E. J. EVERS.

OVER DE KRACHT

DIE EEN VLOEISTOFSTROOM IN SOMMIGE GEVALLEN LOODRECHT OP ZIJNE RICHTING OP EEN MEDEGESLEEPT LICHAAM UITOEFENT.

OVER DE KRACHT

DIE EEN VLOEISTOFSTROOM IN SOMMIGE GEVALLEN LOODRECHT OP ZIJNE RICHTING OP EEN MEDEGESLEEPT LICHAAM UITOEFENT.

OVER DE KRACHT
DIE EEN VLOEISTOFSTROOM IN SOMMIGE GEVALLEN LOODRECHT OP ZIJNE RICHTING OP EEN MEDEGESLEEPT LICHAAM UITOEFENT.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. A. C. VREEDE,
Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Dinsdag den 18den Mei 1897, des namiddags te 4 uren,

DOOR

EVERT JAN EVERS,
Geboren te Ellecom.

LEIDEN
BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ
VOORHEEN
E. J. BRILL.
1897.

BOEKDRUKKERIJ voorheen E. J. BRILL, LEIDEN.

AAN MIJNE MOEDER.

't Is mij aangenaam, hier een woord van dank te kunnen richten tot U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor de welwillendheid bij verschillende gelegenheden van U ondervonden.

Zeer bizondere verplichtingen heb ik aan U, Hooggeleerde Lorentz, Hooggeschatte Promotor! voor Uwe bemoeienissen met mijne studie, en voor den steun mij in ruime mate verleend bij de vervaardiging van dit proefschrift, zal ik U steeds dankbaar blijven.

Aan mijne vrienden van vroegeren en lateren tijd, breng ik met de toezending dezer dissertatie een afscheidsgroet bij mijn vertrek naar Zuid-Afrika.

't Is mij aangenaam, hier een woord van dank te kunnen richten tot U, Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor de welwillendheid bij verschillende gelegenheden van U ondervonden.

Zeer bizondere verplichtingen heb ik aan U, Hooggeleerde Jaeger, Hooggeachte Promotor! voor Uwe bemoeienissen met mijne studie, en voor den steun mij in ruime mate verleend bij de vervaardiging van dit proefschrift, zal ik U steeds dankbaar blijven.

Aan mijne vrienden van vroegeren en lateren tijd, breng ik met de toezending dezer dissertatie een afscheidsgroet bij mijn vertrek naar Zuid-Afrika.

INLEIDING.

Onder de mededeelingen van POISEUILLE in de »Comptes Rendus" van 1835, omtrent de beweging van het bloed in de capillaire vaten, komt o. a. voor, dat de roode bloedlichaampjes zich alleen in het midden van den stroom bevinden, terwijl de witte bloedlichaampjes in de doorzichtige laag nabij den buiswand worden aangetroffen (Ruimte van POISEUILLE).

Later heeft SCHKLAREWSKY aangaande dit verschijnsel waarnemingen gedaan en beschreven in »Pflüger's Archiv für Physiologie" (1868). Behalve bloed liet hij ook andere vloeistoffen, waarin zich onoplosbare korreltjes van verschillende stoffen bevonden, door enge buizen stroomen. Hierbij bleek, dat eene ontmenging van het mengsel plaats vond, evenals bij den bloedstroom. De grootere korreltjes speelden bij deze proeven de rol van de roode, en de kleinere die van de witte bloedlichaampjes.

In zijne verhandeling »Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten" brengt VON HELMHOLTZ enkele verdere proeven omtrent het verschijnsel ter sprake. 't Bleek, dat niet slechts in capillaire buisjes mikroskopisch kleine lichaampjes zich naar het midden van den stroom bewogen, maar dat iets dergelijks ook plaats vond met grootere lichaampjes bij veel wijdere buizen van 1 tot 5 cM. middellijn. Bij een bolletje van was, weinig zwaarder dan water, vallende in eene verticale met water gevulde buis, werd afstooting van de wanden naar het midden waargenomen; daarentegen bleek, dat bij zwaardere bolletjes, b. v. van lood, die sneller vallen, beweging van het midden naar den wand toe plaats had. De omstandigheden zijn evenwel hier anders dan bij de bloedlichaampjes, die door den stroom medegesleept worden; immers, bij de bedoelde proeven van VON HELMHOLTZ vielen de bolletjes door eene eerst *stilstaande* vloeistofmassa.

Naar deze verschijnselen heeft VON HELMHOLTZ in de genoemde verhandeling een theoretisch onderzoek ingesteld, maar hierbij slechts de eerste machten der snelheden in rekening gebracht. Hoewel nu dit onderzoek niet zonder resultaat was, zoo zijn de verschijnselen daardoor toch nog niet verklaard. Integendeel was VON HELMHOLTZ zelf er van overtuigd, dat hiertoe ook de tweede machten der snelheden in rekening gebracht moesten worden.

Nu is in het Zittingsverslag van 31 October 1896 der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van de Akademie van Wetenschappen te Amsterdam eene verhandeling van Prof. Lorentz medegedeeld, getiteld: »Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving en eenige daaruit afgeleide gevolgen", waardoor de bepaling van den bewegingstoestand met inachtneming der tweede machten kan ontgaan worden, en men de bij eene stationaire vloeistofbeweging op een lichaam werkende kracht nauwkeurig tot op grootheden van de tweede orde kan berekenen, zonder dat het noodig is, de snelheden zelve met dien graad van nauwkeurigheid te bepalen. Hierdoor ben ik in staat gesteld, onder eenvoudig gekozen omstandigheden de kracht te berekenen, die op een lichaam, dat door een vloeistofstroom wordt medegesleept, in eene richting loodrecht op dien stroom werkt.

HOOFDSTUK I.

§ 1. In plaats van door eene buis denken wij dat de vloeistof stroomt tusschen twee evenwijdige platen, wat het vraagstuk veel eenvoudiger maakt. Laat deze platen evenwijdig zijn aan het xy-vlak en laat de vloeistofstroom de richting der x-as hebben. De vlakken A en B zijn in rust en de vloeistof kan daarlangs niet glijden. Wanneer wij nu in de bewegingsvergelijkingen voor onsamendrukbare vloeistoffen met wrijving [1])

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$v=0$ en $w=0$ nemen, dan volgt uit de tweede, derde en vierde dezer vergelijkingen $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, $\frac{\partial p}{\partial z}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, wanneer nl. op de vloeistof de zwaartekracht niet werkt. De eerste der vergelijkingen wordt dan voor een stationairen stroom

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

en daar nu p onafhankelijk van y en z is, en u niet van x afhangt, volgt hieruit $\frac{\partial p}{\partial x}=$ constante en dus

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\text{const.}$$

Aan de evenwijdige platen, waarvan de oppervlakken door $z=A$ en $z=-B$ mogen voorgesteld worden, moet $u=0$ zijn, en aan de voorgaande vergelijkingen kan nu voldaan worden door eene quadratische functie van z, b. v.

$$u=\alpha+\beta z+\gamma z^2.$$

De constanten α, β en γ zijn bepaald door de voorwaarden

---

1) Hierin beteekenen volgens gewoonte u, v, w de snelheidscomponenten, p den druk, ρ de dichtheid, μ den wrijvingscoëfficient, X, Y en Z de componenten der uitwendige krachten per volume-eenheid.

$$\alpha + \beta A + \gamma A^2 = 0$$
$$\alpha - \beta B + \gamma B^2 = 0$$

en door b.v.

$$\alpha + \frac{1}{2} \beta (A - B) + \frac{1}{4} \gamma (A - B)^2 = Q$$

wanneer Q de snelheid in het midden voorstelt.

Wij denken ons thans in de vloeistof tusschen de platen een bol geplaatst. Ook voor dezen bol wordt evenmin als voor de vloeistof de zwaartekracht in rekening gebracht. Deze bol zal worden medegevoerd met eene zekere snelheid s, die voorloopig als eene onbekende te beschouwen is. Wij onderstellen, dat ook aan zijn oppervlak de vloeistof vastkleeft. Is nu de bol niet even ver van beide platen verwijderd, dan stroomt de vloeistof aan de eene zijde er met grootere snelheid langs dan aan de andere zijde. Terwijl de bol medegesleept wordt, zal hij dus tevens om eene as evenwijdig aan O Y gaan wentelen. De hoeksnelheid ω is als een tweede onbekende aan te zien. 't Komt er nu op aan, de verandering in den bewegingstoestand der vloeistof te leeren kennen, die door de aanwezigheid van den bol zal teweeggebracht worden. Wij nemen daarbij aan dat de bol zoo noodig door eene kracht evenwijdig aan de z-as op standvastigen afstand van de platen A en B wordt gehouden. Verder verwaarloozen wij bij dit vraagstuk de tweede en hoogere machten der snelheden. Noemen wij de snelheid der vloeistof bij afwezigheid van den bol u_0, en den dan bestaanden druk p_0, dan kunnen de snelheidscomponenten en de druk, als de bol er wel is, worden voorgesteld door

$$u = u_0 + u', \; v = v', \; w = w', \; p = p_0 + p'.$$

Stel nu, dat wij aan de vloeistof, aan den bol en aan de wanden eene snelheid $-s$ in de richting der x-as geven. Dan komt het middelpunt van den bol in zeker punt in rust, in welk punt wij den coordinaten-oorsprong kunnen plaatsen. De platen krijgen de snelheid $-s$ en de vloeistofbeweging wordt

$$u = u_0 - s + u', \quad v = v', \; w = w'.$$

De grootheden u', v', w' en p' moeten vooreerst aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \text{ enz.}$$

voldoen; zij stellen een bewegingstoestand op zich zelf voor, waarbij de druk p' zou behooren.

Verder moeten u', v', w' aan zekere voorwaarden voldoen aan de vlakken A en B en aan het oppervlak van den bol. Aan de oppervlakken A en B moet $u = -s$, $v = w = 0$ zijn, dus daar $u_0 = 0$ aan die oppervlakken, moet

$$u' = v' = w' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zijn.

Aan het oppervlak van den bol moeten de snelheden der vloeistof gelijk zijn aan die van den bol zelf. Nu heeft deze laatste nog altijd de rotatie om de y-as, derhalve zijn de snelheidscomponenten van een punt aan het oppervlak ωz, 0, $-\omega x$, zoodat de volgende voorwaarden bestaan aan het boloppervlak,

$$u_0 - s + u' = + \omega z, \; v' = 0, \; w' = - \omega x,$$

of wel

$$\left.\begin{aligned} u' &= (s-\alpha) - \beta z - \gamma z^2 + \omega z, \\ v' &= 0, \\ w' &= -\omega x. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Om nu u', v', w' zoo te bepalen, dat aan (2) en (3) voldaan is, kunnen wij aldus te werk gaan. Wij stellen ons eerst voor, dat de vloeistof zich rondom den bol tot in 't oneindige uitstrekt en bepalen u', v', w' zoo, dat voldaan is aan de voorwaarden (3) en op oneindigen afstand

$$u' = v' = w' = 0.$$

Laat deze waarden heeten u'_1, v'_1, w'_1. Dan is echter niet aan de voorwaarden (2) voldaan. Wij moeten daarom eene verbetering aanbrengen; stel dus dat in werkelijkheid

$$u' = u'_1 + u'_2, \quad v' = v'_1 + v'_2, \quad w' = w'_1 + w'_2.$$

De functies u'_2, v'_2, w'_2 moeten aan de bewegingsvergelijkingen voldoen; zorgt men bovendien, dat aan de platen u'_2, v'_2, w'_2 de reeds bekende waarden $-u'_1$, $-v'_1$, $-w'_1$ hebben, dan voldoen de totale waarden

$$u'_1 + u'_2, \quad v'_1 + v'_2, \quad w'_1 + w'_2$$

aan de voorwaarden (2).

