranderlijke stelsels stoffelijke punten verkrijgt men, door de massa's van die stelsels in hunne respectieve middelpunten van massa opgehoopt te denken, en daarvan het middelpunt van massa te zoeken.

Bovenstaand doel heeft Lagrange bereikt zonder gebruik te maken van de vlakken ten opzichte waarvan men de momenten der verschillende stelsels bepaalt. Hij past namelijk eene eigenschap van het middelpunt van massa toe, welke hij analytisch bewijst.

Wij zullen later de door Lagrange gebruikte eigenschap langs anderen weg verkrijgen en nader uiteenzetten, maar ons nu bij de handelwijze van Lagrange bepalen.

Zij A gelijk aan: de som der gedurige produkten van de massa's twee aan twee genomen, en het vierkant van hunnen onderlingen afstand, en deze som gedeeld door het vierkant van de som der massa's; en B gelijk aan: de som der produkten van elke massa, en het vierkant van haar afstand tot een willekeurig genomen punt, en deze som gedeeld door de som der massa's.

Nu stelt $\sqrt{B - A}$ den afstand van het middelpunt van massa der stelsels tot het gegeven punt voor.

Daar de grootheid A onafhankelijk is van het gegeven punt en, indien wij de waarden van B bepalen met betrekking tot drie verschillende punten, zoo verkrijgen wij de afstanden van het middelpunt van massa tot die drie punten.

Waren de gegeven stelsels in een plat vlak gelegen, dan zou het voldoende zijn twee gegeven punten te beschouwen, terwijl wij met één gegeven punt kunnen volstaan als de stelsels op eene lijn liggen.

Zijn m_1, m_2, m_3 enz. de massa's der verschillende stelsels en $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, $x_3\, y_3\, z_3$ enz. de rechthoekige coördinaten hunner middelpunten van massa, en stellen wij:

$$m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3 + \text{enz.} = X$$
$$m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + m_3\, y_3 + \text{enz.} = Y$$
$$m_1\, z_1 + m_2\, z_2 + m_3\, z_3 + \text{enz.} = Z.$$

Nemen wij nu nog drie onbepaalde grootheden f, g, h, dan kunnen wij de volgende identieke vergelijkingen opstellen,

$$[X - (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})\, f]^2 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})\, [m_1\, (x_1 - f)^2 + m_2\, (x_2 - f)^2 +$$
$$+ m_3\, (x_3 - f)^2 + \text{enz.}] -$$
$$- m_1\, m_2\, (x_1 - x_2)^2 - m_1\, m_3\, (x_1 - x_3)^2 - m_2\, m_3\, (x_2 - x_3)^2 - \text{enz.}$$

$$[Y - (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})\, g]^2 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})\, [m_1\, (y_1 - g)^2 + m_2\, (y_2 - g)^2 +$$
$$+ m_3\, (y_3 - g) + \text{enz.}] -$$
$$- m_1\, m_2\, (y_1 - y_2)^2 - m_1\, m_3\, (y_1 - y_3)^2 - m_2\, m_3\, (y_2 - y_3)^2 - \text{enz.}$$

en $[Z - (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})\, h]^2 =$

$$= (m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.}) [m_1 (z_1 - h)^2 + m_2 (z_2 - h)^2 + \\ + m_3 (z_3 - h)^2 + \text{enz.}] - \\ - m_1 m_2 (z_1 - z_2)^2 - m_1 m_3 (z_1 - z_3)^2 - m_2 m_3 (z_2 - z_3)^2 + \text{enz.}$$

Nemen wij nu ter vereenvoudiging aan, dat de oorsprong van ons coördinatenstelsel gelegen is in het middelpunt van massa, dan worden $X = 0$, $Y = 0$ en $Z = 0$.

Stellen wij verder ter verkorting

$$f^2 + g^2 + h^2 = R^2$$

$$(x_1 - f)^2 + (y_1 - g)^2 + (z_1 - h)^2 = \rho_1^2$$
$$(x_2 - f)^2 + (y_2 - g)^2 + (z_2 - h)^2 = \rho_2^2$$
$$(x_3 - f)^2 + (y_3 - g)^2 + (z_3 - h)^2 = \rho_3^2$$

enz.

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_{12}^2$$
$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = r_{13}^2$$
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = r_{23}^2$$

enz.

dan wordt de eerste der drie identieke vergelijkingen:

$$f^2 = \frac{m_1 (x_1 - f)^2 + m_2 (x_2 - f)^2 + m_3 (x_3 - f)^2 + \text{enz.}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.}} - \\ - \frac{m_1 m_2 (x_1 - x_2)^2 + m_1 m_3 (x_1 - x_3)^2 + m_2 m_3 (x_2 - x_3)^2 + \text{enz.}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})^2}$$

Op gelijke wijze vinden wij g^2 en h^2; door optelling van deze wordt:

$$R^2 = \frac{m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + \text{enz.}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.}} - \\ - \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + \text{enz.}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \text{enz.})^2}.$$

Deze vergelijking krijgt eerst eenige beteekenis, wanneer de onbepaalde grootheden f, g, h bepaald zijn.

Nemen wij nu f, g, h voor de rechthoekige coördinaten van een gegeven punt, dan stelt R den afstand voor van dit punt tot het middelpunt van massa, hetwelk wij als oorsprong der coördinaten hebben aangenomen; ρ_k is dan de afstand van dit punt tot een punt $x_k\, y_k\, z_k$.

De r's zijn de onderlinge afstanden der middelpunten van massa van de stelsels twee aan twee. Nu is $R^2 = B - A$ of $R = \sqrt{B - A}$.

Wij zien dus, dat langs dezen weg het middelpunt van massa van eenige onderling onveranderlijk gelegene stelsels stoffelijke punten verkregen wordt, als hunne onderlinge afstanden bekend zijn.

Voordat wij zullen nagaan op welke andere wijzen de coördinaten van het middelpunt van massa, voorgesteld door de vergelijkingen (I.), kunnen verkregen worden, merken wij nog op, dat in de door ons gebezigde afleiding de grootte der resultante van de beschouwde lijnen evenredig is aan de massa van het geheele stelsel en den afstand van het punt A tot het middelpunt van massa.

Want voor de componenten dier resultante vonden wij:

$$R_x = \Sigma\,(x_k - x_o)\, d\,m_k = \Sigma\, x_k\, d\,m_k - m\, x_o = m\,(\xi - x_o);$$

$$R_y = \Sigma\,(y_k - y_o)\, d\,m_k = \Sigma\, y_k\, d\,m_k - m\, y_o = m\,(\eta - y_o);$$

$$R_z = \Sigma\,(z_k - z_o)\, d\,m_k = \Sigma\, z_k\, d\,m_k - m\, z_o = m\,(\zeta - z_o);$$

dus:

$$R = m\,.\,\sqrt{(\xi - x_o)^2 + (\eta - y_o)^2 + (\zeta - z_o)^2}.$$

Deze resultante gaat, zooals wij gezien hebben, steeds door het middelpunt van massa onafhankelijk van de plaats van het punt A. Dit is nog het geval wanneer dit punt op oneindigen afstand ligt, doch dan loopen alle lijnen evenwijdig en hunne grootten zijn steeds evenredig aan de massa's der stoffelijke punten.

Eene andere wijze ter verkrijging van de coördinaten van het middelpunt van massa van een stelsel stoffelijke punten bestaat daarin, dat men het aangrijpingspunt der resultante zoekt van de op die punten werkende evenwijdige krachten, wier versnellingen gelijk, en in grootte en richting standvastig zijn. Hoewel dit als een bijzonder geval van de door ons gebezigde afleiding te beschouwen is, zullen wij dit eerst door gebruik te maken van de theorie der momenten en vervolgens algemeener afleiden.

Werken er op de punten van het stelsel, wier massa's dm, dm', dm'' enz. en wier rechth. coördinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' enz. zijn, evenwijdige krachten in denzelfden zin, en stellen wij, dat de rechth. coördinaten van het aangrijpingspunt der resultante x_1, y_1 en z_1 zijn, dan worden deze volgens de theorie der momenten verkregen uit:

$$R_1\, x_1 = R\, x + R'\, x' + R''\, x'' + \text{enz.}$$
$$R_1\, y_1 = R\, y + R'\, y' + R''\, y'' + \text{enz.}$$
$$R_1\, z_1 = R\, z + R'\, z' + R''\, z'' + \text{enz.}$$

en merken wij op, dat $R_1 = \Sigma\, R$ in ons geval nooit nul is, dan zijn:

$$x_1 = \frac{\Sigma\, R\, x}{\Sigma\, R}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma\, R\, y}{\Sigma\, R} \qquad \text{en} \qquad z_1 = \frac{\Sigma\, R\, z}{\Sigma\, R}.$$

Daar nu de versnellingen der krachten standvastig in grootte en richting bijv. $= p$ zijn, zoo is: $R^{(k)} = p\,.\,d\,m^{(k)}$ en wij hebben dus:

$$x_1 = \frac{\Sigma\, x.dm}{m}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma\, y.dm}{m}, \qquad z_1 = \frac{\Sigma\, z.dm}{m}.$$

Deze zijn de rechth. coördinaten van het middelpunt van massa.

Wij zullen dit algemeener afleiden.

Bij de samenstelling van krachten, die op een stoffelijk stelsel werken, krijgen wij de zes vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X = X_1 \\ \Sigma Y = Y_1 \\ \Sigma Z = Z_1\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Componenten} \\ \text{der} \\ \text{Resultante.}\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}\Sigma (y Z - z Y) = L \\ \Sigma (z X - x Z) = M \\ \Sigma (x Y - y X) = N\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Componenten} \\ \text{van het} \\ \text{Koppel.}\end{array}$$

hierin zijn, als α, β, γ de richthoeken der krachten K zijn, $X = K \,.\, \cos\alpha$, $Y = K \,.\, \cos\beta$ en $Z = K \,.\, \cos\gamma$.

Werken er op het stelsel stoffelijke punten evenwijdige krachten R, R', R'' enz. wier standvastige richting bepaald is door de hoeken α, β, γ, dan worden de zes vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha \,.\, \Sigma R = X_1 \\ \cos\beta \,.\, \Sigma R = Y_1 \\ \cos\gamma \,.\, \Sigma R = Z_1\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

en

$$\left.\begin{array}{l}L = \Sigma (y R \,.\, \cos\gamma - z R \,.\, \cos\beta) = \cos\gamma\, \Sigma R y - \cos\beta\, \Sigma R z \\ M = \Sigma (z R \,.\, \cos\alpha - x R \,.\, \cos\gamma) = \cos\alpha\, \Sigma R z - \cos\gamma\, \Sigma R x \\ N = \Sigma (x R \,.\, \cos\beta - y R \,.\, \cos\alpha) = \cos\beta\, \Sigma R x - \cos\alpha\, \Sigma R y\end{array}\right\} \,.\, (2)$$

Uit de vergelijkingen (1) krijgen wij:

$$\Sigma R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = R_1$$

en

$$\cos\alpha = \frac{X_1}{R_1}; \qquad \cos\beta = \frac{Y_1}{R_1} \qquad \text{en} \quad \cos\gamma = \frac{Z_1}{R_1}.$$

De resultante is dus gelijk aan de som der krachten en heeft dezelfde richting als deze.

Door de vergelijkingen (2) respectievelijk te vermenigvuldigen met X_1, Y_1, Z_1 en op te tellen krijgen wij:

$$X_1 L + Y_1 M + Z_1 N = 0$$

dit is de voorwaarde, dat de krachten te herleiden zijn tot éene resultante.

Als de som der krachten nul is, ontstaat alleen een koppel, maar nooit eene kracht en een koppel te zamen.

Voegen wij bij het stelsel (2) de resultante van het koppel

$$R_1 \cos\alpha\, \Sigma(y\,Z - z\,Y) + R_1 \cos\beta\, \Sigma(z\,X - x\,Z) +$$
$$+ R_1 \cos\gamma\, \Sigma(x\,Y - y\,X) = 0$$

in, dan hebben wij:

$$(\cos\gamma\, \Sigma\, R\, y - \cos\beta\, \Sigma\, R\, z) - (R_1\, y_1 \cos\gamma - R_1\, z_1 \cos\beta) = 0$$
$$(\cos\alpha\, \Sigma\, R\, z - \cos\gamma\, \Sigma\, R\, x) - (R_1\, z_1 \cos\alpha - R_1\, x_1 \cos\gamma) = 0$$
$$(\cos\beta\, \Sigma\, R\, x - \cos\alpha\, \Sigma\, R\, y) - (R_1\, x_1 \cos\beta - R_1\, y_1 \cos\alpha) = 0$$

of:

$$\cos\gamma\,(R_1\, y_1 - \Sigma\, R\, y) - \cos\beta\,(R_1\, z_1 - \Sigma\, R\, z) = 0$$
$$\cos\alpha\,(R_1\, z_1 - \Sigma\, R\, z) - \cos\gamma\,(R_1\, x_1 - \Sigma\, R\, x) = 0$$
$$\cos\beta\,(R_1\, x_1 - \Sigma\, R\, x) - \cos\alpha\,(R_1\, y_1 - \Sigma\, R\, y) = 0.$$

Deze vergelijkingen zijn van elkaar afhankelijk, zoodat wij slechts twee vergelijkingen hebben om de coördinaten $x_1\, y_1\, z_1$ te bepalen, en krijgen daarvoor de lineaire meetkundige plaats:

$$\frac{x_1 - \dfrac{\Sigma\, R\, x}{R_1}}{\cos\alpha} = \frac{y_1 - \dfrac{\Sigma\, R\, y}{R_1}}{\cos\beta} = \frac{z_1 - \dfrac{\Sigma\, R\, z}{R_1}}{\cos\gamma}$$

Uit deze vergelijking der resultante blijkt, dat zij dezelfde richting heeft als de krachten en steeds door een punt gaat, waarvan de rechthoekige coördinaten zijn

$$\xi = \frac{\Sigma\, R\, x}{R_1},\quad \eta = \frac{\Sigma\, R\, y}{R_1} \quad \text{en} \quad \zeta = \frac{\Sigma\, R\, z}{R_1}.$$

Hierin komen α, β, γ niet voor, dus is het punt, waardoor de resultante gaat, onafhankelijk van de richting der krachten, doch hangt alleen af van de aangrijpingspunten en de grootte der krachten.

Wanneer nu het geheele stelsel evenwijdige krachten draait, zoo draait de resultante om dit punt. Dit punt heet middelpunt van evenwijdige krachten.

Het punt waardoor de resultante gaat, wordt bepaald door de vergelijkingen:

$$x_1 \, R_1 = \Sigma \, x \, R$$
$$y_1 \, R_1 = \Sigma \, y \, R$$
$$z_1 \, R_1 = \Sigma \, z \, R.$$

Deze zijn dezelfde vergelijkingen als die, welke wij direct uit de theorie der momenten verkregen hebben; want $x_1 \, R_1$ is het moment van de resultante ten opzichte van het Y Z-vlak en $\Sigma \, x \, R$ is de som der momenten van de krachten ten opzichte van ditzelfde vlak, eveneens voor de beide andere vergelijkingen.

Hebben nu de krachten dezelfde versnelling, wat grootte en richting aangaat, dan is $\Sigma \, R$ nooit nul. Voor x_1, y_1 en z_1 krijgen wij in dit geval wederom dezelfde waarden als voor het middelpunt van massa.

Beantwoorden wij nu de vraag of het zwaartepunt van een lichaam tevens zijn middelpunt van massa zijn kan.

Wij weten, dat, zoo de aarde als eene homogene en bolvormige massa beschouwd wordt, alle massadeeltjes van een lichaam, dat zich aan haar oppervlakte bevindt, worden aangetrokken naar haar middelpunt door eene kracht, welke evenredig met de massa en omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand is.

Deze kracht noemt men de zwaartekracht en het aangrijpingspunt der resultante van de krachten, die op alle massadeeltjes van het lichaam werken, heet het zwaartepunt.

De grootte dezer resultante heet het gewicht van het lichaam.

In het begin van dit hoofdstuk zagen wij, dat het middelpunt van massa van een lichaam verkregen werd door elk zijner punten met een buiten dit lichaam gelegen punt te verbinden en op de verbindingslijnen stukken uit te zetten evenredig met de massa en de lengte.

