J. VAN DER FEEN.

OVER GOLFBEWEGING
IN EENE ONSAMENDRUKBARE VLOEISTOF.

OVER GOLFBEWEGING

IN EENE ONSAMENDRUKBARE VLOEISTOF.

LEIDEN, BOEKDRUKKERIJ VAN E. J. BRILL.

OVER GOLFBEWEGING
IN EENE ONSAMENDRUKBARE VLOEISTOF.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^{R}. A. P. N. FRANCHIMONT.

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

Op Maandag 16 December 1889, des namiddags te 4 uren,

DOOR

JOUWERT VAN DER FEEN,

GEBOREN TE BOLSWARD.

LEIDEN. — E. J. BRILL.
1889.

Het is mij een hoogst aangename taak te dezer plaatse een woord van oprechten dank te richten tot mijne hooggewaardeerde leermeesters, de Hoogleeraren der philosophische faculteit, en in het bijzonder tot U, hooggeachte Promotor, Hooggeleerden VAN GEER, niet alleen voor de hulp, mij betoond bij het vervaardigen van dit proefschrift, maar ook voor de talrijke bewijzen van vriendschap, die ik steeds van U gedurende mijn studietijd heb mogen ondervinden.

Ook Uwe welwillende bereidvaardigheid en vriendschappelijke belangstelling, Hooggeleerde LORENTZ, zullen steeds bij mij in dankbaar aandenken blijven.

INLEIDING.

Elke vormverandering eener vloeistof, die van het eene gedeelte naar een volgend overgaat, waarbij de deeltjes zelve slechts betrekkelijk weinig van hun plaats komen, heet eene golf.

De golfbeweging is dus niet wat zij schijnt, is niet de verplaatsing van eene bepaalde watermassa over het oppervlak met eene voor het oog zichtbare snelheid. De golfbeweging moet wel onderscheiden worden van de vloeistofbeweging.

Het eerst heeft NEWTON in zijne Principia Phil. Nat. (Lib. II) getracht eene theorie der golfbeweging te geven. Hij beschouwde de schommelingen van eene vloeistof in eene U-vormige buis, leidde daaruit de formules af, en wilde die toepassen op de vloeistofgolven, alsof berg en dal eener golf de twee uiteinden waren van die U-vormige buis.

'S GRAVESANDE en D'ALEMBERT volgden ook die methode.

LAGRANGE geeft van deze Theorie van NEWTON eene kritiek in zijne verhandeling: »Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton, relatifs à la propagation du son, et au mouvement des ondes" (Mem. de l'Acad. Roy. de Sc. 1786, Berlin 1788), en toont aan dat zij volkomen onjuist is. In deze zelfde verhandeling, alsmede in de »Mecanique analytique, II" zegt LAGRANGE, dat het misschien onmogelijk zal zijn, eene algemeene en strenge theorie der golfbeweging te geven. Voor het geval dat de golven zeer laag zijn en de diepte van het kanaal waarin de golven zich voortplanten, niet zeer groot is, lost hij het vraagstuk bij benadering op, op eene wijze overeenkomende met zijne berekening van de voortplanting van het geluid in de lucht.

Vóór Lagrange had ook Laplace (Hist. de l'Acad. Roy. des Sc. Année 1776, Paris 1779) in zijne verhandeling »Sur les ondes", de bewegingsvergelijkingen van onsamendrukbare vloeistoffen onder de werking der zwaartekracht opgesteld, in de onderstelling dat de snelheden en bewegingen der moleculen klein genoeg zouden blijven om hunne producten en kwadraten te mogen verwaarloozen.

Flaugergues heeft in de verhandelingen, uitgegeven door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, (deel XXIX, 1793) eene theorie gegeven, die zich van de vroegeren daardoor onderscheidt, dat zij steunt op eenige door hem verrichtte proeven. Hij heeft er vooral op gewezen, dat de horizontale beweging der moleculen niet de voortgaande golfbeweging is, ja dat zij dikwijls nul gesteld mocht worden. Bij de afleiding van den vorm der golf, waarvoor hij eene trochoïde vindt, neemt hij aan, dat de verticale druk, dien iedere kolom in een golf ondervindt, te danken is aan de hoogste kolom, en gelijk aan het gewicht van eene zuil water, wier hoogte gelijk is aan het verschil in hoogte der hoogste kolom en der beschouwde.

Gerstner heeft in 1804 te Praag uitgegeven eene »Theorie der Wellen" enz. waarin hij reeds aan een vloeistofoppervlak bestaande golfbewegingen onderzoekt en vindt, dat als alleen de hydrostatische druk de golfbeweging onderhoudt, de deeltjes geene andere banen kunnen beschrijven dan cycloïden; hij maakt echter de ongemotiveerde onderstelling, dat alle krachten die loodrecht op verschillende punten van de baan van eene molecule werken, dezelfde zijn; hij leidt dan verschillende eigenschappen der beweging af, die ook door Rankine later zijn gegeven.

Onderzoekingen over de groote zeegolven, zijn door La Coudraye in 1796 openbaar gemaakt, in eene door de Kon. Ges. der Wiss. te Kopenhagen bekroonde verhandeling, welke echter, evenals die van Bremontier (in het Journal de Physique, Tome 79) meer van experimenteelen aard zijn.

Zeer belangrijk is de verhandeling van Poisson, (Mém. de l'Institut, Tome I, 1816) en die van Cauchy (Savants Etrangers, 1827, Vol. I), welke reeds in 1815 door de Academie te Parijs bekroond was. Poisson's eerste verhandeling bevat de algemeene formules en de bepaalde integralen, die de oplossing van het vraagstuk der golfbeweging bevatten, meer in 't bizonder van die golven, wier voortplantingssnelheid eenparig versneld is; de tweede bevat de theorie der golven met constante voortplantingssnelheid. Cauchy toont in het eerste gedeelte aan, hoe men, als de vorm van het oppervlak en de krachten die er op werken, bekend zijn, daaruit de vergelijkingen kan afleiden, die den begintoestand van de vloeistof bepalen. In het tweede deel geeft Cauchy de vergelijkingen, die op een willekeurig tijdstip den toestand der vloeistof bepalen, en in het derde of laatste deel stelt hij de algemeene wetten vast, die voortvloeien uit de formules van het tweede deel, en bepaalt de numerieke waarden der constanten, die daarin voorkomen.

In 1825 verscheen de »Wellenlehre auf Experimente gegründet" der gebroeders Ernst en Wilhelm Weber, waarin zij, zooals zij in hunne voorrede zeggen, »die Wellen der tropfbaren Flüssigkeiten einer Experimental-untersuchung unterworfen haben, da sich bei ihnen nicht nur die Bewegung der Wellen selbst, sondern auch die zugleich stattfindenden Molecularbewegungen beobachten lassen, und die Erscheinungen des Fortschreitens, der Zurückwerfung, der Durchkreuzung und der dabei stattfindenden Interferenz, der Inflexion u. s. w. Schritt für Schritt verfolgt werden können". Zij beschouwen echter ook golven in andere media dan vloeistoffen, en geven een uitvoerig historisch overzicht, van hetgeen door hen op dat gebied is verricht. Onder de uitdrukking »Molecularbewegungen" moet men natuurlijk de beweging der vloeistofdeeltjes verstaan.

Lord Russell heeft zijne vele onderzoekingen omtrent de golfbeweging samengebracht en openbaar gemaakt in »Transactions of the Royal Society of Edinburg, vol. XIV" en in »the British Ass. Report" van de jaren 1838 en 1845. Naast vele numerieke opgaven over golven in de open zee en op de Clyde, is vooral van belang de door hem het eerst waargenomene »solitary wave" of »wave of translation", waarop wij later uitvoeriger terugkomen.

In de laatste jaren hebben verschillende wis- en natuurkundigen zich meer bijzonder met de hydrodynamica bezig gehouden; de British Association heeft in verschillende Reports de geschiedenis der hydrodynamica gepubliceerd, en wel in het »Report on Recent Researches in Hydrodynamics" van Challis (1834), in dat van Stokes (1846), en in die van Hicks (1881 en '82), welke alle elkaar aanvullen, terwijl Dr. Auerbach in eene door het K. Venetiaansch Instituut van Wetenschappen bekroonde prijsvraag, een kort overzicht geeft der theoretische hydrodynamica van den laatsten tijd.

Slechts enkele gevallen laten eene theoretische behandeling toe, waarbij de onderstellingen niet al te veel afwijken van hetgeen werkelijk gebeurt. Wij zullen daarbij dan ook vooral letten op het mechanisme der golven en hare voortplanting, daar ze toch op zulke bizondere wijzen kunnen ontstaan, dat wij in onze berekeningen slechts zelden iets er van kunnen opnemen. Met twee soorten van golven zullen wij ons voornamelijk bezig houden en wel met de zoogenaamde lange golven en met de periodieke. Daarbij zullen wij gebruik maken van de onderstelling, dat de vloeistof, waarin de golfbeweging optreedt, eene *ideale* is, d. w. z. een zoodanige, waarin geene tangentieele krachten optreden. Hierdoor voldoet zij geheel aan den grondslag der hydrostatica en hydrodynamica, dat namelijk de druk zich naar alle richtingen gelijkelijk voortplant, of wat hetzelfde is, dat eene drukking in die vloeistof op een oppervlak alleen loodrecht daarop wordt uitgeoefend (Wet van Pascal). Voor zoover proeven geleerd hebben, blijkt het, dat bij niet in beweging zijnde vloeistoffen deze hypothese werkelijk vervuld is, zoodat eene vloeistof in rust eene ideale is, de capillaire verschijnselen buiten rekening gelaten.

Bij vloeistoffen in beweging is dit niet meer het geval, doch voor onze beschouwingen zullen wij vooreerst ideale vloeistoffen nemen, die tevens onsamendrukbaar en homogeen zijn. Voor de bewegingsvergelijkingen der hydrodynamica verwijzen wij naar Kirchhoff (Mechanik).

HOOFDSTUK I.

De lange Golf.

Onder »lange golven" worden verstaan die golven, wier lengte zeer groot is in vergelijking met de diepte van de vloeistof, waarin zij zich voortplanten. LAGRANGE heeft het eerst deze golven nader beschouwd (zie Inleiding pag. 1) en hun den naam lange golven gegeven. Na hem heeft STOKES eene theorie er van gegeven, en zijne methode zullen wij vooreerst volgen.

Stellen wij ons voor, dat alleen een golfberg zich in een rechthoekig kanaal in de richting van dat kanaal voortplant, zoo dat de beweging in iedere overlangsche doorsnede dezelfde is. Laat Fig. I zulk eene doorsnede zijn, de pos. y-as verticaal naar boven, de pos. x-as horizontaal, $A\,B$ het onveranderde niveau, $A\,C\,B$ de golf en H de diepte van de onbewogen vloeistofmassa. Noemen wij nu h de grootste hoogte van de golf boven het niveau $A\ B$ en λ den afstand van twee opvolgende punten der golf in het vlak $A\,B$, dan is de vloeistofmassa, die zich over de eenheid van breedte over het niveau schijnt voort te bewegen, van de afmeting $h\,\lambda$; indien de golf over een punt heengaat, zal dit volume van de eene zijde van het punt naar de andere zijde worden verplaatst, zoodat de horizontale verplaatsing van dat punt dan is van de afmeting $\frac{h\,\lambda}{H}$, daar wij wel kunnen aannemen, dat de horizontale beweging van alle deeltjes in denzelfden verticaal niet te veel van elkaar verschillen. Is nu λ zeer groot in verhouding tot H, dan is de horizontale verplaatsing ook groot ten opzichte van h en dus ook van de verticale verplaatsing; hetzelfde valt te zeggen van de horizontale en verticale snelheden. Verwaarloozen wij nu de laatste tegen de eerste, dan moeten wij ook de verticale krachten verwaarloozen, zoodat dan de druk p in een punt $x\,y$ gelijk is aan $g\,\rho\,(H + \eta - y)$, als $H + \eta$ de ordinaat van het oppervlak is, die behoort bij de abscis x, en als ρ de dichtheid der vloeistof is. Het drukverschil in twee oneindig dicht bij elkaar gelegen punten x en $x + d\,x$ zal dus zijn $g\,\rho\,\frac{d\,\eta}{d\,x}\,d\,x$ en in alle punten van denzelfden verticaal zal deze uitdrukking dezelfde wezen, zoodat op alle punten dezelfde kracht werkt en zij derhalve steeds in denzelfden verticaal zullen blijven. Dit is de reden, waarom het vraagstuk der »lange golven" gemakkelijker is geworden, en daarom zullen wij dadelijk de bewegingsvergelijking van een laagje vloeistof, begrepen tusschen twee oneindig dicht bij elkaar gelegen verticale doorsneden P_1 en P_2 kunnen afleiden. Stel de laag heeft in zijn evenwichtsstand de abscis x, en op een tijd t: $x + \xi$ dan is $\frac{d^2\,(x+\xi)}{d\,t^2} = -\,g\,\frac{d\,\eta}{d\,(x+\xi)}$ of $\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} = -\,g\,\frac{d\,\eta}{d\,(x+\xi)}$; onderstellen wij nu ook nog, dat de bewegingen zeer klein zijn, dan gaat deze vergelijking over in

$$\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} = -\,g\,\frac{d\,\eta}{d\,x}\,. \qquad (1)$$

De laag vloeistof heeft, als zij in den evenwichtsstand verkeert, een volume van $H\,d\,x$, terwijl dat volume op een tijd t gelijk is aan

$$(H + \eta)\left(1 + \frac{d\,\xi}{d\,x}\right)d\,x\,,$$

of na verwaarloozing:

$$(H + H \frac{d\,\xi}{d\,x} + \eta)\, d\,x\,;$$

de gelijkstelling van deze beide uitdrukkingen voor het volume, levert de continuiteitsvergelijking in den vorm:

$$H \frac{d\,\xi}{d\,x} + \eta = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

Uit (1) zien wij dat de horizontale versnelling der laag afhangt van de richtingscoëfficient aan het vrije oppervlak. Door eliminatie van ξ uit (1) en (2) volgt:

$$g\,H \frac{d^2\eta}{d\,x^2} = \frac{d^2\eta}{d\,t^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

welke vergelijking uitdrukt, dat de verticale versnelling van een punt aan het oppervlak afhangt van de kromming in dat punt van het oppervlak; die versnelling zal dus opwaarts gericht zijn waar het oppervlak hol is e. o.

