OVER DE

TORSIE

VAN EEN

ELLIPTISCHEN CYLINDER.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

DOOR

A. EECEN.

TE LEIDEN, BIJ J. VAN DER SCHOUW.

1874.

OVER DE

TORSIE

VAN EEN

ELLIPTISCHEN CYLINDER.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN A. W. SIJTHOFF.

OVER DE

TORSIE

VAN EEN

ELLIPTISCHEN CYLINDER.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. ADRIANUS HEYNSIUS,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

OP ZATURDAG 10 OKTOBER 1874, DES NAMIDDAGS TEN 2 URE,

DOOR

ADRIANUS EECEN,

GEBOREN TE OUDKARSPEL.

TE LEIDEN, BIJ J. VAN DER SCHOUW.

1874.

AAN MIJNE MOEDER

Bij het verlaten van de Academie is het mij een aangename plicht mijn innigen dank te betuigen aan U, Hooggeleerde HH. Professoren der Philosophische faculteit, inzonderheid aan U, Hooggeleerde van Geer, Hooggeachte Promotor, voor het ontvangen onderwijs en de blijken van welwillendheid, die ik van U heb mogen ontvangen.

U, mijne vrienden, dank ik voor de ondervonden vriendschap, en blijf mij met bescheiden vrijmoedigheid in uwe genegenheid aanbevelen.

AFDEELING I.

Algemeene Beschouwingen.

§ 1. VOORAFGAANDE BEPALINGEN.

Ieder lichaam bestaat uit kleinste deeltjes. Deze kleinste deeltjes of moleculen vormen geen continue geheel, maar zijn op eenigen afstand van elkander gelegen. Men moet aannemen, dat hunne afmetingen in alle richtingen zeer klein zijn met betrekking tot hun onderlingen afstand, en dat een zeer klein volumen van een lichaam nog een zeer groot aantal van die kleinste deeltjes bevat. Dit zijn onderstellingen overeenkomstig de natuur, en welke ook in de physika en chemie aangenomen worden.

Werken nu op zulk een stelsel stoffelijke punten, zooals men inderdaad een lichaam kan beschouwen, uitwendige krachten, dan zal onder haren invloed een vormverandering van het lichaam zich voordoen; welke echter wederom verdwijnen zal, zoodra die invloed ophoudt zich te doen gevoelen; altijd, wanneer de krachten in grootte en duur van werking niet zekere grenzen hebben overschreden. Deze eigenschap, waardoor het lichaam in staat gesteld wordt, zijn vorigen vorm te hernemen bij verwijdering der uitwendige invloeden, noemt men, zooals bekend is, *elastici-*

teit. Zij heeft een grens voor verschillende lichamen veranderlijk, echter voor geen nul. Ieder lichaam is dus elastisch. De grootste kracht een oogenblik werkende, en geen voortdurende vormverandering te weeg brengende, dient tot maat voor deze grens.

Wij beschouwen hier eenig en alleen zulke lichamen, waarbij die grens niet spoedig bereikt wordt; waarbij dus de vormverandering in zekere mate evenredig is aan de krachten, welke op het lichaam werken; dus lichamen, welke binnen die grenzen volkomen elastisch zijn.

Bestaat een lichaam uit gelijke en gelijkvormige moleculen op gelijken afstand van elkander gelegen, van dezelfde physische eigenschappen en dezelfde chemische samenstelling, dan noemt men zulk een lichaam *homogeen.* Werken op zulk een lichaam geen uitwendige krachten, of alleen zulke, welke aan alle moleculen dezelfde verplaatsing geven, dan zegt Lamé, dat dit lichaam zich bevindt in een toestand van *absolute homogeniteit.* Poisson noemt dit, zich bevinden in een *natuurlijken toestand.* Een lichaam vallende in het luchtledige verkeert in zulk een staat. Wel is waar werkt er de zwaartekracht op, doch daar deze aan ieder molecul dezelfde verplaatsing geeft, zoo zal in hunnen onderlingen afstand geen verandering gekomen zijn; er bestaat dus volstrekt geen oorzaak, dat de elasticiteit haar invloed zou doen gevoelen. Steunt het lichaam echter tegen een onverplaatsbaar vlak, dan moet de toestand een andere zijn. De zwaartekracht zal elastische krachten te voorschijn roepen; de onderlinge afstand der verschillende lagen is niet overal meer dezelfde. In theorie bestaat deze afwijking, doch voor de praktijk is ze onmerkbaar, zoodat men bij tordeering of uitrekking van staven de zwaartekracht mag verwaarloozen, als van geen invloed voor de elastische krachten.

Is de groepeering der moleculen in een lichaam zoodanig, dat de uitwerking der elasticiteit in alle richtingen dezelfde is, dus onafhankelijk van eenige as van symmetrie, dan noemt men zulk een lichaam homogeen en van *constante elasticiteit*. Deze uitdrukking vindt men bij Lamé, terwijl Cauchy zulk een lichaam *isitroop* noemt.

Is nu een lichaam onttrokken aan elken vreemden invloed, is het dus in den toestand van absolute homogeniteit, dan zullen de moleculen onderling op een bepaalden afstand van elkander geplaatst zijn, welke karakterastiek is voor ieder in 't bijzonder. Inwendig zijn dus geen andere krachten voorhanden dan dezulke, welke onderling in evenwicht zijn. Deze toestand zal echter een geheel andere worden bij den invloed van vreemde krachten, waardoor de deeltjes gedwongen worden tot onderlinge afstandsverandering. Laten we dit duidelijk maken door een eenvoudig voorbeeld. Nemen we daartoe een rechthoekig prisma, steunende met zijn grondvlak tegen een onverplaatsbaar vlak, en op wiens bovenvlak eene kracht, een druk werkt, gelijkmatig verdeeld over dit geheele vlak. De deeltjes in de bovenste laag ontvangen direkt den invloed van de drukking, en brengen hem over op die van de tweede laag; deze op hunne beurt tot die van de derde, en dit gaat zoo door, totdat hij eindelijk vernietigd wordt door het vlak, waarop het prisma geplaatst is. Na eenigen tijd zal er wederom evenwicht zijn tusschen de verschillende lagen. Vroeger, evenwicht zonder, en nu, met uitwendige krachten; in het lichaam zelf moeten dus krachten geboren zijn, afhankelijk van de drukking; krachten, ontstaan door de verandering in afstand, in ons geval, door eene vermindering. Deze krachten nu zijn de *elastische krachten.*

Tusschen de moleculen zijn krachten, zoogenaamde moleculaire krachten, werkzaam, wier wetten van werking bijna geheel en al onbekend zijn. Zijn μ en μ' de onbekende massae van twee kleinste deeltjes en r hun onderlinge afstand, dan zal men de kracht, welke tusschen hen werkzaam is, kunnen voorstellen door $\mu\,\mu'\,\mathrm{F}\,(r)$. Van deze uitdrukking weet men met zekerheid te zeggen, dat ze nul wordt, wanneer r een zekere bepaalde waarde krijgt, daar alle cohesie ophoudt bij afstanden, welke waarneembaar zijn.

Heeft nu het lichaam door uitwendige krachten een zeer zwakke vormverandering ondergaan, dan zal r veranderen in r'. De uitdrukking voor de elastische kracht, werkzaam tusschen twee moleculen μ en μ', zal dus $\mu\,\mu'\,\mathrm{F}\,(r')$ worden. Zij is voor vereenvoudiging vatbaar, wanneer men alleen zulke vormveranderingen beschouwt, waarbij *de onderlinge afstandsverandering zeer klein is met betrekking tot den oorspronkelijken afstand der moleculen.*

Zijn M en M′ de oorspronkelijke plaats van twee moleculen, en m on m' die, na de inwerking van uitwendige krachten. Zij de waarde der onderlinge afstandsverandering voorgesteld door $\Delta\,r$, dan heeft men $m\,m' - \mathrm{M\,M'}$ of $r' - r = \Delta\,r$. Trekt men nu $m\,p$ evenwijdig en gelijk aan M M′, dan heeft men $\Delta\,r = m\,m' - m\,p$. De verplaatsingen M m en M′ m', dus ook $p\,m'$ worden ondersteld zeer klein te zijn met betrekking tot M M′ of r. Laat men uit p op $m\,m'$ de loodlijn $p\,p'$ neer, dan heeft men $m\,p' = m\,p \cos p\,m\,m' = m\,p \cos\,\alpha$. De grootheden $m\,p$ en $m\,m'$ zijn van dezelfde soort, $p\,m'$ echter eene met betrekking tot de vorige zeer klein; de hoek α is dus ook zeer klein. Men heeft dus $m\,p' = m\,p\,\cos\,\alpha = m\,p\,\left(1 - \frac{\alpha^2}{1\,.\,2}\right)$, waaruit $m\,p = m\,p'\left(1 + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2}\right)$. Deze waarde overgebracht in $\triangle\,r$ geeft $\triangle\,r = m\,m' - m\,p' - m\,p'\,\frac{\alpha^2}{1\,.\,2} = m'\,p' - m\,p'\,\frac{\alpha^2}{1\,.\,2}$. Nu is $\triangle\,r$ zeer klein met betrekking tot $m\,p'$, de grootheid α daarentegen is van dezelfde natuur; verwaarloost men dus de uitdrukking $m\,p'\,\frac{\alpha^2}{1\,.\,2}$, dan zal men slechts een zeer kleine grootheid met betrekking tot $\triangle\,r$ verwaarloozen, hetgeen geoorloofd is. Men heeft dus: $\triangle\,r = m'\,p' =$ de projectie van $m'\,p$ op de richting van $m\,m'$ of op die van M M', daar deze richtingen slechts een zeer klein verschil α hebben; $\triangle\,r$ heeft het teeken $+$, wanneer de nieuwe afstand der moleculen grooter is dan de oorspronkelijke; en het teeken $-$, in het tegenovergestelde geval. Deze stelling is van 't grootste gewicht voor volgende beschouwingen.

De bovengegeven uitdrukking voor de elastische kracht wordt nu: $\mu\,\mu'\,\mathrm{F}\,(r + \triangle\,r)$, waarin $\triangle\,r$ zeer klein is met betrekking tot r. Een onmiddelijk gevolg hiervan is, dat de niet lineaire termen van $\triangle\,r$ verwaarloosd mogen worden tegen de lineaire; ook kan er geen constante in voorkomen, en ook geen term onafhankelijk van $\triangle\,r$, daar de geheele uitdrukking voor $\triangle\,r = 0$ verdwijnen moet. Zij wordt dus $\mu\,\mu'\,\triangle\,r\,\mathrm{F}\,(r)$. Wij hebben ondersteld, zooals altijd gedaan wordt, dat deze functie F eene algebraïsche functie is; vandaar het geoorloofd zijn van de zooeven uitgevoerde herleiding.

Zijn A en B twee lichamen van willekeurigen vorm, welke ondersteld worden volkomen vast te zijn; lichamen, waarbij dus de moleculen tegen elkander aanliggen, en wier elementen volgens een zekere wet van aantrekking of afstooting op elkander werken. Het al of niet bestaan van dit soort van lichamen is volstrekt van geen invloed op de volgende beschouwingen. Is de afstand, waarop ze van elkander geplaatst zijn niet zeer groot of m. a. w. te vergelijken met hunne afmetingen in verschillende richtingen, dan zal de totale werking van deze beide lichamen op elkander altijd voorgesteld worden door een *resulteerende kracht* en een *resulteerend koppel.* In geen geval mag dit laatste buiten beschouwing gelaten worden. Laat men nu deze beide lichamen in grootte afnemen, echter zoodanig, dat met de afname in grootte ook hun onderlinge afstand evenredig afneemt, dan zal men ten laatste verkrijgen een stelsel van twee op elkander werkende moleculen, die werkelijk bestaan. De resulteerende kracht en het resulteerend koppel nemen beide af in grootte, echter niet zoo, dat men gerechtigd is dit laatste te verwaarloozen. In dit geval is het dus bepaald eene onjuistheid de werking tusschen twee moleculen voor te stellen door een eenige kracht, werkende in de richting van de verbindingslijn hunner zwaartepunten.

De zaak wordt echter een geheel andere, wanneer men de beide lichamen A en B zoodanig in grootte laat afnemen, dat hunne afmetingen ten laatste zeer klein worden met betrekking tot hunnen onderlingen afstand. In dit geval wordt het koppel nul. De resulteerende kracht blijft alleen over.

Deze laatste beschouwing komt geheel overeen met die, welke wij gevolgd hebben. Wij hebben n. l. ondersteld, dat de moleculen onderling op afstanden geplaatst zijn, welke zeer groot zijn met betrekking tot hunne afmetingen; vandaar, dat we gerechtigd waren, het resulteerend koppel te verwaarloozen, en de resulteerende kracht $\mu \mu' F(r)$ alleen te behouden.

Lamé, Clebsch, de Saint-Vénant en Riemann zwijgen over deze questie. Poisson [1]) zegt hieromtrent ongeveer het volgende:

De totale werking tusschen twee moleculen is gelijk aan die van een resulteerende kracht en een resulteerend koppel. Volgens de onderstelling, dat in een zeer klein volumen van een lichaam nog een zeer groot aantal moleculen voorhanden is, welke zonder regelmaat daarin verspreid liggen, zoo zal bij het opmaken van de totale werking op een vlak-element ϖ, de verschillende resulteerende koppels zich opheffen, daar bij elk koppel vallende rechts, een, vallende links, voorhanden zal zijn. Het verdwijnen van het koppel bij de totaal werking noemt Poissson „une consequence nécessaire de la loi des grands nombres." Wij hebben echter ondersteld, dat de moleculen niet zonder regelmaat, doch integendeel zeer regelmatig verspreid liggen, en wel overal op gelijke afstanden van elkander. De reden, waarom bij Poisson het koppel verdwijnt, kan hier dus niet van kracht zijn. Het verdwijnt bij ons alleen daarom, dat de moleculen op *afstanden gelegen zijn, die zeer groot zijn met betrekking tot hunne afmetingen.*

Men komt tot hetzelfde resultaat, wanneer men aanneemt, dat de moleculen bolvormig zijn. Bij deze onderstelling mag het aantal der moleculen, dat zich bevindt in een zeer klein volumen, groot of klein zijn, hunne afmetingen in verschillende richtingen al of niet te vergelijken met den afstand, waarop ze onderling van elkander verwijderd liggen, altijd zal het koppel verdwijnen, daar de werking tusschen twee bolvormige lichamen zich altijd herleidt tot een resulteerende kracht, werkende in de richting van de verbindingslijn hunner zwaartepunten.

---

[1]) Mém. de l'Académie, T. XVIII. Paris 1842.

Poisson schrijft alleen aan de vloeistof — moleculen een bolvormige gedaante toe, doch verwerpt haar bepaald voor die van andere lichamen. Dalton is echter een tegenovergesteld gevoelen toegedaan, en neemt den kogelvorm voor elk soort van molecul aan. Deze laatste hypothese is ook in overeenstemming met die omtrent de constitutie van den ether en de verspreiding van de warmte in de lichamen. Men neemt toch aan, dat de ether en de warmte de atomen omringen in sphaerische schalen, waarvan de densiteit afneemt van uit het middelpunt der atomen.

---

§ 2. BEPALING VAN DE ELASTISCHE KRACHT DOOR MIDDEL VAN DE VERPLAATSINGEN.

De weg, dien men volgen moet om dit doel te bereiken, is reeds boven aangewezen. Daar hebben we gezien, dat de elastische krachten zeer innig samenhangen met de onderlinge afstands-veranderingen der moleculen.

