DIE METHODEN DER HEAVISIDESCHEN OPERATORENRECHNUNG

H. B. J. FLORIN

DIE METHODEN
DER HEAVISIDESCHEN OPERATORENRECHNUNG

N.V. BOEK- EN STEENDRUKKERIJ EDUARD IJDO. — LEIDEN

DIE METHODEN DER HEAVISIDESCHEN OPERATORENRECHNUNG

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Mr. D. VAN BLOM, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 23 MAART 1934, DES NAMIDDAGS 2 UUR,

DOOR

HENRI BERNARD JOSEPH FLORIN

GEBOREN TE ROTTERDAM

N.V. BOEK- EN STEENDRUKKERIJ EDUARD IJDO — LEIDEN

AAN DE NAGEDACHTENIS
VAN MIJN VADER.

AAN MIJN MOEDER.

Henri Bernard Joseph Florin werd in 1904 te Rotterdam geboren. In 1905 vestigden mijn ouders zich te Brussel en later op hun landgoed Hoogpoort bij Assche. Na den dood mijns vaders in 1909 vestigde mijn moeder zich wederom te Brussel, waar ik lager onderwijs ontving aan het Instituut S. Stanislas. In 1914 verbleef mijn moeder in de Beemster, waar ik privaat-onderricht ontving van Mej. G. Lau, *en daarna te 's-Gravenhage, waar ik de St. Nicolaasschool bezocht en vanaf 1918 de 1e R. K. H. B. S.*

In 1923 begon ik mijn studies te Leiden, waar ik de colleges volgde van Prof. Droste, Prof. de Haas, Prof. Keesom, Prof. Kluyver, Prof. van der Woude, Dr. J. Woltjer en Prof. Casimir. *Hun allen ben ik veel dank verschuldigd voor het vele, dat zij tot mijn ontwikkeling hebben bijgedragen. Na mijn candidaatsexamen in 1926 mocht ik het voorrecht hebben, daarenboven de colleges bij te wonen van* Prof. Lorentz, Prof. Ehrenfest, Prof. Schouten *en* Prof. Fokker. *Tot verdieping van mijn vorming hebben ook bijgedragen de wijsgeerige privatissima van* Prof. Hoenen *van de Gregoriaansche universiteit te Rome en van* Prof. Niekel *van het Philosophicum te Warmond.*

Na mijn candidaatsexamen vond mijn studie plaats onder de leiding van Prof. Ehrenfest, *aan wien ik, zoowel voor mijn wetenschappelijke als voor mijn algemeene vorming den allergrootsten dank verschuldigd ben.*

Na het afleggen van het doctoraalexamen in 1929 werd ik leeraar aan de R. K. H. B. S. te Leiden en tevens aan enkele andere inrichtingen van onderwijs.

Dit proefschrift ontstond onder de leiding van Prof. Ehrenfest, *aan wien ik ook hiervoor veel verschuldigd ben. Ten zeerste ben ik* Prof. Fokker *dankbaar voor de groote bereidwilligheid, waarmee hij zich, toen mijn geliefde leermeester mij ontviel, aanstonds bereid verklaarde de taak van promotor over te nemen, en voor de groote zorgen, die hij hieraan besteedde.*

Ik breng Dr. B. van der Pol *mijn dank voor het doorlezen van het manuscript en voor menige raadgeving.*

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

EINLEITUNG 1

ERSTE METHODE. OPERATORENALGEBRA.

§ 1. Definitionen 5
§ 2. Rechenregeln 10
§ 3. Uebersetzung der einfachsten p-Funktionen in die x-Sprache 13
§ 4. Weitere Uebersetzungen von transzendenten Funktionen 16
§ 5. Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 18
§ 6. Beispiele zu § 5 23
§ 7. Anwendungen auf simultane lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. 30
§ 8. Die „Einheitsfunktion $H(x)$, die δ-Funktion und ein Carsonsches Integral 31
§ 9. Beispiele der Elektrizitätslehre 35
§ 10. Erweiterung der Theorie 38
§ 11. Theoreme und Bemerkungen. 41
§ 12. Reihenentwicklung in der p-Sprache 48
§ 13. Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten . 55
§ 14. Beispiele von linearen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten 57
§ 15. Erweiterung der Theorie 59

ZWEITE METHODE. TRANSFORMATIONSTHEORIE.

Seite

§ 16. Vorbemerkungen 63

§ 17. Transformation der Operatoren des Differenzierens . . 65

§ 18. Inversion: Carsonsches Integral 71

§ 19. Zusammenhang der „Heavisideschen" Operatorentransformation mit anderen Transformationen der Differentialoperatoren 75

§ 20. Transformation der Operatoren der Differenzenrechnung. Anwendung auf lineare Differenzengleichungen 79

§ 21. Zusammenhang mit Transformationen der Quantenmechanik 84

§ 22. Schema der betrachteten Transformationen 86

§ 23. Anwendung der Transformationstheorie in der Operatorenrechnung 87

§ 24. Ueberblick 90

Samenvatting 93

Wichtigste Formeln 103

Stellingen 107

Wenn eine Formel bezeichnet ist mit z. B. (2, 7) bedeutet dieses: § 2, Formel (7).

EINLEITUNG.

Wir wollen versuchen die Heavisidesche Operatorenmethode so darzulegen, dasz ihr Zusammenhang mit anderen mathematischen Methoden ersichtlich wird.

Die Operatorenmethode von Heaviside betrachtet die Operatoren d/dx als algebraische Gröszen, die speziellen Rechenregeln genügen.

Wir betrachten zwei Methoden zur Darstellung der Operatorenrechnung:

I. Die Definition des Operators $p = d/dx$ ergibt Rechenregeln, die zu einer bestimmten Algebra führen (Kap. I).

II. Man führt die zu betrachtenden Funktionen $F(d/dx, x)$ mittels einer Transformation

$$\Phi(p) = \int dx\, K(x, p)\, F\left(\frac{d}{dx}, x\right) \tag{1}$$

über in eine Funktion $\Phi(p)$, worin p den gewöhnlichen Rechenregeln genügt. In der in diesem Gebiete üblichen Terminologie kann man (1) eine Achsentransformation nennen mit x als alten, p als neuen Koordinatenachsen (Kap. II).

Eine Funktion $f(x)$ kann mit den Regeln von Methode I und auch mit den Transformationen der Methode II umgesetzt werden in eine Funktion $\varphi(p)$, und umgekehrt. Der Kürze halber nennen wir dieses im Folgenden: „Uebersetzung" von der „x-Sprache" in die „p-Sprache" und umgekehrt.

Das von Heaviside herrührende Verfahren schlieszt sich der Methode I an, Heaviside hat aber nie seine Methode systematisch erörtert.

Die Methode II entspricht den „Integraldarstellungen" der Heavisideschen Operatoren.

Wir betrachten zuerst die Heavisideschen Operatoren so weit wie möglich nur algebraisch (Methode I) und finden Regeln, die es ermöglichen das Anwendungsgebiet der Operatoren zu erweitern und einige in der Literatur erwähnte Paradoxen zu diskutieren. Die von uns erhaltenen Vertauschungsrelationen (§ 2) sind den Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik sehr ähnlich; der Zusammenhang mit den Methoden der Quantenmechanik ist in Kap. II, § 21 erörtert.

Nur wenn die weitere Ausbildung der Operatorenmethode dieses fordert wenden wir uns der zweiten Methode zu: den Integraldarstellungen. Wir untersuchen die *Natur* dieser Integraldarstellungen. Es stellt sich hieraus, dasz man sie vollkommen natürlich erhält, wenn man die spezielle Form der Transformation sucht, die eine Funktion von x transformiert in eine Funktion von $p = d/dx$. Wir finden auf diese Weise das Bromwichsche Integral (§ 17) und seine Inversion: das Carsonsche Integral (§ 18). Zugleicherzeit können wir den Zusammenhang dieser Integrale mit den Laplaceschen Transformationen (§ 19, § 20), dem Fourierschen Integral (§ 19) und mit der Diracschen Transformationstheorie in der Quantenmechanik (§ 21) darstellen. In § 22 findet man ein Schema, das alle diese Transformationen enthält.

Historisches.

Heaviside[1]) war der erste, der eine weitgehende Anwendung der Operatorrechnung durchführte. Zwar gab es vor Heaviside schon Autoren, die Operatoren benutzten, z. B. Boole [2]) der die bekannte Lösungsmethode von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels Operatoren fand, und daran schon eine Rechtfertigung der Anwendung solcher Operatoren und einige interessante Bemerkungen knüpfte.

Heaviside hat besonders betont, dasz in vielen Fällen Differentialgleichungen sehr leicht lösbar sind, wenn man die Operatoren p als algebraische Gröszen betrachtet, mit Rechenregeln, die nur wenig von den gewöhnlichen abweichen. Er folgte

---

[1]) Heaviside, Electromagnetic Theory; id. Electric Papers, I, II; id. Proc. Roy. Soc. A 52 (1893) 504; 54 (1894) 105.

[2]) G. Boole, A Treatise on Differential Equations 1. Aufl. 1859, Macmillan.

einem intuitiven Wege und hat sich wenig an der genauen mathematischen Begründung seiner Rechnungsart gelegen sein lassen. Die Methode ergibt oft erstaunlich leicht und einfach das Resultat. Seine wichtigsten Forschungen gehören dem Gebiet der Elektrodynamik, Elektrotechnik und Elektromagnetismus an.

Der Heavisidesche Weg führt nicht immer zum Ziel. Eine Begründung ist nötig, weil sonst, wie die Literatur erweist, unrichtige Schlüsze gezogen werden können.

Um diese Begründung geben zu können hat Bromwich [1]) sein Integral

$$y(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp\, f(p)\, \frac{e^{px}}{p} \tag{2}$$

angesetzt. Wir werden dieses Integral („Methode II") als die Koordinatentransformation von p zu x kennen lernen, es wird sich also zeigen, dasz im Integranden p den gewöhnlichen Rechenregeln genügt.

Gleichzeitig kommt Wagner [2]) zu einem dem Bromwichschen analogen Ergebnis.

Carson [3]) begründet die Operatorenrechnung mittels

$$f(p) = \int_0^\infty dx\, p\, e^{-px}\, y(x). \tag{3}$$

Wir werden auch in unsrer Methode II diesem Integral begegnen als inverse Transformation von (2).

Die Carsonsche Methode ist von van der Pol [4]) weiter ausgebildet. Man verdankt van der Pol viele neue und wichtige Anwendungen mathematischer Art.

---

[1]) T. Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc. II 15 (1916) 402.

[2]) K. W. Wagner, Archiv für Elektrotechnik, 4 (1916) 159.

[3]) J. R. Carson, Electric Circuit Theory 1926 McGraw-Hill. Im Folgenden zitiert: „Carson". Auch ins Deutsche übersetzt.

[4]) B. v. d. Pol, Phil. Mag. 7 (1929) 1153; 8 (1929) 861; 11 (1931) 368; 13 (1932) 537. Die zwei letzten Abhandlungen sind zusammen mit Dr. K. F. Niessen geschrieben. Wir zitieren im Folgenden: v. d. Pol I, II, III, IV.

Jeffreys[1]) gründet seine Darstellung auf den Operator $Q = p^{-1}$ und benutzt auch die Bromwichsche Methode.

March[2]) zeigt, dasz das Bromwichsche Integral aus dem Carsonschen abgeleitet werden kann mittels Formeln von Mac Donald[3]); die letzten folgen aus dem Fourierschen Integral.

Lévy[4]) benutzt, wie Jeffreys, den Operator p^{-1}, von ihm mit dem Zeichen I angegeben, er schreibt die n-fache Integration $I^n y(x)$ als „produit de composition":

$$(4) \quad I^n y(x) = \int_0^x du \frac{(x-u)^{n-1}}{\Gamma(n)} y(u) = \int_0^x dv \frac{v^{n-1}}{\Gamma(n)} y(x-v)$$

und zeigt den Zusammenhang seiner Methode mit der Carsonschen.

Lowry[5]) hat die Bromwichsche Methode weiter ausgebildet und bekommt Resultate, von denen einige mit den van der Polschen identisch sind.

Schouten[6]) hat in einer vorzüglichen Abhandlung die mathematische Begründung der Bromwichschen Methode weiter ausgebildet und wichtige Erweiterungen und Verbesserungen dargestellt.

Dieses Verzeichnis ist durchaus nicht vollständig, wir haben nur eine Auswahl gegeben. Es gibt noch andere Begründungen der Heavisideschen Operatorenrechnung z. B. R. Iglisch[7]) (Fouriersches Integral) und Wiener[8]) (sehr ausführliche allgemeine Betrachtungen).

---

[1]) H. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, 2nd Ed. 1931, Camb. Univ. Press. Im Folgenden zitiert: „Jeffreys".

[2]) H. W. March, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927) 311.

[3]) H. M. MacDonald, Proc. Lond. Math. Soc. 35 (1902) 428.

[4]) P. Lévy, Bul. Sciences math. (2) 50 (1926) 174.

[5]) H. V. Lowry, Phil. Mag. 13 (1932) 1033 u. 1144. Zitiert: Lowry I, II.

[6]) J. P. Schouten, Over de grondslagen van de operatorenrekening volgens Heaviside. Dissert. Delft 1933. Zitiert: Schouten.

[7]) Franck u. v. Mises, Die Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik I, math. Teil, 2. Aufl. S. 817.

[8]) N. Wiener, Math. Annalen 95 (1926) 557.

ERSTE METHODE. OPERATORENALGEBRA.

§ 1. **Definitionen.**

Wir setzen:

$$(1) \qquad py(x) = \frac{d}{dx}\,y(x), \qquad p^n\,y(x) = \frac{d^n}{dx^n}\,y(x).\,^{1)}$$

Negative Potenzen von p:

Wir wünschen, dasz:

$$(2) \qquad pp^{-1}\,y(x) = y(x).$$

Daraus ergibt sich:

$$(3) \qquad p^{-1}\,y(x) = \int_C^x dx\; y(x). \qquad (C \text{ beliebig, konstant})$$

Dieses Integral habe die folgende Form:

$$(3') \qquad \int_C^x dx\; y(x) = F(x) - F(C).$$

Wir fordern aber noch die Kommutativität der negativen und positiven Exponenten von p, und die Eindeutigkeit der Operationen, also:

$$(4) \qquad p^{-1}py(x) = pp^{-1}\,y(x) = y(x).$$

Dieses ergibt eine Einschränkung der Definitionen (3) (und (3′)). In der Literatur findet man drie verschiedene Verfahren, die aequivalent sind mit den folgenden drei Definitionen von p^{-1}:

1. C wird so gewählt, dasz $F(C) = 0$. (Unterdrückung der Integrationskonstante).
2. C bleibt (provisorisch) unbestimmt.
3. C wird Null gesetzt.

---

[1]) Wenn y aber die zu suchende Lösung einer Differentialgleichung ist, benütze man statt (1) die Regel (15), oder allgemeiner (5, 7), zur Berücksichtigung der Integrationskonstanten. (5, 7) bedeutet: § 5, Formel (7).

Wir betrachten diese drei Definitionen und untersuchen, in wiefern sie unserer Forderung (4) genügen.

1. *„Methode der D-Operatoren"* [1]). Diese ist die übliche Methode in der elementaren Theorie der Differentialgleichungen zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; sie stammt von Boole [2]).

Diese Methode genügt nicht der Forderung (4): Beispiel:

(5)
$$y(x) = x + 3,$$
$$p p^{-1} y(x) = x + 3,$$
$$p^{-1} p y(x) = x, \text{ statt } x + 3.$$

Im Fall der Lösung einer Differentialgleichung ergibt diese Methode bekanntlich nur eine partikulare Lösung.

Im Fall höherer Ordnung versagt die Methode ganz. Beispiel:

(6)
$$y(x) = x^2 + 2x + 3,$$
$$p^2 y(x) = 2,$$
$$p^{-2} p^2 y(x) = x^2,$$

dagegen:

$$p^2 p^{-2} y(x) = x^2 + 2x + 3.$$

2. *Benützung der unbestimmten Integrationskonstanten* [3]). Das selbe Beispiel:

(7)
$$p^{-2} p^2 y(x) = x^2 + Ax + B,$$
$$p^2 p^{-2} y(x) = x^2 + 2x + 3.$$

Nachträglich könnte man dann statt dieser Konstanten A, B die zutreffenden Werte einsetzen.

Bei Anwendung der Operatorenmethode zur Lösung von Differentialgleichungen würden A und B die Integrationskonstanten des

---

[1]) Wir werden diese Methode immer „Methode der D-Operatoren" nennen, weil in diesem Fall in den Handbüchern immer das Symbol D statt p gewählt wird. Die Methode findet sich in jedem Lehrbuch der Differentialgleichungen, z. B. Forsyth.

[2]) G. Boole, A Treatise on Differential Equations, 1st Ed. 1859, Macmillan.

[3]) Dieses findet man nur selten in der Literatur. Siehe z. B. W. Jacobsthal in: Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Zusatz 21, S. 567, 2. und 3. Auflage.

Problemes sein. Man bekommt also die allgemeine Lösung. Doch würde es besonders in verwickelten Fällen einfacher sein, sogleich die Lösung mit den richtigen Anfangsbedingungen zu erhalten. Dieses leistet die dritte Methode:

3. *C Null gesetzt.* Das ist die Heavisidesche Methode, weiter ausgebildet von Bromwich, Jeffreys, van der Pol, Lévy, Lowry. *Wir werden immer diese Methode benützen.* Die Definition ist also:

$$(8)\quad p^{-1}\,y(x) = \int_0^x du\, y(u), \qquad p^{-n}\,y(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n\, y(x_n).$$

Vorteil: Man braucht keine beliebigen Konstanten einzusetzen, die Definition ist vollständig eindeutig.

Bei Anwendung zur Lösung von Differentialgleichungen erhält man die Lösung nicht mit beliebigen Konstanten, sondern ausgedrückt in den Anfangsbedingungen.

Nachteil: Die Methode versagt selbstverständlich im Fall von Funktionen, die im Punkte 0 unendlich werden. Man kann dann Methode 2 anwenden oder statt 0 einen anderen Punkt[1]) als untere Grenze der Integrale (8) wählen.

Wir wollen jetzt erörtern, wie wir bei der Lösung von Differentialgleichungen die Integrationskonstanten erhalten können.

Wenn man setzt:

$$(9)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

könnte man gerade so gut setzen:

$$(10)\qquad \frac{d(y+k)}{dx} = f(x)$$

weil y ja eine Integrationskonstante enthält.

In der Operatorenrechnung sind aber die entsprechenden Formen py und $p(y+k)$ ganz verschieden, weil die Integrationskonstante schon von vornherein bestimmt ist. Es ist ja:

---

[1]) In der Literatur findet man z. B. ∞ als Grenze in diesem Fall: Lowry, Phil. Mag. VII 13 (1923) 1033. Seine Methode gehört aber zu den Integraldarstellungen der Heavisideschen Operatoren. (Siehe Kap. II).

(11) $$py = f(x)\,, \quad y = p^{-1} f(x)\,, \quad y = \int_0^x du\, f(u)$$

aber:

$$p(y+k) = f(x)\,, \quad y + k = p^{-1} f(x)\,,$$

(12) $$y = \int_0^x du\, f(u) - k\,,$$

(11) und (12) sind also verschieden.

Die „Uebersetzung"[1])

(13) $$\frac{dy}{dx} = py$$

wäre unrichtig, sie lautet vielmehr:

(14) $$\frac{dy}{dx} = p(y+k).$$

Nach (12) ist $y + k$ im Punkte $x = 0$ immer 0, daher musz $k = -y(0)$ sein.

Wir finden also:

Regel. Die Formel

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

lautet in Operatoren:

(15) $$py - py(0) = f(x).$$

Diese Regel ist wichtig bei der Lösung von Differentialgleichungen. Siehe § 5, auch für die entsprechenden Formeln im Fall höherer Ableitungen. Nur wenn man diese Regel einführt wird der Forderung (4) immer Genüge getan.

Im Fall höherer Ableitungen gilt der allgemeinere Satz:

(16) $$p^{-n} p^n y = y\,,$$

den man mit (4) beweisen kann. Es gilt also:

Satz. *Alle Funktionen von p sind untereinander kommutierbar.*

---

[1]) Erklärung dieses Ausdrucks in der Einleitung.

gerade so wie Funktionen von x. Funktionen von x und von p sind aber nicht kommutierbar; die benötigten Vertauschungsregeln findet man in § 2.

Dieser Satz ist nur richtig mit unsrer Definitionen (8) und Regel (15). Die Regel (15) wird von uns gerade vorgeschlagen, um die Operatorenrechnung auch zu ermöglichen im Fall $y(0) \neq 0$, $y'(0) \neq 0$, u.s.w.

Heaviside betrachtete meistens Fälle mit $y(0) = 0$ (elektrotechnische Probleme: $y(t)$ sei z. B. elektrischer Strom, also 0 beim Einschalten). Bei einigen seiner Nachfolger findet man aber Fälle, in denen $y(0) \neq 0$, dies gab dann Anlasz zu Fehlern oder Paradoxen[1], die mit Regel (15) völlig gelöst werden können. Jeffreys[2]) und van der Pol[3]) erhielten Resultate, die unsrer Regel äquivalent sind. Siehe § 5: Formel (5, 7).

Beispiel (Erläuterung von $p^{-1}py = y$).

$$y(x) = x + 3\,,$$
$$\frac{dy}{dx} = 1\,;$$

nach (15):

$$\begin{aligned} &p(y - y(0)) = 1 \qquad \text{mit } y(0) = 3\,,\\ &p^{-1}p(y - 3) = x\,,\\ &p^{-1}py - p^{-1}p3 = x\,,\\ &p^{-1}py = x + 3. \end{aligned}$$

Oder, ganz mit Operatoren:

$$\begin{aligned} &y(x) = x + 3\\ &py = px + p3\\ &p^{-1}py = p^{-1}px + p^{-1}p3 = x + 3. \end{aligned}$$

Beispiel (6) findet man in § 6, 2. (Erläuterung von $p^{-2}p^2y = y$).

---

[1]) Ein Beispiel ist § 6, Gleichung (11) bis (13).

[2]) H. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, 2nd Ed. (1931), Cambridge University Press, im folgen zitiert „Jeffreys'', pag. 13.

[3]) B. v. d. Pol I, § 3, II S. 877.

§ 2. Rechenregeln.

Aus den Definitionen (1, 1) und (1, 8) folgt:

(1) $upy + vpy = (u + v)py$, (u, v, y sind

(2) $p(u + v)y = puy + pvy$, Funktionen von x).

(3) $p^n ay = ap^n y$, mit a = Konstante, n ganzzahlig $\gtreqless 0$.

und nach (1, 10):

(4) $p^n p^m y = p^{n+m} y$, mit $y(x)$, und m, n ganzzahlig $\gtreqless 0$

Nach den Regeln der Differentialrechnung erhält man:

(5) $$pv(x)y(x) = v(x)py(x) + y(x)pv(x).$$

Funktionen von x und von p sind also nicht kommutierbar. Als Vertauschungsregel ergibt (5):

(6) $$[pv(x) - v(x)p]\, y(x) = v'(x)y(x).$$

($v'(x)$ ist das Differentialquotient von $v(x)$).