De algemeene integraal van deze differentiaalvergelijking, wier vorm overeenkomt met die, welke het probleem der trillende snaren bepaalt, is

$$\eta = f(x - t\,\sqrt{g\,H}) + F(x + t\,\sqrt{g\,H}),$$

waarin f en F twee willekeurige functies voorstellen. Er kunnen zich dus twee golven, de eene rechts, de andere links, met eene snelheid $= \sqrt{g\,H}$ langs het kanaal voortplanten. De voortplantingssnelheid is dus hier onafhankelijk van de dichtheid der vloeistof.

Voor eene golf, die zich alleen in positieve richting over het oppervlak voortplant is $\eta = f(x - t\,\sqrt{g\,H})$.

Uit (2) volgt dat

$$\frac{d\,\xi}{d\,x} = -\frac{\eta}{H} \text{ en daar } \frac{d\,\eta}{d\,x} = -\frac{d\,\eta}{d\,t}\frac{1}{\sqrt{g\,H}}$$

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = \frac{\sqrt{g\,H}}{H}\,\eta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

(2) geeft bij integratie

$$\xi = -\frac{1}{H}\int \eta\, d\,x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Uit (4) en (5) zien wij, dat de horizontale verplaatsing in het begin zeer klein is ten opzichte der verticale; dat ze langzamerhand aangroeit, en dat zoodra η weer 0 geworden is, deze verplaatsing haar maximum bereikt heeft; ze is dan gelijk aan de totale hoeveelheid vloeistof, die over het punt is heengegaan, gedeeld door de oorspronkelijke diepte.

De horizontale snelheid is evenredig aan de verticale verplaatsing; is dus maximum als de top der golf over het punt heengaat.

De verticale beweging van een punt $(x\,y)$ kan, daar zij aan den bodem nul is, aan de ordinaat van dat punt evenredig gesteld worden. Is η de verticale verplaatsing van een punt in het vrije oppervlak met een abscis x, dan is die van het punt $(x\,y)$ gelijk aan $\eta \frac{y}{H}$.

Heeft het kanaal niet eene rechthoekige doorsnede, maar eene willekeurige, dan geldt bij benadering en met dezelfde onderstellingen ook deze bewijsvoering. Stel bijv. Q de doorsnede van het kanaal en b de breedte aan het oppervlak der vloeistof. Beschouwen wij nu de laag vloeistof begrepen tusschen twee opvolgende platte vlakken x en $x + d\,x$, dan zal hun afstand op een tijd t zijn $\left(1 + \frac{d\,\xi}{d\,x}\right) d\,x$, en de doorsnede is dan ongeveer $(Q + b\,\eta)$ als η de hoogte der golf boven het onveranderde niveau voorstelt. De continuiteitsvergelijking wordt dan

$$Q\,d\,x = (Q + b\,\eta)\left(1 + \frac{d\,\xi}{d\,x}\right) d\,x\,;$$

of, na verwaarloozing van producten van kleine grootheden

$$Q \frac{d\,\xi}{d\,x} + b\,\eta = 0\,.$$

Wij krijgen dus dezelfde vergelijking als (2), behalve dat nu in plaats van H, $\frac{Q}{b}$ is gekomen. De verdere ontwikkeling is weer dezelfde, zoodat nu de voortplantingssnelheid wordt $\sqrt{g \frac{Q}{b}}$.

Het arbeidsvermogen van plaats ten opzichte van het oorspronkelijk niveau van eene in ééne richting voortloopende lange golf is per eenheid van breedte $g \rho \int\int y \, dx \, dy$, waarbij de grenzen voor y zijn van 0 tot η en de integratie naar x over de geheele lengte der golf te nemen is. De integratie naar y uitvoerende, komt er $\frac{1}{2} g \rho \int y^2 \, dx$.

Het arbeidsvermogen van beweging van eene lange golf is $\frac{1}{2} \rho H \int \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dx$, daar kwadraten van kleine grootheden verwaarloosd zijn; met behulp van (4) is

$$\frac{1}{2} \rho g \int \eta^2 \, dx = \frac{1}{2} \rho H \int \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dx,$$

waaruit blijkt dat het arbeidsvermogen van zulk eene golf half potentieel, half actueel is.

Had het kanaal eene langzaam veranderende doorsnede, zoodat er dus nagenoeg geen terugkaatsing plaats vindt, dan blijft ook dezelfde betrekking bestaan.

Hetzelfde vraagstuk kan ook worden opgelost op de volgende wijze:

Stel dat in een kanaal zich een golf voortplant, dan zal die in de ruimte steeds dezelfde plaats blijven innemen, indien wij aan het geheele systeem eene snelheid geven gelijk en tegengesteld aan de voortplantingssnelheid. De toestand is dan stationnair. Aan het oppervlak moet de druk constant zijn; daar door iedere doorsnede altijd per tijdseenheid evenveel vloeistof moet gaan, zal de snelheid bij een golfberg kleiner zijn dan bij een golfdal; de verandering van levende kracht sluit in zich eene verandering van druk. Bij een berg is dus de druk grooter dan bij een dal. Dit drukverschil kan nu door de hydrostatische druk weer opgeheven worden. Stelt nu u_0 de snelheid voor van eene geheele laag bij de onveranderde diepte H, h de hoogte van de golf boven het niveau waar de snelheid u is, dan moet

$$u = \frac{H u_0}{H + h} \quad \text{dus} \quad u_0^2 - u^2 = u_0^2 \, \frac{2 h H + h^2}{(H + h)^2},$$

de voorwaarde van een vrij oppervlak is nu dat

$$\frac{\rho}{2}(u_0^2 - u^2) = g\rho h,$$

dus

$$\frac{\rho u_0^2}{2} \frac{2hH + h^2}{(H+h)^2} - g\rho h = 0,$$

of

$$\left(\frac{\rho u_0^2}{H} \frac{1 + \frac{h}{2H}}{\left(1 + \frac{h}{H}\right)^2} - \rho g\right) h = 0.$$

Daar weder aangenomen wordt dat de hoogte der golf zeer klein is in verhouding tot de diepte van het kanaal, dus $\frac{h}{H}$ zeer klein, is de voorwaarde voor het vrije oppervlak

$$\left(\frac{\rho u_0^2}{H} - \rho g\right) h = 0.$$

Hieraan wordt voldaan door $u_0^2 = gH$.

De waarde $u_0 = \sqrt{gH}$ is dus de snelheid die men aan het geheele kanaal moet geven, opdat de beweging stationnair zal worden, en dus ook de voortplantingssnelheid in stil water, onder de bekende onderstellingen. Uit het bovenstaande blijkt, dat het drukverschil in berg en dal zonder die onderstellingen niet 0 wordt, voor $u_0 = \sqrt{gH}$; dan zou

$$\delta p = \left\{\frac{\rho u_0^2}{H} \frac{1 + \frac{h}{2H}}{\left(1 + \frac{h}{H}\right)^2} - \rho g\right\} h;$$

neemt men bij benadering $u_0^2 = gH$, en laat men eerst de derde machten van van h weg, dan wordt

$$\delta p = g\rho h \left\{\frac{1 + \frac{h}{2H}}{\left(1 + \frac{h}{H}\right)^2} - 1\right\} = -\frac{3}{2}\frac{g\rho h^2}{H};$$

de druk is dus overal kleiner dan daar, waar $h = 0$ is; mag dus h^2 niet ten opzichte van H verwaarloosd worden, dan is het onmogelijk de voorwaarde van een vrij oppervlak te vervullen voor een stationnaire golf, d. w. z een golf met groote bergen kan zich niet zonder vormverandering in stil water voortplanten.

Uit de waarde van

$$\delta p = \left\{ \frac{\rho u_0^2}{H} \frac{1 + \frac{h}{2H}}{\left(1 + \frac{h}{H}\right)^2} - \rho g \right\} h = \left\{ \frac{\rho u_0^2}{H} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{H}\right) - \rho g \right\} h \,,$$

blijkt, dat als $\delta p = 0$ moet zijn, u_0 grooter moet wezen voor punten waarvoor h ook grooter is, dus dat dan de hoogere deelen van een berg zich sneller zullen voortplanten dan de lagere. In het geval van een golfberg die alleen voortschrijdt, zal de »kop" daardoor gevormd worden.

Indien h overal positief is zal men met eene grootere waarde voor u_0 betere uitkomsten verkrijgen; is h overal negatief dan met eene kleinere waarde.

Opdat een stationnaire golf mogelijk zou zijn, moest g eene functie van h zijn; de voorwaarde van constanten druk wordt dan

$$\frac{\rho}{2} u_0^2 \left(1 - \frac{H^2}{(H+h)^2}\right) = \rho \int_0^h f(h)\, d\, h$$

als $f\ (h)$ de kracht is op een hoogte h boven het niveau, dus

$$f = -\frac{u_0^2}{2} \frac{d}{d\, h} \frac{H^2}{(H+h)^2} = u_0^2 \frac{H^2}{(H+h)^3} \,,$$

de kracht moest dus omgekeerd evenredig zijn met de derde macht van de hoogte.

De uitkomsten der theorie der lange golven zijn vrijwel overeenkomstig de waargenomen feiten. Dikwijls echter komen de onderstellingen in het geheel niet overeen met den werkelijken toestand. Immers de horizontale snelheid behoeft in iedere doorsnede niet dezelfde te zijn, zooals reeds blijkt uit de vergelijking van LAPLACE $\frac{d^2 \Phi}{d x^2} + \frac{d^2 \Phi}{d y^2} = 0$, want dan is ook

$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d^2 u}{d y^2} = 0$, en dit kan bij golven niet anders dan wanneer ook u eene functie van y is. Tevens zal ook de horizontale beweging niet steeds zeer klein behoeven te zijn. In een volgend hoofdstuk zullen wij trachten de verklaring van de zoogenaamde »Enkele golf" te geven, daarbij de horizontale snelheid niet meer geheel onafhankelijk van y stellen, en de horizontale beweging niet meer aan beperkingen binden.

HOOFDSTUK II.

De enkele Golf.

De enkele golf (*solitary wave*) is beschreven door Lord Russell (in British Ass. Rep. 1837 en 1844 en in Edinb. Trans. 1840) [1]. Het is eene golf, die zich met constante snelheid voortplant, terwijl alle vloeistofdeeltjes van eene zelfde verticale doorsnede nagenoeg dezelfde horizontale snelheid hebben, terwijl de golf zich kenmerkt door hare groote standvastigheid en onveranderlijkheid. Door in een lang, nauw, met vloeistof gevuld vat plotseling aan het eene einde een kegel of prisma te schuiven, of eene bepaalde vloeistofmassa erbij te gieten,

1) Op zeer toevallige wijze werd Russell met het bestaan van deze „solitary wave" bekend. Hij zegt namelijk (Report 1844 pag. 319): „I believe I shall best introduce this phaenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped — not so the mass of water which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with a great velocity assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth, well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height."

Tengevolge van deze ontdekking werd van deze golf gebruik gemaakt voor de zoogenaamde fly-boat, waarbij een boot plotseling vooruit werd gerukt, eene enkele golf ontstond, die op den top de boot voortdroeg, zoodat de boot zonder veel moeite even snel voortging als de golf.

heeft Russell langs empirischen weg de enkele golf nader bestudeerd. Hij vond dan dat de voortplantingssnelheid gelijk was aan $\sqrt{g(H+h)}$, waarbij H de oorspronkelijke diepte van het kanaal, en h de hoogte van de golf voorstelt. Iedere vloeistofmolecule is in rust vóor de golf haar bereikt, en ook weer nadat de golf over haar is heengegaan. Inplaats van dezen enkelen golfberg, de zoogen. *positieve* golf, heeft Russell ook een enkel golfdal doen ontstaan, de *negatieve* golf, door plotseling aan het eene uiteinde van het vat eene vloeistofmassa te laten wegloopen. Na eenige secunden wordt dan de beweging der vloeistof regelmatig, en het golfdal plant zich voort met ongeveer dezelfde snelheid als de pos. golf, maar verkrijgt geen standvastigen vorm, en blijft nooit geheel alleen; het voorste deel wordt langer, en achter aan de golf vormen zich eene menigte golfjes, die langzamerhand kleiner en kleiner worden, en zoowel positief als negatief zijn.

Deze waarnemingen en experimenten zijn gecontroleerd en herhaald door Robertson (Phil. Magazine 1850 en 1851) en Bazin (Recherches hydrauliques, etc. Savants étrangers, T. XIX).

Bij zijne verklaring der enkele golf beschouwt Robertson deze als bestaande uit oneindig dunne verticale laagjes, waarvan de deeltjes dezelfde horizontale snelheid hebben. Aan zijne beschouwingen laat hij de beide volgende stellingen voorafgaan.

I. De verticale druk op ieder kolommetje kan worden voorgesteld door den dubbelen afstand van den top der kolom tot eene lijn, die evenwijdig aan het oorspronkelijk niveau op de halve hoogte der golf loopt, en

II. De verticale schommeling van eene zeer dunne vloeistofkolom, onderworpen aan eene kracht, die evenredig is aan den afstand van den top der kolom tot een gegeven punt, is isochroon.

Hij vindt dan, als L de lengte der golf, H de oorspronkelijke diepte, h de hoogte der golf en v de voortplantingssnelheid voorstelt:

$$L = 2\pi\left(H + \frac{h}{2}\right) \quad \text{en} \quad V = \sqrt{\frac{H \pm \frac{2}{h}}{H}(H \pm h)\, g}$$

waarin het bovenste teeken geldt voor eene positieve, het onderste voor eene negatieve golf.

Eigenlijk vindt Robertson $L = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\left(H + \frac{h}{2}\right)$, waarin c eene constante is, die in verband staat met de verhouding van de versnelling, die een kolom zou ondervinden als er geene horizontale beweging was, en de werkelijke versnelling. Als hij nu $c = 1$ neemt, dan komen zijne uitkomsten vrij nauwkeurig overeen met de waarnemingen van Russell.