Daar nu krachten door lijnen voorgesteld en op dezelfde wijze als deze samengesteld worden, is het duidelijk, dat bij de zwaartekracht de resultante der op de massadeeltjes van het lichaam werkende krachten nooit door het middelpunt van massa gaan kan. Het zwaartepunt van een lichaam valt dus in werkelijkheid nooit samen met het middelpunt van massa.

Anders is dit, wanneer wij een lichaam beschouwen binnen de aarde geplaatst, want dan worden de massadeeltjes van het lichaam aangetrokken door krachten, die evenredig zijn met hun massa en den afstand tot het middelpunt der aarde.

In dit bizonder geval zal dus het zwaartepunt met het middelpunt van massa samenvallen.

Nemen wij evenwel aan, dat, wegens den geringen afstand van het lichaam tot de aarde, de versnelling standvastig, wegens de geringe afmeting van het lichaam, de werking der aantrekkende krachten op alle deelen van het lichaam dezelfde is, en wegens den grooten afstand tot het middelpunt der aarde, de versnellingen evenwijdig zijn, dan is het zwaartepunt het aangrijpingspunt van de resultante van eveuwijdige krachten, die in denzelfden zin werken en wier versnellingen in grootte en richting gelijk en standvastig zijn. Dit zwaartepunt [1]) valt nu samen met het middelpunt van massa.

Is een lichaam in het zwaartepunt (middelpunt van massa) ondersteund, dan is de invloed der zwaartekracht nul. Hiervan maakte in de oudheid Pappus gebruik om het zwaartepunt van een lichaam te definieeren. Hij zegt: [2])

»Dicimus autem gravitatis centrum cuiusqne corporis esse

---

1) Het is hetzelfde punt als het zwaartepunt in de natuurkunde.

Daar neemt men aan, dat de aarde op een lichaam krachten uitoefent, die in grootte en richting standvastig zijn; dus de zwaartekracht een stelsel evenwijdige krachten oplevert, waarvan het aangrijpingspunt der resultante het zwaartepunt heet.

3) Pappus, ed. Hultsch, Vol. III, p. 1031.

punctum quoddam intus positum, a quo si in corpus suspensum esse fingatur, aequo pondere quiescit, et quam ab initio habuit positionem, eam servat".

Keeren wij nu tot de vergelijkingen (I.) terug en onderzoeken welke verandering zij ondergaan, wanneer wij eene *homogene* massa beschouwen.

Hier is:

$$d\,m_1 = d\,m_2 = d\,m_3 = \text{enz.} = d\,m;$$

en

$$m = \Sigma\, d\,m_k = n.\,d\,m,$$

als n het aantal stoffelijke punten voorstelt. De vergelijkingen worden dan:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma\, x_k}{n} \\ \eta &= \frac{\Sigma\, y_k}{n} \\ \zeta &= \frac{\Sigma\, z_k}{n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)}$$

Het punt (ξ, η, ζ) heeft nu eene geometrische beteekenis gekregen. Men noemt dit punt ook wel »middelpunt der gemiddelde afstanden".

Bij de bepaling van het middelpunt van massa van eenige massa's in de ruimte verspreid en van eene massa over eene lijn, een oppervlak of een lichaam verdeeld, gaan wij uit van de vergelijkingen (I.), welke ons de rechthoekige coördinaten van dit punt leeren kennen.

Bepalen wij eerst het middelpunt van massa van eenige in de ruimte verspreide stoffelijke punten P, P′, P″ enz., wier massa's $d\,m$, $d\,m'$, $d\,m''$ enz. zijn. Daartoe vereenigen wij de punten P en P′ door eene rechte lijn en plaatsen een rechthoekig coördinatenstelsel zoodanig, dat de oorsprong met P en de X-as met de rechte lijn samenvalt, dan ligt P′ op de X-as. Het middelpunt van massa a dezer beide massa's ligt op de X-as en wordt verkregen uit de eerste der vergelijkingen (I.).

$$(d\,m + d\,m') \,.\, \mathrm{P}\,a = d\,m' \,.\, \mathrm{P}\,\mathrm{P}'.$$

of

$$d\,m \,.\, \mathrm{P}\,a = d\,m' \,.\, a\,\mathrm{P}'.$$

Het punt a verdeelt dus de lijn P P′ in omgekeeerde reden van de massa's aan haar uiteinden. Vereenig nu de beide massa's $d\,m$ en $d\,m'$ in het punt a en verbind dit met een derde punt. Herhaal nu dezelfde bewerking, dan zullen wij zoo voortgaande een punt krijgen, onafhankelijk van de volgorde, waarin wij de punten genomen hebben.

Zijn de stoffelijke punten door hunne coördinaten met betrekking tot een rechth. coördinatenstelsel bepaald, dan is het duidelijk, dat hun middelpunt van massa wordt gevonden door de vergelijkingen (I.), zonder dat deze eenige herleiding behoeven te ondergaan. Is de massa over eene lijn verdeeld, die voorgesteld wordt door de vergelijkingen $f_1\,(x, y, z) = 0$ en $f_2\,(x, y, z) = 0$, dan wordt in de vergelijkingen (I.)

$$d\,m = \rho\,d\,s = \rho\,d\,z \sqrt{\left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,z}\right)^2 + 1}$$

en

$$m = \int_{z_0}^{z} \rho\,d\,z \sqrt{\left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,z}\right)^2 + 1},$$

als ρ de dichtheid voorstelt in het beschouwde element $d\,s$. Voor de integratie is het echter noodig, dat wij ρ kennen als eene functie van z.

Zijn nu de coördinaten van het middelpunt van massa x_1, y_1 en z_1, dan hebben wij:

$$m\,x_1 = \int_{z_0}^{z} \rho\, x\, d\, s,\quad m\, y_1 = \int_{z_0}^{z} \rho\, y\, d\, s \text{ en } m\, z_1 = \int_{z_0}^{z} \rho\, z\, d\, s.$$

Is de massa zoodanig over de lijn verdeeld, dat de dichtheid overal dezelfde, dus ρ standvastig is, dan wordt:

$$m = \rho \int_{z_0}^{z} d\, s$$

en $\frac{m}{\rho} = \mathrm{S}$ (de lengte der lijn).

Het middelpunt van massa wordt dan bepaald door:

$$\mathrm{S}\, x_1 = \int_{z_0}^{z} x\, d\, s,\quad \mathrm{S}\, y_1 = \int_{z_0}^{z} y\, d\, s \text{ en } \mathrm{S}\, z_1 = \int_{z_0}^{z} z\, d\, s.$$

Voor het middelpunt van massa (x_1 y_1) van eene vlakke kromme lijn, voorgesteld door de vergelijking $\mathrm{F}(x, y) = 0$, krijgen wij:

$$m\, x_1 = \int_{x_0}^{x} \rho\, x\, d\, s \text{ en } m\, y_1 = \int_{x_0}^{x} \rho\, y\, d\, s,$$

waarin

$$d\, s = d\, x \sqrt{1 + \left(\frac{d\, y}{d\, x}\right)^2}$$

en

$$d\, m = \rho\, d\, x \sqrt{1 + \left(\frac{d\, y}{d\, x}\right)^2} \text{ dus } m = \int_{x_0}^{x} \rho\, d\, x \sqrt{1 + \left(\frac{d\, y}{d\, x}\right)^2}.$$

Is de lijn homogeen, dan hebben wij $\frac{m}{\rho} = \mathrm{S}$ (de lengte der lijn), derhalve:

$$\mathrm{S}\, x_1 = \int_{x_0}^{x} x\, d\, s \text{ en } \mathrm{S}\, y_1 = \int_{x_0}^{x} y\, d\, s.$$

Wij zullen nu het middelpunt van massa bepalen voor het geval, dat de massa verdeeld is over een oppervlak.

Beschouwen wij daartoe een element $d\omega$ van het stoffelijk oppervlak, wiens vergelijking in rechth. coördinaten $z = f(x, y)$ is. De massa van dit element is, als ρ de dichtheid voorstelt, $\rho\, d\omega$, en de momenten hiervan met betrekking tot de coördinatenvlakken zijn:

$$\rho\, x\, d\omega, \qquad \rho\, y\, d\omega, \qquad \rho\, z\, d\omega.$$

Zij nu γ de hoek, dien de normaal tot het oppervlak in het beschouwde element met de Z-as maakt, dan is:

$$d\omega = \frac{dx\, dy}{\cos\gamma};$$

of, daar

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

en

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \text{ dus}$$

$$d\omega = dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Wij krijgen dus voor de bepaling van het middelpunt van massa $(x_1\, y_1\, z_1)$:

$$dm = \rho\, dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$m = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \rho\, dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$m x_1 = \iint \rho\, x\, dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$m y_1 = \iint \rho\, y\, dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$m z_1 = \iint \rho\, z\, dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Voor een homogeen oppervlak is:

$$\frac{m}{\rho} = O \text{ (de vlakte-uitgebreidheid van het oppervlak)}$$

$$dO = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},\quad O = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

dus:

$$O\,x_1 = \iint x\,dO,\quad O\,y_1 = \iint y\,dO \text{ en } O\,z_1 = \iint z\,dO.$$

Is dit homogeen oppervlak een omwentelingsoppervlak, welks as met de Z-as samenvalt, dan is het, daar x_1 en y_1 gelijk nul zijn, voldoende z_1 te bepalen.

Wij vinden dan:

$$O = 2\pi\int_{z_0}^{z} x\,dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2} = 2\pi\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

en

$$O\,z_1 = 2\pi\int_{z_0}^{z} x\,z\,dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2} = 2\pi\int_{z_0}^{z} z\,f(z)\,dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}.$$

Beschouwen wij nu eene massa, welke verdeeld is over een plat vlak. Zij de vergelijking der kromme, die dit stoffelijk vlak begrenst $F(x, y) = 0$, en de rechth. coördinaten van het middelpunt van massa $x_1\,y_1$, dan is: $dm = dx\,dy$ en

$$m = \iint \rho\,dx\,dy,\quad m\,x_1 = \iint \rho\,x\,dx\,dy \text{ en } m\,y_1 = \iint \rho\,y\,dx\,dy;$$

of

$$m = \int_{x_0}^{x} \rho\,dx\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} \rho\,dx\,(y-y_0) = \int_{x_0}^{x} \rho\,[f(x)-f_0(x)]\,dx$$

$$m\,x_1 = \int_{x_0}^{x} \rho\,x[f(x)-f_0(x)]\,dx \text{ en } m\,y_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \rho\left[\overline{f(x)}^2-\overline{f_0(x)}^2\right]dx$$

of

$$m = \int_{y_0}^{y} \rho\,[\Phi(y) - \Phi_0(y)]\,dy,$$

$$m x_1 = \tfrac{1}{2} \int_{y_0}^{y} \rho \left[\overline{\Phi(y)}^2 - \overline{\Phi_0(y)}^2 \right] dy$$

en

$$m y_1 = \int_{y_0}^{y} \rho\, y \, [\Phi(y) - \Phi_0(y)]\, dy.$$

Hierin zijn $y = f(x)$ en $x = \Phi(y)$, dus ook $y_0 = f_0(x)$ en $x_0 = \Phi_0(y)$ uit $F(x, y) = 0$ afgeleid.

Is de beschouwde vlakte-uitgebreidheid homogeen, dan volgt:

$$\frac{m}{\rho} = O \quad \text{en} \quad O x_1 = \int\int x\, d\, O, \; O y_1 = \int\int y\, d\, O.$$

Stellen wij ons nu voor het middelpunt van massa te bepalen van eene figuur op een homogeen boloppervlak, waarvan de straal R is. Zij z_1 de afstand van het te zoeken punt tot het vlak van een grooten cirkel des bols, en $d\,O$ de inhoud van een element dier figuur; dan hebben wij, als O de inhoud der geheele figuur is:

$$\Sigma z . dO = O \,.\, z_1.$$

Voor de projectie van dit element op het vlak van den grooten cirkel hebben wij dan:

$$d\,O' = \frac{z}{R}\, d\,O,$$

waaruit

$$d\,O = \frac{R}{z}\, d\,O' ;$$

dus:

$$\Sigma\, z_1\, d\,O = R\, \Sigma\, d\,O' = R \,.\, O',$$

waarin O' den inhoud van de projectie der geheele figuur op het vlak des grooten cirkels voorstelt, derhalve is:

$$z_1 = R \frac{O'}{O} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A).$$

Zijn nu O'', O''' de inhouden der projecties van de figuur op twee andere vlakken van groote cirkels, y_1 en x_1 de afstanden van het middelpunt van massa der figuur tot die vlakken, dan is:

$$x_1 = \mathrm{R}\,\frac{O'''}{O} \quad \text{en} \quad y_1 = \mathrm{R}\,\frac{O''}{O};$$

dus:

$$\frac{x_1}{O'''} = \frac{y_1}{O''} = \frac{z_1}{O'}.$$

De vergelijking (A), die het eerst door GIULIO, Hoogleeraar te Turin, is afgeleid, is uitnemend geschikt ter bepaling van het middelpunt van massa van spherische driehoeken.

Voordat wij tot de afleiding, welke GIULIO daarvoor gegeven heeft, overgaan, nemen wij als toepassing hiervan het bepalen van het middelpunt van massa van een homogeen bolvormig segment, waarvan h de hoogte en r de straal van het grondvlak is.

Zij R de straal van den bol, dan is:

Oppervlak van het bolv. segment $= 2\,\pi\,\mathrm{R}\,.\,h.$

Inhoud grondvlak $= \pi\,r^2.$

Noemen wij z den afstand van het middelpunt van massa tot een vlak eens grooten cirkels, dat evenwijdig is aan het grondvlak, dan hebben wij:

$$z = \mathrm{R}\,\frac{\pi\,r^2}{2\,\pi\,\mathrm{R}\,.\,h} = \mathrm{R}\,\frac{r^2}{2\,\mathrm{R}\,h} = \mathrm{R}\,\frac{h\,(2\,\mathrm{R} - h)}{2\,\mathrm{R}\,h}$$

$$z = \mathrm{R}\left(1 - \frac{h}{2\,\mathrm{R}}\right) \quad \text{of} \quad \mathrm{R} - z = \frac{h}{2}.$$

Het gevraagde punt ligt dus in de as op de helft der hoogte.

GIULIO [1]) beschouwt een oppervlak met betrekking tot een rechth. coördinaten-stelsel en zoekt het middelpunt van massa

1) Journal de Mathématiques pures et appliquées par J. LIOUVILLE. Tome IV. 1839. p. 386.

van eenig deel van dit oppervlak door zijne hoogte te bepalen boven het X Y-vlak. Zij nu Z deze hoogte, dan is:

$$Z = \frac{\int\int z \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\int\int dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \ldots\ldots \text{(B)}.$$

Hierin is $p = \frac{dz}{dx}$ en $y = \frac{dz}{dy}$, terwijl de integraties uitgestrekt worden over alle punten van het beschouwde deel.

Voor eene figuur op het oppervlak eens bols met eenen straal R worden, als men den oorsprong van het coörd.-stelsel met het middelpunt laat samenvallen, $p = -\frac{x}{z}$ en $q = -\frac{y}{z}$.

Wij krijgen dus:

$$Z = R \frac{\int\int dx\, dy}{\int\int dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \ldots\ldots \text{(C)}.$$

Worden nu de integraties hier tusschen de behoorlijke grenzen genomen, dan stelt de noemer der bovenstaande breuk den inhoud der spherische figuur, en de teller den inhoud harer projectie op het xy-vlak voor. We hebben dus de volgende stelling:

»De hoogte van het middelpunt van massa van eenig deel »van het oppervlak eens bols, boven het vlak van eenen zijner »groote cirkels, is de vierde evenredige tot den inhoud van »dit beschouwde deel, dien van haar projectie op dit vlak en »den straal."