Zij M een molecul van een elastisch lichaam, dat door den invloed van uitwendige krachten een zeer zwakke vorm-verandering ondergaan heeft, en gelegen op een meetbaren afstand van de oppervlakte. Beschrijf om dit punt als middelpunt een bol met een straal r, voor welke waarde $F(r)$ nul wordt, dus de zoogenaamde werkingspheer. Breng vervolgens door M een snijvlak L N, dat den bol in twee halve bollen S A en S B verdeelt. Neem op dit vlak een oppervlak-element ϖ, zoodanig, dat M zich bevindt in zijn middelpunt, en beschrijf eindelijk op dit element een rechthoekigen cylinder in den halven bol

S B. Nu zullen de verschillende moleculen, die zich in S A bevinden, volgens de algemeene wet $\mu \mu' \Delta r F(r)$ op die van den cylinder werken. De resultante van al deze krachten is de elastische kracht ϖ A werkende in het punt M op het vlakelement ϖ. Zij kan met betrekking tot ϖ verschillende richtingen hebben, afhangende van de wijze, waarop de vorm-verandering heeft plaats gegrepen. Is zij loodrecht op ϖ en gericht naar S A, dan stelt ze een trekkracht, echter gericht naar S B een drukkracht voor. Valt eindelijk hare richting samen met die van ϖ, dan is zij een tangentieele kracht.

De moleculen in S B hebben eene analoge werking op die, vervat in den cylinder, opgericht op ϖ en vallende in den halven bol S A. Zij hare resultante ϖ A'. Is er evenwicht, dan moet klaarblijkelijk $\varpi A = \varpi A'$ zijn. Zij zijn altijd van dezelfde natuur d. w. z. ze zijn beide of trek- of druk- of tangentieele krachten. Ze veranderen echter met de coördinaten van het punt M, ja zelfs in dit punt zijn ze veranderlijk met de hoeken φ en ψ, die de richting van het vlak-element ϖ bepalen. In 't algemeen is dus de elastische kracht een functie van x, y, z, φ en ψ, en zoo er beweging is ook van t.

Zijn nu de oorspronkelijke coördinaten van M (zie vorige §) x, y, z, en de nieuwe $x + u$, $y + v$, $z + w$. De grootheden u, v, w zijn dus de projectie van M m op de coördinaten-assen. Ze zijn veranderlijk op hetzelfde oogenblik met de coördinaten van het stoffelijke punt, dat men beschouwt, en voor hetzelfde punt met den tijd, wanneer het lichaam vibreert; u, v, w zijn dus functies van vier veranderlijken x, y, z, t. Zijn verder de coördinaten van een willekeurig punt M' in den halven bol S A : $x + h$, $y + k$, $z + l$ vóór de deformatie; en na de inwerking van uitwendige krachten, $x + h + u'$, $y + k + v'$, $z + l + w'$. Hier stellen u', v', w' de projecties voor van $M' m'$. Men zal nu de waarden van u', v', w' verkrijgen, door x, y, z in u, v, w te vervangen respectievelijk door $x + h$, $y + k$, $z + l$. Het theorema van Taylor geeft:

$$
\begin{aligned}
u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l, \\
v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \frac{\partial v}{\partial z} l, \quad \ldots\ldots \quad (1) \\
w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{\partial w}{\partial y} k + \frac{\partial w}{\partial z} l,
\end{aligned}
$$

wanneer men onderstelt, dat de projecties h, k, l zoo klein zijn, dat men de termen mag verwaarloozen, welke haar product en hoogere machten bevatten. Dat dit hier geoorloofd is, ziet men dadelijk in, wanneer men bedenkt, dat de wederkeerige werking tusschen M en M′ alleen plaats grijpt voor afstanden r, die onmerkbaar zijn.

Het is duidelijk, dat $u' - u$, $v' - v$ en $w' - w$ de projecties zijn van $p\, m'$ op de coördinaten-assen. Vermenigvuldigt men nu deze uitdrukkingen respectievelijk met de *cos* der hoeken, welke M M′ met die zelfde assen maakt, dan verkrijgt men de waarde der verplaatsing $\Delta\, r$. Dus

$$
\begin{aligned}
\Delta\, r &= (u' - u)\frac{h}{r} + (v' - v)\frac{k}{r} + (w' - w)\frac{l}{r} \\
&= \frac{1}{r}\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} h^2 + \frac{\partial v}{\partial y} k^2 + \frac{\partial w}{\partial z} l^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) k\, l \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) l\, h + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) h\, k. \end{aligned}\right. \quad (2)
\end{aligned}
$$

Zij de hoek, welken de richting van M M′ maakt met het $x\, y$-vlak, de z. g. breedte φ en die met het $x\, z$-vlak, de lengte ψ, dan heeft men: $h = r \cos\varphi \cos\psi$, $k = r \cos\varphi \sin\psi$, $l = r \sin\varphi$. Deze waarden overgebracht in de voorgaande formule, geeft:

$$\Delta r = r \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2\varphi \cos^2\psi + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\partial w}{\partial z} \sin^2\varphi \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos\varphi \sin\varphi \sin\psi + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos\varphi \sin\varphi \cos\psi \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos^2\varphi \cos\psi \sin\psi. \end{array} \right. \quad (3)$$

Hierin is nu Δr de verplaatsing voor den afstand r; dus wordt die voor de eenheid van afstand, de lineaire, voorgesteld door $\frac{\Delta r}{r}$. In de richting der x-as, of voor $\varphi = 0$, $\psi = 0$, wordt deze uitdrukking $\frac{\partial u}{\partial x}$; in die der y-as, of voor $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$; en in die der z-as of voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$. De inhoud van het elementair-prisma werd vóór de verplaatsing voorgesteld door $dx\,dy\,dz$, na de verplaatsing door

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz;$$

voor de lineaire cubieke uitzetting θ verkrijgt men dus:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

daar de niet lineaire termen verwaarloosd mogen worden tegen de lineaire.

Deze formule vindt men in de meeste leerboeken der physika. Zij geldt echter alleen bij zulke lichamen, waarbij de onderlinge verplaatsingen zeer klein zijn met betrekking tot den oorspronkelijken afstand. Is dit niet het geval, mag men de niet lineaire termen niet verwaarloozen tegen de lineaire, dan is zij ook niet meer geldig.

Laat men het punt M′ verschillende plaatsen innemen in den halven bol S A of m. a. w. beschouwt men het molecul M in betrekking tot ieder molecul M′ gelegen in dien halven bol, dan zal $\Delta\, r$ veranderen met r, φ en ψ; wat $\dfrac{\partial\,(u,\ v,\ w)}{\partial\,(x,\ y,\ z)}$ aangaat, zal zij echter wezenlijk onveranderd blijven.

Zien we nu, wat die uitdrukking wordt, wanneer men een willekeurig molecul beschouwt gelegen in den elementair-cylinder en zich bevindende in zijn as. Zij M_1 zulk een stoffelijk punt op een afstand f van M gelegen, en de *cos* der hoeken, die de normaal van het element ϖ in M met de assen maakt m, n, p, dan zijn de coördinaten van $M_1 : x - m\,f,\ y - n\,f$ en $z - p\,f$. Trek $M_1\,M'_1$ evenwijdig en gelijk aan M M′, dan zijn de coördinaten van $M'_1 : x - m\,f + h,\ y - n\,f + k$ en $z - p\,f + l$. Zij de verplaatsing van M_1, u_1, v_1, w_1 en die van M'_1, u'_1, v'_1, w'_1, dan heeft men:

$$u_1 = u - \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\, m\, f + \frac{\partial\, u}{\partial\, y}\, n\, f + \frac{\partial\, u}{\partial\, z}\, p\, f\right),$$

en

$$u'_1 = u + \frac{\partial\, u}{\partial\, x}\,(h - m\,f) + \frac{\partial\, u}{\partial\, y}\,(k - n\,f) + \frac{\partial\, u}{\partial\, z}\,(l - p\,f),$$

waaruit

$$u'_1 - u_1 = \frac{\partial\, u}{\partial\, x}\, h + \frac{\partial\, u}{\partial\, y}\, k + \frac{\partial\, u}{\partial\, z}\, l = u' - u.$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$v'_1 - v_1 = v' - v, \text{ en } w'_1 - w_1 = w' - w.$$

Stellen we $M_1\,M'_1$ door r_1 voor, dan heeft men r_1 gelijk en evenwijdig aan r of M M′. Zoekt men nu de uitdrukking voor $\Delta\, r_1$, d. i. de onderlinge afstands-verandering tusschen M_1 en M'_1, dan zal men vinden $\Delta\, r_1 = \Delta\, r$.

De elastische kracht werkzaam tusschen twee moleculen wordt voorgesteld door $\mu\,\mu'\,\triangle\,r\,\mathrm{F}\,(r)$. Nu heeft $\triangle\,r$ voor het punt M denzelfden vorm als voor M_1, de uitdrukkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

zijn dus wezenlijk karaktarastiek voor de elastische kracht met betrekking tot het molecul M.

Daar deze uitdrukkingen in 't vervolg veelvuldig voorkomen, zoo zullen we de volgende bekortingen invoeren en stellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= d_x, & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} &= e_{yz}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= d_y, & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} &= e_{zx}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= d_z, & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} &= e_{xy}, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Handel nu op dezelfde wijze met ieder ander molecul M begrepen in het vlak-element ϖ, hetwelk zoo klein ondersteld wordt, dat de elastische kracht geen merkbare verandering ondergaat. Zoek de resultante van al die krachten, en deel vervolgens door den inhoud van het vlak-element, dan zal men de resultante verkrijgen van de elastische krachten, werkende op de eenheid van oppervlak in M op het element ϖ. Ontbindt men haar volgens de drie assen, dan kan ieder component voorgesteld worden onder den volgenden vorm:

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\,d_x + \mathrm{B}\,d_y + \mathrm{C}\,d_z + \mathrm{D}\,e_{yz} + \mathrm{E}\,e_{zx} + \mathrm{F}\,e_{xy}. \quad . \ (6)$$

Zijn de conponenten der elastische kracht wanneer ϖ loodrecht staat

op de x-as: X_x, X_y, X_z,

op de y-as: Y_x, Y_y, Y_z,

op de z-as: Z_x, Z_y, Z_z, dan zullen we naderhand aantoonen, dat van deze negen grootheden zes twee aan twee gelijk zijn, n. l. $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$ (Zie § 3). Stellen we nu de ongelijke of normale componenten voor door de letter N, en de gelijke of tangentiëele door T, voorzien van de indices 1, 2 of 3, al naarmate ze betrekking hebben op het element ϖ in den eersten, tweeden of derden stand, dan kunnen zij algemeen onder den volgenden vorm voorgesteld worden:

$$\left.\begin{aligned} N_i &= A_i\, d_x + B_i\, d_y + C_i\, d_z + D_i\, e_{yz} + E_i\, e_{zx} + F_i\, e_{xy} \\ T_i &= A'_i\, d_x + B'_i\, d_y + C'_i\, d_z + D'_i\, e_{yz} + E'_i\, e_{zx} + F'_i\, e_{xy} \end{aligned}\right\} . \quad (7)$$

Is het lichaam homogeen bij constante richting der coördinaat-assen, dan kunnen bovengenoemde N_i, T_i alleen maar veranderen met de coördinaten van het punt M, daar de moleculen om ieder punt volkomen gelijk gegroepeerd zijn. In de coefficiënten A_i, B_i enz. komen echter die coördinaten niet voor; zij hebben voor ieder punt dezelfde waarde, en zijn dus constant. Bestaat deze homogeniteit onafhankelijk van de richting der coördinaat-assen, is het lichaam dus van een constante elasticiteit, dan kunnen deze uitdrukkingen zeer vereenvoudigd worden. Dit zullen we aantoonen in § 4. [1])

[1]) Lamé zegt: „deze formulen bestaan onafhankelijk van het aantal paren moleculen M_1 en M'_1, onafhankelijk van het al of niet gelijk zijn van μ en μ', en gelden dus algemeen voor elk lichaam, homogeen zoowel als heterogeen." Mijns inziens is deze conclusie niet juist, wat het bestaan van deze formulen aangaat voor een heterogeen lichaam, of het zou geoorloofd moeten zijn een heterogeen lichaam als homogeen te beschouwen in den omtrek van M, op afstanden, die den straal van den werkingssspheer niet overschrijden.

§ 3. EVENWICHT VAN EEN LICHAAM ONDER DEN INVLOED VAN UITWENDIGE KRACHTEN.

De krachten, wier invloed zich op een lichaam doet gevoelen, kunnen deels op de oppervlakte, deels, zooals de zwaartekracht, op de stof zelf werken. Beide kunnen veranderlijk zijn, wat richting en grootte aangaat, van 't eene punt van 't lichaam tot het andere. De eerste zijn echter van de orde van 't oppervlak, de tweede van die van 't volumen.

Nemen we nu binnen in 't lichaam op een meetbaren afstand van het oppervlak een elementair-prisma, oorspronkelijk rechthoekig, wiens ribben evenwijdig zijn aan de assen van een rechthoekig coördinatenstelsel. Op dit prisma werken uitwendige krachten en op zijne zijvlakken elastische, ontstaan door de verplaatsing der moleculen onderling. Deze laatste zijn dus grootheden van de 2^{de} orde, terwijl de eerstgenoemde evenredig zijn aan 't volumen, dus van de 3^{de} orde. Hieruit volgt, dat die elastische krachten onderling in evenwicht zijn op oneindig kleine grootheden na; dat dus de elastische krachten werkende op de tegenovergestelde zijvlakken op oneindig kleine grootheden na, gelijk, evenwijdig en tegenovergesteld zijn; dat hunne verschillen dus te vergelijken zijn met de krachten, werkende op de stof van 't prisma. Inwendig is de continuïteit verzekerd, daar de elastische krachten van het eene punt tot het andere slechts grootheden verschillen van dezelfde orde als hun afstand. Deze laatste krachten zijn in 't algemeen niet loodrecht op de zijvlakken. Ontbinden wij ze volgens de richting der assen, met het middelpunt als aangrijpingspunt. (Zie vorige §.)

Zijn de coördinaten van het hoekpunt, dat zich het naast bij den oorsprong bevindt x, y, z; de zijvlakken, welke aan dit hoekpunt te samen komen A, B, C; en die aan het tegenovergestelde A′, B′, C′, dan kunnen de componenten der kracht, werkende

op A door: $X_x \, dy \, dz$, $X_y \, dy \, dz$, $X_z \, dy \, dz$,

op B door: $Y_x \, dz \, dx$, $Y_y \, dz \, dx$, $Y_z \, dz \, dx$,

op C door: $Z_x \, dx \, dy$, $Z_y \, dx \, dy$, $Z_z \, dx \, dy$,

voorgesteld worden. Hier stellen X_x, X_y, X_z enz. meetbare grootheden voor, werkende op de eenheid van oppervlakte. De beteekenis der letters en indices is duidelijk.