Ook Earnshaw heeft eene theorie trachten te geven van de enkele golf, doch neemt evenmin als Robertson aan, dat de horizontale snelheid ook eene functie van y moet zijn, en dat dit werkelijk het geval moet zijn is duidelijk. Bovendien is het bij de theorie der lange golven gebleken, dat aan de voorwaarde van een vrij onveranderlijk oppervlak niet voldaan kan worden, als de hoogte der golf eindig is. Rayleigh heeft (Phil. Mag. 1876) getracht eene stationnaire enkele golf te verklaren, bij eene eindige hoogte en eene niet constante horizontale snelheid in iedere verticale doorsnede.

Hier volge een overzicht van zijne methode en hare uitkomsten.

Onderstellen wij weer, dat in een rechthoekig kanaal de golf zich voortplant en dat het geheele systeem weer eene snelheid ontvangen heeft, gelijk doch tegengesteld aan de voortplantingssnelheid. Beschouwen wij nu eene overlangsche doorsnede xy (waarbij de x-as langs den bodem van het kanaal en de y-as verticaal naar boven genomen is), en laten Φ de snelheidspotentiaal en ψ de stroomfunctie zijn, dan is

$$u = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \quad \text{en} \quad v = \frac{d\Phi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} \quad \ldots\ldots \text{A}$$

Men kan nu u en v, daar zij voldoen aan de vergelijking van LAPLACE, in reeksen ontwikkelen; is $f(x)$ de waarde van u aan den bodem, $(y=0)$, dan is

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x) - \frac{y^2}{1\,.\,2} f^{\text{II}} + \frac{y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} f^{\text{IV}} - \text{enz.} \\ -v &= \quad y f^{\text{I}} - \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} f^{\text{III}} + \frac{y^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} f^{\text{IV}} - \text{enz.} \end{aligned}\right\} \text{B}$$

welke waarden RAYLEIGH voorstelt respectievelijk door

$$\cos\left(y\,\frac{d}{d\,x}\right) f(x) \quad \text{en} \quad \sin\left(y\,\frac{d}{d\,x}\right) f(x),$$

overeenkomstig de ontwikkeling in reeksen van *cos* en *sin* en de symbolen eener herhaalde differentatie. De overeenkomstige waarde van ψ is:

$$\psi = y f - \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} f^{\text{II}} + \frac{y^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} f^{\text{IV}} - \dots \quad \text{C}$$

Nemen wij voor ψ de aan het vrije oppervlak constante waarde der stroomfunctie, dan hebben wij hierin eene betrekking tusschen de functie f en de ordinaat van het oppervlak.

Als nu p de druk in het oppervlak voorstelt, dan is

$$-2\,\frac{p-C}{\rho} = 2\,g\,y + u^2 + v^2; \quad \text{neem} \; -\omega = 2\,\frac{p-C}{\rho},$$

dus $u^2 + v^2 = \omega - 2\,g\,y$, dan moet men onderzoeken in hoever het mogelijk is ω constant te maken, en welke functie y dan van x is.

Daar

$$u^2 + v^2 = u^2 \left\{ 1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 \right\},$$

wordt

$$\omega - 2\,g\,y = u^2 \left\{ 1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 \right\},$$

of

$$u = \sqrt{\frac{\omega - 2\,g\,y}{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}};$$

waardoor B wordt

$$f - \frac{y^2}{1\,.\,2} f^{\text{II}} + \frac{y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} f^{\text{IV}} - \dots\dots = \sqrt{\frac{\omega - 2\,g\,y}{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}},$$

of

$$y f-\frac{y^3}{1\,.\,2}f^{\text{II}}+\frac{y^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f^{\text{IV}}-\ldots.=\sqrt{\frac{\omega y^2-2 g y^3}{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}}\;..\;\mathrm{D}$$

Hieruit kan met behulp van C, f geëlimineerd worden, als men y als eene zeer langzaam veranderende functie van x beschouwt, of als eene functie van εx, waarin ε zeer klein is. Uit C volgt:

$$\psi\left(\frac{1}{y}\right)=f-\frac{y^2}{1.2.3.}f^{\text{II}}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}f^{\text{IV}}-\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6.7}f^{\text{VI}}+\text{ enz.}$$

en hieruit is bij benadering af te leiden

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}} &= f^{\text{II}}-\frac{y^2}{1.2.3}\,f^{\text{IV}}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}\,f^{\text{VI}}-\text{ enz.}\\
\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{IV}} &= f^{\text{IV}}-\frac{y^2}{1.2.3.}\,f^{\text{VI}}+\text{enz.}\\
\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{VI}} &= f^{\text{VI}}-\text{ enz.}
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat:

$$\psi-\frac{y^3}{3}\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}}-\frac{y^5}{45}\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{IV}}-\frac{2\,y^7}{945}\psi\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{VI}}-\text{ enz.}=$$

$$=y f-\frac{y^3}{1\,.\,2}f^{\text{II}}+\frac{y^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f^{\text{IV}}\text{ enz.}$$

of, in gevolge D

$$\psi\left\{1-\frac{y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}}-\frac{y^5}{45}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{IV}}-\frac{2\,y^7}{945}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{VI}}-\text{enz.}\right\}=\sqrt{\frac{\omega y^2-2 g y^3}{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}}.\mathrm{E}$$

Verwaarloozen we nu de vierde machten van ε, dan valt reeds de derde term van het eerste lid van E weg, en verkrijgen wij

$$\psi\left\{1-\frac{y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}}\right\}=\sqrt{\frac{\omega y^2-2 g y^3}{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}},$$

dus:

$$\psi^2\left\{1-\frac{y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right\}=$$

$$\psi^2\left\{1-\frac{2\,y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^{\text{II}}\right\}\left\{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right\}=$$

$$\psi^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^{II} \right\} =$$

$$\psi^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \tfrac{2}{3}\, y^3 \left(\frac{-\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{y^2} + \frac{2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{y^3} \right) \right\} =$$

$$\psi^2 \left\{ 1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\, y \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} = \omega y^2 - 2 g y^3 \ldots\ldots \mathrm{F}$$

waardoor ω uitgedrukt is in de coördinaten van het oppervlak. Door nu ω constant te nemen, zullen wij door integratie van F den vorm van het oppervlak krijgen, waar de druk nagenoeg constant is.

Om F te integreeren, schrijven wij deze in de gedaante

$$\psi^2 \left\{ 1 + \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 y^{\frac{1}{2}}}{dx^2} \right\} = \omega y^2 - 2 g y^3$$

en hiervoor

$$\frac{d^2 y^{\frac{1}{2}}}{dx^2} = \frac{3}{4\psi^2} \left\{ \omega y^{\frac{1}{2}} - 2 g y^{\frac{3}{2}} - \psi^2 y^{-\frac{3}{2}} \right\},$$

welke uitdrukking door vermenigvuldiging met $\dfrac{d y^{\frac{1}{2}}}{dx}\, dx$ een volkomen differentiaal wordt, waarvan de integraal is

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = Cy + \frac{\omega y^2 - g y^3}{\psi^2} + 1 \ldots\ldots \mathrm{G}$$

waarin C de constante der integratie is.

Stellen wij nu de voortplantingssnelheid, d. i. de snelheid, die wij aan het geheele systeem gegeven hebben om de beweging stationnair te maken u_0, en de onveranderde diepte l, dan is bij het onveranderde niveau

$$\omega = u_0^2 + 2 g l \text{ en } \psi = \int_0^l u_0\, dy = u_0\, l.$$

Substitueeren wij deze waarden in G dan komt er

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + Cy + \frac{u_0^2 + 2gl}{u_0^2\, l^2} y^2 - \frac{g}{u_0^2\, l^2} y^3 \ldots \mathrm{H}$$

Hierin hebben wij nu u_0 en C ter beschikking, terwijl g en l bekend zijn. Het laatste lid van H is 0 voor $y = l$ en

$y = l_1$, den afstand van den top der golf tot den bodem van het kanaal, waaruit volgt dat $u_0^2 = g\,l_1$ en $C = -\frac{l + 2\,l_1}{l\,l_1}$;

$u_0^2 = g\,l_1$ is dus weer de waarde der voortplantingssnelheid, indien de golf steeds denzelfden vorm behoudt. Brengt men deze gevonden waarden van u_0 en C in H over, dan wordt deze

$$\frac{1}{3}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = 1 - \frac{2\,l_1 + l}{l\,l_1}\,y + \frac{l_1 + 2\,l}{l_1\,l^2}\,y^2 - \frac{1}{l_1\,l^2}\,y^3,$$

of

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = -\,\frac{3}{l_1\,l^2}\,(y - l)^2\,(y - l_1)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathrm{K}$$

Hieruit blijkt, dat er twee gelijke waarden l en éēne l_1 van y zijn, die het laatste lid 0 maken; l_1 is dus het eenige maximum; tevens blijkt dat y steeds kleiner moet zijn dan l_1; en daar l_1 de afstand was van den bodem tot den top der golf, d. i. de plaats waar de raaklijn aan het vrije oppervlak evenwijdig aan het onveranderde niveau loopt, kan (met de tot nu toe genomen benadering) niet aan onze voorwaarden voldaan worden door eene enkele golf van depressie, waarbij y steeds grooter is dan l_1. De vergelijking K bepaalt nu ook verder de gedaante der golflijn; door differentiatie vindt men

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,\frac{3}{l^2\,l_1}\,\left\{2\,(y - l)\,(y - l_1) + (y - l)^2\right\},$$

of

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = +\,\frac{3\,(y - l)}{l^2\,l_1}\,(2\,l_1 + l - 3\,y);$$

waaruit blijkt, dat voor de buigpunten der golflijn:

$$y = l \text{ en } y = \frac{2\,l' + l}{3} = l + \frac{2}{3}\,(l_1 - l).$$

De kromming verandert dus alleen van teeken op twee derde van de hoogte der golf. Door integratie van K vindt men de vergelijking der kromme. Stelt men $l - l_1 = \beta$, $y - l = \eta$ dan is deze integraal:

$$\pm x = \sqrt{\frac{l^2 l_1}{3\beta}}\, log \left\{ \frac{2\beta}{\eta} - 1 + 2\sqrt{\frac{\beta^2}{\eta^2} - \frac{\beta}{\eta}} \right\},$$

waar de constante zoo gekozen is, dat voor $x = 0$, $\eta = \beta$ is. Van periodiciteit is dus hier geen sprake, er is maar één golf. Op eindigen afstand zal de hoogte der golf boven het onveranderde niveau nooit nul worden. Eene bepaalde golflengte is er niet. Neemt men bijv. als einde der golf aan de plaats waar $y = \frac{1}{10}(l_1 - l)$ is, dus het tiende deel der grootste hoogte, dan is

$$\frac{x}{l} = \sqrt{\frac{l_1}{3\beta}}\, log \{20 - 1 + 2\sqrt{90}\} = \sqrt{\frac{l+\beta}{3\beta}}\, log\, 37{,}97368 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, 3{,}6737 \times \sqrt{\left(1 + \frac{l}{\beta}\right)} = 2{,}121\sqrt{\left(1 + \frac{l}{\beta}\right)}.$$

Is nu de hoogte der golf even groot als de onveranderde diepte, dus $\beta = l$, dan is

$$\frac{x}{l} = 2{,}121\sqrt{2} = 2{,}999;$$

is daarentegen

$$\beta = \frac{l}{3} \text{ dan is: } \frac{x}{l} = 4{,}242,$$

is

$$\beta = \frac{l}{8} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{x}{l} = 6{,}343.$$

Deze uitkomsten zijn overeenkomstig de waarnemingen van Lord Russell. De gevonden waarde $u_0^2 = g\, l_1$ geeft ook eene verklaring van de waarneming van Lord Russell, dat namelijk de golf steeds uiteen viel, indien de hoogte ongeveer gelijk werd aan de onveranderde diepte, dus voor $l_1 - l = \beta$ of $l = \frac{1}{2} l_1$. Immers u_0, de snelheid die het geheele systeem moet krijgen, opdat de golf stationnair worde, d. w. z. altijd op dezelfde plaats blijve, kan nooit met eene grootere hoogte der golf overeenkomen, dan die welke volgt uit de formule der dynamica $u = \sqrt{2\, g\, h}$; hier moet nu $l_1 - l < \frac{u_0^2}{2\, g}$ en daar $u_0^2 = g\, l_1$ is moet $l_1 - l < \frac{g\, l_1}{2\, g} < \frac{l_1}{2}$, of:

$$2(l_1 - l) < l_1 \quad \text{dus} \quad l_1 - l < l \quad \text{zijn.}$$

De hoogte der golf moet dus kleiner zijn dan de oorspronkelijke diepte. Fig. II stelt voor de golflijn, volgens de formule door RAYLEIGH geconstrueerd, waarbij hij echter niet opgegeven heeft, welke betrekking er tusschen l en β bestaat. Fig. III stelt voor de door mij volgens de formule van RAYLEIGH geconstrueerde halve golflijn, voor $\beta = \frac{1}{2} l = \frac{1}{3} l_1$; voor $\eta = \frac{7}{8}\beta$, $\frac{3}{4}\beta$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{3}\beta$, $\frac{1}{4}\beta$ en $\frac{1}{10}\beta$ zijn resp. de waarden van $\frac{x}{l}$ gevonden: 0,8 1,1 1,76 2,3 2,6 3,67.

Behalve deze benaderingsmethode is ook eene andere gevolgd door BOUSSINESQ en DE SAINT VENANT [1]). Zij nemen eerst eene ruwe waarde van u aan, en daarna eene betere, zoodat ook hier weer de horizontale snelheid met de diepte verandert. Hunne uitkomsten zijn samengevat in de volgende behandeling van de enkele golf.

Laat weer H de oorspronkelijke diepte van het kanaal zijn, de hoogte der golf boven het oorspronkelijk niveau $= \eta$, de x-as in den bodem, de η-as verticaal naar boven, u en v de snelheidscomponenten van een punt $x\,y$, en u_1 en v_1 die van een punt in het oppervlak.