Bij de bepaling van u'_2, u'_2, w'_2 handele men, alsof de bol er niet was. Denkt men dien dan vervolgens op zijn plaats gebracht, dan is weer niet aan (3) voldaan. Om dit nu weer in 't reine te brengen, kan men wederom nieuwe termen u'_3, v'_3, w'_3 toevoegen, die aan den bol (3) doen uitkomen, en op oneindigen afstand verdwijnen, en zoo kan men voortgaan. Men kan dit in 't kort uitdrukken door te zeggen, dat uit de beweging (u'_1, v'_1, w'_1) door »terugkaatsing" tegen de wanden de beweging (u'_2, v'_2, w'_2) ontstaat, hieruit weer door terugkaatsing aan den bol de beweging (u'_3, v'_3, w'_3), enz. Wanneer nu de middellijn van den bol klein is in vergelijking met den afstand der platen, worden deze bewegingen hoe langer hoe zwakker; men zal dan met (u'_2, v'_2, w'_2) kunnen eindigen. Eene methode ter bepaling van u'_2, v'_2, w'_2, wanneer eerst u'_1, v_1', w'_1 bekend zijn, ligt opgesloten in hetgeen Prof. Lorentz in de genoemde verhandeling aangeeft om te bepalen, hoe een gegeven bewegingstoestand door een vlakken vasten wand, waarlangs de vloeistof niet kan glijden, »teruggekaatst" wordt. Evenwel moeten hier de herhaalde terugkaatsingen aan de twee wanden in aanmerking genomen worden, en dit voert tot groote moeilijkheden. Wij zullen dan ook de werkelijke berekening der teruggekaatste beweging achterwege laten; gelukkig kan men ook zonder dat onder vereenvoudigende onderstellingen het teeken en de orde van grootte der gezochte kracht aangeven.

HOOFDSTUK II.

§ 2. Bepaling van den bewegingstoestand (u'_1, v'_1, w'_1) bij welken de snelheden aan den bol de waarden

$$u' = (s - \alpha) - \beta z - \gamma z^2 + \omega z,$$
$$v' = 0, \quad w' = -\omega x$$

hebben en op oneindigen afstand verdwijnen. De waarden u'_1, v'_1, w'_1 moeten voldoen aan de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Men kan dezen bewegingstoestand opvatten als te ontstaan uit de superpositie van een aantal andere, die alle voldoen aan de bewegingsvergelijkingen en op oneindigen afstand aan de voorwaarden $u' = v' = w' = 0$, doch waarvan de eerste aan den bol geeft

$$u' = s - \alpha \text{ (d. i. = constante)}, \quad v' = w' = 0,$$

de tweede $\quad u' = -\beta z, \quad v' = w' = 0,$

de derde $\quad u' = -\gamma z^2, \quad v' = w' = 0,$

de vierde $\quad u' = +\omega z, \quad v' = 0, \quad w' = -\omega x.$

Ter afkorting zullen deze vier toestanden A_1, A_2, A_3, A_4 genoemd worden. Bij de behandeling er van zullen gemakshalve de snelheidscomponenten en de druk telkens door u, v, w en p worden voorgesteld.

A_1.

De behandeling van soortgelijk geval als A_1 is te vinden in Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik. Voor ons geval krijgt men

$$u = b\left(\frac{3\,x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - c\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right),$$

$$v = 3\,b\,\frac{x\,y}{r^5} - c\,\frac{x\,y}{r^3},$$

$$w = 3\,b\,\frac{x\,z}{r^5} - c\,\frac{x\,z}{r^3},$$

$$p = 2\,\mu\,c\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,x}.$$

Aan den bol moet

$$u = \frac{x^2}{R^3}\left(\frac{3\,b}{R^2} - c\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{b}{R^2} + c\right) = s - \alpha$$

zijn, wanneer nl. de straal van den bol R is.

Hieruit volgt

$$\frac{3\,b}{R^2} - c = 0\,, \quad -\frac{b}{R^3} - \frac{c}{R} = s - \alpha,$$

dus

$$b = \frac{1}{4}\,R^3\,(\alpha - s),$$

$$c = \frac{3}{4}\,R\,(\alpha - s).$$

A_2.

Voor dit geval hebben wij waarden u, v en w zoo te bepalen, dat zij weer voldoen aan de vergelijkingen voor eene stationaire vloeistofbeweging

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,p}{\partial\,x} &= \mu\,\Delta\,u,\\ \frac{\partial\,p}{\partial\,y} &= \mu\,\Delta\,v,\\ \frac{\partial\,p}{\partial\,z} &= \mu\,\Delta\,w, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v}{\partial\,y} + \frac{\partial\,w}{\partial\,z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

op oneindigen afstand verdwijnen en op het boloppervlak met den straal R de waarden $u = -\beta\,z$, $v = 0$, $w = 0$ aannemen. Men kan deze vinden naar eene dergelijke methode als Kirchhoff gebruikt om de zooeven besproken oplossing te vinden.

Uit de drie eerste der bovenstaande vergelijkingen volgt door differentiatie naar x, y, z en optelling

$$\Delta\,p = 0\,,$$

waaraan wij kunnen voldoen door

$$p = 2\,g\,\mu\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,x\,\partial\,z},$$

g eene constante zijnde.

Wij bepalen nu verder eene hulpfunctie V door de vergelijking

$$\mu \triangle V = p; \qquad (5')$$

klaarblijkelijk voldoen dan aan de voorwaarden (4) de waarden

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Daar deze echter niet aan (5) voldoen, stellen wij

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w',$$

waardoor wij uit (4) en (5) de volgende voorwaarden voor u', v', w' afleiden:

$$\triangle u' = 0, \quad \triangle v' = 0, \quad \triangle w' = 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = - \triangle V = - \frac{p}{\mu} = - 2 g \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z}.$$

Het is hiermede in overeenstemming, wanneer wij stellen

$$u' = - e \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}, \quad v' = 0, \quad w' = (e - 2 g) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x},$$

waarin e eene nieuwe constante is.

Wat V betreft merken wij op, dat blijkens (5')

$$\triangle V = 2 g \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z}$$

moet zijn. Daar nu $\triangle r = \frac{2}{r}$ is, mag men dus aannemen

$$V = g \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},$$

maar eveneens, met toevoeging van een term die aan de vergelijking van Laplace voldoet, en op dergelijke wijze als de bovenstaande van x en z afhangt,

$$V = f \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z} + g \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}.$$

Alles samengenomen verkrijgen we dus

$$\left.\begin{aligned}
u &= f \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z} - e \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}, \\
v &= f \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial y \partial z} + g \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z}, \\
w &= f \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z^2} + g \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2} + (e - 2 g) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}, \\
p &= 2 g \mu \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

De proef op de som leert dat de waarden (6) werkelijk aan de bewegingsvergelijkingen voldoen. Bovendien wordt op oneindigen afstand $u = v = w = 0$.

Het komt er nu nog op aan te beproeven, of voor de constanten f, g en e zoodanige waarden te vinden zijn, dat de voorwaarden aan het boloppervlak vervuld worden. Voeren wij de differentiaties uit, dan krijgen wij

$$u = f(3\,z\,r^{-5} - 15\,x^2\,z\,r^{-7}) + g(-z\,r^{-3} + 3\,x^2\,z\,r^{-5}) + e\,z\,r^{-3},$$
$$v = -15\,f\,x\,y\,z\,r^{-7} + 3\,g\,x\,y\,z\,r^{-5},$$
$$w = f(3\,x\,r^{-5} - 15\,x\,z^2\,r^{-7}) + g(-x\,r^{-3} + 3\,x\,z^2\,r^{-5}) + (2\,g - e)\,x\,r^{-3}.$$

Alzoo moet

$$\frac{3\,x^2 z}{R^5}\left(g - \frac{5f}{R^2}\right) + \frac{z}{R^3}\left(\frac{3f}{R^2} - g + e\right) = -\beta\,z,$$
$$\frac{3\,x\,y\,z}{R^5}\left(g - \frac{5f}{R^2}\right) = 0,$$
$$\frac{3\,x\,z^2}{R^5}\left(g - \frac{5f}{R^2}\right) + \frac{x}{R^3}\left(\frac{3f}{R^2} + g - e\right) = 0$$

zijn. Dus

$$g - \frac{5f}{R^2} = 0, \quad \frac{3f}{R^2} - g + e = -\beta\,R^3,$$
$$\frac{3f}{R^2} + g - e = 0,$$

waaruit

$$e = -\frac{4}{3}\beta\,R^3, \quad f = -\frac{1}{6}\beta\,R^5, \quad g = -\frac{5}{6}\beta\,R^3.$$

A_3.

Hier moet aan het oppervlak van den bol

$$u = -\gamma\,z^2,$$
$$v = w = 0$$

zijn. Evenals in het vorige geval, nemen wij voor den druk eene waarde aan, die voldoet aan

$$\triangle\,p = 0,$$

kiezen vervolgens eene functie V zoo dat

$$\mu \triangle V = p$$

is, en stellen

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w',$$

met de voorwaarden

$$\triangle u' = 0, \quad \triangle v' = 0, \quad \triangle w' = 0,$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\triangle V = -\frac{p}{\mu}.$$

Het blijkt nu dat men aan de voorwaarden aan het boloppervlak kan voldoen, wanneer men stelt

$$\frac{1}{\mu} p = 2\, m \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z^2} + 2\, c' \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}.$$

Aan de voorwaarden voor V, u', v', w' wordt dan voldaan door

$$V = l \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z^2} + m \frac{\partial^3 r}{\partial x \, \partial z^2} + c' \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$u' = -\, q \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} - \frac{2\, c'}{r},$$

$$v' = 0,$$

$$w' = (q - 2\, m) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z}.$$

Daardoor wordt ten slotte

$$u = l \frac{\partial^4 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2 \, \partial z^2} + m \frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \, \partial z^2} - q \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} - c' \left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right),$$

$$v = l \frac{\partial^4 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial y \, \partial z^2} + m \frac{\partial^4 r}{\partial x \, \partial y \, \partial z^2} - c' \frac{x\, y}{r^3},$$

$$w = l \frac{\partial^4 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z^3} + m \frac{\partial^4 r}{\partial x \, \partial z^3} - (2\, m - q) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z} - c' \frac{x\, z}{r^3}.$$

Uit de voorwaarden aan het oppervlak van den bol volgt nu:

$$l = \frac{1}{24} \gamma R^7, \quad m = \frac{7}{24} \gamma R^5, \quad q = \frac{5}{12} \gamma R^5, \quad c' = \frac{1}{4} \gamma R^3.$$

A_4.

Dit geval is weer rechtstreeks te vinden in Kirchhoff's Vorlesungen über math. Physik. — In ons geval wordt dan (nl. bij wenteling om de y-as)

$$u = \omega \frac{R^3}{r^3} z, \quad v = 0, \quad w = -\, \omega \frac{R^3}{r^3} x,$$

$$p = 0.$$

De superpositie dezer vier deelen geeft den bewegingstoestand, die door de aanwezigheid van den bol wordt teweeggebracht, en door de platen zal teruggekaatst worden. Kortheidshalve zullen wij de totale beweging, die uit A_1, A_2, A_3, A_4 is samengesteld, A noemen.

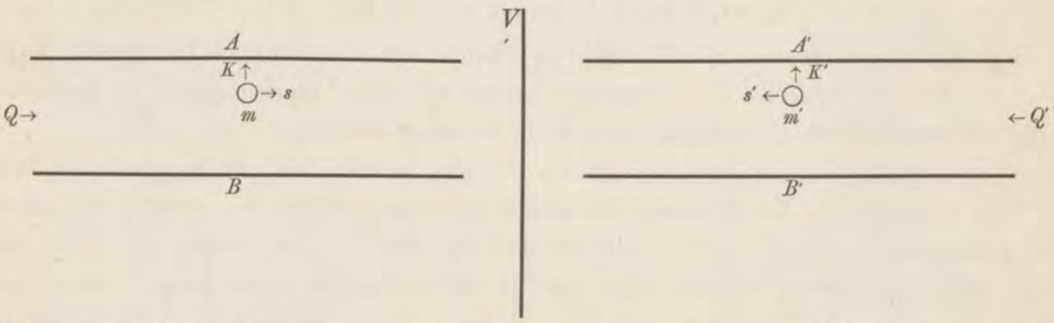
A_0.

Den bewegingstoestand, die er zou zijn, wanneer de bol er niet was, en dien wij reeds vroeger genoemd hebben, zullen wij door het teeken A_0 aanduiden. Hij wordt, zooals wij reeds zagen, bepaald door

$$u = \alpha - s + \beta z + \gamma z^2,$$
$$v = 0,$$
$$w = 0,$$
waarbij behoort $$p = 2\gamma\mu x.$$

§ 3. Om het vraagstuk volledig op te lossen, zou men de terugkaatsing van de bewegingen $A_1 - A_4$ door de vaste wanden moeten berekenen. Dit vordert echter, zooals wij reeds gezegd hebben, zeer ingewikkelde becijferingen. Daarom zullen wij ons tevreden stellen met datgene, wat zonder deze berekening kan worden gevonden.