Giulio zegt nu: »L'analogie est évidente entre cette proposition et celle qui détermine la position du centre de gravité d'un arc de cercle ou d'un segment de la surface d'un cylindre droit; ce qui tient à ce que la propriété exprimée par l'équation aux différences partielles $z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = R$ n'est point particulière à la sphère, et appartient tout aussi bien au cylindre et à la classe entière des surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère de rayon égal à R, et dont le centre décrit une courbe plane tracée arbitrairement dans le plan des x et des y". Vervolgens breidt hij de voorgaande stelling aldus uit:

»Sur une surface quelconque, engendrée par le mouvement d'une sphère dont le centre ne quitte point un plan donné, soit tracé un périmètre quelconque fermé, qui embrasse la portion S de surface, et soit A la projection de S sur le plan donné; la hauteur du centre de gravité de S au-dessus de ce plan sera quatrième proportionnelle après S, A, et le rayon de la sphère génératrice."

Van de juistheid dezer stelling geeft hij verder geen nadere uiteenzetting.

Wij zullen dit echter hier doen, en daartoe het oppervlak beschouwen, ontstaan door de beweging van een bol, wiens middelpunt eene vlakke kromme lijn beschrijft, terwijl de straal steeds gelijk R blijft. Nemen wij het vlak der kromme tot xy-vlak, en zij de vergelijking der kromme:

$$y_1 = \Phi(x_1),$$

dan is die van den bol:

$$(x - x_1)^2 + [y - \Phi(x_1)]^2 + z^2 = R^2,$$

waaruit, na differentiatie:

$$x - x_1 + p z = 0 \quad \text{en} \quad y - \Phi(x_1) + q z = 0.$$

Elimineer nu uit de laatste drie vergelijkingen x_1 en $\Phi(x_1)$, dan krijgen wij:

$$z \sqrt{1 + p^2 + q^2} = R.$$

Substitueeren wij dit in de vroeger gevondene vergelijking (B), dan vinden wij voor den afstand van het middelp. van massa tot het xy-vlak voor dat deel van het oppervlak, dat zich daarboven bevindt:

$$Z = R \frac{\iint dx\,dy}{\iint dx\,dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Deze vergelijking is de uitdrukking voor bovengenoemde stelling, indien de integraties worden uitgestrekt over alle punten van eene figuur op het ontstane oppervlak.

De algemeene vergelijking (B) levert nog de volgende stelling.

»Op het oppervlak O, ontstaan door de omwenteling van de »evenwichtskromme eener homogene kettinglijn om de vertikaal, »die door haar laagste punt gaat, trekken wij eene willekeu»rige gesloten kromme lijn, die het deel S van het oppervlak »insluit; projecteeren wij nu deze kromme op een horizontaal »vlak, dat de omwentelingsas snijdt in een punt gelegen be»neden het oppervlak op eenen afstand c van zijn laagste punt, »die gelijk is aan de horizontale spanning der kettinglijn, ge»deeld door het gewicht van de eenheid van lengte der ketting»lijn. Zij nu V het volume begrepen tusschen het oppervlak »S, zijne projectie en het cylindrisch oppervlak gevormd door »de loodlijnen uit den omtrek van S op het projectievlak neer»gelaten; dan is de hoogte van het middelp. van massa van »S boven dit vlak het dubbele van die van het middelp. van »massa van V."

Noemen wij Z de hoogte van het middelp. van massa van S boven het projectievlak en Z_1 die van het middelpunt van massa van V boven ditzelfde vlak.

Het raakvlak aan het oppervlak O in een punt op een afstand z boven het projectievlak gelegen, dat wij tot xy-vlak zullen nemen, maakt daarmede een hoek, wiens cosinus gelijk is aan $\frac{z}{c}$.

Wij hebben dus de vergelijking:

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}.$$

Dit gesubstitueerd in de vergelijking (B) geeft:

$$Z = \frac{\int\int z^2\, dx\, dy}{\int\int z\, dx\, dy}.$$

Verder hebben wij:

$$Z_1 = \frac{\int\int \frac{1}{2} z^2\, dx\, dy}{\int\int z\, dx\, dy}.$$

Daar nu de grenzen der integralen in de waarden van Z en Z_1 dezelfde zijn, zoo is $Z = 2\,Z_1$.

Deze stelling is voor uitbreiding vatbaar, want de partiëele differentiaalvergelijking $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{z}{c}$ behoort bij alle oppervlakken, ontstaan door het oppervlak O als dit zich zoodanig beweegt, dat zijne as steeds vertikaal blijft en een zijner punten eene willekeurig in het horizontaal vlak getrokkene kromme lijn beschrijft.

Zij de vergelijking der kettinglijn, die door wenteling om hare as het oppervlak O beschrijft

$$z = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

en de vergelijking der in een horizontaal vlak gelegene kromme, die door den top van het omwentelingsoppervlak beschreven wordt, terwijl de as steeds vertikaal blijft,

$$y_1 = \Phi(x_1).$$

Verder hebben wij:

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + [y - \Phi(x_1)]^2},$$

dus is de vergelijking van het bewegende oppervlak:

$$z = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{R}{c}} + e^{-\frac{R}{c}}\right)$$

waaruit:

$$p = \frac{x - x_1}{R} \cdot \frac{e^{\frac{R}{c}} - e^{-\frac{R}{c}}}{2} \text{ en } q = \frac{y - \Phi(x_1)}{R} \cdot \frac{e^{\frac{R}{c}} - e^{-\frac{R}{c}}}{2}.$$

Elimineeren wij nu uit de laatste drie vergelijkingen x_1 en

$\varphi(x_1)$, dan krijgen wij voor het aldus ontstane omhullende oppervlak:

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}.$$

Het is nu duidelijk in te zien, dat bovengemelde stelling ook voor dit oppervlak geldt.

Passen wij nu de vergelijking (A) toe bij de bepaling van het middelp. van massa van een bolvormigen driehoek A B C op eenen bol met eenen straal r.

De inhoud van den driehoek is gelijk aan

$$\frac{E}{180^\circ}\,\pi\, r^2$$

als E het spherisch Exces van den driehoek voorstelt.

Voor de projectie van den driehoek op het vlak van de zijde B C vinden wij, als de zijden over de hoeken A, B en C door a, b en c worden voorgesteld,

$$\frac{\pi\, r^2}{360^\circ}\,(a - b\cos C - c\cos B);$$

derhalve krijgen wij voor den afstand van het middelp. van massa tot het vlak van de zijde a:

$$Z_a = \tfrac{1}{2}\, r\,.\,\frac{a - b\cos C - c\cos B}{E}.$$

Evenzoo vinden wij voor de afstanden tot de vlakken der zijden b en c:

$$Z_b = \tfrac{1}{2}\, r\,.\,\frac{b - c\cos A - a\cos C}{E}$$

en

$$Z_c = \tfrac{1}{2}\, r\,.\,\frac{c - a\cos B - b\cos A}{E}.$$

Bepalen wij nu de plaats van het middelp. van massa van den driehoek door middel van zijne afstanden tot de vlakken der groote cirkels, welke loodrecht staan op de stralen naar de hoekpunten van den driehoek getrokken, dan krijgen wij:

$$Z_A = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{a \sin B \sin c}{E}, \quad Z_B = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{b \sin C \sin a}{E}$$

en
$$Z_C = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{c \sin A \sin B}{E};$$

want de projectie van den driehoek op het vlak van den grooten cirkel loodrecht op den straal naar A getrokken, is dezelfde als die van den sector begrepen tusschen de zijde a en de stralen naar hare uiteinden. Het vlak van dezen sector maakt met dat van projectie eenen hoek, wiens cosinus gelijk is aan $\sin B \sin c$.

Bepalen wij ten slotte het middelp. van massa van den driehoek door middel van de rechth. coördinaten x, y en z.

Kiezen wij daartoe het coördinatenstelsel zoodanig, dat het xy-vlak samenvalt met het vlak der zijde c en de x-as met den straal door den top A getrokken.

Wij vinden dan:

$$x = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{a \sin B \sin c}{E}, \quad y = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{b \sin A - a \sin B \,.\, \cos c}{E}$$

en
$$z = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{c - b \cos A - a \cos B}{E}.$$

Is de driehoek rechthoekig in A, dan is $E = E_1 = B + C - 90°$, en bovenstaande formules worden

$$x = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{a \sin B \sin c}{E_1}, \quad y = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{b - a \cos C}{E_1}, \quad z = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{c - a \cos B}{E_1}.$$

Voor het geval dat de driehoek gelijkbeenig is, dus $a = b$, krijgen wij, als het vlak van de zijde c tot xy-vlak, de straal, die de zijde c middendoor deelt, tot x-as genomen wordt,

$$x = r \,.\, \frac{a \sin A \,.\, \sin \tfrac{1}{2} c}{E}, \quad y = 0, \quad z = \tfrac{1}{2} r \,.\, \frac{c - 2 a \cos A}{E}.$$

Zijn daarenboven twee der hoeken recht, dan hebben wij:

$$x = r \, . \frac{90^\circ . \, sin \, \frac{1}{2} c}{C}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{r}{z}.$$

De toepassingen van de vergelijking (A) op bolvormige driehoeken hebben wij aan GIULIO ontleend. Wij hadden ook het middelp. van massa van den bolvormigen driehoek kunnen bepalen door gebruik te maken van een scheefhoekig coördinatenstelsel, indien wij het theorema, dat Dr. SCHELLBACH voor willekeurige spherische figuren gaf, hadden toegepast.

Dit theorema wordt door de volgende vergelijking uitgedrukt:

$$\frac{x'_1}{S_x} = \frac{y'_1}{S_y} = \frac{z'_1}{S_z} = \frac{r}{S}.$$

Hierin is S het oppervlak eener figuur op den bol met eenen straal r; S_x, S_y, S_z de evenwijdige projecties van S op de vlakken Y O Z, Z O X, X O Y van een met den oorsprong in het middelpunt geplaatst scheefhoekig coörd.-stelsel en x'_1, y'_1, z'_1 de scheefh. coördinaten van het middelp. van massa der figuur met betrekking tot een ander scheefh. coördinaten-stelsel, welks coörd.-assen O X′, O Y′, O Z′ loodrecht staan op de coörd. vlakken van eerstgenoemd coörd.-stelsel.

Gaan wij nu tot de afleiding hiervan over.

Zij d S een element der figuur op het oppervlak van den bol, x', y', z' zijne scheefh. coördinaten met betrekking tot het coördinaten-stelsel O X′ Y′ Z′, α de hoek, dien de straal naar dit element getrokken met de normaal O X tot het vlak Y′ O Z′ maakt, en θ de hoek tusschen de lijnen O X en O X′. Voor het middelp. van massa der figuur hebben wij:

$$x'_1 = \frac{\int x' . \, d\,S}{S}.$$

De loodlijn, neergelaten uit d S op het vlak Y′ O Z′, is gelijk aan $r \, cos \, \alpha$, en daar zij met de lijn O X′ een hoek maakt gelijk θ, zoo is zij ook gelijk aan $x' \, cos \, \theta$.

Wij hebben dus:

$$x' = r \frac{\cos \alpha}{\cos \theta},$$

en

$$x'_1 = r \frac{\int \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} d\,S}{S}.$$

Gaan wij nu de beteekenis van den teller na. Projecteeren wij het element $d\,S$ op het vlak Y O Z zoodanig, dat de projecteerende lijnen evenwijdig loopen aan O X. Deze projecteerende lijnen maken een hoek θ met de normaal O X′ tot het projectievlak, en een hoek α met den straal naar het element getrokken.

Wanneer men eene vlakke figuur O op een ander vlak projecteert, en men noemt α den hoek, dien de projecteerende lijnen met de normaal tot het vlak der figuur, en θ den hoek, dien zij met de normaal tot het projectievlak maken, dan is de projectie der vlakke figuur:

$$O \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}.$$

Voor den teller hebben wij dus:

$$\int \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} d\,S = S_x$$

derhalve

$$x'_1 = r_1 \frac{S_x}{S} \text{ en } \frac{x'_1}{S_x} = \frac{r}{S}.$$

Evenzoo krijgen wij:

$$\frac{y'_1}{S_y} = \frac{r}{S} \text{ en } \frac{z'_1}{S_z} = \frac{r}{S}$$

dus:

$$\frac{x'_1}{S_x} = \frac{y'_1}{S_y} = \frac{z'_1}{S_z} = \frac{r}{S}.$$

Passen wij dit toe op een bolvormigen driehoek A B C op eenen bol met een straal r.

Wij laten daartoe de assen O X, O Y en O Z samenvallen met de stralen O A, O B en O C naar de hoekpunten getrokken, dan zijn de scheefhoekige projecties van den driehoek, als a, b, c de zijden zijn,

$$\tfrac{1}{2} a r^3, \ \tfrac{1}{2} b r^3, \ \tfrac{1}{2} c r^3.$$

Stelt nu D den inhoud van $\triangle$ A B C voor, dan hebben wij:

$$x'_1 = \frac{a r^3}{2 D}, \ y'_1 = \frac{b r^3}{2 D}, \ z'_1 = \frac{c r^3}{2 D}.$$

Schellbach heeft dit theorema op geheel andere wijze afgeleid [1]).

Hij neemt de ribben van eenen drievlakkigen hoek, wiens vlakke hoeken a, b, c en wiens standhoeken α, β, γ zijn, tot assen van de scheefhoekige coördinaten x, y en z.

Voor de vergelijking van den bol met eenen straal r krijgt men, als het middelpunt in den oorsprong ligt,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 y z \cos \alpha + 2 x z \cos b + 2 x y \cos c = r^2,$$

en de inhoud D eener figuur op dien bol wordt dan voorgesteld door:

$$D = r \theta \int\int \frac{d x \, d y}{x \cos b + y \cos a + z},$$

waarin:

$$\theta = \sqrt{[1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c]}.$$

Noemen wij nu u, v, w de scheefh. coördinaten van het middelpunt van massa der spherische figuur, dan is:

$$D u = r \theta \int\int \frac{x \, d x \, d y}{x \cos b + y \cos a + z}, \ D v = r \theta \int\int \frac{y \, d x \, d y}{x \cos b + y \cos a + z},$$

$$D w = r \theta \int\int \frac{z \, d x \, d y}{x \cos b + y \cos a + z},$$

1) Journal für der reine und angewandte Mathematik von A. L. Crelle. Bd. XLV. 1853. S. 279,

waaruit

$$D\,(u \cos b + v \cos a + w) = r\,\theta \int\!\!\int d\,x\,d\,y.$$

Daar nu:

$$\sin c \int\!\!\int d\,x\,d\,y = C$$

de scheefhoekige projectie der figuur D op het $x\,y$-vlak voorstelt, zoo wordt:

$$u \cos b + v \cos a + w = \frac{r\,\theta\,C}{D \sin c}.$$

Nemen wij nu een ander coördinatenstelsel, waarvan de assen O X', O Y', O Z' in den oorsprong, loodrecht staan op de vlakken $y\,z$, $z\,x$, $x\,y$ van het eerste coördin.-stelsel, dan is O X' Y' Z' de supplementaire drievlakkige hoek. Vormen nu de ribben hiervan met de assen der x, y en z de hoeken a', b', c' dan is:

$$\theta = \sin a \cos a' = \sin b \cos b' = \sin c \cos c'.$$

Wij hebben dan:

$$u \cos b + v \cos a + w = \frac{r\,C}{D} \cos c'.$$

Stellen wij de scheefhoekige projectiën van D op de $y\,z$ en $x\,z$-vlakken door A en B voor, en zetten:

$$x' = \frac{r\,A}{D},\; y' = \frac{r\,B}{D},\; z' = \frac{r\,C}{D},$$

dan krijgen wij:

$$u \cos b + v \cos a + w = z' \cos c'$$

en evenzoo:

$$u \cos c + v \qquad + w \cos a = y' \cos b'$$
$$u \qquad + v \cos c + w \cos b = x' \cos a'.$$

Deze drie vergelijkingen, welke dienen ter bepaling van de coördinaten u, v, w van het middelp. van massa der figuur D, leeren ons, dat x', y', z' de scheefhoekige coördinaten zijn van bovengenoemd middelp. van massa met betrekking tot de ribben van den supplementairen drievlakkigen hoek als coördinaten-assen; want de transformatie-formules voor den overgang van het eene stelsel op het andere geven ons dezelfde vergelijkingen. Daar nu de assen O X′, O Y′, O Z′ hoeken met elkaar maken, die gelijk zijn aan $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, zoo vindt men door de coördinaten van het middelp. van massa op deze assen te projecteeren:

$$+x' - y' \cos\gamma + z' \cos\beta = u \cos a',$$
$$-x' \cos\gamma + y' - z' \cos\alpha = v \cos b',$$
$$-x' \cos\beta - y' \cos\alpha + z' = w \cos c'.$$

De afstand ρ van het middelpunt van massa tot het middelp. van den bol wordt uitgedrukt door de formule:

$$\rho = \frac{r}{D} \sqrt{[A^2 + B^2 + C^2 - 2\,B\,C \cos\alpha - 2\,C\,A \cos\beta - 2\,A\,B \cos\gamma]}.$$

Wij hebben dus het volgende resultaat verkregen.