Zij $U = \frac{1}{H+\eta}\int_0^{H+\eta} u\,d\eta$ de gemiddelde snelheid in de richting der x-as in eene doorsnede loodrecht op de x-as.

De bewegingsvergelijkingen zijn dan

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - g \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

terwijl de continuiteitsvergelijking wordt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

De voorwaarde aan het vrije oppervlak is dat

---

1) t. a. p. en C. R. 1872 en volgende jaren.

$$\left.\begin{array}{r} p=0 \text{ voor } y=H+\eta \\ \text{en } v=0 \text{ voor } y=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De continuiteitsvergelijking kan men ook vinden, door te zeggen, dat de volumevermeerdering in een tijd $d\,t$ van eene laag tusschen twee zeer dicht bij elkaar gelegen dwarse doorsneden gelijk is aan $\frac{d\,(H+\eta)}{d\,t}\,d\,x\,\,d\,t$, welke uitdrukking gelijk moet wezen aan het verschil der hoeveelheden vloeistof, die door de eerste en tweede doorsnede zijn gegaan, namelijk $-\frac{d\,(H+\eta)\,U}{d\,x}\,d\,x\,\,d\,t$

$$\text{dus } \frac{d\,(H+\eta)}{d\,t}+\frac{d\,(H+\eta)\,U}{d\,x}=0 \text{ of } \frac{d\,\eta}{dt}+\frac{d\,(H+\eta)\,U}{d\,x}=0 \quad (4)$$

Stelt men nu als eerste benadering de snelheid u weinig verschillend van U, en neemt men de verticale snelheden als lineaire functies van de afstanden tot den bodem, of, wat op hetzelfde neerkomt, neemt men η klein ten opzichte van H, dan is

$$v=\frac{d\,\eta}{dt}\,\frac{y}{H},\qquad \frac{d\,v}{dt}=\frac{d^2\,\eta}{d\,t^2}\,\frac{y}{H}\ \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Substitueert men nu deze waarde in de laatste bewegingsvergelijking (2), dan komt er:

$$-g-\frac{d^2\,\eta}{d\,t^2}\,\frac{y}{H}=\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{dy};$$

of, na vermenigvuldiging met $d\,y$ en integratie tusschen $y=y$ en $y=H+\eta$:

$$\frac{p}{\rho}=g\,(H+\eta-y)+\frac{d^2\,\eta}{d\,t^2}\,\frac{H^2-y^2}{2\,H}\ \ldots\ldots, \quad (6)$$

na verwaarloozing van het product van $\frac{d^2\,\eta}{d\,t^2}$ met $\frac{2\,H\,\eta-\eta^2}{2\,H}$, beide kleine grootheden.

Differentieert men (6) naar x en substitueert de gevonden waarde van $\frac{1}{\rho}\,\frac{d\,p}{d\,x}$ in de eerste vergelijking van (2), dan is

$$\frac{du}{dt} = -g\frac{d\eta}{dx} - \frac{d^3\eta}{dt^2\,dx}\,\frac{H^2 - y^2}{2H} \quad \ldots\ldots (7)$$

Om de gemiddelde waarde van $\frac{du}{dt}$ te vinden, vermenigvuldigt men beide leden met $\frac{dy}{H+\eta}$, en integreert tusschen $y = 0$ en $y = H + \eta$, dan verkrijgt men:

$$\frac{1}{H+\eta}\int_0^{H+\eta}\frac{du}{dt}\,dy = -g\frac{d\eta}{dx} - \frac{H}{3}\,\frac{d^3\eta}{dt^2\,dx} \quad \ldots (8)$$

Daar echter $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} + u\frac{dy}{dx} + v\frac{du}{dy}$ is, waarvan de laatste term verwaarloosd mag worden, en waarin u door de gemiddelde waarde U vervangen mag worden, zal men zonder groote fout voor het eerste lid van (8) $\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}$ mogen schrijven; zoodat (8) nu wordt:

$$\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} + g\frac{d\eta}{dx} + \frac{H}{3}\,\frac{d^3\eta}{dt^2\,dx} = 0 \quad \ldots (9)$$

Tot zoover zijn de formules ook van toepassing op andere golven; voeren wij nu de voorwaarde in, die de zoogenaamde »Enkele golf" bepalen, namelijk dat zij zich over een zeer grooten afstand voortplant, zonder noemenswaardige vormverandering, met eene constante voortplantingssnelheid, zóó dat als t met dt en x met $\omega\,dt$ toeneemt (ω is de constante voortplantingssnelheid) η en U niet veranderen, of, wat op hetzelfde neerkomt, dat η en U functies zijn van $x - \omega t$, dan wordt $\frac{d(\eta\,.\,U)}{dt} = -\omega\,\frac{d(\eta\,.\,U)}{dx}$ en gaan (4) en (9) over in:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(-\omega\eta + H.\,U + U\eta) = 0 \quad \text{en} \\ &\frac{d}{dx}\left(-\omega U + \tfrac{1}{2}U^2 + g\eta + \frac{H\omega^3}{3}\,\frac{d^2\eta}{dx^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

De vormen tusschen haakjes zijn nu over de geheele uitgestrektheid der golf constant, en daar alle termen eens 0 zijn voor $x=\infty$, moeten de beide uitdrukkingen ook steeds 0 zijn. Wij verkrijgen hierdoor twee vergelijkingen in U; ten eerste:

$$-\omega\eta+H.\,U+U\eta=0 \quad \text{of} \quad U=\frac{\omega\eta}{H+\eta},$$

welke, gesubstitueerd in de tweede:

$$-\omega U+\tfrac{1}{2}U^2+g\eta+\frac{H\omega^2}{3}\frac{d^2\eta}{dx^2}=0,$$

geeft:

$$\omega^2=g\left\{\frac{1}{H+\eta}-\frac{\eta}{2(H+\eta)^2}-\frac{H}{3\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2}\right\}^{-1},$$

of bij verwaarloozing van tweede machten van η

$$\omega^2=gH\left(1+\frac{3\eta}{2H}+\frac{H^2}{3\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)\;\ldots\ldots\;(11)$$

Stelt men nu in (11):

$$h=H\left(\frac{3}{2}\,\frac{\eta}{H}+\frac{H^2}{3\eta}\,\frac{d^2\eta}{dx^2}\right),$$

zoodat

$$\omega^2=g\,(H+h)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(12)$$

dan is

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{3}{2H^3}\,(2h\eta-3\eta^2)\ldots\ldots\ldots\;(13)$$

of

$$2\frac{d\eta}{dx}\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{3}{H^3}(2h\eta-3\eta^2)\frac{d\eta}{dx},$$

hetgeen, geintegreerd, wordt:

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2=\frac{3h\eta^2-3\eta^3}{H^3}=\frac{3\eta^2(h-\eta)}{H^3}\;\ldots\ldots\;(14).$$

Uit deze vergelijkingen (13) en 14) volgt:

1ste de richtingscoefficient van de raaklijn aan de golflijn is niet alleen 0 voor $\eta=0$, maar ook voor $\eta=h$; h is dus de hoogte der golf;

2de de golf is altijd boven het vlak van het oorspronkelijk niveau;

3de de golf is symmetrisch tenopzichte der ordinaat $y = H + h$;

4de voor $\eta = \frac{2}{3} h$ is $\frac{d^2 \eta}{d x^2} = 0$; de golf zal dus op twee derde van hare hoogte buigpunten hebben.

De vergelijking der golflijn vindt men aldus. Uit (14) volgt:

$$\left(\frac{h}{\eta^2} \frac{d \eta}{d x}\right)^2 = \frac{3 h}{H^3} \left\{ \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - \frac{h}{\eta} \right\}$$

$$\left\{ \frac{d}{d x} \left(\frac{h}{\eta}\right) \right\}^2 = \frac{3 h}{H^3} \left\{ \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - \frac{h}{\eta} \right\},$$

waaruit volgt:

$$2 \frac{d}{d x} \left(\frac{h}{\eta}\right) \frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{h}{\eta}\right) = \frac{3 h}{H^3} \left\{ 2 \frac{h}{\eta} \frac{d}{d x} \left(\frac{h}{\eta}\right) - \frac{d}{d x} \left(\frac{h}{\eta}\right) \right\}$$

$$\frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{h}{\eta}\right) = \frac{3 h}{H^3} \left\{ \frac{h}{\eta} - \frac{1}{2} \right\};$$

hetgeen men ook aldus kan schrijven:

$$\frac{d^2 P}{d x^2} = n^2 P \quad \text{als} \quad P = \left(\frac{h}{\eta} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{en} \quad n^2 = \frac{3 h}{H^3} \text{ is.}$$

Hiervan is de integraal

$$P = \tfrac{1}{4} e^{-n \omega t} e^{n x} + \tfrac{1}{4} e^{-n \omega t} e^{-n x} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

De constanten zijn verdreven met behulp der voorwaarden, dat voor $\eta = h$, $\frac{d P}{d x} = 0$ en $x = \omega t$ is.

(15) kan ook aldus geschreven worden:

$$e^{2 n (x - \omega t)} - 2 \left(\frac{2 h}{\eta} - 1\right) e^{n (x - \omega t)} + 1 = 0,$$

of

$$e^{n (x - \omega t)} = \left(\frac{2 h}{\eta} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2 h}{\eta} - 1\right)^2 - 1}$$

waarin natuurlijk het bovenste teeken genomen moet worden; dus:

$$x - \omega t = \sqrt{\frac{H^3}{3 h}} \cdot \log \left[\frac{2 h}{\eta} - 1 + \sqrt{\left(\frac{2 h}{\eta} - 1\right)^2 - 1} \right]$$

Hieruit blijkt, dat de golflijn asymptotisch nadert tot het onveranderde niveau. Deze uitkomsten komen dus geheel overeen met die van RAYLEIGH; alleen verschilt de constante term $\sqrt{\frac{H^3}{3h}}$; RAYLEIGH had gevonden $\sqrt{\frac{H^2(H+h)}{3h}}$; trouwens bij de laatste behandeling was de hoogte h klein genomen in verhouding tot H, hetgeen RAYLEIGH niet gesteld had.

Beschouwt men de formule der golflijn voor $t=0$ uit een geometrisch oogpunt, dan stelt deze ook voor negatieve η eene kromme voor, die twee takken heeft, welke beide asymptotisch zijn aan de y-as voor $\eta = -\infty$ en aan de lijn $y = H$ voor $x = \pm\infty$. In Fig. IV is A M B de golflijn voor $h = \frac{1}{3} H$; de gearceerde lijnen zijn de kromme, die voorgesteld wordt door de formule bij negatieve η.

Om verdere eigenschappen der golflijn op te sporen, zullen wij aan de differentiaalvergelijking een anderen vorm geven.

Neemt men als onafhankelijk veranderlijke in plaats van x, het volume q per eenheid van breedte van dat deel der golf, dat vóór de doorsnede ligt, die een alscis x heeft, dus

$q = \int_x^\infty \eta \, d\,x$, dan gaat, daar $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dq}\frac{dq}{dx} = -\eta\frac{d\eta}{dq}$,

verg. (14) over in:
$$\left(\frac{d\eta}{dq}\right)^2 = \frac{3}{H^3}(h-\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

of $\frac{d^2\eta}{dq^2} = \frac{-3}{2H^3}$, waarvan de algemeene integraal is:

$$\eta = c_2 - \frac{3}{4H^3}(q-c_1)^2,$$

waarin $c_2 = h$ genomen moet worden, opdat deze vergelijking zal voldoen aan (16), dus

$$h - \eta = \frac{3}{4H^3}(q-c_1)^2 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ook uit deze formule leert men gemakkelijk het beloop der kromme kennen. Indien men namelijk aan q alleen geometrische beteekenis toekent, en dan $q - c_1$, zoowel van 0 tot $+\infty$ laat toenemen, als van 0 tot $-\infty$ laat afnemen, zal η in beide gevallen van h tot $-\infty$ afnemen, en wel, daar $d\,q = -\eta\, d\,x$

in het eerste geval positief is, en negatief in het tweede, zal men in het eerste geval dx negatief moeten nemen, of van den top der golf M naar den negatieven kant der x-as gaan, totdat $\eta = 0$ is geworden; voor $x = -\infty$ en daarna als η negatief is, moet dx weer positief genomen worden, zoodat men van $x = -\infty$ tot $x = 0$ moet teruggaan. Laat men $q - c_1$ van 0 tot $-\infty$ afnemen, dan gebeurt hetzelfde aan den positieven kant der x-as.

Om de constante c_1 te bepalen, weet men dat $q = 0$ is voor $x = +\infty$ of voor $\eta = 0$; voor $\eta = h$ is q gelijk aan de helft van het totale volume Q der golf; dus $c_1 = \frac{Q}{2}$; de vergelijking (17) gaat dus over in:

$$h - \eta = \frac{3}{4H^3}\left(q - \frac{Q}{2}\right)^2,$$

waaruit weer volgt

$$h = \frac{3\,Q^2}{16\,H^3}, \text{ en dus } \eta = \frac{3}{4\,H^3}\,q\,(Q - q) \quad \ldots \quad (18)$$

Hieruit volgt, dat eene longitudinale doorsnede der enkele golf eene kromme lijn is, die de eigenschap bezit, dat het product van den ordinaat van een punt van het vrije oppervlak (gerekend tot het onveranderd niveau) met de derde macht der oorspronkelijke diepte, gelijk is aan drie vierde van het product der twee deelen, waarin het totale volume der golf verdeeld wordt door dien ordinaat. Tevens is de hoogte der golf het drie zestiende van het kwadraat van het totale volume, gedeeld door de derde macht van de oorspronkelijke diepte.

De ordinaat van het zwaartepunt der golf is

$$\frac{\int_0^Q \frac{1}{2}\eta\,d\,q}{\int_0^Q d\,q} = \frac{\int_0^Q \eta\,d\,q}{2\,Q},$$

of met behulp van (18)

$$\frac{1}{2Q}\int_0^Q \frac{3}{4H^3} q(Q-q)\,dq = \frac{3}{8QH^3}(\tfrac{1}{2}Q^3 - \tfrac{1}{3}Q^3) = \frac{Q^2}{16H^3}.$$

Deze ordinaat blijkt juist het derde deel te zijn van de waarde van h. Het zwaartepunt ligt dus op het derde der hoogte.