Nu zal men de componenten van de elastische krachten, werkende op de tegenovergestelde zijvlakken verkrijgen, door in laatstgenoemde uitdrukkingen x door $x + dx$, y door $y + dy$, z door $z + dz$ te vervangen. Men verkrijgt dan voor de componenten, werkende

$$\text{op A}': \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) dy \, dz, \quad \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} dx\right) dy \, dz,$$

$$\left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial x} dx\right) dy \, dz$$

$$\text{op B}': \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial y} dy\right) dz \, dx, \quad \left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y} dy\right) dz \, dx,$$

$$\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial y} dy\right) dz \, dx$$

$$\text{op C}': \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial z} dz\right) dx \, dy, \quad \left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial z} dz\right) dx \, dy,$$

$$\left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial z} dz\right) dx \, dy.$$

Zijn verder de componenten der krachten, werkende op het inwendige van 't prisma:

$$\varrho\, X_0\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho\, Y_0\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho\, Z_0\, dx\, dy\, dz$$

bij evenwicht. Is er beweging, dan sluiten deze X_0, Y_0, Z_0 nog in zich, zooals bekend is, de volgende uitdrukkingen:

$$-\frac{d^2 u}{d t^2}, \quad -\frac{d^2 v}{d t^2}, \quad -\frac{d^2 w}{d t^2}.$$

Nemen we nu aan, dat de krachten werkende op A, B, C, het negatieve teeken hebben, dus die op A′, B′, C′ het positieve. Al deze krachten moeten onderling in evenwicht zijn. Vormen we de zes vergelijkingen, welke dit evenwicht uitdrukken, dan zal men de drie eerste verkrijgen door op te merken, dat de som der componenten langs de assen nul moet zijn, dus

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_x}{\partial y}+\frac{\partial Z_x}{\partial z}+\varrho\, X_0=0,\\
&\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_y}{\partial z}+\varrho\, Y_0=0, \quad \ldots\ldots (8)\\
&\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho\, Z_0=0.
\end{aligned}$$

De drie andere verkrijgt men door uit te drukken, dat het prisma geen draaiing kan ondergaan om eenige as. De uitwendige krachten kunnen geen aanleiding geven tot eenig koppel, daar ze herleidbaar zijn tot eene resultante. Ook blijven buiten rekening de normale componenten X_x, Y_y, Z_z op de zijvlakken A, B en C en de tegenovergestelde op A′, B′, C′; alleen blijven de tangentieele over. Schrijft men nu de voorwaarde op, waarbij de koppels verdwijnen, dan verkrijgt men het volgend stel vergelijkingen:

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \quad \ldots\ldots (9)$$

Dit is gemakkelijk aan te toonen als volgt:

op het zijvlak A werkt $\quad -X_y\,dy\,dz,$

en op A′ $\quad +\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$

op B werkt $\quad -Y_x\,dz\,dx,$

en op B′ $\quad +\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial y}dy\right)dz\,dx.$

De uitdrukkingen $\frac{\partial X_y}{\partial x}dx$ en $\frac{\partial Y_x}{\partial y}dy$ mogen hier verwaarloosd worden. Men houdt dus over de krachten:

$$-X_y\,dy\,dz \text{ en } +X_y\,dy\,dz, \quad -Y_x\,dz\,dx \text{ en } +Y_x\,dz\,dx.$$

Deze vier krachten liggen in een en 't zelfde vlak gaande door het middelpunt van 't prisma, evenwijdig aan het $x\,y$-vlak. Haar koppels zijn met betrekking tot elkander, daar de arm van 't eerste dx, en van 't tweede dy is,

$$X_y\,dy\,dz\,.\,dx \quad \text{en} \quad Y_x\,dz\,dx\,.\,dy.$$

Zij trachten het vlak in tegenovergestelden zin te doen draaien, hunne werking zal dus volgens de voorwaarde nul zijn, wanneer $X_y = Y_x$ is. Op dezelfde wijze zijn de beide andere betrekkingen te bewijzen. Wanneer nu aan de voorwaarden voor het evenwicht van elk prisma voldaan is, dan zal dit het inwendig evenwicht van het geheele lichaam in zich sluiten.

De negen componenten der elastische krachten herleiden zich dus tot zes verschillende. Stellen we nu, evenals in de voorgaande §, de ongelijke voor door de letter N met de indices 1, 2 en 3, en de gelijke door T met dezelfde indices, dan kunnen we de beide stelsels (8) en (9) in het volgende samenvatten:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \varrho X_0 = 0,$$
$$\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \varrho Y_0 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$
$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \varrho Z_0 = 0.$$

Bij dit stelsel komt nog een ander, betrekking hebbende tot het oppervlak van 't lichaam. Beschouwen wij een molecul op een onmerkbaren afstand gelegen van de oppervlakte; breng er drie vlakken door respectievelijk evenwijdig aan de coördinatenvlakken, dan bepalen deze drie snijvlakken met het oppervlak een elementair-tetraëder. Zijn de componenten van de uitwendige kracht op de eenheid van oppervlakte X, Y, Z, dus op 't element $\varpi : \varpi X$, ϖY, ϖZ; zijn verder m, n, p de *cos.* der hoeken, die de richting van dit element bepalen, en de zijvlakken van dezen tetraëder voorgesteld door a, b en c, dan heeft men de volgende betrekkingen:

$$a = \varpi\, m, \qquad b = \varpi\, n, \qquad c = \varpi\, p.$$

Op a werken nu de componenten:

$$N_1, T_3, T_2; \text{ op } b,\ T_3, N_2, T_1; \text{ en op } c,\ T_2, T_1, N_3.$$

Deze elastische krachten moeten in evenwicht met de uitwendige zijn. De krachten, welke op het inwendige van dit tetraëder werken, komen niet in aanmerking, daar deze grootheden van de 3e orde zijn. Men heeft dus:

$$X = m\, N_1 + n\, T_3 + p\, T_2,$$
$$Y = m\, T_3 + n\, N_2 + p\, T_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$
$$Z = m\, T_2 + n\, T_1 + p\, N_3.$$

Deze vergelijkingen hebben niet alleen betrekking tot het oppervlak, maar stellen in 't algemeen de componenten voor van de elastische kracht, werkende op een vlak-element gaande door een willekeurig punt M, en wiens normaal hoeken maakt met de assen, waarvan de *cos* respectievelijk m, n, p zijn.

Men heeft dus zes grootheden N_i, T_i, die functies zijn van x, y, z, en zoo er beweging is ook van t, waartusschen slechts drie betrekkingen (10) bestaan, daar de uitdrukkingen (11) alleen kunnen dienen tot bepaling van constanten door het integreeren van (10) te voorschijn geroepen. De waarden van N_i, T_i zouden dus niet te bepalen zijn, indien men niet in staat geweest ware ze alle zes uit te drukken in drie verschillende functies, welke op hare beurt wederom functies zijn van x, y, z en bij beweging ook van t. Dit doel hebben we bereikt in § 2 door de betrekkingen uitgedrukt in (7).

Substitueert men de waarden van N_i, T_i gevonden in § 2, verg. 7 in (10) en (11) van deze §, dan verkrijgt men twee stelsels differentiaal-vergelijkingen. Voor we echter deze substitutie uitvoeren, zullen we trachten aan de bovengenoemde uitdrukkingen den meest eenvoudigen vorm te geven. Vooreerst echter nog eene opmerking over het karakter van de functies u, v en w, ingevoerd in de vorige §, en over den vorm van een elementair-prisma ná de inwerking van uitwendige krachten.

Zijn a, b, c, d enz. een stelsel van lichamen, die wederom ondersteld worden volkomen vast te zijn, en wier elementen volgens een zekere functie van hun afstand op elkander werken. Verder wordt ondersteld, dat deze lichamen op zoodanig een afstand van elkander verwijderd liggen, dat ze onderling in evenwicht zijn.

Werken nu op dit systeem uitwendige krachten, dan zullen deze eene verandering in afstand bewerkstelligen, zoodanig, dat ten laatste wederom evenwicht is. Deze verandering zij zeer klein met betrekking tot hun oorspronkelijken afstand. Wanneer de verplaatsingen uitgedrukt worden door u, v en w, dan is het duidelijk, dat deze grootheden geen continue functies kunnen zijn van de coördinaten der verschillende elementen. Door vermindering van den afstand en van de afmetingen der lichamen in alle richtingen kan men ten laatste dit stelsel volkomen doen overeenstemmen met een stelsel van op elkander werkende moleculen. Het karakter der functies u, v en w blijft echter onveranderd, d. w. z. zij blijven discontinue met betrekking tot de coördinaten x, y en z der verschillende moleculen. In deze dissertatie zijn ze echter als continue behandeld geworden. Het schijnt dus, dat we eene onderstelling gemaakt hebben, die niet juist is. Neemt men ook deze uitdrukkingen u, v, w, in de beteekenis van de verplaatsingen aan te geven van elk molecul afzonderlijk, dan zou men niet gerechtigd zijn ze als contenue te beschouwen. Men moet er echter een eenigsints andere beteekenis aan toeschrijven en wel de volgende:

de functies u, v en w drukken de gemiddelde verplaatsing uit van een groep moleculen, welke te samen als eenheid gedacht worden.

Neemt men dus een elementair-prisma, dan geven ze de verplaatsing aan van het centrum van dit prisma, daar volgens de onderstelling in dit prisma, beschouwd als element, zich toch een zeer groot aantal moleculen bevinden, om de een door den ander, de ongelijkmatige verplaatsingen te compenseeren, die aan elk molecul afzonderlijk toekomt.

De Saint-Venant zegt van deze gemiddelde verplaatsingen:

„Les deplacements moyens varient généralement d'un point à l'autre du corps, avec continuité et d'une manière simple, ou insensiblement pour des distances insensibles, et proportionellement aux distances, tant qu'elles sont très-petites et mesurées dans une même direction."

In dezen zin opgevat zijn deze functies wezenlijk continue ten opzichte van de coördinaten x, y en z en, zoo er nog beweging is, ook van t. Om de verplaatsing van elk molecul afzonderlijk te beschouwen of tot een onderwerp van behandeling te maken is onmogelijk, van wege de gecompliceerde werking, ontstaande door den invloed van de omliggende moleculen. Alleen als de gemiddelde verplaatsing aangevende, kunnen ze tot een onderwerp van beschouwing gemaakt worden.

Op deze beschouwing steunt ook die, omtrent den vorm van een elementair-prisma, wanneer een zwakke vormverandering ingetreden is. We hebben in een elastisch lichaam een elementair-prisma aangenomen, oorspronkelijk rechthoekig en wiens ribben evenwijdig waren aan de coördinaten-assen. Na de inwerking van uitwendige krachten, zijn we dit prisma als prisma blijven beschouwen, hoewel niet meer als rechthoekig. Inderdaad kan dit echter niet juist zijn; de grensvlakken van een elementair-prisma kunnen na de deformatie niet meer vlak blijven, maar nemen een gegolfde gedaante aan. Door echter aan u, v, w de beteekenis te hechten, die wij er aangehecht hebben, en welke benaderend geoorloofd is, is men gerechtigd ook nog ná de inwerking van uitwendige krachten, het prisma als prisma te blijven beschouwen.

§ 4. HERLEIDING DER UITDRUKKINGEN N_i, T_i TOT HAREN EENVOUDIGSTEN VORM.

Voordat we tot de eigenlijke herleiding overgaan, zullen we eenige transformatie-formulen aangeven, die ons naderhand van groot nut zijn.

Behouden we denzelfden oorsprong. Zijn de coördinaten van M met betrekking tot het nieuwe rechthoekige stelsel x', y', z'; de *cos* der hoeken, die zijne assen met die van 't oude maken m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3, en de verplaatsingen in de richting der nieuwe assen u', v', w'. Dit alles is duidelijk aangewezen in het volgende tafeltje:

	x	y	z	
x'	m_1	n_1	p_1	u'
y'	m_2	n_2	p_2	v'
z'	m_3	n_3	p_3	w'
	u	v	w	

Nu heeft men de volgende bekende betrekkingen:

$$\begin{aligned} &m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1, && m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 = 0, \\ &m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 = 1, \quad (12) && m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 = 0, \quad (13) \\ &m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 = 1. && m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, & n_1\, p_1 + n_2\, p_2 + n_3\, p_3 = 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \ (14) & p_1\, m_1 + p_2\, m_2 + p_3\, m_3 = 0, \ (15) \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. & m_1\, n_1 + m_2\, n_2 + m_3\, n_3 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', & x' = m_1 x + n_1 y + p_1 z, \\ y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \ (16) & y' = m_2 x + n_2 y + p_2 z, \ (17) \\ z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'. & z' = m_3 x + n_3 y + p_3 z. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} u = m_1 u' + m_2 v' + m_2 w', & u' = m_1 u + n_1 v + p_1 w, \\ v = n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \ (18) & v' = m_2 u + n_2 v + p_2 w, \ (19) \\ w = p_1 u' + p_2 v' + p_3 w'. & w' = m_3 u + n_3 v + p_3 w. \end{array}$$

Drukken we nu $\dfrac{\partial\,(u', v', w')}{\partial\,(x', y', z')}$ door dezelfde letters uit als gedaan is met $\dfrac{\partial\,(u, v, w)}{\partial\,(x, y, z)}$, (§ 2, verg. 5), doch geäccentueerd, dan heeft men volgens (19):

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = m_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + n_1 \frac{\partial v}{\partial x'} + p_1 \frac{\partial w}{\theta x'}.$$

Nu zijn u, v, w, functies van x, y, z even als volgens (17) x', y', z'. Dit geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x'} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'}$$

waarin volgens (16):

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = m_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = n_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x'} = p_1 \text{ is.}$$

Deze waarden gebracht in die voor $\frac{\partial u}{\partial x'}$ geven na rangschikking:

$$(20)\left\{\begin{aligned}
d_x' &= m_1^2 d_x + n_1^2 d_y + p_1^2 d_z + n_1 p_1 e_{yz} + p_1 m_1 e_{zx} + m_1 n_1 e_{xy}. \\
&\text{Op dezelfde wijze verkrijgt men:} \\
d_y' &= m_2^2 d_x + n_2^2 d_y + p_2^2 d_z + n_2 p_2 e_{yz} + p_2 m_2 e_{zx} + m_2 n_2 e_{xy}, \\
d_z' &= m_3^2 d_x + n_3^2 d_y + p_3^2 d_z + n_3 p_3 e_{yz} + p_3 m_3 e_{zx} + m_3 n_3 e_{xy}, \\
e_{y'z'} &= 2\, m_2 m_3 d_x + 2\, n_2 n_3 d_y + 2 p_2 p_3 d_z + (n_2 p_3 + n_3 p_2)\, e_{yz} \\
&\quad + (p_2 m_3 + p_3 m_2)\, e_{zx} + (m_2 n_3 + m_3 n_2)\, e_{xy}, \\
e_{z'x'} &= 2\, m_3 m_1 d_x + 2\, n_3 n_1 d_y + 2 p_3 p_1 d_z + (n_3 p_1 + n_1 p_3)\, e_{yz} \\
&\quad + (p_3 m_1 + p_1 m_3)\, e_{zx} + (m_3 n_1 + m_1 n_3)\, e_{xy}, \\
e_{x'y'} &= 2\, m_1 m_2 d_x + 2\, n_1 n_2 d_y + 2 p_1 p_2 d_z + (n_1 p_2 + n_2 p_1)\, e_{yz} \\
&\quad + (p_1 m_2 + p_2 m_1)\, e_{zx} + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\, e_{xy}.
\end{aligned}\right.$$

Telt men de drie eerste vergelijkingen van dit stelsel bij elkander, dan bekomt men met in achtneming van (14) en (15)

$$d_x' + d_y' + d_z' = d_x + d_y + d_z = \theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

De cubieke lineaire uitzetting blijft constant.