Stelt men door O X, O Y, O Z de drie ribben van eenen drievlakkigen hoek voor, wiens top O samenvalt met het middelpunt eens bols met den straal r, waarop eene figuur met den inhoud D geteekend is. Zijn de scheefhoekige projecties der figuur D op de vlakken Y O Z, Z O X, X O Y, A, B en C, en construeert men den supplementairen drievlakkigen hoek, wiens op genoemde vlakken loodrecht staande ribben O X′, O Y′, O Z′ zijn. Zet men nu op deze ribben stukken af bepaald door

$$x' = \frac{A\,r}{D},\ y' = \frac{B\,r}{D},\ z' = \frac{C\,r}{D};$$

dan zijn deze de scheefhoekige coördinaten van het middelpunt van massa van de figuur D, wanneer men de ribben des supplementairen drievlakkigen hoeks als coördin.-assen neemt.

Ter bepaling van het middelpunt x_1 y_1 z_1 eener massa, welke over een willekeurig lichaam verspreid is, beschouwen wij een volume-element $dx\,dy\,dz$ in het punt x, y, z binnen dit lichaam.

De massa hiervan is $\rho\,dx\,dy\,dz$, en de momenten met betrekking tot de coördinatenvlakken zijn $\rho\,x\,dx\,dy\,dz$, $\rho\,y\,dx\,dy\,dz$ en $\rho\,z\,dx\,dy\,dz$.

Integreeren wij deze vier differentialen van de derde orde naar z tusschen de grenzen z' en z'', welke wij verkrijgen uit de vergelijking $z = f(x, y)$ van het oppervlak des lichaams. Dit geeft ons de massa en de momenten van eene oneindig dunne zuil van het lichaam met de doorsnede $dx\,dy$ en de hoogte dz.

Integreeren wij vervolgens naar y tusschen de grenzen y' en y'', uit de vergelijking der projectie van het oppervlak op het xy-vlak verkregen, dan hebben wij de massa en momenten van eene aan het yz-vlak evenwijdig loopende dunne strook ter dikte van dx.

Wanneer wij nu ten slotte naar x integreeren tusschen de grenzen x' en x'', de stukken van de x-as afgesneden door de uiterste aan het yz-vlak evenwijdig loopende raakvlakken tot het oppervlak, zoo verkrijgen wij de geheele massa van het lichaam en hare momenten met betrekking tot de coörd. vlakken.

Wij hebben dus:

$$\mathrm{M} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \rho\,dx\,dy\,dz\,, \qquad \mathrm{M}x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \rho\,x\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$\mathrm{M}\,y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \rho\,y\,dx\,dy\,dz \text{ en } \mathrm{M}\,z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \rho\,z\,dx\,dy\,dz.$$

Is het lichaam homogeen, dan hebben wij:

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{M}}{\rho} = \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz = \int\!\!\int (z'' - z')\,dx\,dy\,,$$

$$\mathrm{V}.x_1 = \int\!\!\int\!\!\int x\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int (z'' - z')\,x\,dx\,dy\,,$$

$$V.y_1 = \int\int\int y\, dx\, dy\, dz = \int\int (z'' - z')\, y\, dx\, dy,$$

$$V.z_1 = \int\int\int z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\int\int (z''^2 - z'^2)\, dx\, dy.$$

Bij de bepaling van het middelp. van massa hebben wij steeds gebruik gemaakt van een rechth. coördinaten-stelsel, wij zullen ons nu van poolcoördinaten bedienen.

Nemen wij daartoe eenen voerstraal r zoodanig, dat hij met de poolas een hoek θ maakt, en het vlak van dezen hoek met een vast vlak door de as gaande een hoek Φ maakt, dan is een punt in de ruimte door de coördinaten r, θ, Φ volkomen bepaald. Eene lijn in de ruimte is gegeven door twee vergelijkingen tusschen deze coördinaten. Beschouwen wij een element ds dezer lijn met de dichtheid ρ, dan is:

$$dm = \rho\, ds = \rho \sqrt{dr^2 + r^2\, d\,\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\,\Phi^2}.$$

Drukken wij nu door middel van beide vergelijkingen der kromme twee der veranderlijke coördinaten in functie der derde uit, dan wordt, daar ρ eene functie van r, θ en Φ is:

$$dm = f_1(r)\, dr, \quad dm = f_2(\theta)\, d\theta, \quad dm = f_3(\Phi)\, d\Phi,$$

dus:

$$m = \int_{r_0}^{r} f_1(r)\, dr, \quad m = \int_{\theta_0}^{\theta} f_2(\theta)\, d\theta, \quad m = \int_{\Phi_0}^{\Phi} f_3(\Phi)\, d\Phi.$$

Voor de rechthoekige coördinaten van het middelpunt van massa x_1, y_1, z_1 vinden wij, wanneer wij voor

$$\rho.r.\cos\theta \sqrt{dr^2 + r^2.\,d\theta^2 + r^2.\,\sin^2\theta\, d\,\Phi^2},$$

$$\rho.r.\sin\theta.\cos\Phi \sqrt{dr^2 + r^2.\,d\theta^2 + r^2.\,\sin^2\theta\, d\,\Phi^2},$$

$$\rho.r.\sin\theta.\sin\Phi \sqrt{dr^2 + r^2.\,d\theta^2 + r^2.\,\sin^2\theta\, d\,\Phi^2}$$

de waarden uitgedrukt in een der coördinaten substitueeren:

$$m.x_1 = \int_{r_o}^{r} F_1(r)\,dr, \quad m.y_1 = \int_{r_o}^{r} F_2(r)\,dr, \quad m.z_1 = \int_{r_o}^{r} F_3(r)\,dr,$$

$$m.x_1 = \int_{\theta_o}^{\theta} \psi_1(\theta)\,d\theta, \quad m.y_1 = \int_{\theta_o}^{\theta} \psi_2(\theta)\,d\theta, \quad m.z_1 = \int_{\theta_o}^{\theta} \psi_3(\theta)\,d\theta,$$

$$m.x_1 = \int_{\Phi_o}^{\Phi} \chi_1(\Phi)\,d\Phi, \quad m.y_1 = \int_{\Phi_o}^{\Phi} \chi_2(\Phi)\,d\Phi, \quad m.z_1 = \int_{\Phi_o}^{\Phi} \chi_3(\Phi)\,d\Phi.$$

Is de kromme homogeen, dan is wederom $\frac{m}{\rho} = s$ de lengte van de lijn, en wij vinden dan op dezelfde wijze als het voorgaande x_1, y_1 en z_1.

Voor eene vlakke kromme lijn krijgen wij

$$dm = \rho\,ds = \rho\,\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2},$$

dus: $$m = \int_{r_o}^{r} f_1(r)\,dr \quad \text{of} \quad m = \int_{\theta_o}^{\theta} f_2(\theta)\,d\theta.$$

Daar nu $\rho\,r\cos\theta\,\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}$ en $\rho\,r\sin\theta\,\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}$ in functies van r of θ kunnen worden uitgedrukt, zoo verkrijgen wij voor de coördinaten van het middelp. van massa x_1, y_1

$$m.x_1 = \int_{r_o}^{r} F_1(r)\,dr \quad \text{en} \quad m.y_1 = \int_{r_o}^{r} F_2(r)\,dr$$

of:

$$m.x_1 = \int_{\theta_o}^{\theta} \psi_1(\theta)\,d\theta \quad \text{en} \quad m.y_1 = \int_{\theta_o}^{\theta} \psi_2(\theta)\,d\theta.$$

Ook hier is het niet moeielijk x_1, y_1 te vinden voor het geval, dat de lijn homogeen is.

Bij een oppervlak is r eene functie van de beide onafhankelijk veranderlijken θ en Φ. Zij nu ρ de dichtheid in het vlakte-element van het stoffelijk oppervlak, dat wij beschouwen, dan is, als $x_1\, y_1\, z_1$ de rechth. coördinaten van het middelp. van massa voorstellen:

$$dm = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2.\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2} \,.\, \rho\, r\, d\,\theta\, d\,\Phi$$

en

$$m = \int\int \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2.\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2} \,.\, \rho\, r\, d\theta\, d\Phi,$$

$$m.x_1 = \int\int \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2.\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2} \,.\, \rho\, r^2 \cos\theta\, d\theta\, d\Phi,$$

$$m.y_1 = \int\int \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2.\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2} \,.\rho\, r^2 \sin\theta \cos\Phi\, d\theta d\Phi,$$

$$m.z_1 = \int\int \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2.\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2} \,.\rho\, r^2 \sin\theta \sin\Phi\, d\theta\, d\Phi.$$

Is het oppervlak homogeen, dus ρ standvastig, dan valt ρ buiten de integraalteekens. De grenzen dezer bepaalde integralen hangen af van het deel van het oppervlak, dat men beschouwt en van de ligging van den oorsprong van het coördinatenstelsel met betrekking tot het oppervlak.

Beschouwen wij nu een homogeen omwentelingsoppervlak, welks standvastige dichtheid ρ is, en waarvan de omwentelingsas samenvalt met de poolas, dan zal de poolvergelijking $r = f(\theta)$ der beschrijvende kromme tevens tot vergelijking van het oppervlak strekken, terwijl r en θ onafhankelijk van den hoek Φ blijven, zoodat $\dfrac{\partial r}{\partial \Phi} = 0$ wordt.

Wij verkrijgen dan:

$$dm = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \,.\, \rho\, r \sin\theta\, d\,\theta\, d\,\Phi,$$

$$m = \rho \int d\Phi \int r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \,.\, d\theta.$$

Voor het geheele omwentelingsoppervlak moeten de grenzen van φ genomen worden tusschen 0 en 2π, zoodat

$$O = \frac{m}{\rho} = 2\pi \int_0^\theta r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} . d\theta$$

is.

Voor het middelp. van massa vinden wij:

$$O . x_1 = 2\pi \int_0^\theta r^2 \sin\theta \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} . d\theta.$$

Voor eene massa verspreid over een plat vlak en begrensd door eene kromme $F(r, \theta) = 0$ krijgen wij:

$$dm = \rho\, r\, dr\, d\theta \quad \text{en} \quad m = \int\int \rho\, r\, dr\, d\theta,$$

dus voor de coördinaten van het middelp. van massa:

$$m . x_1 = \int\int \rho\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta,$$

$$m . y_1 = \int\int \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta.$$

Is de massa homogeen, dan is:

$$V = \frac{m}{\rho} = \int\int r\, dr\, d\theta, \quad V . x_1 = \int\int r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta$$

en

$$V . y_1 = \int\int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta.$$

De grenzen dezer bepaalde integralen verschillen, naarmate de pool binnen of buiten de beschouwde vlakteruimte ligt.

Ligt de pool er binnen, dan zijn de grenzen van θ, 0 en 2π. Is dit niet het geval, dan worden de grenzen van θ bepaald door de uiterste raaklijnen, die men uit de pool tot de kromme trekken kan. De grenzen van r vinden wij uit de vergelijking $F(r, \theta) = 0$.

Is de massa verspreid over eene ruimteuitgebreidheid, begrensd door een gegeven oppervlak, dan beschouwen wij daarvan een volume-element in een punt r, θ, Φ. Zij nu hier de dichtheid ρ, dan is de massa van dit element:

$$dm = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi.$$

Wij krijgen dan voor de geheele massa van het lichaam en de rechth. coördinaten van het middelp. van massa:

$$m = \int\int\int \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi,$$

$$m\,.\,x_1 = \int\int\int \rho\, r^3 \sin\theta \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi,$$

$$m\,.\,y_1 = \int\int\int \rho\, r^3 \sin^2\theta \cos\Phi\, dr\, d\theta\, d\Phi,$$

$$m\,.\,z_1 = \int\int\int \rho\, r^3 \sin^2\theta \sin\Phi\, dr\, d\theta\, d\Phi.$$

Is de massa homogeen, dus ρ standvastig, dan is:

$$\mathrm{V} = \frac{m}{\rho} = \int\int\int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi$$

en

$$\mathrm{V}.\, x_1 = \int\int\int r^3 \sin\theta \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi,$$

$$\mathrm{V}.\, y_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\theta \cos\Phi\, dr\, d\theta\, d\Phi,$$

$$\mathrm{V}.\, z_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\theta \sin\Phi\, dr\, d\theta\, d\Phi.$$

De grenzen dezer bepaalde integralen verschillen ook hier naarmate de pool binnen of buiten de massa gelegen is. In het eerste geval integreeren wij naar θ van 0 tot π en naar Φ van 0 tot 2π of omgekeerd naar θ van 0 tot 2π en naar Φ van 0 tot π.

In het tweede geval zijn de grenzen van θ en Φ niet standvastig, maar hangen van den raakkegel af, dien men uit de pool tot het oppervlak van het lichaam beschrijven kan.

De grenzen van r worden verkregen uit de poolvergelijking $F(r, \theta, \Phi) = 0$ van het oppervlak.

Het geval, dat de massa holle ruimten heeft, eischt een afzonderlijk onderzoek, dat wij hier zullen achterwege laten, daar dit slechts eene questie van integreeren is.

Laten wij eene homogene vlakke kromme lijn, wier lengte S is, om eene as in haar vlak, die wij als x-as aannemen, wentelen, dan beschrijft deze lijn een omwentelingsoppervlak. Noemen wij de grootte van dit oppervlak O, dan is:

$$O = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y \, ds.$$

Stellen wij de ordinaat van het middelp. van massa der lijn door y_1 voor, zoo is:

$$S y_1 = \int_{s_0}^{s_1} y \, ds.$$

Uit beide vergelijkingen krijgen wij:

$$O = 2\pi y_1 . S.$$

»Het oppervlak beschreven door eene willekeurige (rechte of »kromme) vlakke lijn, wentelend om eene as in haar vlak, is »gelijk aan de lengte der lijn, vermenigvuldigd met den cirkel»omtrek, beschreven door het middelpunt van massa der lijn".

Wentelt eene vlakke figuur om eene as in haar vlak, welke wij als x-as aannemen, en is J de inhoud der figuur, dan vinden wij voor den inhoud van het lichaam door de wentelende figuur beschreven

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2) \, dx.$$

Zij y_1 de ordinaat van het middelpunt van massa der vlakke figuur, dan is:

$$J\, y_1 = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_o^2)\, dx$$

en na eliminatie der integraal uit beide verkrijgen wij:

$$V = 2\, \pi\, y_1\, J.$$

»De inhoud van elk lichaam, ontstaan door de wenteling van »eene vlakke figuur om eene as in haar vlak, is gelijk aan »den inhoud der beschrijvende figuur, vermenigvuldigd met »den cirkelomtrek, door het middelpunt van massa der figuur »beschreven".

Deze beide theorema's heeten die van GULDIN, eigenlijk zijn zij, zooals uit het geschiedkundig overzicht blijkt, afkomstig van PAPPUS.

Zij gelden niet alleen voor lichamen, welke ontstaan door eene geheele omwenteling, maar ook voor die, welke door gedeeltelijke omwenteling ontstaan zijn; want de oppervlakken en de inhouden, door eene gedeeltelijke omwenteling beschreven, zijn evenredig aan den hoek, welke door de lijn of vlakke figuur beschreven is.

Zoo is voor het eerste theorema, als O′ het oppervlak van het lichaam voorstelt, na eene wenteling der lijn over eenen hoek θ,

$$O' = O\, \frac{\theta}{2\pi} = \theta\, y_1\, .\, S.$$

Op dezelfde wijze verkrijgen wij voor het tweede theorema

$$V = \theta\, y_1\, .\, J.$$

Wij kunnen nu tot eene algemeene stelling geraken, daar het bovenstaande blijft bestaan, hoe klein de hoek ook zij, beschreven bij de wenteling der figuur om eene as in haar vlak gelegen.