Om de baan te vinden, die elk punt van het oppervlak der golf beschrijft, veronderstelt DE SAINT VENANT dat iedere laag ongeveer dezelfde gedaante behoudt; dan toch is het gemakkelijk eene betrekking te vinden, tusschen de horizontale en de verticale verplaatsing. Immers laat (Fig. V) AB het onveranderde niveau voorstellen, waarover de golf abc zich voortplant en H de diepte der vloeistof. Indien nu de golf in een tijd dt van abc gaat naar $a_1 b_1 c_1$, dan zal bijv. de laag P gegaan zijn naar P'; noemen wij nu den afstand aa_1, dx en den afstand der vlakken P en P', $d\xi$, den afstand der punten der golflijn tot de lijn AB, η, dan is de hoeveelheid vloeistof boven het niveau AB, rechts van P, $\int_x^\infty \eta\,dx$; na een tijd dt is deze toegenomen met $d\int_x^\infty \eta\,dx$, en wel daar vlak P over een afstand $d\xi$ is voortgegaan, is deze toename gelijk aan $H\,d\xi$, zoodat dus:

$$H\,d\xi = -\eta\,dx,$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{\eta}{H}.$$

Voeren wij deze voorwaarde in de differentiaalvergelijking (14) van het oppervlak

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3\eta^2(h-\eta)}{H^3},$$

dan is, daar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}, \qquad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{3(h-\eta)}{H},$$

eene betrekking tusschen de η en de ξ, de verticale en de horizontale verplaatsing van een punt van het vrije oppervlak. Na integratie volgt hieruit:

$$\eta = \frac{3}{H}\xi\sqrt{\frac{hH}{3}} - \frac{3}{4H}\xi^2,$$

de vergelijking eener parabool, waarvan de as naar beneden is gekeerd; voor $\eta = 0$ is

$$\xi = 0 \text{ en } \xi = 4\sqrt{\frac{hH}{3}}.$$

$4\sqrt{\frac{hH}{3}}$ is dus de lengte der koorde der parabool, de horizontale afstand, waarover een punt van het oppervlak en dus ongeveer alle punten der zelfde laag P voort zijn gegaan, gedurende den tijd, dat de geheele golf over haar is heen gegaan. De vergelijking der golflijn wijst er echter op dat dit, streng genomen, eerst na een tijd $t = \infty$ zal geschied zijn. Daar de verticale snelheden van de andere punten der laag evenredig zijn met hun afstand tot den bodem, $v = \frac{d\eta}{dt}\frac{y}{H}$ (zie (5)), neemt de verticale snelheid van moleculen, niet in het oppervlak gelegen steeds af. Zij zullen ook deelen van parabolen beschrijven, waarvan de pijlen zich verhouden als de afstand der moleculen tot den bodem. De waarnemingen bewijzen dan ook duidelijk, dat de banen door de moleculen beschreven, geen halve ellipsen zijn, daar deze geen hoek van 90° met de lijn van het onveranderde niveau maken. Volkomen streng is echter deze berekening van de banen der moleculen niet, daar wederom gebruik is gemaakt van de beperkende onderstelling, dat de horizontale snelheid in iedere verticale laag constant is.

De negatieve golf, de golf van depressie, bleek zeer onstandvastig te zijn. Toen wij de voorwaarden opspoorden, waaraan de golf moest voldoen, om de voortplantingssnelheid (ω) constant te houden, hebben wij reeds gezien, dat de golf alleen bestaanbaar was voor $\eta \geqq 0$. Heeft men echter op vroeger aangewezen manier toch eene enkele golf van depressie verkregen, dan kunnen wij uit onze formules het verloop dier golf nagaan. Immers uit:

$$\omega = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3\eta}{4H} + \frac{H^2}{3\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2}\right),$$

blijkt, dat voor negatieve η in dat gedeelte der golf, waar $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ negatief is, dat is in dat deel waar de golflijn convex is en in het onveranderde niveau overgaat, en dus de absolute waarde van η het kleinst is, de term $\frac{H^2}{3\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2}$ positief is en betrekkelijk vrij groot in vergelijking met de absolute waarde van den negatieven term $\frac{3\eta}{4H}$. De waarde dus van ω is daar grooter dan op die plaatsen waar $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ positief, de golflijn concaaf is, en waar tevens de absolute waarde van η grooter is; immers dan is $\frac{H^2}{3\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2}$ zoowel als $\frac{3\eta}{4H}$ negatief. Eene constante waarde voor ω is dus in dit geval niet te verkrijgen; want het voorste deel der golf gaat vlugger voort dan het laagste, middelste deel; de golf wordt dus vooraan uitgerekt; achternaa is ook weer de snelheid grooter dan in het midden, de golf wordt dus daar korter, en wel duurt deze verkorting zoolang, als er onder het oorspronkelijk niveau nog een convex gedeelte is; de verkorting zal eene verhooging te weeg brengen, en er ontstaat dus achter de eerste negatieve hoofdgolf een golfberg, wier voortplantingssnelheid, daar η nu positief is, wel weer gelijk kan zijn aan die van het midden der negatieve golf. Deze nieuwe golfberg wordt nu weer gevolgd door een golfdal; immers de golfberg moet met een concaaf deel overgaan in het oorspronkelijk niveau; dit concave deel kan niet ontstaan, als zijne snelheid niet kleiner is, dan die van de positieve golf, waaruit volgt, dat, daar $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ nu weer positief is, wederom η negatief moet zijn; dit concave deel is dus weer een deel van een negatieve golf en zoo voort, zoodat er eene geheele reeks positieve en negatieve golfjes volgen zullen.

In „Il Nuovo Cimento 1879", heeft Dr. E. Bazzi een opstel gegeven »Sulla Onde Liquide", en daarin de negatieve golf nagegaan. Hij had met behulp van „een bizonder daarvoor ingericht apparaat", dat langs het kanaal verschoven kon worden, op een cilinder van Duhamel op verkleinde schaal de bewegingswetten van het vrije oppervlak verkregen; zijne uitkomsten waren dezelfde als de ons reeds bekende, namelijk dat de primaire negatieve golf door andere positieve en negatieve werd gevolgd, die regelmatig in hoogte afnamen. Hij beweert tevens, dat de diepte der primaire negatieve golf voor verschillende punten van het kanaal afneemt, in omgekeerde reden met den wortel uit den afstand tot den oorsprong. De door hem beloofde analytische behandeling en verklaring hiervan is, voor zoover mij bekend is, tot nu toe niet verschenen.

HOOFDSTUK III.

Periodieke Golven.

Wij gaan nu over tot de beschouwing van een anderen mogelijken bewegingstoestand der golf, waarbij wij de beweging periodiek en zeer klein aannemen, zoodat de kwadraten en producten van kleine grootheden verwaarloosd kunnen worden.

Stel weer, dat de beweging in ieder vlak evenwijdig aan het xy-vlak dezelfde is. Wij zullen nu den oorsprong in het niveau nemen. Wij hebben dan (zie KIRCHHOFF)

$$\frac{p}{\rho} = -g\,y - \frac{d\Phi}{d\,t} + F(t) \;\ldots\ldots\ldots \;\mathrm{I}$$

daar het kwadraat der snelheid verwaarloosd is.

De continuiteitsvergelijking is

$$\frac{d^2\,\Phi}{d\,x^2} + \frac{d^2\,\Phi}{d\,y^2} = 0; \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;\mathrm{II}$$

terwijl de grensvoorwaarden zijn: dat $\frac{d\Phi}{d\,y}$ aan den bodem, dat is voor $y = -h$ gelijk 0 is, dus

$$\frac{d\Phi}{d\,y}_{\,y=-h} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;\mathrm{III}$$

en aan het vrije oppervlak:

$$d\,p = 0 \quad \text{of} \quad \frac{d\,p}{d\,t} + \frac{d\,p}{d\,x}\frac{d\,x}{d\,t} + \frac{d\,p}{d\,y}\frac{d\,y}{d\,t} = 0 \;\ldots \;\mathrm{IV}$$

Eene bizondere oplossing van II is $e^{\alpha x + \beta y}$, doch zoodanig dat

$\alpha^2 + \beta^2 = 0$ is, waarin α imaginair moet zijn; want anders wordt $\frac{d\Phi}{dx}$ voor $x = \pm\infty$ ook ∞. Wij krijgen dus zoowel $e^{i\beta x + \beta y}$ als $e^{i\beta x - \beta y}$. De algemeene oplossing is na de imaginaire grootheden door goniometrische functies te hebben vervangen:

$$\Phi = \Sigma \{ e^{\beta y} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta y} (A' \cos \beta x + B' \sin \beta x) \}$$

of

$$\Phi = \Sigma \{ e^{\beta (y+h)} (A\, e^{-\beta h} \cos \beta x + B\, e^{-\beta h} \sin \beta x) + \\ + e^{-\beta (y+h)} (A'\, e^{\beta h} \cos \beta x + B'\, e^{\beta h} \sin \beta x) \} \quad \ldots \text{V}$$

De voorwaarde III geeft:

$$A\, e^{-\beta h} = A' e^{+\beta h} \qquad B\, e^{-\beta h} = B' e^{+\beta h},$$

zoodat V overgaat in

$$\Phi = \Sigma [\{ e^{\beta (y+h)} + e^{-\beta (y+h)} \} \{ C \cos \beta x + D \sin \beta x \}] \,. \text{VI}$$

Uit (1) volgt dat

$$\frac{dp}{dt} = \rho F'(t) - \rho g \frac{dy}{dt} - \rho \frac{d^2 \Phi}{dt^2},$$

en dus volgens IV

$$F'(t) - g \frac{d\Phi}{dy} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ \text{VII}$$

met weglating van producten van kleine grootheden.

De vergelijking van het vrije oppervlak is, als de druk der atmospheer $= 0$ gesteld wordt,

$$0 = g y + \frac{d\Phi}{dt} - F(t).$$

De gemiddelde ordinaat van het oppervlak is $y = \frac{F(t)}{g}$, daar Φ eene goniometrische functie van x is; en daar de oorsprong in het onveranderde niveau ligt, is deze gemiddelde ordinaat $= 0$; dus $F(t) = 0$.

Substitueert men de waarde van VI in VII, terwijl men na differentiatie $y = 0$ stelt, daar toch de bewegingen zeer klein zijn, en dus de waarde van y in het oorspronkelijk niveau genomen mag worden, dan volgt

$$F'(t) - g\beta\,\Sigma\,(e^{\beta h} - e^{-\beta h})\,(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$$
$$- \Sigma\,(e^{\beta h} + e^{-\beta h})\left(\frac{d^2 C}{d t^2}\cos\beta x + \frac{d^2 D}{d t^2}\sin\beta x\right) = 0.$$

Zal deze vergelijking doorgaan voor alle waarden van x, dan moet $F'(t) = 0$ zijn en

$$\left.\begin{aligned}(e^{+\beta h} - e^{-\beta h})\,g\beta C + (e^{\beta h} + e^{-\beta h})\,\frac{d^2 C}{d t^2} = 0\\ (e^{+\beta h} - e^{-\beta h})\,g\beta D + (e^{\beta h} - e^{-\beta h})\,\frac{d^2 D}{d t^2} = 0\end{aligned}\right\}\ \text{VIII}$$

De oplossing van VIII is $C = E\cos\beta c t + F\sin\beta c t$, waarin $c^2 = \dfrac{g}{\beta}\,\dfrac{e^{+\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{+\beta h} + e^{-\beta h}}$ en E en F absolute constanten zijn. D verkrijgt eene overeenkomstige waarde.

Wij krijgen dus voor ϕ een reeks termen van den vorm

$$\{e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)}\}\ \{a\cos\beta\,(x \pm c\,t) + b\sin\beta\,(x \pm c\,t)\}.$$

Voor het geval, dat wij golven beschouwen die zich met gelijke snelheid onveranderd voortplanten, moet c constant zijn; bij iedere waarde van c behoort slechts ééne waarde van β, immers

$$\log\frac{c^2}{g} = \log\,(e^{+\beta h} - e^{-\beta h}) - \log\,(e^{+\beta h} + e^{-\beta h}) - \log\beta.$$

$$\frac{d\log\frac{c^2}{g}}{d\beta} = h\,\frac{e^{+\beta h} + e^{-\beta h}}{e^{+\beta h} + e^{-\beta h}} - h\,\frac{e^{+\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{+\beta h} + e^{-\beta h}} - \frac{1}{\beta} =$$
$$= \frac{4\,h}{e^{2\beta h} - e^{-2\beta h}} - \frac{1}{\beta}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{IX}$$

daar nu

$$e^{2\beta h} - e^{-2\beta h} = 2\left(2\beta h + \frac{2^3\beta^3 h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right),$$

is het laatste lid van IX zoowel voor β positief als β negatief steeds negatief. Neemt c toe dan neemt β steeds af, en daarom kan bij ééne waarde van c slechts ééne waarde van β behooren. ϕ bevat nu maar één der termen; voor golven die in de richting der positieve x-as voortgaan is dus

$$\Phi = a \{ e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)} \} \cos \beta (x - c t),$$

daar de term $\sin \beta (x - c t)$ door verandering van den oorsprong verdreven kan worden. De vergelijking van het vrije oppervlak is dan

$$y = \frac{-a \beta c}{g} (e^{\beta h} + e^{-\beta h}) \sin \beta (x - c t) \quad . \; . \; . \; . \; \mathrm{X}$$

het vertoont dus de gedaante van eene sinussoïde; over een afstand $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ vindt men weer denzelfden toestand; λ is de golflengte.

De waarde van c verandert met $\beta h = \frac{h}{\lambda}$; is die waarde zeer klein, bijv. $= \delta$, dan wordt $c = \sqrt{g h}$ daar

$$c^2 = \frac{g h}{\beta h} \frac{e^{+\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{+\beta h} + e^{-\beta y}} = \frac{g h}{\delta} \frac{e^{\delta} - e^{-\delta}}{e^{\delta} + e^{-\delta}} = g h \frac{e^{-\delta}(e^{2\delta} - 1)}{2\delta} =$$

$$= g h \frac{e^{2\delta} - 1}{2\delta} = g h;$$

hetgeen met de theorie der lange golven overeenkomt; is de waarde van h zeer groot, dan is

$$c^2 = \frac{g}{\beta} \frac{1 - e^{-2\beta h}}{1 + e^{-2\beta y}} = \frac{g}{\beta}.$$

$c = \sqrt{\frac{g}{\beta}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$ is nu de voortplantingssnelheid in een kanaal met zeer groote diepte.