Zijn nu N_i', T_i' met betrekking tot het nieuwe stelsel wat N_i, T_i waren tot het oude, en zijn de projecties van de N_i', T_i' op de oude assen voorgesteld door X_i', Y_i', Z_i', dan heeft men de volgende betrekkingen (§ 3, vergel. 11).

$$\begin{aligned}
X'_1 &= m_1 N'_1 + m_2 T'_3 + m_3 T'_2 = m_1 N_1 + n_1 T_3 + p_1 T_2, \\
Y'_1 &= n_1 N'_1 + n_2 T'_3 + n_3 T'_2 = m_1 T_3 + n_1 N_2 + p_1 T_1, \quad (22) \\
Z'_1 &= p_1 N'_1 + p_2 T'_3 + p_3 T'_2 = m_1 T_2 + n_1 T_1 + p_1 N_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X'_2 &= m_1 T'_3 + m_2 N'_2 + m_3 T'_1 = m_2 N_1 + n_2 T_3 + p_2 T_2, \\
Y'_2 &= n_1 T'_3 + n_2 N'_2 + n_3 T'_1 = m_2 T_3 + n_2 N_2 + p_2 T_1, \quad (23) \\
Z'_2 &= p_1 T'_3 + p_2 N'_2 + p_3 T'_1 = m_2 T_2 + n_2 T_1 + p_2 N_3.
\end{aligned}$$

$$X'_3 = m_1\, T'_2 + m_2\, T'_1 + m_3\, N'_3 = m_3\, N_1 + n_3\, T_3 + p_3\, T_2,$$
$$Y'_3 = n_1\, T'_2 + n_2\, T'_1 + n_3\, N'_3 = m_3\, T_2 + n_3\, N_2 + p_3\, T_1, \quad (24)$$
$$Z'_3 = p_1\, T'_2 + p_2\, T'_1 + p_3\, N'_1 = m_3\, T_2 + n_3\, T_1 + p_3\, N_3.$$

Hieruit worden de volgende gemakkelijk afgeleid:

$$\left.\begin{aligned}
N'_1 &= m_1^2 N_1 + n_1^2 N_2 + p_1^2 N_3 + 2 n_1 p_1\, T_1 + 2 p_1 m_1\, T_2 + 2 m_1 n_1\, T_3,\\
N'_2 &= m_2^2 N_1 + n_2^2 N_2 + p^2_2 N_3 + 2 n_2 p_2\, T_1 + 2 p_2 m_2\, T_1 + 2 m_2 n_2\, T_3,\\
N'_3 &= m_3^2 N_1 + n_3^2 N_2 + p_3^2 N_3 + 2 n_3 p_3\, T_1 + 2 p_3 m_3\, T_2 + 2 m_3 n_3\, T_3,\\
T'_1 &= m_2\, n_3\, N_1 + n_2\, n_3\, N_2 + p_2\, p_3\, N_3 + (n_2\, p_3 + n_3\, p_3)\, T_1\\
&\quad + (p_2\, m_3 + p_3\, m_2)\, T_2 + (m_2\, n_3 + m_3\, n_2)\, T_3,\\
T'_2 &= m_3\, m_1\, N_1 + n_3\, n_1\, N_2 + p_3\, p_1\, N_3 + (n_3\, p_1 + n_1\, p_3)\, T_1\\
&\quad + (p_3\, m_1 + p_1\, m_3)\, T_2 + (m_3\, n_1 + m_1\, n_3)\, T_3,\\
T'_3 &= m_1\, m_2\, N_1 + n_1\, n_2\, N_2 + p_1\, p_2\, N_3 + (n_1\, p_2 + n_2\, p_1)\, T_1\\
&\quad + (p_1\, m_2 + p_2\, m_1)\, T_2 + (m_1\, n_2 + m_2\, n_1)\, T_3.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Waaruit: $\quad N'_1 + N'_2 + N'_3 = N_1 + N_2 + N_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$

Deze transformatie-formulen zijn van Lamé [1]).

Gaan we nu over tot de eigenlijke herleiding. We hebben gezien (§ 2) dat, wanneer een lichaam homogeen is bij constante richting der assen, N_i, T_i den volgenden vorm hebben:

$$\left.\begin{aligned}
N_i &= A_i\, d_x + B_i\, d_y + C_i\, d_z + D_i\, e_{yz} + E_i\, e_{zx} + F_i\, e_{xy},\\
T_i &= A'_i\, d_x + B'_i\, d_y + C'_i\, d_z + D'_i\, e_{yz} + E'_i\, e_{zx} + F'_i\, e_{xy},
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

waarin A_i, B_i enz. constante coëfficiënten zijn.

Laten we nu zien, welken vorm N_i, T_i aannemen, wanneer die homogeniteit plaats grijpt, onafhankelijk van de richting der assen, dus bij constante elasticiteit.

---

[1]) Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité des corps solides, pag. 43.

Het is duidelijk, dat in dit geval voor een willekeurigen stand der assen x', y', z' de uitdrukkingen N'_i, T'_i denzelfden vorm aannemen als N_i, T_i, dat men dus heeft:

$$\left.\begin{aligned} N'_i &= A_i\, d_{x'} + B_i\, d_{y'} + C_i\, d_{z'} + D_i\, e_{y'z'} + E_i\, e_{z'x'} + F_i\, e_{x'y'}, \\ T'_i &= A'_i\, d_{x'} + B'_i\, d_{y'} + C'_i d_{z'} + D'_i e_{y'z'} + E'_i e_{z'x'} + F_i\, e_{x'y'}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Bepalen we nu vooreerst den stand der assen zoodanig, dat de nieuwe y- en z-assen samenvallen met de oude, en de nieuwe x-as valt in 't verlengde der oude. De voorwaarden van dezen stand zijn:

$$m_1 = 1, \qquad n_2 = 1, \qquad p_3 = 1,$$
$$n_1 = p_1 = 0, \qquad m_2 = p_2 = 0, \qquad m_3 = n_3 = 0.$$

Bereken nu met inachtneming van deze betrekkingen volgens (20) de uitdrukkingen $\frac{\partial\,(u', v', w')}{\partial\,(x', y', z')}$ en volgens (25) N'_i, T'_i.

Breng deze waarden over in (II) en vergelijk dan de verkregen uitkomsten met (I), dan komt men zonder moeite tot de volgende betrekkingen:

$$E_1 = F_1 = 0, \;\; E_2 = F_2 = 0, \;\; E_3 = F_3 = 0, \;\; E'_1 = F'_1 = 0,$$
$$A'_2 = B'_2 = C'_2 = D'_2 = 0, \;\text{ en }\; A'_3 = B'_3 = C'_3 = D'_3 = 0.$$

De vergelijkingen (I) herleiden zich dus tot:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= A_1\, d_x + B_1\, d_y + C_1\, d_z + D_1\, e_{yz}, \\ N_2 &= A_2\, d_x + B_2\, d_y + C_2\, d_z + D_2\, e_{yz}, \\ N_3 &= A_3\, d_x + B_3\, d_y + C_3\, d_z + D_3\, e_{yz}, \\ T_1 &= A'_1 d_x + B'_1\, d_y + C'_1 d_z + D'_1 e_{yz}, \\ T_2 &= E'_2\, e_{zx} + F'_2\, e_{xy}, \\ T_3 &= E'_3\, e_{zx} + F'_3\, e_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Is een lichaam nu zoodanig geconstitueerd, dat de moleculen symmetrisch gelegen zijn ten opzichte van een vlak, evenwijdig aan het $y\,z$-vlak, dan drukt (III) den meest algemeenen en tevens den eenvoudigsten vorm uit, dien de componenten der elastische kracht aannemen. In dit geval noemt Cauchy dit vlak een „plan principal d'elasticité."

Bestaat er nu ook een „plan principal d'elasticité," loodrecht op de y-as, dan vindt men op dezelfde wijze:

$$D_1 = 0,\ D_2 = 0,\ D_3 = 0,\ A'_1 = B'_1 = C'_1 = 0,\ E'_2 = 0,\ E'_3 = 0,$$

waardoor (III) wordt:

$$\begin{array}{ll} N_1 = A_1\, d_x + B_1\, d_y + C_1\, d_z, & T_1 = D_1\, c_{y\,z}, \\ N_2 = A_2\, d_x + B_2\, d_y + C_2\, d_z, & T_2 = E_3\, e_{z\,x}, \quad . \ . \ (IV). \\ N_3 = A_3\, d_x + B_3\, d_y + C_3\, d_z, & T_3 = F_3\, e_{x\,y}. \end{array}$$

Wilde men nu uitdrukken, dat er nog een hoofdvlak van elasticiteit bestaat, loodrecht op de z-as, dan zou men tot de formulen (IV) terugkomen. Bestaan er dus twee hoofdvlakken, dan sluit dit in zich het bestaan van een derde.

Drukken we nu uit, dat het lichaam volkomen symmetrisch is ten opzichte van eene richting evenwijdig aan de x-as, dat er dus bestaat een elasticiteits-as. Nemen we deze richting aan tot x-as en zijn de nieuwe y- en z-assen een hoek β gedraaid ten opzichte van het oude stelsel. Wanneer men nu uitdrukt, dat de vergelijkingen (IV) bestaan onafhankelijk van dezen hoek, dan hebben we ons doel bereikt. Men heeft dus:

$$\begin{array}{ll} N'_1 = A_1\, d_{x'} + B_1\, d_{y'} + C_1\, d_{z'}, & T'_1 = D_1\, e_{y'\,z'}, \\ N'_2 = A_3\, d_{x'} + B_2\, d_{y'} + C_2\, d_{z'}, & T_{/2} = E_2\, e_{z'\,x'}, \ . \ . \ (V). \\ N'_3 = A_3\, d_{x'} + B_3\, d_{y'} + C_3\, d_{z'}, & T'_3 = F_3\, e_{x'\,y'}. \end{array}$$

De stand van het nieuwe coördinaten-stelsel wordt uitgedrukt door:

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = 0,$$
$$n_1 = p_1 = 0, \quad n_2 = \cos\beta, \; p_2 = \sin\beta, \quad n_3 = -\sin\beta, \; p_3 = \cos\beta.$$

Bereken nu wederom met inachtneming van deze betrekkingen de uitdrukkingen $\frac{\partial\,(u', v', w',)}{\partial\,(x', y', z',)}$ volgens (20) en N'_i, T'_i volgens (25). Breng deze waarden over in (V), en vergelijk dan de verkregen uitdrukkingen met (IV), dan bekomt men:

$$B_1 = C_1, \; A_2 = A_3, \; B_2 = C_3, \; B_3 = C_2, \; E_2 = F_3, \; B_2 = 2\,D_1 + C_2,$$

waardoor (IV) wordt:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= A_1\, d_x + B_1\, d_y + B_1\, d_z, & T_1 &= D_1\, e_{yz}, \\ N_2 &= A_2\, d_x + (2\,D_1 + C_2)\, d_y + C_2\, d_z, & T_2 &= E_2\, e_{zx}, \\ N_3 &= A_2\, d_x + C_2\, d_y + (2\,D_1 + C_2)\, d_z, & T_3 &= E_2\, e_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (VI)$$

Bestaat er nu nog een elasticiteits-as evenwijdig aan de y-as, dan vindt men op dezelfde wijze:

$$A_2 = B_1 = C_2, \qquad A_1 = 2\,D_1 + C_2, \qquad D_1 = E_2,$$

waardoor de voorgaande formulen overgaan in:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= (2\,D_1 + C_2)\, d_x + C_2\, d_y + C_2\, d_z, & T_1 &= D_1\, e_{yz}, \\ N_2 &= C_2\, d_x + (2\,D_1 + C_2)\, d_y + C_2\, d_z, & T_2 &= D_1\, e_{zx}, \\ N_3 &= C_2\, d_x + C_2\, d_y + (2\,D_1 + C_2)\, d_z, & T_3 &= D_1\, e_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (VII)$$

Deze formulen bewijzen tevens, dat er nog een elasticiteits-as bestaat evenwijdig aan de z-as. Vervangt men nu C_2 door $\mathfrak{a}$ en D_1 door $\mathfrak{b}$ en de uitdrukkingen d_x, d_y, enz. door hunne oorspronkelijke waarden $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ enz., dan nemen de voorgaande formulen, met inachtneming der waarde θ (zie § 2 vergel. 4) den volgenden vorm aan:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= a\,\theta + 2\,b\,\frac{\partial u}{\partial x}, & T_1 &= b\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
N_2 &= a\,\theta + 2\,b\,\frac{\partial v}{\partial y}, & T_2 &= b\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad \ldots \text{(VIII)}\\
N_3 &= a\,\theta + 2\,b\,\frac{\partial w}{\partial z}, & T_3 &= b\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

Heeft het lichaam nu in drie andere willekeurige richtingen, onderling loodrecht, de ondersteld homogeniteit, dan zal dit geen invloed hebben op den vorm van (VIII), daar men tot volkomen identieke vergelijkingen komt. De laatstgenoemde uitdrukkingen zijn dus de meest algemeene en tevens de eenvoudigste uitdrukkingen voor de elastische krachten in het geval van *constante elasticiteit*, volgens Lamé, of volgens Cauchy in het geval, dat een lichaam *isotroop* is.

De bovengenoemde uitdrukkingen worden gegeven, door Lamé [1]), de Saint-Vénant [2]), Clebsch [3]) en Rieman [4]). Navier en Poisson [5])

---

[1]) Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides pag. 51.

[2]) Mém. sur la torsion des prismes, Mém. des savants étrangers T XIV; Mém. sur la flexion des prismes, Liouville Journal Serie 2 T I.

[3]) Theorie der elasticität der festen Körper pag. 48.

[4]) Partielle Differentialgleichungen pag. 232.

[5]) Mém. sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, Mém. de l'Académie T 8 Paris 1829; Mém. sur les équations du mouvement des corps solides élastiques et des fliudes, Journal de l'Ecole politechnique Cahier 20 Paris 1831.

komen echter tot nog eenvoudiger vormen, n. l. tot de gelijkheid van a en b, door te integreeren in de onderstelling, dat de massa continue is. Deze methode berust echter op onjuiste onderstellingen: de massa is niet continue. De onderzoekingen van Wertheim en anderen hebben ook wel degelijk de ongelijkheid van a en b bewezen.

Lamé komt langs een geheel anderen weg tot dezelfde uitdrukkingen voor de elastische krachten. Volgens mijn oordeel niet zoo nauwkeurig als de weg, welke hier gevolgd is, daar het volstrekt niet blijkt, dat hij alleen die voorwaarden gebruikt heeft, welke het lichaam tot een *isotroop* lichaam maken. De weg hier gevolgd komt in hoofdzaak met dien van de Saint-Vénant overeen.

Substitueeren wij nu deze vormen voor N_i, T_i in de vergelijkingen (10) van § 3, dan verkrijgt men het volgende stelsel differentiaal-vergelijkingen:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mathrm{b}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\varrho X_0=0,$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mathrm{b}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\varrho Y_0=0,$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mathrm{b}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\varrho Z_0=0,$$

bij evenwicht en zoo er beweging is, sluiten, zooals vroeger reeds aangemerkt is, X_0, Y_0, Z_0 ook nog in zich:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\quad -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Hierbij komt nog een stelsel differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde, dat betrekking heeft tot de punten van het oppervlak, en verkregen wordt door dezelfde vormen te brengen in de vergelijkingen (11) van dezelfde §.

---

§ 5. BEPALING DER CONSTANTEN a en b DOOR PROEFNEMING. MEETKUNDIGE BETEEKENIS DER COEFFICIENTEN $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$.