Anwendungen und Erweiterungen:

A. Im Fall $v(x) = x$:

(7) $$[px - xp]\, y = y;$$

$p^2xy = p(pxy) = p(xpy + y) = xp^2y + 2\, py$, also:

(8) $$[p^2x - xp^2]\, y = 2\, py.$$

Ähnlich ergibt sich:

(9) $$[p^3x - xp^3]\, y = 3\, p^2y,$$

und ganz allgemein durch Induktion:

(10) $$[p^n x - xp^n] y = np^{n-1} y.$$

Diese Relation ist jetzt bewiesen im Fall $n > 0$; der Fall $n = 0$ ist trivial; Beweis im Fall $n < 0$:

$n = -1$: Partielle Integration:

$$\int_0^x dx_1\, x_1 y = x \int_0^x dx_1\, y - \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2\, y.$$

Setzt man:

$$p^{-1}y = \int_0^x dx\, y = Y,$$

dann ergibt sich:

$$\int_0^x dx_1 x_1\, y = xY - \int_0^x dx_1 x_1\, y,$$

also:

(11) $$p^{-1}xy = xp^{-1}y - p^{-2}y$$

oder:

(12) $$[p^{-1}x - xp^{-1}]\,y = -p^{-2}y,$$

im Einklang mit (10).

$n = -2$. Wir multiplizieren (11) mit p^{-1}:

$$p^{-1}(p^{-1}xy) = p^{-1}xp^{-1}y - p^{-3}y.$$

Setzt man $p^{-1}y = U$, dann ergibt sich mittels neuer Anwendung von (11):

$$p^{-1}(p^{-1}xy) = p^{-1}xU - p^{-3}y = xp^{-1}U - p^{-2}U - p^{-3}y,$$

(13) $$p^{-2}xy = xp^{-2}y - 2p^{-3}y,$$

im Einklang mit (10).

> Bemerkung. Wir haben bereits in diesem Beweis die p-Symbole statt Integralen angewendet, schon in diesem einfachen Beispiel sieht man wieviel einfacher die Formeln dadurch aussehen.

Genau in derselben Weise zeigt man die Richtigkeit unsrer Formel im Fall höherer, negativer Potenzen.

Endergebnis:

(14) $$p^n xy = xp^n y + np^{n-1}y \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und daher, wenn $F(p)$ ein Polynom ist (auch negative Potenzen sind gestattet!):

(15) $$[F(p)x - xF(p)]\,y = \frac{dF(p)}{dp}(p)\,y.$$

Augenscheinlich kann man dieses noch folgendermaszen erweiteren:

(16) $$[F(x,p)\,x - x\,F(x,p)]\,y = \frac{\partial F(x,p)}{\partial p}\,y$$

wenn $F(x, p)$ eine beliebige Funktion von x ist, aber in p eine Potenzenreihe (etwa auch negative Potenzen). Mühelos überzeugt man sich davon, dasz dieser Satz immer richtig ist, auch wenn Operatoren p in $F(x, p)$ nicht nur hinter, sondern auch vor dem x stehen.

B. Im Fall $v(x) =$ beliebig.

Das Leibnizsche Theorem ergibt:

(17) $$p^n\,v(x)\,y = v(x)\,p^n\,y + n\,\frac{dv(x)}{dx}\,p^{n-1}\,y + \\ + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\,\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\,p^{n-2}\,y + \ldots .$$

und daher:

(18) $$[F(p,x)\,v(x) - v(x)\,F(p,x)]\,y = \frac{dv}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial p}\,y + \\ + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2 v}{dx^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,y + \frac{1}{3!}\,\frac{d^3 v}{dx^3}\,\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}\,y + \ldots .$$

F musz eine Potenzenreihe in p sein (auch negative Potenzen sind möglich), in x ganz beliebig.

Mittels der bis jetzt abgeleiteten Formeln kann man eine Funktion $v(x)$ nach links von $F(p)$ „durchschieben" (d. h. vor die Operatoren setzen, also auszer ihrem Einflusz), oder auch nach rechts, also die Funktion unter den Operator bringen.

„Durchschieben" von Funktionen von p. Aus der Definition von p ergibt sich:

(19) $$[pF(p,x) - F(p,x)\,p]\,y = \frac{\partial F}{\partial x}\,y$$

und auch weiter den vorhergehenden ähnliche Formeln.

Schlieszlich erhält man:

(20) $$[F(x,p)\,G(x,p) - G(x,p)\,F(x,p)]\,y = \frac{\partial G}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial p}\,y + \\ + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,y + \frac{1}{3!}\,\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\,\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}\,y + \ldots .$$

Bemerkungen:

1. Bei mehreren unabhängigen Veränderlichen ergeben sich ähnliche Formeln, die wichtigsten sind z. B.:

$$(21) \qquad [F x_k - x_k F]\, y = \frac{\partial F}{\partial p_k}\, y$$

$$(22) \qquad [p_k F - F p_k]\, y = \frac{\partial F}{\partial x_k}\, y$$

mit $F = F(x_1, \ldots\ldots, x_n, p_1, \ldots\ldots, p_n)$.

2. Man bekommt wichtige Anwendungen der Formeln wenn man $y = 1$ setzt.

3. Wir weisen auf die Uebereinstimmung hin von obigen Formeln mit den Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik.

§ 3. „Uebersetzung"[1]) der einfachsten p-Funktionen in die x-Sprache.

1. *Grundformeln.*

Unsre Definition (1, 8) lautet:

$$(1) \qquad p^{-n} y(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n\, y(x_n)\,,$$

daher wenn $y = 1$:

$$(2) \qquad p^{-n} . 1 = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n\, y(x_n)\ ^{2})$$

oder:

$$(3) \qquad p^{-n} . 1 = \frac{x^n}{n!}\,.$$

Wenn $n = 0$ ergibt sich:

$$(4) \qquad 1 = 1.$$

---

[1]) Erklärung dieses Ausdrucks in der Einleitung.

[2]) Viele Autoren schreiben einfach p^{-n} statt $p^{-n} . 1$, und lassen auch in allen anderen Formeln die 1 fort. Wir haben die 1 erhalten, weil das mathematisch richtiger ist, da p ein Operator ist und weil das Unterdrücken der 1 irreführend sein kann: Siehe § 11, 2.

Im Fall eines positiven n nach (1, 1):

$$p^n \,.\, 1 = 0\,^{1)}. \tag{5}$$

Wenn $y = c$ (c = Konstante, also permutierbar mit p) finden wir:

$$c p^{-n} \,.\, 1 = c \frac{x^n}{n\,!} \tag{6}$$

$$c = c \tag{7}$$

$$c p^n \,.\, 1 = 0\,^{1)}. \tag{8}$$

Die Funktion $e^{\alpha x}$. Die p-Uebersetzung dieser Funktion erhält man folgenderweise. Die Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \tag{9}$$

ist bekanntlich $c e^{\alpha x}$. Wir wollen die Uebersetzung von $e^{\alpha x}$ bekommen, also $c = 1$, daher $y(0) = 1$. Die Gleichung (9) schreibt man nach (1, 15):

$$p y - p y(0) - \alpha y = 0$$

oder:

$$y = \frac{p}{p - \alpha} \,.\, 1\,,$$

also:

$$e^{\alpha x} = \frac{p}{p - \alpha} \,.\, 1. \quad (\alpha \text{ völlig beliebig, auch komplex}) \tag{10}$$

Dieses Ergebnis ist auch mittels Reihenentwicklung zu bekommen:

$$\frac{p}{p - \alpha} \,.\, 1 = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{p}} \,.\, 1 = \left(1 + \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha^2}{p^2} + \ldots\right). \tag{11}$$

Dieses wird nach (3):

$$\frac{p}{p - \alpha} \,.\, 1 = 1 + \frac{\alpha x}{1\,!} + \frac{\alpha^2 x^2}{1\,!} + \ldots = e^{\alpha x}. \tag{12}$$

---

[1]) Diese Regel darf nur in Endergebnissen angewendet werden, sonst verliert man Integrationskonstanten. So darf man in (1, 15) nicht $p y_0 = 0$ setzen.

Wir haben uns mit diesem einfachen Beweis nicht begnügt, weil dieser nur richtig sein würde, wenn auch das Restglied betrachtet würde, aber die „Uebersetzung" des Restgliedes ist nicht möglich, wenn nicht schon die „Uebersetzung" der Funktion $e^{\alpha x}$ dargestellt ist.

Siehe § 12 über Reihenentwicklung.

2. *Einige Eigenschaften der Exponentialfunktion.*

„Durchschieben" der Funktion $e^{\alpha x}$. Nach der Definition von p ist:

$$F(p, x)\, e^{\alpha x}\, y = e^{\alpha x}\, F(p + \alpha, x)\, y\,, \tag{13}$$

(F Potenzreihe in p, auch negative Potenzen gestattet; in x beliebig) und umgekehrt:

$$e^{\alpha x}\, F(p, x)\, y = F(p - \alpha, x)\, y. \tag{14}$$

Diese Eigenschaften sind für alle Werte von α richtig (auch komplexe). Mit Eigenschaft (13) beweisen wir:

Wenn

$$y(x) = \varphi(p)\,.\,1 \tag{15}$$

so ist:

$$e^{-\alpha x}\, y = \frac{p}{p+\alpha}\,\varphi\,(p + \alpha)\,.\,1. \tag{16}$$

Beweis:

$$y\,(x) = \varphi\,(p)\,.\,1\,,$$

$$e^{-\alpha x}\, y = e^{-\alpha x}\,\varphi\,(p)\,.\,1\,,$$

$$e^{-\alpha x}\, y = \varphi\,(p + \alpha)\,.\,e^{-\alpha x}\,, \tag{17}$$

also nach (10):

$$e^{-\alpha x}\, y = \varphi\,(p + \alpha)\,\frac{p}{p+\alpha}\,.\,1.$$

3. *Andere Uebersetzungen der Funktion $e^{\alpha x}$.*

Die Tatsache, dasz die Exponentialfunktion sich bei Differentiation und Integration bis auf eine multiplikative (bei Integration auch eine additive) Konstante reproduziert, ergibt eine mehrdeutige Uebersetzung in die p-Sprache. Es ist:

$$p^n e^{\varkappa x} = \varkappa^n e^{\varkappa x}, \tag{18}$$

somit:

$$e^{\varkappa x} = \frac{p^n}{\varkappa^n} \cdot \frac{p}{p-\varkappa} \cdot 1. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Die Operation p^{-1} ergibt immer, nach ihrer Definition (1, 8), Funktionen, deren Uebersetzung in der x-Sprache $y(x)$ immer der Forderung $y(0) = 0$ genügen, so ergibt sich hier:

$$\frac{\varkappa}{p} \cdot \frac{p}{p-\varkappa} \cdot 1 = \frac{\varkappa}{p-\varkappa} \cdot 1 = \frac{p}{p-\varkappa} \cdot 1 - 1 = e^{\varkappa x} - 1. \tag{20}$$

Wiederholte Integration ergibt (mit Anwendung von (3)):

$$\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \frac{p}{p-\varkappa} \cdot 1 = \frac{\varkappa}{p} \cdot \frac{p}{p-\varkappa} \cdot 1 - \frac{\varkappa}{p} \cdot 1 = e^{\varkappa x} - \varkappa x - 1, \tag{21}$$

diese Funktion hat $y(0) = y'(0) = 0$.

Weitere Integrationen ergeben als allgemeine Uebersetzung von $e^{\varkappa x}$:

$$e^{\varkappa x} = \left[\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^n \frac{p}{p-\varkappa} + 1 + \frac{\varkappa}{p} + \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{n-1}\right] \cdot 1. \tag{22}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

4. Einige in der Praxis wichtige Formeln (23) bis (31) findet man in der Formelntabelle im Anhang.

§ 4. Weitere Uebersetzungen von transzendenten Funktionen.

1. *Grundformeln.*

Nach (3, 10) setzt man:

$$\sinh \varkappa x = \tfrac{1}{2}(e^{\varkappa x} - e^{-\varkappa x}) \left[\frac{p}{2(p-\varkappa)} - \frac{p}{2(p+\varkappa)}\right] \cdot 1 = \tag{1}$$
$$= \frac{\varkappa p}{p^2 - \varkappa^2} \cdot 1.$$

Ganz analog:

$$\cosh \varkappa x = \frac{p^2}{p^2 - \varkappa^2} \cdot 1. \tag{2}$$

Dieselben Operationen ausgeübt auf $e^{i\varkappa x}$ ergeben:

(3) $$\sin \varkappa x = \frac{p\varkappa}{p^2 + \varkappa^2} \cdot 1.$$

und

(4) $$\cos \varkappa x = \frac{p^2}{p^2 + \varkappa^2} \cdot 1.$$

2. *Nebenformeln.*

Auch diese Funktionen haben eine mehrdeutige Uebersetzung in die p-Sprache, weil man sie nach zweimaliger Differentiation oder Integration wieder bis auf Konstanten zurückbekommt. Vermittels wiederholter Differentiation ergibt sich:

(1′) $$\sinh \varkappa x = \left(\frac{p}{\varkappa}\right)^{2n} \frac{\varkappa p}{p^2 - \varkappa^2} \cdot 1$$

(2′) $$\cosh \varkappa x = \left(\frac{p}{\varkappa}\right)^{2n} \frac{p^2}{p^2 - \varkappa^2} \cdot 1.$$

(3′) $$\sin \varkappa x = \left(-\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)^{n} \frac{\varkappa p}{p^2 + \varkappa^2} \cdot 1.$$

(4′) $$\cos \varkappa x = \left(-\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)^{n} \frac{p^2}{p^2 + \varkappa^2} \quad (n \text{ immer } \geqq 0).$$

Mittels wiederholter Integration ergibt sich nach Anwendung von (3, 22):

(1″) $$\sinh \varkappa x = \left[\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n} \frac{\varkappa p}{p^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa}{p} + \frac{\varkappa^3}{p^3} + \ldots + \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n-1}\right] \cdot 1.$$

(2″) $$\cosh \varkappa x = \left[\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n} \frac{p^2}{p^2 - \varkappa^2} + 1 + \frac{\varkappa^2}{p^2} + \ldots + \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n-2}\right] \cdot 1.$$

(3″) $$\sin \varkappa x = \left[\left(-\frac{\varkappa^2}{p^2}\right)^{n} \frac{\varkappa p}{p^2 - \varkappa^2} + \frac{\varkappa}{p} - \frac{\varkappa^3}{p^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n-1}\right] \cdot 1.$$

(4″) $$\cos \varkappa x = \left[\left(-\frac{\varkappa^2}{p^2}\right)^{n} \frac{p^2}{p^2 - \varkappa^2} + 1 - \frac{\varkappa^2}{p^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{\varkappa}{p}\right)^{2n-2}\right] \cdot 1.$$

Auch in diesen Formeln ist $n \geqq 0$.

3. *Formelnmaterial für praktische Anwendungen.*

Diese Formeln (5) bis (17) sind nur in der Formelnsammlung am Ende der Abhandlung gedruckt. Näheres über diese Formeln (auch Anwendungen) findet man in dem sehr elementaren Bergschen Buche [1]). Wir haben, um die Vergleichung zu erleichtern, die Bezeichnungen dieses Buches in diesen Formeln möglichst wenig abgeändert.

Die Formeln sind besonders brauchbar beim Zurückinterpretieren der Lösungen von Differentialgleichungen, wenn man die schon in der p-Sprache gelöst hat.

§ 5. Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Fundamentales.

Erste Ordnung.

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = F(x) \tag{1}$$

wird nach (1, 15):

$$py - py_0 + ay = F(x). \qquad (y_0 = y\,(0)). \tag{2}$$

Demnach ist die Lösung:

$$y = \frac{F(x) + py_0}{p + a}. \tag{3}$$

Im allgemeinen kann man am einfachsten setzen:

$$F(x) = \Phi(p) \,.\, 1\,. \tag{4}$$

mittels der Formeln von § 3 und § 4, und noch weiteren: siehe die Formelntabelle im Anhang [2]). Man löst dann y rein algebraisch und übersetzt die Lösung wieder mit diesen Formeln in die x-Sprache.

---

[1]) E. J. Berg, Heavisides Operational Calculus, &c Mc. Graw Hill, New York. Deutsche Uebersetzung: Gramisch-Tropper-Berg, Rechnung mit Operatoren (1932), R. Oldenbourg, München.

[2]) Andere Methoden: siehe Bemerkung 6 dieses Paragraphen.

Bemerkung. In den üblichen Handbüchern der Differentialgleichungen vernachlässigt man das Glied py_0, und erhält also nur eine partikulare Lösung.

Höhere Ordnung.

Zur richtigen Interpretation der höheren Differentialquotienten musz man die Regel (1, 15) wiederholt anwenden: Beispiel:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\,\frac{dy}{dx} - py_1 = p\,(py - py_0) - py_1 \tag{5}$$

$$\text{mit} \qquad y_1 = \frac{dy\,(0)}{dx}. \tag{6}$$

Das allgemeine Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,y &= py - py_0, \\ \frac{d^2}{dx^2}\,y &= p^2 y - p^2 y_0 - py_1, \\ \frac{d^3}{dx^3}\,y &= p^3 y - p^3 y_0 - p^2 y_1 - py_2, \\ \frac{d^n}{dx^n}\,y &= p^n y - (p^n y_0 + p^{n-1} y_1 + \ldots + py_{n-1}), \end{aligned} \tag{7}$$

mit y_k = der Wert der $k$ten Ableitung von y im Punkte $x = 0$.

Diese Tabelle findet man schon, auf ganz andere Weise abgeleitet, bei van der Pol [1]). Auch Jeffreys [2]) hat solche Formeln gefunden, seine Ableitung ist der unsrigen ziemlich nahestehend.

Die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0\, y = F(x), \tag{8}$$

---

[1]) Note 2, S. 9.

[2]) Siehe Note 3, S. 9.

die in Operatoren lautet (nach (7)):

$$(9)\quad a_n p^n y + a_{n-1} p^{n-1} y + \ldots + a_0 y = F(x) + \sum_1^n a_k p^k y_0 +$$
$$+ \sum_2^n a_k p^{k-1} y_1 + \ldots + \sum_{n-1}^n a_k p^{k-n+2} y_{n-2} + a_n p y_{n-1}$$

ist also:

$$(10)\quad y = \frac{1}{a_n p^n + \ldots + a_0} \cdot \left(F(x) + \sum_1^n a_k p^k y_0 + \ldots + a_n p y_{n-1} \right).$$

Man setzt am einfachsten (mittels § 3 und § 4)[1]):

$$(11) = (4) \qquad F(x) = \varphi(p) \, . \, 1 \, ,$$

mithin:

$$(12)\quad y = \frac{\varphi(p) \, . \, 1 + \sum_1^n a_k p^k y_0 + \ldots + a_n p y_{n-1}}{a_n p^n + \ldots\ldots + a_0} = \frac{u(p)}{v(p)} \; 1.$$

Zum Zurückinterpretieren in die x-Sprache zerlegt man erst in Partialbrüche. In einfachen Fällen genügt dazu folgende Regel (14).

Wenn der Grad von $u(p)$ nicht höher ist als der von $v(p)$ und die Wurzeln α von $v(p) = 0$ alle verschieden und $\neq 0$ sind, so ist bekanntlich, wenn $v'(x) = dv/dx$:

$$(13)\qquad \frac{u(p)}{pv(p)} = \frac{u(o)}{pv(o)} + \Sigma \frac{u(\alpha)}{\alpha v'(\alpha)} \frac{1}{p - \alpha}$$

und daher:

$$(14)\qquad \frac{u(p)}{v(p)} = \frac{u(o)}{v(o)} + \sum_\alpha \frac{u(\alpha)}{\alpha v'(\alpha)} \frac{p}{p - \alpha},$$

somit nach (3, 10):

$$(15)\qquad y = \frac{u(o)}{v(o)} + \sum_\alpha \frac{u(\alpha)}{\alpha v'(\alpha)} \, . \, e^{\alpha x} \, .$$

(15) heiszt das Heavisidesche „*Expansion Theorem*".

---

[1]) Siehe Note ??, S. ??.

Spezielle Fälle und Bemerkungen.

1. Komplexe Wurzeln von $v(p) = 0$ können mit (15) behandelt werden. Wünscht man aber die Lösung in cos und sin, so zerlegt man $v(p)$ nur in Faktoren zweiten Grades, und wendet (4, 3) und (4, 4) an. Auch die anderen Formeln von § 4 sind sehr oft nützlich, besonders (4,1), (4, 2) und (4, 7) bis (4, 19).

2. Enthält $v(p) = 0$ mehrfache Wurzeln, so erhält man auszerdem Glieder der Form

$$A \frac{p}{(p-\alpha)^n},$$

den Koeffizient A findet man z. B. durch Vergleichung der Koeffizienten. Nach (3, 29) [1] ist das Ergebnis:

$$\frac{A}{(n-1)!} x^{n-1} e^{\alpha x}.$$

Diese Ableitung ist einfacher als derselbe Fall in der elementaren Theorie [2]). In einigen Fällen benütze man (3, 30), (3, 31).

3. Enthält $v(p) = 0$ eine einfache oder mehrfache Wurzel 0, dann werden die dazu gehörigen Koeffizienten z. B. wieder durch Gleichsetzung der Koeffizienten gesucht. Die Lösung enthält Glieder wie:

$$Ap^{-n} = \frac{Ax^n}{n!},$$

nach (3, 3).

4. Die Formeln (3, 23) bis (3, 28) ergeben oft eine Bekürzung der Rechnung).

5. Man kann statt (10) und (12) schreiben:

$$(16) \qquad y = \frac{1}{v(p)} F(x) + \frac{\sum\limits_1^n a_k p^k y_0 + \ldots + a_n p y_{n-1}}{v(p)} . 1,$$

kürzer:

$$(17) \qquad y = \frac{1}{v(p)} F(x) + \frac{s(p)}{v(p)} . 1.$$

[1]) Siehe in der Formelnsammlung im Anhang.

[2]) Cf. z. B. Forsyth, Lehrbuch Diffgl. 2. u. 3. Aufl., S. 69.

Nur das erste Glied dieser vollständigen Lösung enthält die rechte Seite $F(x)$ der Differentialgleichung. In Schwingungsproblemen (also wenn die Gleichung zweiter Ordnung ist) ist $F(x)$ die angelegte Kraft, dieser Teil von y ist die stationäre Lösung: die erzwungene Schwingung.

Das zweite Glied der Lösung ist die Lösung der homogenen Gleichung. In Schwingungsproblemen ergibt dieser Teil die Eigenschwingungen. In der Praxis enthält dieser Teil immer eine Exponentialfunktion mit negativem Realteil im Exponenten, fällt also schnell ab. Er hat nur grosze Bedeutung im Anfang. Der Vorteil unsrer Operatorenmethode ist, dasz die Lösung nicht in beliebigen Integrationskonstanten, sondern sofort in den Anfangsbedingungen ausgedrückt wird.

In vielen physikalischen und technischen Problemen hat nur die stationäre Lösung Wert. Man braucht dann nur das zweite Glied in (17) fortzulassen.

6. Berechnung von $\frac{1}{v(p)}F(x)$. In (4) und (11) wurde angenommen, $F(x)$ sei einfach in die p-Sprache zu übersetzen.

a. Wenn dies nicht einfach möglich ist, benützt man die Formeln (6, 2), (6, 3), (6, 11) von § 6.

b. Bisweilen ist folgendes Verfahren das kürzeste:

$$\frac{p}{p-\varkappa}F(x) = -\left(\frac{p}{\varkappa} + \frac{p^2}{\varkappa^2} + \dots\right)F(x)\ ^{1}). \tag{18}$$

Diese Methode, die schon von B o o l e herstammt, ist z. B. die leichteste wenn $F(x)$ ein Polynom ist. Nach einigen Gliedern werden alle folgende Null nach (3, 5). Man braucht dabei nicht immer den Bruch $1/v(p)$ in Partialbrüche zu zerlegen, z. B.:

$$\frac{1}{p^3(p^2-\varkappa)}F(x) = -\frac{1}{\varkappa p^3}\left(1 - \frac{p^2}{\varkappa} + \frac{p^4}{\varkappa^2} + \dots\right)F(x)\ ^{1}). \tag{19}$$

7. Wenn man nicht die Anfangsbedingungen einzusetzen braucht, setzt man in (17):

---

[1]) Die Anwendung der Reihenentwicklung nach positiven Potenzen von p ist nicht immer einwandfrei. Wenn (18) oder (19) ohne weiteres angewendet werden, verlieren y_0, y_1, ... ihre Bedeutung, sie sind nur noch Integrationskonstanten, nicht mehr die Anfangswerte. Man findet dieses in § 12, Regel II.

$$(20)\quad \begin{aligned} s(p) &= \sum_1^n a_k p^k y_0 + \sum_2^n a_k p^{k-1} y_1 + \ldots + a_0 p y_{n-1} = \\ &= A^n p_n + A_{n-1} p^{n-1} + \ldots + A_1. \end{aligned}$$

In diesem Fall die Methode dann der gewöhnlichen Methode der D-Operatoren in der elementaren Theorie ähnlich, sie ist aber in komplizierten Fällen (z. B. mehrfache Wurzeln) viel einfacher. Die Einsetzung von (20) erleichtert die Partialbruchzerlegung.