Beschouwen wij daartoe eene vlakke figuur, wier vlak zich zoodanig verplaatst, dat een zelfde punt daarvan steeds op eene lijn van dubbele kromming blijft, terwijl het vlak zelf steeds normaal tot die kromme is. De achtereenvolgende standen van het vlak snijden elkaar volgens rechte lijnen, welke op de osculatievlakken der kromme loodrecht staan. Het lichaam, door deze verplaatsing der vlakke figuur beschreven, kunnen wij ons voorstellen ontstaan te zijn door een oneindig aantal wentelingen over zeer kleine hoeken om bovengenoemde rechte lijnen als assen.

Wij hebben nu voor dit lichaam den volgenden regel.

»De inhoud van het lichaam is gelijk aan het oppervlak van »de beschrijvende figuur, vermenigvuldigd met den weg door »het middelpunt van massa van de figuur beschreven; en het »oppervlak door den omtrek der figuur beschreven, is gelijk »aan den omtrek der figuur, vermenigvuldigd met den weg »beschreven door het middelpunt van massa van dien omtrek".

Wij kunnen het door de vlakke figuur beschreven lichaam, waarop deze stelling betrekking heeft, wat zijne wording betreft, ook aldus omschrijven. Het lichaam is beschreven door eene vlakke figuur, wier vlak zonder te glijden langs een ontwikkelbaar oppervlak rolt, en wij hierbij aannemen, dat de vlakke figuur steeds aan denzelfden kant der gemeenschappelijke rechte lijn van het platte vlak en het ontwikkelbaar oppervlak blijft.

Wij merken ten slotte op, dat in de uitdrukkingen voor de theorema's van Guldin drie grootheden voorkomen, waarvan er eene gevonden kan worden, als de beide anderen bekend zijn. In enkele gevallen wordt hiervan gebruik gemaakt om het middelpunt van massa eener vlakke figuur te bepalen.

HOOFDSTUK III.

Mechanische en geometrische eigenschappen van het middelpunt van massa.

De mechanische eigenschappen van het middelpunt van massa, welke wij zullen vermelden, staan in nauw verband met de samenstelling van krachten.

Zijn eenige krachten k, k', k''..., die in een punt aangrijpen, in evenwicht, en maken de lijnen, welke in richting en grootte deze krachten voorstellen, met de assen van een in dit punt als oorsprong geplaatst rechthoekig coördinatenstelsel hoeken α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', ..., dan is:

$$\Sigma\, k \cos\alpha = 0\,, \quad \Sigma\, k \cos\beta = 0\,, \quad \Sigma\, k \cos\gamma = 0.$$

Plaatsen wij in de uiteinden dezer lijnen gelijke massa's m, dan is:

$$\Sigma\, m\, k \cos\alpha = 0\,, \quad \Sigma\, m\, k \cos\beta = 0\,, \quad \Sigma\, m\, k \cos\gamma = 0$$

of

$$\Sigma\, m\, x = 0, \quad \Sigma\, m\, y = 0, \quad \Sigma\, m\, z = 0,$$

hetgeen uitdrukt, dat de oorsprong het middelpunt van massa dier gelijke massa's is.

Hetzelfde heeft men, als men massa's neemt, welke evenredig zijn aan de krachten, en deze op gelijke afstanden plaatst van den oorsprong.

Beschouwen wij eenige ongelijke massa's m, m', m'' ... en nemen een willekeurig rechthoekig coördinatenstelsel met den oorsprong in het gemeenschappelijk middelpunt van massa geplaatst. Zijn nu de coördinaten der middelpunten van massa van m, m', m'' ...; x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' ...; dan is:

$$\Sigma\, m\, x = 0, \quad \Sigma\, m\, y = 0, \quad \Sigma\, m\, z = 0.$$

Vereenigen wij de middelpunten van massa van m, m', m''... met den oorsprong door rechte lijnen r, r', r'' ..., welke met de coördinaten-assen hoeken α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', maken, dan is:

$$x = r \cos \alpha \ldots, \quad y = r \cos \beta \ldots, \quad z = r \cos \gamma \ldots,$$

dus:

$$\Sigma\, m\, r \cos \alpha = 0, \quad \Sigma\, m\, r \cos \beta = 0, \quad \Sigma\, m\, r \cos \gamma = 0.$$

De eerste leden dezer vergelijkingen zijn de sommen der componenten volgens de assen van de krachten $m\, r$, $m'\, r'$, $m''\, r''$ ..., en daar deze sommen nul zijn, zullen de krachten $m\, r$, $m'\, r'$, $m''\, r''$ ..., werkende volgens de lijnen r, r', r'' ..., evenwicht maken.

Zijn de beschouwde massa's gelijk, dan hebben wij de volgende eigenschap:

»Indien wij de middelpunten van massa van eenige gelijke massa's door rechte lijnen met haar gemeenschappelijk middelpunt van massa vereenigen, dan zullen de krachten, welke in richting en grootte door deze lijnen worden voorgesteld, in evenwicht zijn".

Hebben wij n krachten, die in een punt aangrijpen en geen evenwicht maken, en nemen het aangrijpingspunt tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel, dan krijgen wij voor de resultante de volgende vergelijkingen:

$$\mathrm{R}\cos\alpha_1 = \Sigma\, k \cos\alpha$$
$$\mathrm{R}\cos\beta_1 = \Sigma\, k \cos\beta$$
$$\mathrm{R}\cos\gamma_1 = \Sigma\, k \cos\gamma.$$

Brengen wij aan de uiteinden der lijnen, welke de krachten voorstellen, gelijke massa's, zoo is:

$$\left.\begin{aligned} m\,\mathrm{R}\cos\alpha_1 &= \Sigma\, m\, k\cos\alpha = \Sigma\, m\, x \\ m\,\mathrm{R}\cos\beta_1 &= \Sigma\, m\, k\cos\beta = \Sigma\, m\, y \\ m\,\mathrm{R}\cos\gamma_1 &= \Sigma\, m\, k\cos\gamma = \Sigma\, m\, z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1.),$$

waarin $k\cos\alpha = x$, $k\cos\beta = y$, $k\cos\gamma = z$.

Het middelpunt van massa ligt dus niet in den oorsprong.

Verder hebben wij, als x_1, y_1, z_1 de coördinaten van het gemeenschappelijk middelpunt van massa voorstellen:

$$\Sigma\, m\, x = n\, m\, x_1\,, \quad \Sigma\, m\, y = n\, m\, y_1\,, \quad \Sigma\, m\, z = n\, m\, z_1.$$

De vergelijkingen (1.) worden nu:

$$\mathrm{R}\cos\alpha_1 = n\, x_1\,, \quad \mathrm{R}\cos\beta_1 = n\, y_1\,, \quad \mathrm{R}\cos\gamma_1 = n\, z_1,$$

waaruit wij vinden:

$$\mathrm{R} = n\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = n\, r_1.$$

De resultante is nu geheel bepaald in richting en grootte. Zij gaat door het middelpunt van massa, en wordt voorgesteld door n maal den afstand van het aangrijpingspunt der krachten tot het middelpunt van massa, welken wij r_1 genoemd hebben.

Hebben wij een stelsel krachten, die in een punt aangrijpen en evenwicht maken, en plaatsen aan de uiteinden der lijnen, welke de krachten voorstellen, ongelijke massa's, dan hebben wij, indien dit aangrijpingspunt het middelpunt van massa der massa's is, en tevens als oorsprong van een rechth. coördinatenstelsel aangenomen wordt, de vergelijkingen:

$$m\, k\cos\alpha + m'\, k'\cos\alpha' + \ldots = 0,$$
$$m\, k\cos\beta + m'\, k'\cos\beta' + \ldots = 0,$$
$$m\, k\cos\gamma + m'\, k'\cos\gamma' + \ldots = 0;$$

waarin α, β, $\gamma\ldots$ de richthoeken der krachten zijn.

Nemen wij de som van de vierkanten dezer vergelijkingen, dan is:

$$\Sigma\, m^2 k^2 + 2\, \Sigma\, m\, m'\, k.k' cos(k,k') = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1.)$$

Noemen wij de lijn, die de uiteinden der krachten k en k' vereenigt a_{12}, dan is:

$$a_{12}^2 = k^2 + k'^2 - 2\, k.k' cos(k,k'),$$

dus ook:

$$m\, m'\, a_{12}^2 = m\, m'\, k^2 + m\, m'\, k'^2 - 2\, m\, m'\, k.k' cos(k,k'),$$

dit gesommeerd over al de massa's geeft, na substitutie van $2\, \Sigma\, m\, m'\, k\,.\,k'\, cos\,(k,\, k')$ uit de vergelijking (1.),

$$\Sigma\, m^2\, k^2 + \Sigma\, m\, m'\, k^2 + \Sigma\, m\, m'\, k'^2 = \Sigma\, m\, m'\, a_{12}^2$$

of, na vereenvoudiging van het eerste lid,

$$\mathrm{M}\, \Sigma\, m\, k^2 = m\, m'\, a_{12}^2,$$

waarin $\mathrm{M} = m + m' + m'' + \, . \, . \, .$

Het product van de geheele massa, en de som van de producten van de vierkanten der krachten en de massa's aan haar uiteinden is dus gelijk aan de som der producten van de massa's twee aan twee en de vierkanten der verbindingslijnen.

Zijn de massa's gelijk, dus

$$m = m' = m'' = \, . \, . \, . \, ,$$

dan heeft men:

$$n\, \Sigma\, k^2 = \Sigma\, a_{12}^2,$$

waarin n het aantal gelijke massa's voorstelt. Hier is dus n maal de som van de vierkanten der krachten gelijk aan de som der vierkanten van de verbindingslijnen der massa's twee aan twee genomen.

Maakt een stelsel krachten $k, k'\, . \, . \, .$, die in een punt aangrijpen, geen evenwicht, en plaatsen wij in de uiteinden der lijnen, welke de krachten voorstellen en met de assen van een in het aangrijpingspunt als oorsprong geplaatst rechth. coördin. stelsel hoeken $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma', \, . \, . \, .$ maken, ongelijke massa's, dan hebben wij:

$$m\,k\cos\alpha + m'\,k'\cos\alpha' + m''\,k''\cos\alpha'' + \,.\,. = \mathrm{M\,R}\cos\alpha_1$$
$$m\,k\cos\beta + m'\,k'\cos\beta' + m''\,k''\cos\beta'' + \,.\,. = \mathrm{M\,R}\cos\beta_1$$
$$m\,k\cos\gamma + m'\,k'\cos\gamma' + m''\,k''\cos\gamma'' + \,.\,. = \mathrm{M\,R}\cos\gamma_1,$$

waarin $m + m' + m'' + \,.\,. = \mathrm{M}$, en R de resultante voorstelt.

De som der vierkanten dezer vergelijkingen geeft ons:

$$\Sigma\, m^2 k^2 + 2\,\Sigma\, m\,m'\,k\,k'\cos(k,k') = \mathrm{M}^2\,\mathrm{R}^2.$$

Noemen wij de lijn, die de uiteinden der krachten k en k vereenigt a_{12}, dan krijgen wij op gelijke wijze:

$$\Sigma\, m\,m'\,a_{12}^2 = \Sigma\, m\,m'\,k^2 + \Sigma\, m\,m'\,k'^2 - 2\,\Sigma\, m\,m'\,k\,k'\cos(k,k')$$

en

$$\Sigma\, m^2 k^2 + \Sigma\, m\,m'\,k^2 + \Sigma\, m\,m'\,k'^2 - \Sigma\, m\,m'\,a_{12}^2 = \mathrm{M}^2\,\mathrm{R}^2$$

of na vereenvoudiging van het eerste lid:

$$\mathrm{M}\,\Sigma\, m\,k^2 - \Sigma\, m\,m'\,a_{12}^2 = \mathrm{M}^2\,\mathrm{R}^2. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mathrm{I.})$$

Vereenigen wij deze ongelijke massa's door rechte lijnen P, P′, P″, . . met haar gemeenschappelijk middelpunt van massa, dan is:

$$\mathrm{M}\,\Sigma\, m\,\mathrm{P}^2 = \Sigma\, m\,m'\,a_{12}^2$$

na substitutie in bovenstaande vergelijking en deeling door M krijgen wij:

$$\mathrm{M\,R}^2 = \Sigma\, m\,k^2 - \Sigma\, m\,\mathrm{P}^2,$$

dus:

$$\Sigma\, m\,k^2 = \Sigma\, m\,\mathrm{P}^2 + \mathrm{M\,R}^2. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mathrm{II.})$$

Valt nu het aangrijpingspunt der krachten met het gemeenschappelijk middelpunt van massa samen, dan is $\Sigma\, m\,k^2 = \Sigma\, m\,\mathrm{P}^2$, dus $\Sigma\, m\,k^2$ een *Minimum*.

Wij zien dus, dat deze som het kleinste is voor het gemeenschappelijk middelpunt van massa.

Deze eigenschap is afkomstig van Gauss [1]), en drukt het beginsel van de »Methode der kleinste quadraten" uit.

---

1) Crelle's Journal. Band IV, S. 232.

Uitkomsten van waarnemingen schommelen om de ware grootheid. De massa's stellen in deze methode de gewichten der waarden voor.

Is in de vergelijking (II.) $m = m' = m'' = \ldots$, dan hebben wij:

$$\Sigma k^2 = \Sigma P^2 + n R^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III.)}$$

Verder is:

$$\Sigma k^2 = \text{Constant},$$

als de gelijke massa's op een bol of cirkel liggen.

Volledigheidshalve merken wij hierbij op, dat de vergelijking (I.) bij Poinsot [1]), en de vergelijking (III.) bij Möbius [2]) aangetroffen worden.

Laat ons nagaan, welke beteekenis deze vergelijkingen daar hebben, en op welke wijze zij worden afgeleid.

Poinsot beschouwt eenige willekeurig in de ruimte geplaatste massa's m, m', m'', . . , en vereenigt hare middelpunten van massa door rechte lijnen r, r', r'', . . . met een willekeurig punt, dat hij tot oorsprong van een rechth. coörd.-stelsel neemt. Nu ligt, zegt hij, het gemeenschappelijk middelpunt van massa op de resultante der krachten mr, $m'r'$, $m''r''$, . . . , en wel, op het M^de^ deel der lijn, welke haar voorstelt, als $m + m' + m'' + \ldots = M$ is.

Noem nu R den afstand van den oorsprong tot het gemeenschappelijk middelpunt van massa (X, Y, Z), en zijn x, y, z, x', y', z', . . . de coördinaten der massa's m, m', . . ., dan stellen M X, M Y, M Z de componenten der resultante M R voor.

Men heeft nu:

$$M X = m x + m' x' + m'' x'' + \ldots$$
$$M Y = m y + m' y' + m'' y'' + \ldots$$
$$M Z = m z + m' z' + m'' z'' + \ldots$$

1) L. Poinsot, Eléments de statique. 1842.
2) A. F. Möbius, Lehrbuch der Statik, 1837.

De som der vierkanten dezer vergelijkingen geeft, daar $x^2+y^2+z^2=r^2$ is,

$$
\begin{aligned}
M^2 R^2 = & \; m^2 r^2 + m'^2 r'^2 + m''^2 r''^2 + \dots \\
& + 2\, m\, m' (x x' + y y' + z z') + \dots \\
& + 2\, m\, m'' (x x'' + y y'' + z z'') + \dots \\
& + \text{enz.} \qquad \dots\dots (1.).
\end{aligned}
$$

Maar $x x' + y y' + z z' = r.r' \cos \Phi$, als Φ den hoek tusschen de lijnen r en r' voorstelt.