Nemen we ten eerste een bolvormig lichaam, op welks oppervlakte een druk — P gelijkmatig werkt. De bol zal samengedrukt worden zoodanig, dat ze zich zelf gelijkvormig blijft. Zij zijn middelpunt de oorsprong van een rechthoekig coördinaten-stelsel, dan heeft men de volgende wet van verplaatsing:

$$u = -a x, \quad v = -a y, \quad w = -a z.$$

Bereken volgens deze wet de uitdrukkingen N_i, T_i, dan vindt men:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0 \text{ en } N_1 = N_2 = N_3 = -a(3\,\mathrm{a} + 2\,\mathrm{b}).$$

De normale componenten N_i zijn dus overal constant en noodwendig gelijk aan de uitwendige kracht — P. Men heeft dus: $-P = -a(3\,\mathrm{a}+2\,\mathrm{b})$, waaruit $a = \frac{P}{3\,\mathrm{a}+2\,\mathrm{b}}$ of $\frac{a}{P} = \frac{1}{3\,\mathrm{a}+2\,\mathrm{b}}$ = de lineaire coefficiënt van samendrukking. De cubieke coefficiënt van uitzetting wordt dus:

$$\theta = \frac{3}{3\,\mathrm{a}+2\,\mathrm{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Deze θ is nu door proefneming te bepalen, waardoor men ééne betrekking verkrijgt tusschen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Beschouwen we ten tweede een rechthoekig prisma, dat uitgerekt wordt door eene kracht, gelijkmatig verdeeld over zijn bovenvlak, terwijl zijn basis bevestigd is tegen een onverplaatsbaar vlak, dan heeft men gelijkmatige contractie evenwijdig aan het grondvlak en gelijkmatige uitrekking in de richting van de kracht F. De wet van verplaatsing wordt in dit geval:

$$u = -c\,x, \quad v = -c\,y, \quad w = d\,z.$$

Bereken wederom uit (VII), § 4, de waarden van N_i, T_i, dan vindt men:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

$$N_1 = N_2 = (d - 2\,c)\,\mathbf{a} - 2\,\mathbf{b}\,c, \text{ en } N_3 = (d - 2\,c)\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}\,d.$$

De normale componenten zijn dus wederom constant. Het is duidelijk dat N_3, de component in de richting der trekkracht F, gelijk is aan deze, terwijl $N_1 = N_2$ aan de oppervlakte van het prisma nul moeten zijn. Men heeft dus de volgende betrekkingen:

$$(d - 2\,c)\,\mathbf{a} - 2\,\mathbf{b}\,c = 0, \text{ en } (d - 2\,c)\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}\,d = F,$$

waaruit:

$$d = \frac{1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{3\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}}\,F, \text{ of } \frac{d}{F} = \frac{w}{z\,F} = \frac{1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{3\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}} \quad . \; . \; (28)$$

De uitdrukking $\frac{d}{F} = \frac{w}{z\,F}$ stelt de lineaire dilatatie voor onder de eenheid van trekking. Deze is ook door proefneming te bepalen. Men heeft nu twee betrekkingen (27) en (28) tusschen de constanten $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, waaruit ze dus volkomen te bepalen zijn.

De wederkeerige waarde van de laatste uitdrukking $\frac{d}{F}$ wordt gewoonlijk met den naam van elasticiteits-modulus bestempeld, en aangewezen door de letter E. In onze constanten uitgedrukt heeft men

$$E = \frac{3\,a + 2\,b}{1 + \frac{a}{b}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Voor den coefficient c, de coefficient van contractie evenwijdig aan de basis, vindt men:

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{F}{3\,a + 2\,b}.$$

Zoekt men nu de waarde van $\frac{c}{d}$, dan heeft men:

$$\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{2\,b}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{a}{2\,(a + b)} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{b}{a}\right)}.$$

Neemt men met Poisson $a = b$ aan, dan wordt $\frac{c}{d} = \frac{1}{4}$. Deze uitkomst is niet bevestigd geworden door de talrijke proefnemingen van Wertheim [1]), Cagniard de Latour [2]), Kirchhofl [3]) en anderen. Het is echter gemakkelijk aan te toonen, dat dit quotient altijd kleiner dan $\frac{1}{2}$ moet zijn. Nemen we, om dit te

---

[1]) Ann. de chim. et de physique. III Série, T 12. Poggend. Ann. Ergänzungsband II.

[2]) Ann. de chim. et de physique XXXVI. — Poggend. Ann. XII.

[3]) Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben van federhartem Stahl, Poggend. Ann. Bd. 108, pag. 309.

bewijzen, een cubus, waarvan de afmetingen l zijn. Na de uitrekking worden ze: $l(1+d)$ en $l(1-c)$. Nu leert de ervaring, dat bij dilatatie het volumen toeneemt, dat men dus heeft:

$$l^3(1+d)(1-c)^2 > l^3$$

waaruit $\frac{c}{d} < \frac{1}{2}$, wanneer men de niet lineaire termen van c en d verwaarloost tegen de lineaire, hetgeen geoorloofd is.

Gaan we nu over tot meetkundige beteekenis der coefficiënten

$$\frac{\partial(u, v, w,)}{\partial(x, y, z)}.$$

Beschouwen we weder een elementair-parallellopipedum van het elastisch lichaam, vóor de inwerking van uitwendige krachten rechthoekig aangenomen. Laat ons zien, welke gedaante het ná eene zwakke vormverandering aannemen zal. Zijn de coördinaten van het hoekpunt, dat zich het naast bij den oorsprong bevindt, x, y, z, dan zijn die van de uiteinden der ribben, welke in dit hoekpunt samen komen:

$$x+dx, y, z;\ x, y+dy, z \text{ en } x, y, z+dz.$$

Na de inwerking van uitwendige krachten, worden ze:

$$1.\quad x+u, \qquad y+v, \qquad z+w,$$

$$2.\quad x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\quad y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\quad z+w+\frac{\partial w}{\partial x}dx,$$

$$3.\quad x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\quad y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy,\quad z+w+\frac{\partial w}{\partial y}dy,$$

$$4.\quad x+u+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\quad y+v+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\quad z+dz+w+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

De projecties van (1 . 2) op de assen zijn:

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) d x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} d x, \quad \frac{\partial w}{\partial x} d x,$$

die van (1 . 3):

$$\frac{\partial u}{\partial y} d y, \quad \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) d y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} d y,$$

en die van (1 . 4):

$$\frac{\partial u}{\partial z} d z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} d z, \quad \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) d z.$$

Zij hunne lengten respectievelijk voorgesteld door:

$$(1+g)\, d x, \quad (1+g')\, d y, \quad (1+g'')\, d z,$$

dan heeft men:

$$\left(1+g\right)^2 = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(1+g'\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(1+g''\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

De hoeken, welke deze ribben met elkander maken, waren oorspronkelijk recht. Na de deformatie is dit in 't algemeen niet meer zoo. Stellen wij ze voor door $\frac{\pi}{2}-\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta'$, $\frac{\pi}{2}-\theta''$, dan heeft men:

$$\cos\left[(1 . 3), (1 . 4)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta''\right) =$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial y}}{(1+g')(1+g'')},$$

$$cos\,[(1\,.\,4),\,(1\,.\,2)] = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) =$$

$$\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}}{(1+g'')\,(1+g)},$$

$$cos\,[(1\,.\,2),\,(1\,.\,3)] = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}{(1+g)\,(1+g')}.$$

Waaruit:

$$g = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g' = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad g'' = \frac{\partial w}{\partial z} \;.\;.\;.\;.\;. \;(30)$$

$$\theta'' = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta' = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \;(31)$$

daar we alleen zulke lichamen beschouwen, welke in alle richtingen meetbare afmetingen hebben, waar dus u, v, w, en hunne differentiaal-quotienten overal zeer kleine grootheden voorstellen.

De betrekkingen (30) hebben we reeds vroeger gevonden n. l. in § 2 en gezien, dat deze voorstellen de coefficienten van lineaire uitzetting in de richting der assen. De betrekkingen (31) wijzen daarentegen aan, dat de overige coefficienten $\frac{\partial\,(u,\,v.\,w)}{\partial\,(x,\,y,\,z)}$ voorkomende in de uitdrukkingen N_i, T_i, de veranderingen voorstellen in de hoeken, die de ribben van het oorspronkelijk rechthoekig parallellopipedum door de inwerking van uitwendige krachten ondergaan. De Saint-Vénant bestempelt deze coefficiënten met den naam van *„coefficients de glissement.”*

De veranderingen van het elementair-parallellopipedum zijn dus in 't algemeen tweëerlei: 1° *uitrekking* in de richting der assen, veroorzaakt door de *normale componenten,* en 2^0 *onderlinge verschuiving van de doorsneden* teweeggebracht door de *tangentiëele componenten* der elastische krachten. De eerste bezorgen alleen eene vergrooting of verkleining van 't volumen, de tweede hebben alleen invloed op de vormverandering.

AFDEELING II.

Toepassing van de voorgaande beschouwingen op de torsie van een cylindrisch lichaam.

§ 6. AFLEIDING DER HOOFDVERGELIJKINGEN.

Uit de beschouwing der formulen gevonden voor N_i, T_i, volgt onmiddelijk, dat, wanneer de wet van verplaatsing, of u, v, w, gegeven zijn in functies van de coördinaten, men door differentiatie gemakkelijk komt tot de waarden van die uitdrukkingen voor het punt, ten opzichte waarvan men de elastische krachten bepalen wil. Voor ieder willekeurig punt van 't lichaam zijn dus die krachten onmiddelijk te vinden; zoo ook voor de verschillende punten van zijn oppervlak. Door de waarde der coördinaten van die punten te substitueeren in de uitdrukkingen N_i T_i, verkrijgt men de uitwendige krachten, die op het lichaam moeten aangrijpen, om de verplaatsingen te geven, waarvan de wet boven aangenomen is.

Het omgekeerde geval echter, n. l. gegeven de uitwendige krachten, te bepalen de wet van verplaatsing, is op verre na zoo gemakkelijk niet te behandelen, omdat men stuit op integraties, wier oplossing tot heden toe nog slechts in enkele, zeer bijzondere gevallen verkregen geworden is.

Eenvoudiger dan in 't laatste geval, en ingewikkelder dan in 't eerste, zijn die vraagstukken, waarbij men een soort van middelweg bewandelt, waarbij men geeft een gedeelte der verplaatsingen, en een gedeelte der uitwendige krachten.

Nemen we nu een rechten cylinder van een willekeurige doorsnede, en bevestigen hem op de volgende wijze:

1e een punt van 't lichaam blijve vast, zoodat hier u, v, w, verdwijnen;

2e een door dit punt getrokken lengte-element behoude een vaste richting;

3e een door dit lengte-element gelegd vlak-element verandere niet van richting.

Dit zijn de voorwaarden, waaraan voldaan moet worden, zal het evenwicht van een elastisch lichaam volkomen bepaald zijn [1]).

Nemen we verder dit vastgelegd punt, zich bevindende in de bovenste doorsnede, als oorsprong van een rechthoekig coördinaten-stelsel aan, de z-as evenwijdig aan de as van den cylinder, de x-as samenvallende met de richting van het vastgelegd lengte-element, en de y-as in het vlak-element, dat niet van richting verandert, dan heeft men in dit vastgelegd punt aan de volgende betrekkingen te voldoen:

voor, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

---

[1]) Zie hierover Clebsch, Theorie der elasticität der festen Körper, pag. 57 enz.

moet men hebben:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0. \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

De drie eerste volgen onmiddelijk uit het vast zijn van den oorsprong. De andere drie verkrijgt men op de volgende wijze.

Gaat men van het punt $x=y=z=0$ tot een naastgelegen in het vastgedacht vlak-element over, dan zijn de verschuivingen van dit punt respectievelijk (zie § 2 vergelijking (1)):

$$u_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 d\,x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 d\,y,$$

$$v_1=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 d\,x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 d\,y,$$

$$w_1=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 d\,x+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 d\,y.$$

Daar men echter geen verschuiving voor dit punt in de richting der z-as kan hebben, zoo moet $w_1=0$ zijn, dat wederom ten gevolge heeft:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0=0, \text{ en } \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0=0.$$

Uit het constant zijn van de richting van het lengte-element, volgt, daar voor $d\,y=0$, de geheele uitdrukking v_1 verdwijnen moet:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0=0.$$

Denken wij ons dezen rechten cylinder van willekeurige doorsnede bestaande uit rechthoekige-elementaire parallellopipeda [1]), wier lengte gelijk en evenwijdig is aan de as des cylinders; en onderstellen we, dat er geen uitwendige krachten werken op de cylindrische oppervlakte. De laatste leden van de vergelijking (11) § 3, of de componenten X, Y en Z worden dus nul. Men heeft echter nog meer. Daar de normaal tot het cylinder-vlak loodrecht staat op de as van den cylinder, dus op de z-as, zoo is, daar p de *cos* van den hoek is, die de normaal met de z-as maakt, $p = 0$. De beide andere hoeken worden elkanders complementen. Noemen we den hoek, dien de normaal met de x-as maakt α, dan heeft men:

$$m = \cos\alpha \text{ en } n = \sin\alpha.$$

De vergelijkingen (11) § 3 worden dus:

$$N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha = 0,$$
$$T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0,$$
$$T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha = 0.$$

Aan de beide eerste vergelijkingen van dit stelsel wordt altijd voldaan voor zulke toestanden van den cylinder, waarbij 1° de naast elkander gelegen elementaire-parallellopipeda geen zijdelingschen druk of uitrekking op elkander uitoefenen, en waarbij 2° de doorsnede van elk parallellopipedum afzonderlijk niet verschoven wordt. Van wege de eerste voorwaarde verdwijnen de

[1]) Bij de duitsche schrijvers, waaronder Clebsch, vindt men den naam „Fasern" en bij de fransche schrijvers, waaronder Lamé en de Saint-Vénant, het woord „fibres". Ik heb deze woorden niet beter weten weer te geven, dan door elementaire parallellopipeda.

normale componenten N_1 en N_2, en van wege de tweede de tangentieele component T_3. Men kan zich nu voorstellen het volgend vraagstuk:

„Welke zijn de evenwichtstoestanden van een elastischen cylinder, zoowel bij afwezigheid van uitwendige krachten, werkende op de cylindrische oppervlakte, als van die op het inwendige van 't lichaam zelf, en waarbij de elementaire paralellopipeda waaruit het lichaam kan gedacht worden te bestaan, geen zijdelingschen druk ondervinden. Welke zijn de krachten, werkende op het vrije eindvlak van den cylinder, die zoodanig een toestand te voorschijn roepen."

Dit vraagstuk wordt bij Clebsch in zijn „theorie der elasticität der festen Körper" zeer uitvoerig behandeld, en draagt daar den naam van het Saint-Vénantsche probleem, omdat het, hoewel op eenigzins andere wijze, voor het eerst aan een onderzoek is onderworpen door de Saint-Vénant [1]).

Clebsch komt tot verrassende uitkomsten, veel verschillende van die, welke vroeger algemeen voor waar werden gehouden. Vroeger meende men n. l. dat bij tordeering van een cylindrisch lichaam, de doorsneden, vóor de inwerking van uitwendige krachten, loodrecht op de as van torsie, dus vlak, na die inwerking nog vlak bleven. We zullen echter aantoonen, dat dit slechts overeenkomstig de waarheid is bij rechte cirkelvormige cylinders. Hetzelfde meende men bij buiging van een cylindrisch lichaam; ook dit is met de waarheid in strijd.

---

[1]) Memoire sur la torsion des prismes. Mem. des Savants étrangers T. XIV. Mémoire sur la flexion des prismes, Journal de mathématiques de Liouville Serie 2 T. I.

We zullen hier een soortgelijk vraagstuk behandelen, eenvoudiger echter dan dat van Clebsch, of liever een vraagstuk opgesloten in dat van de Saint-Vénant, verkregen door de verplaatsingen aan nog meer betrekkingen te onderwerpen, en dat op de volgende wijze geformuleerd kan worden:

Welke zijn de evenwichtstoestanden van een cylindrisch lichaam van willekeurige doorsnede, op wiens cylindrische oppervlakte evenmin als op het inwendige van 't lichaam krachten werken, wanneer de wet van verplaatsing gegeven wordt door:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=0, \frac{\partial w}{\partial z}=0, \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad . \; . \; . \quad (33)$$

Welke zijn de krachten, werkende op het vrije eindvlak, die zoodanig een toestand te weeg brengen?

We zullen zien, dat dit probleem neerkomt op de zuivere torsie zonder eenige buiging.