8. Wenn man nur die Lösung in der Nähe von $x = 0$ betrachten musz empfiehlt es sich die Lösung in Reihenentwicklung zu geben. Das ist die zweite Heavisidesche Methode. Siehe § 12.

§ 6. Beispiele zu § 5.

1. Die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} - 3y = 3$$

mit Anfangsbedingung:

$$y_0 = 2$$

gibt nach (5, 3) (Spezialfal von (5, 10)):

$$y = \frac{2p+3}{p-3} \cdot 1 = -1 + \frac{3p}{p-3} \cdot 1,$$

also:

$$(2)\qquad y = -1 + 3e^{3x}.$$

2. In § 1 betrachteten wir Beispiel (1, 6).
Dieses ist:

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

mit Anfangsbedingungen:

$$y_0 = 3,\quad y_1 = 2.$$

Nach (5, 7) lautet (3) in Operatoren:

$$p^2 y - p^2 \cdot 3 - p \cdot 2 = 2,$$

demnach:

$$y = \frac{p^2 \cdot 3 + p \cdot 2 + 2}{p^2} \cdot 1 = \left(3 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}\right) \cdot 1,$$

nach (3, 6):

$$y = 3 + 2x + x^2. \tag{4}$$

3. Man löse:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4}, \tag{5}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(5, 9) ergibt hier:

$$(p^2 - 4p + 3)\,y = +\left[p^2 - 4p + p + \frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4}\right].\,1. \tag{6}$$

Hier ist $F(x)$ leicht in Operatoren auszudrücken. Nach (3, 24) ist:

$$\frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{p+4}\,1. \tag{7}$$

Einsetzen von (7) in (6) ergibt:

$$y = \frac{p^3 - 15p^2 + 4p + 1}{(p^2 - 4p + 3)(p+4)}\,1,$$

also nach (5, 15):

$$y = \frac{1}{12} + \frac{9}{10}e^{x} + \frac{95}{42}e^{3x} + \frac{319}{140}e^{-4x}. \tag{8}$$

4. Man löse:

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 4\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \tag{9}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 0, \quad y^{\mathrm{I}}(0) = 2, \quad y^{\mathrm{II}}(0) = y^{\mathrm{III}}(0) = 0, \quad y^{\mathrm{IV}}(0) = 4.$$

Nach (5, 9) lautet (9) in Operatoren:

$$p^5y - 4p^4y + 4p^3y = (2p^4 - 8p^3 + 8p^2 + 4p).\,1,$$

daher:

$$y = \frac{2p^4 - 8p^3 + 8p^2 + 4p}{p^3(p-2)^2}\,1.$$

Um diese Form zu zerlegen in Partialbrüche der Form $\frac{p}{p-\alpha}$ verfährt man folgenderweise:

$$p\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p^3}+\frac{D}{(p-2)^2}+\frac{E}{p-2}\right)=\frac{2p^4-8p^3+8p^2+4p}{p^3(p-2)^2}.$$

Vergleichung der Koeffizienten nach Beseitigung der Nenner ergibt:

$$A=\frac{3}{4},\ B=3,\ C=1,\ D=\frac{1}{2},\ E=-\frac{3}{4},$$

also:

$$y=\left[\frac{3}{4}+\frac{3}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{p}{2(p-2)^2}-\frac{3p}{2(p-2)}\right]1$$

und nach Anwendung der Formeln (3, 7), (3, 6), (3, 10) und (3, 29):[1])

$$y=\frac{3}{4}+3x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{2}e^{2x}. \tag{10}$$

5. *Schwingungsgleichung.*

a. *Homogene Gleichung ohne Dämpfung:*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2y=0. \tag{11}$$

Würde man nicht unsre Erweiterung der Theorie zur Berücksichtigung der Integrationskonstanten beachten (wie z. B. in der elementaren Theorie der D-Operatoren zur Lösung von Differentialgleichungen), so würde man setzen:

$$p^2y+\alpha^2y=0 \tag{12}$$

mit der Lösung:

$$y=\frac{1}{p^2+\alpha^2}\,.\,0=0. \tag{13}$$

Das ist nach unsrer Methode gerade das richtige Ergebnis, denn so erhält man nur die Lösung im Spezialfall $y_0=y_1=0$.

[1]) S. Formelntabelle im Anhang.

Das richtige allgemeine Verfahren ist nach (5, 7):

(14) $$p^2y + \alpha^2y = p^2y_0 + py_1.$$

Dies ergibt nach (5, 15):

(15) $$y = \frac{p^2y_0 + py_1}{p^2 + \alpha^2} = \frac{-\alpha^2y_0 + i\alpha y_1}{-2\,\alpha^2}\,e^{i\alpha x} + \frac{-\alpha^2y_0 - i\alpha y_1}{-2\,\alpha^2}\,e^{-i\alpha x}$$

$$= y_0 \cos \alpha x + \frac{y_1}{\alpha} \sin \alpha x.$$

Eine andere Weise um dasselbe Ergebnis zu erhalten ist folgende (nach (4, 3) und (4, 4)):

(16) $$y = \frac{p^2y_0}{p^2 + \alpha^2} + \frac{py_1}{p^2 + \alpha^2} = y_0 \cos \alpha x + \frac{y_1}{\alpha} \sin \alpha x.$$

b. Nichthomogene Gleichung.

Wir setzen die auferlegte Kraft $F(x) = \sin \beta x$.

(17) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2y = \sin \beta x,$$

(18) $$p^2y + \alpha^2y = p^2y_0 + py_1 + \sin \beta x,$$

(19) $$y = \frac{p^2y_0 + py_1 + \sin \beta x}{p^2 + \alpha^2}\,.\,1.$$

Erstes Verfahren: $F(x)$ als Operator schreiben:

(20) $$y = \frac{(p^2 + \beta^2)\,(p^2y_0 + py_1) + \beta p}{(p^2 + \beta^2)\,(p^2 + \alpha^2)}\,.\,1,$$

nach (4, 3).

Man kann wieder (5, 15) anwenden und bekommt sehr leicht das Endergebnis. Wir werden, wie im vorhergehenden Beispiel die Zerlegung nur vornehmen bis $p^2 + \beta^2$ und $p^2 + \alpha^2$ als Nenner. Wir werden die Lösung der homogenen Gleichung getrennt halten wie in (5, 17) um Vergleichung zu vereinfachen.

(21) $$y = \frac{p^2y_0 + py_1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{\beta p}{(p^2 + \beta^2)\,(p^2 + \alpha^2)}\,.\,1 =$$

$$= \frac{p^2y_0 + py_1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\left(\frac{p}{p^2 + \alpha^2} - \frac{p}{p^2 + \beta^2}\right).\,1 =$$

$$= y_0 \cos \alpha x + \frac{y_1}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{\beta}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \sin \alpha x - \frac{\sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}\,.$$

Zweites Verfahren: $F(x)$ nicht umsetzen in Operatoren (vergl. § 5, 6).

Die Lösung hat dan diese Form:

$$(22)\qquad y = \frac{p^2 y_0 + p y_1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{1}{p^2 + \alpha^2} \sin \beta x.$$

Man kann hier einen Kunstgriff [1]) anwenden, welcher sehr bequem zum Resultat führt. Weil in der Praxis Fälle wie $F(x) = \sin \beta x$ viel auftreten, erwähnen wir diesen Kunstgriff. Ganz analog mit (3, 13) hat man sowohl mit sinus als mit cosinus:

$$(23)\qquad F(p^2) \frac{\sin}{\cos} \beta x = \frac{\sin}{\cos} \beta x \, F(-\beta^2),$$

wenn F eine ganze Funktion ist.

Es würde aber nicht richtig sein zu setzen:

$$(24)\qquad \frac{1}{p^2 + \alpha^2} \sin \beta x = \frac{1}{-\beta^2 + \alpha^2} \sin \beta x,$$

wegen der zu beachtenden Integrationskonstanten wie in § 1 und § 5 gefunden ist, weil der Operator im Nenner steht. Man musz hier hinzufügen [2]): $-p^2 y(0) - p y'(0)$. Wir erhalten also:

$$(25)\qquad \frac{1}{p^2 + \alpha^2}\left(\sin \beta x - \frac{p\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \right) 1 = - \frac{\sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \sin \alpha x$$

und dies ist selbstverständlich im Einklang mit (21). Wenn wir nur die stationäre Lösung nach langer Zeit wünschen musz man in (25) das letzte Glied fortlassen, man bekommt dann also (24). Das letzte Glied rührte ja von den Anfangskonstanten her und ist eine partikulare Lösung der homogenen Gleichung. Mathematisch ist dasFortlassen dieses Gliedes nicht richtig, aber in den Anwendungen musz man dies immer so machen, weil in der Natur immer eine Dämpfung anwesend ist: diese ist hier so klein vorausgesetzt, dasz sie nicht in der Gleichung eintritt, aber nach langer Zeit musz sie berücksichtigt werden. Darauf beruht es, dasz die falsche

---

[1]) G. Boole, A Treatise on Differential Equations, 4. Auflage (1877), S. 396.

[2]) Cf. die Bemerkung bei (3, 20), (3, 21).

Anwendung (24) der Operatorenrechnung erfolgreich angewendet worden ist, wenn es sich um stationäre Lösungen handelte.

c. Schwingungsgleichung mit Dämpfung.

Ganz analog dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dx} + \omega_0^2 y = \varphi(x), \tag{26}$$

nach (5, 10):

$$p^2 y + 2\,\alpha\,py + \omega_0^2 y = p^2 y_0 + 2\,\alpha\,py_0 + py_1 + \varphi(x), \tag{27}$$

$$y = \frac{p^2 y_0 + 2\,\alpha\,py_0 + py_1 + \varphi(x)}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2} \tag{28}$$

Lösung der homogenen Gleichung.

Am einfachsten und ganz ohne Schwierigkeiten verfährt man nach (5, 15). Je nachdem die Wurzeln von:

$$p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2 = 0. \tag{29}$$

reell oder komplex sind gelangt man bekanntlich zu nichtperiodischen oder zu periodischen Lösungen.

Man kann auch sofort unsre Formeln anwenden:

Aperiodischer Fall: $\omega_0^2 < \alpha^2$.

Nach (4, 14), (4, 15):

$$y = \frac{y_0 m - 2\,\alpha y_0 - 1}{m - n}\, e^{-mx} + \frac{2\,\alpha y_0 - n y_0 + y_1}{m - n}\, e^{-nx}, \tag{30}$$

wenn $-m$ und $-n$ die Wurzeln der Gleichung (29) sind.

Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0^2 = \alpha^2$.

Nach (4, 17) und (4, 18):

$$y = e^{-\alpha x} + (\alpha y_0 - y_1)\,x\,e^{-\alpha x}. \tag{31}$$

Periodischer Fall: $\omega_0^2 > \alpha^2$.

Nach (4, 11) und (4, 12):

$$y = -\,e^{-\alpha x}\left[\frac{y_0\omega_0}{\omega}\sin(\omega x - \varphi) + \frac{2\,\alpha y_0 + y_1}{\omega}\sin \omega x\right]. \tag{32}$$

Man kann die Formeln leicht weiter umrechnen.

d. Nichthomogene Schwingungsgleichung mit Dämpfung.

Als Beispiel setzen wir wieder $F(x) = \sin \beta x$.

Den Lösungen des Falls c hat man dann folgendes hinzuzufügen:

$$(33)\quad \frac{1}{v(p)} \cdot F(x) = \frac{\sin \beta x}{p^2 + 2\varkappa p + \omega_0^2} = \frac{\beta p}{(p^2 + 2\varkappa p + \omega_0^2)(p^2 + \beta^2)} \cdot 1.$$

Man kann (5, 15) anwenden, dies ergibt keine Schwierigkeiten. Einfacher verfährt man folgenderweise. Wenn das Symbol $\mathfrak{J}$ bedeutet: Imaginarteil der Funktion, setze man

$$(34)\quad \frac{1}{v(p)} \cdot F(x) = \mathfrak{J}\left[\frac{e^{i\beta x}}{p^2 + 2\varkappa p + \omega_0^2}\right] = \mathfrak{J}\left[\frac{p}{(p^2 + 2\varkappa p + \omega_0^2)(p - i\beta)} \cdot 1\right].$$

Als Beispiel wollen wir aber hier die Berechnung ganz ohne komplexe Gröszen durchführen. Bruchzerlegung von (33) ergibt:

$$(35)\qquad \frac{\varphi(p)}{v(p)} = \frac{Cp^2 + Dp}{p^2 + 2\varkappa p + \omega_0^2} + \frac{Ap^2 + Bp}{p^2 + \beta^2}.$$

Der erste Teil gibt gar nichts Neues, es ist eine Lösung, die ganz dieselben Eigenschaften hat, wie die Lösung des homogenen Problems, sie enthält auch den Faktor $e^{-\varkappa x}$. Wir verzichten darum auf eine Betrachtung dieses Gliedes, und wenden uns vielmehr dem stationären Teil der Lösung zu.

Gleichsetzung der Koeffizienten ergibt:

$$A = -\frac{2\varkappa\beta}{(\omega_0^2 - \beta^2)^2 + 4\varkappa^2\beta^2}, \qquad B = \frac{\beta(\omega_0^2 - \beta^2)}{(\omega_0^2 - \beta^2)^2 + 4\varkappa^2\beta^2},$$

daher wird das Ergebnis nach (4, 3), (4, 8):

$$y_s = A \cos \beta x + \frac{B}{\beta} \sin \beta x = \frac{\sin(\beta x - \psi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)^2 + 4\varkappa^2\beta^2}},$$

worin

$$tg\,\psi = \frac{2\varkappa\beta}{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Wir meinen mit y_s: stationärer Teil der Lösung.

Der Wichtigkeit des Beispiels wegen haben wir es eingehend erörtert, obwohl die Vorteile der Operatorenrechnung nicht am klarsten darin hervortreten.

§ 7. Anwendung auf simultane lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ein groszer Teil der Anwendungen der Operatorenrechnung bezieht sich bis jetzt auf die Gleichungen zweiter Ordnung der Elektrotechnik und Mechanik.

Das Verfahren ist so einfach, dasz eine Besprechung sich kaum lohnt.

Die n simultanen Gleichungen:

$$\left(\alpha_{11}\frac{d^2y_1}{dx^2}+\beta_{11}\frac{dy_1}{dx}+\gamma_{11}y_1\right)+\ldots+$$
$$+\left(\alpha_{1n}\frac{d^2y_n}{dx^2}+\beta_{1n}\frac{dy_n}{dx}+\gamma_{1n}y_n\right)=F_1(x),$$

. . . .

$$\left(\alpha_{n1}\frac{d^2y_1}{dx^2}+\beta_{n1}\frac{dy_1}{dx}+\gamma_{n1}y_1\right)+\ldots+$$
$$+\left(\alpha_{nn}\frac{d^2y_n}{dx^2}+\beta_{nn}\frac{dy_n}{dx}+\gamma_{nn}y_n\right)=F_n(x)$$

schreiben sich nach (5, 9) [1]):

$$(\alpha_{11}p^2+\beta_{11}p+\gamma_{11})y_1+\ldots+(\alpha_{1n}p^2+\beta_{1n}p+\gamma_{nn})y_n=$$
$$=F_1(x)+G_1(p)\,.\,1,$$

. . . .

$$(\alpha_{n1}p^2+\beta_{n1}p+\gamma_{n1})\gamma_1+\ldots+(\alpha_{nn}p^2+\beta_{nn}+p\,\gamma_{nn})y_n=$$
$$=F_n(x)+G_n(p)\,.\,1.$$

Die Funktionen $G_k(p)$ enthalten die Anfangsbedingungen; diese sind in vielen Fällen 0.

Im Allgemeinen setzt man analog (5, 11) [2]):

$$F_k(x)+\sigma_k(p)\,.\,1=\varphi_k(p)\,.\,1.$$

[1]) Es wird wohl überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dasz in § 5 das Symbol y_k eine andere Bedeutung hat (Anfangskonstanten) als in diesem Paragraphen (die verschiedenen gefragten Funktionen).

[2]) Wie in § 5, Bemerkung 6 kann auch hier in einigen Fällen $F(x)$ nicht leicht in eine Operatorenfunktion übersetzt werden. Man schreibe dann $\varphi_k(p, x)$ statt $\varphi_k(p)$.

Die Gleichungen kann man schreiben:

$$a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n = \varphi_1 \cdot 1\,,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n = \varphi_n \cdot 1$$

mit:

$$a_{kl} = \alpha_{kl} p^2 + \beta_{kl} p + \gamma_{kl}.$$

Die Lösung ist:

$$y_k = \frac{\sum\limits_1 A_{ik} \varphi_i}{A_n}$$

wenn A die Determinante ist der α_{kl} und A_{kl} die algebraischen Unterdeterminanten von A.

Die einzigen Komplikationen, die, wie im gewöhnlichen algebraischen Fall, auftreten können, kennt man aus der Determinantentheorie. Wir verzichten darum auf Erörterung dieser Spezialfälle. Beispiele folgen in § 9: wir wollen erst die „Einheitsfunktion" definieren.

§ 8. Die „Einheitsfunktion" $H(x)$, die δ-Funktion und ein Carsonsches Integral.

Wir schlieszen uns mehr oder weniger bekannten Symbolen an und schreiben als Definition der „Einheitsfunktion" $H(x)$ [1]):

$$\text{(1)} \qquad H(x) = 0 \text{ wenn } x < 0, \qquad H(x) = 1 \text{ wenn } x > 0.$$

Der Wert dieser Funktion im Punkte $x = 0$ hat für das Folgende keine Wichtigkeit, es würde vielleicht bequem sein zu setzen: $H(0) = 1$, aber der übliche analytische Ausdruck von $H(x)$ ergibt $H(0) = \frac{1}{2}$. In der Mathematik nennt man diese Funktion einen diskontinuierlichen Faktor. Diese Funktion ist wichtig in den physikalischen Anwendungen der Theorie. Wenn man z. B. zur Zeit $t = 0$ eine konstante Kraft K ansetzt, oder eine Sinuskraft $K \sin nt$,

[1]) Jeffreys, S. 20.

kann man diese in die Formeln einsetzen als $K \,.\, H(t)$, bez. $K \sin nt$. Man erreicht dann, dasz wenn $t < 0$, auch die abhängige Funktion $y(t)$ Null wird.

Einige Autoren arbeiten in der Operatorenrechnung nur mit dieser Einheitsfunktion, und sind dazu in einigen Fällen durch ihren Ausgangspunkt gezwungen [1]). Dieses ist aber eine nur in bestimmten Fällen notwendige Einschränkung der Gültigkeit der Operatorenrechnung.

δ-Funktion. Diese Funktion hat besonders durch Dirac [2]) eine sehr wichtige Anwendung in der Quantenmechanik gefunden.

Mit Dirac definieren wir diese Funktion folgenderweise: $\delta(x - a) = 0$ in jedem Punkt auszer a, und hat in a einen solchen Wert, dasz:

$$(2) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} dx\, f(x)\, \delta\, (x - a) = f(a). \qquad \begin{array}{l}(\alpha \text{ beliebig} < a,\\ \beta \text{ beliebig} > a).\end{array}$$

Physikalisch bedeutet dieses Integral einen Stosz im Augenblick $t = a$ (Impuls).

Jetzt können wir bemerken, das $\delta(x - 0)$ gerade die Eigenschaften besitzt, welche man dem Differentialquotienten von $H(x)$ zuschreiben müszte. Wir definieren also:

$$(3) \qquad \frac{d}{dx} H(x) = \delta(x - 0) = \delta(x).$$

Man kann auch weitere „Ableitungen" von $H(x)$ anwenden. So wird z. B. $\delta'(x)$ eine Funktion sein, die in jedem Punkte auszer $x = 0$ Null ist, aber mit:

$$(3') \qquad \begin{array}{l}\delta'(\varepsilon) \to -\infty, \\ \delta'(-\varepsilon) \to +\infty, \text{ mit } \varepsilon \text{ positiv} \to 0.\end{array}$$

Wenn man die Diskontinuität nicht im Punkte $x = 0$ aber im Punkte $x = a$ braucht, so setze man $H(x - a)$ statt $H(x)$.

Siehe auch § 11, Formel (11, 23), (11, 24').

Wir weisen auf den Zusammenhang dieser Betrachtungen, be-

---

[1]) Letzteres ist in der Carson—van der Polschen Methode der Fall.

[2]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 113 (1927) 621.

sonders von $H(x-a)$, mit von Stieltjes benützten Funktionen [1]).

Analytischer Ausdruck von $H(x)$.

Ein bekannter analytischer Ausdruck der Einheitsfunktion ist der Cauchysche diskontinuierliche Faktor [2]):

$$(4) \qquad H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} du \frac{e^{xu}}{u}. \qquad (a > 0).$$

Wenn $x > 0$ kann man nach dem Jordanschen Lemma [3]) den Integrationsweg um den Pol $u = 0$ schlieszen mit einem Halbkreis im zweiten und dritten Quadrant: dieses Halbkreisintegral ergibt dann Null, der nach dem Residuensatz geforderte Wert 1 kommt also ganz auf Rechnung unsres Ausdrucks.

Wenn $x = 0$ ist der Wert dieses Halbkreisintegrales (mit seinem Faktor) $\frac{1}{2}$, unsrer Ausdruck hat also den Wert $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Wenn $x < 0$ kann man den Integrationsweg schlieszen mit einem Halbkreis im ersten und vierten Quadrant, das Halbkreisintegral hat den Wert Null; der Integrationsweg umfaszt keine Pole, der Wert unsres Integrales ist also Null.

Die Beziehung zwischen diesem Integral und den Integraldarstellungen der Operatorenrechnungen erörtern wir in II § 2 [4]).

Unsre Operatoren können immer auf die Funktion $H(x)$ anstatt auf 1 ausgeübt werden. Dan werden alle Funktionen im Bereiche $x < 0$ identisch Null.

Carsonsches Integral. In der Operatorenrechnung wendet man oft folgendes Verfahren an:

Wenn man (im Fall einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung) die Anfangskonstanten $y_0 = y_1 = \ldots\ldots = y_{n-1} = 0$ nehmen kann, hat die Differentialgleichung [5]):

---

[1]) Stieltjes, Oeuvres II, S. 469.

[2]) Whittaker and Watson, Modern Analysis, 4. Ed., S. 123.

[3]) Whittaker and Watson, Modern Analysis, 4. Ed., S. 115. Wir folgen hier: Jeffreys, S. 25.

[4]) Mit gewissen Voraussetzungen kan man auch analytische Ausdrücke für die Ableitungen von $H(x)$ darstellen: s. Schouten, Diss. S. 52.