Verder is, wanneer men de lijn, welke m en m' vereenigt, door α_{01} voorstelt,

$$r^2 + r'^2 - 2\, r\, r' \cos \Phi = \alpha^2_{01}$$

$$r^2 + r'^2 - \alpha^2_{01} = 2\, r.\, r' \cos \Phi$$

dus: $$2(x x' + y y' + z z') = r^2 + r'^2 - \alpha^2_{01}.$$

Dit gesubstitueerd in de vergelijking (1.) geeft:

$$
\begin{aligned}
M^2 R^2 = & \; m^2 r^2 + m'^2 r'^2 + m''^2 r''^2 + \dots \\
& + m\, m' (r^2 + r'^2 - \alpha^2_{01}) + \dots \\
& + m\, m'' (r^2 + r''^2 - \alpha^2_{02}) + \dots =
\end{aligned}
$$

$$= m(m + m' + m'' + \dots)\, r^2 + m'(m + m' + m'' + \dots)\, r'^2$$

$$+ \text{ enz. } - m\, m'\, \alpha^2_{01} - m\, m''\, \alpha^2_{02} - \dots \text{ enz.}$$

of $$M^2 R^2 = M\, \Sigma\, m\, r^2 - \Sigma\, m\, m'\, \alpha^2.$$

In deze formule komen slechts de onderlinge afstanden der massa's en hare afstanden tot een willekeurig punt voor. Zij is blijkbaar dezelfde als die, welke LAGRANGE gebruikte in den vorm $R = \sqrt{B - A}$ en door ons in het tweede Hoofdstuk behandeld is.

Verandert het willekeurig genomen punt van stand, dan veranderen ook r, r', r'' en R, maar de α's blijven standvastig, dus is $\Sigma\, m\, m'\, \alpha^2 = \text{Constant}$. Uit

$$M\, \Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, m\, m'\, \alpha^2 + M\, R^2 \quad \dots\dots (2.)$$

blijkt, dat $\Sigma\, m\, r^2$ een Minimum is voor $R = 0$, en wij vinden voor deze minimumwaarde:

$$\Sigma m r^2 = \frac{\Sigma m m' a^2}{M} \dots\dots\dots\dots (3.)$$

Beschrijft het willekeurig punt het oppervlak van een bol met het gemeenschappelijk middelpunt van massa tot middelpunt, dan is R standvastig en, hoewel r, r', r'' veranderen, blijft $\Sigma m r^2$ toch Constant. In het bovenstaande beschouwden wij een stelsel massa's, wier onderlinge afstanden niet konden veranderen; doch nemen wij nu een stelsel massa's wier onderlinge afstanden zoodanig veranderen, dat de som der vierkanten dier afstanden constant blijft, dan leert de vergelijking (3), dat de som der vierkanten van hare afstanden tot het gemeenschappelijk middelpunt van massa ook constant zal blijven, en omgekeerd.

Stellen wij in de vergelijking (2) $m = m' = m'' = 1$, dan krijgen wij eene geometrische eigenschap, welke wij later zullen ontmoeten. De afleiding der vergelijking (III.), welke wij bij Möbius aantreffen, zullen wij kort aanstippen, daar zij eigenlijk niet tot ons onderwerp behoort. Hij beschouwt namelijk een beweeglijk stelsel punten A, A', A''..., waarop krachten werken, voegt daaraan een tweede stelsel van evenzoovele onbeweeglijke punten F, F', F'' . . . toe, zoodanig dat de afstanden A F, A' F', A'' F'' . . . in richting en grootte de krachten voorstellen.

Door nu gebruik te maken van het zoogenaamde »beginsel der virtueele snelheden" komt hij, voor het geval dat de punten A, A', A'', . . . bij oneindig kleine verplaatsing van het beweeglijk stelsel in B, B', B'', . . . gekomen en de afstanden A F, A' F', . . . oneindig klein zijn, tot de vergelijking:

$$\Sigma\, B F^2 - \Sigma\, A F^2 = \Sigma\, A B^2.$$

Werken alle krachten op een enkel punt A, dan vallen A', A'' met A, en ook B', B'' . . . met B samen. De vorige vergelijking wordt dan:

$$\Sigma\, B\, F^2 - \Sigma\, A\, F^2 = n\,.\, A\, B^2,$$

waarin n het aantal krachten is.

Hierbij zijn alle afstanden tusschen de nog aanwezige punten A, B, F, F′... oneindig klein; derhalve worden hier geene oneindig kleine met eindige grootheden vergeleken, zoodat deze vergelijking nog geldig zal zijn, als de punten op eindige afstanden van elkaar zijn verwijderd, dus de krachten door eindige lijnen worden voorgesteld en de verplaatsing A B eveneens eindig is. Zijn namelijk de op het punt A werkende en door de lijnen A F, A F′... voorgestelde krachten in evenwicht, dan is de som der projecties dezer lijnen op iedere door A getrokkene rechte lijn = 0, dus A het middelpunt van aan elkaar gelijke en evenwijdige op F, F′... werkende krachten, derhalve ook het middelpunt van massa van gelijke in F, F′... aangebrachte massa's of het zoogenaamde punt der gemiddelde afstanden van F, F′...

Bovenstaande vergelijking drukt dus de volgende wet uit:

»Heeft men een stelsel van n punten, dan is de som der »vierkanten hunner afstanden tot een willekeurig ander punt »steeds grooter dan de som der vierkanten hunner afstanden tot »het punt der gemiddelde afstanden. Het verschil dezer sommen »bedraagt het n-voud van het vierkant van den afstand van dit »laatste punt tot het willekeurig genomen punt''.

Bij de behandeling der geometrische eigenschappen zullen wij enkele aantreffen, die onmiddellijk uit de mechanischen kunnen afgeleid worden.

Wij zullen hier echter trachten alles langs geometrischen weg te vinden.

Bij de beschouwing van geometrische figuren en lichamen vervalt het begrip stof geheel; zoo kunnen wij hier niet van hunne massa, derhalve ook niet van hun middelpunt van massa spreken.

Door zich nu de geometrische uitgebreidheden voor te stellen als te bestaan uit geometrische punten, kunnen wij hierop dezelfde beschouwingen toepassen als bij de *homogene* lichamen. Toen wij de coördinaten van het middelpunt van massa der homogene lichamen afleidden, wezen wij reeds op de geometrische beteekenis daarvan, en noemden dit punt »middelpunt der gemiddelde afstanden".

Gaan wij nu bij onze volgende beschouwingen uit van deze grondstelling:

»Elk willekeurig stelsel punten in de ruimte heeft een mid- »delpunt der gemiddelde afstanden, waarvan de afstand tot een »willekeurig vlak de gemiddelde is van de afstanden dezer »punten tot dit zelfde vlak, d. w. z. gelijk is aan de som dezer »laatsten gedeeld door hun aantal, wanneer men de afstanden »der punten aan de eene zijde van het vlak positief en die »aan de andere zijde negatief neemt".

Dit punt is volkomen bepaald, als wij de gemiddelde afstanden tot drie gegeven vlakken in de ruimte bepalen, hetgeen mogelijk is. Voor een vlak, dat door bovengenoemd middelpunt gaat, is de som der afstanden van de punten aan de eene zijde van het vlak gelijk aan die der punten aan de andere zijde. Voor punten in een plat vlak gelegen, ligt het middelpunt der gemidd. afstanden ook in dit vlak; zijne plaats is volkomen bepaald ten opzichte van twee rechte lijnen in dit vlak. Hier geldt voor elke rechte lijn door dit punt gaande hetzelfde als hetgeen boven voor een plat vlak ten opzichte van punten in de ruimte gezegd is.

»Trekken wij in een willekeurig veelvlak stralen uit het »middelp. der gemidd. afstanden naar de hoekpunten, dan is »de som der projecties dezer stralen op een willekeurig vlak, door »genoemd middelpunt gaande, gelijk nul."

Dit is duidelijk omdat genoemde projecties niets anders zijn dan de afstanden der hoekpunten tot eene loodrecht op dat vlak en door het middelp. der gemidd. afstanden getrokkene rechte lijn. Op dezelfde wijze kunnen wij de volgende stelling bewijzen [1]).

»In elken vlakken of schelen veelhoek is de som der pro- »jecties van de uit het middelp. der gemidd. afstanden naar »de hoekpunten getrokkene stralen op elke door genoemd mid- »delpunt gaande rechte lijn gelijk nul".

Wij zijn nu in staat de volgende stelling te bewijzen.

»In elken vlakken of schelen veelhoek is de som van de »vierkanten der afstanden van alle hoekpunten tot een wille- »keurig punt in de ruimte gelijk aan de som van de vierkanten »der afstanden dezer hoekpunten tot het middelp. der gemidd. »afstanden, vermeerderd met het vierkant van den afstand van »het eerste punt tot het middelp. der gemidd. afstanden, ver- »menigvuldigd met het aantal hoekpunten van den veelhoek".

Zij (fig. 1) A B C D een willekeurige veelhoek, F het middelp. der gemidd. afstanden en K een willekeurig punt. In de driehoeken A F K, B F K enz. is:

$$A K^2 = A F^2 + F K^2 - 2 A F . F K \cos A F K$$
$$B K^2 = B F^2 + F K^2 - 2 B F . F K \cos B F K$$

enz. enz.

---

1) Hierbij zij opgemerkt, dat wij de volgende geometrische eigenschappen ontleenen aan CARNOT's werk, getiteld: "Géométrie de position", 1803, waarin deze voor het eerst voorkomen.

De som dezer vergelijkingen geeft:

$$A\,K^2 + B\,K^2 + \text{enz.} = A\,F^2 + B\,F^2 + \text{enz.} + n\,.\,F\,K^2 -$$
$$- 2\,F\,K\,(A\,F \cos A\,F\,K + B\,F \cos B\,F\,K + \text{enz.})$$

De vorm tusschen haakjes is gelijk nul, dus wordt de vergelijking:

$$A\,K^2 + B\,K^2 + \text{enz.} = A\,F^2 + B\,F^2 + \text{enz.} + n\,.\,F\,K^2.$$

Stellen wij nu hierin $F\,K = 0$, dan krijgen wij; daar $F\,K^2$ nooit negatief kan worden, de volgende eigenschap.

»De som der vierkanten van de afstanden der hoekpunten »van eenen willekeurigen veelhoek tot het middelp. der gemidd. »afstanden is een Minimum, d. i., zij is kleiner dan de som van »de vierkanten der afstanden dier hoekpunten tot elk ander »punt in de ruimte".

De voorgaande stelling kunnen wij als een bizonder geval beschouwen van deze meer algemeene:

»Voor elk willekeurig stelsel punten in de ruimte is de som »van de vierkanten hunner afstanden tot een willekeurig punt »gelijk aan de som van de vierkanten hunner afstanden tot »het gemeenschappelijk middelp. der gemidd. afstanden, ver»meerderd met het vierkant van den afstand van het willekeu»rig genomen punt tot het middelp. der gemidd. afstanden, »vermenigvuldigd met het aantal punten."

Zij (Fig. 2) M het middelp. der gemidd. afstanden van de gegeven punten P_1, P_2, $P_3 \ldots$ en $M\,P_1 = r_1$, $M\,P_2 = r_2 \ldots$

Nemen wij nu een willekeurig punt O, en zij $O\,P_1 = \rho_1$, $O\,P_2 = \rho_2 \ldots$ en $O\,M = R$.

Uit drieh. $O\,M\,P_1$ verkrijgen wij:

$$\rho_1^2 = r_1^2 + R^2 - 2\,R\,.\,r_1 \cos(R, r_1),$$

dit gesommeerd over al de punten geeft:

$$\Sigma\,\rho^2 = \Sigma\,r^2 + n\,.\,R^2 - 2\,R\,\Sigma r.\cos(R, r),$$

waarin n het aantal punten voorstelt.

$\Sigma r.cos\,(R, r)$ is nul,

omdat dit de som is der afstanden tot een door M gaand vlak, hetwelk loodrecht op O M staat, dus:

$$\Sigma\,\rho^2 = \Sigma\,r^2 + n\,R^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV.)$$

Voor $R = 0$, d. i., O valt met M samen, is $\Sigma\,\rho^2 = \Sigma\,r^2$; dus $\Sigma\,r^2$ een Minimum.

Laat men het geheele stelsel punten wentelen om het punt M, dan beschrijft het punt O een bolvlak. Wij hebben derhalve:

»Zij in de ruimte een willekeurig stelsel punten gegeven, »en denken wij ons een bolvormig oppervlak met willekeurigen »straal en het middelp. der gemidd. afstanden van al deze pun»ten tot middelpunt, dan zal de som van de vierkanten der »afstanden dezer punten tot een willekeurig punt van het bol»oppervlak gelijk zijn aan de som van de vierkanten der af»standen dierzelfde punten tot het middelpunt des bols, plus »zoovele malen het vierkant van den straal van den bol als »het aantal punten bedraagt."

Deze som is voor al de punten van het boloppervlak standvastig.

Deze stelling is eenvoudiger voor het geval, dat alle punten in een plat vlak liggen; want, dan geldt het bovenstaande voor een cirkel met het middelp. der gemidd. afstanden tot middelpunt. Indien de punten de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek vormen, dan leidt de laatste stelling ons onmiddellijk tot deze:

»De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten »eens regelmatigen veelhoeks tot een willekeurig punt van een »met willekeurigen straal beschreven cirkel, welks middelpunt »hetzelfde is als dat van den veelhoek, is gelijk aan de som »van het vierkant des straals van den veelhoek en zoovele malen »het vierkant van den straal des cirkels als het aantal zijden »van den veelhoek bedraagt".

Deze stelling zou men kunnen beschouwen als eene uitbreiding van het theorema van PYTHAGORAS, want, hebben wij op den cirkel (Fig. 3) twee diametraal tegenover elkaar gelegene punten A en B, dan verdeelen deze den omtrek in gelijke deelen. Vereenig A en B met een willekeurig punt K van den cirkel, dan is driehoek A K B rechthoekig, en wij hebben: $AB^2 = AK^2 + BK^2$.

Ditzelfde geeft ook onze stelling:

$$AK^2 + BK^2 = 2\,(OA^2 + OK^2) = 4\,.\,AO^2 = \text{Const.}$$

Hebben wij (Fig. 4) drie punten A, B en C, zoodanig op een cirkel gelegen, dat driehoek A B C gelijkzijdig is, en vereenigen wij deze punten met een willekeurig punt K van den omtrek; dan is:

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 = 6.\,OA^2 = \text{Const.}$$

Breiden wij dit nu uit, en verdeelen den cirkel in n gelijke deelen, zoo verkrijgen wij een regelmatigen n-hoek. Nemen wij nu wederom een willekeurig punt op den cirkel, dan is de som van de vierkanten der lijnen, welke dit punt met de hoekpunten vereenigen, gelijk aan zoovele malen het vierkant des straals als het dubbel aantal zijden van den veelhoek bedraagt. Deze som is dus constant.

In Fig. 5 hebben wij:

$$AK^2 + BK^2 + \text{enz.} = 2\,n.\,OA^2.$$

Beschrijven wij vervolgens in dezelfde figuur een concentrischen cirkel met grooteren of kleineren straal dan die van den eersten cirkel, waarin de regelmatige veelhoek beschreven is, en vereenigen wij de hoekpunten van den veelhoek met een willekeurig punt L des concentrischen cirkels, dan is de som der vierkanten dezer lijnen constant, en wel, gelijk aan zoovele malen de som van de vierkanten der stralen dezer beide cirkels als het aantal zijden van den veelhoek bedraagt. Wij hebben dus:

$$A L^2 + B L^2 + \text{enz.} = n (O A^2 + O L^2).$$

Dit is ook van toepassing op ingeschrevene veelhoeken, welke symmetrisch zijn, en op regelmatige en symmetrische veelvlakken met betrekking tot het oppervlak van een bol, waarvan het middelpunt samenvalt met dat van het veelvlak.

Uit het vorige leidt men gemakkelijk af; dat, wanneer men in een plat vlak een punt neemt binnen of buiten een cirkel, de som van de vierkanten der afstanden van dit punt tot de uiteinden eener willekeurige middellijn steeds dezelfde is, d. i., gelijk is aan tweemaal de som van het vierkant van den afstand van het beschouwde punt tot het middelpunt van den cirkel en het vierkant van den straal.