Substitueert men de uitdrukkingen (33) in die voor N_i, T_i, dan verkrijgt men:

$$\left.\begin{array}{l} N_1=0, \quad N_2=0, \quad N_3=0 \quad \text{en} \quad T_3=0. \\ T_1=\mathfrak{b}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \; T_2=\mathfrak{b}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (34)$$

Daar de normale componenten der elastische krachten nul zijn, zoo bestaat er geen dilatatie in de richting der assen. Uit (33) volgt nog onmiddellijk, dat de coefficient van cubieke uitzetting, de uitdrukking

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

nul is. Bij deze wet van verplaatsing bestaat er dus noch volumen-uitzetting, noch volumen-contractie.

Denkt men zich den cylinder verdeeld in rechthoekige parallellopipeda, waarvan de lengte-richting samenvalt met die van de z-as, dan toont de betrekking $T_3 = 0$ aan, dat, ook na de intreding der deformatie, de doorsneden van de parallellopipeda met vlakken evenwijdig aan het $x\,y$-vlak, nog elementaire-rechthoeken gebleven zijn.

Laat ons nu de vergelijkingen opmaken, die betrekking hebben op het evenwicht van 't lichaam. In § 3 hebben we in 't algemeen gevonden:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \varrho X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \varrho Y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \varrho Z_0 = 0.$$

Deze kunnen in dit geval veel vereenvoudigd worden. Substitueert men in de voorgaande vergelijkingen de waarde van N_i, T_i gevonden in (34), met inachtneming, dat op 't inwendige van 't lichaam geen krachten werken, dat dus de componenten X_0, Y_0, Z_0 gelijk nul zijn, dan bekomt men:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Daar echter volgens (33): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ is, zoo herleidt zich dit stelsel tot het volgende meer eenvoudige:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Aan deze uitdrukkingen moet voor elk punt van 't lichaam voldaan worden. Om nu de voorwaarde-vergelijking te verkrijgen, welke betrekking heeft tot de punten van het oppervlak, beschouwen we nog eens het stelsel (11) van § 3.

$$X = m\,N_1 + n\,T_3 + p\,T_2,$$
$$Y = m\,T_3 + n\,N_2 + p\,T_1,$$
$$Z = m\,T_2 + n\,T_1 + p\,N_3.$$

Daar echter geen uitwendige krachten voorhanden zijn, zoo zijn de componenten X, Y en Z nul; eveneens is $p = 0$, daar de normaal tot het cylindervlak loodrecht is op de as. De hoeken, die de normaal maakt met de beide andere assen, worden elkanders complementen. Zij nu α de hoek, welken de normaal naar buiten gericht maakt met de x-as, dan heeft men:

$$m\,T_2 + n\,T_1 = 0, \text{ of } T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha = 0.$$

Brengt men hierin de waarden T_2 en T_1 over, dan verkrijgt men de begeerde voorwaarde-vergelijking, betrekking hebbende tot de punten van 't oppervlak:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \sin\alpha = 0 \quad . \quad . \quad (36)$$

§ 7. INTEGRATIE DER VOORGAANDE VERGELIJKINGEN.

We zullen de verschillende vergelijkingen in de vorige § verkregen en op wier verdere behandeling alles aankomt, nog eens achter elkander herhalen, om een duidelijk overzicht te verkrijgen.

$$\left.\begin{array}{ll} [1] & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \\ [2] & \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \\ [3] & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \end{array}\right\} \text{voor elk punt van 't lichaam;}$$

$$[4] \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos\alpha+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \sin\alpha=0 \Big\} \begin{array}{l}\text{voor de punten van} \\ \text{het oppervlak,}\end{array}$$

en voor elk punt, zoowel voor die van 't inwendige van 't lichaam als voor die van zijn oppervlak, de volgende betrekkingen:

$$[5] \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0, \ \frac{\partial v}{\partial z}=0, \ \frac{\partial w}{\partial z}=0, \ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Door eene eerste integratie van [1] vindt men algemeen:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=a_1+\mathrm{F}_1(x, y),$$

en door eene tweede integratie

$$u=a+a_1 z+z\,\mathrm{F}_1(x, y)+\mathrm{F}_2(x, y).$$

Daar echter volgens [5] in de uitdrukking u geen x kan voorkomen, zoo heeft men:

$$u=a+a_1 z+z\,\mathrm{F}_1(y)+\mathrm{F}_2(y),$$

of wanneer men a_1 voegt bij de willekeurige constante voorkomende in $F_2(y)$:

$$u = a + z F_1(y) + F_2(y).$$

Op dezelfde wijze verkrijgt men door de volledige integratie van [2]

$$v = a_1 + z f_1(x) + f_2(x).$$

Zoekt men nu de uitdrukkingen $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$, dan moet men volgens de laatste betrekking van [5] hebben:

$$z F'_1(y) + F'_2(y) + z f'_1(x) + f'_2(x) = 0,$$

waaruit:

$$F'_1(y) = -f'_1(x), \text{ en } F'_2(y) = -f'_2(x).$$

Hieraan kan alleen dan voldaan worden, wanneer deze uitdrukkingen zich herleiden tot dezelfde constante, voor ieder der beide betrekkingen verschillend. Door integratie bekomt men:

$$F_1(y) = b + c y, \text{ en } f_1(x) = b' - c x,$$
$$F_2(y) = e y, \text{ en } f_2(x) = -e x.$$

Een willekeurige constante is in de beide laatste uitdrukkingen weggelaten, omdat men deze reeds heeft voor u en v in de constanten a en a_1. De voorgaande uitdrukkingen van u en v worden dus:

$$u = a + z(b + c y) + e y,$$
$$\text{en } v = a_1 + z(b' - c x) - e x.$$

Drukt men nu nog uit, dat men volgens de betrekkingen (32) van de voorgaande §, voor

$$x = y = z = 0 \text{ hebben moet } \left\{ \begin{array}{l} u = v = w = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

dan nemen u en v ten laatste den volgenden vorm aan:

$$\left.\begin{aligned} u &= z\,(b + c\,y),\\ v &= z\,(b' - c\,x). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Gaan we nu over tot de integratie van [3] dan vindt men, daar w geheel onafhankelijk van z moet zijn:

$$w = \mathrm{F}\,(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Substitueert men nu deze verkregen waarden van u, v en w in [4], dan wordt deze voorwaarde-vergelijking:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + b + c\,y\right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + b' - c\,x\right) \sin\alpha = 0, \quad (39)$$

met nog een andere, betrekking hebbende op F en onmiddellijk voortvloeiende uit (38) en [3]:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

terwijl men uit (34) van § 6 voor de componenten T_1 en T_2 der elastische krachten verkrijgt:

$$\mathrm{T}_1 = \mathfrak{b}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + b' - c\,x\right), \mathrm{T}_2 = \mathfrak{b}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + b + c\,y\right). \quad (41)$$

We zullen nu aantoonen, dat de functie F door (39) en (40) volkomen bepaald is. Laten we voor een oogenblik aannemen, dat dit niet het geval is, dat er dus nog een andere functie F′ bestaat, welke aan de beide vergelijkingen voldoet. Noemen we het verschil dier beide functies θ, dan is duidelijk, dat men heeft:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,\\ &\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

We zullen zien, dat θ zich tot een constante moet herleiden. Om hiertoe te geraken, beschouwen we de volgende integraal:

$$A = \iint \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

uitgestrekt, over de geheele doorsnede, waarvan $dx\,dy$ een element voorstelt. Door partiëele integratie vindt men:

$$\iint \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = \int dy \left[\left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_1 - \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_0 \right] - \iint \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\, dx\, dy;$$

$$\iint \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 dx\, dy = \int dx \left[\left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_1 - \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_0 \right] - \iint \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\, dx\, dy.$$

De indices 0 en 1 hebben, zooals bekend is, betrekking op de punten, verkregen door de snijding van den omtrek der doorsnede en twee lijnen respectievelijk evenwijdig aan de as der x en aan die der y. Hier is, eenvoudigheidshalve ondersteld, dat dit aantal twee bedraagt. Is het meer in getal, dan levert dit toch volstrekt geen bezwaar op, daar het altijd even is, en dus gesplitst kan worden in kolommen van twee, zooals wij hier boven één uitgedrukt hebben. Verder heeft men de bekende betrekkingen:

$$d\,y_1 = d\,s_1 \cos \alpha_1, \qquad d\,y_0 = -\,d\,s_0 \cos \alpha_0,$$
$$d\,x_1 = d\,s_1 \sin \alpha_1, \qquad d\,x_0 = -\,d\,s_0 \sin \alpha_0.$$

Dit gebracht in de voorgaande integralen geeft:

$$A = \int \theta \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \alpha\right] d s - \iint \theta \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right] dx\, dy,$$

waarbij de integratie naar s over den geheelen omtrek van de doorsnede geschieden moet. Deze beide integralen zijn echter volgens (42) gelijk nul, dus ook:

$$A = \iint \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0.$$

Daar A bestaat uit de som van positieve grootheden, zoo kan aan deze betrekking alleen voldaan worden door te stellen

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \text{ en } \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

In de uitdrukking θ kunnen dus x en y niet meer voorkomen; het verschil der functies F en F′ herleidt zich derhalve tot een willekeurige constante. Daar echter in F geen constante kan voorkomen, uithoofde $w = F = 0$ voor $x = y = 0$, zoo is zij volkomen bepaald en eenwaardig. Ze is alleen veranderlijk met den vorm van doorsnede. Iedere vorm dus, welke men aan die functie weet te geven, voldoende aan de gestelde voorwaarden, kan aangenomen worden voor den begeerden. Men verkrijgt zulk een door te stellen:

$$F = b\, B_1 + b'\, B_2 + c\, B_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

De willekeurige constanten b, b' en c komen in de uitdrukkingen B niet meer voor. Dat de functie F in 't algemeen dezen vorm hebben moet, ziet men terstond uit de vergelijking (39), daar deze voor elke waarde der constanten bestaan moet.

De voorgaande vergelijkingen (40) en (39) splitsen zich nu elk in drie andere. De eerste geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{d y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 B_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_3}{\partial y^2} &= 0; \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

en de tweede:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin\alpha &= -\cos\alpha, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial B_2}{\partial y} \sin\alpha &= -\sin\alpha, \\ \frac{\partial B_3}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial B_3}{\partial y} \sin\alpha &= x \sin\alpha - y \cos\alpha. \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

§ 8. BETREKKING TUSSCHEN DE UITWENDIGE KRACHTEN EN DE VERPLAATSINGEN.

Zij nu gegeven een stelsel van uitwendige krachten, werkende op de vrije doorsnede van den cylinder, en dat ondersteld wordt in staat te zijn den toestand te voorschijn te kunnen roepen, behandeld in de vorige § §, een toestand uitgedrukt door de betrekkingen (33) van § 6. Laat ons zien, aan welke voorwaarden zulk een krachtsysteem voldoen moet. Daar van de componenten T_2, T_1, N_3 (zie § 6 verg. (34)) der elastische krachten voorhanden in de vrije doorsnede, dus voor elementen loodrecht op de z-as, N_3 overal verdwijnen moet, zoo zullen de uitwendige krachten geen component in de richting van deze as kunnen leveren, daar anders onmogelijk voor elk punt van 't lichaam aan de betrekking $N_3 = 0$ voldaan kan zijn. De richting dier krachten valt dus samen met die van 't vrije eindvlak. Voor 't overige zullen we echter die krachten nog als algemeen aannemen; dus het bestaan van de componenten in de richting der beide assen voor waar houden, hoewel naderhand zal blijken, dat men niets anders dan koppels kan hebben.

Vormt men nu de zes evenwichts-vergelijkingen zoowel voor de elastische, als voor de gegeven krachten, werkende in de vrije doorsnede, dan zullen deze uitdrukkingen aan elkander gelijk moeten zijn. Men heeft alsdan:

$$\begin{aligned} &\int T_2\, d\,q = A, &&\int -l\,T_1\, d\,q = A', \\ &\int T_1\, d\,q = B, &&\int l\,T_2\, d\,q = B', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46) \\ & &&\int (x\,T_1 - y\,T_2)\, d\,q = C'. \end{aligned}$$

Hierin stellen A en B de som der componenten voor van de uitwendige krachten in de richting van de assen x en y; A', B' en C' de waarde der koppels, wier assen respectievelijk samenvallen met de x- de y- en de z-as; l de lengte van den cylinder en $d\,q$ een element van de vrije doorsnede. De aangeduide integratie strekt zich uit over deze geheele doorsnede.

Uit de bovenstaande vergelijkingen volgt onmiddelijk:

$$A' = -\,l\,B, \text{ en } B' = +\,l\,A,$$

waaruit voortvloeit, dat men in 't geheel slechts drie verschillende betrekkingen overhoudt, en wel de volgende:

$$\int T_2\, d\,q = A, \int T_1\, d\,q = B \text{ en } \int (x\,T_1 - y\,T_2)\, d\,q = C' \,. \quad (47)$$

Door de waarden van T_1 en T_2, § 7 verg. (41) komen in deze drie betrekkingen de drie willekeurige constanten b, b' en c voor; echter lineair, en zijn derhalve door middel van deze drie vergelijkingen volkomen te bepalen in functies van de uitwendige krachten. Substitueert men vervolgens deze waarden van b, b' en c in de uitdrukkingen, u, v, w, T_1 en T_2, dan zijn alle grootheden bekend van den toestand, beantwoordende aan de gegeven uitwendige krachten. Dit ten uitvoer brengende nemen de integralen (47) den volgenden vorm aan:

$$\mathrm{b}\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}+b+c\,y\right)d\,q=A,$$

$$\mathrm{b}\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}+b'-c\,x\right)d\,q=B, \qquad (48)$$

$$\mathrm{b}\int\left[\,x\left(\frac{\partial F}{\partial y}+b'-c\,x\right)-y\left(\frac{\partial F}{\partial x}+b+c\,y\right)\right]d\,q=C'.$$

De verdere behandeling van deze integralen hangt innig samen met het bekend zijn van de functie F, een functie, zooals men weet, afhangende van den vorm der doorsnede. Voordat we echter overgaan tot het aannemen van een bepaalde doorsnede, zullen we eerst aantoonen, dat in de beide eerste integralen het voorkomen van F geen bezwaar tot verdere integratie oplevert.