[5]) Wir schreiben t statt x as Variabele weil in den Anwendungen dieser Methode (besonders elektrotechnischen) die Variabele immer die Zeit ist.

$$(5) \quad (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots . + a_0)\, y = H(t) \qquad \left(p = \frac{d}{dt}\right)$$

nach (5, 10) die Lösung:

$$(6) \quad y = \frac{1}{a_n p^n + \ldots + a_0} H(t) = A(t)\, H(t).$$

Satz. Die Lösung der Gleichung

$$(7) \quad (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0)\, y = F(t)$$

ist dann:

$$(8) \quad y = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t d\tau\, A(t-\tau)\, F(\tau) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t d\tau\, A(\tau)\, F(t-\tau).$$

Dieses ist ein Carsonsches Integral. Dieses Integral, das auf viele Weisen bewiesen wurde, ist von Carson[1]) in diesem Gebiet gefunden. Er scheint schon von Duhamel gebraucht zu sein.

Beweis[2]):

Wenn in (5) die rechte Seite (also die angesetzte Kraft, Störung, u.s.w.) nicht $H(t)$ wäre, sondern $F(0)\, H(t)$ (also konstant), würde die Lösung sein:

$$(9) \quad y = F(0)\, A(t).$$

Weil die Gleichungen linear sind, können die Lösungen superponiert werden, also musz, wenn $F(t)$ sich zur Zeit τ ändert um $dF = \frac{dF}{d\tau}\, d\tau$, zu (9) addiert werden:

$$(10) \quad d\tau \frac{dF}{d\tau} A(t-\tau),$$

also wird die vollständige Lösung:

$$y = \varphi(0)\, A(t) + \int\limits_0^t d\tau \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} A(t-\tau).$$

---

[1]) Carson, S. 15.

[2]) Wir wählen den Carsonschen Beweis, weil dieser sehr durchsichtig ist.

Man kann dies auch schreiben:

$$y = \frac{d}{dt}\int_0^t d\tau\,\varphi(\tau)\,A(t-\tau).$$

Diese Formeln haben die Beschaffenheit eines „produit de compositions" [1]), also kann man auch noch setzen:

$$y = \frac{d}{dt}\int_0^t d\tau\,\varphi(t-\tau)\,A(\tau)$$

wovon man sich übrigens auch leicht überzeugen kann, ebenso noch von:

$$y = \varphi(0)\,A(t) + \int_0^t d\tau\,\varphi'(t-\tau)\,A(\tau) = A(0)\varphi(t) +$$

$$+ \int_0^t d\tau\,A'(\tau)\varphi(t-\tau) = A(0)\varphi(t) + \int_0^t A'(t-\tau)\varphi(\tau) \;{}^{2}).$$

Es zeigt sich, dasz alle hier in Betracht kommenden Werte von A und φ sich auf positive Werte des Argumentes beziehen. Nachträglich finden wir also, dasz man die Berechnung von A nicht zu machen braucht mit der Funktion $H(t)$, sondern, dasz man hier ganz dasselbe erhält, wenn man 1 statt $H(t)$ setzt.

Das Obige ergibt also eine neue Methode zum Auffinden der Lösung. Sie ist nur brauchbar wenn die Anfangsbedingungen alle 0 sind und wird vorzugsweise angewendet wenn man sich mit elektrischen Leitungsproblemen beschäftigt, auch im Fall simultaner Gleichungen.

§ 9. Beispiele der Elektrizitätslehre.

Im Zeitpunkt $t = 0$ schlieszt man den Strom in einem Stromkreise mit Ohmschem Widerstand R, Kapazität C, Selbstinduktion L. Die Integro-Differentialgleichung für den Strom I ist

$$\frac{1}{C}\int dt\,I + RI + L\frac{dI}{dt} = E$$

---

[1]) Siehe z. B. § 11, 3 und Lévy, Bull. d. Sciences math. (2) 50 (1926) 173.

[2]) Der Strich bedeutet die Ableitung der Funktion nach ihrem Argumente.

E ist die plötzlich auferlegte elektromotorische Kraft, z. B. eine konstante Grösze; der Anfangswert des Stromes ist selbstverständlich 0.

Man bekommt also:

$$I = \frac{pE}{\frac{1}{C} + pR + p^2L} H(t).$$

Wir betrachten einige Einzelfälle.

1. $E =$ konstant, $L = 0$, $C = \infty$.

$$I = \frac{E}{R} H(t)$$

also selbstverständlich das Ohmsche Gesetz.

2. $E =$ konstant, $L = 0$.

$$I = \frac{E}{R} \frac{p}{p + \frac{1}{CR}} H(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}} H(t).$$

3. $E =$ konstant, $L = 0$, $R = 0$.

$$I = p\,EC\,H(t),$$

also ist das Ergebnis nach (8, 3):

$$I = EC\,\delta(t).$$

4. Allgemeiner Fall mit E konstant.

$$I = \frac{Ep}{p^2L + pR + \frac{1}{C}} H(t) = \frac{Ep}{L\left(p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{CL}\right)} H(t).$$

Man musz hier 3 Fälle unterscheiden. Wenn man setzt

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

hat man, wenn man weiter noch die bei den zu nennenden Formeln angewendete Bezeichnungen benützt:

a. $\omega_0^2 > \alpha^2$ periodischer Fall nach (4, 12):

$$I = \frac{E}{L} \frac{e^{-\alpha t}}{\omega} \sin \omega t H(t).$$

b. $\omega_0^2 < \alpha^2$ aperiodischer Fall nach (4, 15):

$$I = \frac{1}{n-m}\left[me^{-mt} - ne^{-nt}\right] H(t).$$

c. $\omega_0^2 = \alpha^2$ periodischer Grenzfall nach (3, 29):

$$I = te^{-\alpha t} H(t).$$

5. In jedem Fall kann man 3 Methoden benützen [1]. Am einfachsten vergleicht man die 3 Methoden mit Hilfe eines Beispieles: $L\frac{dI}{dt} + RI = E\sin\nu t$; $y(0) = 0$; E angesetzt am Zeitpunkt $t = 0$.

a. die Operatorenmethode wie oben völlig durchgeführt:

$$I = \frac{1}{Lp+R} \cdot E\frac{p}{p^2+\nu^2} H(t).$$

$$I = \left(\frac{E}{L}\frac{\varkappa}{p+A} + \frac{E}{L}\frac{\beta p+\gamma}{p^2+\nu^2}\right) H(t),$$

wenn $A = \frac{R}{L}$, $-\varkappa = \beta = \frac{A}{A^2+\nu^2}$, $\gamma = \frac{\nu^2}{A^2+\nu^2}$;

nach (3, 10), (4, 3), (4, 4):

$$I = \left(\frac{E}{L}\varkappa e^{-At} + \frac{E}{L}\beta\sin\nu t + \frac{E}{L}\gamma\cos\nu t\right) H(t).$$

b. $\sin\nu t$ nicht als Operator transformieren (vergl. § 5, 6). Nach (10, 2) [2]:

$$I = \frac{E}{L}\frac{1}{p+A}\sin\nu t = \frac{E}{L}e^{-At}\int_0^t d\tau\, e^{-A\tau}\sin\nu t.$$

c. Mit Anwendung des Carsonschen Integrales (8, 8). Man löst erst die zur Gleichung (8, 5) äquivalente Gleichung

$$L\frac{dI}{dt} + RI = EH(t)$$

wo I für das y der Gleichung (8, 5) steht und erhält, ähnlich (8, 6):

---

[1]) Auszer diesen drei Methoden gibt es noch die Methode der Reihenentwicklung, § 12.

[2]) Vollständigkeitshalber erörtern wir schon hier diese Methode, obgleich wir die Formel (10, 2) erst im folgenden Paragraphen finden.

$$I = \frac{E}{L} \frac{1}{p+A} H(t) = \frac{E}{L} e^{-At} H(t).$$

Dann, mit Anwendung von (8, 8):

$$I = \frac{E}{L} \frac{d}{dt} \int_0^t d\tau \, e^{-A\tau} \sin \nu (t - \tau).$$

Selbstverständlich sind die drei Lösungen äquivalent, wie ganz leichte Umrechnungen erweisen.

6. Wenn man mehrere induktiv oder leitend gekoppelte Stromkreise betrachtet, bekommt man *simultane Gleichungen.*

Wir geben ein einfaches Beispiel:

Der Stromkreis I hat einen Ohmschen Widerstand R_1, eine Selbstinduktion L_1, elektromotorische Kraft $E \sin \nu t$, Stromstärke I_1; der Stromkreis II ist daran induktiv gekoppelt, Ohmscher Widerstand R_2, Selbstinduktion L_2, keine elektromotorische Kraft, Stromstärke I_2, Koeffizient der induktiven Koppelung L_{12}.

Dies ergibt die folgenden simultanen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(L_1 p + R_1) I_1 + L_{12} p I_2 = \varepsilon \sin \nu t \, H(t) && \text{(Stromkreis I)} \\ &L_{12} p I_1 + (L_2 p + R_2) I_2 = 0, && \text{(Stromkreis II)} \end{aligned}$$

wenn der Strom am Zeitpunkte $t = 0$ eingeschaltet ist ($y_0 = 0$).

Man löst I_1 und I_2 und verfährt dann nach einer der drei oben gezeichneten Methoden a, b oder c.

7. Weitere Beispiele dieser Art findet man in den vielen Büchern, die diesen Teil der Operatorenrechnung betrachten; die von uns gegebenen Erweiterungen sind an unsren Beispielen genügend erläutert.

Man siehe z. B. Berg (Deutsch von Gramisch u. Tropper, Verlag R. Oldenbourg, München) „Rechnung mit Operatoren". Dieses Buch betrachtet auch die oben erwähnten Methoden a, b und c.

§ 10. Erweiterung der Theorie.

Mit Hinsicht auf die Lösung von Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten ist es wichtig Funktionen von x und p ganz in die p-Sprache zu übersetzen. Funktionen, die nur p, nicht x enthalten folgen ja den Rechenregeln der gewöhnlichen Algebra, gerade wie Funktionen die nur x, aber kein p enthalten.

In diesem Paragraphen erörtern wir, wie man solche Funktionen von p und x ganz in die p-Sprache übersetzen kann.

Die Uebersetzung von $y(x)$ in die p-Sprache sei $\varphi(p)\,.\,1$:

$$(1)\qquad y(x)=\varphi(p)\,.\,1.$$

Setzen wir in (2, 15) $F(p)=\varphi(p)$ und $y=1$, so erhalten wir:

$$(2)\qquad \varphi x 1 - x\varphi 1 = \varphi' 1,$$

$$(3)\qquad x\varphi 1 = -\frac{d\varphi}{dp}1+\varphi x = -\frac{d\varphi}{dp}1+\varphi\frac{1}{p},$$

denn nach (3, 3) ist:

$$(4)\qquad p^{-1}\,1=x.$$

Man kann (4) schreiben:

$$x\varphi\,1=p\left(-\frac{1}{p}\,\frac{d\varphi}{dp}+\varphi\,\frac{1}{p^2}\right).\,1,$$

$$x\,\varphi\,1=-p\frac{d}{dp}\,\frac{\varphi}{p}\,.\,1,$$

oder nach (1):

Satz. Wenn $y(x)=\varphi\,(p)\,.\,1$, *ist:*

$$(5)\qquad xy(x)=-p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\varphi\,(p)\,.\,1.$$

Diesen Satz betrachten wir als Grundsatz der Operatorenrechnung. Er ist die Inversion der Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\,y(x)=p\varphi\,(p)\,.\,1.$$

Erweiterungen der Formel (5):

Uebersetzung von x^2y:

$$x^2y=x(xy),$$

$$(6)\qquad x^2y=-p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\left(-p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\varphi\right)1=p\frac{d^2}{dp^2}\,\frac{1}{p}\varphi\,.\,1.$$

Entsprechend:

$$(7)\qquad x^n y = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n \frac{1}{p}\varphi\,.\,1 = \left(-p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}\right)^n \varphi\,.\,1,$$

und daher:

Hauptsatz[1]. *Wenn* $y(x) = \varphi(p)\,.\,1$, *gilt:*

$$(8)\qquad F\left(\frac{d}{dx}, x\right) y(x) = F\left(p, -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}\right)\varphi(p)\,.\,1 =$$

$$= pF\left(p, -\frac{d}{dp}\right)\frac{1}{p}\varphi(p)\,.\,1\,,$$

insofern F *in* x *ein Polynom ist.*

Negative Potenzen von x untersuchen wir später, sie geben Anlasz zu Integralen in p. Siehe (15, 11).

Wenn $y = \varphi = 1$ wird (8):

$$(8')\qquad F\left(\frac{d}{dx}, x\right) = F\left(p, -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}\right).\,1 = pF\left(p, -\frac{d}{dp}\right)\frac{1}{p}\,.\,1.$$

Ein Sonderfall von (8′) ist ein van der Polsches[2] Theorem: Wenn $h_1(x) = \varphi_1(p)$ und $h_2(x) = \varphi_2(p)$ gilt:

$$(9)\qquad h_1(x)\,h_2(x) = ph_1\left(-\frac{d}{dp}\right)\frac{\varphi_2}{p}\,.\,1 = ph_2\left(-\frac{d}{dp}\right)\frac{\varphi_1}{p}\,.\,1.$$

Weiter findet man:

$$(10)\qquad xpy = -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}p\varphi = -p\frac{d}{dp}\varphi,$$

$$(11)\qquad x^2py = -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}\left(-p\frac{d}{dp}\varphi\right) = +p\frac{d^2}{dp^2}\varphi,$$

$$(12)\qquad x^n py = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n\varphi,$$

$$(13)\qquad xp^2y = -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}p^2\varphi = -p\frac{d}{dp}p\varphi,$$

$$(14)\qquad xp^ny = p\left(-\frac{d}{dp}\right)p^n\varphi,$$

---

[1] Van der Pol IV, Satz (7). Weil van der Pol die Carsonsche Methode folgt, beweist er seine Theoreme nur für den Fall x = rell und > 0. Auch Lowry hat entsprechende Resultate erreicht, mit Hilfe der Bromwichschen Methode, also mit gröszerem Gültigkeitsbereich.

[2] van der Pol II, Satz (16).

und noch allgemeiner:

$$x^n p^m y = p\left(-\frac{p}{dp}\right)^n p^{m-1}\varphi. \tag{15}$$

Es sind alle Sonderfälle von (8) aber wichtig bei der Lösung einer Differentialgleichung. Bei der Lösung von Differentialgleichungen kann man aber nicht ohne Weiteres diese Formeln anwenden, denn wir müssen der Möglichkeit des Verschwindens der Integrationskonstanten Rechnung tragen. Wir haben schon in (1, 15) und § 5 (5, 7) eine Methode entwickelt, diese beizubehalten. Wir benützen hier das da erhaltene Schema (5, 7) und finden z. B.:

$$xp^2y = -p\frac{d}{dp}(p\varphi - py_0) = -p\frac{d}{dp}p\varphi + py_0, \tag{16}$$

weil y_0 eine Konstante ist.

Ganz analog berechnet man die anderen Fälle. Das Ergebnis folgt in einem Schema (17) in der Formelnsammlung im Anhang.

V a n d e r P o l hat dieses Schema für $x > 0$ abgeleitet [1]).

Die ganz allgemeine Formel ist, für jedes x, aber $n \geqq 0$:

$$\begin{aligned} x^n\frac{d^m y}{dx^m} &= p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n p^{m-1}\varphi + \\ &+ (-1)^{n+1}\Big\|(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)p^{m-n}y(0) + \\ &\quad + (m-2)(m-3)\dots(m-n)p^{m-n-1}y'(0) + \\ &\quad + (m-3)\dots(m-n-1)p^{m-n-2}y''(0) + \dots\Big\|. \end{aligned} \tag{18}$$

Mit den doppelten Klammern bezeichnen wir, dasz die darin verfaszte Reihe nur fortgesetzt werden darf, bis der Exponent von p gleich 1 ist.

Der Fall $n < 0$ is betrachtet in (15, 10) ff.

Diese Formel genügt zur Lösung der linearen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten. Die wichtigsten Spezialfälle findet man im Schema (17) im Anhang.

§ 11. Theoreme und Bemerkungen.

1. Oft musz man folgende Formel berechnen:

$$\frac{1}{p-\alpha}F(x). \tag{1}$$

[1]) van der Pol II, S. 877.

Berechnung:

$$(2)\qquad \frac{1}{p-\alpha}F(x)=\frac{1}{p-\alpha}e^{\alpha x}e^{-\alpha x}\varphi(x)=e^{\alpha x}\frac{1}{p}e^{-\alpha x}F(x).$$

$$\frac{1}{p-\alpha}F(x)=e^{\alpha x}\int\limits_0^x dx\, e^{-\alpha x}F(x).$$

Eine ähnliche Formel ist:

$$(3)\qquad \frac{p}{p-\alpha}F(x)=\frac{p}{p-\alpha}e^{\alpha x}e^{-\alpha x}F(x)=e^{\alpha x}(p+\alpha)\int\limits_0^x dx\, e^{-\alpha x}F(x).$$

$$\frac{p}{p-\alpha}F(x)=F(x)+\alpha e^{\alpha x}\int\limits_0^x dx\, e^{-\alpha x}F(x).$$

Man kann (3) auch erhalten durch Differentiation von (2). Man vergleiche noch (5, 18). Wir bemerken noch, dasz einsetzen von $F(x)=1$ in (2), bez. (3) die bekannten Relationen

$$(4)\qquad \frac{1}{p-\alpha}.\,1=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha},$$

bez.

$$(5)\qquad \frac{p}{p-\alpha}.\,1=e^{\alpha x}$$

ergibt.

2. Man beachte den Unterschied zwischen zweierlei „Uebersetzungen" einer Funktion von der x-Sprache in die p-Sprache:

a. die wirkliche Umsetzung einer Funktion von der x-Sprache in die p-Sprache.

b. die Ausübung der in a. gefundenen p-Funktion auf 1.

Beispiele:

Uebersetzung von x:

allgemeine Uebersetzung (a), nach (10, 5):

$$(6)\qquad x\,\ldots\ldots=-p\,\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\,\ldots\ldots$$

und speziell (b) im Einklang mit (3, 3):

$$(7)\qquad x=-p\,\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p^n}.\,1=\frac{1}{p}.\,1.$$

Uebersetzung von x^n:

a. nach (10, 7):

$$x^n \ldots . = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n \frac{1}{p} \ldots . .,$$

b. im Einklang mit (3, 3):

$$x^n = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n \frac{1}{p} . 1 = \frac{n!}{dp} . 1. \tag{8}$$

So gibt die Formel (3):

a. $$\left(1 + \varkappa e^{\varkappa x}\int_0^x dx\, e^{-\varkappa x}\right) . \ . . = \frac{p}{p-\varkappa} \ldots ,$$

aber die Formel (5):

b. $$e^{\varkappa x} = \frac{p}{p-\varkappa} . 1.$$

Entsprechendes kann man zu (2) und (4) bemerken.

Nur die allgemeinen Formeln (a) genügen z. B. folgender Eigenschaft:

Wenn

$$y_1(x) \ldots = \varphi_1(p) \ldots \quad \text{und} \quad y_2(x) \ldots = \varphi_2(p) \ldots$$

so ist:

$$y_1(x)\, y_2(x) \ldots = \varphi_1(p)\, \varphi_2(p) \ldots \text{[1]} \tag{9}$$

3. Das Lévysche Theorem.

Der wichtigste Satz der Lévyschen Abhandlung [2]) ist folgender:

$$p^{-n} y(x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, y(t_n) = \int_0^x du \frac{u^{n-1}}{\Gamma(n)} y(x-u) =$$

$$= \int_0^x du \frac{(x-u)^{n-1}}{\Gamma(n)} y(u). \tag{10}$$

---

[1]) In unsrer Bezeichnung ist es ganz selbstverständlich, dasz solche Eigenschaften nur bei Formeln (a), nicht bei Formeln (b) gültig sind, in der Literatur wird aber oft der 1 in den Formeln (b) fortgelassen, dann ist es schwer, die Fälle (a) und (b) nicht zu verwechseln.

[2]) P. Lévy, Bull. d. Sc. math. (2) 50 (1926) 182. Der Lévysche Operator I ist unsrer Operator p^{-1}.

Die rechte Seite nennt man „produit de composition"[1]) der Funktionen $x^{n-1}/\Gamma(n)$ und $y(x)$. Mit den Eigenschaften der „produits de composition" erhält Lévy einige Sätze der Operatorenrechnung. Das Lévysche Verfahren ist in der Praxis nicht immer geeignet. Wir verweisen auf seine Abhandlung.

Die Lévysche Methode hat wie die Methoden des zweiten Kapitels den Vorteil, dasz die Definition auch noch Sinn hat, wenn n keine ganze Zahl ist. Die Methode hat eine grosze Aehnlichkeit mit einer von Riemann in einer Jugendabhandlung vorgeschlagenen Erweiterung des Integral- und Differentialquotientbegriffes[2]).

4. Nach (3, 13) ist:

$$p^{-n}e^{-\alpha x}F(x) = e^{-\alpha x}\frac{1}{(p-\alpha)^n}F(x), \tag{11}$$

mit (10) findet man dann:

(12) Satz: $$\frac{1}{(p-\alpha)^n}F(x) = e^{\alpha x}\int_0^x dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{-\alpha t_n} F(t) =$$
$$= e^{\alpha x}\int_0^x dt\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}F(t).$$

5. Theorem[3]):

Wenn $y(x) = \varphi(p) \,.\, 1$, so ist

$$y(sx) = \varphi\left(\frac{p}{s}\right).\, 1. \qquad (s = \text{Konstante}) \tag{13}$$

Dieses zeigt man mit (10, 8) wenn $y(x)$ eine positive Potenzenreihe ist. Das Theorem ist aber auch gültig wenn negative Potenzen von x eintreten[4]).

6. Nach (10, 8) erhält man augenscheinlich:

---

[1]) Diese sind von Volterra am ersten betrachtet.

[2]) B. Riemann, Math. Werke, 2. Aufl., S. 353.

[3]) Carson, S. 46.

[4]) In diesem Fall wende man (15, 11) ff. an.

(14) $$\left(-p\frac{d}{dp}\right)^n \varphi(p)\,.\,1 = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n y(x).$$

ein van der Polsches Theorem [1]).

7. Carson und van der Pol benützen sehr oft die Relation:

(15) $$\frac{1}{p}\varphi_1(p)\varphi_2(p)\,.\,1 = \int_0^x du\, y_1(u) y_2(x-u) = \int_0^x du\, y_2(u) y_1(x-u),$$

die in ihrem Fall ein Borelsches Theorem ist [2]). Auch mit unsren Methoden ist dieses Theorem beweisbar, wenigstens wenn eine der Funktionen y als eine Reihe positiver Potenzen schreibbar ist. Wir setzen:

$$y_1(x) = \Sigma\, \varkappa_k x^k$$

also:

$$\int_0^x y_1(u)\, y_2(x-u) = \int_0^x du\, \Sigma\, a_k u^k y_2(x-u)$$

Nach (5, 3):

$$y_1(x) = \Sigma\, \varkappa_k x^k = \Sigma\, \varkappa_k k!\, p^{-k} 1 = \Sigma\, \beta_k p^{-k}\,.\,1 = \varphi_1(p)\,.\,1.$$

$$\int_0^x du\, y_1(u)\, y_2(x-u) = \int_0^x du\, \Sigma\, \beta_k \frac{u^k}{k!} y_2(x-u)$$

und weiter nach (10):

$$= \Sigma\, \beta_k p^{-k-1} y_2(x) = p^{-1}\varphi_1(p)\varphi_2(p)\,.\,1.$$

8. Die Funktion $e^{\varkappa p}$.

Wir definieren diese Funktion folgenderweise:

(16) $$e^{\varkappa p} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varkappa p}{n}\right)^n.$$

---

[1]) van der Pol II, Satz (11).

