

HET
WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN
VAN GROND



D. A. DE VRIES

BIBLIOTHEEK
GORLAEUS LABORATORIA

Postbus 9502
2300 RA LEIDEN
Tel.: 071 - 527 43 66 / 67

Universiteit Leiden



1 395 731 6

NIVG

16 FEB 1952



HET WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN
VAN GROND



kast dissertaties



1884

HET
WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN
VAN GROND

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,
OP GEZAG VAN DE RECTOR-MAGNIFICUS
DR J. H. BOEKE, HOOGLERAAR IN DE
FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,
PUBLIEK TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG
13 FEBRUARI 1952 TE 16 UUR

DOOR

DANIEL ALEXANDER DE VRIES

GEBOREN TE LEEUWARDEN IN 1915



H. VEENMAN & ZONEN, WAGENINGEN, 1952

PROMOTOR: PROF. DR H. A. KRAMERS



6 FEB 1952



STELLINGEN

I

De door GEMANT gevolgde methode ter berekening van de grootte der aantakingsvlakjes tussen de korrels in grond moet worden verworpen.

A. GEMANT, *J. Appl. Phys.* **21**, 750, 1950.
Dit proefschrift paragraaf 5.

II

De door KLING toegepaste wijze van extrapoleren ter bepaling van het „restgeleidingsvermogen” van het door hem gebruikte granulaire materiaal levert een te hoge waarde.

G. KLING, *Forschung* **9**, 28, 1938.
Dit proefschrift paragraaf 5.

III

Bij zijn beschouwingen omtrent de invloed van het vochtgehalte op het warmtegeleidingsvermogen van een granulair materiaal vindt DEVIENNE een verschil tussen theorie en experiment bij lage vochtgehalten. Dit verschil vindt deels haar oorzaak in de onvolkomenheid van de theorie, deels in het feit dat DEVIENNE er ten onrechte van uitgaat, dat bij deze vochtgehalten de dampspanning van de waterdamp gelijk aan de verzadigingsspanning zou zijn.

M. DEVIENNE, *Journal des Recherches du Centre National de la Recherche* 1948, No. 8, p. 238.

IV

Tegen de door SCHUMANN en VOSS gegeven theoretische berekening van het warmtegeleidingsvermogen van granulaire materialen zijn ernstige bezwaren in te brengen.

T.E.W. SCHUMANN en V. VOSS, *Fuel* **13**, 249, 1934.

V

Uit een vergelijking van de formule van SKEIB met de exacte oplossing voor het geval van een oneindig lange verhitter met een van nul verschillende straal blijkt, dat deze benaderingsformule voor het door SKEIB gestelde doel niet voldoende nauwkeurig is.

G. SKEIB, *Zs. f. Met.* **4**, 32, 1950.
H. S. CARSLAW en J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford, 1947, p. 285.
Dit proefschrift paragraaf 17.

VI

De door ZUNKER gegeven theoretische behandeling van de diffusie van waterdamp in grond is onjuist.

F. ZUNKER in E. BLANCK's *Handbuch der Bodenlehre* Bd. VI, J. SPRINGER, Berlin, 1930, p. 205 - 207.

VII

De bewering van SCHMIDT en LEHMANN, dat bij de uitwisseling van koolzuur en zuurstof tussen grond en lucht kortperiodieke drukfluctuaties de voornaamste factor vormen, is onjuist.

W. SCHMIDT en P. LEHMANN, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa, 138, 823, 1929.

VIII

Door EDLEFSEN en ANDERSON wordt de kracht, welke een gram water in een poreus materiaal ondervindt, gelijk gesteld aan de negatieve gradiënt van de soortelijke vrije enthalpie van dit water. Dit is slechts geoorloofd, indien de gradiënt van de osmotische bijdrage tot de soortelijke vrije enthalpie nul is.

N. E. EDLEFSEN en A. B. C. ANDERSON, Hilgardia 15, 281, 1943.

IX

Tegen de door FLORY gegeven theoretische behandeling van de onderlinge ruimtelijke uitsluiting der verschillende segmenten van een lang kettingmolecule zijn ernstige bezwaren in te brengen.

P. J. FLORY, J. Chem. Phys. 17, 303, 1949.

X

a. De klimaatindeling van THORNTHWAITE is te verkiezen boven de tot dusver veelal toegepaste indeling van KÖPPEN, speciaal indien men landbouwkundige toepassingen beoogt.

b. Bij de studie, die VEEN heeft gewijd aan de klimaatindeling voor Nederland en omgeving volgens verschillende systemen, houdt deze auteur onvoldoende rekening met de beperkingen, welke in deze systemen liggen opgesloten.

C. W. THORNTHWAITE, The Geogr. Rev. 38, 55, 1948.

B. VEEN, Med. Landbouwhogeschool 49, Verh. 5, 1949.

XI

Een essentiële verbetering van de kwaliteit der weersverwachtingen, zowel die op korte als die op lange termijn, kan slechts worden verkregen via een verbeterde kwantitatieve beschrijving van de atmosferische processen. Men dient hierbij, meer dan tot dusver is geschied, de stratosferische processen mede in de beschouwingen te betrekken.

XII

Bij de opleiding van luchtvaartmeteorologen dient men aan de theorie en aan de praktijk van het vliegen aandacht te besteden.

XIII

Het grote aantal der bij de propaedeutische studie te Delft en te Wageningen te bestuderen vakken ontnemt de studenten de gelegenheid zich de te verwerken stof voldoende eigen te maken en zich op gebieden, welke buiten de vakstudie zijn gelegen, nader te oriënteren. Deze situatie dient als zeer ongewenst te worden beschouwd.

Aan de nagedachtenis van mijn Ouders

Aan mijn Vrouw

1. The first part of the report deals with the general situation of the country and the position of the various groups of the population.

2. The second part of the report deals with the economic situation of the country and the position of the various groups of the population.

3. The third part of the report deals with the social situation of the country and the position of the various groups of the population.

4. The fourth part of the report deals with the cultural situation of the country and the position of the various groups of the population.

5. The fifth part of the report deals with the political situation of the country and the position of the various groups of the population.

6. The sixth part of the report deals with the international situation of the country and the position of the various groups of the population.

7. The seventh part of the report deals with the future of the country and the position of the various groups of the population.

8. The eighth part of the report deals with the conclusion of the report and the position of the various groups of the population.

9. The ninth part of the report deals with the appendix of the report and the position of the various groups of the population.

10. The tenth part of the report deals with the bibliography of the report and the position of the various groups of the population.

11. The eleventh part of the report deals with the index of the report and the position of the various groups of the population.

12. The twelfth part of the report deals with the list of figures of the report and the position of the various groups of the population.

13. The thirteenth part of the report deals with the list of tables of the report and the position of the various groups of the population.

14. The fourteenth part of the report deals with the list of maps of the report and the position of the various groups of the population.

15. The fifteenth part of the report deals with the list of abbreviations of the report and the position of the various groups of the population.

VOORWOORD

Bij de voltooiing van dit proefschrift stel ik het op prijs een woord van dank te richten tot allen, die aan het tot stand komen er van direct of indirect hebben bijgedragen.

Hooggeleerde KRAMERS, hooggeachte promotor, Gij hebt een belangrijk aandeel gehad in mijn vorming tot physicus. Het verheugt mij zeer, dat Gij thans mijn promotor zijt.

Hooggeleerde VAN WIJK, onder Uw leiding is dit werk tot stand gekomen. In vele opzichten ben ik U dank verschuldigd. In het bijzonder voor het feit, dat Gij mij de gelegenheid hebt geboden weer wetenschappelijk werk te kunnen verrichten, nadat dit voor mij door de oorlogsomstandigheden gedurende vele jaren onmogelijk was geweest. Voor de hulp en belangstelling, alsmede voor de grote mate van vrijheid, die Gij mij hebt geschonken, ben ik U zeer erkentelijk.

Hooggeleerde PRINS, veel heb ik van U geleerd in de tijd gedurende welke ik als assistent bij U mocht werken. Ook daarna hebt Gij steeds belangstelling voor mijn werk en mijn persoonlijk leven getoond. Gaarne wil ik U hiervoor en voor de hulp, die ik van U mocht ontvangen, op deze plaats mijn dank betuigen.

Hooggeleerde VAN DER HELD, U dank ik voor de nuttige discussies, die ik met U mocht hebben en voor de mij geboden gelegenheid het op Uw laboratorium verrichte experimentele werk te leren kennen.

Zeergeleerde VAN LOHUIZEN, het eerste onderwijs in de natuurkunde mocht ik van U ontvangen. Van Uw liefde voor de natuurwetenschappen wist Gij Uw leerlingen deelgenoot te maken. Bovendien hebt Gij voor mij steeds een vaderlijke vriend willen zijn, hetgeen ik ook in de oorlogsjaren mocht ondervinden. Voor het vele dat Gij voor mij hebt gedaan wil ik U hartelijk danken.

Een bijzonder woord van dank komt toe aan de redactie van de Mededelingen van de Landbouwhogeschool voor haar bereidwilligheid dit proefschrift als Verhandeling te willen opnemen.

De Heren Dr D. J. DOEGLAS en A. J. BOOMER ben ik dank verschuldigd voor het verrichten van een mineralogisch onderzoek van het bij mijn experimenten gebruikte zand.

Collegae en overig personeel van het Laboratorium voor Natuur- en Weerkunde van de Landbouwhogeschool dank ik voor de prettige samenwerking. In het bijzonder dank ik jullie, beste VOS en DE WIT, voor de ondervonden vriendschap en hulp. Beste ADMIRAAL, je vaardigheid, geduld en goed humeur zijn bij het experimentele werk van grote waarde geweest. De hulp van de Heer K. K. VERVELDE bij het rekenwerk wil ik ook gaarne memoreren.

Tenslotte wil ik op deze plaats ook U allen danken, die mij in de bezettingstijd hebt willen helpen. Het contact met U is voor mijn geestelijke vorming van grote betekenis geweest.

MEDEDELINGEN VAN DE LANDBOUWHOGESCHOOL TE WAGENINGEN/NEDERLAND

52 (1) 1-73 (1952)

INHOUD

	P.
Inleiding	2
HOOFDSTUK I – Theorie van de diëlectrische constante, de magnetische permeabiliteit, het electrisch- en het warmtegeleidingsvermogen van granulaire stoffen	
1. Inleiding	3
2. Algemene grondslagen	4
3. Overzicht van verschillende theorieën	7
a) De theorie van MAXWELL–BURGER–EUCKEN	7
b) De theorie van OLLENDORFF	8
c) De theorie van BÖTTCHER–POLDER en VAN SANTEN	9
d) De differentiële theorie volgens BRUGGEMAN	10
e) Nadere beschouwing van de differentiële theorie	12
4. De theorie van RAYLEIGH	13
5. De invloed van de onderlinge aanraking der korrels	15
6. De invloed van de „temperatuursprong” in granulaire stoffen met een gasvormig medium	18
7. Convectie en straling	20
8. Vergelijking van de theorie met experimentele gegevens	21
a) Metingen van de diëlectrische constante van kristalpoeders	21
b) Diffusiemetingen	24
c) Metingen van het electrisch geleidingsvermogen	24
d) Metingen van het warmtegeleidingsvermogen	25
9. Samenvatting en conclusies	27
HOOFDSTUK II – Warmtetransport in verband met dampdiffusie	
10. De theorie van KRISCHER	30
11. Gasdiffusie in grond	31
HOOFDSTUK III – Het meten van het warmtegeleidingsvermogen van grond	
A. Laboratoriummetingen	33
12. Vochttransport tijdens de meting	33
13. Vroegere metingen	33
14. De aanloopmethode	34
a) Principe van de aanloopmethode	34
b) De meetopstelling	36
c) Metingen aan zand	37
d) Het vochttransport	40

	P.
B. Veldmetingen	41
15. De methode van ALBRECHT	41
16. De aanloopmethode	42
17. De methode van SKEIB	46
HOOFDSTUK IV – Berekening van het warmtegeleidingsvermogen van grond	
en vergelijking van theoretische en experimentele waarden	47
18. De theorie van MAXWELL–BURGER–EUCKEN	47
19. Resultaten voor zand	48
20. Metingen van KERSTEN	53
a) Grofkorrelige gronden	53
b) Fijnkorrelige gronden	54
c) Veengrond	56
21. Droge grond	57
22. Samenvatting en conclusies	58
AANHANGSEL 1 – De differentiële theorie voor $N > 1$	60
AANHANGSEL 2 – De theorie van het geleidingsvermogen volgens RAYLEIGH	62
Summary	69
Literaturopgave	72
Notatie en eenheden	73

INLEIDING

Het warmtetransport in grond geschiedt hoofdzakelijk door geleiding; straling en convectie spelen slechts een ondergeschikte rol. Bij een quantitative beschrijving van de warmtebeweging door geleiding in een materiaal, worden de eigenschappen van het materiaal gekarakteriseerd door twee thermische grootheden, n.l. 1e de coëfficiënt van het warmtegeleidingsvermogen, λ , in het vervolg kortweg het warmtegeleidingsvermogen genoemd en 2e de temperatuurvereffeningscoëfficiënt, a . Tussen beide grootheden bestaat het verband $\lambda = \rho ca$, waarin ρ de soortgelijke massa en c de soortelijke warmte voorstelt. Kennis van λ en a is van belang in verband met toepassingen op landbouwkundig, meteorologisch en technisch gebied.

Aangezien grond niet een homogene stof is, doch een granulair materiaal, bestaande uit vaste bestanddelen, water en lucht, kan men slechts van gemiddelde waarden van λ en a spreken voor een volume grond, dat een groot aantal gronddeeltjes met de bijbehorende water- en luchthoeveelheden bevat. Soms spreekt men ook van de schijnbare thermische grootheden van een granulaire stof.

Vanzelfsprekend hangen de waarden van λ en van a af van de grondsoort en van de volumeverhoudingen van vaste stof, water en lucht. Indien men het

verband tussen één dezer grootheden, b.v. λ , en het vochtgehalte kent, dan bestaat de mogelijkheid het vochtgehalte door meting van λ experimenteel te bepalen.

Metingen van λ voor diverse grondsoorten bij uiteenlopende vochtgehalten zijn door verschillende onderzoekers verricht. Ook heeft men op diverse wijzen getracht door meting van het warmtetransport in de grond tot een bepaling van het vochtgehalte te komen, tot dusver echter zonder belangrijk resultaat. De voornaamste moeilijkheid is hierbij gelegen in het feit, dat een theoretische interpretatie van de meetresultaten in het algemeen ontbreekt. Hierdoor is men niet in staat de resultaten, die voor een bepaalde grond werden verkregen, op andere gronden toe te passen, zodat men b.v. in voorkomende gevallen voor iedere grond afzonderlijk het verband tussen het warmtegeleidingsvermogen enerzijds en het vochtgehalte en de volumefractie van de vaste stof anderzijds, experimenteel moet vastleggen. Een vergelijking van de verschillende meetresultaten wordt bovendien bemoeilijkt door de veelal geringe meetnauwkeurigheid.

In dit proefschrift wordt getracht een bijdrage tot de studie van de warmtegeleiding in gronden te leveren, door:

a) Een methode aan te geven, waarmee men het warmtegeleidingsvermogen van grond bij verschillende vochtgehalten nauwkeurig kan meten. Het voornaamste voordeel van deze methode boven de tot dusver gebruikte is gelegen in het feit, dat de vochtverplaatsing tijdens de meting zeer gering is. Bovendien kan de methode in het veld worden toegepast zonder de natuurlijke ligging van de grond ernstig te verstoren.

b) Een theoretische verwerking van het experimentele materiaal te geven.

In de hoofdstukken I en II worden verschillende aspecten van de theorie van de warmtegeleiding in granulaire stoffen besproken. De theoretische resultaten zijn ook van toepassing op in de techniek gebruikte granulaire materialen. In hoofdstuk III wordt de experimentele bepaling van het warmtegeleidingsvermogen behandeld en worden enige meetresultaten vermeld. In hoofdstuk IV worden de uitkomsten van de beide eerste hoofdstukken toegepast bij de berekening van het warmtegeleidingsvermogen van grond in afhankelijkheid van het vochtgehalte en van de aard en de volumefractie van de vaste stof. De theoretische waarden worden vergeleken met de uitkomsten van door anderen en door onszelf verrichte experimenten.

HOOFDSTUK I

THEORIE VAN DE DIËLECTRISCHE CONSTANTE, DE MAGNETISCHE PERMEABILITEIT, HET ELECTRISCH- EN HET WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN VAN GRANULAIRE STOFFEN

1. INLEIDING

De berekening van de diëlectrische constante, de magnetische permeabiliteit, het electrisch- en het warmtegeleidingsvermogen van granulaire stoffen uit de overeenkomstige grootheden voor de samenstellende delen is van belang in verband met verschillende technische toepassingen van granulaire materialen.

Onder een granulaair materiaal willen wij verstaan: een stof opgebouwd uit een homogeen medium, waarin zich korrels, bestaande uit één of meer van het medium verschillende, homogene stoffen, bevinden. Bovendien willen wij – tenzij anders is vermeld – veronderstellen, dat de ruimtelijke verdeling der korrels volkomen ongeordend is, d.w.z. dat bij de verdeling der korrels over de beschikbare ruimte slechts de ruimtelijke uitgebreidheid der korrels als regelende factor optreedt.

De analogie in de mathematische beschrijving van de theorie van het elektrische veld (veldsterkte en diëlectrische verplaatsing), het magnetische veld (veldsterkte en magnetische inductie), de elektrische geleiding en de warmtegeleiding (in de stationnaire toestand), maakt het mogelijk eenzelfde theorie voor het berekenen van elk der bovengenoemde constanten voor een granulaire stof te geven. Zoals reeds elders⁴⁷⁾ door de auteur werd aangetoond, kan men aan deze grootheden nog toevoegen een „geleidingsvermogen”, dat de diffusiesnelheid beschrijft in een granulaire stof, waarvan het medium gasvormig is. Voor de volledigheid volgt hieronder een overzicht van de analoge grootheden in de verschillende gebieden:

TABEL I
Analoge grootheden
(Analogous quantities)

Gebied	Corresponderende grootheden		
Electrostatica	veldsterkte E	verplaatsing D	diëlectrische constante ϵ
Magnetostatica	veldsterkte H	inductie B	magnetische permeabiliteit μ
Electrische geleiding	veldsterkte E	stroomdichtheid i	geleidingsvermogen σ
Warmtegeleiding	temperatuurgradiënt	warmte-stroomdichtheid	geleidingsvermogen λ
Diffusie	partiële-drukgradiënt	diffusie-stroomdichtheid q(v)	diffusiegeleidingsvermogen

In dit hoofdstuk zullen verschillende aspecten van de theorie worden besproken, speciaal met het oog op toepassing voor de berekening van het warmtegeleidingsvermogen. In de twee volgende paragrafen zullen enige bestaande theorieën onderling worden vergeleken. Daar deze theorieën hoofdzakelijk voor de berekening van de diëlectrische constante werden ontwikkeld, zal de notatie van dit gebied worden gebezigd.

2. ALGEMENE GRONDSLAGEN

Wij beschouwen een granulaire stof, bestaande uit een isotroop medium met diëlectrische constante ϵ_0 , waarin zich korrels van verschillende soort bevinden. Korrels, welke eenzelfde diëlectrische constante hebben en onderling gelijkvormig zijn, worden tot dezelfde soort gerekend. De diëlectrische constante van

korrels van de i -de soort zij ε_i (wij veronderstellen dat de korrels alle uit isotrope stoffen bestaan), hun volumefractie x_i . De volumefractie van het medium zij x_0 , zodat als N het aantal soorten korrels is:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^N x_i = 1.$$

Wij stellen ons voor, dat deze granulaire stof zich als diëlectricum tussen de platen van een zeer grote plaatcondensator bevindt en beperken onze beschouwingen tot dat deel van het diëlectricum (volume = V), waarin de randeffecten te verwaarlozen zijn. Wij definiëren nu de volgende grootheden:

De gemiddelde elektrische veldsterkte:

$$(2) \quad \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{V} \int \mathbf{E} dV = \frac{1}{V} \int \sum_{i=0}^N \mathbf{E}_i dV = \sum_{i=0}^N x_i \bar{\mathbf{E}}_i,$$

met:

$$(2a) \quad \bar{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{V_i} \int \mathbf{E}_i dV_i.$$

De gemiddelde diëlectrische verplaatsing:

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= \frac{1}{V} \int \mathbf{D} dV = \sum_{i=0}^N x_i \bar{\mathbf{D}}_i = \sum_{i=0}^N x_i \varepsilon_i \bar{\mathbf{E}}_i \\ &= \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \sum_{i=1}^N x_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \bar{\mathbf{E}}_i. \end{aligned}$$

De gemiddelde of schijnbare diëlectrische constante van het materiaal:

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{\bar{\mathbf{D}}}{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i x_i \bar{\mathbf{E}}_i}{\sum_{i=0}^N x_i \bar{\mathbf{E}}_i}.$$

Voor het verkrijgen van een volledige oplossing van het gestelde probleem zou men dus alle $\bar{\mathbf{E}}_i$ moeten berekenen. Aangezien een exacte berekening der $\bar{\mathbf{E}}_i$ op mathematische moeilijkheden strandt*), moet men vereenvoudigende veronderstellingen invoeren voor het verkrijgen van een benaderde oplossing. Aan de bestaande theorieën wordt een hypothese van de volgende aard ten grondslag gelegd:

Ter berekening van $\bar{\mathbf{E}}_i$ beschouwt men elke korrel van de i -de soort als zijnde omgeven door een homogeen, isotroop medium met diëlectrische constante ε' , waarin op grote afstand van de beschouwde korrel een gemiddelde veldsterkte \mathbf{E}' heerst. De diverse theorieën verschillen dan hoofdzakelijk in de gemaakte keuze van ε' en \mathbf{E}' .

Het probleem van de berekening van $\bar{\mathbf{E}}_i$ is nu herleid tot dat voor één deeltje met diëlectrische constante ε_i , dat gebracht wordt in een medium met diëlec-

*) Vergelijk aanhangsel 2.

trische constante ε' waarin een homogeen veld \mathbf{E}' heerst. Tussen \mathbf{E}_i en \mathbf{E}' bestaat nu een tensorieel verband:

$$(5) \quad (\mathbf{E}_i)_k = \sum_{l=1}^3 T_{kl} \mathbf{E}'_l,$$

waarbij T_{kl} afhangt van ε' , ε_i en de vorm van het deeltje. Nemen wij nu het gemiddelde over alle korrels van de i -de soort en veronderstellen wij, dat hun oriëntatie ongeordend is, dan geldt ³³⁾:

$$(6) \quad \bar{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \mathbf{E}' = K_i' \mathbf{E}'.$$

Een gesloten uitdrukking voor de diagonaal-elementen van T_{kl} kan slechts gegeven worden voor ellipsoïdale deeltjesvormen. Is het deeltje een ellipsoïde met halve assen a , b , en c , dan is ⁹⁾:

$$(7) \quad T_{11} = T_a = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon'} - 1\right) g_a},$$

$$(8) \quad g_a = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)^{1/2} (b^2 + u)^{1/2} (c^2 + u)^{1/2}}.$$

g_a is de depolariserende factor van de ellipsoïde in de richting van de a -as. Verder geldt:

$$g_a + g_b + g_c = 1.$$

Voor enkele bijzondere gevallen, welke in het vervolg ter sprake zullen komen gelden de volgende waarden voor g_a , g_b en g_c :

a) $a = b = c$, bolvormige deeltjes:

$$(8a) \quad g_a = g_b = g_c = \frac{1}{3}.$$

b) $a = b = nc$, omwentelingsellipsoïden:

1) $n > 1$, afgeplatte omwentelingsellipsoïden:

$$(8 b_1) \quad g_a = g_b = \frac{n^2}{2(n^2 - 1)^{1/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n^2} - \arctg \frac{1}{(n^2 - 1)^{1/2}} \right\},$$

$$(8 b_1) \quad g_c = \frac{n^2}{n^2 - 1} - \frac{n^2}{(n^2 - 1)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{(n^2 - 1)^{1/2}} \right\}.$$

2) $n < 1$, langgerekte omwentelingsellipsoïden:

$$(8 b_2) \quad g_a = g_b = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - n^2} - \frac{n^2}{2(1 - n^2)^{3/2}} \ln \frac{1 + (1 - n^2)^{1/2}}{1 - (1 - n^2)^{1/2}} \right\},$$

$$(8 b_2) \quad g_c = \frac{n^2}{1 - n^2} \left\{ \frac{1}{2(1 - n^2)^{1/2}} \ln \frac{1 + (1 - n^2)^{1/2}}{1 - (1 - n^2)^{1/2}} - 1 \right\}.$$

c) $a = nb, c = \infty$, lange cilindrs met ellipsvormige doorsnede:

$$(8c) \quad g_a = \frac{1}{n+1}, g_b = \frac{n}{n+1}, g_c = 0.$$

d) $b = c = \infty$, lamellen:

$$(8d) \quad g_a = 1, g_b = g_c = 0.$$

Voor een niet ellipsoïdaal deeltje kan men gemakkelijk inzien, dat zijn invloed op de diëlectrische constante van de granulaire stof zal liggen tussen die van een omgeschreven en van een ingeschreven ellipsoïde met diëlectrische constante ε_i . Dit is evident voor het geval van het geleidingsvermogen, waar de bewering berust op de volgende stelling⁴²⁾:

De weerstand van een geleider kan slechts vermeerderen (verminderen) of gelijk blijven, wanneer men een deel van de geleider vervangt door een geleider met een grotere (kleinere) weerstand.

3. OVERZICHT VAN VERSCHILLENDE THEORIEËN

a) *De theorie van MAXWELL*²⁹⁾ - BURGER⁹⁾ - EUCKEN¹⁴⁾; $\varepsilon' = \varepsilon_0, \mathbf{E}' = \bar{\mathbf{E}}_0$.

Deze theorie, waarbij $\varepsilon' = \varepsilon_0$ en $\mathbf{E}' = \bar{\mathbf{E}}_0$ wordt genomen, werd ontwikkeld voor het geval van het electricch geleidingsvermogen door MAXWELL voor bolvormige korrels. Zij werd door BURGER uitgebreid voor ellipsoïdale korrels en door EUCKEN voor het eerst toegepast op de berekening van het warmtegeleidingsvermogen. Voor zover kon worden nagegaan is de uitbreiding voor $N > 1$ eveneens van EUCKEN afkomstig.

Delen wij in (4) teller en noemer door $\bar{\mathbf{E}}_0$, dan vinden wij:

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i x_i k_i}{\sum_{i=0}^N x_i k_i}, \quad \text{waarin:}$$

$$(9a) \quad k_i = \frac{\bar{\mathbf{E}}_i}{\bar{\mathbf{E}}_0}$$

en voor ellipsoïdale korrels volgens (6) en (7):

$$(9b) \quad k_i = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} - 1\right) g_a}.$$

De veronderstellingen $\varepsilon' = \varepsilon_0$ en $\mathbf{E}' = \bar{\mathbf{E}}_0$ houden in, dat men de wisselwerking tussen de korrels verwaarloost. Dit zal men met goede benadering mogen doen, zolang de afstanden tussen naburige korrels groot zijn t.o.v. de dimensies der korrels, aangezien het extra veld, dat één korrel veroorzaakt in eerste benadering dat van een dipool zal zijn, waarvan het moment evenredig is met het volume van de korrel. Dit is zeker het geval, zolang

$$x_i \ll 1, \quad i \geq 1.$$

De theorie werd door MAXWELL en BURGER slechts voor dit geval toegepast.

b) *De theorie van OLLENDORFF* ³⁰⁾ $\epsilon' = \epsilon_0$, $\mathbf{E}' = \bar{\mathbf{E}}_p$.

Deze theorie werd door OLLENDORFF ontwikkeld voor de berekening van de magnetische permeabiliteit van een materiaal bestaande uit een medium met $\mu = 1$, waarin zich ijzerdeeltjes met $\mu = \mu_1$, bevinden. Hij beschouwt ellipsoïdale deeltjes, die onderling gelijkvormig (dus $N = 1$) en gelijk gericht zijn met één as in de richting van het uitwendige veld. De wisselwerking tussen naburige deeltjes wordt in rekening gebracht volgens een methode, die analoog is aan de door LORENTZ ingevoerde voor de berekening van de diëlectrische constante uit de moleculaire polariseerbaarheid.

De berekening loopt dan als volgt (de notatie wijkt in zoverre af van de door OLLENDORFF gebruikte, dat voor de diëlectrische constante van het medium ϵ_0 i.p.v. 1 is gezet):

Veronderstel, dat één ellipsoïde uit het materiaal wordt verwijderd, terwijl de polarisatie van de overige ellipsoïden onveranderd blijft. Voor het veld in de aldus ontstane holte, het z.g. polariserende of inwendige veld, leidt OLLENDORFF – uitgaande van een homogene polarisatie $\bar{\mathbf{P}}$ – de volgende formule af:

$$(10) \quad \bar{\mathbf{E}}_p = \bar{\mathbf{E}} + g \, 4 \pi \bar{\mathbf{P}} / \epsilon_0,$$

waarbij g de depolariserende factor in de richting van $\bar{\mathbf{E}}$ is en $\bar{\mathbf{P}}$ de gemiddelde polarisatie. Is $\bar{\mathbf{P}}_1$ de polarisatie per volume-eenheid van één ellipsoïde, dan is:

$$(11) \quad 4 \pi \bar{\mathbf{P}}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \bar{\mathbf{E}}_1, \quad \text{terwijl analoog aan (7):}$$

$$(12) \quad \bar{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - 1\right) g} \bar{\mathbf{E}}_p, \quad \text{zodat:}$$

$$(13) \quad 4 \pi \bar{\mathbf{P}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_p \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) g} \quad \text{en:}$$

$$(14) \quad 4 \pi \bar{\mathbf{P}} = x_1 \cdot 4 \pi \bar{\mathbf{P}}_1 = x_1 (\bar{\mathbf{E}} + g \, 4 \pi \bar{\mathbf{P}} / \epsilon_0) \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) g}.$$

Algebraïsche herleiding geeft:

$$4 \pi \bar{\mathbf{P}} = \frac{x_1 \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) g (1 - x_1)} \bar{\mathbf{E}}, \quad \text{zodat:}$$

$$(15) \quad \epsilon = \frac{\epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + 4 \pi \bar{\mathbf{P}}}{\bar{\mathbf{E}}} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \{x_1 + (1 - x_1) g\}}{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) (1 - x_1) g}.$$

Vergelijking van dit resultaat met het onder a verkregene voor hetzelfde geval – men schrijve: $k_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) g}$ – leert, dat beide resultaten identiek zijn.

Naar aanleiding van deze theorie merken wij nog op, dat:

1. Een soortgelijke afleiding gegeven kan worden voor media met $\epsilon_0 \neq 1$, waarbij men $\bar{\mathbf{P}}$ en $\bar{\mathbf{P}}_1$ als de polarisatie van de korrels, verminderd met de polarisatie, die het medium bij dezelfde veldsterkte zou vertonen, moet op-

vatten. In het algemeen moet elke theorie voldoen aan het volgende gelijkvormigheidsprincipe: Wanneer men ε_0 en ε_1 beide met α vermenigvuldigt, wordt de bijbehorende ε ook α maal zo groot.