De baan die ieder deeltje beschrijft is een ellips, want als $x + \xi$ en $y + \eta$ de ordinaten zijn op een tijd t van een punt x, y (op tijd $t = 0$), dan is

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} = -\beta a \{ e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)} \} \sin \beta (x - c t),$$

$$v = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\Phi}{dy} = \beta a \{ e^{\beta(y+h)} - e^{-\beta(y+h)} \} \cos \beta (x - c t),$$

waar in weer na differentiatie de ordinaten genomen zijn voor $t = 0$, daar de bewegingen zeer klein zijn ondersteld. Bij integratie vindt men

$$\xi = -\frac{a}{c}\left\{e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)}\right\} \cos\beta\,(x - c\,t),$$

$$\eta = -\frac{a}{c}\left\{e^{\beta(y+h)} - e^{-\beta(y+h)}\right\} \sin\beta\,(x - c\,t).$$

De groote as is dus horizontaal; de ellipsen worden platter, hoe dieper het deeltje ligt, om aan den bodem eene rechte lijn te worden. Daar η te gelijk met y een maximum wordt (zie X) en $\frac{d\,\xi}{d\,t}$ dan positief is, is ieder deeltje in zijn hoogsten stand, wanneer een golfberg er overheen gaat; het beweegt zich daar vooruit.

Eene opmerkelijke uitkomst wordt verkregen, wanneer twee golfstelsels met dezelfde amplitudo en ongeveer gelijke golflengten in dezelfde richting voortgaan; door het theorema van superpositie van kleine bewegingen vindt men dan de vergelijking van het vrije oppervlak:

$$y = A \sin\beta\,(x - c\,t) + A \sin\beta'\,(x - c'\,t) =$$

$$2\,A \cos\left\{\frac{\beta - \beta'}{2}x - \frac{\beta\,c - \beta'\,c'}{2}t\right\} \sin\left\{\frac{\beta + \beta'}{2}x - \frac{\beta\,c - \beta'\,c'}{2}t\right\}$$

Zijn nu β en β' ongeveer gelijk en ook c en c', dan verandert de *cos* zeer langzaam met x en t; de amplitudo van de sinusbeweging is dan eene periodieke functie van x en t, welke schommelt tusschen 0 en $2\,A$. Men ziet dus stelsels golven, gescheiden door strooken onbewogen water, wier onderlinge afstand is $\frac{2\,\pi}{\beta - \beta'}$, en waarvan de voortplantingssnelheid is $\frac{\beta\,c - \beta'\,c'}{\beta - \beta'}$; deze golfstelsels heeft Rayleigh »groepen van golven" genoemd. Voor een grensgeval is deze laatste voortplantingssnelheid $\sigma = \frac{d\,(\beta\,c)}{d\,\beta}$ dus $\sigma : c = 1 + \frac{d\,log\,c}{d\,log\,\beta}$ (zie Rayleigh, »On Sound", 191). Als c evenredig is met λ^n, of met β^{-n}, is $\frac{d\,log\,c}{d\,log\,\beta} = -\,n$ en dus $\sigma = c\,(1 - n)$. Voor het geval van diepwatergolven is $n = \frac{1}{2}$ dus $\sigma = \frac{1}{2}\,c$.

THOMSON heeft (Phil. Mag. 1871) eene theorie van golven gegeven, waarbij als storende kracht de capillaire werking aan het oppervlak optrad; de druk is dan aan het oppervlak niet $= 0$ maar $\frac{K}{2R}$, waarin R de kromtestraal aan het oppervlak en K de capillaire constante is; de vergelijking VIII gaat dan over in

$$\frac{K}{2R} = \frac{K}{2}\frac{d^2 y}{d x^2} = g y + \frac{d\Phi}{d t};$$

hij vindt dan, dat bij diepwatergolven

$$c^2 = \frac{g}{\beta} + \frac{K}{2\rho}\beta.$$

Voor het geval dat de zwaartekracht in vergelijking met de capillaire krachten buiten rekening kan worden gelaten, is dus c evenredig met $\beta^{\frac{1}{2}}$ of met $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, zoodat bij deze golven onder de werking der capillaire krachten $\sigma = c(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}c$; zoo is bij trillingen van elastische platen en staven, die groepsnelheid $\sigma = 2c$ (zie RAYLEIGH t. a. p.)

Indien c onafhankelijk van λ is, is $\sigma = c$ (lange golven, geluidsgolven). Prof. OSBORNE REYNOLDS geeft in Nature (Aug. 1877) eene verklaring van het verschijnsel, dat deze groepsnelheid bij diepwatergolven tweemaal zoo klein is als de voortplantingssnelheid der afzonderlijke golven. Hij verklaart dit zuiver als een interferentie-verschijnsel. RAYLEIGH heeft, hoewel de verklaring als interferentie-verschijnsel hem *voldoende schijnt*, getracht (Proc. Lond. Math. Soc. Vol. IX) eene andere te geven voor de betrekking dezer snelheden, geldig voor groepen van allerlei golven, door de invoering van wrijvingskrachten, welke wij hier onbesproken zullen laten.

Hebben we in de vorige beschouwingen producten en kwadraten van kleine grootheden verwaarloosd, wij zullen nu nagaan hoe de toestand zijn zal, als wij eene tweede benadering gebruiken, door alleen die termen weg te laten, die klein zijn van de derde orde. Vergelijking I wordt dan de oorspronkelijke, (zie KIRCHHOFF)

$$\frac{p}{\rho} = -g y - \frac{d\Phi}{dt} - \tfrac{1}{2} q^2 + F(t).$$

Wij weten reeds dat $F(t)$ eene kleine grootheid is, daar zij bij benadering $=0$ was. Stellen wij nu $F(t) = -g k$, waarin k zeer klein is, dan wordt

$$\frac{p}{\rho} = -g(y+k) - \frac{d\Phi}{dt} - \tfrac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 \right\} \ldots . \quad (1)$$

De vergelijkingen die verder de beweging bepalen zijn weer

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\ldots . \quad (2)$$

$$\frac{d\Phi}{dy} \text{ aan den bodem } (y = -h) = 0 \ldots\ldots \quad (3)$$

en aan het vrije oppervlak is

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dt} + \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dt} = 0 \ldots\ldots \quad (4)$$

Aan het vrije oppervlak is $p = 0$. Substitueeren wij nu in (4) de waarde van p gegeven door (1), dan krijgt men:

$$-g\frac{d\Phi}{dy} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} - 2\left(\frac{d^2\Phi}{dt\,dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d^2\Phi}{dt\,dy}\frac{d\Phi}{dy}\right) - \left\{\frac{d^2\Phi}{dx^2}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{d^2\Phi}{dy^2}\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + 2\,\frac{d\Phi}{dx}\,\frac{d\Phi}{dy}\,\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}\right\} = 0 \ldots . \quad (5)$$

indien

$$-g(y+k) - \frac{d\Phi}{dt} - \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2\right\} = 0$$

is, en y aan het vrije oppervlak behoort.

Tot zoover zijn deze formules nauwkeurig.

Indien wij nu weer golven beschouwen die zich met standvastige snelheid c in de richting der pos. x-as voortbewegen, dan zijn u, v, p, Φ functies van $(x - ct)$ en y. Stellen wij $x - ct$ voor door x, dan is $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\mathrm{x}}$, $\frac{dp}{dt} = -c\frac{dp}{d\mathrm{x}}$, en laten wij bij deze tweede benadering nu grootheden die, klein van de derde orde zijn, weg dan wordt (5)

$$\left.\begin{array}{l} -g\dfrac{d\Phi}{d\,y}-c^2\dfrac{d^2\,\Phi}{d\,\mathrm{x}^2}+2\,c\left(\dfrac{d^2\,\Phi}{d\,\mathrm{x}^2}\,\dfrac{d\Phi}{d\,\mathrm{x}}+\dfrac{d^2\,\Phi}{d\,\mathrm{x}\;d\,y}\,\dfrac{d\Phi}{d\,y}\right)=0\,, \\ \text{als } -g\,(y+k)+c\,\dfrac{d\,p}{d\,\mathrm{x}}-\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{d\,p^2}{d\,\mathrm{x}}\right)+\left(\dfrac{d\,p}{d\,y}\right)^2\right\}=0 \text{ is} \end{array}\right\}\;.\;.\;(6)$$

Daar nu $\dfrac{d\Phi}{d\,y}=\dfrac{d\Phi}{d\,y}\Big|_{y\,=\,0}+\dfrac{d^2\,\Phi}{d\,y^2}\Big|_{y\,=\,0}\,y$ + enz. zal, indien wij de differentiaal-quotienten naar x en naar y van Φ, *voor de waarde* $y=0$ aanduiden, door Φ met zooveel accenten boven of onderaan als men keeren moest differentieeren resp. naar x of naar y, het tweede deel van (6) overgaan in:

$$-g\,(y+k)+c\,(\Phi'+\Phi_1'\,y)-\tfrac{1}{2}\,(\Phi_1{}^2+\Phi'^2)=0$$

dus

$$y=\left\{-k+\frac{c\,\Phi'}{g}-\frac{1}{2\,g}\,(\Phi_1{}^2+\Phi'^2)\right\}(1-\frac{c}{g}\,\Phi'_1)^{-1}$$

of

$$y=-k+\frac{c}{g}\,\Phi'+\frac{c}{g}\,\Phi'_1\,(-k+\frac{c}{g}\,\Phi')-\frac{1}{2\,g}\,(\Phi_1{}^2+\Phi'^2)\;.\;.\;(6a)$$

Substitueeren wij deze waarde van y, de ordinaat van het vrije oppervlak, in het eerste deel van (6), wederom kleine grootheden van de derde orde weglatende, zoodat de derde term onveranderd blijft als men zijne waarde voor $y=0$ neemt, dan wordt dit:

$$\begin{array}{l} -g\,\Phi_1-c^2\,\Phi''-(g\,\Phi_{11}+c^2\,\Phi_1'')\,(-k+\dfrac{c}{g}\,\Phi')+ \\ \qquad +\,2\,c\,(\Phi''\,\Phi'+\Phi_1'\,\Phi_1)=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7) \end{array}$$

Deze vergelijking moet met (2) en (3) wederom Φ bepalen.

De beschouwingen blijven dezelfde als te voren, zoodat wij voor de »algemeene" term van Φ dezelfde uitdrukking zullen nemen, die echter door onze benadering aldus gewijzigd zal worden:

Substitueeren wij de vroeger gevonden waarde $\Phi=a\,\{\,e^{\beta(y\,+\,k)}+$

$+ e^{-\beta(y+h)} \} \cos \beta \mathrm{x}$ in (7) en laten k bij benadering weg, dan wordt die uitdrukking:

$$-g\,\Phi_1 - c^2\,\Phi'' + 6\,a^2\,\beta^3\,c \sin 2\,\beta\,\mathrm{x} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

daar

$$-c\,\Phi'\,\Phi_{11} - \frac{c^3}{g}\,\Phi_1''\,\Phi' + 2\,c\,(\Phi''\,\Phi' + \Phi_1'\,\Phi_1) =$$

$$c\beta^3 a^2 (e^{\beta h} + e^{-\beta h})^2 \sin\beta\mathrm{x}\cos\beta\mathrm{x} - \frac{c}{\beta}\,\frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}\,\beta^4 a^2 (e^{\beta h} + e^{-\beta h})$$

$$(e^{\beta h} - e^{-\beta h}) \sin\beta\,\mathrm{x}\cos\beta\,\mathrm{x} + 2\,c\,\{\beta^3\,a^2\,(e^{\beta h} + e^{-\beta h})^2 \cos\beta\,\mathrm{x}$$

$$\sin\beta\,\mathrm{x} - \beta^3\,a^2\,(e^{\beta h} - e^{-\beta h})^2 \cos\beta\,\mathrm{x}\sin\beta\,\mathrm{x}\} =$$

$$12\,a^2\,\beta^3\,c\sin\beta\,\mathrm{x}\cos\beta\,\mathrm{x} = 6\,a^2\,\beta^3\,c\sin 2\,\beta\,\mathrm{x}.$$

De eerste waarde voor Φ moet nu zoo gewijzigd worden, dat ze voldoet aan (8); nieuwe termen $\sin\beta\,\mathrm{x}$ of $\cos\beta\,\mathrm{x}$ zijn onnoodig, daar die reeds zijn opgenomen; er is dus alleen een term noodig die de gedaante heeft van

$$b\,\{e^{2\beta(y+h)} + e^{-2\beta(y+h)}\}\sin 2\,\beta\,\mathrm{x}.$$

Substitueeren wij dezen term in (8) en letten op de waarde $c^2 = \frac{g}{\beta}\,\frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}$, dan moet $b = -\,\frac{3\,a^2\,\beta}{c\,(e^{\beta h} - e^{-\beta h})^2}$ zijn.

Ook nu nog zal c dezelfde waarde houden als bij de eerste benadering, daar de coefficient van $\cos\beta\,\mathrm{x}$ gelijk nul gesteld, dezelfde waarde van c geeft.