[2]) Carson, S. 41. Man erhält leicht den Beweis mit E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, 1. Aufl. (1901), S. 104 ff. Auch mit Lévyschen „produits de compositions" derivierbar.

Demnach:

$$e^{\varkappa p} . 1 = 1. \tag{17}$$

Man überzeugt sich leicht, dasz:

$$\frac{d}{dp} e^{\varkappa p} = \varkappa e^{\varkappa p}. \tag{18}$$

Wir wenden dieses im folgenden an: Wenn $y(x) = \varphi(p) . 1$, gibt es nach (10, 5):

$$x e^{\varkappa p} y(x) = -p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} e^{\varkappa p} \varphi(p) . 1 =$$

$$= p e^{\varkappa p} \left(\frac{d}{dp} \frac{1}{p} \varphi(p) \right) . 1 - p \left(\frac{d}{dp} e^{\varkappa p} \right) . 1 \frac{1}{p} \varphi(p) . 1 =$$

$$= e^{\varkappa p} x\, y(x) - \varkappa e^{\varkappa p} y(x) = e^{\varkappa p} (x - \varkappa)\, y(x).$$

Man kann dieses Resultat ganz analog erweitern zu höheren Potenzen von x, und erhält:

$$x^n e^{\varkappa p} y(x) = e^{\varkappa p} (x - \varkappa)^n y(x).$$

Dieses Ergebnis gilt dann auch für jedes Polynom $f(x)$. Angewendet auf $f(x + \alpha)$ erhält man:

Eigenschaft:

$$e^{\varkappa p} f(x)\, y(x) = f(x + \alpha) e^{\varkappa p} y(x), \tag{19}$$

und speziell, nach (17):

$$e^{\varkappa p} f(x) = f(x + \alpha). \tag{20}$$

(19) ist ein „Durchschiebungstheorem", vergl. (3, 14).

Man kann (20) vergleichen mit (3, 16).

Das Ergebnis (20) ist eigentlich das Taylorsche Theorem:

$$f(x + \alpha) = f(x) + \frac{\varkappa p}{1!} f(x) + \ldots + \frac{\varkappa p^{n+n-1}}{(n-1)!} f(x) + \tag{21}$$

$$+ \frac{f^n (x + \Theta\alpha)}{n!} \varkappa^n. \quad \text{(Restglied nach Lagrange).}$$

Wenn wir die Taylorsche Reihe der Funktion $e^{\varkappa p}$ ansetzen erhalten wir als Restglied (nach L a g r a n g e):

$$(22)\qquad \frac{e^{\Theta\alpha p}}{n!}\,\alpha^n p^n\, f(x) = \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}\,(x+\Theta\alpha).$$

Diese Glieder sind äquivalent nach (20).

Unser Beweis gilt nicht für diskontinuierliche Funktionen. Mit dem Bromwichschen Integrale [1]) beweist man aber leicht, dasz auch gilt:

$$(23)\qquad e^{-\alpha p} H(x) = H(x-\alpha).$$

$H(x-\alpha)$ ist 0 von $-\infty$ bis α, aber 1 von α bis $+\infty$. Dieses ergibt wichtige Anwendungen: z. B. eine Kraft $K(t)$, die nur wirkt von $t=a$ bis $t=b$ kann man folgenderweise ansetzen:

$$(24)\qquad K(t)\,(e^{-ap} - e^{-bp})\,H(t).$$

Auf derselben Weise erhält man als „Impulsfunktion" (cf. § 8):

$$(24')\qquad \delta(x-a) = e^{-\alpha p}\delta(x).$$

9. Die Funktion $e^{\alpha p}$ ist nach (20) wichtig im Gebiet der Differenzenrechnung. Beispiel:

Den Ausdruck

$$(25)\qquad \Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$$

kann man nach (20) schreiben:

$$(26)\qquad \Delta y(x) = (e^p - 1)y.$$

Dieses ergibt einfach die bekannte Lösung der Frage $y(x)$ zu lösen aus $\Delta\, y(x) = F(x)$. Man verfahrt folgenderweise:

$$(27)\qquad (e^p - 1)y = F(x),$$

daher:

$$(28)\quad y = \frac{1}{e^p - 1}F(x) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!}p - \frac{B_2}{4!}p^3 + \ldots\right)F(x).$$

B_k sind die Bernouillischen Zahlen.

Diese bekannte Formel kann besonders einfach mit Operatoren berechnet werden, wenn $F(x)$ eine einfache Uebersetzung in die p-Sprache hat.

---

[1]) Siehe II, § 2.

§ 12. Reihenentwicklung in der p-Sprache.

Zur Charakterisierung der Operatorenreihen fangen wir mit einem Beispiel an. Die Funktion

(1) $$e^{\alpha x} = \frac{p}{p-\alpha} \cdot 1.$$

sei in eine Reihe zu entwickeln.

Man kann die Reihenentwicklung auf zwei Weisen vornehmen:

(2) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = \left(1 + \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha^2}{p^2} + \ldots\right) \cdot 1$$

und:

(3) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = -\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{p^3}{\alpha^3} + \ldots\right) \cdot 1$$

(2) ergibt das richtige Resultat:

(4) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{1!}\alpha x + \frac{1}{2!}\alpha^2 x^2 + \ldots = e^{\alpha x},$$

(3) dagegen ergibt scheinbar fehlerhaft:

(5) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = 0 + 0 \ldots$$

Man darf aber das Restglied nicht vernachlässigen:

Statt (2) musz man schreiben:

(6) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = \left(1 + \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha^2}{p^2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{p^n} + \frac{\alpha^{n+1}}{p^n} \cdot \frac{1}{p-\alpha}\right) \cdot 1.$$

Das Restglied ist nach (3, 26):

(7) $$\frac{\alpha^{n+1}}{p^n} \frac{1}{p-\alpha} \cdot 1 = e^{\alpha x} - \frac{1}{1!}\alpha x - \frac{1}{2!}\alpha^2 x^2 - \ldots - \frac{1}{n!}\alpha^n x^n.$$

Die Reihe (2) konvergiert also: das Restglied konvergiert mit wachsendem n gegen 0.

Statt (3) musz man schreiben:

(8) $$\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = -\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{p^n}{\alpha^n} + \frac{p^{n+1}}{\alpha^n(\alpha - p)}\right) \cdot 1$$

mit dem Restglied, nach (3, 23):

(9) $$\frac{p^{n+1}}{\varkappa^n(\varkappa - p)} \cdot 1 = -e^{\varkappa x}.$$

Die Reihe (3) (eigentlich (8)) ist also divergent, darum in der Praxis unbrauchbar.

Dieser Speziellfall erläutert folgende Regel:

Regel I. Reihenentwicklung einer Funktion $\varphi(p) \cdot 1$ *nur nach positiven Potenzen von* p *kann nie zu einem in der Praxis verwendbaren Resultat führen:* jedes Glied ergibt ja in der x-Sprache 0, der Rest kann also im allgemeinen nicht 0 werden.

Daher wendet die Operatorenrechnung in solchen Fällen Reihenentwicklung nach negativen Potenzen von p an.

Das ist die *zweite Heavisidesche Methode zur Lösung von Differentialgleichungen* [1]).

Das Verfahren ist folgendes:

Nach (5, 12) ist die Lösung einer Differentialgleichung als

(10) $$y = \frac{u(p)}{v(p)} \cdot 1.$$

zu schreiben.

Reihenentwicklungen in negativen Potenzen:

Es sei

(11) $$y = a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \ldots\ldots \text{ [2])}.$$

Die Lösung ist also nach (3, 3):

(12) $$y = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

Diese *zweite Heavisidesche Methode* findet man in der Literatur unter den Namen *„Power Series Solution"*.

Bemerkung. Weil p nur symbolische Bedeutung hat, hat es keinen Sinn, die Konvergenz einer Reihe in p zu untersuchen [3]), es kommt nur auf die Konvergenz der entsprechenden Reihe in x an, cf. die Untersuchung der Reihen (6) und (8).

---

[1]) Die erste Heavisidesche Methode war das „Expansion theorem" (5, 15).

[2]) In gewöhnlichen Fällen gibt es dann keine positive Potenzen von p, wenn diese wohl da sind ergeben sie doch 0 nach (3, 5).

[3]) In Methode II (Transformationstheorie, zweiter Teil dieser Abhandlung) würde diese Konvergenz wohl Sinn haben. Cf. Schouten.

Einfache Beispiele.

1. Man löse die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \quad y(0) = 1. \tag{13}$$

Nach (5, 2):

$$py + \alpha y = p\,1.$$

daher:

$$y = \frac{p}{p+\varkappa}\,.\,1 = \frac{1}{1+\frac{\varkappa}{p}}\,.\,1 = \left(1 - \frac{\varkappa}{p} + \frac{\varkappa^2}{p^2} - \frac{\varkappa^3}{p^3} + \ldots\right).\,1 = \tag{14}$$

$$= 1 - \frac{\varkappa x}{1\,!} + \frac{\varkappa^2 x^2}{2\,!} - \ldots = e^{-\varkappa x}$$ [3]).

2. Zu lösen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha.$$

Nach (5, 7):

$$p^2 y + \alpha^2 y = p\alpha,$$

daher:

$$y = \frac{\varkappa p}{p^2 + p^2} = \frac{\varkappa}{p}\,\frac{1}{1+\frac{\varkappa^2}{p^2}}\,.\,1 = \left(\frac{\varkappa}{p} - \frac{\varkappa^3}{p^3} + \frac{\varkappa^5}{p^5}\ldots\right).\,1 = \tag{15}$$

$$= \frac{\varkappa x}{1\,!} - \frac{\alpha^3 x^3}{3\,!} + \ldots = \sin \alpha x.$$

Bemerkung. Die „Power series solution" ist nützlich, wenn man die Lösung der Differentialgleichung verlangt in der Nähe von $x = 0$.

Beispiel (15) zeigt uns, wie einfach die sinus-Reihe in Operatoren ist, die Gleichungen (4, 1), (4, 2), (4, 4) ergeben die entsprechenden Reihen für sinh, cosh, cos.

---

[1]) Zur Festsetzung des Konvergenzbereiches müszte man das Restglied betrachten, wie in (7), auch in den folgenden Beispielen.

Als Beispiele erwähnen wir:

(16)
$$p \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{p}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{p}\,(1 - x^2 + x^4 - \ldots) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{2\,!}{p^2} + \frac{4\,!}{p^4} - \frac{6\,!}{p^6} + \ldots\right) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7 + \ldots$$

Entsprechend:

(17)
$$p \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x = \frac{1}{p}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\,!}{p^2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{4\,!}{p^4} + \ldots\right).\,1 = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Die Uebersetzung einiger Funktionen in die p-Sprache ist sehr merkwürdig:

$$\operatorname{arc\,cotg} p\,.\,1 = \operatorname{arc\,tg}\,\frac{1}{p}\,1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{p^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p^5} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{p^7} +\right.$$

$$\left. + \ldots\right).\,1 = \frac{x}{1\,!} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3\,!} + \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{5\,!} - \frac{1}{7}\,\frac{x^7}{7\,!} + \ldots = \int_0^x dx\,\frac{\sin x}{x},$$

also:

(18)
$$\operatorname{arc\,cotg} p\,.\,1 = Si(x).$$

Reihenentwicklung in positiven Potenzen von p.

Wir fanden in Regel I dieses Paragraphen, dasz diese Reihenentwicklung von $\varphi(p)\,.\,1$ nicht brauchbar ist. Man findet aber in den Handbüchern der Differentialgleichungen wohl solche Reihenentwicklungen im Falle einer Funktion $\varphi(p)\,F(x)$. Es handelt sich um die Lösung von nichthomogenen Differentialgleichungen. Wir haben diese Methode schon angegeben in (5, 18) und (5, 19).

Wir besprechen dieses Verfahren an einem Beispiel, das wir absichtlich einem üblichen Handbuch[1]) entnehmen um etwaige Vergleichung zu erleichtern.

Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2. \tag{19}$$

Die alte Methode würde nur die partikulare Lösung suchen, wir werden die vollständige Lösung suchen. Nach (5, 7):

$$(p^2 - 4p + 4)y = p^2 y_0 - 4py_0 + py_1 + x^2 \tag{20}$$

und da

$$x^2 = \frac{2!}{p^2}\cdot 1$$

erhält man:

$$y = \frac{p^4 y_0 + p^3 y_1 - 4 y_0 p^3 + 2}{p^2(p-2)^2}. \tag{21}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$y_0 = A, \quad -4y_0 + y_1 = B. \tag{22}$$

Zerlegen wir auf der gewöhnlichen Weise:

$$y = \frac{p^4 A + p^3 B + 2}{p^2(p-2)^2} = \frac{\varepsilon}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \alpha + \frac{\gamma p}{p-2} + \frac{\delta p}{(p-2)^2}. \tag{23}$$

Vergleichung der Koeffizienten ergibt:

$$\begin{gathered} \varepsilon = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha = \tfrac{3}{8}, \\ \gamma = -\tfrac{3}{8} + A, \quad \delta = \tfrac{1}{4} + B + 2A, \end{gathered} \tag{24}$$

folglich wird unsre vollständige Lösung:

$$\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8} + (A - \tfrac{3}{8})e^{2x} + (2A + B + \tfrac{1}{4})xe^{2x}. \tag{25}$$

Jetzt betrachten wir das der Methode der Handbücher entsprechende Verfahren (aber genauer, weil unsre Abänderungen uns imstande setzen müssen A und B in den Anfangsbedingungen auszudrücken, siehe (22)).

Wir zerlegen die Lösung in den von der Homogenen Gleichung

[1]) Forsyth, Lehrb. d. Diff. gl. Deutsche Auflage, 2. u. 3. Aufl., S. 74.

herrührenden Teil und den der Nichthomogenität entsprechenden Teil. Statt (23) erhält man:

$$y = \frac{Ap^2 + Bp}{(p-2)^2}\, 1 + \frac{x^2}{(p-2)^2}. \tag{26}$$

Man betrachtet dann erst die homogene Gleichung:

$$y_h = \frac{Ap^2 + Bp}{(p-2)^2} = A\, e^{2x} + Bx\, e^{x}. \tag{27}$$

Wenn wir, wie in den Handbüchern, jetzt eine Reihenentwicklung in positiven Potenzen vornehmen ohne auf das Restglied zu achten, erhalten wir:

$$y_p = \frac{1}{(p-2)^2}\, x^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2p}{2} + 3\,\frac{p^2}{2!} + \ldots\right) x^2 = \tag{28}$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + 0 + 0 + \ldots$$

(27) und (28) zusammen ergeben aber nur die richtige Lösung (25), wenn man schreibt:

$$y = A'e^{2x} + B'xe^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}. \tag{29}$$

mit $A' \neq A$ und $B' \neq B$. Hier musz also auf (22) verzichtet werden: A' und B' sind nur noch Integrationskonstanten, ihre Relation zu den Anfangsbedingungen ist verloren gegangen.

Der Grund dieser Ungleichheit ist die Vernachlässigung des Restgliedes in (28). Die Untersuchung solcher Restglieder ist aber zeitraubend und würde die Vorteile der Operatorenrechnung illusorisch machen. Darum musz man in der Praxis darauf verzichten. Dieses ist auch überflüssig, weil wenn $F(x)$ ein Polynom ist [1]) folgende Regel gilt:

Regel II. Wenn man den zweiten Teil

$$y = y_h + \frac{1}{v(p)} F(x) \;{}^{2)} \tag{30}$$

[1]) Die positive Reihenentwicklung wird nur in diesem Fall angewendet, weil nur in diesem Fall die Reihe nach einigen Gliedern immer 0 ergibt.

[2]) y_h bedeutet die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

der Lösung einer Differentialgleichung

$$(31) \qquad \sum_0^n a_k \frac{d^k}{dx^k} y = F(x)$$

mittels einer Reihenentwicklung in positiven Exponenten von p *finden will:*

$$(32) \qquad y = y_h + (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots) F(x)$$

findet man mit Vernachlässigung des Restes den richtigen Wert der Lösung, aber die Integrationskonstanten in dem ersten Teil y_h *der Lösung sind dann nicht mehr den Anfangsbedingungen angepaszt.*

Beweis: Wenn $F(x)$ ein Polynom ist, wird es genügen den Beweis zu geben für $F(x) = x^m/m! = p^{-m}.1$.

Es sei n die Ordnung der Differentialgleichung also der Grad von $v(p)$. Die Reihenentwicklung mit Restglied laute

$$(33) \quad \frac{1}{v(p)} \cdot p^{-m} = \left(a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m + \frac{b_1 p^{m+1} + \ldots + b_n p^{m+n}}{v(p)}\right) p^{-m} . 1$$

$$= a_0 \frac{x^m}{m!} + a_1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + a_m + \frac{b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n}{v(p)} . 1 \text{ [1]}$$

und das Restglied ist nach (5, 16) (cf. auch (5, 14)) gerade die Lösung der homogenen Differentialgleichung, aber mit andern Konstanten.

> Bemerkung. In der gewöhnlichen Theorie der D-Operatoren sind die Integrationskonstanten nicht den Anfangsbedingungen angepaszt, daher findet man da nicht die oben erwähnte Schwierigkeit.

Das ganz richtige Verfahren wäre statt (28) (ohne Reihenentwicklung, mit (5, 15)):

$$(34) \quad y_p = \frac{2}{p^2(p-2)^2} . 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} e^{2x} + \frac{1}{4} x e^x .$$

Dieses ergibt mit (27) selbstverständlich die richtige Lösung (25).

---

[1]) Wir setzen die Reihenentwicklung bis p^m an, weil die folgenden Glieder 0 ergeben.

Der Unterschied zwischen (34) und (28) ist der, dasz unsre Methode (also (34)) automatisch den Teil y_p der Lösung mit $y_0 = y_1 = 0$ ergibt: dieses ist eine notwendige Bedingung, weil (27) schon der homogenen Gleichung genügt. Bei der Vernachlässigung des Restgliedes in)28) geht diese Eigenschaft verloren.

Ein weiteres Beispiel der Anwendung von Reihenentwicklungen zur Lösung von Differentialgleichungen findet sich in § 14, 1.

§ 13. Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten.

Zur Uebersetzung der Gleichung in die p-Sprache benützt man das Schema (10, 17).

Solange die Koeffizienten konstant waren, wurde die Differentialgleichung $n$ter Ordnung nach x übersetzt in eine rein algebraische Gleichung $n$ten Grades in p.

Wenn aber m der höchste Grad der Koeffizienten in x ist, wird die Differentialgleichung übersetzt in eine Differentialgleichung m-ter Ordnung nach p. (nach (10, 17) oder (10, 18)) [1]).

Wenn die in die p-Sprache transformierte Gleichung eine Differentialgleichung ist, enthält die Lösung Integrationskonstanten. Beim Zurücktransformieren in die x-Sprache verschwinden oft einige dieser Konstanten. Wenn die Gesamtzahl der übrigbleibenden Konstanten der Ordnung der ursprünglichen Gleichung übersteigt, sind sie abhängig (z. B. § 14, 2).

Wenn die Koeffizienten oder das rechte Glied der Differentialgleichung negative Potenzen von x enthalten, kann man diese am leichtesten durch Multiplikation entfernen, oder mittels Substitution neuer Variabelen. In (15, 12) ff. findet man auch die Uebersetzung von negativen Potenzen von x in die p-Sprache. Die Anwendung dieser Uebersetzung führt zu Integralgleichungen, die aber leicht in Differentialgleichungen umzusetzen sind.

Wenn die Koeffizienten nur Exponentialfunktionen enthalten, ist die übersetzte Gleichung nach (3, 16) eine *Differenzen*gleichung [2]).

---

[1]) Wir sehen die Analogie mit der Transformation von Laplace, siehe II, § 4.

[2]) Umgekehrt wird eine Differenzengleichung in x nach (11, 20) übersetzt in eine Gleichung, die in p Exponentialfunktionen enthält. Mit (11, 28) kann

Anwendungen.

Sehr interessante Anwendungen sind von van der Pol [1] publiziert. Wir verweisen auf seine Abhandlungen, die besonders die Kugelfunktionen, Besselfunktionen, u.s.w. betrachten.

Wir erwähnen ein Beispiel: die Legendreschen Kugelfunktionen. Van der Pol erhält:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
P_0(\Theta) &= 1, \\
P_1(\Theta) &= \frac{p^2+0}{p^2+1^2}\,.\,1\,, \\
P_2(\Theta) &= \frac{p^2+1^2}{p^2+2^2}\,.\,1\,, \\
P_3(\Theta) &= \frac{(p^2+0^2)\,(p^2+2^2)}{(p^2+1)\,(p^2+3^2)}\,.\,1\,, \\
P_4(\Theta) &= \frac{(p^2+1^2)\,(p^2+3^2)}{(p^2+2^2)\,(p^2+4^2)}\,.\,1\,, \\
P_5(\Theta) &= \frac{(p^2+0^2)\,(p^2+2^2)\,(p^2+4^2)}{(p^2+1^2)\,(p^2+3^2)\,(p^2+5^2)}\,.\,1.
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis erhält indem er in

$$
(2)\qquad \sin\Theta\,\frac{d^2P_n}{d\Theta^2} + \cos\Theta\,\frac{dP_n}{d\Theta} + n(n+1)\sin\Theta\,.\,P_n = 0.
$$

einsetzt:

$$
\lambda = i\,\Theta,
$$

dann ergibt sich

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&e^{+\lambda}\Big(\frac{d^2P_n}{d\lambda^2} + \frac{dP_n}{d\lambda} - n(n+1)\,P_n\Big) + \\
&\quad - e^{-\lambda}\Big(\frac{d^2P_n}{d\lambda^2} - \frac{dP_n}{d\lambda} - n(n+1)\,P_n\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung läszt sich wieder mit Operatorenrechnung lösen mittels (3, 16). Weil hier die Koeffizienten Exponentialfunktionen sind, enthalt man in der p-Sprache keine Differentialgleichung,

---

man eine Lösungsmethode darstellen. Oft ist aber ein anderes Verfahren zweckmäsziger: s. II § 5.

[1]) van der Pol II, IV.

sondern eine Differenzengleichung. Diese Differenzengleichung lautet:

$$(4)\quad (p+n)(p-n-1)\frac{P_n(p-1)}{p}=(p-n)(p+n+1)P_n(p+1),$$

diese Gleichung ergibt nach kurzer Rechnung das obige Resultat.

§ 14. Beispiele von linearen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten.

1. Dieses Beispiel enthält zugleich eine Anwendung der gewöhnlichen Reihenentwicklung (§ 12).

Zu lösen sei die Gleichung

$$(1)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, \qquad y(0)=0$$

Nach (10, 17):

$$(2)\qquad -p\frac{d}{dp}py+y=0,$$

$$(3)\quad py=Ce^{-\frac{1}{p}}.1,$$

$$y=C\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}.1=C\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1!\,p^2}+\frac{1}{2!\,p^3}-\frac{1}{3!\,p^4}+\ldots\right).1,$$

$$y=C\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}-\frac{x^4}{3!\,4!}+\ldots\right).$$

2. Berechnung der Hermiteschen Polynomen.

Diese genügen folgender Gleichung [1]):

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\lambda y=0.$$

Also nach (10, 17):

$$(5)\qquad p^2y+2p\frac{d}{dp}y+\lambda y=p^2y_0+py_1,$$

[1]) z. B. Courant Hilbert, 1. Aufl., S. 361.

(6) $$y = C\frac{e^{-\frac{p^2}{4}}}{p^{\frac{\lambda}{2}}}.1 + \frac{e^{-\frac{p^2}{4}}}{2p^{\frac{\lambda}{2}}}\int\limits_0^p dp(py_0 + y_1)p^{\frac{\lambda}{2}}e^{\frac{p^2}{4}}.1.$$

Man erhält also 3 Konstanten. Selbstverständlich musz C eine Funktion sein von y_0 und y_1.