2. Formule (10) voor bolvormige deeltjes in de bekende LORENTZ-formule voor het inwendige veld overgaat. Deze formule geldt eveneens voor elke ellipsoïdale holte, die gelijkvormig en gelijkstandig is met de korrels, mits men de polarisatie buiten de holte als homogeen mag beschouwen. Bij de bekende op (10) gebaseerde afleiding van de formule van CLAUSIUS-MOSOTTI⁵⁾ slaat men om een gegeven molecule een bol en toont aan, dat de invloed van de moleculen buiten de bol door (10) wordt weergegeven, terwijl die van de moleculen binnen de bol nul is. Het laatste geldt echter alleen onder de volgende vereenvoudigende veronderstellingen:

- 1) de moleculen zijn ongeordend over de ruimte verdeeld, of gerangschikt in reguliere symmetrie,
- 2) de moleculen hebben dipoolmomenten die onderling gelijk en gelijkgericht zijn,
- 3) veelpolen worden verwaarloosd,
- 4) statistische correlaties worden verwaarloosd.

Onder deze vereenvoudigende veronderstellingen geldt dezelfde redenering voor de korrels in een granulaair materiaal. Het is nu ook begrijpelijk, dat het resultaat van de berekening hetzelfde is als dat van BURGER, aangezien bij de afleiding van (10) de wisselwerking tussen naburige dipolen wegvalt.

c) *De theorie van BÖTTCHER*⁶⁾ – POLDER en VAN SANTEN³³⁾. $\varepsilon' = \varepsilon$, $\mathbf{E}' = \bar{\mathbf{E}}$.

Uitgaande van (3) vinden wij na deling door $\bar{\mathbf{E}}$:

$$(16) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^N x_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) K_i, \quad \text{met:}$$

$$(17) \quad K_i = \frac{\bar{\mathbf{E}}_i}{\mathbf{E}} \quad \text{en voor ellipsoïdale korrels met bovenstaande waarden van } \varepsilon' \text{ en } \mathbf{E}':$$

$$(18) \quad K_i = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} - 1\right) g_a}.$$

Substitutie in (16) en herleiding geeft de volgende impliciete formule voor ε :

$$(19) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \left\{ x_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \sum_{a,b,c} \frac{1}{\varepsilon + (\varepsilon_i - \varepsilon) g_a} \right\} \right]^{-1}.$$

Voor bolvormige deeltjes vindt men hieruit:

$$(20) \quad \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon} = \sum_{i=0}^N x_i \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2\varepsilon},$$

een formule, die door BÖTTCHER reeds langs andere weg werd afgeleid voor $N = 1$ en $\varepsilon_0 = 1$. Het merkwaardige in formule (20) is, dat het medium en de korrels op geheel symmetrische wijze erin voorkomen.

d. De differentiële theorie volgens BRUGGEMAN⁸⁾; $\varepsilon' = \varepsilon$, $\mathbf{E}' = \overline{\mathbf{E}}$.

Het verschil tussen deze theorie en de voorgaande is, dat men ter verkrijging van een volumefractie x_1 , de korrels van de eerste soort bij kleine hoeveelheden met volumefractie Δx_1 denkt toegevoegd en vervolgens tot de limiet $\Delta x_1 \rightarrow 0$ overgaat. Deze methode werd het eerst toegepast door BRUGGEMAN voor bolvormige deeltjes en lamellen, waarbij in beide gevallen $N = 1$. Een benadering voor andere deeltjesvormen verkreeg hij door interpolatie tussen deze beide „extreme” vormen.

De berekening die hier gevolgd wordt is iets verschillend van die van BRUGGEMAN en geldt voor alle ellipsoïdale korrelvormen.

Gaan wij uit van een situatie, waarbij wij in een medium met ε_0 gelijkvormige korrels hebben met ε_1 en volumefractie x_1 , dan geldt algemeen volgens (4):

$$(21) \quad \varepsilon(x_1) = \frac{\varepsilon_0(1-x_1) + \varepsilon_1 x_1 k_1(x_1)}{1-x_1 + x_1 k_1(x_1)} = \varepsilon_0 \frac{1 + x_1 \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} k_1(x_1) - 1 \right\}}{1 + x_1 \{k_1(x_1) - 1\}},$$

$$\text{met} \quad k_1(x_1) = \frac{\overline{\mathbf{E}}_1(x_1)}{\mathbf{E}_0(x_1)}.$$

Beschouwen wij vervolgens een situatie, waarbij de volumefractie van de korrels $x_1 + \Delta x_1$ bedraagt. De korrels met volumefractie Δx_1 bevinden zich dan in een (niet homogeen) medium met diëlectrische constante $\varepsilon\left(\frac{x_1}{1-\Delta x_1}\right)$.

Toepassing van (21) geeft:

$$(21a) \quad \varepsilon(x_1 + \Delta x_1) = \varepsilon\left(\frac{x_1}{1-\Delta x_1}\right) \frac{1 + \Delta x_1 \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon\left(\frac{x_1}{1-\Delta x_1}\right)} K_1(x_1, \Delta x_1) - 1 \right\}}{1 + \Delta x_1 \{K_1(x_1, \Delta x_1) - 1\}},$$

$$\text{met} \quad K_1(x_1) = \frac{\overline{\mathbf{E}}_1(x_1 + \Delta x_1)}{\mathbf{E}(x_1, \Delta x_1)}.$$

$\overline{\mathbf{E}}_1(x_1 + \Delta x_1)$ is hierbij de gemiddelde veldsterkte in de korrels, $\overline{\mathbf{E}}(x_1, \Delta x_1)$ de gemiddelde veldsterkte in het granulaire materiaal met uitzondering van de nieuw ingebrachte korrels met volumefractie Δx_1 . Ontwikkeling naar machten van Δx_1 geeft:

$$(21b) \quad \varepsilon(x_1) + \Delta x_1 \frac{d\varepsilon}{dx_1} + (\Delta x_1)^2 \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{dx_1^2} + \dots = \\ = \varepsilon(x_1) + \Delta x_1 \left\{ x_1 \frac{d\varepsilon}{dx_1} + K_1(x_1) (\varepsilon_1 - \varepsilon(x_1)) \right\} + \dots$$

en voor $\Delta x_1 \rightarrow 0$:

$$(22) \quad (1-x_1) \frac{d\varepsilon}{dx_1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_1, \text{ met } K_1 = \frac{\overline{\mathbf{E}}_1}{\mathbf{E}} = \text{een nog onbekende functie van } x_1.$$

Uitgaande van de hypothesen van BRÜGGEMAN $\varepsilon' = \varepsilon$, $E' = \bar{E}$, moeten wij voor ellipsoidale korrels evenals onder c schrijven:

$$(18) \quad K_1 = \frac{1}{3} \sum_{a, b, c} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - 1\right) g_a}$$

Integratie van (22) in combinatie met (18) levert geen moeilijkheden. Voor omwentelingsellipsoiden met $g_a = g_b$, $g_c = 1 - 2g_a$, vinden wij:

$$(23) \quad 1 - x_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^B \left\{ \frac{3 + (2 - 3g_a)(\varepsilon_1/\varepsilon - 1)}{3 + (2 - 3g_a)(\varepsilon_1/\varepsilon_0 - 1)} \right\}^C, \quad \text{waarin:}$$

$$B = \frac{1 - 3g_a + 6g_a^2}{1 + 3g_a}, \quad C = -\frac{2(1 - 3g_a)^2}{(2 - 3g_a)(1 + 3g_a)}$$

Voor bollen ($g_a = \frac{1}{3}$) volgt hieruit:

$$(23a) \quad 1 - x_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}},$$

voor lamellen ($g_a = 0$):

$$(23b) \quad 1 - x_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}$$

De formules (23a) en (23b) werden reeds door BRÜGGEMAN afgeleid.

Het resultaat van BRÜGGEMAN verschilt aanmerkelijk van dat van POLDER en VAN SANTEN. Uitgewerkte voorbeelden zijn in de figuren 1 en 2 getekend.

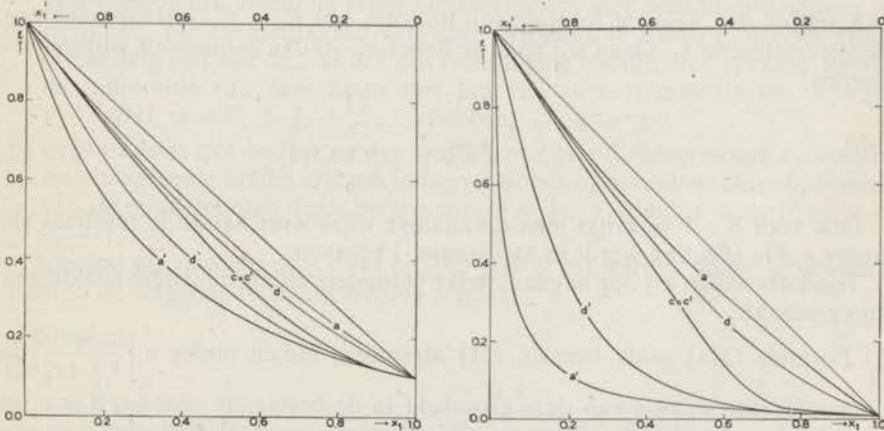


Fig. 1 en 2. Verband tussen ε en x_1 voor bolvormige korrels.

Krommen a en a' volgens MAXWELL, c en c' volgens BÖTTCHER, d en d' volgens BRÜGGEMAN. (Relation between ε and x_1 for spherical particles. Curves a and a' according to MAXWELL, c and c' according to BÖTTCHER, d and d' according to BRÜGGEMAN).

Fig. 1. $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 0.1$ (zonder accenten) en 10 (met accenten).

(Fig. 1. $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 0.1$ [without primes] and 10 [with primes]).

Fig. 2. $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 0.01$ (zonder accenten) en 100 (met accenten).

(Fig. 2. $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 0.01$ [without primes] and 100 [with primes]).

e. Nadere beschouwing van de differentiële theorie.

Het blijkt nu mogelijk de idee van de differentiële theorie anders uit te werken dan BRUGGEMAN deed, d.w.z. zonder zijn veronderstellingen aangaande de onbekende functie K_1 te maken. In feite kan men deze functie niet meer willekeurig kiezen, doch is de waarde ervan bepaald door vergelijking (22) in combinatie met vergelijking (16). Laatstgenoemde luidt voor $N = 1$:

$$(16a) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + x_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) K_1.$$

Door eliminatie van K_1 uit (16a) en (22) vinden wij:

$$(24) \quad (1 - x_1) \frac{d\varepsilon}{dx_1} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon_0)}{x_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}, \quad \text{of:}$$

$$(24a) \quad \left(\frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \right) d\varepsilon = \left(\frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{x_1} \right) dx_1$$

Integratie levert:

$$(25) \quad \ln \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon} = \ln \frac{x_1}{1 - x_1} + \ln C, \text{ waarbij } C \text{ een integratie-constante is,}$$

onafhankelijk van x_1 . Dus:

$$(25a) \quad \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon} = C \frac{x_1}{1 - x_1} = \frac{C x_1}{x_0}, \quad \text{of:}$$

$$(25b) \quad \varepsilon = \frac{x_0 \varepsilon_0 + C x_1 \varepsilon_1}{x_0 + C x_1}.$$

Wij vinden dus weer de formule van BURGER, met $K_1 = C$, onafhankelijk van de volumefractie x_1 . Gaan wij naar de limiet $x_1 \rightarrow 0$ dan is dus voor ellipsoidale korrels:

$$(9b) \quad C = k_1 = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) g_a}.$$

Ook voor $N > 1$ verkrijgt men op analoge wijze weer hetzelfde resultaat als onder a. De afleiding wordt in aanhangsel 1 gegeven.

Tenslotte willen wij nog nagaan, welke veronderstellingen bij deze afleidingen zijn gemaakt.

1) Formule (21a) geldt evenals (21) [algemeen, indien onder $\varepsilon \left(\frac{x_1}{1 - \Delta x_1} \right)$ de

gemiddelde waarde van deze grootte in de bestaande situatie, d.w.z. na het inbrengen van de nieuwe korrels wordt genomen. Hierin schuilt nu een moeilijkheid, aangezien ε niet alleen van de volumefractie, doch ook van de rangschikking der korrels afhangt. Gaan wij, zoals steeds, uit van een volkomen ongeordende verdeling der korrels over de ruimte, dan zal na het afzonderen van de korrels met volumefractie Δx_1 , de rangschikking van de overige korrels met volumefractie x_1 in de nu totaal beschikbare ruimte met volumefractie $1 - \Delta x_1$ niet meer geheel overeenstemmen met de ongeordende rangschikking. Dit volgt reeds uit het feit, dat de gemiddelde afstand tussen

de middelpunten van twee korrels met toenemende volumefractie afneemt. Formule (22) zal dus alleen geldig zijn, wanneer:

- $\varepsilon(x_1)$ niet van de rangschikking afhangt, dus b.v. wanneer de wisselwerking tussen de korrels verwaarloosd kan worden;
 - het kleine verschil in rangschikking in de ontwikkeling van $\varepsilon\left(\frac{x_1}{1-\Delta x_1}\right)$ aanleiding geeft tot termen, welke klein van de orde $(\Delta x_1)^2$ of van hogere orde zijn.
- 2) De grensovergang $\Delta x_1 \rightarrow 0$ impliceert, dat korrels met willekeurig kleine afmetingen in willekeurig grote aantallen aanwezig zijn.

In de nu volgende paragrafen zullen enige bijzondere aspecten van de theorie, welke bij de voorgaande algemene behandeling niet ter sprake zijn gebracht, kort worden behandeld. Dit zijn achtereenvolgens:

- De invloed van multipoolvelden.
- De invloed van de onderlinge aanraking der korrels.
- De invloed van de moleculaire structuur van de materie, speciaal met betrekking tot de warmtegeleiding.
- De invloed van convectie en straling.

4. DE THEORIE VAN RAYLEIGH

Reeds in 1892 werd er door RAYLEIGH op gewezen, dat de door MAXWELL afgeleide uitdrukking voor het geleidingsvermogen van een granulaire materiaal slechts in eerste benadering geldt. RAYLEIGH³⁵⁾ gaf aan, hoe men de theorie moet ontwikkelen voor de volgende gevallen:

- de granulaire stof bestaat uit een medium met geleidingsvermogen σ_0 , waarin zich congruente, oneindig lange cirkelcilinders met geleidingsvermogen σ_1 bevinden. De rangschikking van deze cilinders is zodanig, dat de assen evenwijdig zijn aan de z -as van een rechthoekig coördinaten systeem, terwijl de snijpunten van deze assen met het vlak $z = 0$ coördinaten $x = la$, $y = m\beta$ ($l, m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) hebben.
- de granulaire stof bestaat uit een medium met geleidingsvermogen σ_0 , waarin zich congruente bollen met geleidingsvermogen σ_1 bevinden. De coördinaten van de middelpunten dezer bollen zijn: $x = la$, $y = m\beta$, $z = n\gamma$ ($l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$).

Speciaal de gevallen $a = \beta$ (a) en $a = \beta = \gamma$ (b) werden nader uitgewerkt, waarbij de volgende formules werden afgeleid:

Geval a):

$$(26) \quad \sigma = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{2x_1}{\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} - x_1 - \frac{3s_4^2}{\pi^4} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} x_1^4 - \frac{7s_8^2}{\pi^8} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} x_1^8 + \dots} \right\},$$

$$(26a) \quad s_n = \sum_{m=m'=0}^{\infty} (m' + im)^{-n}, \quad m, m' = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \text{ met uitsluiting van } m = m' = 0.$$

Bij verwaarlozing van de termen met x_1^4 en hogere machten van x_1 , gaat deze formule over in die van BURGER voor hetzelfde geval.

In een volgende benadering vindt RAYLEIGH voor de coëfficiënt $3s_4^2/\pi^4$ de waarde 0.3058.

Geval b:

$$(27) \quad \sigma = \sigma_0 \left[1 + 3x_1 \left\{ \frac{\sigma_1 + 2\sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} - x_1 - 16 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{30/2} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + 4/3\sigma_0} S_4^2 x_1^{10/2} + \dots \right\}^{-1} \right]$$

In aanhangsel 2 wordt de afleiding van deze formule besproken*), terwijl tevens wordt aangetoond, hoe de theorie kan worden uitgebreid tot de gevallen, waarbij de bollen een rangschikking vertonen als in een kubisch midbloks rooster en als bij een kubische dichte pakking.

Bij verwaarlozing van de termen na x_1 in de vorm tussen accolades, gaat (27) over in de formule van MAXWELL. Een numerieke berekening geeft voor de coëfficiënt $16(3/4\pi)^{10/2} S_4^2$ de volgende waarden:

- 1) voor een enkelvoudig kubische rangschikking: 1.31,
- 2) voor een kubisch midblokse rangschikking: 0.129,
- 3) voor een kubische dichte pakking: 0.0752.

De verschillen tussen de theoretische waarden volgens MAXWELL en RAYLEIGH hangen bij een gegeven x_1 dus nog sterk af van de rangschikking der bollen. Deze verschillen zullen het grootst zijn bij grote x_1 en bij extreme waarden van de verhouding σ_1/σ_0 . Voor elk der behandelde rangschikkingen zijn in tabel II de berekende waarden van σ/σ_0 volgens MAXWELL en volgens RAYLEIGH voor de bij die rangschikking maximaal mogelijke waarde van x_1 (rakende bollen) weergegeven voor $\sigma_1/\sigma_0 = 0$ en voor $\sigma_1/\sigma_0 = \infty$. We merken hierbij op, dat de theorie van MAXWELL te lage waarden geeft voor $\sigma_1/\sigma_0 > 1$, te hoge waarden voor $\sigma_1/\sigma_0 < 1$.

TABEL II

Berekende waarden van σ/σ_0 volgens MAXWELL (index a) en volgens RAYLEIGH (index R)
(Computed values of σ/σ_0 according to MAXWELL [index a] and according to RAYLEIGH [index R] †)

	Enkelvoudige kubisch	Kubisch midbloks	Kubisch dicht gepakt
x_1 (max.)	0.524	0.680	0.740
σ_1/σ_0	0	0	0
σ_a/σ_0	0.377	0.249	0.190
σ_R/σ_0	0.348	0.231	0.184
σ_R/σ_a	0.923	0.928	0.968
σ_1/σ_0	∞	∞	∞
σ_a/σ_0	4.30	8.18	10.54
σ_R/σ_0	5.85	7.36	9.54
σ_R/σ_a	1.36	1.11	1.11

*) Zie aanhangsel 2 voor de definitie van S_4 .

†) σ_1 = conductivity of particles (spheres), σ_0 = conductivity of medium. x_1 = volume fraction of particles. 2nd column: cubic arrangement, 3rd column: cubic body-centred arrangement, 4th column: cubic face-centred arrangement.

Voor $\sigma_1/\sigma_0 = \infty$ wordt ook $\sigma = \infty$ voor het geval de bollen elkaar raken, zoals door SCHUMANN en VOSS³⁶⁾ reeds werd opgemerkt (zie ook de volgende paragraaf). In dit geval is het dus zeker niet geoorloofd de hogere termen van de reeksontwikkeling in (27) te verwaarlozen. De in tabel II vermelde theoretische waarden gelden trouwens ook reeds met goede benadering voor $\sigma_1/\sigma_0 \gg 1$, b.v. $\sigma_1/\sigma_0 = 1000$.

Een soortgelijke berekening voor het tweedimensionale geval a leert, dat hier de verschillen tussen de benadering van MAXWELL-BURGER en die van RAYLEIGH veel groter zijn, zoals ook te verwachten was.

Voor $\sigma_1/\sigma_0 = \infty$, is $(\sigma/\sigma_0)_a = 8.30$ en $(\sigma/\sigma_0)_R = 16.8$. De juiste waarde van σ/σ_0 is ∞ .

Voor $\sigma_1/\sigma_0 = 0$, is $(\sigma/\sigma_0)_a = 0.121$ en $(\sigma/\sigma_0)_R = 0.059$, terwijl de juiste waarde van $\sigma/\sigma_0 = 0$ voor dit geval.

5. DE INVLOED VAN DE ONDERLINGE AANRAKING DER KORRELS

Doordat de korrels van het granulaire materiaal op elkaar drukken en doordat de begrenzingsvlakken niet steeds gekromd zijn, zullen zij bij onderlinge aanraking in het algemeen contact-vlakjes met een van nul verschillend oppervlak bezitten.

Experimenteel blijkt de aanwezigheid van deze contactvlakjes b.v. bij metingen van het warmtegeleidingsvermogen aan granulaire stoffen, bestaande uit vaste korrels met een gas als medium, waarbij de druk van het gas sterk wordt verminderd. Het warmtegeleidingsvermogen nadert dan voor lage drukwaarden niet tot nul, maar tot een zeker restgeleidingsvermogen (λ_r). Dergelijke proeven zijn onder meer verricht door PRINS et al.³⁴⁾ aan glaspoeders in lucht, CO₂ en H₂, waarbij de laagst bereikte druk ongeveer 5×10^{-4} mm Hg bedroeg en door SCHUMANN en VOSS³⁶⁾ aan lood- en staalhagel in lucht en H₂, waarbij de druk tot ongeveer 2×10^{-3} mm Hg werd verlaagd. Het restgeleidingsvermogen bedroeg bij het glaspoeder ongeveer 0.03×10^{-3} cal/cm sec °C ($x_1 = 0.60$), bij staalhagel minder dan 0.07×10^{-3} cal/cm sec °C ($x_1 = 0.635$) en bij loodhagel minder dan 0.17×10^{-3} cal/cm sec °C ($x_1 = 0.60$). Vergelijkt men deze waarden van λ_r met de waarden van λ voor lucht onder atmosferische druk, dan blijkt dat de verhouding λ_r/λ in deze gevallen resp. ongeveer 0.07, minder dan 0.07 en minder dan 0.17 bedroeg. Vanzelfsprekend hangt de waarde van λ_r af van de vorm der korrels, de elastische eigenschappen van het materiaal en van de druk bij de meetplaats.

Een theoretische berekening van het geleidingsvermogen voor het hier beschouwde geval stuit op mathematische moeilijkheden. Wel kan men voor een eenvoudig model de grenzen aangeven waartussen de waarde van λ_r moet liggen. Wij beschouwen hiertoe een enkelvoudig kubische bolstapeling, waarbij wij veronderstellen dat van de bollen aan de boven- en onderkant kleine kapjes zijn afgesneden (fig. 3).

Een benedenste grens voor λ wordt dan gevonden uit de formule:

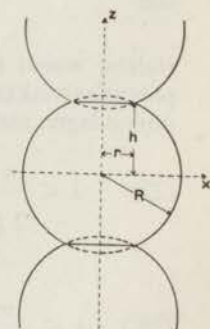


Fig. 3. Bollen met contactvlakjes.
(Spheres with contact surfaces).

$$4 R^2 \lambda \geq \int_0^R 2 \pi \lambda_x x dx + (4 R^2 - \pi R^2) \lambda_0,$$

met $\lambda_x = \lambda_1$ voor $x \leq r$

en
$$\frac{h}{\lambda_x} = \frac{z}{\lambda_1} + \frac{h-z}{\lambda_0}, \text{ of } \lambda_x = \frac{h \lambda_1 \lambda_0}{h \lambda_1 - z (\lambda_1 - \lambda_0)} \text{ voor } x \geq r.$$

Bij deze wijze van berekenen stellen we ons nl. voor, dat er oneindig dunne, niet geleidende scheidingswanden zijn met de as in de z -as en stralen x en $x + dx$ voor $0 \leq x \leq R$, zodat het geleidingsvermogen bij afwezigheid dezer scheidingswanden groter zal zijn dan het hier berekende.

Uitwerking van de integratie levert:

$$(28) \quad \lambda \geq \frac{\pi r^2}{4 R^2} \lambda_1 + \frac{\pi \lambda_1 \lambda_0 (R^2 - r^2)}{2 R^2 (\lambda_1 - \lambda_0)} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right\} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \lambda_0.$$

Voor $\lambda_0 = 0$ vinden we hieruit:

$$(28a) \quad \lambda_r \geq \frac{\pi r^2}{4 R^2} \lambda_1$$

en voor $r = 0$:

$$(28b) \quad \lambda \geq \frac{\pi \lambda_1 \lambda_0}{2 (\lambda_1 - \lambda_0)} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right\} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \lambda_0.$$

We merken nog op, dat voor $\lambda_0 = 0$ het rechterlid van (28b) nul wordt, terwijl voor $\lambda_1 = \infty$ het rechterlid logaritmisch oneindig wordt.

Een bovenste grens voor λ wordt gevonden uit:

$$\frac{h}{\lambda} = \int_0^h \frac{dz}{\lambda_z},$$

met
$$\lambda_z = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) (\lambda_1 - \lambda_0) + \lambda_0.$$

Hierbij wordt nl. verondersteld, dat de vlakken loodrecht op de z -as equipotentiaalvlakken zijn, hetgeen betekent dat zich loodrecht op de z -as oneindig dunne lagen met soortelijke weerstand nul bevinden. Hieruit volgt:

$$(29) \quad \lambda \leq \frac{\pi b h (\lambda_1 - \lambda_0)}{2 R \ln \frac{b R + h}{b R - h}}, \text{ met } b = \left(1 + \frac{4 \lambda_0}{\pi (\lambda_1 - \lambda_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ voor } \lambda_1 \geq \lambda_0,$$

$$(29') \quad \lambda \leq \frac{\pi c h (\lambda_0 - \lambda_1)}{4 R \operatorname{arctg} (h/cR)}, \text{ met } c = \left(\frac{4 \lambda_0}{\pi (\lambda_0 - \lambda_1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ voor } \lambda_1 \leq \lambda_0.$$

hetgeen voor $\lambda_0 = 0$ overgaat in:

$$(29a) \quad \lambda_r \leq \frac{\pi h \lambda_1}{2 R \ln \frac{R+h}{R-h}},$$

terwijl we voor $h = R$ vinden:

$$(29b) \quad \lambda \leq \frac{\pi b (\lambda_1 - \lambda_0)}{2 \ln \frac{b+1}{b-1}} \quad \text{voor } \lambda_1 > \lambda_0,$$

$$(29b') \quad \lambda \leq \frac{\pi c (\lambda_0 - \lambda_1)}{4 \operatorname{arctg} (1/c)} \quad \text{voor } \lambda_1 < \lambda_0.$$

Combinatie van (28a) en (29a) levert met $r = \zeta R$, waarbij $\zeta \ll 1$:

$$(30) \quad \frac{\pi}{4} \zeta^2 \leq \frac{\lambda_r}{\lambda_1} \leq \frac{\pi}{4} \left(\ln \frac{2}{\zeta} \right)^{-1}.$$

De aldus verkregen grenzen liggen ver uiteen, waardoor de praktische waarde van formule (30) gering is. Wel is het waarschijnlijk, zoals nog nader zal worden besproken, dat de juiste waarde van λ_r dicht bij de benedenste grens ligt. Voor $\zeta = 0.01$ vinden we b.v. als grenzen 0.8×10^{-4} en 0.15. Berekenen we uit (30) de grenzen voor ζ bij de glasbollen in de experimenten van PRINS et al. ³⁴), dan volgt hieruit ongeveer $0.1 \geq \zeta \geq 5 \times 10^{-33}$.

Een vergelijking van de met bovenstaande formules verkregen grenzen voor λ bij rakende bollen in een enkelvoudig kubische rangschikking met de theoretische waarden volgens verschillende theorieën geeft Tabel III. Tabel IV geeft de resultaten van de berekening voor een dergelijke rangschikking, voor het geval de bollen geen punt gemeen hebben, waarbij dus $h > R$. De formules luiden dan:

$$(31) \quad \lambda \geq \frac{\pi \lambda_1 \lambda_0}{2 (\lambda_1 - \lambda_0)} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \frac{R}{h} (\lambda_1 - \lambda_0)} - \frac{R}{h} \right\} + \left(1 - \frac{\pi R^2}{4 h^2} \right) \lambda_0,$$

$$(32) \quad \lambda \leq \left\{ \frac{2}{\pi d (\lambda_1 - \lambda_0)} \ln \frac{dh + R}{dh - R} + \frac{1 - R/h}{\lambda_0} \right\}^{-1},$$

met
$$d = \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{4 \lambda_0}{\pi (\lambda_1 - \lambda_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{voor } \lambda_1 > \lambda_0,$$

$$(32') \quad \lambda \leq \left\{ \frac{4}{\pi e (\lambda_0 - \lambda_1)} \operatorname{arctg} (R/h e) + \frac{1 - R/h}{\lambda_0} \right\}^{-1},$$

met
$$e = \left(\frac{4 \lambda_0}{\pi (\lambda_0 - \lambda_1)} - \frac{R^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{voor } \lambda_1 < \lambda_0.$$

Voor R/h werd bij de berekeningen van Tabel IV de waarde 0.985 genomen. Deze waarde correspondeert met $x_1 = 0.500$.

TABELLEN III en IV

Vergelijking van theoretische waarden van λ/λ_0 volgens MAXWELL (λ_a/λ_0), RAYLEIGH (λ_R/λ_0), BÖTTCHER (λ_c/λ_0) en BRUGGEMAN (λ_d/λ_0) met de benedenste en bovenste grenswaarden volgens formules (28b), (29b), (29b'), (31), (32) en (32')

(Comparison of λ/λ_0 according to MAXWELL [λ_a/λ_0], RAYLEIGH [λ_R/λ_0], BÖTTCHER [λ_c/λ_0] and BRUGGEMAN [λ_d/λ_0] with upper and lower limits according to formulae (28b), (29b), (29b'), (31), (32) and (32'))

TABEL III, $x_1 = 0.524$.

λ_1/λ_0	λ (28b)/ λ_0	λ_a/λ_0	λ_R/λ_0	λ_d/λ_0	λ_c/λ_0	λ (29b, 29b')/ λ_0
2	1.42	1.45	1.46	1.46	1.47	1.49
10	2.93	2.95	3.28	3.50	4.25	4.46
10^2	6.0	4.10	5.39	7.5	30.4	27.2
10^3	9.5	4.28	5.81	9.0	288	195
2^{-1}	0.70	0.72	0.71	0.71	0.71	0.72
10^{-1}	0.34	0.45	0.43	0.42	0.38	0.45
10^{-2}	0.23	0.384	0.356	0.34	0.24	0.384
0	0.215	0.377	0.348	0.33	0.215	0.377

TABEL IV, $x_1 = 0.500$.

λ_1/λ_0	λ (31)/ λ_0	λ_a/λ_0	λ_R/λ_0	λ_d/λ_0	λ_c/λ_0	λ (32,32')/ λ_0
2	1.40	1.43	1.43	1.44	1.44	1.46
10	2.72	2.80	3.06	3.30	4.00	4.11
10^2	4.59	3.83	4.75	6.7	27.1	19.2
∞	5.15	4.00	5.06	8.0	∞	66.7
2^{-1}	0.71	0.73	0.73	0.72	0.72	0.74
10^{-1}	0.37	0.47	0.45	0.44	0.40	0.48
0	0.24	0.40	0.38	0.35	0.25	0.40

Vergelijkt men de gegevens van Tabel III, met de experimentele resultaten van Tabel VIII, dan blijkt dat voor $\lambda_1 > \lambda_0$ de experimentele waarde van λ dicht bij de door formule (28b) gegeven benedenste grens ligt. Voor $\lambda_1 < \lambda_0$ volgt uit metingen (verg. blz. 24 en 25), dat de experimenteel verkregen waarden juist dicht bij de theoretische bovenste grens voor λ liggen.

6. DE INVLOED VAN DE „TEMPERATUURSPRONG” IN GRANULAIRE STOFFEN MET EEN GASVORMIG MEDIUM

In het voorgaande werd geen rekening gehouden met de moleculaire en atomaire structuur van de materie. Zo werd verondersteld, dat in elk der stoffen van het granulaire materiaal de dielectrische constante of het geleidingsvermogen een constante waarde had, die onafhankelijk was van de aanwezigheid van de andere samenstellende stoffen. In het algemeen zullen de genoemde grootheden nabij het scheidingsvlak van twee stoffen echter afwijkende waarden vertonen, ten gevolge van de wederzijdse beïnvloeding der materialen.