De vergelijking van Φ wordt nu

$$\Phi = a\,\{e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)}\}\cos\beta\,\mathrm{x} - \frac{3\,a^2\,\beta}{c\,(e^{\beta h} - e^{-\beta h})^2}$$

$$\{e^{2\beta(y+h)} + e^{2\beta(y+h)}\}\sin 2\,\beta\,\mathrm{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Indien wij de coefficient van $\sin\beta\,\mathrm{x}$ in vergelijking X, pag. 36, gelijk A stellen, dan is, daar

$$A = -\frac{a\,\beta\,c}{g}\,(e^{\beta h} + e^{-\beta h}),\quad a = \frac{-A\,g}{\beta\,c\,(e^{\beta h} + e^{-\beta h})} = \frac{-A\,c}{(e^{\beta h} - e^{-\beta h})};$$

verder wordt:

$$\Phi = \frac{-A\,c}{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}\,\{e^{\beta(y+h)} + e^{-\beta(y+h)}\}\cos\beta\,\mathrm{x} - \frac{3\,A^2\,c\,\beta}{(e^{\beta h} - e^{-\beta h})^4}$$

$$\{e^{2\beta(y+h)} + e^{-2\beta(y+h)}\}\sin 2\,\beta\,\mathrm{x}.$$

De ordinaat van het vrije oppervlak is bij benadering gegegeven door (6a); maken wij nu daarvan gebruik, dan vindt men bij benadering:

of $$y+k=\frac{c}{g}\Phi'+\frac{c^2}{g^2}\Phi_1'\,\Phi'-\frac{1}{2g}(\Phi_1{}^2+\Phi'^2),$$

$$y+k=A\sin\beta\mathrm{x}-\frac{6A^2\beta}{(e^{\beta h}-e^{-\beta h})^3(e^{\beta h}+e^{-\beta h})}(e^{2\beta h}+e^{-2\beta h})\cos 2\beta\mathrm{x}+$$
$$+\frac{A^2\beta(e^{\beta h}-e^{-\beta h})}{e^{\beta h}+e^{-\beta h}}\sin^2\beta\mathrm{x}-\tfrac{1}{2}A^2\beta\left\{\frac{e^{\beta h}+e^{-\beta h}}{e^{\beta h}-e^{-\beta h}}\sin^2\beta\mathrm{x}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\beta h}-e^{-\beta h}}{e^{\beta h}+e^{-\beta h}}\cos^2\beta\mathrm{x}\right\}=A\sin\beta\mathrm{x}-\frac{6A^2\beta}{(e^{\beta h}-e^{-\beta h})^3(e^{\beta h}+e^{-\beta h})}$$
$$(e^{2\beta h}+e^{-2\beta h})\cos 2\beta\mathrm{x}-\tfrac{1}{2}A^2\beta\left\{\frac{2+(e^{2\beta h}+e^{-2\beta h}-4)\cos 2\beta\mathrm{x}}{e^{2\beta h}-e^{-2\beta h}}\right\}=$$
$$=A\sin\beta\mathrm{x}-A^2\beta\frac{(e^{\beta h}+e^{-\beta h})(e^{2\beta h}+e^{-2\beta h}+4)}{2(e^{\beta h}-e^{-\beta h})^3}\cos 2\beta\mathrm{x}-$$
$$-A^2\beta\frac{1}{e^{2\beta h}-e^{-2\beta h}}.$$

De vergelijking van het oppervlak neemt dus bij deze benadering de gedaante aan van:

$$y=A\sin\beta\mathrm{x}-KA^2\cos 2\beta\mathrm{x}.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(11)$$

Hieruit volgt dat voor $t=0$, of $\mathrm{x}=x$

$$y=A+KA^2 \quad \text{indien} \quad \beta x=\tfrac{1}{2}\pi\pm 2n\pi$$

of $$x \quad \frac{\pi}{2\beta}\pm\frac{2n}{\beta}\pi=\tfrac{1}{4}\lambda\pm n\lambda$$

en $$y=-A+KA^2=-(A-KA^2)$$

als $$\beta x=\frac{3\pi}{2}\pm 2n\pi \quad \text{of} \quad x=\tfrac{3}{4}\lambda\pm n\lambda;$$

dit zijn de grootste en kleinste waarden van y; de hoogte van een golfberg is dus grooter dan die van een golfdal, en wel een afstand $2KA^2$. De plaatsen waar het oorspronkelijk niveau de golf snijdt vindt men uit

$$A\sin\beta x-KA^2\cos 2\beta x=0.$$

Stellen wij in den kleinen term hiervan βx bij benadering $=\pi$ dan is

$$A \sin \beta x - K A^2 = 0 \quad \text{of} \quad \sin \beta x = K A = \sin K A,$$

dus is $y = 0$ voor

$$x = \frac{K A}{\beta}, \ \frac{\pi}{\beta} - \frac{K A}{\beta}, \ \frac{K A}{\beta} + \frac{2 \pi}{\beta} \ \text{enz.}$$

of:

$$x = \frac{K A \lambda}{2 \pi}, \ \tfrac{1}{2} \lambda - \frac{K A \lambda}{2 \pi}, \ \lambda + \frac{K A \lambda}{2 \pi} \ \text{enz.}$$

Het verloop der kromme lijn, die de golflijn voorstelt is als volgt:

Aan den oorsprong is $y = - K A^2$; voor toenemende x wordt y negatief kleiner, tot voor $x = \frac{K A \lambda}{2 \pi}$, $y = 0$ is; daarna bereikt y hare grootste waarde $A + K A^2$ voor $x = \frac{1}{4} \lambda$, wordt weer nul voor $x = \frac{1}{2} \lambda - \frac{K A \lambda}{2 \pi}$, neemt af tot $-(A - K A^2)$ voor $x = \frac{3}{4} \lambda$, en heeft voor $x = \lambda$ weer de negatieve waarde $- K A^2$; de breedte van een golfberg is dus $\frac{1}{2} \lambda - \frac{K A \lambda}{\pi}$ en van een golfdal $\frac{1}{2} \lambda + \frac{K A \lambda}{\pi}$.

Indien de diepte der vloeistof zeer groot is in vergelijking met de golflengte, en wij dus $h = \infty$ mogen stellen, neemt de vergelijking (10) den vorm aan:

$$\phi = - A c e^{\beta y} \cos \beta (x - c t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

en (11) de ordinaat van het oppervlak

$$y = A \sin \beta (x - c t) - \tfrac{1}{2} \beta A^2 \cos 2 \beta (x - c t) \quad . \ . \quad (13)$$

terwijl c^2 weer $= \frac{g \lambda}{2 \pi}$ wordt.

Om nu de beweging van ieder deeltje te vinden, stellen wij wederom dat een deeltje, dat op tijd $t = 0$ de ordinaten x en y had, op een tijd t, $x + \xi$, $y + \eta$ tot ordinaten heeft.

Nu is

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} = u = \frac{d\Phi}{dx} &= A\,c\,\beta\,e^{\beta(y+\eta)} \sin\beta\,(x - c\,t + \xi) = \\
= A\,c\,\beta\,e^{\beta y} \sin\beta\,(x - c\,t) &+ A\,c\,\beta^2\,e^{\beta y} \cos\beta\,(x - c\,t).\,\xi \\
&- A\,c\,\beta^2\,e^{\beta y} \sin\beta\,(x - c\,t).\,\eta; \\
\frac{d\eta}{dt} = v = \frac{d\Phi}{dy} &= -A\,c\,\beta\,e^{\beta(y+\eta)} \cos\beta\,(x + \xi - c\,t) = \\
= -A\,c\,\beta\,e^{\beta y} \cos\beta\,(x - c\,t) &+ A\,c\,\beta^2\,e^{\beta y} \sin\beta\,(x - c\,t).\,\xi \\
&- A\,c\,\beta^2\,e^{\beta y} \cos\beta\,(x - c\,t).\,\eta; \\
\text{bij eene eerste benadering is} \quad & \xi = A\,e^{\beta y} \cos\beta\,(x - c\,t) \\
& \eta = A\,e^{\beta y} \sin\beta\,(x - c\,t).
\end{aligned}\right\} \quad 14$$

Substitueeren wij nu deze benaderde waarde van ξ en η in (14) en integreeren weer, dan vinden wij

$$\xi = A\,e^{\beta y} \cos\beta\,(x - c\,t) + A^2\,c\,\beta^2\,t\,e^{2\beta y}$$

$$\eta = A\,e^{\beta y} \sin\beta\,(x - c\,t).$$

Wij zien dus dat bij deze benadering, de verplaatsing der deeltjes dezelfde is als vroeger, behalve dit opmerkelijk verschil, dat bij de schommelende beweging ook nog eene translatie beweging is gekomen, in dezelfde richting als de voortplanting, en wel met eene constante snelheid, die van de diepte afhangt, en zeer snel afneemt met het toenemen der diepte.

Stokes heeft ook op dezelfde wijze dit vraagstuk behandeld met een nog hoogeren graad van benadering. Voor een oneindige diepte vindt hij dan dat

$$c^2 = \frac{g\,\lambda}{2\,\pi}\left(1 + \frac{2\,\pi^2\,A^2}{\lambda^2}\right)^2,$$

en in de vergelijking van het vrije oppervlak komt nog een term $\cos 3\,\beta\,x$. Zoo zal men bij verdere benadering de vergelijking van het vrije oppervlak kunnen voorstellen door:

$$y = A \sin\beta\,x + \sum_{2}^{\infty} b_n\,A^n \cos n\,\beta\,x.$$

In de werkelijkheid verschillen de hier behandelde golven zeer weinig met die, welke door de werking van den wind op het oppervlak van het water worden te voorschijn geroepen.

Ook daarbij bezitten de deeltjes een schommelende beweging, terwijl het duidelijk is, dat zij tevens eene translatie beweging bezitten, daar toch door den wind de druk op het achterste deel van een golf grooter is dan op het voorste deel.

Naast deze periodieke golven heeft Rankine ook nauwkeurig nagegaan (Phil. Trans. 1863) de golven in een vloeistof van zeer groote diepte, die een trochoïdalen vorm hebben. Reeds had Lord Russell de mogelijkheid van het bestaan van die golven aangetoond, en nog vroeger was Gerstner (zie Inleiding) ook tot trochoïdale golven gekomen. Wij zullen in het volgende Rankine's beschouwingen tot grondslag nemen, maar in de bewijsvoeringen die veranderingen aanbrengen, waardoor wij meenen dat zij in strengheid zullen winnen.

Als het oppervlak eene trochoïde is, moeten de deeltjes verticale cirkels beschrijven, en de trochoïde kan men zich ontstaan denken door het rollen langs eene horizontale rechte lijn van eene cirkel, wier straal gelijk is aan de hoogte van den konischen slinger, die rondwentelt met dezelfde periode als de vloeistofdeeltjes. Immers laat in Fig. VI, B een vloeistofdeeltje zijn dat met eenparige snelheid in een verticale cirkel met een straal CB rondloopt. De centripetale versnelling van dit deeltje (de massa als eenheid aangenomen) is dan $4\pi^2 n^2 CB$, als n het aantal keeren voorstelt, dat het punt B den cirkel in ééne secunde doorloopt. Trekt men nu CA verticaal, zóó dat AC: CB = de versnelling der zwaartekracht g: de centripetale versnelling, dus $AC = \frac{g}{4\pi^2 n^2}$, dan is AB in grootte en richting de resulteerende kracht, die op het deeltje B werkt. Deelt men nu aan het geheele systeem eene snelheid mede, gelijk doch tegengesteld aan de voortplantingssnelheid, dan zal het punt B de golflijn, en het middelpunt C eene horizontale lijn beschrijven; B beschrijft nu eene trochoïde, welke men zich kan ontstaan denken door het rollen van een cirkel langs eene rechte lijn, en wier middelpunt de horizontale lijn door C aflegt. Indien dus de deeltjes van het oppervlak verticale cirkels beschrijven, kan het oppervlak den vorm van eene trochoïde vertoonen. De druk moet in het oppervlak overal gelijk zijn, dus is de resulteerende kracht, door AB voorgesteld, normaal op het oppervlak. AB is dus de normaal van de trochoïde. Om den straal van den rollenden cirkel te vinden, merken wij op, dat de normaal steeds moet gaan door het raakpunt, welk punt ook moet liggen op de verticaal van C. De straal is nu $AC = \frac{g}{4\pi^2 n^2}$, welke waarde overeenkomt met de lengte van een konisehen slinger, waarvan de periode $\frac{1}{n}$ is.

De golflengte λ is $2\pi AC = \frac{g}{2\pi n^2}$ en de voortplantingssnelheid $n\lambda = \frac{g}{2\pi n} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$, welke waarde dezelfde is als die der vroeger gevondene periodieke golven in diep water.

Dat nu dit trochoïdale oppervlak ook een continuiteitsoppervlak is, d. w. z. een oppervlak, dat steeds gaat door dezelfde rij vloeistofdeeltjes, toont men aldus aan. Neemt men onmiddellijk onder het vrije oppervlak der golf weer een ander oppervlak van gelijken druk, dan is de loodrechte afstand dier vlakken omgekeerd evenredig met den resulteerenden druk in ieder punt, dus met AB. De snelheid van ieder deeltje (wanneer wederom aan het systeem eene snelheid gelijk doch tegengesteld aan de voortplantingssnelheid gegeven wordt), is $2\pi n AB$, en dus omgekeerd evenredig met den afstand der twee vlakken van gelijken druk; waaruit volgt, dat tusschen die vlakken steeds dezelfde hoeveelheid vloeistof zal stroomen; die vlakken zijn dus continuiteitsoppervlakken. Door deze redeneering is tegelijk aangetoond dat ieder oppervlak van gelijken druk continuiteitsoppervlak is.