Eenige eigenschappen van den bewegingstoestand, die ontstaat door al de herhaalde terugkaatsingen, kunnen nu gemakkelijk worden ingezien. Ook aangaande de snelheid waarmede de bol wordt medegesleept, aangaande de hoeksnelheid waarmede hij wentelt, en aangaande de kracht die hij ondervindt, dient nog wat te worden opgemerkt. Stellen wij ons daartoe dan weer voor: de beide evenwijdige platen A en B, waartusschen de vloeistof stroomt met de snelheid Q in de richting der pijl, verder het bolletje m in dezen stroom geplaatst en medegesleept met eene snelheid s, terwijl het wentelt met de hoeksnelheid ω. De kracht, die het bolletje verhindert, zich in zijdelingsche richting te verplaatsen, zullen wij voorloopig K noemen.



Wanneer nu de afmetingen gegeven zijn, moet alles bepaald zijn door de snelheid Q, die de vloeistof op grooten afstand van den bol in het midden tusschen de evenwijdige platen heeft.

Is Q zeer klein, dan behouden wij alleen de eerste macht. Is Q wat grooter, maar toch nog tamelijk klein, dan kunnen wij alles ontwikkelen in reeksen naar de opklimmende machten van Q.

Wij kunnen nu van alles het spiegelbeeld nemen, ten opzichte van een vlak V loodrecht op de richting van Q. Dan verkrijgen wij een nieuwen bewegingstoestand, zooals in de figuur rechts geteekend is. Hierbij is $K' = K$, $s' = -s$, $\omega' = -\omega$. Deze nieuwe bewegingstoestand ontstaat echter ook, wanneer men in het oorspronkelijke geval de richting van Q omkeert. Daar nu $K' = K$ moet worden, kan K alleen termen met even machten van Q bevatten. De eerste zal die met Q^2 zijn. Daarentegen moeten in de uitdrukkingen voor s en ω alleen termen met oneven machten van Q voorkomen, en hier zal de eerste die met Q zijn.

a. Denken wij ons thans, dat het vlak V door het middelpunt van den bol is gebracht; voor het nu volgende is dit gemakkelijker. Wij zullen den oorspronkelijken bewegingstoestand door (I) aanduiden, zijn spiegelbeeld ten opzichte van het vlak V daarentegen door (II).

Wij beschouwen het punt P_1 met de coördinaten x, y, z en het punt P_2 met de coördinaten $-x, y, z$. De waarden, die bij den toestand I behooren, zullen wij in P_1 door u_1, v_1, w_1, p_1, en in P_2 door u_2, v_2, w_2, p_2 aanduiden; eveneens de bij II voorkomende waarden in P_1 door u'_1, v'_1, w'_1, p'_1 en in P_2 door u'_2, v'_2, w'_2, p'_2.

Nu hebben wij, krachtens de eigenschappen der spiegelbeelden,

$$u'_1 = -u_2,\; v'_1 = v_2,\; w'_1 = w_2,$$
$$u'_2 = -u_1,\; v'_2 = v_1,\; w'_2 = w_1.$$

De bewegingstoestand (II) wordt echter ook weer verkregen door omkeering van de snelheid Q. Wanneer dit met Q geschiedt, verkrijgen ook alle andere snelheden juist de tegengestelde richting met behoud der grootte, indien althans de tweede machten der snelheden verwaarloosd kunnen worden.

Alzoo hebben wij

$$u'_1 = -u_1,\; v'_1 = -v_1,\; w'_1 = -w_1,$$
$$u'_2 = -u_2,\; v'_2 = -v_2,\; w'_2 = -w_2.$$

Hieruit volgt in verband met bovenstaande vergelijkingen

$$u_1 = u_2,\; v_1 = -v_2,\; w_1 = -w_2,$$

d. w. z. u is eene evene functie van x, terwijl de waarden van v en w onevene functiën van x zijn. De boven onder $A_1 - A_4$ neergeschreven waarden hebben alle deze eigenschappen, de snelheidscomponenten der teruggekaatste beweging moeten die eveneens vertoonen.

b. Men beschouwe op dezelfde wijze het spiegelbeeld der beweging ten opzichte van een vlak, door 't middelpunt van den bol loodrecht op de y-as gebracht. Daar hierbij Q niet verandert, moet de aldus verkregen beweging geheel met de oorspronkelijke overeenkomen. Daaruit volgt, dat in de teruggekaatste beweging, even goed als in de boven onderzochte, u en w even functiën van y moeten zijn, terwijl v eene oneven functie van y is.

c. Wanneer de beweging, die uit de boven onderzochte deelen $A_1 - A_4$ bestaat (en die ik kortheidshalve de beweging A zal noemen; het deel A_0 wordt natuurlijk niet teruggekaatst), in verschillende deelen gesplitst wordt, die ieder op zich zelf aan de bewegingsvergelijkingen voldoen, beantwoordt aan elk daarvan ook een gedeelte van de teruggekaatste beweging. Eene splitsing van A in vier stukken A_1, A_2, A_3, A_4 hadden wij reeds boven; men kan echter de splitsing nog verder drijven. Men kan b.v. in A_1 termen met den factor R^3 (dus met b) scheiden van die met den factor R (dus met c). Eveneens kan men A_2 splitsen in tweeën (met R^5 en R^3), A_3 in drieën (met R^7, R^5 en R^3).

d. Men kan, zonder de teruggekaatste beweging geheel te berekenen, aangeven van welke orde van grootte de daarbij voorkomende snelheden zijn. Zij D de halve afstand der beide platen en denken wij ons twee vlakken aangebracht loodrecht op de x-as, op afstanden rechts en links van het middelpunt van den bol, die b. v. eenige malen D zijn, en op dezelfde manier twee vlakken loodrecht op de y-as. De beweging A brengt nu aan de deelen der platen, die zich tusschen deze vlakken bevinden, snelheden van zekere orde van grootte G. De teruggekaatste beweging moet aan de wanden snelheden van dezelfde orde van grootte hebben, en ook in de geheele ruimte tusschen de aangebrachte vlakken. Immers er is geen reden, waarom de door de platen teruggekaatste beweging in enkele punten bijzonder geconcentreerd zal worden.

Wat nu G betreft, valt op te merken, dat aan den wand de afstand r van de orde D is, wanneer wij tenminste aannemen, dat de bol niet veel dichter bij de eene dan bij de andere plaat ligt. Men kan dus gemakkelijk voor al de deelen, waarin wij de beweging A splitsen, de orde van grootte aan den wand aangeven. Daarbij moeten wij in het oog houden, dat men, door r n-maal naar x, y of z te differentieeren, eene uitkomst verkrijgt van de orde r^{1-n}; eveneens door $\frac{1}{r}$ n-maal te differentieeren, eene uitkomst van de orde r^{-1-n}.

Aldus vindt men b. v. dat aan het tweede deel van A_1 met R $(\alpha - s)$ eene teruggekaatste beweging beantwoordt met snelheden van de orde

$$R(\alpha - s)\,\frac{1}{D}.$$

Aan het eerste deel van A_1, d. i. aan de termen met b, beantwoordt eene teruggekaatste beweging van de orde

$$R^3(\alpha - s)\,\frac{1}{D^3}.$$

Aan het deel van A_2 met termen van R^5 beantwoordt eene teruggekaatste beweging van de orde

$$\beta\,\frac{R^5}{D^4}.$$

Dan heeft de teruggekaatste beweging A_2 nog termen van de orde

$$\beta\,\frac{R^3}{D^2}.$$

De beweging A_3, teruggekaatst, geeft termen van de orden

$$\gamma\,\frac{R^7}{D^5},\ \gamma\,\frac{R^5}{D^3},\ \gamma\,\frac{R^3}{D}.$$

De beweging A_4 eindelijk geeft bij de terugkaatsing termen van de orde

$$\omega\,\frac{R^3}{D^2}.$$

HOOFDSTUK III.

§ 4. Bepaling van de snelheid s, waarmede de bol wordt medegesleept, en van de hoeksnelheid ω.

Wij hebben hiervoor twee condities:

1° de resulteerende kracht, op den bol in de richting der x-as werkende, moet 0 zijn.

2° het resulteerende koppel eveneens.

Dus

$$\int \left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r} \right) d\sigma = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

en

$$\int \left[z \left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r} \right) - x \left(Z_x \frac{x}{r} + Z_y \frac{y}{r} + Z_z \frac{z}{r} \right) \right] d\sigma = 0, \quad \ldots \quad (8)$$

wanneer de integralen over het boloppervlak uitgestrekt worden.

Men moet in deze vergelijkingen de waarden van X_x, enz. substitueeren, die behooren bij den totalen bewegingstoestand, de teruggekaatste beweging er onder begrepen; deze waarden worden berekend door de formules

$$X_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad X_y = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ enz.}$$

Voor wij nu met deze berekeningen beginnen, moet ter bekorting het een en ander worden opgemerkt:

a. Wordt eene even functie van x naar x gedifferentieerd, dan ontstaat eene oneven functie, en omgekeerd. Differentieeren naar y en z brengt geene verandering in het even of oneven karakter eener functie met betrekking tot x.

b. Een differentiaalquotient van r of $\frac{1}{r}$, waarbij naar x een even (of oneven) aantal malen gedifferentieerd wordt — onverschillig hoe dikwijls naar y of z gedifferentieerd is —, is dus eene even (of onevene) functie van x.

c. In de integraal

$$\int \left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r} \right) d\sigma$$

behoeft men in X_x alleen termen te behouden, oneven naar x, even naar y en z.

d. In de integraal (8) behoeft men in X_x alleen termen te behouden, oneven naar x, oneven naar z en even naar y.

Aan deze opmerkingen kunnen natuurlijk dergelijke, die op de y- en z-as betrekking hebben, worden toegevoegd. Eindelijk is het duidelijk, dat men bij de berekening van het koppel de termen $-p$ in X_x en Z_z mag weglaten.

Door nu na te gaan, welke termen in X_x, X_y, enz., die uit $A_0 - A_4$ voortvloeien, met betrekking tot x, y of z even of oneven zijn, kan men zien, welke deelen van den bewegingstoestand A iets voor de integraal (7), en welke iets voor de integraal (8) opleveren. Zoo blijkt het, dat alleen A_0, A_1 en A_3 iets voor de integraal (7), en alleen A_2 en A_4 iets voor (8) geven. Evenzeer overtuigt men zich gemakkelijk er van, dat onder de teruggekaatste bewegingen ook alleen de bij A_1 en A_3 behoorende iets voor (7), en alleen de bij A_2 en A_4 behoorende iets voor (8) opleveren (verg. boven § 3, *a* en *b*).

§ 5. Voor wij nu verder gaan is het wenschelijk te onderzoeken, van welke orde de bijdragen voor (7) en (8) zijn, die uit deze teruggekaatste bewegingen voortvloeien.

Wij onderstellen den straal R van den bol zeer klein in vergelijking met den halven afstand D der platen, en behouden, wanneer twee grootheden bij elkander opgeteld worden, die verschillende machten van R bevatten, alleen die met de laagste macht. Is er dus van de beweging sprake, die A_1 aan den wand geeft en dus ook (verg. § 3, *c*) van de daarbij behoorende teruggekaatste beweging, dan behoeft men alleen op de termen te letten, die $R(\alpha - s)$ bevatten.

De uit A_1 ontstaande teruggekaatste beweging — zij moge A'_1 heeten — is van de orde

$$R(\alpha - s)\frac{1}{D}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

en van dezelfde orde van grootte zijn ook de snelheden, die bij deze beweging in de onmiddellijke nabijheid van den bol voorkomen, dus ook de snelheden daar ter plaatse bij de beweging A''_1, die uit A'_1 door terugkaatsing aan den bol ontstaat. De snelheidscomponenten nu van deze beweging A''_1, die zich van af het boloppervlak in de ruimte verspreidt, nemen minstens zoo snel af als $\frac{1}{r}$; dus zullen bij A_1'' de waarden van $\frac{\partial u}{\partial x}$ enz. aan het boloppervlak van de orde

$$(\alpha - s)\frac{1}{D}$$

zijn. Daarentegen zijn klaarblijkelijk de waarden van $\frac{\partial u}{\partial x}$ enz. bij de beweging A'_1 van de orde

$$R(\alpha - s)\frac{1}{D^2}.$$

De spanningscomponenten worden bijgevolg van de orde

$$\mu(\alpha - s)\frac{1}{D}$$

en de daaruit voortvloeiende resulteerende kracht, voorgesteld door de integraal (7), wordt van de orde

$$\mu(\alpha - s)\frac{R^2}{D}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Wat nu verder de beweging betreft, die door de terugkaatsing van A_3 ontstaat, hebben wij alleen met de termen te doen, die c' bevatten; de andere termen bevatten nl. hoogere machten van R. Dus is de teruggekaatste beweging van de orde

$$\gamma R^3 \frac{1}{D}.$$

Aan het bolopppervlak zijn de waarden van $\frac{\partial u}{\partial x}$ enz. van de orde

$$\gamma R^2 \frac{1}{D}$$

en de resulteerende kracht zal dus zijn van de orde

$$\mu \gamma R^4 \frac{1}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Men vindt nu gemakkelijk dat de waarde van (7), voor zoover zij van A_1 afhangt, van de orde

$$\mu (\alpha - s) R$$

en, voor zoover zij van A_3 afhangt, van de orde

$$\mu \gamma R^3$$

is. In vergelijking hiermede mogen wij dus, krachtens de omtrent $\frac{R}{D}$ gemaakte onderstelling, (10) en (11) verwaarloozen.