Wij hebben dus (Fig. 6):

$$A P^2 + B P^2 = 2 (O P^2 + O A^2) \text{ en } A Q^2 + B Q^2 = 2 (O Q^2 + O A^2).$$

Dit is ook van toepassing op elk punt binnen of buiten een bol gelegen, zoodat wij de volgende eigenschap verkrijgen:

»De som van de vierkanten der afstanden van dit punt tot »de uiteinden eener willekeurige middellijn is gelijk aan twee»maal het vierkant van den straal, vermeerderd met tweemaal »het vierkant van den afstand van dit punt tot het middelpunt »des bols".

Hebben wij een cirkel en een willekeurig punt in de ruimte, en beschrijven wij in dezen cirkel een regelmatigen veelhoek, dan is de som van de vierkanten der afstanden van dit punt tot de hoekpunten van dezen veelhoek standvastig, welke de stand van den veelhoek in den cirkel ook moge zijn, mits hij altijd ingeschreven veelhoek blijve.

Hetzelfde heeft ook plaats voor de regelmatige omgeschrevene veelhoeken, en in het algemeen, voor de veelhoeken, die met den cirkel een gemeenschappelijk middelpunt hebben. Wij kunnen dit nog verder uitbreiden, daar dit ook geldt voor regelmatige veelvlakken, welke een zelfde middelpunt hebben als de bol, in of om welken zij beschreven zijn, zoodat wij krijgen:

De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot een willekeurig punt in de ruimte is altijd dezelfde, welke de stand ook moge zijn van het veelvlak in of om den bol, mits het altijd in- of omgeschreven blijve.

Trekken wij in eene kegelsnede twee willekeurige verwante middellijnen, dan is het middelpunt der kromme tevens middelpunt der gemidd. afstanden van de uiteinden dezer middellijnen. Vereenigen wij nu de uiteinden dezer verwante middellijnen met een in het vlak der kegelsnede gelegen punt, dan is de som der vierkanten van die lijnen gelijk aan de helft der som van de vierkanten der twee verwante middellijnen, vermeerderd met viermaal het vierkant van den afstand van het beschouwde punt tot het middelpunt der kegelsnede. Daar nu de som van de vierkanten der middellijnen gelijk is aan de som van de vierkanten der groote en kleine as, zoo hebben wij de volgende stelling:

»De som van de vierkanten der lijnen, die de uiteinden van »twee willekeurige middellijnen eener kegelsnede met een punt »in haar vlak gelegen, vereenigen, is gelijk aan tweemaal de som »der vierkanten van de beide halve assen, vermeerderd met viermaal het vierkant van den afstand van het beschouwde punt »tot het middelpunt der kegelsneden". Deze som is dus constant.

Hieruit volgt terstond:

»De som van de vierkanten der afstanden van het gegeven »punt tot de vier hoekpunten van het parallelogram om de kegelsnede beschreven, is steeds dezelfde, welke dit parallelogram »ook zijn moge, mits het punt vast blijve. Zij is gelijk aan de »som van de vierkanten van de twee assen der kromme, ver-

»meerderd met viermaal het vierkant van den afstand van het »beschouwde punt tot het middelpunt der kromme".

De vergelijking (IV.) van dit hoofdstuk blijft hare beteekenis behouden, wanneer wij het punt O met een der n-punten van het beschouwde stelsel van punten laten samenvallen. Zij wordt, als O met een der punten samenvalt:

De som van de vierkanten der afstanden van dit punt tot elk der overigen is gelijk aan de som der vierkanten van de afstanden van alle punten tot het middelpunt der gemiddelde afstanden, vermeerderd met n-maal het vierkant van den afstand van het beschouwde punt tot het middelpunt der gemiddelde afstanden.

Passen wij dit achtereenvolgens toe op elk der punten, dan krijgen wij, na optelling der n komende vergelijkingen, indien wij de lijnen, welke de punten twee aan twee, α, en die, welke de punten met het middelpunt der gemiddelde afstanden vereenigen, r noemen,

$$\Sigma \alpha^2 = n \,.\, \Sigma r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(V.)}.$$

Dit is:

»Heeft men in de ruimte een willekeurig aantal punten, welke »men twee aan twee door rechte lijnen vereenigt, dan zal de »som van de vierkanten dezer lijnen gelijk zijn aan zoovele »malen de som van de vierkanten der afstanden van alle punten »van het stelsel tot het middelpunt der gemiddelde afstanden »als het aantal punten bedraagt".

Vereenigen wij in een driehoek A B C het middelpunt der gemiddelde afstanden M met de hoekpunten, dan is:

$$A\,B^2 + B\,C^2 + A\,C^2 = 3\,(A\,M^2 + B\,M^2 + C\,M^2),$$

of

$$A\,M^2 + B\,M^2 + C\,M^2 = \tfrac{1}{3}\,(A\,B^2 + B\,C^2 + A\,C^2).$$

Handelen wij op gelijke wijze in eene driehoekige pyramide

A B C D, dan is:

$$A\,B^2 + B\,C^2 + A\,C^2 + A\,D^2 + B\,D^2 + C\,D^2 =$$
$$= 4\,(A\,M^2 + B\,M^2 + C\,M^2 + D\,M^2).$$

of

$$A\,M^2 + B\,M^2 + \ldots = \tfrac{1}{4}\,(A\,B^2 + B\,C^2 + \ldots).$$

Hebben een veelhoek, een veelvlak of een willekeurig stelsel punten een figuurmiddelpunt, dan is dit tevens middelpunt der gemiddelde afstanden. Zoo is in elk parallelogram of parallelopipedum het snijpunt der diagonalen het middelpunt der gemiddelde afstanden.

Zij M het snijpunt der diagonalen van een parallelogram A B C D, dan is:

$$A\,B^2 + B\,C^2 + C\,D^2 + A\,D^2 + B\,D^2 + A\,C^2 =$$
$$= 4\,(A\,M^2 + B\,M^2 + C\,M^2 + D\,M^2) = 2\,(A\,C^2 + B\,D^2),$$

of

$$A\,C^2 + B\,D^2 = A\,B^2 + B\,C^2 + D\,C^2 + A\,D^2.$$

»In elk parallelogram is dus de som van de vierkanten der »twee diagonalen gelijk aan de som van de vierkanten der »vier zijden".

Beschouwen wij een willekeurig parallelopipedum, dan is:

$$\Sigma\,(\text{ribben})^2 + \Sigma\,(\text{nevendiagonalen})^2 + \Sigma\,(\text{hoofddiagonalen})^2 =$$
$$= 4\,\Sigma\,(\text{hoofddiagonalen})^2.$$

Volgens de voorgaande stelling is:

$$\Sigma\,(\text{nevendiagonalen})^2 = 2\,\Sigma\,(\text{ribben})^2.$$

Na substitutie en vereenvoudiging krijgen wij:

$$\Sigma\,(\text{ribben})^2 = \Sigma\,(\text{hoofddiagonalen})^2.$$

Wij hebben dus:

»In elk parallelopipedum is de som van de vierkanten der »hoofddiagonalen gelijk aan de som van de vierkanten der »twaalf ribben".

Deze stelling komt voor bij LEGENDRE [1]), doch is daar op geheel andere wijze bewezen.

Daar het voorgaande ook kan toegepast worden op alle veelhoeken en veelvlakken, die een figuurmiddelpunt hebben, en wier aantal hoekpunten *even* is, zoo zullen wij dit toepassen op een zeshoek A B C D E F (Fig. 7) wiens figuurmiddelpunt K is, zoodat de drie diagonalen A D, B E, C F door het punt K in twee gelijke deelen worden verdeeld.

De vergelijking (V.) levert ons dan:

Σ (zijden)^2 + Σ (diagonalen)^2 = 6. Σ (halve diagonalen, begrepen tusschen K en de hoekpunten)^2.

Stellen wij vervolgens:

De som van de vierkanten der zes zijden van den veelhoek, vermeerderd met de som van de vierkanten der zes diagonalen, die niet door K gaan, = ... C.

De halve som van de vierkanten der drie diagonalen, die door K gaan, = ... D.

Wij krijgen dan, daar de som van de vierkanten der zes halve diagonalen, welke K met de hoekpunten vereenigen, gelijk is aan D:

$$C + 2\,D = 6\,.\,D$$

$$C = 4\,.\,D$$

of

$$2\,D = \tfrac{1}{2}\,C.$$

In bovenbedoelden zeshoek hebben wij:

»De som van de vierkanten der drie diagonalen, die door »het punt K gaan, is gelijk aan de helft van de som van de »vierkanten der zes zijden en van de vierkanten der zes diago»nalen, welke niet door het punt K gaan".

Op dezelfde wijze redeneerende voor elken anderen veelhoek

1) LEGENDRE. „Elémens de Géométrie".

of veelvlak met een figuurmiddelpunt, waarvan het aantal hoekpunten door $2n$ wordt voorgesteld, zullen wij in het algemeen krijgen:

$$C = (n - 1) . 2 D.$$

»De som van de vierkanten der zijden of ribben, vermeerderd »met de som van de vierkanten der diagonalen, die niet door »het figuurmiddelpunt gaan, is gelijk aan de som van de vier- »kanten der diagonalen, die door het middelpunt gaan, ver- »menigvuldigd met het getal, dat uitdrukt de helft van het »aantal hoekpunten min één".

Zoo zal, bijv., in elk achtvlak, waar de drie diagonalen elkaar in het middelpunt middendoor deelen, de som van de vierkanten dezer drie diagonalen gelijk zijn aan de helft der som van de vierkanten der twaalf ribben.

Nemen wij een willekeurig aantal punten in de ruimte, en vereenigen deze twee aan twee door rechte lijnen, dan vinden wij uit de vergelijking (V.) de som van de vierkanten hunner afstanden tot hun middelpunt der gemiddelde afstanden. Stellen wij ons ten doel den afstand van één der punten tot het middelpunt der gemiddelde afstanden te vinden, dan vereenigen wij dit punt met al de overigen door rechte lijnen. Noemen wij de som van de vierkanten dezer lijnen P; de som van de vierkanten der lijnen, welke de punten twee aan twee vereenigen Q; de som van de vierkanten der afstanden van de punten tot hun gemeenschappelijk middelpunt der gemiddelde afstanden R; den gevraagden afstand X; dan verkrijgen wij, als n het geheel aantal punten voorstelt, uit de vergelijking (IV.) $P = R + n . X^2$ en uit de vergelijking (V.) $Q = n . R$.

Elimineeren wij hieruit R, dan is:

$$X^2 = \frac{n P - Q}{n^2}.$$

»In een stelsel gegeven punten is het vierkant van den af»stand van een willekeurig punt daarvan tot het gemeenschap»pelijk middelpunt der gemiddelde afstanden gelijk aan de som »der vierkanten van de afstanden van dit punt tot al de an»deren, vermenigvuldigd met het geheel aantal punten van »het stelsel, verminderd met de som der vierkanten van de »afstanden der punten twee aan twee, en dit verschil, gedeeld »door het vierkant van het geheel aantal punten".

Zij van een driehoek A B C het middelpunt der gemiddelde afstanden M, dan is:

$$AM^2 = \frac{3(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{9} =$$

$$= \tfrac{1}{9}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2).$$

Voor eene driehoekige pyramide P A B C vinden wij, als M het middelpunt der gemiddelde afstanden is,

$$PM^2 = \frac{4(AP^2+BP^2+CP^2) - (AP^2+BP^2+CP^2+AB^2+BC^2+AC^2)}{16} =$$

$$= \frac{3(AP^2 + BP^2 + CP^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{16}.$$

In een rechthoek A B C D is het snijpunt M der diagonalen het middelpunt der gemiddelde afstanden van de uiteinden van elk der diagonalen. Vereenigen wij nu een willekeurig punt P, binnen of buiten den rechthoek gelegen, met het punt M en met de hoekpunten van den rechthoek, dan is:

$$AP^2 + CP^2 = \tfrac{1}{2} AC^2 + 2MP^2$$

en

$$BP^2 + DP^2 = \tfrac{1}{2} BD^2 + 2MP^2,$$

maar

$$AC = BD,$$

dus:

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2.$$

Hetgeen wij aldus kunnen uitdrukken:

»In elken rechthoek is de som der vierkanten van de lijnen, »welke twee tegenovergelegene hoekpunten vereenigen met een »willekeurig binnen of buiten den rechthoek genomen punt, »gelijk aan de som der vierkanten van de lijnen, welke dit punt »met de beide andere hoekpunten vereenigen".

Evenzoo bewijst men de volgende stelling:

»Indien men door een willekeurig punt in de ruimte, hetzij »binnen of buiten een rechthoekig parallelopipedum gelegen, »twee lijnen trekt naar de uiteinden van een der diagonalen, »dan is de som der vierkanten dezer twee lijnen dezelfde voor »ieder der vier diagonalen".

Zij (Fig. 8) A B C D een willekeurige schele of vlakke vierhoek, waarvan de zijden door de punten a, b, c, d middendoor gedeeld worden.

De lijnen ac, bc, bd en ad vormen een parallelogram, want ac en bd zijn evenwijdig aan B C, en ieder gelijk aan $\frac{1}{2}$ B C; eveneens zijn de lijnen ad en bc evenwijdig aan A D, en ieder gelijk aan $\frac{1}{2}$ A D.

Wij hebben dus:

$$BC^2 = 4\,ac^2 = 2\,ac^2 + 2\,bd^2$$

en

$$AD^2 = 4\,bc^2 = 2\,bc^2 + 2\,ad^2,$$

waaruit:

$$BC^2 + AD^2 = 2\,(ac^2 + bd^2 + bc^2 + ad^2).$$

Volgens eene vroeger gevonden eigenschap van het parallelogram is de vorm tusschen haakjes gelijk aan $ab^2 + cd^2$, dus is:

$$BC^2 + AD^2 = 2\,(ab^2 + cd^2).$$

»In elken vlakken of schelen vierhoek is de som der vier- »kanten van de diagonalen gelijk aan het dubbel van de som

»van de vierkanten der twee lijnen, die de middelpunten der »overstaande zijden vereenigen".

Vereenigen wij de middens der beide diagonalen door eene rechte lijn ef en vervolgens elk dezer middens met a en b, dan is het gemakkelijb in te zien, dat daardoor een parallelogram ontstaat, waarin de lijnen ef en ab diagonalen zijn.

Op dezelfde wijze als boven krijgen wij dan:

$$AB^2 + CD^2 = 2(ef^2 + ab^2).$$

Hetgeen wij aldus uitdrukken:

»In elken vlakken of schelen vierhoek is de som der vier»kanten van twee willekeurige tegenovergestelde zijden het dub»bel van de som der vierkanten van de rechte lijn, welke de »middelpunten der twee andere zijden vereenigt en der rechte »lijn, welke de middelpunten der twee diagonalen vereenigt".

Stellen wij nu de lijnen AB, CD, cd, AC, BD, ab, en AD, BC, ef, respectievelijk voor door m, m', m'', n, n', n'', en p, p', p'', dan geven de beide voorgaande stellingen:

$$m^2 + m'^2 = 2(n''^2 + p''^2) \ldots\ldots\ldots\ldots 1.)$$

$$n^2 + n'^2 = 2(m''^2 + p''^2) \ldots\ldots\ldots\ldots 2.)$$

$$p^2 + p'^2 = 2(m''^2 + n''^2) \ldots\ldots\ldots\ldots 3.)$$

Na optelling krijgen wij:

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 + p^2 + p'^2 = 4(m''^2 + n''^2 + p''^2).$$

»In elken vlakken of schelen vierhoek is de som van de »vierkanten der zijden en der diagonalen gelijk aan viermaal »de som van de vierkanten der twee rechte lijnen, die de mid»delpunten der tegenovergestelde zijden twee aan twee ver»eenigen en van die, welke de middelpunten der diagonalen »vereenigt".

Verder geeft:

$$(1) + (2) - (3).$$

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 = p^2 + p'^2 + 4p''^2.$$

»In elken vierhoek is de som der vierkanten van de vier »zijden gelijk aan de som der vierkanten van de twee diago»nalen, vermeerderd met viermaal het vierkant der rechte lijn, »welke de middelpunten der diagonalen vereenigt".

Deze stelling was voor vlakke vierhoeken reeds door Euler bekend gemaakt [1]).