Wij willen dit nader toelichten voor het geval van de warmtegeleiding. Hier

kunnen belangrijke afwijkingen optreden in met gas gevulde ruimten, waarvan de afmetingen niet meer zeer groot zijn ten opzichte van de gemiddelde vrije weglengte der gasmoleculen. Door SMOLUCHOWSKI⁴¹⁾ werd voor het eerst aangetoond, dat het warmtegeleidingsvermogen in dergelijke ruimten schijnbaar lager is dan het normale warmtegeleidingsvermogen van het gas bij dezelfde druk.

Deze anomalie vindt haar verklaring in een temperatuursprong, die aan het scheidingsvlak tussen gas en vaste stof of vloeistof optreedt. Deze temperatuursprong hangt samen met de wijze, waarop de gemiddelde snelheid van de gasmoleculen, die zich vlak bij de wand bevinden, tot stand komt. Van genoemde moleculen heeft een deel juist een botsing met de wand achter de rug, terwijl de overige moleculen vanuit het gas naar de wand toe bewegen. De gemiddelde snelheid van laatstgenoemde moleculen zal corresponderen met de temperatuur op een afstand van een gemiddelde vrije weglengte (l) van de wand, aangezien hier gemiddeld voor het laatst een botsing met een ander gasmolecule plaats vond. De gemiddelde snelheid van de gasmoleculen, die van de wand afkomstig zijn, ligt in het algemeen tussen de waarden, die corresponderen met de temperatuur van de wand en met de temperatuur op een afstand l van de wand, daar bij de botsing tegen de wand slechts een deel van het temperatuurverschil tussen de botsende moleculen en de wand wordt uitgewisseld.

Ten gevolge van de temperatuursprong is b.v. de temperatuurgradiënt in een gas tussen twee evenwijdige, vlakke platen met temperaturen T_1 en T_2 in het geval van een stationnaire warmtegeleiding kleiner dan $(T_1 - T_2)/d$, waarin d de onderlinge afstand der platen is. Zij ΔT_1 de absolute waarde van de temperatuursprong aan plaat 1, ΔT_2 die aan plaat 2, dan is de temperatuurgradiënt in het gas dus $(T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2)/d$. Men kan ook zeggen, dat de afstand tussen de platen schijnbaar vergroot is met een bedrag $\delta_1 + \delta_2$. Voor kleine temperatuurverschillen tussen de platen is $\delta_1 \approx \delta_2$. De grootte δ wordt de temperatuursprong-coëfficiënt genoemd. De theorie leert^{21,22)}, dat δ evenredig met de vrije weglengte en van dezelfde orde van grootte als deze is. Verder hangt δ af van de aard van het gas en van de wand.

Bij atmosferische druk varieert δ (in 10^{-6} cm) volgens metingen van SMOLUCHOWSKI⁴¹⁾, GEHRCKE¹⁶⁾ en LASAREFF²⁷⁾ van 13.4 tot 19.6 voor lucht, van 8.0 tot 12.7 voor CO_2 en van 105 tot 145 voor H_2 ; δ is evenals de vrije weglengte omgekeerd evenredig met de druk van het gas.

Voeren we de grootte δ in bij de berekening van blz. 26, dan wordt λ_x voor $x > r$ gevonden uit:

$$\frac{h}{\lambda_x} = \frac{z}{\lambda_1} + \frac{h + \delta - z}{\lambda_0}$$

Als benedenste grens voor λ vinden we dan:

$$(33) \quad \lambda \geq \frac{\pi r^2}{4 R^2} \lambda_1 + \frac{\pi h^2}{2 R^2} \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\delta}{h}\right) \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\left(1 + \frac{\delta}{h}\right) \lambda_1}{\lambda_0 + \frac{\delta}{h} \lambda_1} - 1 \right\} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \lambda_0$$

Numerieke waarden van het rechterlid van (33) voor $r = 0$ zijn gegeven in Tabel V. Als ruwe regel kan men hieruit afleiden, dat het warmtegeleidingsvermogen duidelijk kleiner wordt voor:

$$(34) \quad R \leq \frac{2 \lambda_1}{\lambda_0} \delta;$$

met bovenstaande waarden van δ gaat dit over in:

$$(34a) \quad R \leq 4 \times 10^{-5} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{760}{p} \text{ cm voor lucht,}$$

$$(34b) \quad R \leq 3 \times 10^{-4} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{760}{p} \text{ cm voor H}_2,$$

$$(34c) \quad R \leq 1.5 \times 10^{-5} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{760}{p} \text{ cm voor CO}_2,$$

waarin p de gasdruk in mm kwik is.

Bij gegeven R kan men hieruit de waarde van p berekenen, waarbeneden het warmtegeleidingsvermogen duidelijk met dalende druk gaat afnemen. De aldus gevonden drukwaarden komen redelijk overeen met de waarden, die volgen uit metingen van KANNULUIK en MARTIN²³), KLING²⁵) en PRINS et al.³⁴).

Bij atmosferische druk en kamertemperatuur vindt men uit (34a, b en c), dat de invloed van de temperatuursprong duidelijk waarneembaar is voor R -waarden welke resp. liggen beneden $0.65 \lambda_1$ cm, $0.9 \lambda_1$ cm en $0.4 \lambda_1$ cm, waarbij λ_1 wordt gemeten in cal/cm sec °C.

TABEL V

Waarden van de benedenste grens voor λ/λ_0 volgens (33) voor $r = 0$ en diverse waarden van λ_1/λ_0 en δ/R

(Values of the lower limit of λ/λ_0 according to formula (33) for $r = 0$ and varying values of λ_1/λ_0 and δ/R)

$\lambda_1/\lambda_0 \backslash \lambda_1 \delta / \lambda_0 R$	0	0.01	0.1	0.5	1	10
10	2.93	2.91	2.81	2.42	2.10	0.69
100	6.00	5.99	5.86	5.38	4.97	2.69
1000	9.50	9.49	9.40	8.86	8.42	5.81

7. CONVECTIE EN STRALING

a) Confectie.

Omtrent de invloed van natuurlijke convection op de warmteoverdracht in granulaire materialen worden slechts door enkele onderzoekers gegevens verstrekt. Een dergelijke invloed kan blijken, doordat bij vergroting van de temperatuurverschillen het warmtegeleidingsvermogen schijnbaar toeneemt.

Zo vond KLING²⁵) bij stalen bollen met een diameter van 0.318 cm in lucht van 1 atmosfeer een zeer geringe stijging van λ met toenemend temperatuurverschil. Bij een luchtdruk van enkele mm's kwik werd geen invloed van de convection geconstateerd; bij drukken van 29 en 49 atmosfeer was deze invloed echter zeer uitgesproken.

K. BARTENS⁴) deed proeven, waarbij zich het granulaire materiaal in een door

twee coaxiale cirkelcilinders begrensde ringvormige ruimte bevond. De dikte van de ring bedroeg 2 cm. Voor glazen bollen met een diameter van 0.3 cm in lucht van 1 atmosfeer werd geen invloed van de convectie waargenomen bij temperatuurverschillen tot ongeveer 15 °C tussen binnen- en buitenwand van de ring. Voor loden en stalen bollen met een diameter van 0.3 cm werd deze invloed merkbaar bij temperatuurverschillen van ongeveer 3 °C. Voor loden bollen met diameters van 0.130 cm, 0.215 cm en 0.293 cm in ricinusolie werd bij de kleinste bollen geen invloed van de convectie geconstateerd, bij de bollen van 0.215 cm werd deze invloed merkbaar bij een temperatuurverschil van ongeveer 5 °C, bij de grootste bollen bij ongeveer 3 °C.

WADDAMS⁴⁸⁾ vond bij metingen aan stalen bollen in lucht van 1 atmosfeer (verg. Tabel VIII) een invloed van de convectie voor deeltjes met een diameter vanaf $\frac{1}{4}$ inch.

Bij de later te bespreken eigen metingen aan zand (lineaire afmetingen der korrels 0.06–0.01 cm) met verschillende vochtgehalten werd geen invloed van de convectie waargenomen. Een uitzondering moet worden gemaakt voor het geval van het grootste vochtgehalte – de poriën waren hier vrijwel geheel gevuld met water – waarbij met toenemende verhittingsstroom een stijging van λ werd geconstateerd.

Beschouwingen omtrent natuurlijke convectie voor gevallen met een eenvoudige geometrische structuur, waarbij de vloeistof of het gas b.v. wordt begrensd door platte vlakken of cilindrs, zijn niet zonder meer over te dragen op de ingewikkeld gevormde ruimten in granulaire stoffen. Een meer algemene behandeling van de invloed der natuurlijke convectie, b.v. met behulp van de kengetallen uit de gelijkvormigheidsleer, kan daarom niet gegeven worden. Uit bovenstaande experimentele gegevens blijkt echter, dat bij korrels die kleiner zijn dan 0.1 à 0.2 cm de invloed van de natuurlijke convectie in het algemeen gering is.

b) *Straling.*

De warmte-stroomdichtheid tengevolge van straling (q_s) tussen twee evenwijdige, volkomen zwarte, vlakke wanden met afstand d en temperaturen $T + \frac{1}{2} \Delta T$ en $T - \frac{1}{2} \Delta T$, bedraagt voor kleine waarden van $\Delta T/T$ en bij afwezigheid van absorptie in het medium tussen de platen: $q_s = 4 e T^3 \Delta T$.

Voor de maximaal mogelijke, schijnbare vergroting van het warmtegeleidingsvermogen ten gevolge van de stralingsoverdracht (λ_s) volgt hieruit:

$$(35) \quad \lambda_s = 4 e T^3 d,$$

waarin $e = 1.36 \times 10^{-12}$ cal/cm² sec (°C)⁴. Voor $T = 300$ °K is $\lambda_s = 0.147 \times 10^{-3} d$ cal/cm sec °C. Voor $d = 0.1$ cm is λ_s reeds aanmerkelijk kleiner dan λ voor lucht van dezelfde temperatuur, die 0.063×10^{-3} cal/cm sec °C bedraagt. Voor temperaturen, welke beneden 100 °C liggen, is daarom de bijdrage van de straling tot de warmteoverdracht in granulaire stoffen meestal te verwaarlozen.

8. VERGELIJKING VAN DE THEORIEËN MET EXPERIMENTELE GEGEVENS

a) *Metingen van de diëlectrische constante van kristalpoeders.*

Deze experimenten zijn weinig geschikt om de juistheid van de bovenstaande theorieën te toetsen. Enerzijds is de vorm van de kristallen niet of onvoldoende

bekend, anderzijds is de verhouding $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ bij de hier ter sprake komende metingen kleiner dan 5, zodat de verschillen tussen de theorieën onderling niet groot zijn. Zo blijken b.v. de metingen van ERRERA¹³⁾ aan KCl-poeders zowel met de theorie van BÖTTCHER als met die van BRUGGEMAN te kloppen. Beide auteurs halen deze metingen aan als bevestiging van de theorie. Bij de theorie van BÖTTCHER wordt echter gerekend met bolvormige kristallen, zoals door POLDER en VAN SANTEN werd aangetoond, terwijl BRUGGEMAN uitgaat van de volgende semi-empirische formule, welke door WIENER⁵⁰⁾ werd opgesteld:

$$\frac{1}{\varepsilon + u} = \frac{x_0}{\varepsilon_0 + u} + \frac{x_1}{\varepsilon_1 + u}$$

waarin de „Formzahl” u wordt bepaald door geschikte interpolatie tussen de beide „extremen”, welke volgen uit de formules (23a) en (23b).

Het is eenvoudig te bewijzen, dat men de experimenten eveneens kan beschrijven met de theorie van BURGER, mits men de k_1 goed kiest. Voor de volledigheid is dit in twee voorbeelden uitgewerkt.

1. Metingen van ERRERA¹³⁾.

Er werd o.m. gemeten aan KCl-poeders, waarbij de volumefractie KCl varieerde van 0.485 tot 0.995. De kristallen werden sterk samengeperst ter verkrijging van de hoge volumefracties. Resultaten van één der meetreeksen, samen met de theoretische waarden volgens de theorie van BURGER vindt men

TABEL VI

Verband tussen ε en x_1 voor KCl-poeder volgens metingen van ERRERA en volgens berekening met de theorieën van BURGER (ε_a) en BRUGGEMAN (ε_d). Vijfde kolom: berekende ε_1 volgens BÖTTCHER

(Relation between the dielectric constant [ε] and volume fraction [x_1] for KCl-powder according to experiments of ERRERA and to the theories of BURGER [ε_a] and BRUGGEMAN [ε_d]. 5th column: computed value of the dielectric constant of pure KCl [ε_1] according to BÖTTCHER)

x_1	ε (gem.)	ε_a	ε_d	ε_1 (BÖTTCHER)
0.485	2.47	2.49	2.43	5.12
495	2.56	2.53	2.47	5.26
540	2.58	2.68	2.64	4.63
555	2.57	2.74	2.70	4.45
610	2.90	2.96	2.92	4.79
610	2.91	2.96	2.92	4.81
650	3.12	3.12	3.09	4.88
710	3.37	3.37	3.33	4.81
780	3.64	3.68	3.66	4.72
845	4.13	3.98	3.97	4.95
915	4.39	4.32	4.31	4.83
940	4.39	4.46	4.44	4.69
965	4.68	4.60	4.58	4.86
980	4.70	4.68	4.67	4.80
995	4.81	4.76	4.75	4.84

in Tabel VI. In de tabel zijn tevens de door BÖTTCHER berekende waarden van ε_1 opgenomen.

Bij de berekening volgens BURGER werd voor ε_1 de waarde 4.78 genomen, welke door ERRERA door middel van extrapolatie uit de metingen werd verkregen. De waarde van $k_1 = 0.69$; deze zou, voor het geval de deeltjes afgeplatte omwentelingsellipsoiden ($a = b = nc$) waren, corresponderen met $n = 50$. De theorie van BURGER geeft dus een sterke afwijking van de bolvorm, hetgeen voor kristallen niet verwonderlijk is. Waarschijnlijk is het juist bij deze sterk samengeperste poeders het KCl als medium te beschouwen, waarbinnen zich lucht-insluitels bevinden. In dit geval is $k_1 = 1/0.69 = 1.45$. Voor afgeplatte omwentelingsellipsoiden correspondeert deze k_1 -waarde met $n = 3$. Bij de berekening van ε_d werd niet de door BRUGGEMAN zelf toegepaste methode gevolgd, doch er werd gebruik gemaakt van formule (23). Het KCl werd als samenhangend medium beschouwd, terwijl voor g_a de waarde 0.21 werd gekozen. Deze g_a -waarde correspondeert met $n = 2.4$.

TABEL VII

Verband tussen ε en x_1 , voor KCl-poeder volgens metingen van STÖCKER. Kolom 3: berekende waarden volgens BRUGGEMAN voor bolvormige korrels met $\varepsilon_1 = 4.70$. Kolom 4: berekende waarden volgens BURGER met $\varepsilon_1 = 4.70$ en $k_1 = 0.531$

(Relation between dielectric constant [ε] and volume fraction [x_1] for KCl-powder according to experiments of STÖCKER and according to the theorie of BRUGGEMAN for spherical particles with $\varepsilon_1 = 4.70$ and according to BURGER with $\varepsilon_1 = 4.70$ and $k_1 = 0.531$)

x_1	ε (gem.)	ε (BRUGGEMAN)	ε (BURGER)
0.424	2.010	2.01	2.04
451	2.112	2.10	2.12
469	2.167	2.16	2.19
487	2.247	2.24	2.24
496	2.272	2.25	2.27
515	2.354	2.32	2.34
521	2.340	2.34	2.36
526	2.390	2.36	2.38
538	2.455	2.41	2.42
539	2.410	2.41	2.42
544	2.434	2.43	2.44
550	2.500	2.45	2.46
552	2.451	2.46	2.47
552	2.476	2.46	2.47
555	2.459	2.47	2.48
571	2.528	2.53	2.51
573	2.528	2.54	2.54
576	2.545	2.55	2.55
586	2.582	2.59	2.57
599	2.669	2.65	2.62
606	2.667	2.67	2.68
609	2.712	2.69	2.67
610	2.679	2.69	2.68

2. Metingen van STÖCKER⁴⁴).

In tabel VII zijn de resultaten van een reeks metingen van STÖCKER, benevens de berekende waarden van BRUGGEMAN en volgens BURGER opgenomen.

Naar STÖCKER mededeelde waren de kristallen in een mortier fijn gewreven en vervolgens naar de grootte in 4 groepen verdeeld. De grotere korrels hadden de vorm van dobbelstenen met sterk afgeronde hoeken en kanten, de kleinere waren meer hoekig. In de tabel staan de metingen voor de verschillende groepen door elkaar, aangezien naar opklimmende x_1 werd gerangschikt. BRUGGEMAN nam hiervoor de bolvorm. Bij onze berekening, waarbij dezelfde waarde van ε_1 werd gekozen als door BRUGGEMAN werd gebruikt, correspondeert de gekozen waarde voor k_1 ($k_1 = 0.531$) met de k_1 -waarde voor afgeplatte omwentelingsellipsoïden met $n = 4$.

Een tweede reeks metingen had betrekking op niet verpulverde, kantige kristallen. Deze werden gerangschikt in zes groepen I t/m VI naar afnemende grootte. Onder het microscoop werden de lengte en de breedte gemeten. De verhouding tussen beide bedroeg voor de groepen I t/m VI gemiddeld respectievelijk: 1.9, 1.9, 2.4, 2.8, 3.0, 2.6. De door ons berekende gemiddelde n -waarden zijn in dezelfde volgorde: 7.3, 7.8, 6.1, 5.4, 5.8, 4.5. Daar de derde afmeting der korrels niet gegeven wordt, is het niet mogelijk hieruit conclusies omtrent het al of niet overeenstemmen van theorie en metingen te trekken. Wel is het waarschijnlijk, dat deze derde afmeting de kleinste van de drie is geweest, zodat wellicht de groepen I en II een sterkere afplatting vertoonden dan de overige groepen, alhoewel de verhouding lengte/breedte hier juist de kleinste waarde heeft. De verschillen tussen berekende en gemeten waarden van ε bedragen bij geschikte keuze der k_1 -waarden slechts enkele procenten.

b) Diffusiemetingen.

Hebben we een granulaair materiaal, waarbij het medium gasvormig is en de korrels vast zijn, dan kunnen we met de theorieën voor de diëlectrische constante tevens de diffusiecoëfficiënt voor het granulaire materiaal (D) berekenen, als die voor het medium (D_0) bekend is. Voor vaste korrels is $D_1 = 0$.

In figuur 7 op blz. 31 geeft kromme b de theoretische waarden volgens MAXWELL voor bolvormige korrels. Enige experimentele resultaten van PENMAN³²) voor glasbolletjes in lucht zijn hiermede in goede overeenstemming. De theorieën van BRUGGEMAN en BÖTTCHER geven hier lagere waarden voor D/D_0 .

De overige experimentele gegevens zijn minder geschikt voor een toetsing van de theorie, aangezien de vorm der korrels niet nauwkeurig bekend is (verg. ook hoofdstuk IV).

c) Metingen van het electricisch geleidingsvermogen.

In de figuren 4 en 5 vindt men de resultaten van metingen van het electricisch geleidingsvermogen van vloeistoffen volgens EUCKEN¹⁴). Figuur 4 heeft betrekking op een emulsie van een mengsel van benzol en bromoform (geleidingsvermogen = 0) in een 1/10 normaal KCl-oplossing. De theoretische krommen voor bolvormige deeltjes volgens MAXWELL en BRUGGEMAN zijn tevens opgenomen.

Figuur 5 heeft betrekking op een phenol-water mengsel met een waterige oplossing van KJ. Voor $x_1 < 0.5$ is de phenoloplossing geëmulgeerd in de KJ-

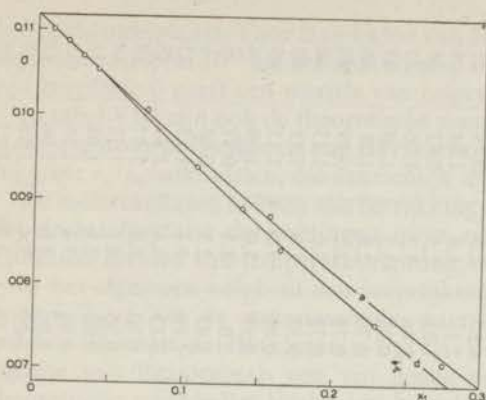


Fig. 4. Elektrisch geleidingsvermogen (σ , in $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$) van benzol-bromofom druppels met volumefractie x_1 in een KCl-oplossing. o - meetpunt, a - theoretische kromme volgens MAXWELL, d - theoretische kromme volgens BRUGGEMAN.

(Electric conductivity [σ , in $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] of benzene-bromoform drops with volume fraction x_1 in a KCl-solution. o - experimental value, a - theoretical curve according to MAXWELL, d - theoretical curve according to BRUGGEMAN).

oplossing voor $x_1 > 0.75$ is de situatie juist omgekeerd. Voor tussengelegen x_1 -waarden is er een overgangsgebied. Ter vergelijking zijn weer de theoretische krommen volgens MAXWELL en BRUGGEMAN getekend.

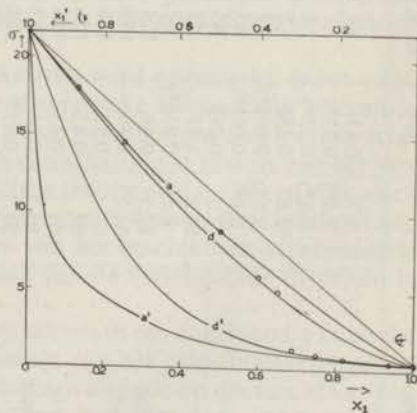
d) Metingen van het warmtegeleidingsvermogen.

Tabel VIII geeft de resultaten van een groot aantal metingen van λ voor granulaire stoffen met bolvormige korrels, die aan de literatuur zijn ontleend. Voor λ_1 en λ_0 zijn - voor zover mogelijk - de door de auteurs opgegeven waarden ingevuld. Bij het ontbreken van een vermelding door de auteurs werden de waarden aan tabellen ontleend en in tabel VIII met * gemerkt.

In tabel VIII is tevens het resultaat van een door ons verrichte meting van het warmtegeleidingsvermogen van hagelkorrels †) opgenomen (verwijzing e). De meting geschiedde met de in hoofdstuk III besproken aanloopmethode. Om de invloed van de samendrukking der korrels, onder invloed van het gewicht der bovenliggende lagen, na te gaan, werd gemeten bij verschillende laagdikten

Fig. 5. Elektrisch geleidingsvermogen, σ (in $10^{-4} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$) van een phenol-water-KJ systeem. x_1 = volumefractie van de phenoloplossing, x_1' = volumefractie van de KJ-oplossing, o - meetpunt, a en a' - theoretische krommen volgens MAXWELL, d en d' - theoretische krommen volgens BRUGGEMAN.

(Electric conductivity, σ [in $10^{-4} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] of a phenol-water KJ system. x_1 = volume fraction of the phenol solution, x_1' = volume fraction of the KJ solution, o - experimental value, a and a' - theoretical curves according to MAXWELL, d and d' - theoretical curves according to BRUGGEMAN).



†) Deze metingen werden verricht in het kader van een ander onderzoek aan het Laboratorium voor Natuurkunde van de Landbouwhogeschool. Aangezien voor dit onderzoek een kennis van het warmtegeleidingsvermogen van de hagel in niet gereinigde toestand werd verlangd, werden de korrels niet tevoren van vet en andere verontreinigingen ontdaan. Het feit, dat de door ons gemeten waarde t.o.v. de door SCHUMANN en VOSS bepaalde waarden aan de lage kant ligt, houdt hiermede vermoedelijk verband.

TABEL VIII

Experimentele (λ) en theoretische waarden (λ_a volgens MAXWELL en λ_d volgens BRUGGEMAN) van het warmtegeleidingsvermogen (in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C) van granulaire stoffen met bolvormige korrels

(Experimental [λ] and theoretical values [λ_a according to MAXWELL, λ_d according to BRUGGEMAN] of the thermal conductivity [in millical/cm sec $^{\circ}$ C] of granular materials with spherical particles †)

Granulaire stof	λ_1	λ_0	λ_1/λ_0	x_1	R	λ_r	λ	λ_a	λ_d	λ/λ_a	λ/λ_d	Lit.
Glas-ricinusolie	1.7	0.43	4	0.42	0.15	—	0.83	0.77	0.80	1.08	1.04	4
Glas-waterstof	2.6*)	0.35*)	7	0.6	0.4	—	1.1	1.1	1.2	1.0	0.92	45
Glas-waterstof	2.6*)	0.33*)	8	0.60	0.017	0.04	3.6	1.0	1.2	3.6	3.0	34
Glas-helium	2.6	0.332	8	0.65	0.016	—	0.86	1.15	1.3	0.75	0.66	23
Glas-lucht	2.6*)	0.069*)	38	0.6	0.4-0.15	—	0.43	0.32	0.55	1.3	0.78	45
Glas-lucht	2.6*)	0.061*)	43	0.60	0.017	0.04	0.61	0.29	0.50	2.1	1.2	34
Glas-lucht	2.6	0.058	45	0.65	0.016	—	0.38	0.33	0.60	1.15	0.63	23
Loodhagel-water	84.3	1.53	55	0.60	—	—	8.31	7.6	14.3	1.1	0.58	36
Glas-kooldioxyde	2.6*)	0.039*)	67	0.60	0.017	0.04	0.56	0.19	0.38	2.9	1.9	34
Loodhagel-glycerine	84.3	0.68	124	0.60	—	—	4.9	3.56	8.0	1.38	0.61	36
Staal-waterstof	62.5	0.46	136	0.635	—	<0.07	3.05	2.73	6.9	1.1	0.44	36
Lood-ricinusolie	67	0.43	156	0.42	0.147	—	1.67	1.33	2.0	1.25	0.84	4
Lood-ricinusolie	67	0.43	156	0.57	0.108	—	2.4	2.1	4.4	1.14	0.55	4
Lood-ricinusolie	67	0.43	156	0.62	0.065	—	2.8	2.1	5.9	1.17	0.47	4
Loodhagel-waterstof	84.3	0.46	183	0.60	—	<0.17	3.35	2.3	5.9	1.5	0.57	36
Staal-waterstof	91.7	0.455	202	0.62	0.159	—	5.23	2.6	6.6	2.0	0.79	25
Staal-ricinusolie	97	0.43	229	0.42	0.15	—	2.4	1.34	2.1	1.8	1.14	4
Staal-lucht	63.5	0.0625	1000	0.635	—	<0.095	0.99	0.39	1.21	2.5	0.82	36
Staal-CH ₄	91.7	0.0834	1100	0.62	0.159	—	1.55	0.49	1.46	3.2	1.06	25
Lood-lucht	82*)	0.069*)	1190	0.583	0.3	—	1.18	0.35	0.92	3.3	1.28	45
Lood-lucht	82	0.065	1260	0.550	0.40	—	0.85	0.30	0.70	2.8	1.21	48
Lood-lucht	82	0.065	1260	0.561	0.12	—	0.67	0.31	0.75	2.2	0.89	48
Lood-lucht	82	0.065	1260	0.567	0.32	—	0.96	0.32	0.78	3.0	1.23	48
Lood-lucht	82	0.065	1260	0.580	0.08	—	1.00	0.33	0.85	3.0	1.18	48
Lood-lucht	82	0.065	1260	0.584	0.16	—	1.01	0.34	0.88	3.0	1.15	48
Loodhagel-lucht	84.3	0.063	1340	0.60	—	—	1.03	0.34	0.95	3.0	1.08	36
Loodhagel-lucht	84.3	0.063	1340	0.69	—	—	1.62	0.48	2.0	3.4	0.81	36
Loodhagel-lucht	84.3	0.062	1360	0.654	0.083	<0.17	0.95	0.41	1.43	2.3	0.66	e
Staal-lucht	91.7	0.063	1460	0.62	0.159	—	1.25	0.37	1.10	3.4	1.13	25
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.577	0.40	—	1.24	0.33	0.83	3.8	1.49	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.587	0.16	—	0.96	0.34	0.90	2.8	1.07	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.594	0.16	—	1.44	0.35	0.95	4.1	1.52	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.598	0.20	—	1.02	0.35	0.98	2.9	1.04	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.606	0.24	—	1.21	0.36	1.04	3.4	1.16	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.609	0.28	—	1.12	0.37	1.06	3.0	1.06	48
Staal-lucht	107	0.065	1650	0.610	0.32	—	1.24	0.37	1.07	3.4	1.16	48
Staal-C ₂ H ₆	91.7	0.0445	2060	0.62	0.159	—	0.97	0.26	0.79	3.7	1.23	25
Koper-ricinusolie	890	0.43	2070	0.42	0.15	—	3.6	1.36	2.2	2.7	1.64	4
Staal-kooldioxyde	91.7	0.0375	2450	0.62	0.159	—	0.89	0.22	0.68	4.0	1.31	25

*) Met een *) gemerkte waarden zijn niet door de auteurs opgegeven, doch aan tabellen ontleend.

†) x_1 = volume fraction of spheres, R = radius of spheres, λ_r = conductivity at gas-pressure zero.

boven de meetplaats. Voor laagdikten van 5.0, 3.0 en 1.9 cm waren de gevonden waarden van λ (in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C) resp. 1.12, 1.01 en 0.97. Extrapolatie naar een laagdikte 0 geeft een waarde van ongeveer 0.95.

In tabel VIII zijn ook de theoretische waarden volgens MAXWELL en BRUGGEMAN opgenomen. De theorie van BÖTTCHER-POLDER en VAN SANTEN geeft vooral bij grote λ_1/λ_0 uitkomsten, die aanzienlijk te hoog liggen.

De meetresultaten hebben alle betrekking op metingen bij atmosferische druk. Bij de interpretatie der metingen moet men nog rekening houden met een eventuele invloed van temperatuursprong, convectie en straling.

In het algemeen volgt uit een vergelijking tussen theorie en experiment, dat voor $\lambda_1/\lambda_0 < 300$ de experimentele waarde tussen de theoretische waarden volgens BURGER en BRUGGEMAN ligt*). Voor $2000 > \lambda_1/\lambda_0 > 1000$ geeft de theorie van BRUGGEMAN een vrij goede aansluiting bij het experiment. De theoretische waarde ligt hierbij iets beneden de experimentele. Eén en ander is in goede overeenstemming met de theoretische gegevens van Tabel III.

9. SAMENVATTING EN CONCLUSIES

In het voorgaande werd een aantal aspecten van de theorie van de diëlectrische en magnetische permeabiliteit en van het elektrisch- en warmtegeleidingsvermogen in granulaire materialen besproken. Aangezien een strenge mathematische behandeling niet mogelijk is, moet men, óf vereenvoudigende veronderstellingen invoeren, óf genoeg nemen met semi-empirische regels en formules.

Verschillende in de literatuur voorkomende hypothesen, die aan een vereenvoudigde behandeling ten grondslag liggen, werden onderling vergeleken, n.l. die van MAXWELL-BURGER-EUCKEN, die van OLLENDORFF, die van POLDER en VAN SANTEN en die van BRUGGEMAN. De door laatstgenoemde voor bolvormige korrels afgeleide formule werd uitgebreid tot ellipsoïdale korrelvormen. Voorts werd aangetoond, dat de door BRUGGEMAN gebezigde differentiële methode eveneens kan leiden tot de door MAXWELL-BURGER-EUCKEN afgeleide formules.