Nu doet zich ten slotte nog de vraag voor, zal aan de voorwaarde der continuiteit voldaan worden, wanneer de deeltjes onder het vrije oppervlak verticale cirkels beschrijven, en zoo ja, hoe groot is dan hun straal in vergelijking met die van de deeltjes aan het vrije oppervlak. Om die vraag te beantwoorden, zullen wij voorstellen dat in Fig. VI $C C_1$ de middelpunten zijn van de cirkels, die twee onmiddellijk onder elkaar gelegen punten beschrijven, waarvan het bovenste tot het vrije oppervlak behoort. Laat $a\,a_1$ de hoogste en $b\,b_1$ de laagste punten dier banen zijn, dan zal $a_1\,a$ de afstand der deeltjes in de golfberg, en $b\,b_1$ die in het golfdal zijn. Zullen die deeltjes nu tot twee op elkaar volgende oppervlakken van continuiteit behooren, dan moet

$$a\,a_1 : b\,b_1 = A\,a : A\,b$$

of $$a\,a_1 + b\,b_1 : a\,a_1 - b\,b_1 = A\,a + A\,b : A\,a - A\,b$$

of $$2\,C\,C_1 : 2\,(C\,a - C_1\,a_1) = 2\,C\,A : 2\,C\,a.$$

Het verschil van de stralen der cirkels, staat dus tot den afstand der middelpunten, als de straal van den bovensten cirkel, tot den straal van den rollenden cirkel $A\,C$. Noemen wij de stralen resp. R en $R - dR$, de afstand der middelpunten $d\,k$ dan is $d\,R = \frac{R\,d\,k}{A\,C}$; voor twee stralen r en $r - d\,r$ op willekeurige diepte volgt evenzoo $d\,r = \frac{r\,d\,k}{A\,C}$. Indien dus de deeltjes cirkels beschrijven, zoo dat tusschen de stralen van twee cirkels door onder elkaar gelegen punten beschreven, en den afstand der middelpunten, bovengenoemde betrekking bestaat, dan zullen de onderste deeltjes weer trochoïden beschrijven, waarvan de straal der rollende cirkels weer $A\,C$ is; die trochoïde is weer een oppervlak van gelijken druk, en dus een continuiteitsoppervlak. Hierdoor is dus aangetoond, dat, als alle deeltjes in verticale cirkels zich bewegen, er eene trochoïdale golf ontstaat, indien de betrekking tusschen de stralen dier cirkels de bovengenoemde is.

Uit $d\,r = \frac{r\,d\,k}{A\,C}$ volgt bij integratie tusschen $k = o$ en $k = k$:

$r = R e^{-\frac{k}{A C}}$ waarbij rekening gehouden is met den negatieven toestand van $d r$ als $d k$ positief is.

Wij hebben dus hier den straal r van een cirkel op een willekeurige diepte, uitgedrukt in den straal van den cirkel beschreven door een punt van het oppervlak, en den afstand der middelpunten.

De horizontale lijn, die de middelpunten bevat der cirkels door de punten aan het vrije oppervlak beschreven, valt niet samen met het oorspronkelijk niveau, maar ligt er boven, dus zullen de golfbergen hooger zijn dan de golfdalen. Immers deelen wij weer aan de vloeistof eene snelheid gelijk en tegengesteld aan de voortplantingssnelheid mede, en vergelijken wij den afstand van twee opvolgende continuiteitsvlakken, wanneer de golf bestaat, met dien wanneer de vloeistof in rust is. In het eerste geval zal de lengte van den boog der trochoïde aan het hoogste punt, in een tijd $d t$ doorloopen, gelijk zijn aan $2 \pi n A a d t$, en de dikte der laag tusschen twee opvolgende continuiteitsvlakken is daar $d k + d R = d k \frac{R + A C}{A C}$. In het tweede geval zou toch eene even groote hoeveelheid vloeistof $= 2 \pi n A a d t \times \times \frac{R + A C}{A C} d k$ over een afstand $2 \pi n A C d t$ zijn gestroomd. Daar de voortplantingssnelheid $2 \pi n A C$ is, en de continuiteitsvlakken nu horizontaal liggen, is hun afstand

$$= \frac{A a (R + A C)}{A C^2} d k = \frac{(R + A C)(R - A C)}{A C^2} d k.$$

Noemen wij dezen afstand $d k_0$ dan is

$$d k - d k_0 = \left(1 - \frac{A C^2 - R^2}{A C^2}\right) d k = \frac{R^2}{A C} d k.$$

Zoo zal op een willekeurige diepte dat verschil zijn:

$$\frac{r^2}{A C^2} d k = \frac{R^2 e^{-\frac{2 k}{A C}}}{A C^2} d k.$$

Integreeren wij dat verschil over de geheele diepte, dus tusschen de grenzen $k = o$ tot $k = \infty$, dan krijgen wij het verschil van de diepte, gerekend van de lijn der middelpunten der cirkels, beschreven door de punten van het vrije oppervlak, met de oorspronkelijke diepte.

Nu is

$$\int_0^\infty \frac{R^2 e^{-\frac{2k}{AC}}}{A C^2} d k = \frac{R^2}{2 A C} = \frac{\pi R^2}{\lambda},$$

De golfbergen zijn het dubbele van dezen afstand hooger dan de golfdalen.

Het verschil in hoogte $\frac{\pi R^2}{\lambda} = \frac{2 \pi^2 n^2 R^2}{g}$ is juist de hoogte waar een deeltje aan het oppervlak moet vallen om eene snelheid $2 \pi n R$ te krijgen, welke snelheid het heeft bij het doorloopen van den cirkel. In de golf heeft dus dat deeltje een even groot gemiddeld arbeidsvermogen van plaats als arbeidsvermogen van beweging; hetzelfde geldt van lager gelegen punten, zoodat het arbeidsvermogen der golven wederom half actueel, half potentieel is.

Behalve op deze meer geometrische wijze kan men ook algebraïsch aantoonen, dat deze trochoïdale golf aan de voorwaarde der continuiteit voldoet. Kiezen wij daartoe als oorsprong van coordinatenstelsel het punt, waarin een vertikaal door het laagste punt der golf de lijn snijdt, die de middelpunten der cirkels, beschreven door de punten van het vrije oppervlak, verbindt. Nemen wij de pos. y-as naar beneden in de eerste en de x-as in de laatste lijn, en stellen h en k de ordinaten van de middelpunten der cirkels voor, ω de hoeksnelheid van ieder deeltje, ϑ de phase van de golf, dus de hoek, die de voerstraal van een deeltje op een tijdstip t maakt met de y-as, en rekenen wij den tijd t van het tijdstip af, waarop alle punten voor welke $h = 0$ zijn, in de y-as liggen, dan zijn de ordinaten van ieder willekeurig punt:

$$\left.\begin{aligned} x &= h + R\,e^{-\frac{k}{\rho}} \sin \vartheta \\ y &= k + R\,e^{-\frac{k}{\rho}} \cos \vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \alpha$$

waarin ρ de straal van den rollenden cirkel voorstelt.

Daar $\quad \vartheta = \omega t + \frac{h}{\rho}$

wordt

$$\frac{dx}{dt} = \omega R e^{-\frac{k}{\rho}} \cos \vartheta, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega R e^{-\frac{k}{\rho}} \sin \vartheta;$$

of

$$\frac{dx}{dt} = \omega (y - k), \qquad \frac{dy}{dt} = \omega (h - x).$$

De continuiteitsvergelijking $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$ wordt nu

$$\omega\left(-\frac{dk}{dx} + \frac{dh}{dy}\right) = 0 \quad \text{of} \quad -\frac{dk}{dx} + \rho \frac{d\vartheta}{dy} = 0 \quad ..(\beta)$$

daar $h = \rho\,\vartheta$. Hierin en in (α) zijn k en ϑ de onafhankelijk veranderlijken; nemen wij nu x en y als onafh. veranderlijken, dan wordt:

$$\frac{dk}{dx} = 1 : \left\{ \frac{dx}{dk} - \frac{dx}{d\vartheta}\,\frac{\frac{dy}{dk}}{\frac{dy}{d\vartheta}} \right\} = \frac{e^{-\frac{k}{\rho}} \sin \vartheta}{\frac{\rho}{R} - \frac{R}{\rho} e^{-\frac{2k}{\rho}}};$$

en

$$\frac{d\vartheta}{dy} = 1 : \left\{ \frac{dy}{d\vartheta} - \frac{dy}{dk}\,\frac{\frac{dx}{d\vartheta}}{\frac{dx}{dk}} \right\} = \frac{1}{\rho}\,\frac{e^{-\frac{k}{\rho}} \sin \vartheta}{-\frac{R}{\rho} e^{-\frac{2k}{\rho}} + \frac{\rho}{R}};$$

aan de continuiteitsvoorwaarde wordt dus voldaan. Maar deze golf vertoont moleculaire rotaties; immers de component der hoeksnelheid in het $x\,y$-vlak, $\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$, heeft hier de waarde:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\omega\left(\frac{d\,h}{d\,x}-1\right)-\omega\left(1-\frac{d\,k}{d\,y}\right)\right\}=\tfrac{1}{2}\,\omega\left\{-2+\rho\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x}+\frac{d\,k}{d\,y}\right\}.$$

Nemen wij weer x en y als onafh. veranderlijken, dan is:

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,x}=1:\left(\frac{d\,x}{d\,\vartheta}-\frac{d\,y}{d\,\vartheta}\,\frac{\frac{d\,x}{d\,k}}{\frac{d\,y}{d\,k}}\right)=\frac{1-\frac{R}{\rho}\,e^{-\frac{k}{\rho}}\cos\vartheta}{\rho-\frac{R^2}{\rho}\,e^{-\frac{2k}{\rho}}},$$

$$\frac{d\,k}{d\,y}=1:\left(\frac{d\,y}{d\,k}-\frac{d\,x}{d\,k}\,\frac{\frac{d\,y}{d\,\vartheta}}{\frac{d\,x}{d\,\vartheta}}\right)=\frac{\rho+R\,e^{-\frac{k}{\rho}}\cos\vartheta}{\rho-\frac{R^2}{\rho}\,e^{-\frac{2k}{\rho}}}.$$

Hierdoor wordt

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\left\{-2+\rho\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x}+\frac{d\,k}{d\,y}\right\}=\tfrac{1}{2}\,\omega\left(-2+\frac{2\,\rho}{\rho-\frac{R^2}{\rho}\,e^{-\frac{2k}{\rho}}}\right)=$$

$$=\omega\,\frac{R^2\,e^{-\frac{2k}{\rho}}}{\rho^2-R^2\,e^{-\frac{2k}{\rho}}}=\omega\,\frac{1}{\frac{\rho^2}{R^2}\,e^{\frac{2k}{\rho}}-1}.$$

Deze golven zullen dus in eene vloeistof zonder wrijving niet uit den toestand van rust kunnen worden opgewekt. Ook LAMB (Treatise on the motion of fluids pag. 193) toont die moleculaire rotatie aan door directe beschouwing van een vloeistof-parallelopipedum en berekent die ook, doch voor het geval dat de gedaante der golf cycloïdaal is; hetgeen in onze formules kan verkregen worden door $R=\rho$ te stellen.

Fig. I.

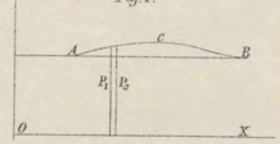


Fig. II.

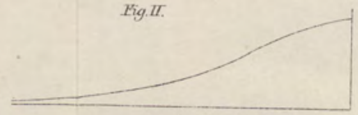


Fig. IV.

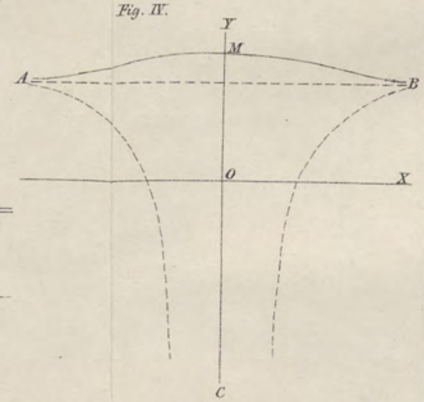


Fig. III.

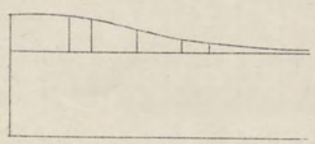


Fig. V.

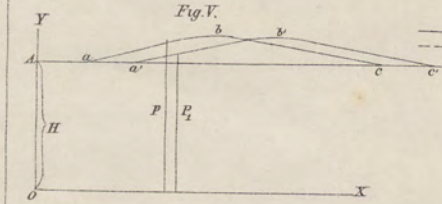
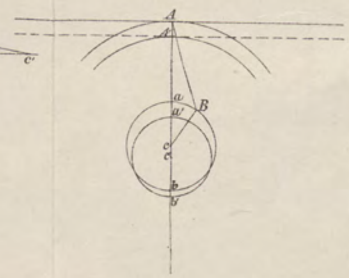


Fig. VI.



STELLINGEN.

I.

De enkele golf is een afzonderlijk verschijnsel.

II.

De verklaring der enkele golf door Robertson (Phil. Mag. 1850) is onjuist.

III.

De bepaling, dat eene geodetische lijn op een oppervlak, de kortste lijn is tusschen twee harer punten, is onvolledig.

IV.

Het is aan te bevelen de bewegingsvergelijkingen der hydrodynamica, die ten onrechte naar Euler en Lagrange heeten, volgens Maxwell »statistical" en »historical" te noemen.

V.

Voor de ontwikkeling in reeksen verdient de methode der algebraïsche analyse de voorkeur boven die der differentiaalrekening (Theorema van Taylor).

VI.

Smaasen, Gronden der Hoogere Algabra, 1855, pag. 185: »Men is er tot nog toe niet in geslaagd om e^x afzonderlijk door een reeks van producten daar te stellen."

De hier bedoelde ontwikkeling is onmogelijk.

VII.

Helmholtz (Berl. Ber. 1881) moet bij zijne beschouwing over galvanische polarisatie, gebruik maken van de Tweede Wet der Mechanische Warmtetheorie en niet van het beginsel der virtueele snelheden.

VIII.

De juistheid der formule van Thomson voor de voortplantingssnelheid der golven, onder den invloed van moleculaire krachten, is door de proeven van Matthiesen (Wiedemann 1889) voldoende aangetoond.

IX.

Bij het onderzoek naar de vergrooting van een optisch stelsel, verdient de methode van Bessel (Astr. Untersuchungen T. I geene aanbeveling.

X.

De proeven van HERTZ (WIEDEMANN 1888 en 1889) geven sterken steun aan de hypothese, dat licht en electriciteit analoge verschijnselen zijn.

XI.

De vergelijking van de door LANGLEY aangetoonde, zeer korte energiegolven met de grootste geluidsgolven, zooals zij voorkomt in het American Journal (1886), heeft geene waarde.

XII.

Het bestaan van twee systemen van dimensies der electrische eenheden is onlogisch.

XIII.

Het ware wenschelijk dat de projectivische meetkunde naast de Euclidische onderwezen werd.

XIV.

De speciale studiën, voor de ontwikkeling der wetenschap noodzakelijk, hebben dikwijls voor het individu een schadelijken invloed.