Uit $(1)+(3)-(2)$ en $(2)+(3)-(1)$ krijgen wij:

$$m^2+m'^2+p^2+p'^2=n^2+n'^2+4\,n''^2$$

en

$$n^2+n'^2+p^2+p'^2=m^2+m'^2+4\,m''^2.$$

»In elken vierhoek is de som der vierkanten van twee tegen»overgestelde zijden, vermeerderd met de som der vierkanten »van de diagonalen, gelijk aan de som der vierkanten van de »beide andere zijden, vermeerderd met viermaal het vierkant »van de rechte lijn, welke de middelpunten dezer laatste zijden »vereenigt".

Passen wij dit toe op lichamen, waarvan alle zijvlakken willekeurige vlakke of schele vierhoeken zijn, zooals bij vierhoekige afgeknotte prisma's of, in het algemeen, bij regelmatige of onregelmatige zesvlakken. (Fig. 9.).

Wij verkrijgen dan:

»In elk regelmatig of onregelmatig zesvlak is de som der »vierkanten van de twaalf ribben, vermeerderd met de som der »vierkanten van de twaalf nevendiagonalen, gelijk aan drie»maal de som der vierkanten van de vier hoofddiagonalen, »vermeerderd met viermaal de som der vierkanten van de zes »rechte lijnen, welke twee aan twee de middelpunten dezer vier »hoofddiagonalen vereenigen".

---

1) Nov. Comm. Petrop. I. p. 66, 1750.

Waaruit door toepassing van eene der voorgaande stellingen onmiddellijk deze stelling volgt:

»In elk regelmatig of onregelmatig zesvlak is het drievoud »van de som der vierkanten van de vier hoofddiagonalen, ver»meerderd met viermaal de som der vierkanten van de zes »rechte lijnen, welke twee aan twee de vier middelpunten dezer »diagonalen vereenigen, gelijk aan de som der vierkanten van de »twaalf ribben, vermeerderd met tweemaal de som der vierkanten »van de twaalf rechte lijnen, welke twee aan twee de middelpunten »der tegenovergestelde zijden van elk der zijvlakken vereenigen".

Deze stelling geeft voor een willekeurig parallelopipedum — waar de tegenovergestelde zijvlakken evenwijdig en parallelogrammen zijn; dus de rechte lijnen, welke in elk der zijvlakken de middelpunten van tegenovergestelde zijden twee aan twee vereenigen, gelijk zijn aan elk der beide andere zijden van dit zijvlak — het volgende:

»In elk parallelopipedum is de som van de vierkanten der »vier hoofddiagonalen gelijk aan viermaal de som der vierkanten »van de drie ongelijke ribben".

Het hier behandelde zou gemakkelijk met andere geometrische eigenschappen uittebreiden zijn, doch wij zullen ons hierbij bepalen en nog eene belangrijke mechanische eigenschap vermelden, welke van Chasles afkomstig is [1]), en niet in het begin van dit hoofdstuk bij de andere mechanische eigenschappen kon behandeld worden, omdat hierbij niet van middelpunt van massa, maar wel van middelpunt der gemiddelde afstanden sprake kan zijn [2]).

---

1) Correspondance mathématique de Bruxelles. Tome V. p. 106.

2) Het middelpunt der gemiddelde afstanden als zuiver geometrisch begrip van het middelpunt van massa treft men niet alleen in het reeds genoemde werk van Carnot en het werk van L'Huilier, getiteld: „Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique", aan, maar is ook door Möbius als uitgangspunt voor zijn „Barycentrische Calcul" gekozen.

Werken op een vrij, doch onveranderlijk lichaam een stelsel krachten, dan kan men deze op een oneindig aantal wijzen vervangen door een gelijkwaardig stelsel van twee of meerdere krachten. Deze verschillende stelsels bezitten dan de volgende eigenschap:

»De rechte lijn, welke het middelpunt der gemiddelde af-»standen van de aangrijpingspunten der krachten van elk stelsel »vereenigt met het middelpunt der gemiddelde afstanden van »de uiteinden dezer krachten, is altijd evenwijdig aan eene »vaste as, en hare lengte is omgekeerd evenredig aan het aan-»tal krachten. Deze vaste as is de resultante van al de oor-»spronkelijke krachten, evenwijdig aan zichzelven verplaatst naar »een punt der ruimte".

Chasles geeft hiervan een bewijs, dat ongeveer hierop neerkomt. Zijn $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2 \ldots$ de coördinaten met betrekking tot een willekeurig genomen rechthoekig coördinatenstelsel van de aangrijpingspunten der oorspronkelijke krachten, en $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2, \ldots$ die van de uiteinden der lijnen, waardoor deze krachten worden voorgesteld.

De coördinaten van het middelpunt der gemiddelde afstanden van de eerste punten zijn:

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n} \text{ en } Z = \frac{\Sigma z}{n},$$

en die van het middelpunt der gemiddelde afstanden van de laatste punten:

$$A = \frac{\Sigma a}{n}, \quad B = \frac{\Sigma b}{n} \text{ en } C = \frac{\Sigma c}{n},$$

waarbij n het aantal krachten voorstelt.

De projecties volgens de assen van de lijn, welke de beide middelpunten der gemiddelde afstanden vereenigt, zijn:

$$A - X = \frac{\Sigma a - \Sigma x}{n}, \; B - Y = \frac{\Sigma b - \Sigma y}{n}, \; C - Z = \frac{\Sigma c - \Sigma z}{n};$$

dus is de lengte dezer lijn:

$$\sqrt{(A - X)^2 + (B - Y)^2 + (C - Z)^2} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt{(\Sigma a - \Sigma x)^2 + (\Sigma b - \Sigma y)^2 + (\Sigma c - \Sigma z)^2}.$$

De wortelgrootheid in het tweede lid stelt de lengte der rechte lijn voor, welke gelijk en evenwijdig is aan de resultante van al deze krachten, wanneer zij evenwijdig aan zichzelven naar een punt verplaatst zijn. Het is bekend, dat, welke het stelsel krachten ook zij, waardoor men de bovenbedoelde krachten kan vervangen, de resultante van deze nieuwe krachten, evenwijdig aan zichzelven naar een punt verplaatst, altijd gelijk en evenwijdig zal zijn aan de resultante der eerste krachten.

De rechte lijn, welke de beide bedoelde middelpunten der gemiddelde afstanden voor het nieuwe stelsel krachten zal vereenigen, is dus evenwijdig aan de eerste resultante, en gelijk aan deze resultante, gedeeld door het aantal krachten.

Hieruit volgt:

1°. »Wanneer verschillende krachten in een punt aangrijpen, »ligt het middelpunt der gemiddelde afstanden harer uiteinden »op de resultante dezer krachten op eenen afstand van het »aangrijpingspunt gelijk aan het quotient dezer resultante en »het aantal krachten”.

Een bewijs hiervoor is door verschillende wiskundigen opgesteld in de »Annales de Mathématiques. Tome 16. p. 30”, en komt overeen met het bewijs, dat door Leibnitz in 1693 voor zijne stelling is gegeven, en in ons geschiedkundig overzicht werd vermeld.

2°. »Wanneer krachten, welke in verschillende punten van »een vrij, doch onveranderlijk lichaam aangrijpen, evenwicht »maken, valt het middelpunt der gemiddelde afstanden harer »uiteinden samen met dat harer aangrijpingspunten".

Want de resultante van al deze krachten, evenwijdig aan zichzelven naar een zelfde punt overgebracht, zal nul zijn.

Ten slotte dient te worden vermeld, dat de Heer CORNEILLE L. LANDRÉ in een werk, getiteld: »Stereometrische Hoofdstukken", (1875), een afzonderlijk hoofdstuk wijdt aan de meetkunde van het zwaartepunt, waarin hij, door gebruik te maken van de eigenschappen van dit punt, eenige eigenschappen van figuren in de ruimte afleidt.

Met den wensch, dat de meetkunde van het zwaartepunt (*beter* middelpunt van gemiddelde afstanden) meerdere eigenschappen der figuren moge leeren kennen, eindigen wij dit proefschrift.

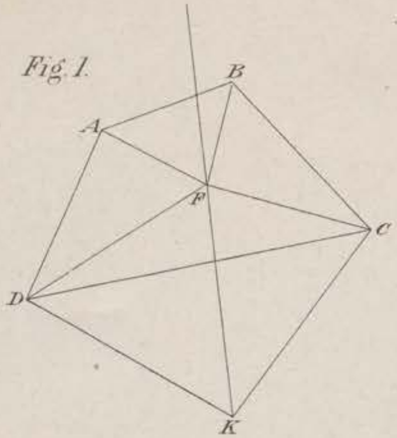

Fig. 1.

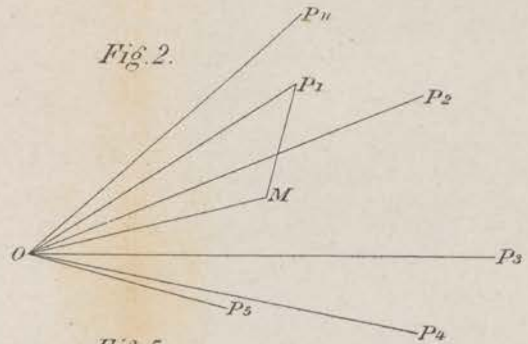

Fig. 2.

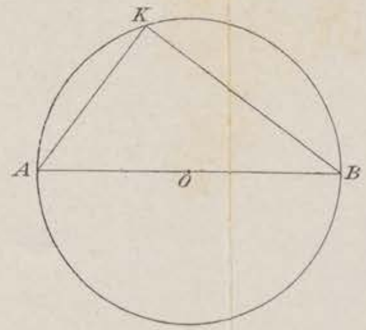

Fig. 3.

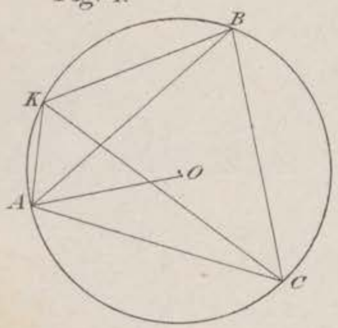

Fig. 4.

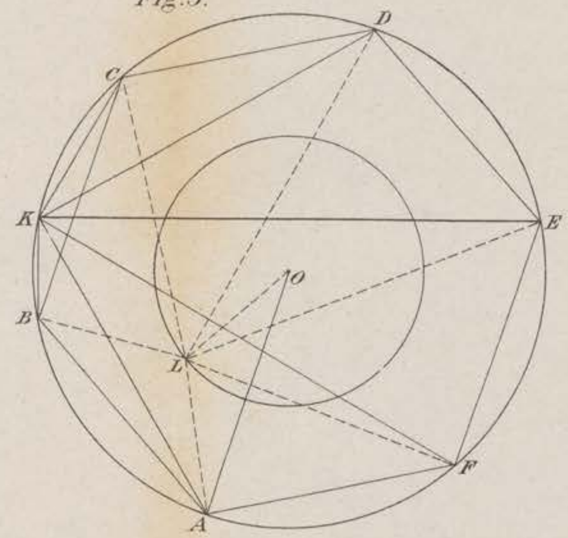

Fig. 5.

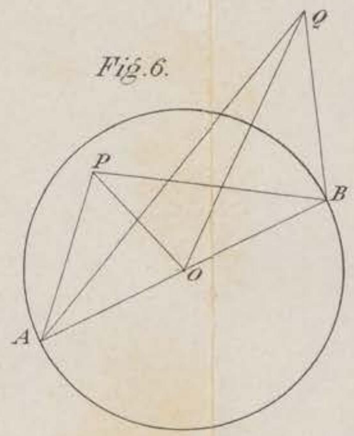

Fig. 6.

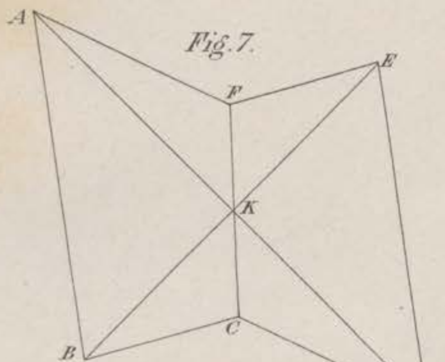

Fig. 7.

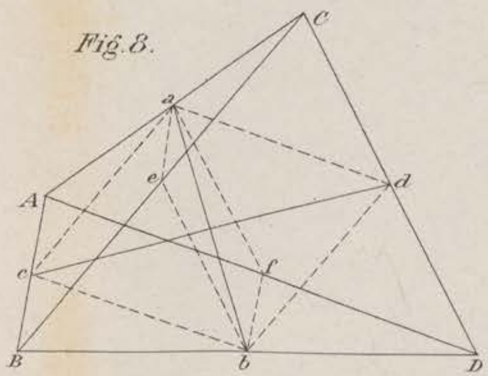

Fig. 8.

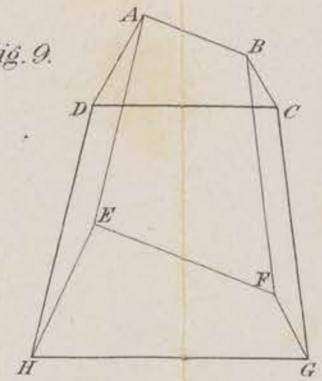

Fig. 9.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Middelpunt van massa en zwaartepunt zijn twee verschillende punten.

II.

Het ware wenschelijk de behandeling van het middelpunt der gemiddelde afstanden in de leerboeken der lagere meetkunde op te nemen.

III.

Bij het bepalen van de oppervlakken en inhouden van omwentelingslichamen is de toepassing van den zoogenaamden »regel van GULDIN" niet altijd eene vereenvoudiging.

IV.

Een integraal te definieeren als de som van oneindig kleine grootheden verdient de voorkeur boven het definieeren van een integraal als het omgekeerde van een differentiaal.

V.

Het beginsel der kleinste werking heeft slechts historische waarde.

VI.

Voor $-a \times -a = +a^2$ treft men tot nog toe in de leerboeken der stelkunst geen voldoend bewijs aan.

VII.

Stokes is in zijne verhandeling »on the aberration of light", (Phil. Mag., July 1845, Vol. 27, pag. 9) niet tot eene voldoende verklaring van de aberratie van het licht gekomen.

VIII.

De correctie, welke Otto Schumann bij zijne bepalingen van de wrijvingsconstante van gassen en dampen (Wiedemann, Annalen der Physik und Chemie. Band XXIII), aan Maxwell's formule aanbrengt, berust op te zwakke gronden.

IX.

Kerr heeft bij de behandeling zijner proeven over de dubbelbrekende werking van gedeformeerd glas (Phil. Mag. Oct. 1888, Vol. 26, pag. 321) niet voldoende rekening gehouden met de elasticiteits-theorie.

X.

Bij het onderwijs in de stereometrie moet het gebruik van modellen zooveel mogelijk vermeden worden.

XI.

De gronden, waarop Böhm den invloed der capillariteit bij het opstijgen van vloeistoffen in de stammen der planten bestrijdt, zijn onvoldoende.

XII.

Ten onrechte wordt eene oplossing van nitras argenti in gedistelleerd water door de apothekers in fleschjes van zwart glas afgeleverd.

XIII.

Hg_2S bestaat niet.

XIV.

Overdreven is het oordeel van GERHARDT, als hij in zijne Geschichte der Mathematik, S. 182, zegt:

»Newton's Fluxionsrechnung verhält sich zu Leibnizens »Differentialrechnung, wie ein roher Marmorblock zu der durch »Künstlerhand daraus geschaffenen Statue".

XV.

Het onderwijs op de gymnasia behoort klassiek en paedagogisch te zijn.

XVI.

Het ware wenschelijk dat ook in ons land, evenals in Duitschland, eene vaste Pharmacopae-Commissie benoemd werd.

XVII.

Bij de bereiding van lichtgas is het gebruik van Boghead- en Cannellcoal te verkiezen boven Newcastlecoal.

XVIII.

Onder de eischen bij het Litterarisch-Mathematisch examen voor aanstaande artsen en apothekers behoorde de boldriehoeksmeting vervangen te worden door de eerste beginselen der analytische meetkunde van het platte vlak.

XIX.

De kennis van de beginselen der Latijnsche taal moet onder de eischen van het Litt.-Math. examen opgenomen worden.

INHOUD.

LEIDEN, BOEKDRUKKERIJ VAN E. J. BRILL.