Zoals ook reeds door POLDER en VAN SANTEN werd opgemerkt, is het voornaamste bezwaar van de vereenvoudigde theoretische behandeling gelegen in het feit, dat de gevolgen van de gemaakte vereenvoudigingen niet kunnen worden overzien. Hierdoor is het niet mogelijk een schatting te maken van het verschil tussen het resultaat van de vereenvoudigde theorie en dat van een volkomen exacte behandeling. Om aan dit bezwaar tegemoet te komen werd getracht aan de hand van theoretische overwegingen en van het beschikbare experimentele materiaal een nader inzicht in de geldigheid van de verschillende theorieën te verkrijgen.

Voor het geval van congruente bolvormige korrels in een enkelvoudig kubische rangschikking werd door RAYLEIGH de theorie van het geleidingsvermogen in algemene vorm opgezet, waarbij een benadering volgende op die van MAXWELL kon worden verkregen. Door ons werd aangetoond, dat deze opzet ook kan

*) Een uitzondering vormen de metingen van PRINS et al.²⁴⁾. Volgens mededeling van de auteurs zijn de metingen bij atmosferische druk weinig betrouwbaar. Dat de metingen te hoge waarden leverden volgt ook uit de meting voor glasbolletjes in waterstof, waar het resultaat ligt boven de waarden, die normaliter voor glas worden opgegeven.

dienen voor twee andere rangschikkingen met kubische symmetrie, waarvoor de benadering van RAYLEIGH eveneens werd berekend.

De formule van MAXWELL geeft te grote waarden, wanneer het geleidingsvermogen van het medium groter is dan dat van de korrels en te kleine waarden in het tegenovergestelde geval. Uit de formules voor de diverse rangschikkingen blijkt verder, dat het verschil tussen de benadering van MAXWELL en die van RAYLEIGH bij gegeven volumefractie nog sterk van de rangschikking afhangt.

Voor een enkelvoudig kubische rangschikking van congruente bollen werden tevens grenzen afgeleid, waartussen de waarden van het geleidingsvermogen moeten liggen bij verschillende volumefracties der bollen (formules (31), (32) en (32') op blz. 17, tabellen III en IV op blz. 18).

Metingen, waarbij het geleidingsvermogen van de korrels kleiner is dan dat van het medium zijn schaars. De meetresultaten voor bolvormige deeltjes liggen meestal tussen de theoretische waarden volgens MAXWELL en die volgens BRUGGEMAN (zie blz. 24 en 25), waarbij de overeenstemming met eerstgenoemde waarden het gunstigst is. Een vergelijking van de experimentele gegevens met de tabellen II, III en IV maakt het waarschijnlijk, dat de onnauwkeurigheid van de formule van MAXWELL in dit geval maximaal circa 10% bedraagt. De theorie van POLDER en VAN SANTEN geeft hier sterk afwijkende waarden naar de lage kant.

Voor het geval het geleidingsvermogen van de korrels (index 1) groter is dan dat van het medium (index 0) zijn een groot aantal metingen van het warmtegeleidingsvermogen (λ) aan media met bolvormige korrels beschikbaar, waarbij de waarde van λ_1/λ_0 varieert van 4 tot ruim 2000. Uit dit waarnemingsmateriaal (zie Tabel VIII op blz. 26) volgt, dat wanneer λ_1/λ_0 niet groter is dan van de orde 100, de experimentele waarden van λ met een enkele uitzondering liggen tussen de theoretische waarden volgens MAXWELL en die volgens BRUGGEMAN. Als $100 < \lambda_1/\lambda_0 < 200$ geeft de formule van MAXWELL daarbij waarden, welke gemiddeld circa 25% te laag zijn, voor $0.4 < x_1 < 0.7$. Voor waarden van λ_1/λ_0 van de orde 1000 is de experimentele waarde in het algemeen iets groter dan de theoretische waarde volgens BRUGGEMAN. Eén en ander is in goede overeenstemming met de in Tabel III op blz. 18 gegeven theoretische resultaten. De theorie van POLDER en VAN SANTEN levert hier waarden, welke aanzienlijk boven de experimentele liggen.

Empirisch vinden we dus, dat voor $\lambda_1/\lambda_0 < 300$ de juiste waarde van λ zal liggen tussen de theoretische waarden van MAXWELL en BRUGGEMAN, terwijl voor $1000 < \lambda_1/\lambda_0 < 2000$ de waarde van λ niet meer dan enkele tientallen procenten boven de theoretische waarde volgens BRUGGEMAN ligt. Deze conclusie geldt voor het veelvuldig voorkomende geval, dat de korrels een stapeling vormen, waarbij zij aanrakingspunten gemeen hebben. Voor $\lambda_1 \rightarrow \infty$ gaat de benedenste grens voor λ dan logaritmisch naar ∞ , zodat de afwijkingen van de theorie van BRUGGEMAN, die voor $\lambda_1 \rightarrow \infty$ een eindige grenswaarde voor λ geeft, bij toenemende λ_1 steeds groter zullen worden. Liggen de korrels in het medium gebed, zonder onderlinge aanrakingspunten, dan is bij eenzelfde volumefractie de waarde van λ kleiner dan in het geval van rakende korrels, terwijl λ eindig blijft voor $\lambda_1 \rightarrow \infty$ (verg. Tabel IV).

Bij de beoordeling van het materiaal van Tabel VIII is het nodig, nog enige factoren te beschouwen, die de waarde van het warmtegeleidingsvermogen kunnen beïnvloeden, doch die bij de algemene theoretische behandeling van de paragrafen 2 t/m 4 buiten beschouwing waren gebleven. Deze factoren zijn:

1. De invloed van de aanrakingsvlakjes tussen de korrels.
2. De invloed van de z.g. temperatuursprong tussen een gas en een vaste stof of vloeistof.
3. De invloed van convectie.
4. De invloed van de warmtestraling.

Deze factoren werden in de paragrafen 5 tot en met 7 besproken. Hun invloed is bij de materialen van Tabel VIII in het algemeen gering. Bij de beoordeling van speciale gevallen kan men met de in bovengenoemde paragrafen gegeven regels en formules zeer globaal nagaan, of de invloed van één of meer van deze factoren belangrijk zal zijn.

De in Tabel VIII voorkomende volumefracties van de korrels variëren van 0.42 tot 0.69. Voor afnemende volumefracties worden de verschillen tussen de diverse theorieën steeds geringer, terwijl zij dezelfde waarde geven indien het geoorloofd is machten van x_1 hoger dan 1 te verwaarlozen. In deze benadering geven alle theorieën ook de juiste waarde voor λ , zoals door POLDER en VAN SANTEN werd aangetoond. Bij afnemende waarde van x_1 zal daarom de overeenstemming tussen theorie en experiment beter worden.

Volumefracties groter dan 0.7 zullen bij granulaire materialen met 2 componenten weinig voorkomen. Uit de figuren 1 en 2 volgt, dat voor $x_1 > 0.7$ de afwijkingen tussen de verschillende theorieën aanvankelijk nog toenemen, om voor $x_1 > 0.9$ weer te gaan afnemen. Waarschijnlijk geeft in dit gebied voor waarden van λ_1/λ_0 van de orde 1000 de theorie van BRUGGEMAN weer de beste aansluiting bij de juiste waarde.

Een vergelijking van de theorie met het experiment kon alleen gegeven worden voor bolvormige deeltjes, aangezien er geen metingen aan stoffen met ellipsoïdale korrels beschikbaar zijn. De formules voor ellipsoïdale deeltjes worden ook gebruikt als benaderingsformules voor korrels van willekeurige vorm. In hoofdstuk IV zullen wij deze benaderingswijze toepassen bij de berekening van het warmtegeleidingsvermogen van grond. Bij de voor grond verkregen experimentele resultaten zijn de afwijkingen tussen het experiment en de theorie van MAXWELL-BURGER-EUCKEN van dezelfde grootte-orde als in het geval van bolvormige korrels.

Tenslotte willen wij nogmaals de nadruk leggen op het semi-empirische karakter van de hier gevolgde werkwijze. Zo is uit het voorgaande nog niet duidelijk geworden, *waarom* de hypothese van POLDER en VAN SANTEN een zoveel grotere afwijking van de exacte waarden geeft, dan die van MAXWELL-BURGER-EUCKEN. In paragraaf 3e werd aangetoond, dat in de uitwerking van de differentiële theorie, zoals BRUGGEMAN die gaf, een onlogisch element is gelegen. Aan de formules (23a) en (23b) van BRUGGEMAN en ook aan formule (23) kan dus slechts de waarde van een semi-theoretische rekenregel worden toegekend. De overeenstemming tussen de theorie van BRUGGEMAN en de experimentele waarden voor $\lambda_1/\lambda_0 \approx 1000$ kunnen wij daarom ook slechts als toevallig beschouwen.

WARMTETRANSPORT IN VERBAND MET DAMPDIFFUSIE

10. DE THEORIE VAN KRISCHER

Door KRISCHER²⁶⁾ werd gewezen op het belang van de dampdiffusie voor het warmtetransport in poreuze materialen. Daar de dampspanning met de temperatuur toeneemt, zal deze in een met gas gevulde porie aan de warme zijde hoger zijn dan aan de koude. Waterdamp diffundeert in de porie door de lucht van plaatsen met hogere naar plaatsen met lagere temperatuur, waarbij aan de warme zijde verdamping en aan de koude zijde condensatie optreedt. Dit veroorzaakt een bijdrage tot het warmtetransport, waarvan het bedrag met stijgende temperatuur snel toeneemt. Bij 0 °C is deze bijdrage reeds ongeveer even groot als het transport door normale geleiding in lucht.

In een andere publicatie⁴⁶⁾ hebben wij reeds op het belang van Krischer's beschouwingen voor de theorie van de warmtehuishouding van de grond gewezen. Hier willen wij volstaan met het vermelden van enige resultaten, die in de volgende hoofdstukken zullen worden toegepast.

Uit de theoretische behandeling volgt, dat men de bijdrage van de destillatie van waterdamp tot het warmtetransport met goede benadering kan beschrijven als een extra geleiding in de met lucht gevulde poriën. Het warmtegeleidingsvermogen van de lucht wordt schijnbaar vergroot met een bedrag $\lambda_l^{(v)}$, dat berekend wordt volgens:

$$(36) \quad \lambda_l^{(v)} = 1.16 \times 10^{-6} \frac{L^2 \pi_s}{T^{0.7} (p - \pi_s)},$$

met L = de verdampingswarmte van water, in cal/g,

π_s = de verzadigingsspanning van waterdamp boven een vlak oppervlak,

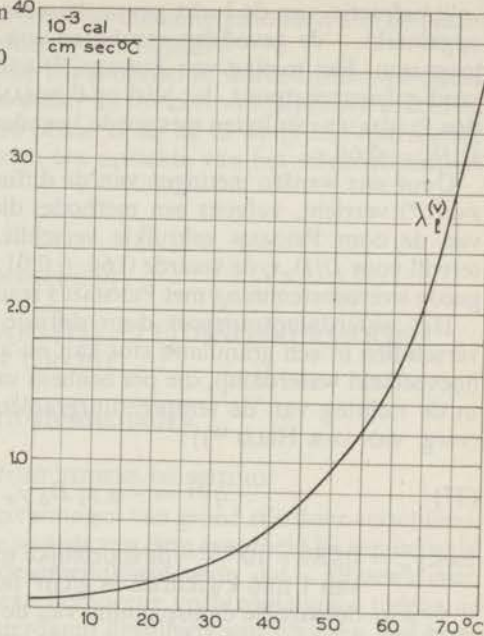
p = de druk van de vochtige lucht,

T = de absolute temperatuur in °K.

Bij de afleiding van formule (36) wordt verondersteld, dat de dampspanning in de grond π_s bedraagt. Deze formule geldt eveneens met goede benadering, wanneer de relatieve vochtigheid in de grond weinig van 1 verschilt, dus bij vochtgehalten boven de verwelkingsgrens. Bij vochtgehalten beneden deze grens neemt het bedrag van het warmtetransport door destillatie, gecombineerd met dampdiffusie, snel af. Een theoretische behandeling is voor dit gebied van vochtgehalten nog niet gegeven.

Het schijnbare geleidingsvermogen van de lucht in een met waterdamp verzadigde porie wordt nu gevonden, door het normale geleidingsvermogen (λ_l) met $\lambda_l^{(v)}$ te vermeerderen. Numerieke waarden van $\lambda_l^{(v)}$, vindt men in figuur 6. Ter vergelijking diene, dat het normale warmtegeleidingsvermogen van lucht bij 0 °C en 75 °C resp. 0.059×10^{-3} en 0.071×10^{-3} bedraagt. Voor water zijn deze waarden resp. 1.32×10^{-3} en 1.58×10^{-3} . Bij 59 °C is het schijnbare geleidingsvermogen van de lucht gelijk aan dat van water, zodat bij deze temperatuur het warmtegeleidingsvermogen van een poreuze stof onafhankelijk van het vochtgehalte is, bij niet te kleine vochtgehalten (verg. hoofdstuk IV).

Fig. 6. Waarden van $\lambda_l^{(v)}$ voor temperaturen tussen 0 en 75 °C.
(Values of $\lambda_l^{(v)}$ for temperatures between 0 and 75 °C).



11. GASDIFFUSIE IN GROND

Elders ⁴⁷⁾ werd reeds door de auteur aangetoond, dat men de in hoofdstuk I behandelde theorie van MAXWELL-BURGER-EUCKEN kan toepassen bij de berekening van de diffusiecoëfficiënt (D) van grond. Men dient hierbij de lucht als samenhangend medium met diffusiecoëfficiënt D_0 te beschouwen, waarin zich gronddeeltjes en water met een diffusiecoëfficiënt 0 bevinden.

In figuur 7 zijn enige theoretische krommen weergegeven, samen met meetresultaten van PENMAN ³²⁾. Bij de berekening werden de gronddeeltjes als afgeplatte omwentelings ellipsoiden beschouwd, waarvan de verhouding tussen lange en korte as n be draagt.

De metingen van PENMAN hadden betrekking op diffusie van CS_2 , aceton en CO_2 door een groot aantal poreuze materialen, waaronder droge en vochtige grondmonsters. De dik getrokken kromme geeft het door PENMAN gevonden gemiddelde verband tussen de diffusiecoëfficiënt en het poriënvolume. Voor droge grond komt deze kromme vrij goed overeen met de theoretische kromme voor $n = 5$ (kromme e). Voor vochtige grond zullen de insluitels meer de vorm van lange cilindres hebben. Hier wordt de diffusie echter belemmerd,

doordat een deel van het poriënvolume geheel door water is ingesloten en zodoende wordt geblokkeerd (kromme d, zie voor de berekening van deze kromme de genoemde publicatie ⁴⁷⁾).

Aangezien de metingen voor CS_2 , aceton en CO_2 alle hetzelfde verband tussen D/D_0 en de

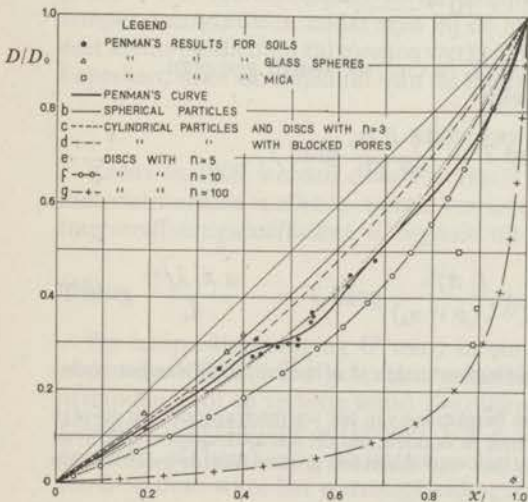


Fig. 7. Relatieve diffusiecoëfficiënt (D/D_0) van granulaire materialen als functie van de volumefractie lucht (x_1). „Discs” zijn ellipsoïden met assen $a = b = nc$.

(Relative diffusion-rate $[D/D_0]$ of granular materials as a function of the volume fraction of air $[x_1]$. „Discs” are ellipsoids with axes $a = b = nc$).

volume fractie van de lucht gaven, kan men – zoals door PENMAN reeds werd opgemerkt – de gevonden resultaten ook op andere gassen, b.v. waterdamp, toepassen. Een meting van ZUNKER⁵²⁾ van de diffusie van waterdamp door zand gaf een meetpunt, dat juist op PENMAN'S kromme lag. Voor $x_l \leq 0.7$ worden PENMAN'S resultaten met goede benadering weergegeven door de formule: $D/D_0 = 0.66 x_l$.

Door ons werden metingen van de diffusie van waterdamp door luchtdroog zand *) verricht, volgens een methode, die slechts op ondergeschikte punten van de door PENMAN gebruikte verschildt. De waarde van x_l bedroeg 0.39, terwijl voor $D/D_0 x_l$ de waarde 0.64 ± 0.01 werd gevonden, hetgeen eveneens in goede overeenstemming met PENMAN'S resultaten is.

Het waterdamptransport door diffusie onder de invloed van temperatuurverschillen in een granulaire stof kan nu als volgt worden berekend. Zij $q^{(v)}$ de hoeveelheid waterdamp, die per eenheid van tijd en per eenheid van oppervlak in de richting van de temperatuurgradiënt wordt getransporteerd, dan geldt (vergl. VAN DER HELD¹⁹⁾):

$$(37) \quad q^{(v)} = -\alpha x_l D_0 \gamma_w \frac{p}{p - \pi} \text{ grad } \pi,$$

met $\gamma_w = 0.289 \times 10^{-3}/T$ = de soortelijke massa van waterdamp bij een spanning van 1 mm kwikdruk in g/cm^3 mm Hg,

π = de partiële damspanning van de waterdamp in mm kwikdruk.

α is een functie van x_l , die nog van de aard van het materiaal afhangt. Volgens de metingen van PENMAN is voor $x_l < 0.7$ de waarde van α ongeveer 0.66. †)

Voor de waarde van D_0 worden door verschillende onderzoekers nogal uiteenlopende waarden opgegeven. Door ons werd bij de berekeningen steeds de door KRISCHER²⁶⁾ gemeten waarde gebruikt. KRISCHER bepaalde het damptransport tussen twee evenwijdige vochtige platen onder de invloed van een temperatuurverschil tussen deze platen. De situatie bij de experimentele opstelling komt zodoende vrij goed met die in een porie van een vochtig materiaal overeen. De meetresultaten worden weergegeven door de formule:

$$(38) \quad D_0 = 4.42 \times 10^{-4} \frac{T^{2.3}}{p},$$

waarbij p in mm kwikdruk, T in °K en D_0 in cm^2/sec wordt gemeten.

Bij een relatieve vochtigheid = 1 geldt:

$$\text{grad } \pi_s = \frac{d\pi_s}{dT} \text{ grad } T = \frac{18 L \pi_s}{R T^2} \text{ grad } T,$$

waarin R de gasconstante is.

Substitutie in (37) levert:

$$(39) \quad q^{(v)} = -1.16 \times 10^{-6} \alpha x_l \frac{L \pi_s}{T^{0.7} (p - \pi_s)} \text{ grad } T = -\frac{\alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{L} \text{ grad } T.$$

*) Van dit zand werd ook het warmtegeleidingsvermogen in afhankelijkheid van het vochtgehalte gemeten; verg. hoofdstuk III.

†) Indien men (37) wil toepassen voor een berekening van het warmtetransport ten gevolge van de dampdiffusie, dient men er rekening mee te houden, dat dit warmtetransport ook in de geblokkeerde poriën zal plaats vinden, zodat dan voor α een iets grotere waarde moet worden ingevuld.

Bij de afleiding van deze formule werd geen rekening gehouden met de plaatselijke variaties van grad T in het granulaire materiaal.

Het watertransport in de dampphase zal gedeeltelijk worden gecompenseerd door transport in de vloeibare phase onder de invloed van capillaire krachten. Het warmtetransport in de vloeibare phase is bij de in de grond optredende temperatuurverschillen te verwaarlozen ten opzichte van het warmtetransport door destillatie.

HOOFDSTUK III

HET METEN VAN HET WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN VAN GROND

A. LABORATORIUMMETINGEN

12. VOCHTTRANSPORT TIJDENS DE METING

Metingen van het warmtegeleidingsvermogen van grond zijn door verschillende onderzoekers verricht. Wil men de waarde van deze grootheid bij een bepaald vochtgehalte meten, dan doet zich de moeilijkheid voor, dat – alhoewel men uitgaat van een grondmonster met een homogene vochtverdeling – tijdens de meting het water gaat bewegen. Waterdamp destilleert van plaatsen met hoge naar plaatsen met lage temperatuur, waarbij de damp in de met lucht gevulde poriën door de lucht diffundeert. Aan de koude kant van het monster hoopt zich het vocht dus op, terwijl aan de warme kant uitdroging plaats vindt.

Capillaire krachten zullen echter het water in vloeibare vorm van vochtige naar droge plaatsen doen bewegen, waarbij men er rekening mee moet houden, dat de grootte van deze krachten afhankelijk is van vochtgehalte en temperatuur. Het watertransport in de dampphase wordt zodoende gedeeltelijk gecompenseerd door transport in de vloeibare phase.

Op blz. 32 werd aangetoond, dat – bij vochtgehalten boven de verwelkingsgrens – het vochttransport in de dampvorm evenredig is met de heersende temperatuurgradiënt, zodat men bij de te gebruiken meetmethode bij voorkeur met kleine gradiënten zal moeten werken. Bovendien kan men het vochttransport beperken, door de tijdsduur van de meting te bekorten.

13. VROEGERE METINGEN

Reeds in 1909 werden door PATTEN³¹⁾ metingen gepubliceerd, die met een niet-stationnaire methode waren verricht. Bij deze methode werd de temperatuurvereffeningscoëfficiënt, a , bepaald uit de Fourier-vergelijking

$$(40) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

De temperatuurstijging θ werd in een rechthoekige bak, waarvan één der zijden op 100 °C werd gebracht, gemeten als functie van de tijd voor diverse afstanden x tot de verhitte wand. De differentiaalquotiënten in (40) werden door grafische differentiatie verkregen. Uit a werd λ berekend met behulp van de gemeten of berekende warmtecapaciteit per volume-eenheid. Door PATTEN werd op deze wijze het warmtegeleidingsvermogen van diverse grondsoorten in

afhankelijkheid van het vochtgehalte bepaald. Tot voor kort was zijn onderzoek het meest volledige op dit terrein. De nauwkeurigheid van de metingen is echter niet groot; naar schatting bedroeg de fout gemiddeld ongeveer 20 %.

Van recente datum is een uitvoerig onderzoek van KERSTEN²⁴⁾, die een stationnaire methode met cilindrische symmetrie gebruikte. Naar KERSTEN zelf opmerkt, was het vochttransport tijdens de metingen de voornaamste foutenbron. De onnauwkeurigheid in de resultaten voor λ bedroeg naar schatting gemiddeld ongeveer 5 %. De metingen werden voor diverse grondsoorten verricht bij uiteenlopende vochtgehalten en bij temperaturen van -20, 25, 40 en 70 °F (resp. -29, -3.9, 4.4 en 21 °C).

SMITH^{38, 39, 40)} bracht het grondmonster tussen evenwijdige, vlakke platen, welke door schutringen waren omgeven. Het warmtegeleidingsvermogen werd in de stationnaire toestand bepaald. Alleen bij droge grond werden betrouwbare resultaten verkregen. Bij vochtige grond werd een aanzienlijk vochttransport geconstateerd.

Door CHUDNOWSKI¹¹⁾ werd een niet-stationnaire methode met vlakke verhitte toegepast. De door hem gevonden sterke stijging van λ bij grote vochtgehalten mag waarschijnlijk aan het optreden van convectie worden toegeschreven.

14. DE AANLOOPMETHODE

Zoals in het voorgaande werd uiteengezet dient men bij de bepaling van het warmtegeleidingsvermogen van vochtige grond de voorkeur te geven aan een methode, waarbij zowel de tijdsduur van de meting als de temperatuurgradiënt in het grondmonster niet te groot is. Een bestaande methode, die aan deze eisen voldoet is de z.g. aanloopmethode, waarvan het principe afkomstig is van STÄLHANE en PYK⁴³⁾. Deze methode werd verder ontwikkeld door WEISHAUP⁴⁹⁾ en vooral door VAN DER HELD en VAN DRUNEN²⁰⁾ voor de meting van het warmtegeleidingsvermogen van vloeistoffen. Door laatstgenoemden werden de theoretische aspecten uitvoerig behandeld.

Door VAN DORSSSEN¹²⁾ werd de aanloopmethode toegepast bij de meting van het warmtegeleidingsvermogen van zand bij kleine vochtgehalten. In de volgende paragrafen zal worden beschreven, hoe door ons metingen met deze methode werden verricht aan zand van uiteenlopende vochtgehalten en bij verschillende temperaturen, terwijl daarna zal worden besproken hoe deze methode kan worden toegepast voor metingen in situ.

a) Principe van de aanloopmethode.

In een lange, cilindrische verhitte wordt door een elektrische stroom een warmtehoeveelheid q cal per sec en per cm lengte geproduceerd. De warmteafvoer wordt bepaald door de thermische eigenschappen van het - homogeen gedachte - materiaal, dat de verhitte omgeeft. Geschiedt het warmte-transport uitsluitend door geleiding, dan wordt bij een oneindig lange, lijnvormige warmtebron de temperatuurstijging Θ op een afstand r van de verhitte, t sec na het inschakelen van de stroom gegeven door:

$$(41) \quad \Theta(r, t) = (q/4 \pi \lambda) \{-Ei(-r^2/4at)\},$$

waarin λ = het warmtegeleidingsvermogen van het medium,

a = de temperatuurvereffeningscoëfficiënt van het medium,

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -0.5772 - \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots^*).$$

Voor voldoende kleine waarden van $r^2/4at$, dus voor $t \gg \frac{r^2}{4a}$, geldt met goede benadering:

$$(42) \quad \Theta = (q/4 \pi \lambda) \{c + \ln t\}.$$

Meet men Θ dicht bij de verhitte als functie van t , dan verkrijgt men bij uitzetten van Θ tegen $\log t$ een rechte lijn. Uit de helling van deze lijn kan λ bij bekende q worden berekend.

DOOR VAN DER HELD en VAN DRUNEN werd aangetoond, dat voor een lange, cilindrische verhitte met een kleine, van nul verschillende straal met goede benadering geldt:

$$(43) \quad \Theta = (q/4 \pi \lambda) \{c' + \ln(t + t_0)\} \text{ voor } t \gg \frac{r^2}{4a},$$

waarbij t_0 een tijdcorrectie is, die hoofdzakelijk afhangt van de dikte van de verhitte. t_0 kan uit het waarnemingsmateriaal bepaald worden volgens:

$$(44) \quad \frac{\partial t}{\partial \Theta} = \frac{4 \pi \lambda}{q} (t + t_0).$$

Na numerieke of grafische berekening van $\partial t/\partial \Theta$ verkrijgt men t_0 uit een grafiek van $\partial t/\partial \Theta$ tegen t .

Na het uitschakelen van de stroom op een tijdstip t_1 wordt het temperatuurverloop bij een verhitte met dikte nul gegeven door:

$$(45) \quad \Theta = (q/4 \pi \lambda) \{-Ei(-r^2/4at) + Ei(-r^2/4a(t - t_1))\} \text{ voor } t \geq t_1.$$

Het uitschakelen van de verhitting kan men nl. interpreteren als het in werking stellen van een warmtemachine, die per tijdseenheid een warmtehoeveelheid van q cal per cm lengte onttrekt. Analoog aan (42), resp. (43) geldt nu:

$$(46) \quad \Theta = (q/4 \pi \lambda) \{c + \ln t\} - (q/4 \pi \lambda) \{c + \ln(t - t_1)\} \text{ voor } t - t_1 \gg \frac{r^2}{4a}, \text{ resp.}$$

$$(47) \quad \Theta = (q/4 \pi \lambda) \{c' + \ln(t + t_0)\} - (q/4 \pi \lambda) \{c' + \ln(t - t_1 + t_0)\}$$

voor $t - t_1 \gg \frac{r^2}{4a}$.

Door uitzetten van

$$(48) \quad (q/4 \pi \lambda) \{c + \ln t\} - \Theta, \quad \text{resp.}$$

$$(49) \quad (q/4 \pi \lambda) \{c' + \ln(t + t_0)\} - \Theta$$

*) Numerieke waarden van deze functie vindt men in JAHNKE-EMDE'S „Funktionentafeln”.

tegen $\log(t-t_1)$, resp. $\log(t-t_1+t_0)$ verkrijgt men wederom een rechte met helling $q/4\pi\lambda \log e$, waarbij de eerste term in de uitdrukkingen (48) en (49) gevonden kan worden door extrapolatie van de rechte verkregen voor $t \leq t_1$.

b) *De meetopstelling.*

Het grondmonster werd in een rechthoekige koperen bak gebracht met inwendige afmetingen van $10 \times 10 \times 15 \text{ cm}^3$. Als verhitter diende een constantaandraad, die in het midden van de bak evenwijdig aan de langste ribbe werd aangebracht. Hiertoe waren in de middens van de kleinste zijden openingen in de bak gemaakt, waarop korte koperen buisjes waren bevestigd. De temperatuur werd vlak bij de verhitter gemeten met de warme las van een koper-constantaan thermo-element. De draden van het thermo-element werden eveneens door de koperen buisjes buiten de bak gevoerd.

Aangezien ook bij temperaturen boven kamertemperatuur werd gemeten, moest de koperen bak in een met water gevulde thermostaat worden geplaatst. In verband hiermede werd de bovenzijde van de bak waterdicht afgesloten door middel van een koperen deksel, dat met schroeven op de bak werd bevestigd. Tussen het deksel en de rand van de bak bevond zich een band van rubber. Aan de koperen buisjes werden rubber slangstukken bevestigd, die door het deksel van de thermostaat werden geleid.

Als thermostaat diende een zinken bak met inwendige afmetingen van $21 \times 21 \times 25 \text{ cm}^3$. Deze zinken bak was in een grotere houten bak geplaatst, waarbij de tussenruimten met warmte-isolerend materiaal waren opgevuld. De zinken bak werd aan de bovenzijde afgesloten door een uit twee gedeelten bestaand deksel van pertinax (1 cm dik), waarin zich openingen voor thermometers, roerders en een verwarmingselement bevonden.

Het water in de bak kon worden verwarmd met een elektrisch gestookt dompellichaam van 300 Watt. De temperatuur werd geregeld door een contactthermometer met relais. Het water in de bak werd door twee roerders in beweging gebracht. De temperatuurfuctuaties van dit water bedroegen bij deze opstelling ca. 0.05°C .

De temperatuurmeting geschiedde met een thermo-element, waarvan de warme las zich in het midden van de koperen bak bevond. De koude las werd geplaatst in de as van een cilindrisch bakje (diameter = 4 cm) gevuld met droog zand, dat in de thermostaat stond. Ten gevolge van de kleine waarde van de temperatuurvereffeningscoëfficiënt van droog zand bedroegen de temperatuurfuctuaties van de koude las minder dan 0.005°C . De diameter van de draden van het thermo-element bedroeg 0.01 cm. Het thermo-element was in serie geschakeld met een weerstandsbankje en een snelle micro-Moll galvanometer. De weerstand van het bankje werd zodanig ingesteld, dat de galvanometer aperiodiek gedempt was.

De stroom werd geleverd door een accu-batterij van 6 V, die in serie geschakeld was met de verhitter, een regelbare weerstand en een SIEMENS en HALSKE ampèremeter. Deze meter was in de gebruikte schaalgebieden vergeleken met een geijkte HARTMANN en BRAUN precisie-meter. Voor de afwijkingen van de SIEMENS en HALSKE meter, die maximaal 0.6% van de aanwijzing bedroegen, werd gecorrigeerd. Als verhitter diende een constantaandraad van 0.02 cm diameter. De weerstand per meter lengte van deze draad werd met een nauwkeurigheid van 0.2% gemeten met een gevoelige brug van WHEATSTONE.