Tot dergelijke beschouwingen geeft het koppel aanleiding, en zoo komt men tot het besluit, dat men bij de behandeling der vergelijkingen (7) en (8) geheel van de teruggekaatste beweging kan afzien.

§ 6. De berekening van s en ω zullen wij nu gaan uitvoeren.

Veel gemak levert de voorafgaande berekening der volgende integralen, te nemen over het bolopppervlak met den straal R.

$$\int x^2\, d\sigma = \int y^2\, d\sigma = \int z^2\, d\sigma = \frac{4}{3} \pi R^4,$$

$$\int x^4\, d\sigma = \int y^4\, d\sigma = \int z^4\, d\sigma = \frac{4}{5} \pi R^6,$$

$$\int x^2 y^2\, d\sigma = \int x^2 z^2\, d\sigma = \int y^2 z^2\, d\sigma = \frac{4}{15} \pi R^6,$$

$$\int x^6\, d\sigma = \int y^6\, d\sigma = \int z^6\, d\sigma = \frac{4}{7} \pi R^8,$$

$$\int x^4 z^2\, d\sigma = \int x^2 z^4\, d\sigma = \text{enz.} = \frac{4}{35} \pi R^8,$$

$$\int x^2 y^2 z^2\, d\sigma = \frac{4}{105} \pi R^8.$$

De berekening der integraal (7) kan in drie deelen gesplitst worden. Men kan nl. afzonderlijk berekenen, wat door A_0, A_1 en A_3 geleverd wordt. De samenvoeging der drie uitkomsten geeft dan de waarde der integraal.

Bijdrage van A_0. Deze is

$$\int d\sigma\,(-2\gamma z^2 + \beta z + 2\gamma z^2).$$

Daar deze integraal over het boloppervlak genomen moet worden, is hare waarde gelijk nul.

Bijdrage van A_1.

$$\mu\int d\sigma\,(18\,b\,R^{-6}\,x^2 - 30\,b\,R^{-8}\,x^4 - 30\,b\,R^{-8}\,x^2 y^2 + 6\,b\,R^{-6}\,y^2 - 30\,b\,R^{-8}\,x^2 z^2 + 6\,b\,R^{-6}\,z^2 +$$
$$+\,6\,c\,R^{-6}\,x^4 + 6\,c\,R^{-6}\,x^2 y^2 + 6\,c\,R^{-6}\,x^2 z^2),$$

waarvoor men gemakkelijk vindt, als men ter vereenvoudiging den factor $4\,\pi\,\mu\,R^2$ weglaat,

$$2\,c\,R^{-2} = \frac{3}{2}\,R^{-1}\,(\varkappa - s).$$

Bijdrage van A_3. De ontwikkeling van den algemeenen vorm

$$\int\left(\frac{x}{r}\,X_x + \frac{y}{r}\,X_y + \frac{z}{r}\,X_z\right)d\sigma$$

der bijdrage van A_3 zullen wij trachten wat te bekorten. Wij schrijven daartoe, evenals in § 2,

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u',\quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v',\quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'.$$

Dan vinden wij

$$X_x = -p + 2\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\mu\,\frac{\partial u'}{\partial x},$$
$$X_y = 2\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right),$$
$$X_z = 2\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} + \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right).$$

De integraal

$$\int\left(\frac{x}{r}X_x + \frac{y}{r}\,X_y + \frac{z}{r}\,X_z\right)d\sigma$$

wordt dan

$$\int\Bigg[-\frac{x}{r}\,p + 2\mu\left(\frac{x}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{y}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \frac{z}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right) + \mu\,\Bigg\{2\,\frac{x}{r}\,\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{y}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) +$$
$$\frac{z}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)\Bigg\}\Bigg]\,d\sigma.$$

Nu is

$$\frac{\partial V}{\partial x} = l\,\frac{\partial^4\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,x^2\,\partial\,z^2} + m\,\frac{\partial^4 r}{\partial\,x^2\,d\,z^2} + c'\,\frac{\partial^2 r}{\partial\,x^2}$$

en dus, krachtens eene eigenschap der homogene functiën,

$$\frac{x}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{y}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \frac{z}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = -5\,l\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^4\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,x^2\,\partial\,z^2} - 3\,m\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^4 r}{\partial\,x^2\,\partial\,z^2} - c'\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial\,x^2}.$$

Evenzoo volgt uit de waarde van u':

$$\frac{x}{r}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial u'}{\partial z}=3\,q\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2}+2\,\frac{c'}{r^2}.$$

Verder is

$$v'=0 \text{ en } -\frac{x}{r}p+\mu\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{z}{r}\frac{\partial w'}{\partial x}\right)=\mu\left[-4\,c'\,\frac{x}{r}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}-(q+2\,m)\,\frac{x}{r}\,\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\,\partial z^2}+\right.$$
$$\left.+(q-2\,m)\,\frac{z}{r}\,\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2\,\partial z}\right].$$

Ten slotte krijgen we dus voor de bijdrage van A_3:

$$\int\mu\left[-10\,l\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^4\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2\,\partial z^2}-6\,m\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\,\partial z^2}-2\,c'\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+3q\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2}+2\,\frac{c'}{r^2}-4\,c'\,\frac{x}{r}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-(q+2\,m)\,\frac{x}{r}\,\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\,\partial z^2}+(q-2\,m)\,\frac{z}{r}\,\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2\,\partial z}\right]d\,\sigma.$$

Men vindt voor de waarde van deze integraal, wanneer men haar gemakshalve door $4\,\pi\,\mu\,R^2$ deelt:

$$\frac{c'}{2\,R^2}=\frac{1}{2}\,\gamma\,R.$$

De som der bijdragen van A_0, A_1 en A_3 gelijk 0 stellende, verkrijgt men

$$\frac{3}{2}\,(\alpha-s)\,R^{-1}+\frac{1}{2}\,\gamma\,R=0,$$

waaruit

$$s=\alpha+\frac{1}{3}\,\gamma\,R^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

De integraal (8), die het koppel voorstelt, zullen wij in twee deelen splitsen, nl. in het eerste deel, waarin de factor z met het positieve teeken voorkomt, en in het tweede, dat den factor x met het negatieve teeken bevat.

Beschouwen we dan vooreerst de integraal

$$\int z\left(\frac{x}{r}\,X_x+\frac{y}{r}\,X_y+\frac{z}{r}\,X_z\right)d\,\sigma. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Voorzoover deze van A_2 afhangt, kunnen we weer de ontwikkeling bekorten door te schrijven, met weglating van $-p$ in X_x (verg. § 4),

$$X_x=2\,\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\,\mu\,\frac{\partial u'}{\partial x},$$

$$X_y=2\,\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+\mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right),$$

$$X_z=2\,\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+\mu\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{r}\left(x X_x + y X_y + z X_z\right) = \frac{2\mu}{r}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mu}{r}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)u' +$$
$$+\frac{\mu}{r}\left(x\frac{\partial u'}{\partial x} + y\frac{\partial v'}{\partial x} + z\frac{\partial w'}{\partial x}\right).$$

Nu is

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2 \partial z} + g\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z},$$

$$u' = -e\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z},\ v' = 0,\ w' = (e-2g)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}.$$

De beschouwde integraal krijgt den vorm

$$\mu\int z\left[-8f\frac{1}{r}\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2\partial z} - 4g\frac{1}{r}\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z} + 2e\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} - e\frac{x}{r}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\partial z} + (e-2g)\frac{z}{r}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\right]d\sigma.$$

De waarde van deze integraal, door $4\pi\mu R^2$ gedeeld, is gelijk aan

$$\left(-e+\frac{4}{5}g\right)R^{-2} = \frac{2}{3}\beta R.$$

Hierbij komt nog de bijdrage van A_4 voor (13). Voor deze bijdrage, gedeeld door $4\pi\mu R^2$, wordt gevonden:

$$-\omega R.$$

De integraal (13), gedeeld door $4\pi\mu R^2$, is dus gelijk aan:

$$R\left(\frac{2}{3}\beta - \omega\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Voor zoover het tweede deel van het koppel afhangt van A_2, vindt men op geheel overeenkomstige wijze als boven de integraal

$$-\mu\int x\left[2\left(\frac{x}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + \frac{y}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} + \frac{z}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{x}{r}\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial w'}{\partial z}\right) + \frac{x}{r}\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{z}{r}\frac{\partial w'}{\partial z}\right]d\sigma,$$

of, weer met toepassing van de bekende eigenschap der homogene functies,

$$-\mu\int x\left[-8f\frac{1}{r}\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\partial z^2} - 4g\frac{1}{r}\frac{\partial^3 r}{\partial x\partial z^2} - 2(e-2g)\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - e\frac{x}{r}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} + (e-2g)\frac{z}{r}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\partial z}\right]d\sigma.$$

De waarde dezer integraal, door $4\pi\mu R^2$ gedeeld, is gelijk aan

$$\left(-e+\frac{6}{5}g\right)R^{-2} = \frac{1}{3}\beta R.$$

Hierbij komt het aandeel van A_4, dat, door $4\pi\mu R^2$ gedeeld,

$$-\omega R$$

bedraagt.

Het tweede deel van het koppel geeft derhalve

$$-R\left(\omega-\frac{1}{3}\beta\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ten slotte vindt men door de som van (14) en (15) $=0$ te stellen,

$$\omega=\frac{1}{2}\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Het verdient opgemerkt te worden, ten eerste dat de gevonden waarden u, v, w, s en ω onafhankelijk zijn van den aard der vloeistof. Immers deze grootheden zijn onafhankelijk van μ en ρ.

In de tweede plaats, dat de waarden van s en ω dezelfde blijven, ook wanneer de tweede machten der snelheden in rekening gebracht worden. Zooals we nl. in § 3 gezien hebben, moeten in de uitdrukkingen voor s en ω alleen termen met onevene machten van Q voorkomen. Wanneer we dus geen hoogere machten van Q dan de tweede in rekening brengen, zullen s en ω enkel van de eerste macht van Q af hangen.

Bij de betrekking $s=\alpha+\frac{1}{3}\gamma R^2$ valt op te merken, dat de snelheid, waarmee de bol medegesleept wordt, verschilt van de snelheid, die het vloeistofdeeltje ter plaatse van het middelpunt van den bol zou hebben, wanneer deze er niet was. Daarentegen vindt men voor de rotatiecomponenten, die dit zelfde vloeistofdeeltje zou hebben:

om de x-as

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,$$

om de y-as

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\beta,$$

om de z-as

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;$$

de bol wentelt dus juist zooals het vloeistofdeeltje op de plaats van zijn middelpunt zou doen wanneer de bol er niet was en dus de vloeistofbeweging door de vergelijkingen

$$u=\alpha+\beta z+\gamma z^2, \quad v=0, \quad w=0$$

bepaald werd.

Uit de betrekkingen

$$\alpha+\beta A+\gamma A^2=0,$$

$$\alpha-\beta B+\gamma B^2=0,$$

en

$$\alpha+\frac{1}{2}\beta(A-B)+\frac{1}{4}\gamma(A-B)^2=Q$$

vindt men

$$\beta=\frac{4(A-B)Q}{(A+B)^2}, \quad \gamma=\frac{-4Q}{(A+B)^2}.$$

Onderstellen wij dat het middelpunt van den bol zich op een afstand h van het midden van den stroom bevindt, en wel aan de zijde der positieve z, dan is

$$B - A = 2h,$$

en dus

$$\beta = -\frac{2hQ}{D^2}, \quad \gamma = -\frac{Q}{D^2}.$$

Evenzoo vindt men

$$\alpha = \frac{4ABQ}{(A+B)^2} = \frac{(D^2 - h^2)Q}{D^2}.$$

Derhalve wordt

$$s = \frac{(D^2 - h^2)Q}{D^2} - \frac{1}{3}\frac{QR^2}{D^2}$$

en

$$\omega = -\frac{hQ}{D^2}.$$

Zooals a priori gemakkelijk te zien was, heeft er in alle lagen wenteling plaats, behalve in het midden. De gevonden waarde van ω duidt dit ook aan, daar deze verdwijnt, wanneer $h = 0$ wordt. Men vergelijke Schklarewsky (t. a. p., p. 630).