Men vindt door partiëele integratie, op dezelfde wijze als vroeger in § 7,

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\,q=\int d\,y\left[\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1-\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\right]-\iint x\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

Voor de laatste integraal kan men, daar volgens (4) van § 7 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ is, schrijven:

$$+\iint x\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dx\,dy=\int dx\left[\left(x\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1-\left(x\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right],$$

waardoor men verkrijgt:

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}dq=\int dy\left[\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1-\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\right]+\int dx\left[\left(x\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1-\left(x\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right]$$

$$=\int x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha\right)ds,$$

waarin even als vroeger $d\,s$ wederom een element voorstelt van den omtrek der doorsnede; de aangeduide integratie strekt zich uit over den geheelen omtrek. De waarde van de uitdrukking tusschen haakjes geplaatst, kan echter bepaald worden in een vorm, die geheel onafhankelijk van de functie F is. Volgens (39) van § 7, heeft men toch:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha=-\left[(b+c\,y)\cos\alpha+(b'-c\,x)\sin\alpha\right],$$

waardoor de vorige uitdrukking zich herleidt tot de volgende:

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}d\,q=\int x\,(X\cos\alpha+Y\sin\alpha)\,d\,s,$$

waarin $X=-(b+c\,y)$ en $Y=-(b'-c\,x)$ is. Gaat men nu op den zoo even ingeslagen weg terug, dan vindt men achtereenvolgens:

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}d\,q=\int d\,y\,[(x\,X)_1-(x\,X)_0]+\int d\,x\,[(x\,Y)_1-(x\,Y)_0]$$

$$=\iint\left[\frac{\partial\,(x\,X)}{\partial\,x}+\frac{\partial\,(x\,Y)}{\partial\,y}\right]dx\,dy$$

$$=\int\left(\frac{\partial\,(x\,X)}{\partial\,x}+\frac{\partial\,(x\,Y)}{\partial\,y}\right)d\,q.$$

Geheel op dezelfde wijze verkrijgt men ook:

$$\int \frac{\partial F}{\partial y} d q = \int \left(\frac{\partial (y X)}{\partial x} + \frac{\partial (y Y)}{\partial y} \right) d q.$$

De waarden van X en Y hierin overgebracht, geeft:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\partial F}{\partial x} d q &= - \int (b + c y)\, d q \\ \int \frac{\partial F}{\partial y} d q &= - \int (b' - c x)\, d q \end{aligned} \right\} \ldots\ldots (49)$$

Deze substitueerende in (48), zoo gaan de beide eerste vergelijkingen over in:

$$A = 0 \text{ en } B = 0.$$

Daar A en B de componenten zijn der uitwendige krachten, werkende op het vrije eindvlak, zoo herleiden deze zich tot een stelsel koppels, wat reeds in den aanvang van deze § gezegd is. Van het stelsel vergelijking (48) blijft dus alleen de volgende over:

$$\int \left[x \left(\frac{\partial F}{\partial y} + b' - c x \right) - y \left(\frac{\partial F}{\partial x} + b + c y \right) \right] d q = \frac{C'}{\mathfrak{b}}. \quad (50)$$

Deze vergelijking is nog voor groote vereenvoudiging vatbaar, wanneer men alleen zulke doorsneden beschouwt, welke symmetrisch zijn ten opzichte van twee elkander loodrecht snijdende assen. In dit geval is dit snijpunt het massa-middelpunt van die doorsnede. Nemen we nu niet meer, zooals voorheen, het vastgelegde punt willekeurig aan, doch laten we het samenvallen met dit massa-middelpunt, dan zal de z-as overgaan in de zwaartelijn of as van den cylinder. In deze onderstelling heeft men:

$\int x\, dq = 0$, $\int y\, dq = 0$, $\int xy\, dq = 0$, of in 't algemeen $\int \varphi\, dq = 0$. (51)

wanneer φ een oneven functie van x of y is. Door een oneven functie ten opzichte van een zekere veranderlijke verstaat men zulk eene, welke alleen van teeken verandert, wanneer dit ook plaats grijpt met de veranderlijke zelf, doch wier absolute waarde onveranderd blijft. Bij een even functie verandert noch het teeken, noch de absolute waarde.

Noemen we, zooals vroeger altijd geschied is, den hoek, welken de normaal tot den omtrek van de doorsnede en gericht naar buiten, maakt met de x-as, α, dan zullen we bepalen welke functies $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ zijn ten opzichte van x en y.

Nemen we in een doorsnede, symmetrisch ten opzichte van de beide assen, twee punten, wier coördinaten respectievelijk zijn x, y en $-x, y$, dan gaat $\cos\alpha$ over in $-\cos\alpha$, terwijl $\sin\alpha$ niet van teeken verandert. Neemt men vervolgens tot het eerste punt een ander symmetrisch gelegen ten opzichte van de as der x, waarvan dus de coördinaten zijn $x, -y$, dan blijft $\cos\alpha$ onverandert, terwijl $\sin\alpha$ overgaat in $-\sin\alpha$. Men heeft dus:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha \left\{\begin{array}{l} \text{even ten opzichte van } y, \\ \text{oneven ten opzichte van } x; \end{array}\right. \\ \sin\alpha \left\{\begin{array}{l} \text{oneven ten opzichte van } y, \\ \text{even ten opzichte van } x. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (52)$$

Deze beschouwingen toegepast op verg. 45 van § 7 leveren de volgende uitkomsten:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \left\{\begin{array}{l} \text{even ten opzichte van } y, \\ \text{oneven ten opzichte van } x; \end{array}\right. \\ B_2 \left\{\begin{array}{l} \text{oneven ten opzichte van } y, \\ \text{even ten opzichte van } x; \end{array}\right. \\ B_3 \left\{\begin{array}{l} \text{oneven ten opzichte van } y, \\ \text{oneven ten opzichte van } x. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (53)$$

De voorgaande vergelijking (50) kan nu geschreven worden in den volgenden vorm:

$$- c \int (x^2 + y^2)\, d\, q + \int \left(x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\, y} - y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\, x} \right) d\, q = \frac{\mathrm{C}'}{\mathfrak{b}}, \quad (54)$$

daar volgens (51) $b' \int x\, dq$ en $b \int y\, dq$ verdwijnen. De laatste integraal van de voorgaande vergelijking, de uitdrukking:

$$\int \left(x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\, y} - y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\, x} \right) d\, q$$

levert door de waarde van F gevonden in verg. (43) § 7, drie anderen respectievelijk vermenigvuldigd met b, b' en c. Van deze drie verdwijnen volgens de betrekking $\int \varphi\, dq = 0$ die, welke vermenigvuldigd zijn met b en b'. De laatstgenoemde vergelijking (54) neemt dus ten slotte de volgende gedaante aan:

$$c \int \left[\left(x \frac{\partial\, \mathrm{B}_3}{\partial\, y} - y \frac{\partial\, \mathrm{B}_3}{\partial\, x} \right) - (x^2 + y^2) \right] d\, q = \frac{\mathrm{C}'}{\mathfrak{b}}, \quad (55)$$

waaruit:

$$c = \frac{\mathrm{C}'}{\mathfrak{b} \int \left[\left(x \frac{\partial\, \mathrm{B}_3}{\partial\, y} - y \frac{\partial\, \mathrm{B}_3}{\partial\, x} \right) - (x^2 + y^2) \right] d\, q} \quad . \quad . \quad (56)$$

---

§ 9. BEPALING VAN DE FUNCTIE F VOOR EEN ELLIPTISCHE DOORSNEDE.

We zullen nu de functie F trachten te bepalen voor eene doorsnede, wier omtrek gevormd wordt door een ellips, dus een doorsnede, die de vroeger aangenomen symmetrie bezit. Het zal blijken, dat F voor deze soort van doorsnede een rationeele algebräische functie is. Stellen we algemeen:

$$F = a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y$$
$$+ a_8 x y^2 + a_9 y^3 + a_{10} x^4 + \text{enz.},$$

dan verkrijgt men, daar $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ is, zonder moeite de volgende betrekkingen:

$$a_3 = - a_5, \quad 3 a_6 = - a_8, \quad a_7 = - 3 a_9, \quad 6 a_{10} = - a_{12},$$
$$a_{11} = - a_{13}, \quad a_{12} = - 6 a_{14} \text{ enz.},$$

waardoor de voorgaande uitdrukking wordt:

$$F = a_1 x + a_2 y + a_3 (x^2 - y^2) + a_4 x y + a_6 (x^3 - 3 x y^2)$$
$$+ a_9 (3 x^2 y - y^3) + a_{10} (x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4)$$
$$+ a_{11} (x^3 y - x y^3) + \text{enz.} \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

Verder moet deze functie nog voldoen aan de volgende betrekkingen, § 7, verg. (45):

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} tg\, \alpha = -1,$$
$$\frac{\partial B_2}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} tg\, \alpha = - tg\, \alpha \quad \ldots \ldots \quad (58)$$
$$\frac{\partial B_3}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial y} tg\, \alpha = x\, tg\, \alpha - y,$$

waar $F = b B_1 + b' B_2 + c B$ is. . . . . (59)

Het behoeft wel niet gezegd te worden, dat de vormen, welke B_1, B_2, B_3 zullen aannemen, opgesloten moeten zijn in dien van F.

Zij nu de vergelijking van de ellips

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

dan heeft men de bekende betrekking:

$$tg\,\alpha = \frac{m^2\,y}{n^2\,x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

waardoor de uitdrukkingen (58) overgaan in de volgende:

$$\left.\begin{aligned} n^2\,x\,\frac{\partial\,B_1}{\partial\,x} + m^2\,y\,\frac{\partial\,B_2}{\partial\,y} &= -\,n^2\,x, \\ n^2\,x\,\frac{\partial\,B_2}{\partial\,x} + m^2\,y\,\frac{\partial\,B_3}{\partial\,y} &= -\,m^2\,y, \\ n^2\,x\,\frac{\partial\,B_3}{\partial\,x} + m^2\,y\,\frac{\partial\,B_3}{\partial\,y} &= (m^2 - n^2)\,x\,y, \end{aligned}\right\} \ldots (62)$$

waaruit $\quad B_1 = -\,x,\ B_2 = -\,y,\ B_3 = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\,x\,y \ . \ . \ (63)$

Vergelijkt men deze uitkomsten met de waarde van F in (57), dan moet men hebben:

$$a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_4 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

terwijl de overige coëfficienten verdwijnen.

Men heeft dus algemeen:

$$F = -\,b\,x - b'\,y + c\,\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\,x\,y \ . \ . \ . \ . \ . \ (64)$$

Volgens (32) van § 6 en (38) van § 7, moet men echter hebben, wanneer $x = y = z = 0$ is,

$$\frac{\partial\,F}{\partial\,x} = \frac{\partial\,F}{\partial\,y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Aan deze laatste betrekkingen kan echter klaarblijkelijk alleen dan voldaan werden, wanneer men heeft:

$$b = b' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

waardoor ten laatste F den volgenden meer eenvoudigen vorm aanneemt:

$$\mathrm{F} = w = c\,\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\,x\,y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (67)$$

---

§ 10. OVER DEN VORM VAN DEN GETORDEERDEN CYLINDER.

Gaan we nu over tot de bepaling van de eenig overgebleven constante c. In (56) van § 8 hebben we gevonden:

$$c = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{b}\int\left[\left(x\,\frac{\partial\,\mathrm{B}_3}{\partial\,y} - y\,\frac{\partial\,\mathrm{B}_3}{\partial\,x}\right) - (x^2 + y^2)\right] d\,q.}$$

Brengen we nu hierin de waarde van B_3 gevonden in (63) § 9 dan bekomt men, na eene gemakkelijke integratie,

$$c = \frac{-\,\mathrm{C}'}{\dfrac{2\,\mathrm{b}}{m^2 + n^2}\int (n^2\,x^2 + m^2\,y^2)\,d\,q} = -\,\frac{m^2 + n^2}{m^2\,n^2\,q}\,.\,\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{b}}\,, \quad (68)$$

waarin q de inhoud van de ellips voorstelt. Met behulp van deze constante c kunnen wij de grootheden u, v, w, T_1 en T_2 uitdrukken in functie van de coördinaten, van de uitwendige krachten en van de gegevens, welke het elastisch lichaam bepalen. De vergelijkingen (37), (38) en (41) van § 7, nemen nu met inachtneming van de betrekking (66) van de vorige § den volgenden vorm aan:

$$u = -\frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b} y z, \qquad T_1 = \frac{2 C' x}{m^2 q},$$

$$v = \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b} z x, \qquad \qquad \qquad . \; . \; (69)$$

$$w = -\frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b} x y. \qquad T_2 = -\frac{2 C' y}{n^2 q}.$$

Deze formulen toonen aan, dat de hier behandelde toestand die is van zuivere torsie met de as van den cylinder als as van torsie, daar u, v, w, T_1 en T_2 voor $x = y = 0$, d. i. voor punten van de as, verdwijnen.

Voor den hoek ϑ, dien een willekeurige doorsnede op den afstand z gelegen van het $x\ y$-vlak, gedraaid is ten opzichte van zijn oorspronkelijken toestand, verkrijgt men:

$$\vartheta = \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b} z, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (70)$$

en voor dien, welken het vrije eindvlak gedraaid is:

$$\vartheta = \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b} l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (71)$$

De draaiing grijpt plaats van de richting der positieve x-as tot die van de positieve y-as.

Voor de waarde van het draaiingsmoment C′ vindt men:

$$C' = b \frac{m^2 n^2 q}{m^2 + n^2} \cdot \frac{\vartheta}{l} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (72)$$

Gaat de elliptische doorsnede over in een cirkelvormige, waarvan de straal r zij, dus $m = n = r$ en $q = \pi r^2$, dan nemen de beide laatste formulen de volgende gedaante aan:

$$\vartheta = \frac{2}{b} \cdot \frac{C' l}{\pi r^4} \ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

$$C' = \frac{b}{2} \cdot \frac{\vartheta}{l} \pi r^4 \ldots\ldots\ldots (74)$$

In dezen vorm worden de grootheden ϑ en C' altijd in de leerboeken over physika gegeven. Men ziet hier echter, dat ze alleen maar doorgaan voor eene cirkelvormige doorsnede, en dus verre van algemeen zijn.

Zijn de oorspronkelijke coördinaten van een willekeurig punt van den elastischen cylinder x, y, z, dan worden zij na de inwerking van uitwendige krachten:

$$\begin{aligned} x' &= x + u, \\ y' &= y + v, \ldots\ldots\ldots\ldots (75) \\ z' &= z + w. \end{aligned}$$

Elimineert men nu uit deze drie vergelijkingen z in de onderstelling, dat x en y constant zijn, dan verkrijgt men de meetkundige plaats van alle punten, die oorspronkelijk in eene rechte lijn gelegen waren evenwijdig aan de as van den cylinder of aan de z-as. Deze eliminatie is zeer gemakkelijk uit te voeren. De uitdrukkingen u, v, w, toch zijn zeer kleine grootheden; men maakt dus slechts een fout van hoogere orde, wanneer men in u en v, de grootheid z door z' vervangt. Noemen we u', v' de uitdrukkingen u, v, waarin z door z' vervangen is, dan wordt de gezochte meetkundige plaats:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + u', \\ y' &= y + v'. \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Elimineert men echter uit de vergelijkingen (75) in plaats van z, de veranderlijken x en y in de onderstelling, dat z constant is, dan verkrijgt men de vergelijking van de getordeerde doorsnede. Noemen we nu w' de uitdrukking w, waarin x en y door x' en y' vervangen zijn, dan wordt deze vergelijking:

$$z' = z + w' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

De eliminatie in (76) bedoeld ten uitvoer brengende, geeft:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b}\, y\, z', \\ y' &= y + \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b}\, x\, z'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Dit is nu wederom de vergelijking van een rechte lijn, die echter niet meer evenwijdig is aan de z-as. Na de torsie blijven de elementaire parallellopipeda, waaruit de cylinder gedacht kan worden te bestaan, en wier lengte-richting samenvalt met die der as, nog recht, doch niet meer evenwijdig aan die as. Voor $x = y = 0$ worden ook $x' = y' = 0$; de as van den cylinder blijft dus in zijn ouden stand, wat reeds aangemerkt geworden is. Dit is echter de eenige stoffelijke lijn, welke deze eigenschap bezit.

Zoeken we verder de meetkundige plaats van alle punten, die oorspronkelijk op het oppervlak van een rechten cirkelvormigen cylinder gelegen zijn, midden in het elastisch lichaam, en wiens as samenvalt met de as van torsie, dus voor punten, waarvoor $x^2 + y^2 = r^2$ is. Door de beide leden van (78) in het quadraat te verheffen, vindt men:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2 q} \cdot \frac{C'}{b}\right)^2 z'^2\right] \quad \ldots \quad (79)$$

Dit is de vergelijking van een eenvlakkige omwentelings-hyperboloide, wier omwentelings-as samenvalt met de as van torsie, terwijl de beide andere assen overeenstemmen met de x en y-as. Het oppervlak van den getordeerden cylinder zelf gaat over in eene gewone eenvlakkige hyperboloide, waarvan de vergelijking gemakkelijk op te maken is.