Het vermogen per cm lengte van de verhitter varieerde van ongeveer 1.2×10^{-3} cal/sec tot 6.7×10^{-3} cal/sec.

Door VAN DORSSEN¹²⁾ werd reeds opgemerkt, dat de elektrische isolatie tussen de stroomkring van de verhitter en die van het thermo-element zeer goed dient te zijn. Aangezien de stroom door de galvanometer van de orde van 10^{-6} Ampère is, zal bij een lekweerstand van $10^6 \Omega$ de uitslag van de galvanometer reeds sterk worden beïnvloed. VAN DORSSEN bedekte zijn draden daarom met een speciale isolerende was. Door ons werden draden van in de handel verkrijgbaar geëmailleerd koper en constantaan gebruikt, waarvan de isolerende eigenschappen bij zorgvuldige behandeling van de draden voldoende bleken te zijn.

Speciale voorzorg werd genomen bij het leiden van de draden door de koperen buisjes. Hier werden zij beschermd door korte stukken plastic isolatiekous. De kousjes werden met kurk in de buisjes geklemd. Bij het vullen van de bak werd de verhitterdraad met de hand gespannen gehouden, totdat de grond overal goed rondom de draad sloot. Ook met een blanke constantaandraad, die in een nauwsluitende, dunne glascapillair (uitwendige diameter circa 0.05 cm) werd gebracht, werden goede resultaten verkregen. Het werken met dit type verhitter is echter minder gemakkelijk.

De duur van een meting bedroeg ongeveer 10 minuten, waarvan 3 à 5 minuten gemeten werd met ingeschakelde stroom. De maximale temperatuurstijging van de warme las bedroeg 0.5 à 1.5 °C, hetgeen overeenkwam met een uitslag van 1 à 3 cm op de galvanometerschaal. Bij het passeren van het centrum van de lichtvlek over een millimeterstreep op de schaal werd de tijd op een chronometer afgelezen. Het eerste betrouwbare meetpunt werd gewoonlijk verkregen na 5 à 10 sec.

c) Metingen aan zand.

Een groot aantal metingen met de aanloopmethode werd verricht aan zand bij verschillende vochtgehalten en temperaturen. Het doel van deze metingen was, enerzijds de methode te beproeven over het gehele traject der mogelijke vochtgehalten, anderzijds een basis te verkrijgen voor de toetsing van de theoretische berekeningen van het warmtegeleidingsvermogen van grond.

Het zand was afkomstig van de Wageningse Eng. Van dit zand was op het Laboratorium voor Natuurkunde een grote hoeveelheid van de zeeffractie met deeltjes tussen 0.01 en 0.06 cm aanwezig. Een door het Laboratorium voor Mineralogie en Geologie van de Landbouwhogeschool verrichte bepaling van de samenstelling van dit zand gaf als resultaat 89 % kwarts en 11 % veldspaat en gesteenteresten, hetgeen in goede overeenstemming is met een vroegere bepaling van VAN BAAREN³⁾ van zand met dezelfde vindplaats. Metingen van het gemiddelde soortelijk gewicht van de korrels bij kamertemperatuur gaven als resultaat een waarde van 2.64.

Bij het vullen van de koperen bak werd steeds uitgegaan van eenzelfde hoeveelheid droog zand. Aan dit zand werd zoveel water toegevoegd, dat het gewenste vochtgehalte werd verkregen, waarna door menging zo goed mogelijk een homogene vochtverdeling tot stand werd gebracht. Het vochtige zand werd vervolgens bij kleine hoeveelheden in de bak gebracht. Na het vullen moest hierbij het zandoppervlak ter hoogte van de rand van de bak liggen, hetgeen door meer of minder aandrukken tijdens het vullen werd bereikt. De volumefractie van de zandkorrels bedroeg bij alle experimenten 0.573.

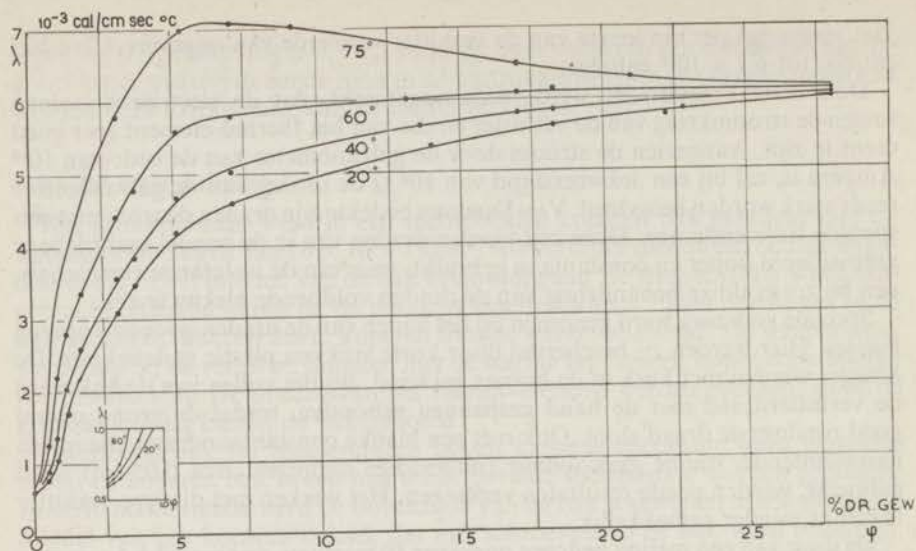


Fig 8. Meetresultaten van het warmtegeleidingsvermogen (λ) van zand in afhankelijkheid van het vochtgehalte (ϕ) bij temperaturen van 20, 40, 60 en 75 °C.
(Experimental values of the thermal conductivity [λ] of sand at varying moisture contents [ϕ] for temperatures of 20, 40, 60 and 75 °C).

De vochtgehalten (ϕ) varieerden van 0 tot 28 gewichtsprocenten op basis van het gewicht van het droge zand. Dit correspondeert met volumefracties van 0 tot 0.424. Bij het grootste vochtgehalte waren dus vrijwel alle poriën gevuld met water. Het vochtgehalte 0 werd verkregen door het zand meer dan 24 uur in een droogstoof te plaatsen bij een temperatuur van 150 °C. Het vochtgehalte werd door weging van de gevulde bak bepaald, zowel voor als na een experiment.

Bij vochtgehalten boven 10 % ging er bij verwarming van de bak in de thermostaat water verloren, voornamelijk ten gevolge van verdringing door de uitzettende lucht in de poriën, waarbij het water door de slangstukken ontweek. Indien dit het geval was, werd de bak aanvankelijk enige graden boven de meettemperatuur verwarmd, waarna langzaam werd afgekoeld tot de gewenste temperatuur. Als juiste waarde van het vochtgehalte werd dan de na afloop van het experiment bepaalde genomen.

Vochtverplaatsing tijdens het verwarmen van de bak was niet te vermijden. Nadat de gewenste temperatuur was bereikt, werd steeds geruime tijd gewacht, alvorens een meting te verrichten, opdat zich opnieuw een evenwicht in de vochtverdeling kon instellen.

De meetresultaten zijn weergegeven in fig. 8. De metingen werden verricht bij kamertemperatuur, 40, 60 en 75 °C. De resultaten voor 20 °C werden door inter- of extrapolatie verkregen. Het verschil tussen de kamertemperatuur en 20 °C bedroeg steeds minder dan 5 °C. Bij elke temperatuur werd voor een bepaald vochtgehalte als waarde van λ het gemiddelde van de uitkomsten van twee of drie (in enkele gevallen ook meer) metingen genomen. De resultaten van deze parallelmetingen verschilden in het algemeen minder dan 2 %, in enkele uitzonderingsgevallen iets meer, doch steeds minder dan 5 %. De reproduceerbaarheid van de met deze methode verkregen resultaten bedraagt dus enkele procenten. Bij elke bepaling werd λ berekend uit het gemiddelde van de hellingen

der bij verwarming en bij afkoeling verkegen rechten. Het verschil tussen deze beide hellingen bedroeg in de meeste gevallen eveneens minder dan 2 %.

De nauwkeurigheid, waarmede q kon worden berekend, bedroeg ongeveer 0.3 %. De relatieve nauwkeurigheid van de λ -waarden in fig. 8 bedraagt zodoende ongeveer 2 %. Bij de absolute bepaling van λ komen in de berekening nog de ijkwaarde van de galvanometeropstelling en de totale weerstand van de galvanometerkring voor. Eerstgenoemde was met een nauwkeurigheid van 0.7 % bepaald. Twee bepalingen, die met een tussenruimte van 5 maanden werden verricht, gaven dezelfde gemiddelde waarde. De weerstand van galvanometer + thermo-element + voorschakelweerstand werd met een nauwkeurigheid van 0.5 % bepaald. De absolute nauwkeurigheid van de gemeten waarden van λ bedraagt dus ongeveer 3 %.

Het gewicht van de gevulde koperen bak varieerde van ongeveer 3000 g tot ongeveer 5000 g; het gewicht van het droge zand bedroeg 2267.0 g. Deze gewichten konden op de hiervoor beschikbare balans met een nauwkeurigheid van 0.3 g worden gemeten. Bij de vochtgehalten beneden 1 % werd daarom een, op een gevoelige balans gewogen hoeveelheid water door het droge zand gemengd, terwijl de weging van de gevulde bak hier slechts als ruwe controle op het vochtgehalte kon dienen. Het verlies van water door verdamping tijdens het mengen bedraagt naar schatting minder dan 0.1 g. De absolute nauwkeurigheid in de bepaling van φ bedraagt dus ongeveer 0.004 voor $\varphi < 1$ en 0.015 voor $\varphi > 1$.

Bij vochtgehalten boven 7 % werd een benedenwaartse verplaatsing van het water onder invloed van de zwaartekracht merkbaar. Als vochtgehalte nabij de meetplaats werd het gemiddelde vochtgehalte in de bak aangehouden. Hierdoor bestaat de mogelijkheid, dat de opgegeven waarden van φ voor $\varphi > 7$ iets te hoog liggen (behalve bij de grootste vochtgehalten). Dit effect wordt echter gedeeltelijk gecompenseerd, doordat de dieper gelegen lagen met de grotere vochtgehalten ten gevolge van hun groter geleidingsvermogen relatief meer tot het warmtetransport bijdragen, dan de hoger gelegen drogere lagen.

De grafieken van de temperatuur tegen $\log t$ bleven, ondanks de niet homogene vochtverdeling, goed recht. Een uitzondering vormden de experimenten bij een vochtgehalte van ongeveer 10 %, waar bij 20 en 40 °C duidelijk gekromde lijnen met de holle kant naar de t -as werden gevonden. Na de metingen werd door weging van monsters, afkomstig van verschillende diepten de volgende vochtverdeling geconstateerd: boven 6.1 %, midden 9.9 %, beneden 14.6 %.

Bij de geringe dikte van de hier gebruikte verhitter was de waarde van de tijdcorrectie t_0 uit formule (43) steeds onmeetbaar klein. Een berekening van andere correcties, op de door VAN DER HELD en VAN DRUNEN aangegeven wijze, geeft de volgende resultaten:

1. De invloed van de eindige lengte van de verhitter geeft correcties, die maximaal 1 % bedragen.
2. De invloed van de eindige dwarsafmetingen van het meetvat geeft afwijkingen van minder dan 0.1 %.
3. De invloed van de traagheid van de galvanometer geeft na 5 sec een afwijking van minder dan 0.05 mm op de galvanometerschaal; bij langere tijdsduur wordt deze afwijking nog kleiner.
4. Het relatieve verschil tussen de Ei -functie en de logarithmische benadering van deze functie is na 5 sec reeds minder dan 1 %.

d) *Het vochttransport*

We willen nu nog door berekening nagaan, hoe groot het watertransport door diffusie bij bovenstaande metingen is geweest. Volgens formule (39) geldt voor de stroomdichtheid van de waterdampbeweging:

$$(39') \quad q^{(v)} = - \frac{\alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{L} \frac{\partial \Theta}{\partial r}.$$

De toename van het vochtgehalte per sec in een ring van 1 cm lengte, begrensd door cirkelcilinders met stralen r en $r + dr$ is dan

$$\frac{\partial}{\partial r} (2 \pi r q^{(v)}).$$

Zij v het vochtgehalte in g/cm^3 , dan geldt voor de verandering van v :

$$2 \pi r \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{2 \pi \alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{L} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) - 2 \pi \alpha x_l r \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\lambda_l^{(v)}}{L} \right) \right\} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)^2.$$

Aangezien de temperatuurstijging Θ voldoet aan:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right),$$

is dus:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{L a} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \alpha x_l \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\lambda_l^{(v)}}{L} \right) \right\} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)^2.$$

Stellen wij het temperatuurverloop voor door formule (41), dan is:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = - \frac{q}{4 \pi \lambda} \frac{2}{r} e^{-\frac{r^2}{4at}}$$

en:

$$(50) \quad \Delta v \approx \frac{\alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{L a} \Theta + \frac{4 \alpha x_l t}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\lambda_l^{(v)}}{L} \right) \right\} \left(\frac{q}{4 \pi \lambda} \right)^2,$$

waarin Δv de afname van het vochtgehalte per cm^3 ter plaatse r op het tijdstip t is. Aangezien $(\lambda_l^{(v)}/La)$ en $\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\lambda_l^{(v)}}{L} \right)$ tijdens de metingen slechts weinig variëren, maken wij geen grote fout door bij de integraties deze grootheden als constant te beschouwen, terwijl het vervangen van de integraal van $\exp(-r^2/4at)$ in het rechterlid door t , bij de in aanmerking komende t -waarden een geringe majoratie van de waarde van Δv betekent.

Noemen wij het oorspronkelijke vochtgehalte v_0 en zij φ weer het vochtgehalte in gewichtsprocenten van de droge stof, dan geldt bij onze experimenten: $v_0 = 1.51 \varphi/100$, dus:

$$(51) \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{100 \alpha x_l \lambda_l^{(v)}}{1.51 \varphi L a} \left\{ \Theta + \left(\frac{q}{4 \pi \lambda} \right)^2 \frac{4 a t}{r^2} \frac{L}{\lambda_l^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\lambda_l^{(v)}}{L} \right) \right\}.$$

Hierin is $\alpha \approx 0.66$, $x_0 = 0.427 (1 - 0.0357 \varphi)$ en $a = \lambda/\rho c$, met $\rho c \approx 1.51 (0.18 + \varphi/100)$.

Bij de afleiding van formule (39') werd verondersteld, dat het vochtgehalte niet

beneden de verwelkingsgrens ligt. Deze grens correspondeert bij het betreffende zand met een φ -waarde van ongeveer 0.3. Voor kleinere vochtgehalten geeft (39') een te grote waarde voor $q^{(v)}$.

In onderstaande tabel zijn enige met behulp van (51) berekende waarden van $\Delta v/v_0$ opgenomen.

temp.	20	40	60
φ			
0.5	0.024	0.067	0.177
1.0	0.010	0.027	0.070

Bij de berekeningen werden de waarden van λ aan de metingen ontleend. Voor t werd de waarde 300 gekozen; zoals reeds eerder werd vermeld, bedroeg de tijd waarbij met ingeschakelde stroom werd gemeten 180 à 300 sec. Voor r werd de straal van de verhitter ingevuld. Bij vochtgehalten beneden 5% werd een constantaandraad in een glascapillair als verhitter toegepast, waarvoor $r = 0.025$ cm (verg. blz. 37). Daar de tweede term in de vorm tussen accolades in (51) ongeveer 10 keer zo groot is als de eerste term, neemt de waarde van $\Delta v/v_0$ met stijgende r snel af. Voor θ werd de waarde 1.0 ingevuld, hetgeen voor de meeste metingen iets aan de hoge kant is.

Bij 75 °C was het laagste vochtgehalte, waarbij gemeten werd $\varphi = 3.0$. Voor dit geval leverde de berekening $\Delta v/v_0 = 0.047$, eveneens voor $t = 300$ en $r = 0.025$.

Daar de compensatie door capillair vochttransport in de vloeibare fase niet in rekening werd gebracht, zijn bovenstaande waarden van $\Delta v/v_0$ zeker aan de hoge kant. Voor vochtgehalten boven 1% is de waarde van de relatieve verandering van het vochtgehalte vlak bij de verhitter dus kleiner dan enkele honderdsten, terwijl deze waarde met toenemende afstand tot de verhitter afneemt en b.v. op een afstand van 0.1 cm van de verhitter minder dan 0.01 bedraagt.

B. VELDMETINGEN

15. DE METHODE VAN ALBRECHT

Voor directe bepaling van het warmtegeleidingsvermogen in het veld is door ALBRECHT¹⁾ een methode ontwikkeld, die werd toegepast door FRANSSILA¹⁵⁾ en BRACHT⁷⁾. Bij deze methode worden twee Pt-weerstandsthermometers met een lengte van circa 10 cm, die in dunne glazen buizen (diameter 2 à 3 mm) zijn geplaatst, op een onderlinge verticale afstand van 1 à 2 cm horizontaal in de grond gebracht. Het verschil in temperatuur tussen de beide thermometers wordt met een brugschakeling gemeten. De benedenste thermometer wordt periodiek 5 minuten verwarmd met behulp van een afzonderlijke verhitingsdraad, of door een verhoging van de meetstroom in de brug. De verandering van het temperatuurverschil tussen de beide thermometers is dan een maat voor het warmtegeleidingsvermogen van de grond.

Bij de theoretische verwerking van de metingen wordt verondersteld, dat er na de verhitting een stationnaire toestand is ingetreden. Dan geldt bij een radiale warmtestroom voor de verandering in temperatuurverschil ten gevolge van de verwarming:

$$(52) \quad \Delta\theta = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Hierin is q de warmtehoeveelheid, die per eenheid van tijd en lengte in de verhittingsdraad wordt geproduceerd, λ_1 het warmtegeleidingsvermogen van het medium in de glazen buis, λ_2 dat van de grond, r_0 de straal van de weerstandsdraad, r_1 die van de glazen buis en r_2 de afstand der beide weerstandsdraaden. De grootte $(1/\lambda_1) \ln r_1/r_0$ wordt experimenteel bepaald door in water en/of kwik een meting te verrichten. De invloed van convectorie in deze media wordt aan de hand van experimentele gegevens voor horizontale cilindres met behulp van gelijkvormigheidsbeschouwingen in rekening gebracht.

Bij de door FRANSILA gebruikte uitvoering werden buizen van messing in plaats van glazen buizen toegepast, terwijl zich binnen deze buizen paraffine in plaats van lucht bevond. Hierdoor werd de waarde van de eerste term tussen haken in het rechterlid van (52) met een factor 17 verkleind. Bij ALBRECHT was deze term van dezelfde grootte-orde als de tweede term voor gemiddelde waarden van λ_2 .

Het voornaamste bezwaar tegen de methode van ALBRECHT is gelegen in het feit, dat met een stationnaire temperatuurverdeling wordt gerekend. Nemen we b.v. het uiteraard gunstige geval dat λ_1 zeer groot is, dan volgt uit formule (52) met $r_2 = 1.0$ en $r_1 = 0.1$: $\Delta\theta = 1.15 q/\pi \lambda_2$.

Volgens de in het voorgaande behandelde „niet-stationnaire” theorie geldt met goede benadering:

$$\Delta\theta = \frac{q}{4\pi\lambda_2} \left\{ -Ei\left(-\frac{r_1^2}{4at}\right) + Ei\left(-\frac{r_2^2}{4at}\right) \right\} = 0.97 q/\pi\lambda_2,$$

met $t = 300$ en $a = 0.001$; voor $a = 0.01$ wordt de coëfficiënt in de teller van het derde lid 1.13. De in de grond voorkomende waarden van a liggen in het algemeen tussen 0.001 en 0.01.

16. DE AANLOOPMETHODE

Voor het verrichten van veldmetingen met de aanloopmethode moeten de verhittingsdraad en de draden van het thermo-element in de grond worden gebracht, waarbij de natuurlijke ligging van de gronddeeltjes zo min mogelijk moet worden verstoord. Bovendien is het nodig de draden te beschermen tegen beschadiging en chemische aantasting.

Bij onze eerste veldmetingen waren de draden in een glazen capillair met een uitwendige diameter van circa 0.1 cm ondergebracht. De capillair was gevuld met paraffine-olie. Alhoewel goede meetresultaten konden worden verkregen, waren deze glazen elementen voor gebruik in de grond niet geschikt ten gevolge van hun breekbaarheid. Een enkel element had een levensduur van enige weken; meestal trad echter na enige dagen reeds breuk op.

De constructie van de meetelementen, zoals deze thans worden uitgevoerd, is weergegeven in fig. 9. Het uitwendige omhulsel wordt gevormd door een kokertje van monel-gaas (draaddikte 0.01 cm, afstand tussen draden 0.02 cm). De stookdraad is van geëmailleerd constantaan met een diameter van 0.01 cm. Deze wordt dubbelgevouwen in een nauwsluitende glazen capillair gebracht, welke

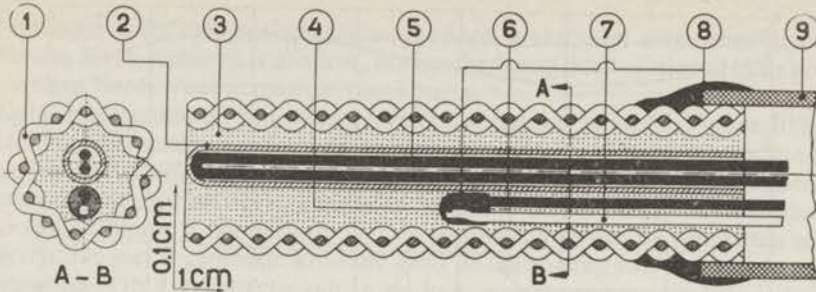


Fig. 9. Constructie van een meetelement. 1 - monelgaas, 2 - glascapillair, 3 - paraffine, 4 - thermolas, 5 - stookdraad, 6 - constantaan, 7 - koper, 8 - collodium, 9 - isolatiekous.
(Construction of a measuring element. 1 - monel gauze, 2 - glass capillary, 3 - paraffine wax, 4 - thermo junction, 5 - heating wire, 6 - constantan, 7 - copper, 8 - collodium, 9 - insulating socket).

vervolgens aan één der uiteinden wordt dichtgesmolten. De draden van het thermo-element zijn van geëmailleerd koper en constantaan (0.01 cm diameter); de las is omgeven door een dun collodiumvlies, om elektrische isolatie ten opzichte van het gaas te verkrijgen. De tussenruimten zijn opgevuld met vaste paraffine.

Bij de vervaardiging van het gazen kokertje, wordt een smal reepje van het gaas om een metalen staafje van 0.06 cm diameter gevouwen, waarbij er voor wordt gezorgd, dat de randen juist tegen elkaar komen te liggen. Na enig rollen van het staafje met gaas tussen twee vlakke stukken hout wordt een vrijwel naadloos kokertje verkregen, aangezien de afgeknipte draadeinden aan de beide randen in elkaar gaan grijpen.

In het kokertje wordt eerst het thermo-element en vervolgens de capillair met de stookdraad gebracht. Daarna wordt het geheel twee of drie maal in gesmolten paraffine gedompeld, waarbij na iedere indompeling gewacht wordt tot de paraffine in het element is gestold. Daar de lucht door de openingen in het gaas kan ontwijken, zijn alle tussenruimten nu met paraffine gevuld. De lengte van de door ons gebruikte elementen is ongeveer 11 cm, de diameter circa 0.14 cm.

Aan de uiteinden van de stookdraad en van de koperdraad van het thermo-element worden dikke geëmailleerde koperdraden gesoldeerd. Deze draden en de constantaandraad worden buiten het element beschermd door een plastic isolatiekous, die met een weinig collodium aan het element wordt gekit. De levensduur van deze elementen in de grond is nu reeds meer dan 5 maanden.

De „koude” las van het thermo-element kan boven de grond in ijs worden geplaatst. Ook kan men de tweede lasplaat in de isolatiekous aanbrengen, zodat b.v. beide lasplaatsen op dezelfde diepte in de grond komen te liggen. Hierbij dient men er voor te zorgen, dat geen merkbare verwarming van deze tweede las door de stroom in de toevoerdraden naar de verhitte kan optreden. Men kan hiertoe de las b.v. door een afzonderlijk kousje omgeven.

Aangezien de veranderingen van het warmtegeleidingsvermogen in horizontale richting over een afstand van circa 10 cm in het algemeen gering zijn, terwijl deze grootte met de diepte vrij sterk kan variëren, verdient het aanbeveling de elementen horizontaal in de grond te plaatsen. Om verstoring van de grond in de nabijheid van de meetplaats zoveel mogelijk te beperken, wordt eerst een kleine kuil gegraven. Vervolgens wordt op de gewenste diepte met een metalen staafje, dat iets dunner is dan het meetelement, in één van de zijwanden een

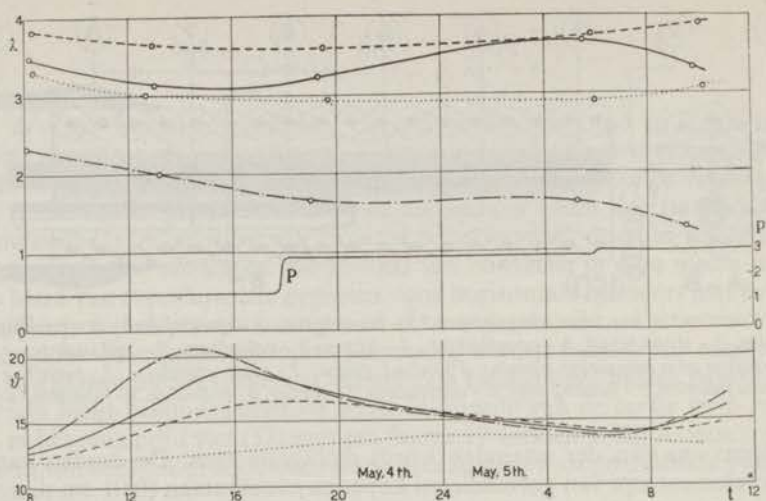


Fig. 10. Resultaten van veldmetingen in klei begroeid met gras voor het tijdvak 4-5 Mei 1951. λ = warmtegeleidingsvermogen in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C, ϑ = temperatuur in $^{\circ}$ C, P = regenval in mm, t = plaatselijke middelbare tijd. ····· diepte 4 cm, ——— diepte 8 cm, - - - - diepte 16 cm, ······· diepte 32 cm.

(Results of field measurements in clay cropped with grass for the period of 4th-5th of May 1951. λ = thermal conductivity in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C, ϑ = temperature in $^{\circ}$ C, P = rainfall in mm, t = local mean time. ····· depth of 4 cm, ——— depth of 8 cm, - - - - depth of 16 cm, ······· depth of 32 cm).

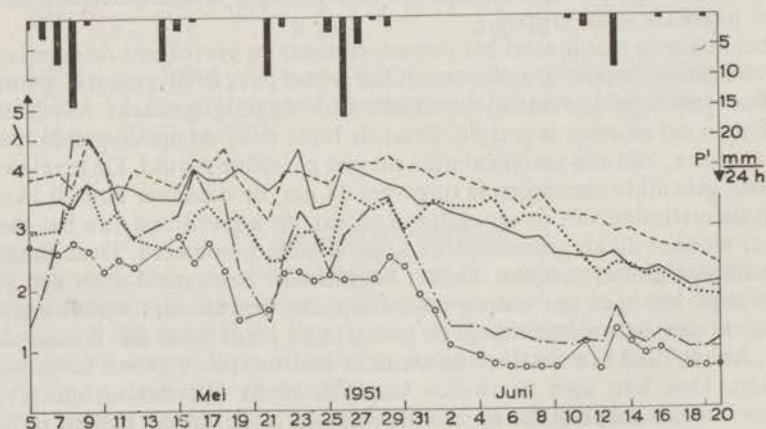


Fig. 11. Resultaten van veldmetingen in klei begroeid met gras en in onbegroeid zand voor het tijdvak 5 Mei-20 Juni 1951. λ = het warmtegeleidingsvermogen (in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C) gemeten omstreeks 8 uur plaatselijke middelbare tijd (op de navolgende data werd geen meting verricht: 6, 13, 14, 20 en 27 Mei; 3, 10 en 17 Juni), P' = regenval over een tijdvak van 24 uur, afgetapt te 8 uur plaatselijke middelbare tijd. o—o—o diepte 4 cm in zand; ····· diepte 4 cm, ——— diepte 8 cm, - - - - diepte 16 cm, ······· diepte 32 cm in klei. (Results of field measurements in clay cropped with grass and in bare sand for the period of 5th of May-20th of June 1951. λ = thermal conductivity [in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C] measured about 8 h local mean time [on the following dates no measurements were carried out: 6th, 13th, 14th, 20th, and 27th of May; 3rd, 10th, and 17th of June], P' = rainfall over a period of 24 hours measured at 8 h local mean time. o—o—o depth of 4 cm in sand; ····· depth of 4 cm, ——— depth of 8 cm, - - - - depth of 16 cm, ······· depth of 32 cm in clay).

cylindrische holte met horizontale as geboord, waarin het meetelement wordt gebracht. Het voorboren is gewenst, om beschadiging door eventueel in de grond aanwezige harde voorwerpen te voorkomen.

Enige meetresultaten zijn weergegeven in de figuren 10 en 11. Figuur 10 heeft betrekking op metingen gedurende ruim een etmaal voor vier elementen, die zich ongeveer in hetzelfde verticale vlak op diepten van 4, 8, 16 en 32 cm onder het oppervlak van een met gras begroeide kleigrond bevinden. In het benedenste deel van de figuur is het verloop van de temperaturen van de elementen weergegeven. De met P gemerkte kromme geeft de aanwijzing van een registrerende regenmeter. Op 4 cm diepte valt in de loop van de waarnemingsperiode een duidelijke daling van λ onder de invloed van uitdroging te constateren. Gedurende de nacht wordt deze daling geremd, waarschijnlijk ten gevolge van het doordringen van de regen en van wateraanvoer uit diepere lagen, die nu een hogere temperatuur bezitten. Het warmtegeleidingsvermogen op 8 cm diepte vertoont een duidelijk dagelijks verloop in tegenfase met de temperatuur, hetgeen vermoedelijk samenhangt met watertransport onder invloed van temperatuurverschillen. Op grotere diepte varieert het warmtegeleidingsvermogen bij deze metingen slechts weinig.

Figuur 11 geeft het verloop van het warmtegeleidingsvermogen voor dezelfde meetelementen over een periode van enige weken. Tevens zijn metingen van λ in een onbegroeide zandgrond op een diepte van 4 cm opgenomen. De in de figuur voor een bepaalde dag aangegeven waarde heeft betrekking op de meting te 8 uur (zoals uit de vorige figuur blijkt, kan de dagelijkse variatie van λ nog circa 0.5×10^{-3} bedragen). Het verloop van het warmtegeleidingsvermogen is aanvankelijk sterk fluctuerend onder invloed van de wisselende regenval. Tussen 30 Mei en 10 Juni treedt een duidelijke uitdroging op, terwijl b.v. de reactie op de regenval van 12 op 13 Juni goed te constateren valt. Het ligt in de bedoeling een meer volledige verwerking en interpretatie van deze metingen na afloop van het groeiseizoen afzonderlijk te publiceren.

De metingen werden op dezelfde wijze verricht als de laboratoriummetingen. De tijd gedurende welke de stroom ingeschakeld bleef, bedroeg bij de veldmetingen steeds 180 sec. De tijdcorrectie t_0 in de formules (43) en (47) was steeds kleiner dan 3 sec; bij de meeste metingen kleiner dan 1 sec.