HOOFDSTUK IV.

§ 7. Termen van de 2e orde.

Men kan zich voorstellen, dat u, v, w en p in reeksen, opklimmende naar de machten der snelheid Q, ontwikkeld worden. De eerste termen dier reeksen zijn de boven onderzochte waarden, die wij thans u, v, w, p zullen noemen. Zij voldoen aan de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Aan de platen wordt

$$u = -s, \; v = 0, \; w = 0$$

en aan den bol

$$u = \omega z, \; v = 0, \; w = -\omega x.$$

De bedoeling is nl. dat u, v, w, p den geheelen bewegingstoestand voorstellen, den teruggekaatsten er onder begrepen.

Laat thans de termen van de tweede orde heeten u_2, v_2, w_2, p_2, zoodat de totale waarden met weglating van de nog hoogere termen zijn

$$u + u_2, \; v + v_2, \; w + w_2, \; p + p_2.$$

Dan substitueeren wij deze waarden in de bewegingsvergelijkingen, en laten daarbij alle termen van de derde en hoogere orde weg; zoo verkrijgen wij, in de onderstelling van een stationairen toestand,

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial (p + p_2)}{\partial x} + \mu \Delta (u + u_2),$$

enz.

$$\frac{\partial (u + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (v + v_2)}{\partial y} + \frac{\partial (w + w_2)}{\partial z} = 0.$$

Trekt men hiervan de vergelijkingen (17) af, dan verkrijgt men de volgende bewegingsvergelijkingen voor de termen van de tweede orde:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial p_2}{\partial x}+\mu \Delta u_2 &= \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
-\frac{\partial p_2}{\partial y}+\mu \Delta v_2 &= \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
-\frac{\partial p_2}{\partial z}+\mu \Delta w_2 &= \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

terwijl u_2, v_2, w_2 aan de platen en aan het oppervlak van den bol moeten verdwijnen. Ter bekorting zullen wij stellen:

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= Q_1,\\
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= Q_2,\\
\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= Q_3,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

zoodat de vergelijkingen worden:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial p_2}{\partial x}+\mu \Delta u_2 &= Q_1,\\
&\text{enz.}\\
\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Nadat de grootheden der eerste orde bekend zijn geworden, kent men ook Q_1, Q_2, Q_3; de vraag is nu u_2, v_2, w_2, en p_2 uit de vergelijkingen (20) en de grensvoorwaarden af te leiden. Men kan aantoonen, dat u_2, v_2, w_2 geheel, en p_2 op eene additieve constante na, door deze vergelijkingen en voorwaarden bepaald zijn. Stellen wij vast, dat p_2 op oneindigen afstand 0 zal zijn, dan is ook p_2 geheel bepaald.

Wanneer bij zekere waarden van Q_1, Q_2, Q_3 voldoen de waarden u_2, v_2, w_2, p_2 dan zullen bij de waarden $n\,Q_1$, $n\,Q_2$, $n\,Q_3$, waarin n eene constante is, voldoen $n\,u_2$, $n\,v_2$, $n\,w_2$. Een constante factor in Q_1, Q_2, Q_3 zal dus ook in u_2, v_2, w_2 voorkomen.

Blijkens de vergelijkingen (19) zijn de termen van de tweede orde dus evenredig met de dichtheid ρ.

§ 8. De kracht, die de bol volgens de z-as ondervindt, wordt uitgedrukt door de integraal

$$\int\left(Z_x\frac{x}{r}+Z_y\frac{y}{r}+Z_z\frac{z}{r}\right)d\sigma,$$

te nemen over het boloppervlak.

't Is gemakkelijk in te zien, dat deze integraal verdwijnt, wanneer men slechts de eerste machten der snelheden in rekening brengt. Immers is

$$Z_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad Z_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad Z_z = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Nu hebben we gezien, dat u eene evene functie van x is, en dat v en w onevene functiën van x zijn; p is eene onevene functie van x. Alle termen, die in de bovenstaande integraal van de eerste machten der snelheden afhangen, zijn derhalve oneven ten opzichte van x, en de integratie dezer termen over het boloppervlak zal dus het resultaat 0 opleveren.

Daarentegen is uit de vergelijkingen (20) — waarin het even of oneven karakter van Q_1, Q_2, Q_3 ten opzichte van x uit de formules (19) blijkt — gemakkelijk af te leiden, dat u_2 eene functie van x wordt en dat v_2 en w_2 even functiën van x zullen zijn. Dit is dus tegengesteld aan hetgeen u, v, w zijn.

Wanneer men dus bij de berekening der kracht, die op den bol in de richting der z-as werkt, ook de tweede machten der snelheden in rekening brengt, zal men zeer goed een van 0 verschillend resultaat kunnen verkrijgen.

HOOFDSTUK V.

§ 9. De storing, die de bol in de vloeistofbeweging teweegbrengt, zal natuurlijk op grooten afstand afnemen. De bewegingen A_1, A_2, A_3, A_4 bevatten in alle termen machten van $\frac{1}{r}$ en de langzaamst afnemende verminderen als $\frac{1}{r}$ zelf. Dit zijn de termen met c en met c'. Ook de teruggekaatste bewegingen zullen bij verwijdering in eene richting, evenwijdig of bijna evenwijdig aan het xy-vlak, minstens zoo snel afnemen als $\frac{1}{r}$. De terugkaatsing toch heeft voornamelijk plaats aan die deelen der wanden, die op niet grootere afstanden dan eenige malen D van den bol gelegen zijn. Waarschijnlijk zullen de genoemde bewegingen nog wel sterker afnemen dan $\frac{1}{r}$. Immers de wanden zullen eene min of meer »uitdoovende" werking uitoefenen, wat daaruit is op te maken, dat de storing, die de bol in de snelheden brengt, aan de wanden verdwijnt.

§ 10. Om te kunnen beoordeelen, hoe de termen der tweede orde op grooten afstand afnemen, dienen wij eerst de grootheden Q_1, Q_2, Q_3, eveneens op grooten afstand van het middelpunt, te beschouwen.

De grootste termen, die wij nu in de vergelijkingen (19) te substitueeren hebben, zijn

in u: $$\alpha - s + \beta z + \gamma z^2 + \text{termen van de orde } \frac{1}{r},$$

in v: $$\text{termen van de orde } \ldots\ldots\ldots \frac{1}{r}.$$

Wat de orde van grootte betreft, staat differentieeren naar x en y gelijk met deeling door r. Derhalve worden $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ van de orde $\frac{1}{r^2}$; wegens de continuiteitsvergelijking moet dus $\frac{\partial w}{\partial z}$ van dezelfde orde zijn, en daar w aan de platen verdwijnt, moet in de ruimte daartusschen

$$w \text{ van de orde } \frac{D}{r^2}$$

zijn. Op grooten afstand is dus de snelheidscomponent, loodrecht op de platen, veel kleiner dan de snelheid, evenwijdig aan de platen, wat ook zeer begrijpelijk is.

4

Gemakkelijk ziet men in dat niet alleen bij w, maar bij alle grootheden die aan de platen verdwijnen, differentieeren naar z, wat de orde van grootte betreft, gelijk staat met deeling door D.

Aldus verkrijgen wij

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta + 2\gamma z + \text{termen van de orde } \frac{1}{rD},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \text{ van de orde } \frac{1}{rD}.$$

Verder is nog

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ van de orde } \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \;\text{»}\; \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{D}{r^3}.$$

Hieruit volgt

$$Q_1 \text{ van de orde } \frac{D}{r^2},$$

$$Q_2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{D}{r^2},$$

$$Q_3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{D^2}{r^3}.$$

Uit (20) volgt

$$\triangle p_2 = -\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial z}\right);$$

dus is $\triangle p_2$ van de orde $\frac{D}{r^3}$.

Van welke orde van grootte nu p_2 zelf is, is zonder werkelijke berekening moeilijk vast te stellen. In elk geval mogen wij aannemen dat deze grootheid op oneindigen afstand verdwijnt. Was nu het bedrag waarmee de druk in de richting loodrecht op de platen verandert, vergelijkbaar is met de waarde van den druk zelf, dan zou het differentiaalquotient $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ van de orde $\frac{p_2}{D^2}$ zijn; dan zou dus p_2 van de orde

$$\frac{D^3}{r^3}$$

zijn.

Onderstelt men daarentegen dat de druk in de richting loodrecht op de platen niet sneller verandert dan in richtingen evenwijdig met de platen, dan zijn de drie differentiaalquotienten in $\triangle p_2$ alle van de orde $\frac{p_2}{r^2}$, zoodat p_2 zelf moet afnemen als $\frac{D}{r}$.

In het eerste geval kan men krachtens de vergelijkingen (20):

$$\mu \triangle u_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x} + Q_1, \text{ enz.}$$

besluiten, dat $\triangle u_2, \triangle v_2, \triangle w_2$ respectievelijk zijn van de orde:

$$\frac{D}{r^2}, \frac{D}{r^2}, \frac{D^2}{r^3}$$

en daar de differentiaalquotienten naar z die naar x en y verre overtreffen, zullen u_2 en v_2 zijn van de orde:

$$\frac{D^3}{r^2}$$

en zal w_2 zijn van de orde:

$$\frac{D^4}{r^3}.$$

In het tweede geval zijn $\triangle u_2$, $\triangle v_2$, $\triangle w_2$ alle drie van de orde:

$$\frac{D}{r^2};$$

dus zijn u_2, v_2, w_2 alle drie van de orde:

$$\frac{D^3}{r^2}.$$

In beide gevallen kan men dus besluiten, dat u_2, v_2, w_2 sneller afnemen dan $\frac{1}{r}$ en dat p_2 minstens even snel afneemt als $\frac{1}{r}$, wat voor ons doel voldoende is.

HOOFDSTUK VI.

§ 11. Gaan wij thans na, hoe wij gebruik kunnen maken van de algemeene stelling, die zal dienen om de gezochte kracht te bepalen. Deze stelling, die in de genoemde verhandeling van Prof. LORENTZ voorkomt, staat daar geschreven in den vorm:

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma = \rho \int \left[\left(u' \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \text{enz.} \right] d\tau -$$

$$- \int [(u' X - u X') + \text{enz.}]\, d\tau + \rho \int \left[u' \left\{ \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u v)}{\partial y} + \frac{\partial (u w)}{\partial z} \right\} - u \left\{ \frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial (u' v')}{\partial y} + \frac{\partial (u' w')}{\partial z} \right\} + \text{enz.} \right] d\tau . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

Men heeft hier onder σ het grensvlak eener geheel met de vloeistof gevulde ruimte τ te verstaan, onder n de aan σ met betrekking tot de ruimte τ naar buiten getrokken normaal.

Onder u, v, w zullen wij verstaan de snelheidscomponenten bij den bewegingstoestand van ons systeem, nadat daaraan eene snelheid $-s$ is medegedeeld. Daarentegen behooren u', v', w' bij eenen denkbeeldigen bewegingstoestand met oneindig kleine snelheden, evenals de werkelijke bewegingstoestand stationair, en niet onder den invloed van uitwendige krachten. X_n, Y_n, Z_n zijn de spanningscomponenten op het oppervlak σ bij de werkelijke beweging, X'_n, Y'_n, Z'_n de overeenkomstige grootheden bij de denkbeeldige beweging. De uitwendige krachten per volume-eenheid zijn in het eene geval door X, Y, Z, in het andere door X', Y', Z' voorgesteld.

Bij den werkelijken bewegingstoestand zullen wij geen termen van hoogere orde dan de tweede behouden. De gemaakte onderstellingen omtrent de onafhankelijkheid van den tijd en de afwezigheid der uitwendige krachten laten in het tweede lid van (I) slechts de laatste integraal over.

Bij den denkbeeldigen bewegingstoestand nemen wij aan, dat aan het boloppervlak

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = c \ (c \text{ een oneindig kleine constante}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

en dat aan de platen

$$u' = v' = w' = 0$$

is. Deze toestand is blijkbaar van overeenkomstigen aard als de vroeger besproken toestand A_1.

§ 12. 't Zal verder blijken, dat een aantal termen in onze vergelijking verdwijnen. Voor sommige termen kan men dit inzien door het spiegelbeeld te beschouwen van den bewegingstoestand ten opzichte van een vlak, door het middelpunt van den bol loodrecht op de x-as gebracht. Op den oorspronkelijken bewegingstoestand alsmede op zijn spiegelbeeld kan men dan de vergelijking (I) toepassen en daarbij voor u', v', w' in de beide gevallen dezelfde waarden nemen.