De doorsnede van (79) met het $x\,y$-vlak is natuurlijk een cirkel, en wel de keelcirkel. De verschillende doorsneden der hyperboloiden, verkregen door r te laten veranderen, met dit $x\,y$-vlak, vormen een stelsel van concentrische cirkels, wier middelpunten samenvallen met den oorsprong van het coördinatenstelsel. De doorsneden met het $y\,z$-, zoowel als met het $x\,z$-vlak zijn concentrische hyperbolen, wier imaginaire as constant is en in de richting der z-as valt; terwijl de reëele assen respectievelijk overeenstemmen met de beide andere assen van 't stelsel.

Trachten we nu den vorm te bepalen, dien eene doorsnede, oorspronkelijk loodrecht op de as van den cylinder, na de torsie zal aannemen. Hiertoe beschouwen we de vergelijking (77), die in verband met (69) wordt:

$$z' = z - \frac{m^2 - n^2}{m^2\,n^2\,q} \cdot \frac{C'}{\mathfrak{b}}\,x'\,y' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (80)$$

Stelt men hierin x' of y' gelijk aan willekeurige constanten, dan wordt (80) de vergelijking van twee stelsels platte vlakken, respectievelijk loodrecht op het $y\,z$- en op het $x\,z$-vlak. Doch x' en y' gelijkgesteld aan constanten, zegt met andere woorden, het oppervlak (80) snijden door vlakken evenwijdig aan het $y\,z$- en aan het $x\,z$-vlak. Deze beide stelsels van platte vlakken snijden elkander dus twee aan twee volgens rechte lijnen, evenwijdig aan de zoo even genoemde coördinaten-vlakken. De vergelijking

(80) stelt dus een hyperbolische paraboloide voor, wier assen dezelfde richting hebben als die van het coördinaten-stelsel.

Nemen we $z' = 0$ of m. a. w. zoeken we de doorsnede van (80) met het $x\,y$-vlak, dan verkrijgt men:

$$z = \frac{m^2 - n^2}{m^2\,n^2\,q} \cdot \frac{C'}{b}\, x'\,y' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (81)$$

welke de vergelijking is van een hyperbool, wier assymptoten samenvallen met de as der x en der y; daar men, zooals bekend is, de vergelijking dezer beide laatste lijnen verkrijgt door de constante gelijk nul te stellen, waaruit volgt:

$$x' = 0 \text{ en } y' = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (82)$$

dus de beide coördinaten-assen x en y. Laat men in (81) z veranderen, zoekt men m. a. w. de doorgangen van de verschillende getordeerde doorsneden van den cylinder met het $x\,y$-vlak, dan bekomt men een stelsel gelijkvormige hyperbolen, die alle dezelfde assymptoten hebben. Was oorspronkelijk $z = 0$, dan gaat de hyperbool (81) over in de beide assymptoten; de getordeerde bovenste doorsnede snijdt dus deze doorsnede in zijn oorspronkelijken stand in twee rechte lijnen, de x- en de y-as. Is z niet gelijk nul, dan kan de hyperbool nooit overgaan in twee rechte lijnen. Deze eigenschap komt dus alleen toe aan de bovenste doorsnede.

Stelt men x' of y' gelijk nul, dan verkrijgt men in beide gevallen $z' = z$; de beide hoofdparabolen van dit oppervlak zijn dus overgegaan in twee rechte lijnen. Voor $z = 0$, dus voor de bovenste doorsnede, worden deze lijnen wederom de assen der x en der y.

Wilde men eindelijk de vergelijking bepalen van een getordeerd meridiaan-vlak, dan zou men slechts de betrekkingen (78) behoeven te verbinden met $y = A\,x$, zijnde de vergelijking van een meridiaan-vlak in zijn oorspronkelijken stand, en uit deze drie x en y elimineeren. Voerde men deze eliminatie uit, dan zou men wederom de vergelijking verkrijgen van eene hyperbolische paraboloide. We zullen dit echter niet doen, maar liever nog een eigenschap aanwijzen van de paraboloide (80).

Zijn twee van deze oppervlakken, behoorende tot de doorsneden z_0 en z_1, voorgesteld door:

$$z'_0 = z_0 - \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2 q} \; \frac{C''}{b} \, x'_0 \, y'_0,$$

$$z'_1 = z_1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2 q} \; \frac{C}{b} \, x'_1 \, y'_1.$$

Beschouwen we nu twee punten, die gelegen zijn op eene lijn evenwijdig aan de z-as, dus punten waarvoor de z-coördinaten verschillend, doch de beide andere gelijk zijn, dan vindt men, wanneer men deze beide vergelijkingen van elkander aftrekt:

$$z'_1 - z'_0 = z_1 - z_0 = \text{constant},$$

waaruit volgt, dat al deze vlakken evenwijdig zijn, en dus de as van torsie onder denzelfden hoek snijden.

Wordt in verg. (80) $m = n$, waardoor dus de ellipsvormige doorsnede overgaat in een cirkelvormige, dan gaat deze vergelijking zelve over in de volgende meer eenvoudige:

$$z' = z. \qquad \qquad (83)$$

Alleen in dit geval blijft de oorspronkelijk vlakke doorsnede ook na de torsie nog vlak; de verplaatsing in de richting der

z-as wordt dus overal nul. Dit volgt ook onmiddellijk uit vergelijking (69); want door $m = n$ te stellen wordt w, zijnde de verplaatsing in de richting der z-as overal gelijk nul. De vroegere meening echter, dat dit vlak blijven algemeen voor elke willekeurige doorsnede waar zou zijn, is blijkbaar onjuist.

---

§ 11. OVER DE ELASTISCHE KRACHTEN.

Gaan we nu over tot de beschouwing van de elastische krachten, die in het inwendige van den getordeerden cylinder optreden. We hebben gezien, dat van deze krachten slechts overgebleven zijn de componenten:

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2\,\mathrm{C}'\,x}{m^2\,q} \text{ en } \mathrm{T}_2 = -\frac{2\,\mathrm{C}'\,y}{n^2\,q} \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Daar in deze uitdrukkingen de constante $\mathfrak{b}$, eene constante innig samenhangende met den aard van het elastisch lichaam, niet meer voorkomt, zoo zijn deze componenten en dus ook hunne resultante onafhankelijk van de stof, waaruit de cylinder gemaakt is, altijd voor lichamen, welke voldoen aan de gestelde voorwaarden van § 1. Ook komt in T_1 en T_2 de z niet voor; voor alle punten dus, waarvoor x en y niet veranderen zijn zij constant, alsmede hare resultante. Deze punten liggen op eene rechte lijn evenwijdig aan de as van den cylinder.

De uitdrukking der resultante wordt:

$$\mathrm{R} = \frac{2\,\mathrm{C}'}{q}\sqrt{\frac{x^2}{m^4} + \frac{y^2}{n^4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Zoeken we de meetkundige plaats van alle punten, voor welke deze resultante dezelfde waarde A heeft, dan vindt men:

$$\frac{x^2}{m^4} + \frac{y^2}{n^4} = \frac{q^2}{4\,C'^2} A^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (86)$$

zijnde de vergelijking van een elliptischen cylinder, wiens as samenvalt met de as van torsie. De assen van de doorsnede van dezen cylinder zijn die van x en y, terwijl hunne grootte uitgedrukt wordt door:

$$m' = \frac{q}{2\,C'} m^2 A, \text{ en } n' = \frac{q}{2\,C'} n^2 A \,.\,.\,.\,.\,. \quad (87)$$

Uit den vorm van de resultante R leidt men gemakkelijk af, dat zij grooter wordt naarmate x en y in dezelfde verhouding toenemen, dus langs een rechte lijn van uit het middelpunt naar den omtrek toe. De sterkst aangedane plaatsen zijn dus te zoeken op den mantel van den cylinder.

Men kan aan R, volgens de bekende betrekkingen $x = m \cos \varphi$ $y = x \sin \varphi$, den volgenden vorm geven:

$$R = \frac{2\,C'}{q} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{m^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}} \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (88)$$

Door differentiatie in de onderstelling, dat R een maximum is, verkrijgt men:

$$\cos \varphi \,.\, \sin \varphi = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (89)$$

waaraan voldaan kan worden door $\cos \varphi = 0$, zijnde de uiteinde der kleine as, en door $\sin \varphi = 0$, zijnde die van de groote. In het eerste geval bekomt men $R = \frac{2\,C'}{q\,n}$, en in het tweede $R = \frac{2\,C'}{q\,m}$. Daar echter $m > n$ is, zoo is het uiteinde der kleine as in elke doorsnede het punt, waarvoor de spanning een maximum is. Bestaat er gevaar voor breking, dan zal deze zich het eerst openbaren op het oppervlak van den cylinder, en wel volgens de theorie *gelijktijdig* langs eene geheele beschrijvende lijn, zijnde de meetkundige plaats van alle uiteinden der kleine assen in de verschillende doorsneden.

Ook dit resultaat is niet in overeenstemming met de vroegere theorie. Deze zegt n. l. dat die punten het sterkst aangedaan zullen zijn, welke het verst verwijderd zijn van de as van torsie; de onjuistheid van deze laatste bewering is echter uit de voorgaande beschouwingen duidelijk gebleken.

Voor andere doorsneden dan elliptische, mits begrensd door een gesloten kromme lijn, kan de bepaling van de benoodigde grootheden geheel op dezelfde wijze geschieden. Het mag in 't eene geval moeielijker zijn dan in 't andere, al naar mate de vergelijking van den omtrek meer of min gecompliceerd is, hun karakter blijft echter onveranderd; zij blijven rationeele algebraïsche functies.

Hetzelfde kan echter niet gezegd worden van doorsneden, wier omtrek gevormd wordt door rechte lijnen, zooals daar zijn driehoeken, kwadraten enz. Bij dit soort van doorsneden ondergaat het karakter van de functie F eene geheele verandering; zij verliest haren gesloten vorm en gaat over in een transcendente functie. We zullen echter hier niet verder op doorgaan, en verwijzen naar de reeds genoemde verhandelingen van de Saint-Vénant, waar verscheidene van die soort van doorsneden behandeld worden.

Het vorig onderzoek, aangaande de zuivere torsie van een cylindrisch lichaam met ellipsvormige doorsnede, kortelings samenvattende, levert ons de volgende resultaten:

1⁰. de richting der uitwendige krachten valt samen met die van het vrije eindvlak;

2⁰. de uitwendige krachten vormen koppels;

3⁰. de as van torsie is de as van den cylinder, of de meetkundige plaats van de zwaartepunten der verschillende doorsneden, (69);

4⁰. de hoek van torsie is evenredig aan het torsie-moment, aan de lengte van den cylinder, en aan zekere bepaalde constanten, afhangende van den aard en den vorm van het getordeerde lichaam, (70);

5⁰. het torsie-moment is evenredig aan den hoek van torsie, omgekeerd evenredig aan de lengte van den cylinder, en aan dezelfde constanten als in 4⁰, (72);

6⁰. de elementaire parallellopipeda, wier lengte-richting samenvallen met de as van torsie, blijven ook na de torsie nog rechte lijnen, doch niet meer evenwijdig aan de as, (78);

7⁰. de cylinders midden in 't lichaam, wier assen samenvallen met de as van torsie, gaan in eenvlakkige omwentelingshyperboloiden over, wier omwentelings-as de as van den getordeerden cylinder is; terwijl de mantel van dezen een gewone eenvlakkige hyperboloide wordt, (79);

8⁰. de oorspronkelijk vlakke doorsnede gaan over in evenwijdige hyperbolische paraboloiden, (80);

9⁰. de vorm van een meridiaan-vlak is na de torsie die van een hyperbolische paraboloide;

10⁰. de grootte van de elastische kracht in 't lichaam is onafhankelijk van den aard van den getordeerden cylinder, (84);

11⁰. in de verschillende doorsneden zijn ze ook onafhankelijk van de hoogte, waarop deze is aangebracht. (84);

12^0. de punten, waarvoor de elastische kracht dezelfde waarde heeft, liggen op het oppervlak van een elliptischen cylinder, waarvan de doorsnede concentrisch is met die van den oorspronkelijken cylinder, (86);

13^0. de punten, waarvoor de spanning een maximum wordt, liggen op den mantel van den getordeerden cylinder in de lijn, welke de uiteinden der kleine assen in de verschillende doorsneden verbindt.

STELLINGEN.

I.

De methode, waarbij Navier en Poisson komen tot de gelijkheid van a en b berust op onjuiste onderstellingen.

II.

De vroegere meening, dat de oorspronkelijk vlakke doorsnede van een cylindrisch lichaam nog vlak blijft na de torsie, is eene dwaling.

III.

Evenzoo is de meening onjuist, dat bij buiging van een staaf, de gebogen doorsnede loodrecht blijft op het gebogen elementair-parallellopipedum.

IV.

De formule gevonden voor N_i, T_i gelden alleen voor homogeene lichamen.

V.

Uit de lengte der waterstof-strepen in het spectrum van een protuberanz kan men niet besluiten tot de hoogte van de protuberanz.

VI.

Bij verreweg de meeste vlammen moet het lichtend vermogen toegeschreven worden aan vaste deeltjes in gloeienden toestand.

VII.

Wanneer een lichaam zich naar ons toe, of zich van ons afbeweegt, met eene snelheid vergelijkbaar met die van het licht, dan kan dit geen invloed hebben op de kleur van het lichaam, tenzij het homogeen licht uitstrale.

VIII.

Niet eene ontdekking gedaan op het gebied van physika, van wiskunde en aanverwante wetenschappen mag toegeschreven orden aan toeval.

IX.

In een umbilicus heeft men een oneindig aantal kromte-lijnen.

X.

De afleiding der integraal $\int x^n\, dx$, waarbij $n = -1$ wordt is onjuist, hoewel de uitkomst juist is.

Sturm pag. 313 T I.

XI.

De bewering, dat alleen agentia van gelijke soort op elkander werken, is onjuist.

Clausius, die potential-function und das potential.

XII.

Van alle bewijzen gegeven voor het z. g. parallellogram der krachten in verschillende leerboeken, is dat van Poinsot te verkiezen.

XIII.

Van alle methoden voor de oplossing der differentiaal-vergelijkingen, is de methode van den integrerenden factor theoretisch de meest volkomene.

J. de Jong, Acad. Proefsch.

XIV.

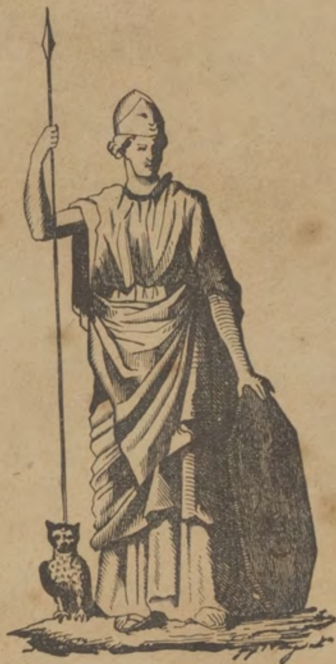
De overgangs-examens op de hoogere burgerschool moeten behouden blijven.

XV.

Leerplicht is noodzakelijk.

ERRATA.

Bladz.	16	reg.	3	v. o.	*staat:*	$Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial z}$	*lees:*	$Z_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z}$
„	26	„	6	v. b.	„	$2\, p_2\, m_2\, T_1$	„	$2\, p_2\, m_2\, T_2$
„	26	„	8	v. b.	„	$m_2\, n_3\, N_1$	„	$m_2\, m_3\, N_1$
„	26	„	8	v. b.	„	$n_3\, p_3$	„	$n_3\, p_2$
„	45	„	11	v. b.	„	$\frac{\partial N_3}{\partial y}$	„	$\frac{\partial N_2}{\partial y}$
„	47	„	8	v. o.	„	$\frac{\partial v}{\partial z}$	„	$\frac{\partial v}{\partial y}$



LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN A. W. SIJTHOFF.