Wir wollen die Hermiteschen Polynomen erhalten. Es zeigt sich, dasz dazu die Lösung

(7) $$y = C\frac{e^{-\frac{p^2}{4}}}{p^{\frac{\lambda}{2}}}.1$$

schon hinreichend ist.

Die Eigenwerte der Differentialgleichung (4) der Hermiteschen Polynomen sind

$$\lambda = 2\,n.$$

Man kann also (7) schreiben:

(8) $$Cp^{-n}\left(1 - \frac{p^2}{4\,.\,1\,!} + \frac{p^4}{2^4\,.\,2\,!} - \frac{p^6}{2^6\,.\,3\,!} + \ldots\right).1$$ [1]

Man erhält die gewöhnliche Form der Lösungen, wenn man setzt: $C = 2^n\,.\,n!$, also:

(9) $$y = He(n) = 2^n\,n\,!\,\frac{e^{-\frac{p^2}{4}}}{p^n}.1.$$

Dieses ergibt:

$$He(0) = 1\,,$$

$$He(1) = 2\,.\left(\frac{1}{p}\right).1 = 2\,x,$$

(10) $$He(2) = 2^2\,.\,2\,.\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4\,.\,1\,!}\right).1 = 4\,x^2 - 2,$$

$$He(3) = 2^3\,.\,6\,.\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{4\,.\,1\,!\,p}\right).1 = 8\,x^3 - 12\,x,$$

$$He(4) = 2^4\,.\,24\,.\left(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{4\,.\,1\,!\,p^2} + \frac{1}{2^4\,.\,2\,!}\right).1 =$$

$$= 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12.$$

[1]) Wir haben das Restglied von (8) nicht untersucht: man kann die Richtigkeit des Ergebnisses (10) einfacher kontrollieren durch es in (6) einsusetzen. Auch könnte man die Bromwichsche Methode (II, 2, 21) anwenden zur Uebersetzung von (7).

Wir bemerkten schon, dasz C eine Funktion sein musz von y_0 und y_1. Daraus geht hervor, dasz man nur für spezielle C-Werte die Lösung erhält, welche bestimmten Anfangsbedingungen, z. B. $y_0 = y_1 = 0$ genügen. Dieses erklärt, dasz man, wahrscheinlich zufälligerweise, auch schon das richtige Ergebnis erhalten würde, wenn man in (5) y_0 und y_1 fortgelassen hätte, obschon diese Gröszen im Fall der Hermiteschen Polynomen gar nicht Null sind.

Wir haben einen Teil der Lösung in (7) fortgelassen. Die Hermitesche Polynomen enthalten ja nur eine beliebige Konstante, sind also nicht die vollständige Lösung ihrer Differentialgleichung, gerade so wie z. B. die Kugelfunktionen P_n auch nur einen Teil der Lösung ihrer Differentialgleichung enthalten.

Weitere Beispiele dieser Art findet man in den van der Polschen Abhandlungen [1]).

§ 15. Erweiterung der Theorie.

Wir wollen noch einige wichtige Formen in die p-Sprache umsetzen. Wir beginnen mit der Betrachtung der bekannten Relation

$$(1) \qquad p^{-n} . 1 = \frac{x^n}{n!}.$$

Es liegt nahe dieses zu erweitern zum Fall gebrochener Werte von n. Man vermutet:

$$(2) \qquad p^{-n} . 1 = \frac{x^n}{\Pi(n)},$$

worin

$$\Pi(n) = \Gamma(n+1).$$

Diese Relation (2) kann man aber nie in unsrer Theorie beweisen, weil wir nie Differentiation „gebrochener Ordnung" definiert haben. Man kann wohl (2) als Definition betrachten. Dies findet für positive Werte von x seine Rechtfertigung darin, dasz, wenn man die Carsonschen Integrale [2]) benützt, wirklich die Relation (2) erhalten wird, also

[1]) van der Pol II, IV.

[2]) S. (II, 3, 10). Auch das Bromwichsche Integral (II, 2, 21) ergibt dieses Resultat. S. z. B. Schouten.

$$p^{-n}\, H(x) = \frac{x^n}{\Pi(n)}\, H(x).$$

Differentiation nach n von (2) ergibt:

(3) $$-p^{-n}\log p = \frac{x^n \log x}{\Pi(n)} - \frac{x^n\, \Pi'(n)}{\Pi(n)^2}$$

und daher für $n=0$: [1])

(4) $$-\log p = \log x + C,$$

für $n=1$:

(5) $$-\frac{1}{p}\log p = \frac{x}{1\,!}\,(\log x + C - 1),$$

für $n=2$:

(6) $$-\frac{1}{p^2}\log p = \frac{x^2}{2\,!}\left((\log x + C - 1 - \frac{1}{2}\right),$$

schlieszlig:

(7) $$-\frac{1}{p^n}\log p = \frac{x^n}{n\,!}\left(\log x + C - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right).$$

C ist die Eulersche Konstante. Diese Gleichungen finden sich bei mehreren Autoren [2]).

Betrachtung von x^{-1}. Die Funktion x^{-1} ist definiert durch:

(8) $$x\, x^{-1} f(p) = x^{-1}\, x\, f(p) = f(p).$$

Wir haben als richtige Uebersetzung von x erhalten (10, 5):

(9) $$x\,.\,f(p) = -p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\;f(p).$$

Wenn wir dieses in (8) einsetzen erhalten wir:

$$p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}x^{-1} f(p) = x^{-1}\,p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}f(p) = f(p).$$

und daher:

---

[1]) S. z. B. Whittaker and Watson, Modern Analysis, 4th Ed., p. 247.

[2]) van der Pol II; Jeffreys.

$$(10) \qquad x^{-1} f(p) = -p \int_C^p dp \frac{1}{p} f(p).$$

Das Integral enthält eine Integrationskonstante. Hier treten die selben Schwierigkeiten ein als wir in § 1 erörtert haben, da handelte es sich um ein analoges Problem:

$$p^{-1} y(x) = \int_C^x dx\, y(x).$$

Wir haben da die Schwierigkeit dadurch erledigt, dasz wir die untere Grenze der Integration Null setzen, aber hier kann man dieses Verfahren nicht anwenden, weil gerade die einfachsten Integrale an der Grenze $p = 0$ divergieren.

In den Anwendungen kann man oft als Grenze $p = \infty$ oder $p = -\infty$ einsetzen. Wir werden aber dieses Verfahren nicht in Einzelheiten verfolgen. Man kann ja einer dem § 1 und folgenden entsprechenden Methode folgen. Oft wird es in der Praxis genügen als Grenze der Integration eine solche Stelle zu wählen, dasz da die Integrationskonstante 0 gesetzt werden darf, in vielen Fällen die Punkte $+\infty$, $-\infty$, 1 oder 0.

Im allgemeinen Fall:

$$(11) \qquad x^{-n} f(p) = p\left(-\int_C^p dp\right)^n \frac{1}{p} f(p).$$

Anwendung dieser Formel auf $f(p) = 1$ ergibt (mit $C = 1$):

$$(12) \qquad x^{-1} . 1 = -p \log p . 1,$$

$$(13) \qquad x^{-2} . 1 = \frac{p^2}{1!} \log p . 1,$$

$$(14) \qquad x^{-n} . 1 = \frac{(-p)^n}{(n-1)!} \log p . 1.$$

für $n = 1, 2, \ldots\ldots$

Diese Formeln sind im Einklang mit (4).

Im Fall gebrochener negativen Werte von n in x^n kann man (2) anwenden.

Anwendung.

Die Formel (11) wendet man an zur Uebersetzung von Differentialgleichungen in der p-Sprache, wenn die Koeffizienten negative Potenzen von x enthalten [1]. Man erhält Integrodifferentialgleichungen, die durch Differentiation nach p in Differentialgleichungen umzuwandern sind.

Wenn das rechte Glied einer inhomogenen Differentialgleichung negative Potenzen von x enthält, kann man (12) bis (14) anwenden [1]. Man erhält in diesem Fall eine asymptotische Lösung dieser Differentialgleichungen, die auf andere Weise schon von Borel [2] angegeben worden ist.

Die einfachste Gleichung dieser Art ist:

$$\frac{dy}{dx} - y = -\frac{1}{x}. \tag{15}$$

Nach (12) [3]:

$$(p - 1)\, y = p \log p \,.\, 1,$$

$$y = \frac{p}{p-1} \log p \,.\, 1,$$

$$y = -(p + p^2 + p^3 + \ldots) \log p \,.\, 1.$$

Nach (14):

$$y = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots \tag{16}$$

---

[1] Es wird aber oft einfacher sein, die ganze Gleichung mit einer geeigneten Potenz von x zu multiplizieren, cf. § 13.

[2] E. Borel, Leçons sur les séries divergentes.

[3] Die Lösung der homogenen Gleichung haben wir hier fortgelassen.

ZWEITE METHODE. TRANSFORMATIONSTHEORIE.

§ 16. Vorbemerkungen.

Die Methode von Heaviside beruht auf die Uebersetzung der Operation des Differenzierens in die Operation des Multiplizierens mit einem Faktor, d. h. auf der Transformation des Operators d/dx in den Operator p.

Beide Operatoren sind aber linear, d. h. sie genügen der Definition eines linearen Operators Ω:

(1) $$\Omega\,(A + B) = \Omega\,A + \Omega\,B,$$

denn es ist ja:

(2) $$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$$

und:

(3) $$p\,(\varphi + \psi) = p\varphi + p\psi.$$

So drängt sich die Frage auf: Wie fügt sich die Methode von Heaviside als Spezialfall ein in die allgemeine Theorie der linearen Transformationen von Funktionen und den auf sie ausgeübten linearen Operatoren? Welche lineare Transformation übersetzt den Differentiationsoperator d/dx in den Multiplikationsoperator p?

Betrachten wir die schon sehr allgemeine lineare Transformation:

(4) $$f(x) = \int d\xi\, K(x, \xi)\, \varphi(\xi)$$

mit ihrer Inversen:

(5) $$\varphi(\xi) = \int dx\, L(\xi, x)\, f(x).$$

Diese Transformation $f(x) \rightleftarrows \varphi(\xi)$ müssen wir jetzt so einschränken, dasz ein auf $f(x)$ ausgeübter linearer Operator $O \ldots \rightleftarrows \Omega \ldots$ auf derselben Weise transformiert wird, dasz also:

$$(6) \qquad O f(x) = \int d\xi \, O K(x, \xi) \varphi(\xi) = \int d\xi \, K(x, \xi) \, \Omega \varphi(\xi).$$

Wie wir sogleich näher erläutern wollen, tritt bei der Heavisideschen Methode als Spezialfall der Transformation (4) und ihrer Inversion (5) auf:

$$(7) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp \frac{e^{px}}{p} \varphi(p) \quad \text{(Bromwich[1])}$$

resp.:

$$(8) \qquad \varphi(p) = \int_0^\infty dx \, p \, e^{-px} f(x) \quad \text{(Carson[2])}$$

und der Transformation $O \ldots \leftrightarrows \Omega \ldots$ entspricht speziell:

$$\frac{d}{dx} \ldots \rightleftarrows p,$$

nämlich (cf. (6)):

$$(9) \qquad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp \, e^{-px} \varphi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp \frac{e^{px}}{p} p \, \varphi(p).$$

Wir fragen nun: durch welche Kennzeichen ist diese spezielle lineare Transformation innerhalb der allgemeinen Klasse (4), (5) charakterisiert?

Wir bemerken zuerst, dasz sowohl $d/dx \ldots$ als $p \ldots$ „lokale" Operatoren sind, das heiszt: im Gegensatz etwa zu einem linearen Integraloperator:

$$(10) \qquad \Omega(f(x)) = \int dx' \, G(x, x') f(x')$$

[1]) Siehe § 2, Formel (17, 17), auch für den Integrationsweg. Dieser ist von p unabhängig, also ist Differentiation unter dem Integralzeichen gestattet. Man beachte, dasz in diesem Kapittel p in einem multiplikativen Operator verwandelt ist, der Ausdruck px in den Formeln (7) und (8) ist hier also nur eine Multiplikation.

[2]) Siehe § 3, Formel (18, 8).

verdient ein Operator wie:

$$\Omega\,(f\,(x) \equiv \left(\alpha + \beta\,\frac{d}{dx} + \gamma\,\frac{d^2}{dx^2}\right) f\,(x) \tag{11}$$

den Namen „lokal", weil sein Ergebnis nur von $f(x)$ in der Stelle x und in ihrer infintesimalen Umgebung abhängt.

Dementsprechend werden wir (4) durch die Forderung spezialisieren, dasz ein linearer lokaler Operator in einen linearen lokalen Operator transformiert werden soll. Wir werden dieses die Forderung A nennen.

Weiter fordern wir dasz der Operator p der Operator des Multiplizierens sein musz (Forderung B).

Das dritte Kennzeichen der Heavisideschen Methode ist, dasz die Einheit nach der Transformation wieder die Einheit ist (Forderung C):

$$1 = \int d\xi\ K\,(x, \xi)\,.\,1\,. \tag{12}$$

Ein konstantes Glied in der x-Sprache musz ja in dem Heavisideschen Gedankengang in der p-Sprache denselben Wert behalten.

Diese drei Forderungen wollen wir in dem folgenden Paragraphen der Transformation (4) auflegen, wir erhalten dann gerade das Bromwichsche Integral.

Die Forderungen A und B sind z. B. auch erfüllt bei den Laplaceschen Transformationen, aber Forderung C ist nur im Fall der Heavisideschen Operatorenrechnung erfüllt.

Der Zusammenhang mit den Laplaceschen Transformationen, mit dem Fourierschen Integrale, mit Transformationen, die in der Quantenmechanik verwendet werden und mit den Laplaceschen Transformationen der Differenzenrechnung werden wir auch erörtern.

§ 17. Transformation der Operatoren des Differenzierens.

Wir betrachten die allgemeine Transformation (16, 4), und setzen an:

Forderung A. Der Operator d/dx soll in eine lokale lineare Operation transformiert werden [1]).

---

[1]) S. aber Bemerkung 2, S. 66.

Wir fragen also: wie musz in (16, 4) $K(x, \xi)$ spezialisiert werden damit

$$(1) \qquad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \int d\xi \, K(x, \xi) \, \varphi(\xi) = \int d\xi \, \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \, \varphi(\xi)$$

identisch sei mit:

$$\int d\xi \, K(x, \xi) \, . \, \Lambda \left(\varphi(\xi) \right),$$

also gerade zu einem lokalen Operator $\Lambda \ldots$ als Transformierte des Operators d/dx führt?

Da nun die letzte Gleichung für beliebige Gestalt von $\varphi(\xi)$ gelten soll und $\Lambda \, (\varphi(\xi))$ nur von den Werten der Funktion $\varphi(\xi)$ in ξ und infintiesimaler Umgebung abhängen soll, musz die Gleichheit für jedes Element des Integrales separat gelten:

$$(2) \qquad \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \, \varphi(\xi) = K(x, \xi) \, . \, \Lambda \left(\varphi(\xi) \right)$$

und daher:

$$(3) \qquad \frac{1}{K(x, \xi)} \, \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = \frac{\Lambda(\varphi(\xi))}{\varphi(\xi)},$$

unabhängig von allen x und von der speziellen Form von $\varphi(\xi)$. Wir setzen daher:

$$(4) \qquad \frac{\Lambda(\varphi(\xi))}{\varphi(\xi)} = \varkappa(\xi),$$

dann erhalten wir:

$$(5) \qquad K(x, \xi) = e^{x\varkappa(\xi)} \, B(\xi).$$

Bemerkung 1. Die Integrationsgrenzen, die später genau erörtert werden, müssen, damit (1) zutrifft, von x unabhängig sein.

Bemerkung 2. Die Form (5) ist nicht die einzige, die der Forderung A genügt: man kann (2), mittels einer partiellen Integration nach ξ in (1), abändern. Es ist dann notwendig, die Integrationsgrenzen so zu wählen, dasz das integrierte Glied Null wird. Ein Beispiel ist die Pincherlesche „trasformazione quasi-identica", folgenderweise definiert[1]):

[1]) Pincherle, Rendic. R. Accad. Lincei Roma 33 (1) (1924) 203.

(6) $$f(x) = \int_1^\infty d\xi \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x}.$$

Man erhält diese Transformation folgenderweise. Wenn $\varphi(1) = \varphi(\infty) = 0$ ergibt sich statt (3), mittels partieller Integration von (1):

(7) $$\int^\xi dt \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = - K(x, \xi)\, \psi(\xi). \qquad (\psi \text{ beliebig})$$

Im Fall $\psi(\xi) = 1$ ist die Lösung von (7):

(8) $$K(x, \xi) = F(x - \xi) \qquad (F \text{ beliebig})$$

und als Spezialfall $K(x, \xi) = 1/(\xi - x)$, wie in (6).

Im Fall (6) besteht z. B. die Relation:

(9) $$\frac{d}{dx} f(x) \doteqdot \frac{d}{d\xi} \varphi(\xi),$$ [1]

diese Transformation bezieht sich also nicht auf unsren Fall.

Es gibt noch ähnliche Möglichkeiten. So weit sie uns bekannt sind, sind sie aber für das Folgende nicht brauchbar. Wir befassen uns also im Folgenden nur mit Transformationen die zum Typus (5) gehören.

Die Transformation mit Kern (5) hat folgende Eigenschaften. Sie verknüpft gewisse Operatoren:

(10) $$\frac{d}{dx} \ldots \doteqdot \varkappa(\xi) \ldots,$$

(11) $$\int dx \ldots \doteqdot \frac{1}{\varkappa(\xi)} \ldots,$$

(12) $$\Theta \ldots \doteqdot e^{\varkappa(\xi)} \ldots,$$

wenn der Operator Θ folgenderweise definiert wird:

(12a) $$\Theta f(x) = f(x + 1).$$

---

[1]) Das Zeichen $\doteqdot$ benützen wir zur Andeutung der Transformation eines Operators oder einer Funktion: es verbindet den Ausdruck vor und nach der Transformation. Dieses Zeichen würde zuerst im Gebiete der Operatorenrechnung benützt von v a n d e r P o l (Phil. Mag. 7 (1929): „v. d. Pol I'').

Forderung B. Die Differentiation soll in eine Multiplikation transformiert werden:

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dx} \ldots \doteq \varkappa \xi \ldots \quad (\alpha \text{ konstant})$$

Die Bedingungen A und B werden erfüllt durch:

$$\text{(13)} \qquad K(x, \xi) = e^{\alpha x \xi} B(\xi). \qquad (\alpha \text{ konstant})$$

Bemerkung. Die Laplacesche Transformationen zur Umwandlung von linearen Differentialgleichungen sind Spezialfälle von (13) mit $B(\xi) = 1$, also:

$$\text{(14)} \qquad K(x, \xi) = e^{\varkappa \xi}.$$

Forderung C. Wenn $f(x) = 1$ soll auch die transformierte Funktion $\varphi(\xi) = 1$ sein und umgekehrt, also:

$$\text{(C)} \qquad 1(x) \doteq 1(\xi).$$

Die Einheit in der x-Sprache soll also nach der Transformation wieder die Einheit in der p- oder ξ-Sprache werden.

Dieses erhält man wenn man in (13) setzt:

$$\text{(15)} \qquad B(\xi) = \frac{1}{2\pi i \, \xi},$$

und als Integrationsweg einen geschlossenen Weg C nimmt, der den Pol $\xi = 0$ enthält.

Man erhält dann ja:

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi \, \frac{e^{x\xi}}{\xi} = 1,$$

nach dem Residuensatz.

Die allgemeine Transformation ist daher [1]):

$$\text{(17)} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp \, \frac{e^{px}}{p} \, \varphi(p).$$

Der geschlossene Integrationsweg C musz so gewählt werden, dasz alle im Endlichen befindlich Pole umschlossen werden.

[1]) Wir schreiben jetzt p statt ξ. In der Transformationstheorie ist p kein eigentlicher Operator mehr, nur ein Faktor.

Das so erhaltene Integral (17) ist gerade das Bromwichsche Integral zur Uebersetzung aus der p-Sprache in die x-Sprache.

Bemerkung. Die Forderung C ermöglicht es, die Operatorenrechnung als eine Art Algebra aufzufassen, wie wir im vorhergehenden Kapittel dargelegt haben. Diese Forderung ist, wie schon gesagt, der wesentliche Unterschied zwischen der Operatorenrechnung und den anderen Transformationen in diesem Gebiete (wie die Laplaceschen).

Andere Integrationswege.

1. Wenn $\varphi(p)$ nicht eindeutig ist musz man ein oder mehr Schnitte in die p-Fläche anbringen und den Integrationsweg diesen Schnitten entlang führen[1]).

2. In der Operatorenrechnung handelt es sich oft um Funktionen, die für $x < 0$ Null sein müssen (plötzlich erzeugte Kräfte, u.s.w.). In diesem Fall musz man die gewöhnlichen Funktionen multiplizieren mit einem diskontinuierlichen Faktor. Man kann am besten den Cauchyschen diskontinuierlichen Faktor anwenden:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} dp\,\frac{e^{xp}}{p}. \quad (a \text{ reell und } > 0) \tag{18}$$

In der Operatorenrechnung bezeichnet man diesen Faktor mit dem Namen „Einheitsfunktion"[2]).

Nach (18) ist:

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 \text{ wenn } x < 0. \\ H(x) &= \tfrac{1}{2} \text{ wenn } x = 0. \\ H(x) &= 1 \text{ wenn } x > 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Wir betrachten die Berechnung dieses Integrales zusammen mit der Berechnung des Integrales (21).

In dem jetzt betrachteten Falle musz man statt (C) fordern:

$$H(x) \doteq 1\,(p). \tag{20}$$

[1]) Man findet ein Beispiel bei March, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927) 311, aber ganz eingehend ist die Darlegung von J. P. Schouten, Dissert. Delft 1933.

[2]) S. § 8.

Mit $1(p)$ meinen wir das gewöhnliche 1 in der p-Sprache.

Dieses erreicht man schon indem man statt C als Integrationsweg den in (18) angegebenen Integrationsweg wählt. Im allgemeinem Falle:

$$f(x)\, H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L dp \, \frac{\varphi(p)}{p} e^{px} \tag{21}$$

musz der Integrationsweg L genommen werden von $a - \infty i$ bis $a + \infty i$ mit a reell und mit solchem Wert, dasz alle Pole des Integranden links von L liegen.

Wenn $x = 0$ kann man den Integrationsweg L schlieszen mit einem groszen Halbkreis von $a + \infty i$ bis $a - \infty i$ nach der Seite des zweiten und dritte Quadranten. Wenn $\varphi(p)/p$ auf diesem Halbkreis gleichmäszig nach 0 konvergeert, hat nach dem Jordanschen Lemma[1]) dieses Stück des Integrales den Wert 0. Die Integrale (17) und (21) haben dann also denselben Wert im Fall $x > 0$; und auch die Integrale (16) und (18) sind in diesem Fall vollkommen gleichwertig.

Dann kann man den Integrationsweg deformieren zu C.

Wenn aber $x < 0$ kann dieser Halbkreis nicht genommen werden, werden, weil der Integrand dann unendlich wird, man musz hier vielmehr den Integrationsweg schlieszen mit einem Halbkreis im ersten und vierten Quadrant, weil jetzt dieses Stück unter denselben Bedingungen Null ergibt. Aber das umschlossene Gebiet enthält, nach der Definition von L, keine Pole, das ganze Integral ist also Null.

Für den Fall $x = 0$ gibt es etwas verwickeltere Bedingungen für das Nullwerden des Halbkreisintegrales. Wir verweisen auf Whittaker and Watson[2]), man findet in diesem Buch auch einen Weg zur Berechnung von $H(0) = \frac{1}{2}$[3]).