De twee vergelijkingen, die er dan verkregen worden, zullen wij door I en I′ aanduiden. Sommige termen zullen in I en I′ hetzelfde, andere daarentegen verschillend teeken hebben; terwijl de grootte van elken term in I en I′ dezelfde is. Noemen wij de som der termen, die in beide vergelijkingen hetzelfde teeken hebben, A, en de som der termen, wier teeken verandert, B, dan is de vergelijking I:

$$A + B = 0,$$

en de vergelijking I′

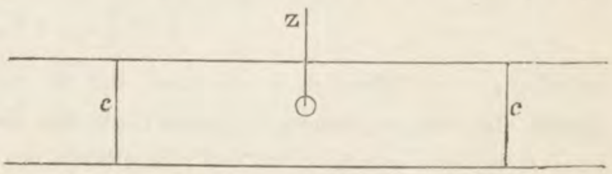
$$A - B = 0.$$

De samentelling dezer twee vergelijkingen geeft

$$A = 0.$$

Bij de toepassing van (I) kan men dus alle termen weglaten, die in het spiegelbeeld een ander teeken aannemen.

§ 13. Denken we ons thans, dat een gedeelte der vloeistofmassa begrensd wordt door de twee platen en door een omwentelingscylinder C, waarvan de as met O Z samenvalt. Op deze vloeistofmassa gaan we de vergelijking (I) toepassen. Stellen we ons dan verder voor, dat de straal van den omwentelingscylinder steeds grooter wordt, dan kunnen we nagaan, wat er van de vergelijking (I) wordt bij overgang tot de limiet. De oppervlakte-integralen in (I) voorkomende moeten genomen worden over het oppervlak van den bol, over de oppervlakte der platen en over den cylindermantel van C.



De integraal

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma,$$

genomen over het boloppervlak, gaat wegens (21) over in

$$c \int Z_n\, d\sigma.$$

Noemen wij de gezochte kracht, die de bol in de richting der z-as van de vloeistof ondervindt, Z_0, dan is deze integraal dus gelijk aan

$$- c\, Z_0.$$

De tweede integraal

$$\int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma,$$

insgelijks over het boloppervlak genomen, behoort tot de termen, die bij overgang tot het spiegelbeeld van teeken wisselen. Volgens het boven gezegde kan deze dus worden weggelaten. Dat deze integraal voor het spiegelbeeld werkelijk een ander teeken aanneemt, volgt daaruit, dat aan den bol

$$u = \omega z, \quad v = 0, \quad w = -\omega x$$

is, en, bij overgang tot het spiegelbeeld, ω van teeken verandert.

In de tweede plaats moeten deze twee integralen genomen worden over de platte vlakken. De eerste integraal verdwijnt, omdat aan de platen $u' = v' = w' = 0$.

De tweede integraal krijgt voor de platte vlakken den vorm:

$$-s \int X'_n \, d\sigma.$$

De vloeistof toch, die aan de platen vastkleeft, deelt met deze in de snelheid $(-s, 0, 0)$. Daar nu s bij overgang tot het spiegelbeeld van teeken wisselt, kan ook deze integraal worden weggelaten.

Het derde oppervlak, waarover nog geïntegreerd moet worden, is de cylindermantel.

Daar 't gebleken is, dat men de snelheidscomponenten der vloeistofbeweging kan voorstellen door een som van termen van de eerste orde en van termen der tweede orde, kunnen wij bij de integralen over den cylindermantel onderscheiden een deel van de eerste orde en een deel van de tweede orde.

Wat het deel der eerste orde van de integraal

$$\int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n) \, d\sigma$$

betreft, zoo is 't dadelijk in te zien, dat dit bij den overgang tot het spiegelbeeld van teeken wisselt. Immers de termen in (u, v, w), die van de eerste orde zijn, krijgen voor een zelfde punt (x, y, z) bij den overgang tot het spiegelbeeld een tegengesteld teeken. Dit deel verdwijnt dus uit onze vergelijking. Om dezelfde reden zal ook het deel van de eerste orde der integraal

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n) \, d\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

wegvallen, voorzoover dit nl. van de differentiaalquotienten van (u, v, w) afhangt. Deze integraal echter omvat ook een term der eerste orde van den vorm:

$$-\int p \, (u' \cos\alpha + v' \cos\beta + w' \cos\gamma) \, d\sigma, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

waarin (α, β, γ) aanduiden de hoeken, die de normaal in eenig element $d\sigma$ van den cylindermantel met de coördinatenassen maakt; p wordt hierin verondersteld geheel van de eerste orde te zijn. Is nu p_1 de waarde van p in een punt x_1, y_1, z_1, dan is de waarde van p in ditzelfde punt bij het spiegelbeeld der beweging $C - p_1$, C eene additieve constante zijnde. De laatste integraal kan nu voor het spiegelbeeld aldus geschreven worden:

$$-C \int (u' \cos\alpha + v' \cos\beta + w' \cos\gamma) \, d\sigma + \int p \, (u' \cos\alpha + v' \cos\beta + w' \cos\gamma) \, d\sigma$$

De eerste term stelt de met C vermenigvuldigde vloeistofvermeerdering binnen den cylinder in de eenheid van tijd voor, en is dus, wegens de onsamendrukbaarheid der vloeistof, 0.

Wat er dan overblijft is de term met het omgekeerde teeken. Derhalve behoort ook het van p afhankelijke deel van (22) tot de termen die kunnen worden weggelaten en blijven van de beide integralen over het ronde oppervlak van den cylinder nu nog slechts de termen van de tweede orde over, en ook deze verdwijnen uit onze vergelijking, zooals we zien zullen.

In het vorige hoofdstuk zijn wij tot het besluit gekomen, dat de termen van de tweede orde in (u, v, w, p) sneller afnemen dan $\frac{1}{r}$ — of althans minstens zoo snel afnemen als $\frac{1}{r}$ —, bij verwijdering op grooten afstand van den bol. Ook met u', v', w', p', die in het volgende hoofdstuk nog nader ter sprake zullen komen, is dit het geval.

Hieruit volgt, dat zoowel

$$u' X_n + v' Y_n + w' Z_n,$$

als

$$u X'_n + v Y'_n + w Z'_n,$$

berekend met de termen der tweede orde in u, v, w, X_n, Y_n, Z_n, minstens zoo snel afnemen als $\frac{1}{r^2}$. Daar nu het ronde oppervlak van den cylinder waarover geintegreerd moet worden, evenredig met r toeneemt, naderen de beide integralen, wanneer de straal van den cylinder onbepaald toeneemt, tot de limiet 0.

§ 14. Wij komen dus ten slotte tot dezen vorm voor de vergelijking:

$$-c Z_0 = \rho \int \left[u' \left\{ \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u v)}{\partial y} + \frac{\partial (u w)}{\partial z} \right\} + v' \left\{ \frac{\partial (u v)}{\partial x} + \ldots . \right\} + w' \left\{ \frac{\partial (u w)}{\partial x} + \ldots . \right\} \right] d\tau.$$

Bij de berekening der grootheden tusschen accolades behoeven wij in u, v, w zelf slechts de termen der eerste orde te behouden.

Wanneer men nu bedenkt, dat

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

is het gemakkelijk in te zien, dat de vormen tusschen accolades met den factor ρ er bij, de reeds vroeger ingevoerde grootheden Q_1, Q_2, Q_3 zijn. Zoo kunnen we dan schrijven

$$Z_0 = -\frac{1}{c} \int (u' Q_1 + v' Q_2 + w' Q_3)\, d\tau. \qquad (24)$$

HOOFDSTUK VII.

§ 15. De ontwikkeling der voor Z_0 gevonden uitdrukking is zeer te bekorten door toepassing van de door ons gemaakte onderstelling, dat

$$\frac{R}{D}$$

eene zeer kleine grootheid is.

Bij de berekening der grootheden Q_1, Q_2, Q_3 is te bedenken, dat de daarin voorkomende snelheid u, v, w bestaat uit de deelen A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 en de teruggekaatste beweging.

Neemt men de voor $\alpha - s$ en ω gevonden waarden in aanmerking, dan kan men opmerken, dat β in de uitdrukkingen voor u, v, w, p steeds met een factor van de dimensie L vermenigvuldigd voorkomt — L eene lijn zijnde —. Evenzoo is in deze uitdrukkingen γ steeds met een factor van de dimensies L^2 vermenigvuldigd.

Deze factor van γ is in A_0:

$$R^2 \text{ of } z^2.$$

Bepalen wij ons tot het deel der ruimte rondom den bol, waarin wij met geen grootere afstanden van het middelpunt dan van de orde D te doen krijgen, dan kunnen we den factor van γ in A_0 van de orde

$$R^2 \text{ of } r^2$$

noemen.

In A_1 en in A_3 is die factor van γ van de orde:

$$\frac{R^k}{r^{k-2}},$$

waarin $k = 3, 5, 7$.

In de teruggekaatste beweging is die factor van de orde:

$$\frac{R^k}{D^{k-2}} (k = 3, 5, 7).$$

De factor, waarmede β vermenigvuldigd is, is in A_0 van de orde:

$$r,$$

in A_2 en A_4 van de orde:

$$\frac{R^k}{r^{k-1}}\ (k=3,\ 5),$$

en in de teruggekaatste bewegingen van de orde:

$$\frac{R^k}{D^{k-1}}\ (k=3,\ 5).$$

Alle termen kunnen dus gerangschikt worden in een der volgende vier groepen:

1° termen van de orde:

$$\frac{\gamma\, R^k}{r^{k-2}},$$

waarin k eene der waarden 0, 2, 3, 5, 7 heeft.

2° termen van de orde:

$$\frac{\gamma\, R^{k'}}{D^{k'-2}}\ (k'=3,\ 5,\ 7).$$

3° termen van de orde:

$$\frac{\beta\, R^{k''}}{r^{k''-1}}\ (k''=0,\ 3,\ 5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

4° termen van de orde:

$$\frac{\beta\, R^{k'''}}{D^{k'''-1}}\ (k'''=3,\ 5).$$

Gaat men nu u^2, $u\,v$, enz. berekenen, dan verkrijgt men termen, die in eene der volgende algemeene vormen te brengen zijn:

$$\gamma^2\, \frac{R^a}{r^b\, D^c}\ (a=b+c+4).$$

$$\beta\,\gamma\, \frac{R^a}{r^b\, D^c}\ (a=b+c+3).$$

$$\beta^2\, \frac{R^a}{r^b\, D^c}\ (a=b+c+2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

§ 16. Ook de beweging (u', v', w') kan gesplitst worden in eene directe en eene teruggekaatste beweging. Bij de directe beweging (zie de verhandeling van Prof. LORENTZ) heeft men in ons geval:

$$u' = -\frac{3}{4}\, R^3\, c\, \frac{x\,z}{r^5} + \frac{3}{4}\, R\, c\, \frac{x\,z}{r^3},$$

$$v' = -\frac{3}{4}\, R^3\, c\, \frac{y\,z}{r^5} + \frac{3}{4}\, R\, c\, \frac{y\,z}{r^3},$$

$$w' = -\frac{1}{4}\, R^3\, c \left(\frac{3\,z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{3}{4}\, R\, c \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right),$$

en dus termen van de orde:

$$\frac{R}{r}\ \text{en}\ \frac{R^3}{r^3}.$$

Bij de teruggekaatste beweging heeft men termen van de orde:

$$\frac{R}{D}\ \text{en}\ \frac{R^3}{D^3}.$$

In u', v', w' heeft men dus enkel termen van den vorm:

$$\frac{R^e}{r^f D^g} \; (e = f + g).$$

De te integreeren uitdrukking $u' Q_1 + v' Q_2 + w' Q_3$ bevat dus termen met factoren van de gedaante:

$$\frac{R^{a+e}}{r^{b+f+1}};$$

de differentiaties in Q_1, Q_2, Q_3 brengen nl. nog een factor r in den noemer.

§ 17. Wij stellen ons nu voor, dat men gaat integreeren, en voor het gemak der redeneering nemen wij aan, dat dit geschiedt met gebruikmaking van concentrische bollen. De bovenstaande uitdrukking moet dan vermenigvuldigd worden met $4\pi r^2 d r$.

Deze vermenigvuldiging geeft een product van den vorm:

$$\frac{R^{a+e}}{r^{b+f-1}} d r.$$

De integratie hiervan zal als onbepaalde integraal eene grootheid van den vorm:

$$\frac{R^{a+e}}{r^{b+f-2}}$$

opleveren, althans in het algemeene geval, dat niet de gelijkheid bestaat:

$$b + f = 2.$$

In het bizondere geval, dat deze gelijkheid bestaat, wordt de onbepaalde integraal:

$$R^{a+e} \log r.$$

Hierover later.