Fouten ten gevolge van de eindige lengte van de verhitter bedragen bij deze metingen 2 à 4 %. De nauwkeurigheid, waarmede de helling van de lijnen in de grafiek van θ tegen $\log t$ kan worden vastgelegd, is meestal beter dan 1 %. Het verschil in de hellingen van de bij verhitte en bij afkoeling verkregen rechten bedraagt in de meeste gevallen niet meer dan 3 %.

Bij twee meetreeksen werd echter tussen deze hellingen in sommige gevallen een verschil van 10 à 30 % gemeten. De bij afkoeling verkregen helling was dan steeds de kleinste. Dit was het geval bij de metingen in kleigrond op diepten van 4 en 32 cm. *)

De oorzaak van dit verschijnsel kon nog niet met zekerheid worden vastgesteld. Vermoedelijk hangt het samen met de aanwezigheid van betrekkelijk grote luchtinsluitels, zoals krimpscheuren of wormgangen, in de nabijheid van het element. In overeenstemming hiermede is het feit, dat het verschijnsel bij grote waarden van λ , dus bij zeer vochtige grond niet optreedt, terwijl het ver-

*) Voor de berekening van λ werd steeds het gemiddelde van de bij verhitte en bij afkoeling gevonden hellingen genomen.

schil in helling met afnemende λ meestal toeneemt. Ook de relatief kleine waarde van λ op 32 cm diepte wijst op de aanwezigheid van scheuren of gangen in de nabijheid van het element. Dat het hier niet een luchtholte om het element betreft volgt uit de vorm van de grafiek van θ tegen $\log t$. Deze vertoont nl. bij verhitting gedurende de eerste 20 sec een iets kleinere helling, dan gedurende het verdere deel van de meting met ingeschakelde stroom. Een luchtholte rondom het element zou juist het tegenovergestelde verloop geven.

Luchtholten om het element van de grootte van enige tiende millimeters kunnen aan de in de grafiek optredende knik, waarvan de punt naar de θ -as wijst, gemakkelijk worden herkend. Een ernstige bron van mogelijke fouten vormen echter zeer kleine luchtruimten, aangezien hierbij wel een zuiver logaritmisch verloop van de temperatuurstijging wordt gevonden, terwijl de hieruit berekende waarden van λ , naar uit laboratoriumexperimenten met zand bleek, 10 à 20 % te laag kunnen zijn. Bij deze laboratoriumexperimenten werd de kleine luchtholte verkregen, door met een staafje, dat ongeveer 0.01 cm dikker dan het element was, voor te boren, of door het element na het inbrengen iets te wrikken. Men dient er daarom voor te zorgen, dat de elementen goed recht en glad afgewerkt zijn, terwijl het voorboren met een niet te dik staafje moet geschieden.

Een vergroting van λ in de omgeving van het element door verstoring van de grond bij het inbrengen, is niet te vermijden. Bij laboratoriumexperimenten hieromtrent bleek dat de hierdoor veroorzaakte fout minder dan 5 % bedroeg.

17. DE METHODE VAN SKEIB

In een recente publicatie werd door SKEIB³⁷⁾ eveneens het gebruik van een niet stationnaire methode ter bepaling van λ aanbevolen. De theorie werd door hem ontwikkeld voor verhitters van verschillende vorm. Aangezien een volledige afleiding van de gegeven formules niet werd gepubliceerd, is het niet steeds duidelijk welke benaderingen door SKEIB werden toegepast.

Voor de praktische uitvoering werd een cilindrische verhitter gekozen, in de vorm van een staafje grafiet met een straal van 0.11 cm en een lengte van 25.6 cm. Door een fijne radiale boring was in het midden van deze verhitter een thermolas aangebracht. Verdere bijzonderheden over de uitvoering werden niet gegeven.

Bij de theoretische verwerking ging SKEIB uit van de formule:

$$(53) \quad \theta(0, t) = \frac{q}{4\pi\lambda} \left\{ -Ei \left(-\frac{R^2}{4at} \right) \right\} + \frac{qt}{\pi R^2 \rho c} \left\{ 1 - e^{-\frac{R^2}{4at}} \right\},$$

Hierin is $\theta(0, t)$ de temperatuurstijging in het midden van de verhitter en R de straal van de verhitter. Bij de afleiding van deze formule werd verondersteld, dat de waarden van λ en a in en buiten de verhitter dezelfde waren.

Uit twee metingen van θ (in de door SKEIB gegeven voorbeelden werden de bij 50 en 100 sec na het inschakelen van de stroom gemeten waarden genomen) werden de waarden van λ en a langs grafische weg verkregen. In de genoemde publicatie werden de resultaten van laboratoriummetingen voor cementpoeder, zand bij twee niet gespecificeerde vochtgehalten en humus gegeven. In de inleiding werd bovendien vermeld, dat de methode zowel in het laboratorium als in het veld was beproefd.

De opzet van deze methode is, om door een gelijktijdige meting van λ en a te komen tot een bepaling van de grootheid ρc en zodoende tevens van het vocht-

gehalte. Het aantrekkelijke van deze werkwijze is gelegen in het feit, dat ρc op eenvoudige en ondubbelzinnige wijze van het vochtgehalte afhangt. Bij verwaarlozing van de zeer geringe warmtecapaciteit van de lucht geldt nl.:

$$(54) \quad \rho c = x_v \rho_v c_v + x_w \rho_w c_w,$$

waarin de index v betrekking heeft op de vaste bestanddelen in de grond en de index w op het water. De grootte x stelt weer een volumefractie voor. Het verband tussen het warmtegeleidingsvermogen en het vochtgehalte is daarentegen ingewikkeld, terwijl het niet ondubbelzinnig behoeft te zijn, aangezien de waarde van λ bij gegeven vochtgehalte nog zal afhangen van de ruimtelijke verdeling van het water over het poriënvolume. De bekende hysteresis, die het verband tussen het vochtgehalte en de zuigspanning vertoont (verg. fig. 14 op blz. 52), geeft een duidelijk voorbeeld van het verschil in ruimtelijke verdeling van het water bij eenzelfde vochtgehalte. Door ALBRECHT²⁾ werd het eerst op de mogelijkheid van een bepaling van het vochtgehalte uit een gelijktijdige meting van λ en a gewezen. Dit principe werd op zijn aanraden door SKEIB nader uitgewerkt.

Tegenover de voordelen van deze werkwijze staat het nadeel, dat ρc betrekkelijk weinig met het vochtgehalte varieert. Terwijl de verhouding van de waarden van λ voor verzadigde en voor droge grond ongeveer 10 bedraagt, is deze verhouding voor de ρc -waarden in het algemeen kleiner dan 3. Een plausible waarde voor $x_v \rho_v c_v$ in (54) is b.v. 0.25, terwijl $\rho_w c_w \approx 1$. Wil men dus b.v. een waarde van $x_w = 0.1$ met een nauwkeurigheid van 0.03 bepalen, dan dient men ρc met een nauwkeurigheid van circa 9% te kennen. Hieruit volgt, dat λ en a beide met een nauwkeurigheid van ongeveer 4% moeten worden gemeten. Vooral bij a zal dit moeilijkheden opleveren, aangezien deze grootte in combinatie met R^2 in de formule (54) voorkomt. Daar in de afleiding van deze formule het verschil in thermische eigenschappen tussen de verhitter en het te onderzoeken materiaal werd verwaarloosd, zal de „effectieve” waarde van R voor een gegeven verhitter nog afhangen van de waarden van λ en a in het te onderzoeken materiaal.

Een nader experimenteel en theoretisch onderzoek naar de mogelijkheid van een realisering van de idee van ALBRECHT met de door ons gebruikte meetelementen (eventueel in nog iets gewijzigde uitvoering) wordt momenteel door ons ondernomen.

HOOFDSTUK IV

BEREKENING VAN HET WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN VAN GROND EN VERGELIJKING VAN THEORETISCHE EN EXPERIMENTELE WAARDEN

18. DE THEORIE VAN MAXWELL-BURGER-EUCKEN

In dit hoofdstuk willen wij het warmtegeleidingsvermogen van grond berekenen, waarbij wij uitgaan van de bekend veronderstelde volumefracties van water, lucht en vaste bestanddelen, terwijl tevens de samenstelling van laatstgenoemden globaal bekend moet zijn. Bij deze berekeningen zullen wij gebruik

maken van de theorie van EUCKEN, welke in hoofdstuk I uitvoerig werd besproken.

In verband met de mathematische gecompliceerdheid van het gestelde probleem is slechts een benaderde oplossing mogelijk. Daar staat tegenover dat in de praktijk voor berekeningen omtrent de warmtebeweging in grond een nauwkeurigheid van ongeveer 10 à 20 per cent in het algemeen voldoende zal zijn, aangezien variaties van deze grootte in het warmtegeleidingsvermogen op eenzelfde diepte meestal in het te beschouwen grondvolume zullen voorkomen.

Uit de in hoofdstuk I gegeven beschouwingen blijkt, dat de onnauwkeurigheid in de theorie van EUCKEN beneden 20 % zal liggen, zolang de verhouding tussen het warmtegeleidingsvermogen van de insluitsels en dat van het medium minder dan ongeveer 20 bedraagt. In vochtige grond mogen wij over een groot traject van vochtgehalten het water als samenhangend medium beschouwen, waarin de vaste bestanddelen en lucht als insluitsels voorkomen. In dit geval is aan bovengenoemde eis voldaan. Voorts dient men te bedenken, dat de theorie te grote waarden geeft, indien het warmtegeleidingsvermogen van de insluitsels kleiner dan dat van het medium is, te kleine waarden in het tegenovergestelde geval. Bij vochtige grond zullen de hierdoor veroorzaakte fouten elkaar dus gedeeltelijk compenseren.

In de nu volgende paragrafen zullen wij de resultaten van dergelijke berekeningen van het warmtegeleidingsvermogen vergelijken met experimenteel gevonden waarden.

19. RESULTATEN VOOR ZAND

De in hoofdstuk III besproken meetresultaten voor vochtig zand zijn nog eens in de figuren 12 en 13 weergegeven, samen met de theoretische waarden. Bij de berekeningen werden de volgende waarden voor het geleidingsvermogen (in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C) van kwarts, water en lucht gebruikt.

TABEL IX

Warmtegeleidingsvermogen (in 10^{-3} cal/cm sec $^{\circ}$ C) van kwarts, water en lucht bij temperaturen tussen 0 en 75 $^{\circ}$ C
(Thermal conductivities [in millical/cm sec $^{\circ}$ C] of quartz, water and air at temperatures between 0 and 75 $^{\circ}$ C)

Temperatuur	Kwarts	Water	Lucht	
			„verzadigd”	„droog”
0 $^{\circ}$	22.0	1.32	0.108	0.0579
20 $^{\circ}$	20.7	1.42	0.238	0.0615
40 $^{\circ}$	19.0	1.50	0.605	0.0649
60 $^{\circ}$	17.8	1.55	1.61	0.0685
75 $^{\circ}$	16.9	1.58	3.71	0.0712

Bij lucht geven de rechtse getallen de normale waarden voor lucht (volgens McADAMS²⁸), de linkse getallen het schijnbare geleidingsvermogen in met waterdamp verzadigde lucht (verg. blz. 30). De waarden voor water zijn afkomstig van de metingen van VAN DER HELD en VAN DRUNEN²⁰).

Kwarts is een anisotrope stof, waarvan het warmtegeleidingsvermogen in de richting van de kristal-as (λ_x) en in een richting loodrecht op deze as (λ_y) aan de International Critical Tables werd ontleend. Uit deze waarden werd een gemid-

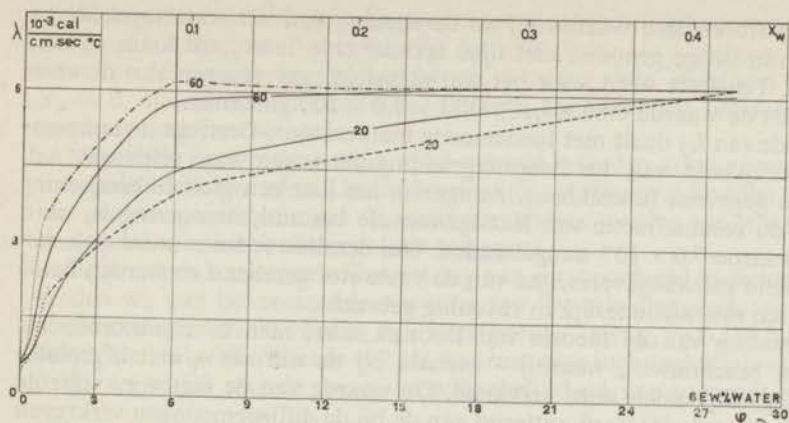


Fig. 12.

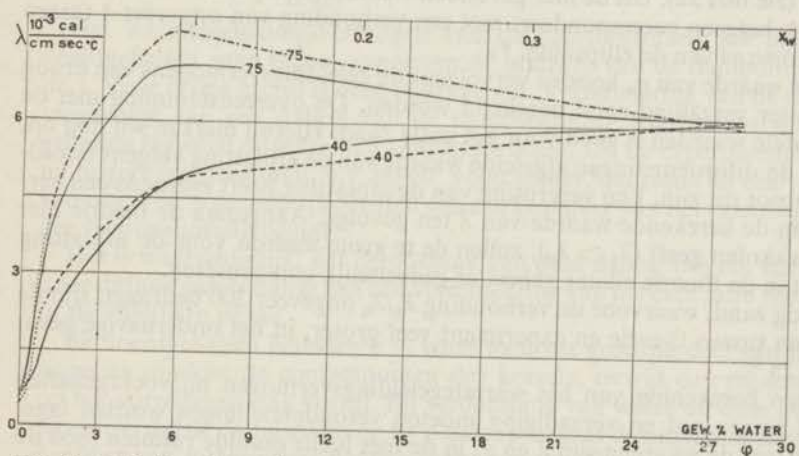


Fig. 13.

Fig. 12 en 13. Experimentele en theoretische waarden van λ voor vochtig zand. Fig. 12: 20 en 60 °C, Fig. 13: 40 en 75 °C. — experimentele krommen, ---- en - - - theoretische krommen.

(Experimental and theoretical values of λ for sand. Fig. 12: 20 and 60 °C, Fig. 13: 40 and 75 °C. — experimental curves, ---- and - - - theoretical curves).

deld warmtegeleidingsvermogen (λ_Q) berekend volgens de formule (vergelijk CARSLAW-JAEGER¹⁰⁾):

$$\lambda_Q = \frac{1}{3} \lambda_a + \frac{2}{3} \lambda_\beta$$

De middeling vond plaats over alle richtingen van de as, waarbij verondersteld werd, dat de verdeling van deze richtingen isotroop is. Het aldus berekende warmtegeleidingsvermogen is het gemiddelde geleidingsvermogen in de richting van de temperatuurgradiënt.

Voor de overige vaste bestanddelen (10 % veldspaat + gesteenteresten) werd voor het warmtegeleidingsvermogen de waarde 7.0×10^{-3} cal/cm sec °C aangenomen. Volgens GEMANT¹⁷⁾ geldt deze waarde voor veldspaat, terwijl het warmtegeleidingsvermogen van de overige bestanddelen waarschijnlijk eveneens weinig hiervan zal verschillen (vergelijk de volgende paragraaf). Ook

SMITH⁴⁰) gebruikt deze waarde bij de berekening van het warmtegeleidingsvermogen van droge gronden met fijne textuur (z.g. loam, silt loam en silty clay loam). Tenslotte werd voor het warmtegeleidingsvermogen van de vaste bestanddelen de waarde $0.89 \times \lambda_Q + 0.11 \times 7.0 \times 10^{-3}$ genomen.

De waarde van λ_Q daalt met toenemende temperatuur. Omtrent de temperatuurafhankelijkheid van het warmtegeleidingsvermogen van veldspaat e.d. waren geen gegevens beschikbaar. Aangezien het hier een globale berekening betreft en de volumefractie van laatstgenoemde bestanddelen gering is, werd steeds de waarde 7.0×10^{-3} aangehouden. Om dezelfde redenen werd ook met een gemiddeld geleidingsvermogen van de vaste stof gerekend en werden beide componenten niet afzonderlijk in rekening gebracht.

Bij toepassing van de theorie van EUCKEN moet men de zandkorrels als ellipsoïdaal beschouwen, waarbij – evenals bij de diffusie – met afgeplatte omwentelingsellipsoïden werd gerekend. De waarde van de factor g_a voor de lange as uit formule (8) werd ontleend aan de bij de diffusiemetingen verkregen resultaten (zie blz. 32). Uit de hier gevonden waarde van k_1 uit formule (9) volgt $g_a = 0.144$, hetgeen correspondeert met een verhouding van ongeveer 4 tussen lange en korte as van de ellipsoïde. *)

Uit deze waarde van g_a konden vervolgens de geleidingsvermogens van droog en met water verzadigd zand berekend worden. De overeenstemming met de experimentele waarden is goed voor het natte zand. Hierbij merken wij nog op, dat de uit de diffusiemetingen afgeleide waarde van de afplatting volgens hoofdstuk I te groot zal zijn. Een vergroting van de afplatting heeft eveneens een vergroting van de berekende waarde van λ ten gevolge. Aangezien de theorie hier te kleine waarden geeft ($\lambda_1 > \lambda_0$), zullen de te grote waarde voor de afplatting en de fout in de theorie elkaar geheel of gedeeltelijk compenseren.

Bij droog zand, waarvoor de verhouding λ_1/λ_0 ongeveer 300 bedraagt, zijn de afwijkingen tussen theorie en experiment veel groter, in het onderhavige geval ongeveer 25 %.

Voor een berekening van het warmtegeleidingsvermogen bij vochtgehalten variërend tussen nul en verzadiging moeten veronderstellingen worden ingevoerd omtrent de waarden van λ en g_a in de met lucht gevulde ruimten (ook de luchtinsluitsels werden als afgeplatte omwentelingsellipsoïden behandeld).

De waarde van g_a zal met toenemende volumefractie van de lucht (x_l) gaan dalen. Voor zeer kleine x_l werd nu verondersteld, dat de luchtinsluitsels vrijwel bolvormig zijn, zodat g_a nadert tot $\frac{1}{3}$ als x_l nadert tot 0. Voor zeer kleine waarden van de volumefractie van het water (x_w) krijgt men een situatie, waarbij de lucht zich bevindt tussen de zandkorrels, welke door waterhuidjes omgeven zijn. Voor het geval van „waterkorrels” van dezelfde vorm als de zandkorrels in lucht als samenhangend medium vinden wij een bepaalde waarde van k_1 uit formule (9b). De reciproke waarde van deze k_1 geeft de k_1 -waarde voor het

*) Metingen met een microscoop gaven voor 56 verschillende korrels de volgende verhoudingen tussen de afmetingen in 3 onderling loodrechte richtingen: 1:2.7:3.3 met als uiterste waarden 1:1.4:1.8 en 1:6.3:6.7.

Bij de interpretatie van de uit g_a berekende waarde van de assenverhouding dient men er rekening mee te houden, dat het hier een „effectieve afplatting” betreft, waarin tevens de afwijkingen van de vorm der deeltjes van de zuiver ellipsoïdale vorm, dus de „kantigheid” van de korrels, is vervat. Voorts geeft een toepassing van de theorie van MAXWELL-BURGER-EUCKEN bij de berekening van de afplatting uit de diffusiemetingen een afwijking, welke ten gevolge heeft dat ook bij zuiver ellipsoïdale korrels een iets te grote waarde van de afplatting zou worden gevonden.

geval men bij hetzelfde geleidingsvermogen luchtinsluitsels in water als samenhangend medium zou hebben (verg. formule (9a)). Uit laatstgenoemde k_1 kan men nu de waarde van g_a berekenen, waartoe deze grootheid nadert voor $x_w \rightarrow 0$, steeds veronderstellende dat men het water als het samenhangende medium mag beschouwen.

Men verkrijgt op deze wijze twee uiterste waarden voor g_a waartussen geïnterpoleerd kan worden. Om de berekening eenvoudig te houden en het invoeren van constanten, die aan de metingen moeten worden aangepast, te vermijden, werd een lineaire interpolatie toegepast.

De gevolgde werkwijze willen wij nog aan een voorbeeld toelichten. Bij 20 °C vinden wij met bovenstaande waarden van het geleidingsvermogen van water en „verzadigde” lucht voor k_1 bij „waterkorrels” met $g_a = 0.144$ in lucht: $k_1 = 0.462$. De reciproke waarde is 2.16, waaruit voor luchtinsluitsels in water $g_a = 0.035$ volgt. De waarde van g_a in afhankelijkheid van x_l wordt nu berekend

$$\text{volgens: } g_a = 0.333 - \frac{x_l}{0.427} (0.333 - 0.035) = 0.333 - 0.697x_l$$

Het warmtegeleidingsvermogen van de luchtinsluitsels zal bij afnemende vochtgehalten gaan dalen, aangezien de bijdrage van de dampdiffusie vermindert. Voor droge grond is deze bijdrage nul. Vermindering van de dampdiffusie tengevolge van een daling van de dampspanning treedt eerst op bij vochtgehalten beneden ongeveer 0.3 gewichtsprocent. Uit de experimentele krommen bij hogere temperaturen, b.v. bij 60° volgt echter, dat reeds bij een vochtgehalte van ongeveer 6 gewichtsprocenten een sterke daling van het geleidingsvermogen der luchtinsluitsels begint.

Het is waarschijnlijk, dat de oorzaak van deze daling van het vochttransport door diffusie samenhangt met een vermindering van het capillaire vochttransport in de vloeibare phase.

Bij vochtgehalten beneden 6 % vindt men het grootste deel van het water in ringetjes rondom de contactpunten der korrels, terwijl de rest dunne huidjes op het korreloppervlak vormt. Bij verdamping van water uit deze huidjes is het mogelijk, dat de dampspanning ter plaatse snel gaat dalen, indien niet voldoende aanvoer van water in vloeibare vorm optreedt. Dat het vochttransport onder invloed van capillaire krachten in de omgeving van 6 % sterk vermindert, vindt ondersteuning in het feit, dat eerst bij vochtgehalten van meer dan 7 % drainage van het water onder invloed van de zwaartekracht duidelijk merkbaar wordt.

Bij de berekeningen werd verondersteld, dat het warmtegeleidingsvermogen van de luchtinsluitsels voor vochtgehalten boven de 6 % constant was, terwijl vanaf 6 % het warmtegeleidingsvermogen lineair daalde van de waarde voor „verzadigde” lucht tot die voor „droge” lucht (linker- en rechter getallen in Tabel IX). De waarde van g_a voor $x_w = 0$ werd weer op de boven aangegeven wijze berekend, doch nu met het geleidingsvermogen van „droge” lucht. De waarden van g_a voor vochtgehalten beneden 6 % werden door lineaire interpolatie tussen de waarden bij 0 en bij 6 % gevonden.

Bij 20 °C is b.v. voor een vochtgehalte van 6 gewichtsprocenten $x_w = 0.091$, dus $x_l = 0.336$ en $g_a = 0.099$. Voor „waterkorrels” met $g_a = 0.144$ in lucht met $\lambda_l = 0.0615 \times 10^{-3}$ is $k_1 = 0.180$, de reciproke waarde 5.56, waaruit volgt:

$$g_a = 0.013 \text{ en } g_a = 0.013 + \frac{x_w}{0.091} (0.099 - 0.013) = 0.013 + 0.945x_w \text{ voor } 0 < x_w < 0.091.$$

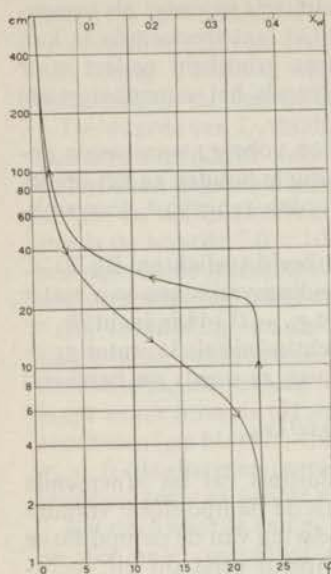


Fig. 14. Vocht karakteristiek van zand (volumefractie zandkorrels = 0.60). Horizontaal: vochtgehalte (φ = gewichtspercentage, x_w = volumefractie) verticaal: zuigspanning in cm waterdruk. Bovenste kromme: water onttrokken, onderste kromme: water toegevoegd.

(Moisture characteristic of sand [volume fraction of sand particles = 0.60]. Horizontally: moisture content [φ = weight percentage on dry weight basis, x_w = volume fraction], vertically: suction pressure in cm water pressure. Upper curve: withdrawing water, lower curve: supplying water).

Voor waarden van x_w , die dicht bij nul gelegen zijn, levert de berekening te grote waarden voor λ , aangezien men uiteindelijk niet meer het water als samenhangend medium mag beschouwen, doch naar een toestand gaat, waarbij zich zandkorrels in lucht als samenhangend medium bevinden. De berekeningen werden daarom afgebroken bij vochtgehalten van 1 gewichtsprocent, terwijl voor kleinere vochtgehalten door interpolatie „uit de vrije hand” een aansluiting bij de berekende waarden voor droog zand werd

verkregen (gestippeld gedeelte van de krommen in de figuren 12 en 13).

Het verschil tussen de theoretische en de experimentele waarden bedraagt bij deze wijze van berekening voor het gehele temperatuurgebied maximaal 20 % voor vochtgehalten boven 1.5 gewichtsprocent. Een betere overeenstemming tussen theorie en experiment, waarbij de verschillen b.v. minder dan 5 % bedragen, kan men verkrijgen, indien men voor het verloop van g_a en λ_l met het vochtgehalte geschikte functies kiest. Ten eerste moet daarbij g_a aanvankelijk langzaam afnemen, om voor $x_w < 0.1$ sneller te gaan dalen. Dat een dergelijk verloop van g_a plausibel is, volgt uit de in fig. 14 getekende experimentele „vocht karakteristiek” van het zand. *) Ten tweede moet men veronderstellen, dat de daling van het geleidingsvermogen van de lucht met afnemend vochtgehalte bij vochtgehalten beneden 6 % aanvankelijk veel sneller dan lineair geschiedt. Een dergelijk verloop vindt men eveneens wanneer men het geleidingsvermogen van zand voor vochttransport onder invloed van capillaire krachten

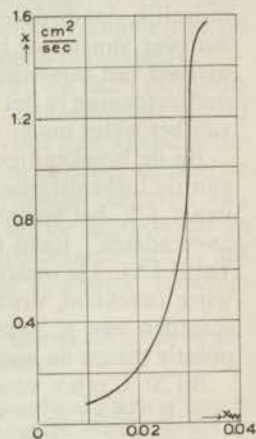


Fig. 15. Capillair geleidingsvermogen (λ) van zand (gemiddelde korreldiameter 0.07 cm) als functie van de volumefractie water (x_w) volgens metingen van KRISCHER.

(Capillary conductivity [λ] of sand [mean diameter of particles 0.07 cm] as a function of the volume fraction of water [x_w] according to experiments of KRISCHER).

* De metingen werden verricht met een tensimeter en met een toestel volgens HAINES¹⁸⁾. De resultaten hebben betrekking op het zand (verg. blz. 37) waarvan ook het warmtegeleidingsvermogen werd gemeten.

(α) *) tegen het vochtgehalte uitzet, zoals uit de aan KRISCHER ²⁶⁾ ontleende figuur 15 blijkt.

20. METINGEN VAN KERSTEN

De metingen van KERSTEN ²⁴⁾ geven een belangrijk aanvullend materiaal ter toetsing van de theorie. Alhoewel een stationnaire methode werd toegepast, werd het vochttransport tijdens de meting klein gehouden, door met een geringe temperatuurgradiënt (ongeveer 1 °C/cm) te werken. Volgens opgave van KERSTEN was het verschil in vochtgehalte tussen warme en koude kant van het monster na afloop van een experiment het grootst bij het z.g. Ottawa-zand, waar het gemiddeld 0.8 gewichtsprocent bedroeg. Bij de meeste gronden was dit verschil minder dan 0.3 gewichtsprocent. De onnauwkeurigheid in de bepalingen van het warmtegeleidingsvermogen bedraagt vermoedelijk gemiddeld circa 5%.

De metingen hebben betrekking op vijftien verschillende grondsoorten. Bij elke grondsoort werd het warmtegeleidingsvermogen bij diverse vochtgehalten en voor verschillende volumefracties van de vaste stof gemeten. Tevens zijn in de publicatie van KERSTEN uitvoerige gegevens omtrent de samenstelling van de gronden opgenomen.

a) *Grofkorrelige gronden* (meer dan 68 % van de deeltjes groter dan 0.005 cm).

De metingen aan het voor 99 % uit kwarts bestaande Ottawa-zand omvatten vochtgehalten van 0 tot 6 %. Voor droog zand komen de metingen bij eenzelfde zandfractie goed overeen met de door ons verrichte; bij grotere vochtgehalten liggen de resultaten van KERSTEN ongeveer 10 % lager dan de onze, hetgeen vermoedelijk een gevolg is van uitdroging van het monster aan de warme kant.

Voor een groep van vier z.g. „sandy soils”, die gemiddeld voor ongeveer 60 % uit kwarts en ongeveer 40 % uit veldspaat en andere mineralen bestaan, geeft KERSTEN de volgende empirische formule voor het warmtegeleidingsvermogen bij 40 °F (4.4 °C): $10^3 \lambda = 0.3446 \times 10^{0.6243d} (0.7 \log \varphi + 0.4)$, $\varphi \geq 1.0$. †) λ wordt gemeten in cal/cm sec °C, d is de massa van de vaste stof per volume-eenheid in g/cm³ en φ het vochtgehalte in gewichtsprocenten van de droge stof. De soortelijke massa van laatstgenoemde is 2.70 g/cm³. De afwijkingen tussen deze formule en de meetresultaten bedragen minder dan 25 %.

In fig. 16 zijn de waarden van λ in afhankelijkheid van het vochtgehalte volgens deze formule voor drie verschillende waarden van d uitgezet (getrokken krommen) samen met de theoretische waarden volgens de theorie van EUCKEN (gestippelde krommen). Bij de berekeningen werd verondersteld, dat de vaste bestanddelen voor 60 % uit kwarts ($\lambda = 20 \times 10^{-3}$) en voor 40 % uit andere mineralen ($\lambda = 7 \times 10^{-3}$) bestaan. Het warmtegeleidingsvermogen van water bedraagt bij deze temperatuur 1.34×10^{-3} , dat van „verzadigde” lucht 0.120×10^{-3} . Een daling van het geleidingsvermogen van lucht ten gevolge van een vermindering van de dampdiffusie begint bij deze gevallen vermoedelijk bij waarden van x_w tussen 0.04 en 0.1. Deze daling werd hier niet in rekening gebracht.

Als waarde van g_a werd bij alle gronden (met uitzondering van de onder c

*) α = het volume water dat per tijdseenheid, per eenheid van oppervlak en per eenheid van grad x_w in een richting tegengesteld aan die van grad x_w beweegt.

†) De constanten 0.3446 en 0.6243 zijn afkomstig van een omrekening van Engelse eenheden in de door ons gebruikte eenheden.

besproken veengrond) 0.125 genomen, hetgeen correspondeert met een verhouding 1:5 voor korte en lange as van de omwentelingsellipsoïde (verg. de voetnoot op blz. 50). Volgens de diffusiemetingen van PENMAN (verg. fig. 7 op blz. 31) komt deze waarde gemiddeld overeen met de bij gronden verkregen resultaten.

Tabel X geeft de resultaten van de metingen en een theoretische berekening volgens de theorie van EUCKEN voor „Fairbanks sand”, één van de grondsoorten uit deze groep. De hierbij gebruikte gegevens zijn de volgende: temperatuur 40 °F, samenstelling 59.4 % kwarts, 40.6 % veldspaat etc., soortelijke massa droge stof 2.72. De gebruikte waarden voor het warmtegeleidingsvermogen van kwarts en van de overige vaste bestanddelen zijn respectievelijk 21.7×10^{-3} en 7.0×10^{-3} . Er werd verondersteld, dat te beginnen met een vochtgehalte van 3 gewichtsprocenten een lineaire daling van het warmtegeleidingsvermogen van vochtige lucht begint. De waarde voor droge lucht is bij deze temperatuur 0.059×10^{-3} .