Unser Ergebnis lautet also:

---

[1]) Whittaker and Wattson, Modern Analysis, Cambridge § 6.222. In diesem Gebiete angewandt von Jeffreys S. 25.

[2]) Whittaker and Watson, § 6.22.

[3]) Whittaker and Watson, 4th Ed. p. 123, Ex. 15.

Die Transformation (21) liefert die Relation:

(22) $$f(x)\, H(x) \doteq \varphi(p)\,,$$

die Transformation (17) dagegen:

(23) $$f(x) \doteq \varphi(p)$$

Die Transformationen dieser Art und auch die Komplikationen mit mehrdeutigen Funktionen sind eingehend betrachtet von J. P. Schouten. Wir verweisen auf seine Abhandlung [1]).

Die Integrale (17) und (21) finden sich, zwar ohne nahere Begründung, schon bei Bromwich [2]): sie sind die „Bromwichschen Integraldarstellungen" der Operatorenrechnung. Sie sind von Lowry [3]) benutzt zur Erweiterung der Operatorenrechnung. Viele seiner Resultate kann man aber, wie wir im vorhergehenden Kapittel gezeigt haben, auch mittels Durchführung der Operatorenalgebra erhalten. Schouten nimmt auch die Bromwichschen Integrale als Ausgangspunkt, und kann so eine mathematisch sehr schöne Begründung der Operatorenrechnung erreichen. Diese Methode fordert aber ziemlich verwickelte funktionentheoretische Betrachtungen, auch in sehr einfachen Fällen. Zur Begründung aber der Uebersetzung von p^n wenn n nicht eine ganze positive oder negative Zahl ist, ist solch eine Methode notwendig, weil sonst eine Definition ad hoc dieser Operation notwendig sein würde [4]). Die Schoutensche Methode musz aber auch z. B. die Definition des Integrals (21) einschränken [5]).

§ 18. Inversion: Carsonsches Integral.

Ehe wir die Umkehrung mit dem Mellinschen Umkehrungssatze darstellen, skizzieren wir eine Methode, die der obigen analog ist.

---

[1]) J. P. Schouten, Over de Grondslagen van de Operatoren-rekening volgens Heaviside. Dissert. Delft 1933.

[2]) Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1916), 401, oder Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, 2nd Ed. Cambridge 1931, S. 22.

[3]) Lowry, Phil. Mag. VII, 13 (1932) 1033.

[4]) Siehe (15, 2).

[5]) Schouten, l.c. S. 49.

Statt der Forderungen A und B soll hier gerade die Multiplikation mit ξ in eine Differentiation umgewandelt werden. Also:

$$\xi\varphi(\xi) = \int dx\, \xi\, L(x, \xi) f(x) \tag{1}$$

soll gleich sein zu:

$$\int dx\, L(x, \xi) \frac{d}{dx} f(x) \tag{2}$$

oder mittels partieller Integration von (2), wenn der Integrationsweg so gewählt werden kann, dasz das integrierte Glied Null ist:

$$-\int dx\, \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} f(x), \tag{3}$$

Dieser Forderung (1) gleich (3) wird Genüge getan wenn:

$$\xi L(x, \xi) = -\frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} \tag{4}$$

und daher:

$$L(x, \xi) = e^{-\xi x} \alpha(\xi). \tag{5}$$

Die Forderung (C) lautet wieder:

$$1(x) \doteqdot 1(\xi). \tag{6}$$

Man kann C Genüge tun mit $\alpha(\xi) = \xi$:

$$\int_0^\infty dx\, e^{-\xi x} \xi = 1, \tag{7}$$

und die allgemeine Transformation dieser Art ist also:

$$\int_0^\infty dx\, \xi\, e^{-\xi x} f(x) = \varphi(\xi). \tag{8}$$

Dieser Ausdruck ist gerade das Carsonsche Integral.[1])

Wesentlich ist dasz x im Integral (7) nur positive Werte durchläuft. Die Carsonsche Methode hat also keine Bedeutung für

---

[1]) z. B. v. d. Pol. IV.

negatives x. Darum ist die Methode eigentlich nur richtig wenn die Forderung C lautet:

$$(9)\qquad H(x) \doteq 1\,(\xi)$$

und wir würden, wenn, wie immer im ersten Kapittel, p im zweiten Gliede noch als Operator aufgefaszt wird, korrekter schreiben:

$$(10)\qquad \int_0^x dx\, p\, e^{-px} f(x) = \varphi(p)\, H(x)\,.$$

Das Carsonsche Integral ist also nur in einem beschränkten Gebiet brauchbar: es ist nicht die inverse Transformation zu (17, 17) aber nur zu (17, 21).

Zusammenhang zwischen einer Transformation und ihrer Inversen.
Das Carsonsche Integral kann man auch, wie in der Literatur erwähnt wird [1]), aus dem Bromwichschen ableiten und umgekehrt, wenn die Funktionen $\varphi(p)$, bez. $f(x)$ bestimmten Bedingungen genügen mittels der Mellinschen Umkehrungssätze [2]), die von Courant und Hilbert folgendermaszen formuliert werden:

Satz 1. Es sei $\xi = \sigma + ti$ eine komplexe Variabele. Im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ sei die Funktion $\Phi(\xi)$ regulär und daselbst

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\sigma + ti)|\, dt$$

konvergent; ferner strebe im schmaleren Streifen

$$\alpha + \delta \leqq \sigma \leqq \beta - \delta \qquad (\delta > 0 \text{ beliebig fest})$$

die Funktion $\Phi(\xi)$ mit zunehmenden Absolutbetrag der Ordinaten t gleichmäszig gegen Null. Setzt man dann für reelles positives u und festes σ:

$$(11)\qquad g(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} u^{-\xi}\, \Phi(\xi)\, d\xi$$

[1]) Carson, Electric Circuit Theory.

[2]) Courant und Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I, 1. Aufl. S. 90; Mellin, Acta Math. 25 (1902) 139.

so ist im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$:

$$\Phi(\xi) = \int_0^\infty u^{\xi - 1} g(u)\, du \tag{12}$$

Satz 2. Für $u > 0$ sei $g(u)$ stückweise glatt und für $\alpha < \sigma < \beta$ sei

$$\int_0^\infty u^{\sigma - 1} g(u)\, du\,.$$

absolut konvergent. Dann ergibt sich aus (12) die Umkehrung (11).

Diese Sätze sind dem Fourierschen Integrale sehr nahe verwant. Dieses gibt den einfachsten Beweis des zweiten Satzes. Wir verweisen für die Beweise auf Courant und Hilbert[1]).

Zur Anwendung auf unsren Fall setzen wir $u = \exp(-x)$, $\xi = p$, und $\Phi(p) = \varphi(p)/p$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} dp\; e^{xp} \frac{\varphi(p)}{p}\,, \tag{13}$$

und

$$\varphi(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-xp} f(x). \tag{14}$$

Dieses Integral würde aber fast immer divergieren, und hat nur praktischen Wert wenn wir Funktionen haben der Form:

$$f(x) = F(x)\, H(x).$$

Dann wird die untere Grenze nicht $-\infty$ aber 0, und ist (14) das Carsonsche Integral; (13) ist das Bromwichsche Integral.

---

[1]) Courant und Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 1. Aufl. S. 90; Mellin, Acta Math. 25 (1902) 139.

Das Carsonsche Integral ist von Carson als Ausgangspunkt seiner Operatorenrechnung genommen [1]. Seine Methode ist von Van der Pol ausgearbeitet [2]. Der Nachteil dieser Methode ist dasz die Beweise nicht richtig sind für negatives x und dasz auch diese Methode, wie jede Transformationsmethode, weniger durchsichtig ist, weil p nicht als Operator aufgefaszt wird.

§ 19. Zusammenhang der „Heavisideschen" Operatorentransformation mit anderen Transformationen der Differentialoperatoren.

Der Unterschied gegen die Laplaceschen Transformationen u.s.w. ist, dasz beit letzteren die Forderung C fortfällt. Die allgemeine Form für den Kern ist dann (17, 13):

$$K(x, \xi) = e^{ax\xi} B(\xi).$$

Spezialfälle:

1. $K = e^{x\xi}$ (1) (Laplace I) [3], die übliche Laplacesche Transformation in der elementaren Theorie der Differentialgleichungen.

2. $K = e^{-x\xi}$ (2) Laplace II) [4]) ist die Inverse [5]) von (1), sie ermöglicht das Zurücktransformieren von ξ zu x.

3. $K = e^{ix\xi}$ (3) und die inverse [5]) Transformation $e^{-ix\xi}$ sind die Transformationen die das Fouriersche Integral bilden. Wir nennen diese Transformation kurz „Frouriertransformation".

Betrachtung der Transformation (1), mit $K = e^{x\xi}$.

Diese Transformation hat folgende Eigenschaften:

[1]) Carson, l.c.

[2]) v. d. Pol, l.c. I, II, III.

[3]) Laplace, Oeuvres VII, S. 131.

[4]) Laplace, Oeuvres VII, S. 173.

[5]) Bis auf einen konstanten Normierungsfaktor.

$$\frac{d^n}{dx^n}\ldots \doteqdot \xi^n \ldots, \qquad x^n \ldots \doteqdot \left(-\frac{d}{d\xi}\right)^n \ldots$$

$$(4)\qquad \int dx \ldots \doteqdot \frac{1}{\xi}\ldots, \qquad x^{-n}\ldots \doteqdot (-1)^n \int^{\xi} d\xi_1 \ldots \int^{\xi_{n-1}} d\xi_n \ldots$$

$$1 \doteqdot \frac{1}{\xi}, \qquad \frac{d^n}{dx^n} x^m \ldots \doteqdot (-1)^m \xi^n \frac{d^m}{d\xi^m}\ldots$$

$$e^{\alpha x}\ldots \doteqdot \Theta^{-\alpha}\ldots \qquad \Theta^{\alpha}\ldots \doteqdot e^{\alpha p}\ldots \text{ [2]}$$

Man findet alle diese Relationen nach einfachen Umrechnungen, z. B.:

$$(5)\qquad x\, f(x) = \int d\xi\, e^{x\xi}\, x\varphi(\xi) = [e^{x\xi}\varphi(\xi)] - \int d\xi\, e^{x\xi}\frac{d}{d\xi}\varphi(\xi).$$

Der Integrationsweg musz so gewählt werden, dasz die integrierten Glieder Null ergeben.

Anderes Beispiel:

$$(6)\qquad \begin{aligned} e^{\alpha x} f(x) &= \int d\xi\, e^{(\xi+\alpha)x}\varphi(\xi) = \int d\xi'\, e^{\xi' x}\varphi(\xi'-\alpha) = \\ &= \int d\xi'\, e^{\xi' x}\,\Theta^{-\alpha}\varphi(\xi') \text{ [2]} \end{aligned}$$

hier ist $\xi' = \xi + \alpha$ gesetzt, dieses ist nur bei geeigneten Integrationsgrenzen ohne weiteres richtig.

Zur Vergleichung folgt hier dasselbe Schema im Fall der Operatorenrechnung: die Transformation mit den Bromwichschen und Carsonschen Integral (diese Resultate fanden wir auch schon im ersten Kapittel mit Operatorenalgebra) [1]):

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^n}{dx^n}\ldots \doteqdot p^n \ldots && x^n \ldots \doteqdot \left(p\frac{d}{dp}\frac{1}{p}\right)^n \ldots \\ &\int dx \ldots \doteqdot \frac{1}{p} && x^{-n}\ldots \doteqdot \left(-p\int dp\,\frac{1}{p}\right)^n \ldots \\ &1 \doteqdot 1 && \frac{d^n}{dx^n}x^m \ldots \doteqdot (-1)^m p^{n+1}\frac{d^m}{dp^m}p^{-1}\ldots \\ &e^{\alpha x}\ldots \doteqdot \frac{p}{p-\alpha}\Theta^{-\alpha} && \Theta^{\alpha}\ldots \doteqdot e^{\alpha p}\ldots \text{ [2]}\ldots \end{aligned}$$

[1]) In diesen Schema sind nur Hauptresultate angesetzt und viele Einzelheite, z. B. Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, fortgelassen.

[2]) S. für Definition Θ (17, 12a).

Wir schlieszen aus den Schema (4), dasz die Laplacesche Transformation (1) eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten umsetzt in eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung (Laplace[1]).

Im Falle nichtkonstanter Koeffizienten ist diese Laplacesche Methode auch sehr gut anwendbar[2]). Nach (4) wird eine Differentialgleichung mit polynomialen Koeffizienten m-ten Grades transformiert in eine Differentialgleichung m-ter Ordnung. Der Grad n der Koeffizienten der neuen Gleichung ist die Ordnung der alten Gleichung. Negative Potenzen von x ergeben Integralgleichungen oder Integro-Differentialgleichungen, die aber leicht in Differentialgleichungen umgesetzt werden können. Exponentialfunktionen ergeben Differenzen.

Die Transformation (1) spielt auch eine Rolle in der Theorie der asymptotischen Reihen. Man findet dieses bei Poincaré[2]), Borel[3]), Pincherle[4]).

Die Transformation (2) gibt Anlasz zu völlig ähnlichen Betrachtungen.

Die Transformation (1) und ihre Inversion (2) sind schon von Pincherle betrachtet worden [5]). Er erörtert die Integrationswege der Transformationsintegrale.

Die Heavisidesche Methode gibt auch dieselben Resultate, aber die Rechnung wird wesentlich erleichtert[6]).

Die Fouriersche Transformation ergibt auch ähnliche Resultate; ihre weitere Eigenschaften sind so bekannt, dasz wir sie nicht weiter betrachten werden.

Zur praktischen Anwendung der Transformationen sind in jedem Fall gewissen Integrationswege vorzuziehen, die wichtigsten Fälle erwähnen wir hier.

---

[1]) Laplace, Oeuvres VII.

[2]) Diese Anwendungen rühren von Poincaré her. Cf. Picard, Traité d'Analyse III S. 394 ff.; Forsyth, Theory of Differential Equations IV; Poincaré, Amer. Journ. Math. VII; Poincaré, Acta Math. VIII.

[3]) E. Borel, Leçons sur les séries divergentes.

[4]) Pincherle, Rendiconti R. Accad. d. Lincei Roma (Cl. fisiche etc.) 13 I (1904) 513.

[5]) Pincherle, Mem. R. Accad. Scienze Ist. Bolgna (4) VIII (1887) 125.

[6]) Siehe § 5, § 13, § 15.

Integrationswege der betrachteten Transformationen und ihrer Inversen.

Fourier.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, e^{ix\xi} \varphi(x), \tag{5}$$

bei genügender Konvergenz der Funktion $\varphi(x)$ in $\pm\infty$, und die inverse Transformation:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{ix\xi} f(x), \tag{6}$$

mit entsprechenden Bedingungen.

Laplace.

Man kann als Integrationsweg einen geschlossenen Kreis nehmen:

$$f(x) = \int_C d\xi \varphi(\xi) \, e^{\xi x}. \tag{7}$$

Dieses Verfahren findet man schon bei Pincherle, sie leitstet besonders gute Dienste im Fall einer Laurententwicklung der Funktion φ. Man kann dann C über einen beliebigen Kreis erstrecken, der gröszer ist als der Kreis, auszer dessen die Laurententwicklung gültig ist. In diesem ganzen ξ-Gebiet ist die Transformation eindeutig bis auf eine innerhalb C regulare Funktion $\omega(\xi)$ (z. B. eine positive Potenzenreihe). Diese Transformation (7) ist dem Bromwichschen Integral (17, 16) am meisten ähnlich.

Die inverse Transformation bestreicht ein beschränkteres Gebiet. Sie wird irgendeiner in O anfangenden Gerade entlang integriert [1]) und hat also die Form:

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty \cdot e^{i\alpha x}} dx \, f(x) \, e^{-\xi x}. \tag{8}$$

---

[1]) Pincherle, Mem. R. Accad. Scienze Ist. Bolgna (4) VIII (1887) 125.

Diese Transformation (8) is analog zur Carsonschen Methode (18, 10).

§ 20. Transformation der Operatoren der Differenzenrechnung. Anwendung auf lineare Differenzengleichungen.

1. *Allgemeines.*

Eine Transformation, die der Bedingung A (§ 17) für den Differentialoperator erfüllt, wird auch den Operator Θ [1]) in eine lineare Operatorenfunktion übersetzen. Wir beweisen dieses folgenderweise.

Man kann statt A von § 2 die Forderung ansetzen:

Forderung A'. Der Operator Θ soll in eine lokale lineare Operatorenfunktion transformiert werden. Statt (17, 4) ergibt sich dann eine Differenzengleichung:

$$(1) \qquad K(x+1,\xi)\,\varphi(\xi) = K(x,\xi)\,L(\varphi(\xi),\xi).$$

und die Lösung dieser Differenzengleichung ist genau dieselbe als (17, 5). Die Bedingungen sind also völlig äquivalent.

Statt der Forderung B setzen wir an:

Forderung B'. Der Operator Θ soll in eine Multiplikation mit einer Potenz von ξ transformiert werden.

Dieser Bedingung wird genügt wenn man in (17, 5) setzt:

$$(2) \qquad K(x,\xi) = \xi^{\alpha x}\,.\,B(\xi). \qquad (\alpha \text{ konstant}).$$

Eine Transformation, die auch der Forderung C genügt, läszt sich nicht im allgemeinen Fall angeben.

Auch die Transformation (2) stammt schon von Laplace und wird mit verschiedenen Modifikationen in der Theorie der Differenzengleichungen angewandt. Wenn man nur die Absicht hat, eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten in der einfachsten Weise in eine algebraische Gleichung umzusetzen, kann man am einfachsten

$$(3) \qquad \alpha = 1 \text{ und } B(\xi) = 1, \text{ also } K(x,\xi) = \xi^{x}$$

setzen.

[1]) S. Definition Θ : Formel (17, 12a).

In der Tat findet man diese Transformation

$$f(x) = \int d\xi \,.\, \xi^x \varphi(\xi) \tag{4}$$

schon bei Laplace[1]) mit der oben erwähnten Anwendung. Offenbar beeinfluszt die Wahl von $B(\xi)$ unsre Betrachtung gar nicht; man findet z. B. auch den Fall

$$B(\xi) = \xi^{-1}, \text{ also } K(x, \xi) = \xi^{x-1} \text{ [2])}. \tag{5}$$

Die wichtigsten Eigenschafte der Transformationen die der Bedingung $\alpha = 1$ genügen:

$$\Theta \ldots \doteq \xi \ldots, \text{ für } K(x, \xi) = \xi^x \text{ und } K(x, \xi) = \xi^{x-1}.$$

Weiter hat man im Fall $K(x, \xi) = \xi^x$: (6)

$$\begin{aligned}
&\Delta \ldots \doteq (\xi - 1) \ldots, \qquad \Delta^n \ldots \doteq (\xi - 1)^n \ldots, \\
&\frac{d}{dx} \ldots \doteq \log \xi \ldots, \qquad \int dx \ldots \doteq \log^{-1} \xi \ldots, \\
&\frac{d^n}{dx^n} \ldots \doteq \log^n \xi \ldots, \qquad x \ldots \doteq -\frac{d}{d\xi} \xi \ldots, \\
&x(x-1) \ldots (x-n) \ldots \doteq (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \xi^n \ldots, \\
&\frac{1}{x} \ldots \doteq -\xi^{-1} \int d\xi \ldots.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die drei letzten Formeln (die im Fall $K(x, \xi) = \xi^{x-1}$ eine etwas verschiedene Gestalt annehmen), sind nur richtig, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind an den Grenzen des Integrationsweges (z. B. geschlossener Integrationsweg bei eindeutiger Funktion) weil man diese Relationen mittels partieller Integration erhält.

Diese Transformationen sind sehr nützlich im Fall der Differenzenoperatoren, aber im Fall der Differentialoperatoren sind sie völlig ungeeignet, wie man im Schema (7) sieht.

---

[1]) Laplace, Oeuvres VII S. 122, 127, 131.

[2]) Laplace, Oeuvres VII S. 163; Nörlund, Differenzengleichungen, S. 316; Pincherle, Ann. Ecole normale (3) 22 (1905) 9.

Auch findet man in der Literatur oft den etwas anderen Fall $\alpha = -1$ mit $B(\xi) = 1$ [1]) oder mit $B(\xi) = \xi^{-1}$.

Die letzte Transformation

$$f(x) = \int d\xi\, \xi^{-x-1} \varphi(\xi)$$

hat die Eigentümlichkeit eine Funktion in die Laplacesche „fonction génératrice" zu transformieren [2]).

2. *Fonction génératrice.*

Man zeigt dieses folgenderweise.

Laplace betrachtet [3]):

$$\varphi(\xi) = f(0) + f(1)\,\xi + f(2)\,\xi^2 + \ldots + f(n)\,\xi^n + \ldots \tag{8}$$

$\varphi(\xi)$ nennt er „fonction génératrice" von $f(x)$. Oft nennt man $f(x)$ „fonction déterminante".

Offenbar ist

$$f(x) = \frac{1}{x!} f^{(x)}(0). \tag{9}$$

wenn $f^{(x)}$ die x-te Ableitung ist von $f(\xi)$.

Dieses kann man schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\xi\, \xi^{-x-1} \varphi(\xi), \tag{10}$$

nach dem Cauchyschen Satze. Der Integrationsweg C ist ein geschlossener Weg in der komplexen Fläche, der O einschlieszt.

Aus (10) ergibt sich:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \xi^{-x-1}. \tag{11}$$

Die „fonction génératrice" ist von Abel [4]) weiter betrachtet, dieser und spätere Autoren haben den Begriff so erweitert, dasz jetzt jede Funktion $\varphi(\xi)$ in einem Ausdruck

$$f(x) = \int d\xi\, K(x, \xi)\, \varphi(\xi) \quad (K \text{ beliebig}) \tag{12}$$

---

[1]) Laplace, Oeuvres VII S. 94.

[2]) Laplace, Oeuvres VII S. 92.

[3]) Laplace, Oeuvres VII S. 8.

[4]) Abel, Gesamm. Werke, herausg. Sylow u. Lie II, 67.

fonction génératrice genannt wird und die dazu gehörende Funktion $f(x)$ den Namen „fonction déterminante" hat[1]).

3. *Anwendung der Transformationen auf Differenzengleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten.*

Wir ermittelten, dasz Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten transformiert werden in algebraische Gleichungen. Aus dem Schema der Transformation (6) ergibt sich, dasz im Falle von nichtkonstanten Koeffizienten die Differenzengleichung in eine Differentialgleichung transformiert wird. Wie die allgemeine lineare Differenzengleichung mit dieser Methode transformiert werden kann ist von Mellin[2]) erörtert. Näheres findet man auch z. B. bei Nörlund[3]).

Die hier betrachteten Laplaceschen Transformationen sind geeignet, Differenzengleichungen in algebraische oder in Differentialgleichungen zu transformieren. Die Frage drängt sich auf, ob es vielleicht auch möglich sei, das Umgekehrte darzustellen?

4. *Inverse Transformation.*

Um diese umgekehrte Transformation zu suchen, verfahren wir folgenderweise: Wir wollen eine Transformation finden, die $x f(x)$ umsetzt in eine Funktion, welche Operatoren der Differenzenrechnung erhält.

Wenn die Grenzen der Integration $\pm \infty$ sind oder wenn der Integrationsweg geschlossen ist kann man statt:

$$x f(x) = \int d\xi \, x \, K(x, \xi) \, \varphi(\xi) \tag{13}$$

mittels andrer Wahl der Integrationsvariabelen setzen:

$$x f(x) = \int d\xi \, x \, K(x, \xi + 1) \, \varphi(\xi + 1) . \tag{14}$$

Wir setzen:

$$x K(x, \xi) = K(x, \xi - 1) . \tag{15}$$

---

[1]) z. B. Pincherle, Acta Math. 36 (1914) 269.