§ 18. Stellen we ons nu voor te integreeren van af den bol met den straal R tot aan een bol, waarvan de straal λ van de orde D is. De uitkomst zal in het algemeene geval zijn van den vorm:

$$\frac{R^{a+e}}{\lambda^{b+f-2}} - R^{a+e-b-f+2}.$$

In deze uitdrukking zullen wij den eersten term het van de bovenste grens afhankelijke deel noemen, en den tweeden term het van de onderste grens afhankelijke.

Bepalen we ons vooreerst bij de onderste grens. Daar $e - f = g$ en $a - b = c + 2$, $c + 3$, of $c + 4$ is, zoo zal het van de onderste grens afhankelijke deel van de orde:

$$R^{c+4+g}, \quad R^{c+5+g} \quad \text{of} \quad R^{c+6+g}$$

zijn.

Nu zijn c en g nooit negatief. De laagste macht van R die voorkomt is dus de vierde. Wanneer nu de bol zeer klein is, kunnen we alle hoogere machten weglaten.

Wat de onderste grens betreft, behoeven we dus alleen de termen te behouden met $c = 0$ en $g = 0$, en derhalve noch in de werkelijke noch in de denkbeeldige beweging op de teruggekaatste deelen te letten. Bovendien hebben we slechts die termen te nemen, waarin

$$a - b = c + 2,$$

en bijgevolg van de drie groepen, waarin de termen van u^2, uv, enz. gerangschikt kunnen worden, alleen de groep met β^2 te behouden. Hieruit volgt weer, dat men in de formules voor de werkelijke beweging geen andere termen behoeft te nemen dan βz en de termen van A_2 en A_4.

Het is nu van belang op te merken dat men, zich tot deze termen bepalend, voor u en v oneven functiën van z verkrijgt en voor w eene even functie. Dientengevolge vindt men, met behulp van de formules (19), voor Q_1 en Q_2 even functiën van z en voor Q_3 eene oneven functie. Eindelijk komt dan in de uitdrukking, die in (24) onder het integraalteeken staat, z alleen in oneven machten voor. Daaruit volgt echter dat de deelen der integraal die van de naaste omgeving van den bol afkomstig zijn, elkander opheffen, zoodat er geen van de onderste grens afhankelijk deel met R^4 verkregen wordt. Deelen met R^5 echter behoeven wij toch niet te behouden, daar, zoozals verder zal blijken, het deel der uitkomst dat van de bovenste grens afhangt, *wel* termen met R^4 bevat.

§ 19. In het bizondere geval, dat $b+f=2$ is, wordt de onbepaalde integraal, zooals we gezien hebben, van den vorm:

$$R^{a+e} \log r.$$

Voor de door ons aangenomen integratiegrenzen zal dus de bepaalde integraal worden:

$$R^{a+e} \log\left(\frac{\lambda}{R}\right).$$

De bijdrage der onderste grens is alzoo

$$R^{a+e} \log R,$$

of liever iets als

$$R^{a+e} \log\left(\frac{R}{D}\right).$$

Deze bijdrage komt niet in rekening, zoodra $a+e=5$ is. Dan is zij immers in vergelijking met de termen met R^4 van de orde:

$$\frac{R}{D} \log \frac{R}{D},$$

en dit verdwijnt, wanneer $\frac{R}{D}$ tot nul nadert.

Wij kunnen ons dus bepalen tot het geval, dat $a+e<5$ is.

Nu is

$$a=b+c+\left.\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right\},\ \text{en}\ e=f+g,$$

derhalve

$$a+e=b+c+f+g+\left.\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right\}.$$

Daar nu

$$b+f=2$$

moet zijn, en c en g niet negatief kunnen worden, kan $a+e$ alleen de waarde 4 aannemen, en dit is slechts mogelijk, wanneer

$$c=0,\ g=0,\ a=b+c+2$$

is. Daar nu blijkens § 16 f slechts de waarden 1 en 3 kan hebben zou $b = 1$ of -1 moeten worden. De laatste waarde komt echter niet voor. Immers, wij hebben alleen nog met termen van den vorm (26) te maken en deze kunnen, wanneer $c = 0$ zal zijn, alleen ontstaan uit producten en tweede machten van vormen als (25). Daar bij deze laatste r in den noemer de exponenten -1, 2, 4 heeft, kan nooit in een product of eene tweede macht de exponent -1 komen. Wij hebben derhalve

$$b = 1, \; f = 1, \; a = 3, \; e = 1.$$

Wij moeten derhalve in u', v', w' de termen nemen van de orde:

$$\frac{R}{r},$$

en in u^2, $u\,v$, enz. termen van de orde:

$$\beta^2 \frac{R}{r}.$$

§ 20. Wij moeten nu nagaan, hoe in u^2, $u\,v$, enz. termen van de orde:

$$\beta^2 \frac{R^3}{r}$$

ontstaan. 't Blijkt, dat deze alleen kunnen ontstaan uit termen van den vorm:

$$\frac{\beta R^{k''}}{r^{k''-1}} \; (k'' = 0{,}3{,}5),$$

en wel uit het product van een term met $k'' = 0$ en een anderen met $k'' = 3$.

Een term met $k'' = 0$ komt alleen in A_0 en wel in u voor, nl.

$$\beta\, z.$$

De termen met $k'' = 3$, en dus van de orde $\frac{1}{r^2}$, zijn

in u:

$$g \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z} - e \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} + \omega \frac{R^3}{r^3} z,$$

in v:

$$g \frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial y\, \partial z},$$

in w:

$$g \frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial z^2} + (e - 2g) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - \omega \frac{R^3}{r^3} x.$$

Termen van de orde $\beta^2 \frac{R^3}{r^2}$ kunnen echter niet ontstaan in v^2, w^2, $v\,w$, maar komen alleen voor in u^2, nl.:

$$2\,\beta\, g\, z \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z} - 2\, e\, \beta\, z \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} + 2\,\omega\, \beta \frac{R^3}{r^3} z^2,$$

in uv, nl.:

$$\beta g z \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z},$$

in uw, nl.:

$$\beta g z \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2} + \beta (e - 2g) z \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - \omega \beta \frac{R^3}{r^3} x z.$$

Daar deze termen in u^2 en uv even functiën en in uw oneven functiën van z zijn, zoo wordt

Q_1 eene even functie van z,

Q_2 » » » » z,

Q_3 » oneven » » z.

Zooals we opgemerkt hebben, behoeft men

van u' alleen den term $\frac{3}{4} R c \frac{xz}{r^3}$,

van v' alleen den term $\frac{3}{4} R c \frac{yz}{r^3}$,

van w' » » » $\frac{3}{4} R c \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)$

te nemen. De uitdrukking $u' Q_1 + v' Q_2 + w' Q_3$ zal dus eene oneven functie van z worden.

Zij h de afstand, waarop het middelpunt O van den bol buiten het midden der evenwijdige platen gelegen is, en denken we ons om O als centrum een bol beschreven, waarvan de straal gelijk aan $D-h$ is. De integratie nu van de oneven functie van z:

$$u' Q_1 + v' Q_2 + w' Q_3$$

over de ruimte van dezen bol zal niets opleveren, en ook bij de uitstrekking dezer integratie over de geheele ruimte tusschen de bovenste plaat en een vlak evenwijdig aan die plaat en rakende aan dien bol, zal dit het geval blijven. Klaarblijkelijk kan alzoo in de uitkomst niets voorkomen, dat van de onmiddellijke omgeving van den bol afhangt, en dus ook niet de uitdrukking $log\, R$. Het optreden van een term met $R^4 \log R$ is derhalve niet mogelijk en wij kunnen ons bij een zeer kleinen bol werkelijk tot termen bepalen, die R alleen in den factor R^4 bevatten.

§ 21. Wat verder de bovenste grens, d. w. z. de meer verwijderde deelen der ruimte betreft, zoo is 't in te zien, dat hierin door het integreeren geen nieuwe macht van R gebracht kan worden. Nu zullen bij de berekening van Q_1, Q_2, Q_3 de termen A_0 op zich zelf niets opleveren. Immers neemt men alleen deze termen, dan wordt elke Q gelijk nul. Verder bevatten A_1, A_2, A_3, A_4 en de hieruit door terugkaatsing ontstaande beweging geen lagere machten van R dan de derde. De eenige wijze, waarop men in u^2, uv, uw, enz. termen kan verkrijgen, die geen hoogere machten van R bevatten dan de vierde, is deze, dat men de producten neemt van de deelen die R^3 bevatten met termen van A_0. Zoo komt men in Q_1, Q_2, Q_3 tot den factor R^3. Om ons te bepalen tot R^4 moeten wij dus in u', v', w' alleen de termen met R behouden.

HOOFDSTUK VIII

§ 22. Na het besprokene kunnen we het volgende voorschrift opmaken voor de berekening van Z_0.

Stel:

$$u_0 = \beta z + \gamma z^2 \quad (\alpha - s \text{ van de orde } \gamma R^2 \text{ zijnde, moet weggelaten worden})$$

$$u_1 = -\frac{3}{4} R(\alpha - s)\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) + g\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z} - e\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} - c'\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) + \omega\frac{R^3}{r^3}z,$$

$$v_1 = -\frac{3}{4} R(\alpha - s)\frac{xy}{r^3} + g\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z} - c'\frac{xy}{r^3},$$

$$w_1 = -\frac{3}{4} R(\alpha - s)\frac{xz}{r^3} + g\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2} + (e - 2g)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - c'\frac{xz}{r^3} - \omega\frac{R^3}{r^3}x,$$

en noem de snelheidscomponenten der beweging, uit (u_1, v_1, w_1) door terugkaatsing ontstaan u_{1r}, v_{1r}, w_{1r}.

Vervang verder bij de berekening van Q_1, Q_2, Q_3:

u^2 door $2u_0(u_1 + u_{1r})$,
uv » $u_0(v_1 + v_{1r})$,
uw » $u_0(w_1 + w_{1r})$,
v^2, vw, en w^2 door 0.

Neem voorts:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{3}{4} Rc\frac{xz}{r^3} + \\ v' &= \frac{3}{4} Rc\frac{yz}{r^3} + \\ w' &= \frac{3}{4} Rc\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) + \end{aligned}\right\} \text{wat hieruit door terugkaatsing ontstaat.}$$

Wanneer men gebruik maakt van de betrekking:

$$\frac{\partial(u_1 + u_{1r})}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 + v_{1r})}{\partial y} + \frac{\partial(w_1 + w_{1r})}{\partial z} = 0,$$

en in aanmerking neemt, dat u_0 alleen van z afhangt, vindt men:

$$Q_1 = \rho\Big[2\,u_0\,\frac{\partial\,(u_1+u_{1r})}{\partial\,x} + u_0\,\frac{\partial\,(v_1+v_{1r})}{\partial\,y} + u_0\,\frac{\partial\,(w_1+w_{1r})}{\partial\,z} + (w_1+w_{1r})\,(\beta+2\,\gamma\,z)\Big] =$$

$$= \rho\Big[(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,(u_1+u_{1r})}{\partial\,x} + (\beta+2\,\gamma\,z)\,(w_1+w_{1r})\Big],$$

$$Q_2 = \rho\,(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,(v_1+v_{1r})}{\partial\,x},$$

$$Q_3 = \rho\,(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,(w_1+w_{1r})}{\partial\,x}.$$

Nu is in het grootste deel der ruimte de teruggekaatste beweging zwakker dan de invallende. Men mag dus wel verwachten, dat men het teeken der kracht Z_0 en ook hare orde van grootte goed krijgt, wanneer men de zoo moeilijk te bepalen teruggekaatste beweging weglaat.