TABEL X

Berekende en gemeten waarden van λ voor Fairbanks sand
(Computed [ber.] and experimental [gem.] values of λ for Fairbanks sand *)

d	φ	x_w	x_l	$10^3 \lambda$		$\lambda_{\text{gem}}/\lambda_{\text{ber.}}$
				gem.	ber.	
1.78	11.8	0.212	0.128	5.48	5.33	1.03
1.93	10.5	0.203	0.087	6.06	6.25	0.97
1.72	10.7	0.184	0.182	4.97	4.70	1.06
1.92	16.1	0.117	0.178	5.23	5.28	0.99
1.81	6.2	0.112	0.223	4.85	4.47	1.08
1.72	5.9	0.101	0.268	3.74	3.85	0.97
1.88	5.4	0.102	0.207	5.31	4.84	1.10
1.93	2.6	0.050	0.240	4.28	4.18	1.02
1.81	2.6	0.047	0.289	3.45	3.42	1.01
1.72	2.5	0.043	0.326	2.92	2.99	0.98
1.98	1.3	0.026	0.248	2.87	3.66	0.78
1.92	1.3	0.025	0.271	2.19	3.29	0.67
1.81	1.3	0.024	0.311	1.93	2.60	0.74
1.72	1.2	0.021	0.348	1.38	2.40	0.58

De verschillen tussen de gemeten en de theoretische waarden liggen in het algemeen binnen de meetfout, behalve bij zeer kleine vochtgehalten.

b) *Fijnkorrelige gronden* (meer dan 45 % van de deeltjes kleiner dan 0.005 cm).

Voor deze z.g. „silt and clay soils” geeft KERSTEN de volgende bij zijn meetresultaten aangepaste empirische formule (afwijkingen < 25 %): $10^3 \lambda = 0.3446 \times 10^{0.6243d} (0.9 \log \varphi - 0.2)$, $\varphi \geq 7$. De temperatuur is weer 40 °F, de soortelijke massa van de vaste stof 2.70 g/cm³.

Enkele krommen zijn, samen met de theoretische volgens EUCKEN, weergegeven in fig. 17. De waarde voor het warmtegeleidingsvermogen van de vaste

*) d = dry density in g/cm³, φ = moisture content in % dry weight, x_w = volume fraction of water, x = volume fraction of air.

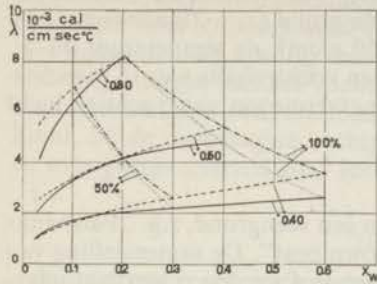


Fig. 16.

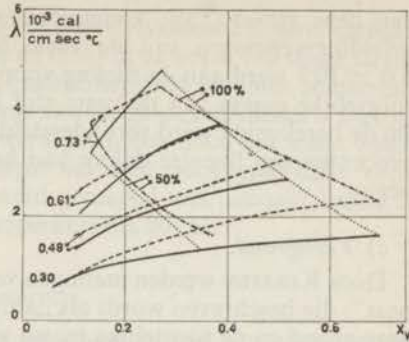


Fig. 17.

Fig. 16 en 17. Theoretische waarden van λ (gestreepte krommen) en waarden volgens de empirische formules van KERSTEN (getrokken krommen). Getallen bij de krommen: volumefracties van de vaste bestanddelen, x_w = volumefractie van water. Krommen gemerkt 100% en 50%: poriëvolume resp. geheel en voor de helft gevuld met water. Fig. 16: grofkorrelige grond, fig. 17: fijnkorrelige grond.

(Theoretical values of λ [striped curves] and values according to the empirical formulae of KERSTEN [full-drawn curves]. Numbers at the curves: volume fractions of the solid material, x_w = volume fraction of water. Curves marked 100% and 50%: pore space completely or half filled with water resp. Fig. 16: coarse textured soils, fig. 17: fine textured soils).

bestanddelen werd zo gekozen, dat bij verzadigde grond met een volumefractie van 0.61 aan vaste deeltjes beide formules dezelfde waarde gaven. Het aldus berekende warmtegeleidingsvermogen van de vaste stof bedroeg 6.8×10^{-3} , hetgeen in goede overeenstemming met de in het voorgaande gebruikte waarde van 7.0×10^{-3} is. Bij deze figuur merken we nog op, dat de benedenste kromme buiten het door KERSTEN aangegeven geldigheidsgebied van de formule ligt. Daling van het warmtegeleidingsvermogen van vochtige lucht, die hier vermoedelijk bij waarden van x_w tussen ongeveer 0.1 en 0.3 begint, is hier niet in rekening gebracht.

In Tabel XI zijn de meetresultaten voor „Healy clay”, samen met de berekende waarden volgens EUCKEN, opgenomen. In verband met het hoge kleigehalte

TABEL XI

Berekende en gemeten waarden van λ voor Healy clay
(Computed and experimental values of λ for Healy clay *)

d	φ	x_w	x_l	$10^3 \lambda$		$\lambda_{\text{gem}}/\lambda_{\text{ber.}}$
				gem.	ber.	
1.66	21.6	0.357	0.000	3.68	3.67	1.00
1.29	35.4	0.450	0.051	2.93	2.86	1.02
1.73 ^s	15.5	0.269	0.061	3.89	3.58	1.09
1.50	22.3	0.334	0.088	3.22	3.05	1.06
1.15	35.0	0.402	0.154	1.96	2.31	0.85
1.51	17.0	0.256	0.163	2.84	2.80	1.01
1.34	22.7	0.304	0.179	2.18	2.51	0.87
1.34 ^s	17.2	0.231	0.250	2.27	2.27	1.00
1.50 ^s	10.8	0.164	0.255	2.10	2.24	0.94
1.34 ^s	10.7	0.143	0.338	1.52	1.82	0.84
1.49	6.4	0.095	0.330	1.41	1.93	0.73
1.35 ^s	6.7	0.091	0.384	1.00	1.40	0.71

*) Cf. footnote on page 54 for meaning of symbols.

van deze grond (55 % kleimineralen) werd een wat lagere waarde voor het geleidingsvermogen van de vaste bestanddelen gekozen. Deze waarde nl. 6.0×10^{-3} werd aan de meting voor verzadigde grond ($x_l = 0$) aangepast. De soortelijke massa van de vaste stof is hier 2.59 g/cm^3 , de temperatuur 40°F . Bij de berekening werd verondersteld, dat bij een vochtgehalte van 15 gewichtsprocenten een lineaire daling van het geleidingsvermogen van vochtige lucht begint.

c) *Veengrond.*

Door KERSTEN werden metingen verricht aan één veengrond, z.g. „Fairbanks peat”, die beschreven wordt als „a fibrous, brown peat”. De samenstelling van deze grond en de soortelijke massa van de droge stof werden echter niet opgegeven.

Aan SMITH³⁸⁾ zijn de volgende gegevens ontleend voor ovdroge monsters:

Grond	Soortelijke massa droge stof	x_l	$10^3 \lambda$
„Sedge peat”	1.45	0.757	0.162
„Reed peat”	1.56	0.724	0.172

Beschouwen we de vaste delen als lange cirkelcilinders met een geleidingsvermogen van 0.85×10^{-3} , dan volgt uit de theorie van EUCKEN voor het geleidingsvermogen van sedge en reed peat bij 20°C (de juiste meettemperatuur wordt door SMITH niet opgegeven) resp. 0.156×10^{-3} en 0.173×10^{-3} . SMITH berekende langs semi-empirische weg⁴⁰⁾ voor het geleidingsvermogen van de vaste stof 0.86×10^{-3} voor sedge peat en 0.80×10^{-3} voor reed peat.

Met de waarde 0.85×10^{-3} berekenden wij het geleidingsvermogen van de Fairbanks peat. Voor de soortelijke massa van de droge stof werd daarbij de waarde 1.5 gekozen. De resultaten zijn opgenomen in Tabel XII.

TABEL XII

Berekende en gemeten waarden van λ voor Fairbanks peat
(Computed and experimental values of λ for Fairbanks peat *)

d	φ	x_w	x_l	$10^3 \lambda$		$\lambda_{\text{gem}}/\lambda_{\text{ber.}}$
				gem.	ber.	
0.285	284	0.790	0.020	1.12	1.26	0.89
0.332	185	0.614	0.165	0.95	1.03	0.93
0.230	174	0.400	0.447	0.70	0.71	0.99
0.232	284	0.660	0.185	1.00	1.04	0.96
0.398	170	0.676	0.059	1.07	1.16	0.92
0.119	271	0.322	0.599	0.44	0.50	0.88
0.138	176	0.229	0.685	0.32	0.39	0.82
0.337	113	0.380	0.396	0.69	0.73	0.94
0.175	109	0.191	0.692	0.41	0.42	0.97
0.120	112	0.135	0.785	0.28	0.36	0.78
0.348	9.3	0.032	0.736	0.16 ⁹⁾	0.17	0.97
0.223	10.4	0.023	0.828	0.13	0.13	1.00

*) Cf. footnote on page 54 for meaning of symbols.

Bij de berekeningen werd voor $x_l < 0.5$ het water als samenhangend medium beschouwd, met hierin insluitsels van veen en lucht in de vorm van lange cirkelcilinders. Voor $x_l > 0.5$ werd de lucht als samenhangend medium beschouwd met insluitsels van vochtig veen in de vorm van lange cirkelcilinders. Het geleidingsvermogen van het vochtige veen werd gevonden door het water hierin als samenhangend medium te nemen, waarin wel veen doch geen lucht voorkomt. Bij de twee laagste vochtgehalten werd gerekend met „droge” lucht, bij de overige met „verzadigde” lucht. De temperatuur is 70°F .

21. DROGE GROND

Voor droge grond is de verhouding van het warmtegeleidingsvermogen van korrels en medium van de orde 100, zodat de theorie van EUCKEN hier resultaten geeft, die enkele tientallen procenten te laag liggen. Een uitzondering moet worden gemaakt voor organische bestanddelen, waarvan het geleidingsvermogen slechts circa 10 maal zo groot als dat van lucht is.

In fig. 18 zijn de resultaten van een groot aantal metingen aan ovendroge en luchtdroge gronden weergegeven. De meeste metingen zijn afkomstig van SMITH^{38,40}). Deze metingen werden bij kamertemperatuur verricht; de gemiddelde temperatuur van de metingen werd echter niet opgegeven. Kromme

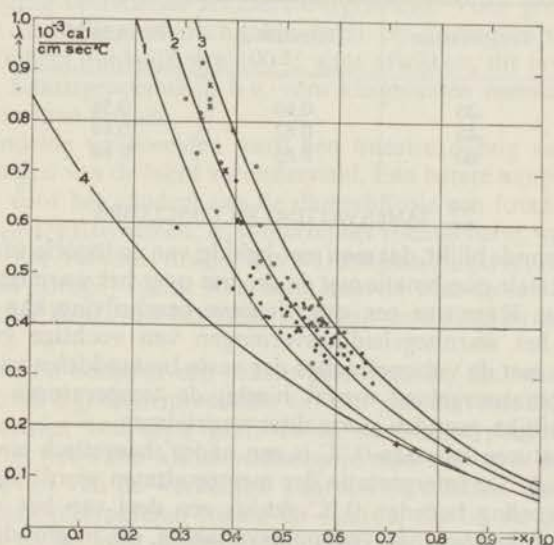


Fig. 18. Experimentele en theoretische waarden van λ voor droge grond. . - metingen van SMITH voor ovendroge grond, o - metingen van SMITH voor luchtdroge grond, + - metingen van SMITH voor ovendroog veen, x - metingen van KERSTEN aan Ottawa-zand ($\varphi \leq 0.02$). Krommen 1 en 4: theoretische waarden voor $\lambda_v = 7.0 \times 10^{-3}$, $g_a = 0.125$ en $\lambda_v = 0.85 \times 10^{-3}$, $g_a = 0.5$ resp. Krommen 2 en 3 werden uit kromme 1 verkregen door de ordinaten met resp. 1.25 en 1.50 te vermenigvuldigen.

(Experimental and theoretical values of λ for dry soils. . - experimental values of SMITH for oven-dry soils, o - experimental values of SMITH for air-dry soils, + - experimental values of SMITH for oven-dry peat, x - experimental values of KERSTEN for Ottawa sand [$\varphi \leq 0.02$]. Curves 1 and 4: theoretical values for $\lambda_v = 7.0 \times 10^{-3}$, $g_a = 0.125$ and $\lambda_v = 0.85 \times 10^{-3}$, $g_a = 0.5$ resp. Curves 2 and 3 are obtained by multiplying the ordinates of curve 1 with 1.25 and 1.50 resp.).

1 geeft de theoretische waarden volgens EUCKEN met als λ voor de vaste stof (λ_v): 7.0×10^{-3} , $\lambda_l = 0.0615 \times 10^{-3}$ en $g_a = 0.125$. De waarde voor lucht correspondeert met een temperatuur van 20°C . De krommen 2 en 3 werden uit kromme 1 verkregen door vermenigvuldiging van de ordinaten met resp. 1.25 en 1.50. Kromme 4 geeft de waarden volgens EUCKEN voor $\lambda_v = 0.85 \times 10^{-3}$ en $g_a = 0.5$, hetgeen overeenkomt met de in de vorige paragraaf gebruikte waarden voor veen. Een dergelijke kromme met $\lambda_v = 21 \times 10^{-3}$ en $g_a = 0.125$ (waarden voor kwarts) ligt in het hier beschouwde gebied van λ -waarden ($\lambda < 10^{-3}$) geheel tussen de krommen 1 en 2.

Met een enkele uitzondering liggen de waarnemingen voor minerale gronden tussen de krommen 1 en 3. De drie punten, welke beneden kromme 1 liggen, hebben alle betrekking op metingen aan dezelfde grondsoort, nl. Hermon sandy loam. De reden van deze afwijking is niet duidelijk. Uit de opgegeven soortelijke massa's blijkt, dat de monsters weinig organische stof bevatten, zodat de verklaring waarschijnlijk niet in een geringe waarde van het geleidingsvermogen van de vaste stof kan worden gevonden.

In het algemeen zal men voor het warmtegeleidingsvermogen bij vochtgehalte nul een redelijke schatting kunnen maken, door de theoretische waarde volgens EUCKEN te vermenigvuldigen met een correctiefactor 1.25 (verg. blz. 28). Voor het zand uit paragraaf 19 vinden we dan de volgende waarden:

Temperatuur	Gemeten λ	Berekende λ
20	0.60	0.58
40	0.62	0.61
60	0.65	0.64

22. SAMENVATTING EN CONCLUSIES

Uit het voorgaande blijkt, dat men met behulp van de theorie van MAXWELL—BURGER—EUCKEN in combinatie met de theorie over het warmtetransport door dampdiffusie van KRISCHER een quantitative beschrijving kan geven van de wijze, waarop het warmtegeleidingsvermogen van vochtige grond met het watergehalte en met de volumefracties der vaste bestanddelen varieert. Het beschouwde temperatuurgebied omvat hierbij de temperaturen welke in niet bevroren natuurlijke gronden normaliter voorkomen.

Voor temperaturen beneden 0°C is een nader theoretisch en experimenteel onderzoek vereist. De interpretatie der meetresultaten wordt hier bemoeilijkt, doordat bij afkoeling beneden 0°C slechts een deel van het water befrist ten gevolge van de aanzienlijke vriespuntsverlaging, die in grond kan optreden. Bovendien kan er onzekerheid bestaan omtrent de aard van het contact tussen het ijs en de gronddeeltjes. In sommige gevallen zullen ijs- en gronddeeltjes een samenhangend geheel vormen, in andere gevallen zal zich echter water of lucht tussen deze componenten bevinden.

Met behulp van de theorie van EUCKEN kan men het warmtegeleidingsvermogen van grond berekenen, indien de volumefracties en de warmtegeleidingsvermogens van de vaste bestanddelen van water en van lucht bekend zijn. De daarbij te volgen werkwijze is in de paragrafen 19 t/m 21 uiteengezet.

Bij de vaste stof dient men in hoofdzaak onderscheid te maken tussen kwarts, andere minerale bestanddelen en organische stof. Het warmtegeleidingsver-

mogen van kwarts is ongeveer 20×10^{-3} (verg. Tabel IX op blz. 48). Voor de overige minerale bestanddelen is 7.0×10^{-3} een gemiddelde waarde, welke echter voor gronden die veel kleimineralen bevatten iets aan de hoge kant is. Voor het maken van een goede schatting voor het warmtegeleidingsvermogen van organische stof in de grond zijn nog te weinig gegevens beschikbaar. Voor de organische stof in veengronden wijzen de aanwezige gegevens op een waarde van circa 0.7×10^{-3} . *)

Het warmtegeleidingsvermogen van water en lucht vindt men voor temperaturen tussen 0 en 75°C in Tabel IX. Het warmtegeleidingsvermogen van lucht is bij grote vochtgehalten vrijwel gelijk aan dat voor „verzadigde” lucht, waarbij de schijngeleiding door dampdiffusie in rekening is gebracht. Bij vochtgehalten beneden een bepaalde grens begint een snelle daling van dit geleidingsvermogen tot de waarde voor „droge” lucht bij vochtgehalten nul.

De wijze, waarop deze daling in rekening moet worden gebracht is nog onzeker. Voor een globale berekening kan men uitgaan van de veronderstelling, dat bij gronden met grove textuur het capillaire vochttransport in de vloeibare fase de beperkende factor is. De daling begint dan bij een vochtgehalte in de omgeving van de z.g. veldcapaciteit. Bij zandgronden ligt deze waarde in het algemeen tussen 3 en 10 gewichtsprocenten van het droge gewicht. De waarde van het schijnbare geleidingsvermogen van de lucht zal nu mede afhangen van de bij de geleiding optredende temperatuurgradiënt. Voor gronden met fijne textuur begint de daling waarschijnlijk eerst bij vochtgehalten, waarbij de relatieve vochtigheid duidelijk van 100 % gaat afwijken, dit is bij de z.g. verwelkingsgrens. Laatstgenoemde is b.v. voor kleigronden meestal tussen 10 en 20 gewichtsprocenten gelegen.

Bij de behandelde voorbeelden werd een lineaire daling van het warmtegeleidingsvermogen van de lucht verondersteld. Een betere aanpassing verkrijgt men b.v. door voor het aandeel van de dampdiffusie een functie van de vorm $\lambda_r^{(v)} \exp \{f(1/\varphi_1 - 1/\varphi)\}$ te nemen; φ_1 is hierbij het vochtgehalte, waarbij de daling begint en $\lambda_r^{(v)}$ het verschil tussen het warmtegeleidingsvermogen van „verzadigde” en van „droge” lucht. Naarmate men de waarde van de willekeurige constante f groter kiest, valt het steile deel van de daling bij grotere waarden van φ .

Bij vochtgehalten beneden een zekere grenswaarde, die voor gronden met grove textuur circa 2 gewichtsprocenten en voor gronden met fijne textuur circa 5 gewichtsprocenten bedraagt, geeft de in de vorige paragrafen gevolgde methode, waarbij het water als samenhangend medium wordt beschouwd, uitkomsten die teveel van de werkelijke waarden verschillen. Voor deze vochtgehalten kan men interpoleren tussen de waarde, die bij de genoemde grens werd berekend en de voor droge grond verkregen waarde. Laatstgenoemde wordt eveneens berekend volgens de theorie van EUCKEN, nu met lucht als samenhangend medium, waarbij een correctiefactor 1.25 wordt toegepast. De waarde van deze correctiefactor is in overeenstemming met de in hoofdstuk I voor bolvormige korrels verkregen resultaten en met de in dit hoofdstuk gegeven metingen voor droge gronden.

De onnauwkeurigheid van de aldus berekende waarden van het warmtegeleidingsvermogen bedraagt 5 à 10 % voor waarden van het vochtgehalte vanaf verzadiging tot het punt, waarbij de snelle daling van het warmtegeleidings-

*) De in paragraaf 20c behandelde veengronden bevatten, gezien hun grote soortelijke massa, nog 20 à 30 gewichtsprocenten aan minerale stoffen.

vermogen van de lucht begint. Bij kleinere vochtgehalten neemt de onnauwkeurigheid toe tot circa 20 %. Voor de meeste berekeningen omtrent de warmtebeweging in grond kan met de hier bereikte nauwkeurigheid worden volstaan.

Voor een bepaling van het vochtgehalte uit het warmtegeleidingsvermogen is de nauwkeurigheid van de theorie echter nog onvoldoende (verg. b.v. fig. 12 op blz. 49). Men zal hiertoe dus voor een bepaalde grondsoort het verband tussen het warmtegeleidingsvermogen en het vochtgehalte experimenteel moeten vastleggen. In de meeste gevallen zal men hierbij kunnen volstaan met een viertal meetpunten, nl. voor vochtgehalte nul, voor met water verzadigde grond en voor twee geschikt gekozen tussenliggende vochtgehalten. Aan de hand van deze meetpunten kan men nu de waarden van de in de berekening optredende parameters, nl. de vormfactor (g_a) en het gemiddelde geleidingsvermogen der korrels en de waarden van g_a en λ voor lucht bij verschillende vochtgehalten, nauwkeuriger vastleggen, dan bij de bovengenoemde globale berekeningen geschiedde. De onzekerheid in de berekende waarden van het geleidingsvermogen kan zodoende worden verminderd tot circa 5 %.

De waarde van de temperatuurvereffeningscoëfficiënt a kan uit de gemeten of berekende waarde van λ worden verkregen door deling door de waarde van de warmtecapaciteit per volume eenheid (ρc). Laatstgenoemde kan worden berekend volgens formule (54) op blz. 47, indien weer de aard en de volumefractie van de vaste bestanddelen en het vochtgehalte bekend zijn. De waarde van de soortelijke massa (ρ_v) is voor de meeste grondmineralen bekend. Volgens metingen van KERSTEN²⁴ aan 12 verschillende gronden bedraagt de waarde van de soortelijke warmte c_v voor uit minerale bestanddelen bestaande gronden ongeveer 0.16 cal/g bij 0 °F (-18 °C) en 0.19 cal/g bij 140 °F (60 °C).

AANHANGSEL I

DE DIFFERENTIËLE THEORIE VOOR $N > 1$

In dit aanhangsel zullen wij aantonen, dat een redenering analoog aan die van paragraaf 3e ook voor $N > 1$ tot een resultaat voert, dat identiek is met dat van MAXWELL—BURGER—EUCKEN.

Voor de overzichtelijkheid geven wij het bewijs voor $N = 2$; voor grotere waarden van N verloopt de bewijsvoering echter geheel analoog.

Beschouwen wij ε als functie van x_1 en x_2 , de volumefracties van de twee soorten korrels, dan geldt volgens formule (16) op blz. 9:

$$(55) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + x_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) K_1 + x_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) K_2.$$

Laten wij nu x_2 toenemen met een bedrag Δx_2 , dan vinden wij volgens een redenering analoog aan die op blz. 10:

$$\varepsilon(x_1, x_2 + \Delta x_2) = \varepsilon \left(\frac{x_1}{1 - \Delta x_2}, \frac{x_2}{1 - \Delta x_2} \right) \times \frac{1 + \Delta x_2 \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon \left(\frac{x_2}{1 - \Delta x_2}, \frac{x_2}{1 - \Delta x_2} \right)} K_2(x_1, x_2, \Delta x_2) - 1 \right\}}{1 + \Delta x_2 \{ K_2(x_1, x_2, \Delta x_2) - 1 \}}.$$

Herleiding geeft:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon) K_2(x_1, x_2, \Delta x_2) + O(\Delta x_2).$$

Nu is:

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} K_2(x_1, x_2, \Delta x_2) = K_2,$$

dus:

$$(56a) \quad (\varepsilon_2 - \varepsilon) K_2 = -x_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + (1 - x_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2},$$

$$\text{Analoog: (56b) } (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_1 = (1 - x_1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}.$$

Substitutie in (55) geeft:

$$(57) \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{x_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1 - \varepsilon} \left\{ (1 - x_1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right\} + \frac{x_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \left\{ -x_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + (1 - x_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right\}.$$

Met $\varepsilon - \varepsilon_0 = y$:

$$(57a) \quad y = \left\{ x_1 (1 - x_1) \frac{y_1}{y_1 - y} - x_1 x_2 \frac{y_2}{y_2 - y} \right\} \frac{\partial y}{\partial x_2} + \left\{ -x_1 x_2 \frac{y_1}{y_1 - y} + x_2 (1 - x_2) \frac{y_2}{y_2 - y} \right\} \frac{\partial y}{\partial x_1}.$$

Deze lineaire partiële differentiaalvergelijking moet worden opgelost met de volgende randvoorwaarden:

Voor x_1 , resp. $x_2 = 0$ moet de oplossing overgaan in die voor $N = 1$, dus:

$$(58a) \quad x_1 = 0 \rightarrow \frac{y}{y_2 - y} = k_2 \frac{x_2}{1 - x_2},$$

$$(58b) \quad x_2 = 0 \rightarrow \frac{y}{y_1 - y} = k_1 \frac{x_1}{1 - x_1}$$

De oplossing, die aan (57a) en (58a en b) voldoet, is:

$$(59) \quad y = \frac{k_1 x_1 y_1 + k_2 x_2 y_2}{x_1 + k_1 x_1 + k_2 x_2},$$

hetgeen equivalent is met formule (9) van paragraaf 3a voor $N = 2$.

Men kan dit door substitutie verifiëren, doch de oplossing (59) kan ook rechtstreeks met behulp van de methode der karakteristieken worden verkregen. Twee integralen van het bij (57a) behorende karakteristieke stelsel zijn nl.:

$$(60a) \quad a = \frac{y - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_1 (y_1 - y)}$$

$$(60b) \quad b = \frac{y - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_2 (y_2 - y)}$$

De oplossing, die aan de randvoorwaarden voldoet, wordt gegeven door:

$$1 = \frac{k_1 - 1}{a} + \frac{k_2 - 1}{b} = \frac{(k_1 - 1) x_1 (y_1 - y) + (k_2 - 1) x_2 (y_2 - y)}{y - k_1 y_1 - k_2 y_2},$$

waaruit door algebraïsche herleiding (59) volgt.

Voor de waarden van de constanten k_i vindt men weer die van formule (9b) door de $\lim x_i \rightarrow 0$ voor $i = 1$ en 2 te beschouwen.

AANHANGSEL 2

DE THEORIE VAN HET GELEIDINGSVERMOGEN VOLGENS RAYLEIGH

In dit aanhangsel zullen wij aantonen, dat de theorie die RAYLEIGH³⁵⁾ gegeven heeft voor het geleidingsvermogen van een granulaire stof, waarbij de korrels bolvormig zijn en een enkelvoudig kubische rangschikking vertonen, kan worden uitgebreid tot enige andere rangschikkingen. Hiertoe zullen wij de gedachtengang van RAYLEIGH kort weergeven, waarbij met enkele uitzonderingen de door RAYLEIGH gebruikte notatie is overgenomen.

Bollen met straal a vertonen een enkelvoudig kubische rangschikking, met afstanden tussen de middelpunten $= a$ (zie fig. 19). Het middelpunt van bol P zij de oorsprong van een coördinatenstelsel (x, y, z) . De stroming zij in de richting van de negatieve x -as. Voor de potentiaal binnen P schrijven we:

$$(61) \quad V' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Y_n r^n,$$

voor de potentiaal buiten de bol:

$$(62) \quad V = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) Y_n.$$

Y_n is een bolfunctie van de orde n ; A_n , B_n en C_n zijn constanten.

Het geleidingsvermogen van het medium zij l , dat van de bollen v_1 , dus met onze notatie:

$$(63) \quad v_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}.$$

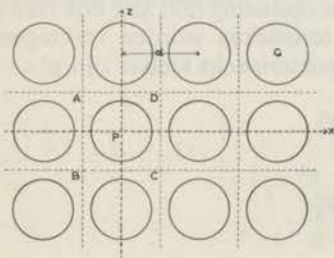


Fig. 19. Bollen in een enkelvoudig kubische rangschikking (doorsnede).
(Spheres in a cubic arrangement [cross section]).

De grensvoorwaarden aan het boloppervlak luiden:

$$\text{voor } r = a, \text{ is } V = V', \quad v_1 \frac{dV'}{dr} = \frac{dV}{dr}.$$

Hieruit volgt:

$$(64) \quad B_n = \frac{1 - v_1}{1 + v_1 + \frac{1}{n}} a^{2n+1} A_n.$$

De algemene vorm voor Y_n is:

$$(65) \quad \sum_{s=0}^n \Theta_n^{(s)} (H_s \cos s\psi + K_s \sin s\psi),$$

$$(66) \quad \Theta_n^{(s)} = \sin^s \Theta \left(\cos^{n-s} \Theta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-s-2} \Theta + \dots \right) = \\ = \frac{2^n n! (n-s)!}{(2n)!} \sin^s \Theta \frac{d^s P_n(\cos \Theta)}{(d \cos \Theta)^s}.$$

H_s en K_s zijn constanten.

Transformatie op poolcoördinaten geschiedt volgens:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Theta, \\ y &= r \sin \Theta \sin \psi, \\ z &= r \sin \Theta \cos \psi. \end{aligned}$$

Om symmetrieredenen moet nu:

1. De potentiaal dezelfde blijven bij de substitutie $\psi' = \psi + \pi$, of $y' = -y$, $z' = -z$. Dus $s = \text{even}$.
2. De Y_n van teken omkeren bij de transformatie $\Theta' = \pi - \Theta$ of $x' = -x$ met uitzondering van $n = 0$. Dus: $n = \text{oneven}$ voor $n > 0$.
3. De potentiaal dezelfde blijven bij de transformatie $\psi' = -\psi$, of $y' = -y$. Dus $K_s = 0$.

De uitdrukkingen voor de eerste drie bolfuncties in de reeks zijn nu als volgt:

$$(67a) \quad Y_1 = \cos \Theta,$$

$$(67b) \quad Y_3 = \cos^3 \Theta - \frac{3}{5} \cos \Theta + H_2 \sin^2 \Theta \cos \Theta \cos 2\psi,$$

$$(67c) \quad Y_5 = \cos^5 \Theta - \frac{10}{9} \cos^3 \Theta + \frac{5}{21} \cos \Theta + \\ L_2 \sin^2 \Theta (\cos^3 \Theta - \frac{1}{3} \cos \Theta) \cos 2\psi + L_4 \sin^4 \Theta \cos \Theta \cos 4\psi.$$

Daar de potentiaal ook onveranderd moet blijven bij verwisseling van y en z , dus de transformatie $\psi' = \frac{1}{2}\pi - \psi$, is nog:

$$(67d) \quad H_2 = L_2 = 0.$$

Tot dusver werd alleen van symmetrie-eigenschappen gebruik gemaakt, die b.v. evenzo gelden voor bollen met een rangschikking, als in een kubisch mid-bloks kristalrooster, of als bij een kubische dichte pakking.

Om het geleidingsvermogen te berekenen past RAYLEIGH de stelling van GREEN toe op een ruimte, die begrensd wordt door het oppervlak van bol P en door het oppervlak van de P omgevende kubus (A B C D in fig. 19):

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) df = 0, \text{ met } U = x = r \cos \theta.$$

Alleen de vlakken loodrecht op de x -as leveren hier een bijdrage. Deze is:

$$\alpha \int \frac{\partial V}{\partial n} df - V_1 \int df = \alpha C - V_1 \alpha^2,$$

waarbij C de totale stroom is, die door de kubus gaat en V_1 het potentiaal verschil tussen C en B.