De formules worden dan:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \rho\Big[(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,u_1}{\partial\,x} + (\beta+2\,\gamma\,z)\,w_1\Big],\\ Q_2 &= \rho\,(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x},\\ Q_2 &= \rho\,(\beta\,z+\gamma\,z^2)\,\frac{\partial\,w_1}{\partial\,x}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

$$u' = \frac{3}{4}\,R\,c\,\frac{x\,z}{r^3},$$

$$v' = \frac{3}{4}\,R\,c\,\frac{y\,z}{r^3},$$

$$w' = \frac{3}{4}\,R\,c\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right).$$

Met deze hebben we dus ten slotte te berekenen

$$Z_0 = -\frac{1}{c}\int (u'\,Q_1 + v'\,Q_2 + w'\,Q_3)\,d\,\tau. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

§ 23. Daar in de uitdrukkingen voor u_1, v_1, w_1, de termen met $-\dfrac{3}{4}\,R\,(a-s)$ en $-c'$ tegen elkaar wegvallen, wordt

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= g\,\frac{\partial^3\,r}{\partial\,x^2\,\partial\,z} - e\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,z} + \omega\,\frac{R^3}{r^3}\,z = -\frac{5}{2}\,\beta\,R^3\,x^2\,z\,r^{-5},\\ v_1 &= g\,\frac{\partial^3\,r}{\partial\,x\,\partial\,y\,\partial\,z} = -\frac{5}{2}\,\beta\,R^3\,x\,y\,z\,r^{-5},\\ w_1 &= g\,\frac{\partial^3\,r}{\partial\,x\,\partial\,z^2} + (e-2\,g)\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,x} - \omega\,\frac{R^3}{r^3}\,x = -\frac{5}{2}\,\beta\,R^3\,x\,z^2\,r^{-5}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

De snelheid bij dezen bewegingstoestand is dus in elk punt gelijk aan

$$-\frac{5}{2}\,\beta\,R^3\,x\,z\,r^{-4},$$

en radiaal gericht ten opzichte van het middelpunt van den bol. Denken we ons de ruimte door de vlakken $X O Y$ en $Y O Z$ in vier kwadranten verdeeld, dan is in de kwadranten, waarin x en z hetzelfde teeken hebben, de snelheid gericht naar O toe, terwijl in de kwadranten, waarin x en z verschillend teeken hebben, de snelheid van O af gericht is.

Substitueert men de waarden (29) in (27), en vervolgens wat men hierdoor verkrijgt in (28), dan ontstaan onder het integraalteeken termen met β^2, met $\beta\gamma$ en met γ^2. Gemakkelijk ziet men in dat die met β^2 en γ^2 oneven en die met $\beta\gamma$ even functiën van z zijn. Daar zich nu de integratie aan weerszijden van den bol, al is het dan niet even ver, moet uitstrekken, is het te verwachten dat de termen die z in eene even macht bevatten het meest voor de uitkomst zullen opleveren. Nu het er alleen om te doen is, eenig denkbeeld van de grootte van Z_0 te verkrijgen, zullen wij ons tot het deel met $\beta\gamma$ bepalen.

Wij vinden dan

$$\frac{1}{c}\, u'\, Q_1 = \beta\gamma R^4 \rho \left(-\frac{15}{2}\, x^2 z^4 r^{-8} + \frac{75}{8}\, x^4 z^4 r^{-10}\right),$$

$$\frac{1}{c}\, v'\, Q_2 = \beta\gamma R^4 \rho \left(-\frac{15}{8}\, y^2 z^4 r^{-8} + \frac{75}{8}\, x^2 y^2 z^4 r^{-10}\right),$$

$$\frac{1}{c}\, w'\, Q_3 = \beta\gamma R^4 \rho \left(-\frac{15}{8}\, z^4 r^{-6} + \frac{75}{8}\, x^2 z^4 r^{-8} - \frac{15}{8}\, z^6 r^{-8} + \frac{75}{8}\, x^2 z^6 r^{-10}\right).$$

Dus

$$\frac{1}{c}\,(u'\, Q_1 + v'\, Q_2 + w'\, Q_3) = -\frac{15}{4}\, \beta\gamma R^4 \rho \left(z^4 r^{-6} - \frac{7}{2}\, x^2 z^4 r^{-8}\right).$$

Derhalve is

$$Z_0 = \frac{15}{4}\, \beta\gamma R^4 \rho \int \left(z^4 r^{-6} - \frac{7}{2}\, x^2 z^4 r^{-8}\right) d\tau. \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

§ 24. Ter vereenvoudiging van de integratie kunnen wij thans opmerken dat

$$\int x^2 z^4 r^{-8}\, d\tau = \int y^2 z^4 r^{-8}\, d\tau,$$

en dus

$$\int x^2 z^4 r^{-8}\, d\tau = \frac{1}{2} \int (r^2 - z^2)\, z^4 r^{-8}\, d\tau,$$

is.

Daardoor gaat (30) over in

$$Z_0 = \frac{15}{16}\, \beta\gamma R^4 \rho \int (-3\, z^4 r^{-6} + 7\, z^6 r^{-8})\, d\tau \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

In een vlak dat door de z-as gaat kunnen wij de plaats van een punt bepalen door z en de lengte r' van de loodlijn, uit het punt op de z-as neergelaten. Het bij deze coördinaten behoorende vlakte-element $d z\, d r'$ beschrijft bij wenteling om de z-as een ringvormig volume-element $2\pi\, d z . r'\, d r'$, dat men klaarblijkelijk in (31) voor $d\tau$ mag nemen. Bij constant gehouden z kan men dan in plaats van r' als integratieveranderlijke r nemen, daar $r'^2 = r^2 - z^2$ en dus

$r' \, d \, r' = r \, d \, r$ is. Men verkrijgt derhalve

$$\int z^4 r^{-6} d\tau = 2\pi \left[\int\limits_{-R}^{R} z^4 d z \int\limits_{R}^{\infty} r^{-5} d r + \int\limits_{R}^{D-h} z^4 d z \int\limits_{z}^{\infty} r^{-5} d r + \int\limits_{-D-h}^{-R} z^4 d z \int\limits_{-z}^{\infty} r^{-5} d r \right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} R^5 \times \frac{1}{4} R^{-4} + \frac{1}{4} (D - h - R) + \frac{1}{4} (D + h - R) \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2} D - \frac{2}{5} R \right],$$

en op dezelfde wijze

$$\int z^6 r^{-8} d\tau = 2\pi \left[\frac{1}{3} D - \frac{2}{7} R \right].$$

Substitueert men dit in (31), dan komt er ten slotte

$$Z_0 = \frac{15}{4} \pi \beta \gamma R^4 \rho \left(\frac{5}{12} D - \frac{2}{5} R \right).$$

Nu is

$$\beta = -\frac{2 h Q}{D^2}, \quad \gamma = -\frac{Q}{D^2}.$$

Dus wordt:

$$Z_0 = \frac{25}{8} \pi h \rho \frac{R^4}{D^3} Q^2 - 3 \pi h \rho \frac{R^5}{D^4} Q^2,$$

of, daar we den tweeden term als zeer klein ten opzichte van den eersten beschouwen:

$$Z_0 = \frac{25}{8} \pi h \rho \frac{R^4}{D^3} Q^2.$$

§ 25. We vinden derhalve, dat de kracht, die de bol in de richting der z-as ondervindt, gericht is van het midden van den stroom af. Werkt deze kracht alleen, dan zal de bol naar den wand bewogen worden en daartegen gedrukt blijven. Alleen juist in het midden tusschen de beide platen zal de bol in evenwicht kunnen zijn, doch dit evenwicht is dan nog slechts labiel.

Nemen we thans aan dat de zwaartekracht werkt, en dat de platen, waartusschen de vloeistof stroomt, horizontaal geplaatst zijn. Op den bol zal nu een tweede kracht werken eveneens volgens de z-as gericht en waarvan de grootte wordt uitgedrukt door het product van het volume van den bol en het verschil tusschen zijn specifiek gewicht en dat van de omgevende vloeistof. Deze kracht, die wij Z zullen noemen is evenredig met R^3, terwijl Z_0 evenredig is met R^4. Wanneer alzoo R afneemt, neemt de verhouding tusschen Z en Z_0 ten voordeele van Z toe. Ook nu bestaat voor den bol tusschen de platen slechts de mogelijkheid van labiel evenwicht. De meetkundige plaats der punten, waarin het middelpunt van den bol geplaatst moet zijn, opdat hij in evenwicht (labiel) zij, is steeds een vlak evenwijdig aan de platen. Hoe grooter Z in verhouding tot Z_0 wordt, des te hooger komt het evenwichtsvlak boven het centraalvlak der ruimte tusschen de evenwijdige platen. Bevindt het middelpunt van den bol zich boven het centraalvlak, dan is de resultante der beide krachten gericht naar de bovenste plaat; bevindt daarentegen dit middelpunt zich beneden het centraalvlak, dan is de resultante naar beneden gericht. Wordt Z al te groot, dan is voor den bol geen evenwicht mogelijk tusschen de beide platen en zinkt hij steeds op de benedenste plaat.

Om eene enkele toepassing te maken van de voor Z_0 gevonden uitdrukking, stellen wij ons voor te berekenen hoe groot Q moet zijn, opdat $Z = Z_0$ zij, wanneer b.v. $D = 0.1$ cM., $h = \frac{1}{4} D$, $R = 0.001$ cM. en het specifiek gewicht s van het bolletje een weinig grooter is dan ρ. Nemen we b.v. $\rho = 1$ en $s = 1.1$. Alles in *C. G. S.*-eenheden uitdrukkende vinden wij nu de gezochte waarde van Q door substitutie der gegevens in de vergelijking

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (s - \rho) \times 981 = \frac{25}{8} \pi h \rho \frac{R^4}{D^3} Q^2.$$

Men vindt hieruit

$$Q = 40 \text{ ongeveer.}$$

De vloeistof zou dus midden tusschen de platen met de snelheid van 40 cM. per secunde moeten stroomen.

Daar de kracht Z_0 volgens onze formnles naar den wand toe is gericht, hebben wij in het bovenstaande geene verklaring gevonden voor het bij de roode bloedlichaampjes waargenomen verschijnsel. Tot mijn leedwezen kan ik geene poging doen, de theorie verder te ontwikkelen, en dus niet ingaan op de vraag van welken invloed 't zou zijn, wanneer men ten eerste geene bizondere onderstelling maakte omtrent de verhouding $R : D$, en in de tweede plaats de teruggekaatste bewegingen geheel bepaalde en in de berekening opnam. Bovendien werd bij de proeven natuurlijk van buisjes gebruik gemaakt en niet van platen.

Bizondere omstandigheden noopten bij de samenstelling van dit proefschrift zeer tot spoed. Moge echter, in afwachting van eene bevredigende theorie, de uitgevoerde berekening, ook al wijkt misschien de uitkomst aanmerkelijk van de waarheid af, niet geheel zonder belang zijn.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De door VON HELMHOLTZ (Abhandlungen I, p. 223) aangehaalde proeven over het vallen van kogels door met water gevulde buizen, geven geen licht over de verschijnselen die POISEUILLE bij de bloedlichaampjes heeft waargenomen.

II.

SCHKLAREWSKY's meening, dat het vergrooten van het specifiek gewicht van het bloed bij opeenhooping der bloedlichaampjes veroorzaakt wordt door de vorming van zoogenaamde hydrospheren (PFLÜGER's Archiv 1868, pp. 671, 672) is onjuist.

III.

Terecht zegt RAYLEIGH, (Theory of Sound I, p. 59) dat bij de verklaring der werking van een electromagneet, die een stemvork onafgebroken doet trillen, eene vertraging van den stroom in aanmerking moet worden genomen.

IV.

Eene algemeen geldende dispersie-formule bestaat niet.

V.

Het bewijs van het beginsel van den kleinsten dwang in het leerboek van Schell is niet volledig.

VI.

De steeds meer ingewikkeld wordende verklaringen en formules op physisch en chemisch gebied aan den eenen kant en de doelmatigheid van het bestaande aan de andere zijde geven — afgezien nog van andere redenen — meer aanleiding tot de gedachte, dat de grondwerkelijkheid aller dingen is een zelfbewust wezen met een ondoorgrondelijk verstand, dan eene onbewuste materie met hare blinde toevalligheden.

VII.

Het valt te betwijfen of Cauchy gelijk heeft, wanneer hij zegt: »S'il nous était donné d'apercevoir les molécules des corps.... elles présenteraient à nos regards des espèces de constellations; et en passant de l'infiniment grand à l'infiniment petit, nous retrouverions dans les dernières particules de la matière, comme dans l'immensité des cieux, des centres d'action placés en présence les uns des autres".

VIII.

Inertie is op te vatten als een op ervaring gegrond begrip en niet als eene denknoodwendigheid.

IX.

De behandeling van »het tweede hoofdbeginsel der thermodynamica" in Maxwell's »Theory of Heat" (4e druk) laat — hoe verdienstelijk dit boek overigens moge zijn — aan duidelijkheid te wenschen over.

X.

Van de uitdrukking »middelpuntvliedende kracht" behoort men bij het onderwijs slechts een zeer omzichtig gebruik te maken.

XI.

Het zou geen aanbeveling verdienen, het aantal lesuren in de wiskunde voor de leerlingen van de afdeeling A der twee hoogste klassen van het gymnasium te verminderen.

XII.

Het is wenschelijk, dat bij het eindexamen der gymnasia met de vorderingen der leerlingen in de physica rekening worde gehouden.