Op het boloppervlak is:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \cos \theta, \quad U = a \cos \theta.$$

Wegens de orthogonaliteit van de bolfuncties zal dus slechts de term met Y_1 een bijdrage geven. Daar:

$$V = A_0 + (A_1 a + B_1 a^{-2}) \cos \theta + \dots, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = - (A_1 - 2 B_1 a^{-3}) \cos \theta + \dots,$$

wordt deze bijdrage:

$$3 B_1 a^{-2} \int \cos^2 \theta df = 4\pi B_1.$$

De stelling van GREEN levert dus:

$$(68) \quad \alpha C - \alpha^2 V_1 + 4\pi B_1 = 0, \quad \text{of:}$$

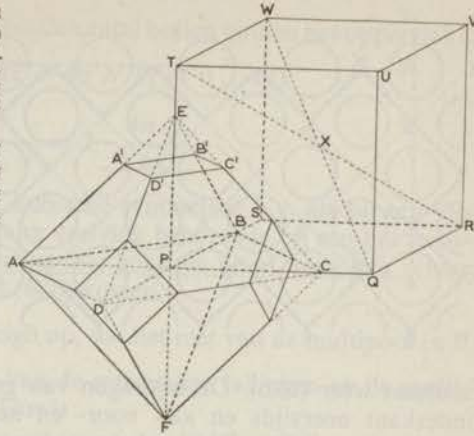
$$(68a) \quad \nu = \frac{\alpha C}{\alpha^2 V_1} = 1 - \frac{4\pi B_1}{\alpha^2 V_1},$$

met $\nu = \sigma/\sigma_0 =$ het geleidingsvermogen van de granulaire stof.

Ter berekening van V_1 moeten wij nog veronderstellingen maken omtrent de oorsprong van het uitwendige veld. Wij kunnen ons voorstellen, dat de potentiaal in een bepaald punt van het medium wordt veroorzaakt door uitwendige ladingen, die zich in het oneindige bevinden en door multipolen, die in de middelpunten der bollen zijn geplaatst. RAYLEIGH beschouwt nu een opstelling, waarbij de geleidende stof zich in x -, y - en z -richting oneindig ver uitstrekt, terwijl de verhouding tussen de afmeting in de x -richting en die in de y - (of z -) richting eveneens oneindig is. Is nu de potentiaal, die veroorzaakt wordt door

Fig. 20. Elementaire cel (PQRSTUW) en elementair veelvlak (gedeeltelijk getekend) voor bollen in een kubisch midblokse rangschikking. Op de hoekpunten en in het midden (X) van de elementaire cel bevinden zich de middelpunten van bollen.

(Unit cell [PQRSTUW] and elementary polyhedron [partially drawn] for spheres in a cubic body-centred arrangement. Centres of spheres are situated at the angular points and in the centre [X] of the unit cell).



de ladingen in het oneindige Hx , dan is $V_1 = Ha$, want verschuiving over de afstand van 1 kubus, is equivalent met het toevoegen van een laag kubussen in $x = +\infty$ en het wegnemen van een dergelijke laag in $x = -\infty$, zodat onder de hier gemaakte veronderstellingen de bijdrage van de multipolen tot V_1 nul zal zijn. Formule (68a) gaat nu over in:

$$(68b) \quad v = 1 - \frac{4\pi B_1}{iH},$$

waarin i het volume is, dat per bol beschikbaar is.

Wij zullen nu aantonen, dat (68b) eveneens geldt voor andere rangschikkingen met kubische symmetrie en willen dit toelichten aan de hand van de kubisch midblokse rangschikking.

Wij kiezen de oorsprong van het coördinatenstelsel in het middelpunt van bol P. Wij kunnen nu niet elke bol door een kubus insluiten, doch door een veelvlak, zoals getekend in fig. 20. De 8 raakvlakken aan bol P geven de octaëder A B C D E F met lichaamsdiagonaal $EF = \frac{3}{2}a$, als a de zijde van de elementaire cel is. Aan elk hoekpunt moet men de octaëder „afknotten” door een pyramide met hoogte $\frac{1}{4}a$ er af te snijden (b.v. E A' B' C' D'). Voor de overzichtelijkheid zijn slechts 3 van deze afknottingen (bij E, D en C) in de figuur getekend. De inhoud van het aldus verkregen 14-vlak is $\frac{1}{2}a^3$, dus juist de inhoud die per bol beschikbaar is. Wij kiezen vervolgens een blok met P als één der hoekpunten en met zijden $n_x a$, $n_y a$ en $n_z a$ in de richtingen der coördinaatassen, waarbij n_x , n_y en n_z gehele getallen zijn.

Om nu de stelling van GREEN te kunnen toepassen, construeren wij een gesloten oppervlak, bestaande uit vlakken van de bij de bollen behorende elementaire veelvlakken, zo goed mogelijk aansluitend bij de zijden van het gekozen blok, waarbij wij ervoor zorgen, dat de bollen liggende op het linkzijdvlak, het benedenvlak en het voorvlak binnen ons oppervlak vallen, terwijl de bollen op de overige zijvlakken er buiten komen te liggen. Wij krijgen zodoende een blok met getande kanten; één en ander is door een twee-dimensionaal analogon in fig. 21 verduidelijkt.

Passen wij de stelling van GREEN toe op een ruimte begrensd door dit oppervlak en door de oppervlakken van alle erbinnen gelegen bollen, dan is het

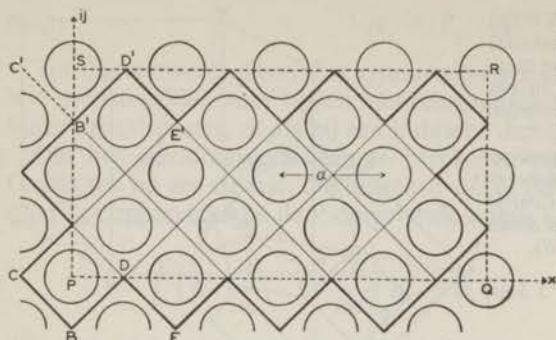


Fig. 21. Begrenzing (tweedimensionaal) voor toepassing van de stelling van GREEN. De dik getekende lijn geeft de buitenste begrenzing behorende bij de rechtehoek PQRS.

(Boundary for the application of GREEN'S theorem. The heavy line represents the outer boundary belonging to a rectangle PQRS).

resultaat weer (68b). De bijdragen van gelijkstandige tanden aan boven- en onderkant enerzijds en aan voor- en achterkant anderzijds, zullen elkaar opheffen (b.v. D E en D' E' in het tweedimensionale geval van fig. 21). Er blijven dus alleen bijdragen van tanden aan linker- en rechter zijvlak (in het driedimensionale geval zijn de „tanden” afgeknot, zoals in fig. 20 is aangegeven). De vlakken van deze tanden zijn ook twee aan twee evenwijdig met een afstand $n_x a$ tussen overeenkomstige punten in de x -richting. Hierbij moet men bepaalde vlakken links beneden met bepaalde vlakken rechts boven laten corresponderen, doch evenwijdige verplaatsing over een geheel aantal malen de afstand a in de y - of z -richting geeft geen verschil in bijdrage tot de integraal in de stelling van GREEN (in het tweedimensionale geval van fig. 21 is de bijdrage over BC gelijk aan die over B'C'). Nu is:

$$\int x \frac{\partial V}{\partial n} df = n_x a \int (\text{grad} V df) = n_x a C,$$

als C weer de totale stroom is, die door het blok vloeit. Verder is:

$$\int V \frac{\partial x}{\partial n} df = H n_x a \int \frac{\partial x}{\partial n} df = H n_x a \cdot n_y n_z a^2,$$

want de bijdrage van de multipolen tot V zal in gelijkstandige punten dezelfde zijn.

Tenslotte is de bijdrage van elk der boloppervlakken $4\pi B_1$. Voor bol P is dat hierboven reeds bewezen. Voor een bol met middelpunt x_0, y_0, z_0 , schrijven wij: $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0, \zeta = z - z_0$. Dan is:

$$\begin{aligned} \int x \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial n} df &= \int \xi \frac{\partial V(\xi, \eta, \zeta)}{\partial n} df + \int x_0 \frac{\partial V(\xi, \eta, \zeta)}{\partial n} df = \\ &= \int \xi \frac{\partial V(\xi, \eta, \zeta)}{\partial n} df \end{aligned}$$

en:

$$\int V(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial n} df = \int (V(\xi, \eta, \zeta) + H x_0) \frac{\partial \xi}{\partial n} df = \int V(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \xi}{\partial n} df.$$

Deze bol levert dus dezelfde bijdrage als bol P.

Vergelijking (68) wordt nu (N is het totale aantal bollen binnen het oppervlak):

$$n_x a C - n_x n_y n_z a^3 H + 4\pi N B_1 = 0, \text{ of:}$$

$$v = \frac{C}{H n_y n_z a^2} = 1 - \frac{4\pi B_1}{i H},$$

Voor andere rangschikkingen met kubische symmetrie, b.v. als bij een kubische dichte pakking, is het elementaire veelvlak behorende bij een bol weliswaar verschillend van het veelvlak in het hier gekozen geval, men kan echter langs een analoge redenering weer tot (68b) komen.

Ter berekening van $\frac{B_1}{H}$ merkt Rayleigh op, dat het niet van de multipool in P afkomstige deel van V , afkomstig is van de uitwendige ladingen en de multipolen van de overige bollen (b.v. Q). Dus is:

$$(69) \quad A_0 + A_1 x + A_3 (x^3 - \frac{3}{5} x r^2) + \dots = \\ = H x + B_1 \sum \frac{x'}{r'^3} + B_3 \sum \frac{x'^3 - \frac{3}{5} x' r'^2}{r'^7} + \dots,$$

waarin (x', y', z') de coördinaten t.o.v. Q zijn en de sommaties zich over alle bollen Q , behalve P zelf, uitstrekken. Met: $x' = x - \xi$ (cycl.) vinden we, door gelijkstelling van termen met x links en rechts:

$$A_1 = H + \left[\frac{d}{dx} \left\{ B_1 \sum \frac{x'}{r'^3} + B_3 \sum \frac{x'^3 - \frac{3}{5} x' r'^2}{r'^7} + \dots \right\} \right]_{x, y, z = 0}.$$

Nu is:

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{x'}{r'^3} \right]_{x, y, z = 0} = - \left[\frac{d}{d\xi} \frac{x'}{r'^3} \right]_{x, y, z = 0} = - \frac{d}{d\xi} \frac{-\xi}{\varrho^3} = - 2 \varrho^{-3} P_2(\mu),$$

$$\text{met:} \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{en} \quad \mu = \frac{\xi}{\varrho}.$$

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{x'^3 - \frac{3}{5} x' r'^2}{r'^7} \right]_{x, y, z = 0} = \frac{d}{d\xi} \frac{\xi^3 - \frac{3}{5} \xi \varrho^2}{\varrho^7} = - \frac{8}{5} \varrho^{-5} P_4(\mu),$$

$$(70) \quad A_1 - H = - 2 B_1 \Sigma \varrho^{-3} P_2 - \frac{8}{5} B_3 \Sigma \varrho^{-5} P_4 + \dots$$

Op analoge wijze berekenen wij A_3 :

$$3! A_3 \times \frac{2}{5} = B_1 \Sigma \frac{d}{d\xi^3} \left(\frac{\xi}{\varrho^3} \right) + \dots = - 24 \Sigma \varrho^{-5} P_4(\mu) + \dots,$$

$$A_3 = - 10 B_1 \Sigma \varrho^{-5} P_4(\mu) + \dots$$

(RAYLEIGH kreeg hier een factor 4 in plaats van 10, waarschijnlijk, doordat de term met $\frac{3}{5} x^3$, afkomstig van $\frac{3}{5} x r^2$ in (69) niet in rekening is gebracht.)

Uit (64) volgt:

$$B_1 = \frac{1 - \nu_1}{2 + \nu_1} a^3 A_1, \quad B_3 = \frac{1 - \nu_1}{\frac{4}{3} + \nu_1} a^7 A_3.$$

Substitutie in (70) levert:

$$(71) \quad \frac{H a^3}{B_1} = \frac{2 + \nu_1}{1 - \nu_1} + 2 S_2 \frac{a^3}{\alpha^3} - 16 \frac{1 - \nu_1}{4/3 + \nu_1} S_4^2 \frac{a^{10}}{\alpha^{10}} + \dots,$$

met:
$$S_n \alpha^{-n-1} = \sum \varrho^{-n-1} P_n.$$

Nemen wij α als eenheid van lengte, dan is dus:

$$S_n = \sum \varrho^{-n-1} P_n.$$

Daar bij kubische symmetrie:

$$\sum \frac{\xi^2}{\varrho^5} = \sum \frac{\eta^2}{\varrho^5} = \sum \frac{\zeta^2}{\varrho^5},$$

zal de sommatie over een kubus met P als middelpunt nul opleveren. In overeenstemming met het voorgaande, moeten wij echter de sommatie uitstrekken over een gebied

$$-\infty \leq \xi \leq +\infty, \quad -w \leq \eta, \zeta \leq +w,$$

waarna $\lim w = \infty$ moet worden genomen. Daarbij kunnen wij dus de kubus met zijde $2w$ buiten beschouwing laten. Vervangen wij voor grote w de sommatie door een integratie, dan is:

$$S_2 = -2 \int_w^\infty \int_{-w}^{+w} \int_{-w}^{+w} n \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{\varrho^3} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

waarbij n het aantal bollen per elementaire cel (hier tevens de volume-eenheid, wegens $\alpha = 1$) is.

Integratie levert: $S_2 = \frac{2}{3} \pi n$.

S_4 kan niet langs analytische weg worden berekend, doch moet door numerieke rekening gevonden worden uit:

$$S_4 = \sum \frac{35 \xi^4 - 30 \xi^2 \varrho^2 + 3 \varrho^4}{8 \varrho^9}.$$

Substitutie van (71) in (68b) geeft:

$$\nu = 1 - \frac{4\pi a^3}{i} \left\{ \frac{2 + \nu_1}{1 - \nu_1} + \frac{4\pi}{3} n \frac{a^3}{\alpha^3} - 16 \frac{1 - \nu_1}{4/3 + \nu_1} S_4^2 \frac{a^{10}}{\alpha^{10}} + \dots \right\}^{-1}.$$

Nu is:

$$\frac{4\pi a^3}{i} = 3 x_1 = \frac{4\pi a^3 n}{\alpha^3}, \quad \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{10} = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{10/3} x_1^{10/3}.$$

$$(72) \quad \nu = 1 - 3 x_1 \left\{ \frac{2 + \nu_1}{1 - \nu_1} + x_1 - 16 \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{10/3} \frac{1 - \nu_1}{4/3 + \nu_1} S_4^2 x_1^{10/3} + \dots \right\}^{-1}.$$

Een numerieke berekening levert de volgende waarden:

1. Enkelvoudig kubische rangschikking ($n = 1$):
 $S_4 = 3.11$ en $16 (3/4 \pi n)^{10/3} S_4^2 = 1.31$. *)
2. Kubisch midblokse rangschikking ($n = 2$):
 $S_4 = -3.10$ en $16 (3/4 \pi n)^{10/3} S_4^2 = 0.129$.
3. Kubisch midzijdse rangschikking ($n = 4$):
 $S_4 = -7.51$ en $16 (3/4 \pi n)^{10/3} S_4^2 = 0.0752$.

SUMMARY

A knowledge of the coefficients of thermal conductivity (λ) and thermal diffusivity (a) is necessary for a quantitative treatment of problems of heat transfer in soils. Since these thermal properties are largely affected by the moisture content (φ) of the soil, several attempts have been made to determine the latter quantity by a thermal method. If one knows for instance the relation between the thermal conductivity and the moisture content, φ can be determined by measuring λ .

The study of the relations between λ or a and φ is complicated by the fact that the values of λ and a also depend on some other factors, of which the composition and the volume fraction of the solid materials in the soil and the temperature are the most important. If one wants to determine the relation between λ or a and φ experimentally, one encounters the difficulty that the moisture content may change appreciably during an experiment, because water distills from warm to cold places.

This paper contains a theoretical and experimental investigation of the dependence of the thermal conductivity of soils on their composition, water content and temperature.

In chapter I the general theory of the thermal conductivity of a granular material is considered. The main problem treated in this chapter is to express the thermal conductivity of the granular material as a function of the thermal conductivities and the volume fractions of its constituents. Mathematically this problem is equivalent to expressing the electric conductivity of a granular material as a function of the electric conductivities and the volume fractions of the constituents. The same remark holds if one substitutes the dielectric constant, the magnetic permeability or the diffusion coefficient for the electric conductivity.

Because of the mathematical complexity of the problem, only an approximate solution can be given. Different authors have presented such a solution for the case of a granular material consisting of a continuous medium in which particles of spherical or ellipsoidal shape are distributed at random. The different approximations used by these authors lead to divergent results (cf. figures 1 and 2 on page 11). However, no estimate was made of the departures of the theoretical from the actual values.

In chapter I the theories of MAXWELL²⁹⁾—BURGER⁹⁾—EUCKEN¹⁴⁾, OLLENDORFF³⁰⁾, BÖTTCHER⁶⁾—POLDER and VAN SANTEN³³⁾, and BRUGGEMAN⁸⁾ are compared with each other and with experiment. This comparison supplemented

*) RAYLEIGH geeft hier op blz. 502 van zijn artikel de waarde 1.65 in plaats van 1.31. Volgens zijn formule op blz. 435 zou dit echter 0.524 moeten zijn, dus juist $2/5 \times 1.31$.

by further theoretical treatment leads to an insight in the validity of the different theories. The following results are obtained.

1. If the conductivity of the particles is smaller than that of the medium, the theory of MAXWELL-BURGER-EUCKEN is in good agreement with experiment. The computed values are too large, but not by more than about 10 %.
2. If the conductivity of the particles is larger than that of the medium and the ratio of both conductivities is less than about 300, the actual value will lie between the values computed with the theory of MAXWELL-BURGER-EUCKEN and the theory of BRUGGEMAN, the former theory yielding the lowest value. When the ratio of the conductivities of the particles and the medium is about 10 or 100, the theory of MAXWELL-BURGER-EUCKEN gives values which are about 10 % or 25 % too low respectively, for volume fractions of the particles lying between 0.4 and 0.7. If this ratio is about 1000 the theory of BRUGGEMAN is in rather good agreement with experiment; the deviations between theoretical and experimental values being generally less than 20 %. The theory of MAXWELL-BURGER-EUCKEN gives values which are far too low in this case (cf. Table VIII on page 26).
3. The result of OLLENDORFF is a special case of BURGER's more general result.
4. The differences between theoretical and experimental values are largest for the theory of BÖTTCHER-POLDER and VAN SANTEN.

Some special features of the theory of the thermal conductivity in granular materials, which were not covered by the general treatment mentioned above, are treated briefly in the paragraphs 5, 6 and 7. These features are: a) The influence of small contact surfaces between the particles; b) The influence of the temperature discontinuity between a gas and a solid or fluid; c) Convection; d) Radiation. In soils the influence of these factors is negligible in most cases.

In chapter II the effect of the distillation of water on the heat transfer is considered, following KRISCHER's theoretical treatment of this problem²⁶⁾. Since water vapour diffuses through the air in the soil pores, the diffusion of gases through granular materials is also considered. Experimental results of PENMAN³²⁾ on the relation between the diffusion rate and the porosity are compared with theoretical values obtained by applying the theory of MAXWELL-BURGER-EUCKEN (cf. fig. 7 on page 31).

The contribution of the distillation to the heat transfer in the gas-filled pore space is, to a good approximation, proportional to the temperature gradient for moisture contents above the wilting point (relative humidity in the soil \approx 100 %). Hence this contribution can be described as an apparent increase of the thermal conductivity of the air. This increase is approximately equal to the normal conductivity of air at 0 °C. It rises rapidly with temperature and becomes equal to the thermal conductivity of water at a temperature of about 60 °C. *)

In chapter III a non-stationary method for measuring the thermal conductivity of soils in the laboratory and in the field is described. The principle of this method was proposed for the first time by STÅLHANE and PYK⁴³⁾. It was applied by VAN DER HELD and VAN DRUNEN²⁰⁾ for measurements of the thermal conductivity of liquids. These authors elaborated the theory of the method as well. The principal advantages in using this method with soils are: a) The

*) Most of the results of this chapter were published previously by the author^{46,47)}.

moisture transport during the experiments is very small; b) The method can be applied in the field with little disturbance of the soil. The accuracy in the determinations of λ is 3 % in the laboratory. In the field this accuracy is about 5 %, except in cases where the measurements are influenced by large air voids, such as worm holes or cracks in the soil.

Results of laboratory measurements on sand at different moisture contents and temperatures are represented in fig. 8. Figures 10 and 11 contain results of field measurements at four depths in a clay soil cropped with grass. The latter figure also contains results of measurements in bare sand at a depth of 4 cm.

In chapter IV the results of chapters I and II are used for a theoretical computation of the thermal conductivity of soils. The theoretical value is obtained from the values of the conductivities and the volume fractions of the solid materials, the water and the air in the soil. The computed values are compared with experimental results of KERSTEN²⁴⁾, SMITH^{38,40)} and ourselves (cf. figures 12, 13, 16, 17 and 18 and Tables X, XI and XII). The agreement between theoretical and experimental values is generally better than 10 %, except at low moisture contents where these values differ by about 20 to 30 %. By making use of additional information, deduced from a few (e.g. 4) experimental determinations of λ at different moisture contents, the accuracy of the computed values can be improved to about 5 %.

LITERATUUROPGAVE

1. ALBRECHT, F.; *Met. Zs.* **49**, 294-299 (1932).
2. —; *Arch. für Met., Geophys. und Bioklim. Serie B* **1**, 149-150 (1949).
3. BAAREN, F. A. VAN; Het voorkomen en de betekenis van kali-houdende mineralen in Nederlandse gronden, H. VEENMAN EN ZN, Wageningen, 1934, p. 70.
4. BARTENS, K.; *Forschung* **7**, 174-176 (1936).
5. BECKER, R.; *Theorie der Elektrizität II*, B. G. TEUBNER, Leipzig, 1933, p. 120-124.
6. BÖTTCHER, C. J. F.; *Rec. Trav. Chim.* **64**, 47-51 (1945).
7. BRACHT, J.; *Veröff. des Geophys. Inst. der Univ. Leipzig, Zweite Serie* **14**, Heft 3 (1949).
8. BRUGGEMAN, D. A. G.; *Ann. der Phys. V*, **24**, 636-679 (1935).
9. BURGER, H. C.; *Phys. Zs.* **20**, 73-76 (1915).
10. CARSLAW, H. S. and JAEGER, J. C.; *Conduction of heat in solids*, Oxford, 1947.
11. CHUDNOWSKI, A. F.; *Proc. Leningrad Acad. of Agric. Sc. of USSR*, 1946, p. 38-43.
12. DORSSSEN, J. C. VAN; Rapport no. 7 Nijverheidsorganisatie FNO (1949).
13. ERRERA, J.; *Compt. Rend.* **184**, 455-458 (1927).
14. EUCKEN, A.; *VDI Forschungsheft* 353 (1932).
15. FRANSSILA, M.; *Mitt. der Mitt. Zentralanstalt Helsinki*, Nr. 20 (1936).
16. GEHRCKE, E.; *Ann. der Phys. IV*, **2**, 102-114 (1900).
17. GEMANT, A.; *J. of Appl. Phys.* **21**, 750-752 (1950).
18. HAINES, W. B.; *J. of Agric. Sc.* **20**, 97-116 (1930).
19. HELD, E. M. F. VAN DER; *Vacantieleergang Verwarmingstechniek 1939*, p. 115-136.
20. HELD, E. M. F. VAN DER and DRUNEN, F. G. VAN; *Physica* **15**, 865-881 (1949).
21. HERZFELD, K. F.; in *MÜLLER-POUILLET'S Lehrbuch der Physik III*, F. VIEWEG UND SOHN, Braunschweig, 1925, p. 94-96.
22. JAKOB, M.; *Heat transfer I*, JOHN WILEY AND SONS, New York, 1949, p. 89.
23. KANNULUIK, W. G. and MARTIN, L. H.; *Proc. Roy. Soc. A* **141**, 144-158 (1933).
24. KERSTEN, M. S.; *Bull. of the Univ. of Minnesota Inst. of Techn., Eng. Exp. Stat. Bull.* **28** (1949).
25. KLING, G.; *Forschung* **9**, 28-34 (1938).
26. KRISCHER, O. and ROHNALTER, H.; *VDI Forschungsheft* 402 (1940).
27. LASAREFF, P.; *Ann. der Phys. IV*, **37**, 233-246 (1912).
28. MCADAMS, W. H.; *Heat transmission*, MCGRAW HILL, New York, 1942.
29. MAXWELL, C.; *Treatise on electricity and magnetism I*, Oxford, 1873, p. 365.
30. OLLENDORFF, F.; *Arch. für Elektrotechn.* **25**, 436-447 (1931).
31. PATTEN, H. E.; *Heat transfer in soils*, Bur. of Soils Bull. 59 (1909).
32. PENMAN, H. L.; *J. of Agric. Sc.* **30**, 437-462 en 570-581 (1940).
33. POLDER, D. and SANTEN, J. H. VAN; *Physica* **12**, 257-271 (1946).
34. PRINS, J. A., SCHENK, J. and SCHRAM, A. J. G. L.; *Physica* **16**, 379-380 (1950).
35. RAYLEIGH, W. R.; *Phil. Mag. V*, **34**, 481-502 (1892).
36. SCHUMANN, T. E. W. and VOSS, V.; *Fuel* **13**, 249-256 (1934).
37. SKEIB, G.; *Zs. für Met.* **4**, 32-39 (1950).
38. SMITH, W. O. and BYERS, H. G.; *Proc. Soil Sc. Soc. Am.* **3**, 13-19 (1938).
39. SMITH, W. O.; *Proc. Soil Sc. Soc. Am.* **4**, 72-74 (1939).
40. —; *Soil Sc.* **53**, 435-459 (1942).
- *41. SMOLUCHOWSKI, M.; *Ann. Akad. der Wiss. Krakau A* **5**, 129 (1910).
42. SMYTHE, W. R.; *Static and dynamic electricity*, MCGRAW HILL, New York, 1950, p. 233.
- *43. STÅLHANE and PYK; *Teknisk Tidskrift* (1931).
44. STÖCKER, E.; *Zs. für Phys.* **2**, 236-243 (1920).
45. VERSCHOOR, H. and SCHUIT, G. C. A.; *Appl. Sc. Res. A* **2**, 97-119 (1950).
46. VRIES, D. A. DE; *Trans. 4th Int. Congr. of Soil Sc. II*, 38-41 (1950).
47. —; *Trans. 4th Int. Congr. of Soil Sc. II*, 41-43 (1950).
48. WADDAMS, A. L.; *J. Soc. Chem. Ind.* **63**, 337-340 (1944).
49. WEISHAUPF, J.; *Forschung* **11**, 20-35 (1940).
- *50. WIENER, O.; *Abh. der Leipziger Akad.* **32**, 509 (1912).
51. WILHELM, R. H., JOHNSON, W. C., WYNKOOP, R. and COLLIER, D. W.; *Chem. Engn. Progr.* **44**, 105-116 (1948).
52. ZUNKER, F.; *Handbuch der Bodenlehre VI*, J. SPRINGER, Berlin, 1930, p. 203-205.

* Niet in het origineel gelezen; de verwijzingen zijn aan andere auteurs ontleend.

NOTATIE EN EENHEDEN

Symbol	Omschrijving	Eenheid
a	temperatuurvereffeningscoëfficiënt	cm ² /sec
c	soortelijke warmte *)	cal/g
d	soortelijke massa vaste stof	g/cm ³
D	diëlectrische verplaatsing *)	e.s.e.
D	diffusiecoëfficiënt *)	cm ² /sec
e	constante van Stefan-Boltzmann	cal/cm ² sec (°K) ⁴
E	electriche veldsterkte	e.s.e.
E_p	sterkte van het inwendige veld	e.s.e.
g_a, g_b, g_c	depolariserende factor van een ellipsoïde in de richting van a -, b -, c -as	-
h	hoogte (zie fig. 3)	cm
k_i	\bar{E}_i/\bar{E}_0 *)	-
K_i	\bar{E}_i/\bar{E} *)	-
L	verdampingswarmte van water	cal/g
n	verhouding tussen de ongelijke assen van een omwentelingsellipsoïde	-
N	aantal soorten korrels in een granulaire stof	-
p	gasdruk	mm Hg
P	polarisatie	e.s.e.
q	warmteproductie in verhitter	cal/cm sec
q_s	warmtestroomdichtheid t.g.v. straling	cal/cm ² sec
$q^{(v)}$	stroomdichtheid van de waterdampbeweging	g/cm ² sec
r, R	radius	cm
t	tijd	sec
T	absolute temperatuur	°K
v	vochtgehalte	g/cm ³
V	volume	cm ³
x_i	volume fractie *)	-
γ_w	soortelijke massa van waterdamp bij 1 mm Hg	g/cm ³ mm Hg
δ	temperatuursprong-coëfficiënt	cm
ϵ	diëlectrische constante *)	-
ζ	r/R (zie fig. 3)	-
Θ	temperatuurstijging	°C
λ	coëfficiënt van het warmtegeleidingsvermogen *)	cal/cm sec °C
$\lambda_l^{(v)}$	schijnbaar warmtegeleidingsvermogen t.g.v. warmtetransport door dampdiffusie	cal/cm sec °C
λ_r	warmtegeleidingsvermogen van granulaire stof met gasvormig medium bij gasdruk nul	cal/cm sec °C
π	partiële spanning van waterdamp	mm Hg
π_s	verzadigingsspanning van waterdamp	mm Hg
ρ	soortelijke massa *)	g/cm ³
σ	electriche geleidingsvermogen *)	Ω^{-1} cm ⁻¹
φ	vochtgehalte in gewichtsprocenten van het droog gewicht	-

*) Bij deze grootheden heeft de index 0 betrekking op het medium in een granulaire stof, de index i (1, 2, etc.) op de verschillende soorten insluitels, de indices l, w en v hebben resp. betrekking op lucht, water en vaste stof.

Een streep boven een symbool geeft een gemiddelde waarde aan.

The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem. It is shown that the problem is equivalent to the problem of finding a function $f(x)$ which satisfies the conditions

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + g(x)$$

where $g(x)$ is a given function. It is shown that the function $f(x)$ is uniquely determined by the conditions

$$f(0) = g(0)$$

and

$$f'(x) = f(x) + g'(x)$$

The second part of the paper is devoted to a detailed study of the properties of the function $f(x)$. It is shown that the function $f(x)$ is analytic in the region $|x| < \infty$. It is also shown that the function $f(x)$ is bounded in the region $|x| < \infty$.

The third part of the paper is devoted to a study of the asymptotic behavior of the function $f(x)$ as $|x| \rightarrow \infty$. It is shown that the function $f(x)$ has the asymptotic expansion

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

as $|x| \rightarrow \infty$.

The fourth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| > \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is bounded in the region $|x| > \infty$.

The fifth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| < \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is analytic in the region $|x| < \infty$.

The sixth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| > \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is bounded in the region $|x| > \infty$.

The seventh part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| < \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is analytic in the region $|x| < \infty$.

The eighth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| > \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is bounded in the region $|x| > \infty$.

The ninth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| < \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is analytic in the region $|x| < \infty$.

The tenth part of the paper is devoted to a study of the properties of the function $f(x)$ in the region $|x| > \infty$. It is shown that the function $f(x)$ is bounded in the region $|x| > \infty$.