[2]) Mellin, Acta Math. 25 (1902) 139. Die Mellinsche Arbeit bezieht sich auf partiellen Differenzengleichungen; für gewöhnliche Differenzengleichungen war dies schon von Pincherle untersucht: Pincherle, Istit. Lombardo 1887.

[3]) Nörlund, Differenzengleichungen.

dann ergibt sich, mit geeignetem Integrationswege:

(16) $$x f(x) \doteqdot \Theta\, \varphi(\xi).$$

Man kann (15) erfüllen mit:

(17) $$K(x, \xi) = x^{-\xi}\, b(x).$$

Die Transformationen mit diesem Kerne ermöglichen die Umsetzung einer algebraischen Gleichung in eine Differenzengleichung.

Die Transformation ist auch geeignet, wenn es sich handelt um die Umsetzung einer linearen Differentialgleichung in eine Differenzengleichung.

Man erhält z. B. im Fall $b(x) = 1$:

(18) $$\frac{d}{dx} f(x) = - \int d\xi\; \xi x^{\xi - 1}\, \varphi(\xi),$$

und durch andere Wahl der Integrationsvariabelen:

(19) $$\frac{d}{dx} f(x) = - \int d\xi\;\; x^{-\xi}(\xi - 1)\, \varphi(\xi - 1),$$

also:

$$\frac{d}{dx} f(x) \doteqdot - (\xi - 1)\, \Theta^{-1} \varphi(\xi).$$

Man erhält kein einfaches Ergebnis, wenn man versucht Θ zu transformieren.

5. *Inversion mittels des Mellinschen Satzes.*

Die im Vorhergehenden betrachtete Transformation mit Kerne (17) ist die inverse der im Anfang dieses Paragraphen betrachteten Transformation. Man kann sie auch finden mittels der Mellinschen Umkehrungssätze [1]). Hat man

(20) $$f(x) = \int_0^\infty d\xi\, \xi^{-1} \varphi(\xi),$$

so kann daraus geschlossen werden:

(21) $$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} dx\, \xi^{-x} f(x)\, dx, \quad (\sigma \text{ reell}).$$

Die Funktionen müssen allerdings gewissen Bedingungen erfüllen [1]).

[1]) Siehe § 18: (18, 11), (18, 12).

Die Formel (20) bezieht sich auf den Fall (6), die Inversion (21) ist im Einklang mit (17).

§ 21. Zusammenhang mit Transformationen der Quantenmechanik.

Auch in der Quantenmechanik gibt es Transformationen, die den hier erörterten sehr ähnlich sind. Darlegungen darüber findet man z. B. in den Diracschen Arbeiten [1]. Die von uns betrachteten Funktionen kann man auffassen als geometrische Gröszen und zwar als Vektore in einem ∞-dimensionalem Raum. Die Komponenten f_x dieses Vektors schreibt man dann $f(x)$. Eine Transformation der Komponenten f_x auf neue Koördinaten ξ:

(1) $$\varphi_\xi = \Sigma K_\xi^x f_x$$

wird dann:

(2) $$\varphi(\xi) = \int d\xi \, K(x, \xi) f(x),$$

und diese Transformation war gerade unser Ausgangspunkt (16, 4).

In der Quantenmechanik betrachtet man auszer den Transformationen von solchen Vektoren $f(q')$ vor allem die Transformationen von Tensoren zweiten Ranges $f(q', q'')$, die „Matrizen" der Quantenmechanik. Die Natur dieser Transformationen ist aber ganz dieselbe als die der unsrigen. Besonders ist das der Fall mit der Transformation, die eine quantenmechanische Funktion von q transformiert in eine Funktion der zu q „kanonisch konjugierten" Grösze p. Zwei Gröszen p und q nennt man in der Quantenmechanik (im einfachsten Fall) kanonisch konjugiert, wenn sie der Bedingung:

(3) $$qp - pq = i \mathrm{h} \, 1$$

genügen. 1 ist hier die Einheitsmatrix, d. h. eine Matrix mit Elementen $\delta(q' - q'')$ [2]; $\mathrm{h} = h/2\pi$.

[1]) P. A. M. Dirac, viele Abh. in Porc. Roy. Soc. London A, besonders 113 (1927) 621.

[2]) S. bei (8, 2).

Diese Vertauschungsrelation ist der Vertauschungsrelation der Operatorenrechnung [1]) sehr ähnlich.

Man setzt in der Quantenmechanik $p = -i\,\mathrm{h}\,\frac{d}{dq}$, also auch bis auf den Faktor $-i\,\mathrm{h}$, wie in der Operatorenrechnung.

Man hat[2]):

$$p\,K(q,p) = \pm\, i\,\mathrm{h}\,\frac{d}{dq}\,K(q,p), \tag{4}$$

und daher, mit Normierungskonstante:

$$K = h^{-1/2}\,e^{\pm\, ipq/\mathrm{h}}. \tag{5}$$

Die Transformation ist also bis auf einen Faktor mit der „Fourierschen Transformation" identisch.

Der Unterschied mit der Transformation der Operatorenrechnung ist darin gelegen, dasz diese Transformation nicht der Forderung C (§ 17):

$$1\,(p) \doteqdot 1\,(q) \tag{6}$$

genügt.

Anstatt dieser Forderung tritt in der Quantenmechanik die folgende Forderung ein:

$$\delta\,(p' - p'') \doteqdot \delta\,(q' - q''), \tag{7}$$

d. h.: die Einheitsmatrix wird in die Einheitsmatrix transformiert. In der Tat erhält man, unter Anwendung der Form (5):

$$\begin{aligned}\int\!\!\int dp'\,dp''\,h^{-\frac{1}{2}}\,e^{ip'q'/\mathrm{h}}\,h^{-\frac{1}{2}}\,e^{-ip''q''/\mathrm{h}}\,\delta\,(p' - p'') &= \\ = \int dp'\,h^{-1}\,e^{ip'(q'-q'')/\mathrm{h}}&,\end{aligned} \tag{8}$$

diese Funktion ist gerade mit $\delta(q' - q'')$ identisch: es gilt ja nach dem Fourierschen Integrale:

$$f(q'') = \int\!\!\int dq'\,dp'\,h^{-1}\,e^{ip'(q'-q'')/\mathrm{h}}\,f(q') \tag{9}$$

[1]) S. (2, 7) mit $y = 1$.

[2]) S. z. B. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A 113 (1927) 621. Formel (11).

und die Definition von $\delta(q' - q'')$ war: $\delta(q' - q'')$ ist eine solche Funktion, dasz:

$$f(q'') = \int dq' \, \delta(q' - q'') f(q'). \tag{10}$$

Die Gleichung (7) ist in der Operatorenrechnung nicht erfüllt, es gilt da vielmehr:

$$p\, H(x) = \delta(x) \tag{11}$$

und allgemeiner:

$$pe^{-\varkappa p} H(x) = \delta(x - \varkappa) \tag{12}$$

Wir beweisen die Relation (12) mittels des Carsonschen Integrales (18, 10):

$$\int_0^\infty dx\, pe^{-px} \delta(x - \varkappa) = pe^{-\varkappa p} H(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

§ 22. Schema.

Bequemlichkeitshalber haben wir alle erörterte Transformationen im folgenden Schema zusammengebracht.

Die Andeutungen „Laplace 92", u.s.w. beziehen sich auf Seiten von: Laplace, Oeuvres, VII. — „Nörlund" bezieht sich auf: Nörlund, Differenzengleichungen. — „Pincherle, Ecole Normale" bezieht sich auf: Annales Ecole normale (3) 22 (1905) 9.

Die Ziffern wie (20, 5) deuten die Formeln in dieser Abhandlung an.

Das Carsonsche Integral findet keine Stelle in diesem Schema, weil es der ersten Forderung (Ford. A) nicht genügt: die Transformation übersetzt den Operator $\frac{d}{dp}$ *nicht* in eine lokale Operation.

Nach (19, 7) gilt ja:

$$-p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} \ldots = x \ldots .$$

Also ist

$$\frac{d}{dp} \ldots = \frac{1}{p} p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} p \ldots = - \int dx\, x \frac{d}{dx} \ldots ,$$

und dieses ist, wegen des Integrales, keine lokale Operation.

Schema.

Allgemeine Transformation (16, 4)
Kern $= K(x, \xi)$

- Forderung A: $\dfrac{d}{dx} \to$ linearer lokaler Operator.
  - $K(x, \xi) = e^{x\,\alpha(\xi)}\, B(\xi)$
    - Forderung B: $\dfrac{d}{dx} \to \alpha\xi$
      $K(x, \xi) = e^{x\alpha\xi} B(\xi)$
      (17, 5)
      - $\alpha = +1$
        - Forderung C: $1(x) \doteq 1(\xi)$
          $K = \dfrac{1}{\xi}\, e^{x\xi}$
          (Heaviside)
          Bromwich
          (17, 17)
        - $K = e^{x\xi}$
          „Laplace I"
          Laplace 131
          (19, 1)
      - $\alpha = -1$
        $K = e^{-x\xi}$
        „Laplace II"
        Laplace 173
        (19, 2)
      - $\alpha = \pm i$
        $K = e^{\pm ix\xi} / \sqrt{2\pi}$
        Fourier
        (19, 3)
      - $= \pm\, ih$
        $K = e^{\pm ix\xi/h} / \sqrt{h}$
        Quantenmechanik
        (21, 5)
    - Forderung B′: $\Theta \to \alpha\xi$
      $K = \xi^{\alpha x} B(\xi)$
      (20, 2)
      - $K = \xi^{-x-1}$
        „Fonction génératrice"
        Laplace 92
        (20, 11)
      - $K = \xi^{x}$
        Laplace 122, 127, 131
        (20, 3)
      - $K = \xi^{-x}$
        Laplace 94
      - $K = \xi^{x-1}$
        Nörlund 316
        Laplace 163
        Pincherle, Ecole Norm.
        (20, 5)
  - Andere Kerne
    - Quasi-identische Transformation
      $K(x, \xi) = \psi(x - \xi)$
      - Spez. $K = (x - \xi)^{-1}$
        Pincherle, A. R. Linc. Roma 1904
        (17, 8)
    - $K = \psi(x + \xi)$
      u. ä.

Man könnte ein analoges Schema zusammensetzen der inversen Transformationen, mit als Hauptforderung: Die Multiplikation p transformiere sich in die Operation $\frac{d}{dx}$ (Inversion der Forderungen A und B), und würde darin das Carsonschen Integral begegnen.

§ 23. Anwendung der Transformationstheorie in der Operatorenrechnung.

Die meisten Ergebnisse der ersten Methode lassen sich auch erhalten mit dem Bromwichschen oder auch mit dem Carsonschen Integrale, d. h. nach unsren Auseinandersetzungen mit der Transformation von p nach x oder mit der Transformation von x nach p. Der gröszte Unterschied ist der, dasz das p in der Transformationstheorie kein Operator mehr ist, aber eine gewöhnliche algebraische Grösze. Daher ist es in diesem Gebiete unmöglich, wie in unsrer Operatorenalgebra, Formeln zu betrachten, die zugleicherzeit p und x enthalten.

Bromwichsche Methode.

Diese Methode ist von verschiedenen Autoren sehr eingehend dargestellt, wir verweisen auf Lowry[1]) für die Ableitung der wichtigsten Uebersetzungen mit dieser Methode und auf Schouten[2]) für die Anwendung zur Lösung von Differentialgleichungen, „Expansion Theorem", u.s.w. Die Methode führt zu denselben Resultaten wie in Kap. I, aber die Rechnungen sind oft auch in einfachen Fällen so umständlich, dasz der Charakter einer verkürzten Rechnungsweise ganz verloren geht. Die Methode hat aber den Vorteil, auch gebrochene Exponenten von p betrachten zu können; diese haben als Operator keinen einfachen Sinn, sind also in Methode I schwer zu behandeln.

Beispiele der Anwendung der Bromwichschen Methode.

Zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(p)$ entsprechen einander:

(1) $$f(x) \doteq \varphi(p),$$

[1]) H. V. Lowry, Phil. Mag. VII 13 (1932) 1033.

[2]) Schouten, Diss. Delft 1933.

wenn sie durch das Bromwichsche Integral (17, 17):

$$f(x) = \int_C dp \frac{e^{px}}{p} \varphi(p) \tag{2}$$

verknüpft sind. So hat man:

1. $$\frac{d}{dx} f(x) = \int_C dp \frac{d}{dx} \frac{e^{px}}{p} \varphi(p) = \int_C dp \frac{e^{px}}{p} p\varphi(p),$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \doteqdot p\varphi(p) \tag{3}$$

2. $$x f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp\, x \frac{e^{px}}{p} \varphi(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dp \frac{e^{px}}{p} p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} \varphi(p),$$

nach partieller Integration; daher:

$$x f(x) \doteqdot -p \frac{p}{dp} \frac{1}{p} \varphi(p). \tag{4}$$

Beispiele von speziellen Uebersetzungen:

p^{-n}:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C dp \frac{e^{px}}{p} p^{-n} = \frac{x^n}{n!}, \quad \text{für alle Werte von } x. \tag{5}$$

p^n:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C dp \frac{e^{px}}{p} p^n = 0 \tag{6}$$

Carsonsche Methode.

Die Rechnungen sind kürzer als bei den Bromwichschen Integralen, aber in sehr wichtigen und einfachen Fällen ist die Methode unbrauchbar, z. B. für ganze positive Potenzen von p. Auch ist die Methode nicht anwendbar für negatives x, also kann sie nicht als mathematische Grundlage der allgemeinen Theorie verwendet werden. Auf dem heuristischen Wege hat sie viel geleistet. Wir verweisen auf Carson[1]), van der Pol[2]) für Beispiele und

---

[1]) Carson, Electric Circuit Theory. Mc Graw Hill 1931.

[2]) v. d. Pol, I, II, III, IV.

Anwendungen. Carson betrachtet nur elektrotechnische Anwendungen; Van der Pol auch allgemeine Anwendungen, mit sehr interessanten Beispielen.

In diesem Fall sind die Funktionen

(7) $\varphi(p) \doteqdot f(x)$, hier eigentlich $\varphi(p) \doteqdot f(x)\, H(x)$

durch das Integral (18, 8):

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty dx \; e^{-px} f(x) \tag{8}$$

mit einander verknüpft.

Beispiele:

$$p\,\varphi(p) = p \int_0^\infty dx\, p e^{-px} f(x) = p \int_0^\infty d\,x \; e^{-px} \frac{d}{d\,x} f(x), \tag{9}$$

mittels partieller Integration, wenn $f(0) = 0$ und $f(\infty)$ höchstens mit endlicher Ordnung unendlich wird. In diesem Fall ergibt sich also:

$$p\,\varphi(p) \doteqdot \frac{d}{dx} f(x) \tag{10}$$

und wenn $f(0) \neq 0$:

$$p\varphi(p) - p\,f(0) \doteqdot \frac{d}{dx} f(x), \tag{11}$$

ganz im Einklang mit unsrem Ergebnis im ersten Kapittel.

$$p \frac{d}{dp} \varphi(p) = p \frac{d}{dp} \int_0^\infty d\,x \; e^{-xp} f(x) = -p \int_0^\infty d\,x \; e^{-xp}\, x\, f(x),$$

daher:

$$-p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} \varphi(p) \doteqdot x\, f(x). \tag{12}$$

Beispiele von speziellen Uebersetzungen:

Der Γ-Integral ergibt:

(13) $\Pi(n)\, p^{-n} = p \int_0^\infty dx \; e^{-px}\, x^n$, für x positiv reell.

Im Fall von p^n (n positive ganze Zahl) versagt diese Methode. Die Methode des ersten Kapitels ergibt aber in diesen Falle die richtige Uebersetzung.

Weil die Carsonsche Methode sich auf den Fall der Einheitsfunktion bezieht, gilt nach (8, 3):

$$p\,H(x) = \delta(x), \tag{14}$$

$$p^n\,H(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,\delta(x). \tag{15}$$

Diese „Impulsfunktionen" sind, besonders in elektrotechnischen Anwendungen, sehr oft brauchbar. Die Formel (11, 24′):

$$\delta(x-\alpha) = e^{-\alpha p}\,\delta(x) \tag{16}$$

gestattet noch weitere Anwendungen.

§ 24. Ueberblick.

Wir schlieszen diese Abhandlung ab mit einem kurzen Ueberblick der Methoden der Operatorenrechnung.

Methode I.

Grundsatz: p ist der Operator d/dx.

α. Wie im ersten Teil dieser Abhandlung erörtert ist, ist diese Methode in vielen Fällen völlig ausreichend. Sie hat den Vorteil einer groszen Einfachkeit und Durchsichtbarkeit, sie gestattet prinzipiell Uebersetzung von *jeder* Funktion, mittels (10, 8), und enthält die Möglichkeit von Funktionen die p und x *beide* enthalten.

Gebrochene Potenzen von p kann man aber in dieser Methode nur durch Definitionen ad hoc einführen (§ 15).

β. Wenn man Impulsen braucht (siehe (8, 3), (11, 24′)) musz man die Operatoren auf die „Einheitsfunktion" $H(x)$ (siehe (8, 1), (8, 4)) statt auf die gewöhnliche Einheit ausüben.

Methode II.

Grundgedanke: p ist eine neue Variabele; die Uebersetzung der Funktion $f(x)$ in $\varphi(p)$ geschieht mit einem Integrale.

α. B r o m w i c h sches Integral α:

$$f(x) = \int\limits_C dp \frac{e^{xp}}{p} \varphi(p), \qquad (17, 17) \quad (C \text{ umfaszt alle Pole}).$$

Wir haben im zweiten Teil dieser Abhandlung einen natürlichen Weg angegeben, zu diesem Integral zu gelangen.

Dieses Integral ist das Aequivalent der Methode I α; man kann aber auch gebrochene Werte von p zwanglos berücksichtigen, die Methode ist aber weniger einfach und durchsichtig. Die Methode ist besonders von Lowry hervorgehoben.

α'. Eine allgemeine Inversion des Integrales (17, 17) zur umgekehrten Uebersetzung von $\varphi(p)$ in $f(x)$ läszt sich nicht angeben (§ 18).

β. Bromwichsches Integral β:

$$f(x)\, H(x) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{xp}}{p} \varphi(p) \qquad (17, 21) \quad \text{und:}$$

β'. seine Inversion, das Carsonsche Integral:

$$\varphi(p) = \int\limits_0^\infty dx\, p\, e^{-xp} f(x) \qquad (18, 8)$$

beziehen sich nur auf Funktionen, die Null sind wenn $x < 0$ (allgemeiner: wenn x einen positiven Realteil enthält). Sie haben die Eigenschaft Impulsfunktionen $\delta(x)$ in einfache Formen zu übersetzen (siehe (23, 16)) und sind der Methode I β analog. Die Methode ist z. B. am Besten geeignet in den Fällen der elektrotechnischen Anwendungen. Besonders van der Pol hat die Methode II β' weiter entwickelt.

Die Methoden II sind nur anwendbar, wenn die Integrale konvergieren, sie haben oft den Nachteil, dasz längere Ueberlegungen, besonders zur Auswertung der Bromwichschen Integrale, unvermeidlich sind. Funktionen, die p und x zusammen enthalten, sind im Gedankengang dieser Methode ausgeschlossen.

Unterschied zwischen Methode II und Laplaceschen Transformation.

Wir haben gezeigt, dasz der Unterschied zwischen Methode II und der Laplaceschen Methode zur Lösung von Differentialgleichungen darin gelegen ist, dasz die Transformationen der Methode II auszer allen Eigenschaften der Laplaceschen Transformationen auch noch die spezielle Eigenschaft haben, dasz bei der Transformationen im Fall II α eine additive Konstante nach der Transformation ihren Wert beibehält:

$$a \doteqdot a$$

und im Fall II β bei Uebersetzung von der p-Sprache in die x-Sprache folgenderweise übersetzt wird:

$$a \doteqdot a \,.\, H(x)$$

d. h. eine Konstante in der p-Sprache behält ihren Wert in der x-Sprache wenn $x > 0$, aber wird 0 wenn $x < 0$. Siehe Forderung C, § 17, und auch (18, 20).

SAMENVATTING.

Inleiding.

In dit werk is getracht den aard op te sporen van de methodes die worden gebruikt onder den naam van „operatorenrekening van Heaviside".

Methode I.

In het eerste deel is, uitsluitend steunende op de definitie van de operator p:

$$p = \frac{d}{dx},$$

de operatorenrekening afgeleid.

De methode kenmerkt zich door grooten eenvoud, zij levert op zeer korte wijze de oplossingen van differentiaalvergelijkingen, terwijl de vorm, waarin men de oplossingen verkrijgt, aangepast is aan de beginconstanten van het probleem, zoodat zij voor de physische toepassingen geschikter zijn dan die men op de gewone wijze verkrijgt. Daarenboven leent de methode zich op zeer eenvoudige wijze tot het invoeren van zoogenaamde impulsfuncties, welke in zoo vele natuurkundige problemen optreden.

Methode II.

In het tweede deel zoeken wij een transformatie, die het mogelijk maakt een vorm in x zoo te transformeeren, dat de nieuwe veranderlijke p juist een vertaling wordt van de operatie d/dx. Indien dus de functie $f(x)$ getransformeerd wordt in $\varphi(p)$:

$$f(x) \doteq \varphi(p)$$

eischen wij:

$$\frac{d}{dx} f(x) \doteq p\,\varphi(p).$$

Wij komen zoo tot een *afleiding* van de twee integralen, die Bromwich zonder nadere verklaring poneerde tot het verkrijgen van de operatorenrekening.

Op dergelijke wijze verkrijgen wij een afleiding van de integraal, die Carson tot het uitgangspunt maakte van de operatorenrekening.

Tevens verschaft onze beschouwing ons een inzicht in het verband tusschen deze transformaties en de transformatiemethodes van Laplace tot het oplossen van differentiaalvergelijkingen en van differentievergelijkingen.

Ook het verband met de quantamechanica wordt onderzocht.

De methodes worden in een schema vereenigd: § 22.

Bij vergelijking der methodes I en II komen wij tot de conclusie, dat methode II dezelfde voordeelen levert als methode I, maar met minder eenvoudige berekeningen. Evenwel leidt methode II tot resultaten, die met methode I bezwaarlijk te bereiken zijn.

Methode I. Operatorenalgebra.

Wij definieeren niet zonder meer $dy/dx = py$, maar wanneer het gaat om de oplossing y der differentiaalvergelijking, stellen wij:

$$\frac{dy}{dx} = py - py(0). \qquad (1, 15)$$

waarin $y(0)$ de waarde voorstelt van $y(x)$ voor $x = 0$. Op deze wijze is het mogelijk de algemeene oplossing der differentiaalvergelijking met operatoren te verkrijgen, terwijl men anders alleen de oplossing zou verkrijgen die voldoet aan $y(0) = 0$.

On dergelijke wijze wordt de definitie van hoogere machten van p gemodifieerd (§ 5).

Voor negatieve machten van p gaan wij uit van de definitie:

$$\int_0^x dx \ldots = p^{-1} \ldots \qquad (1, 8)$$

Wij toonen aan, dat er eenvoudige commutatieregels bestaan, die een algebra mogelijk maken van functies, die zoowel p als x bevatten, en die, op de factor $h/2\pi i$ na, dezelfde vorm hebben als de commutatieregels, die men in de quantamechanica kent.

Men krijgt dus vormen als:

$$[px - xp]\, y = y. \tag{2, 7}$$

Men kan met deze regels gemakkelijk de „vertaling" vinden van de eenvoudige functies van de „p-taal" in de „x-taal" en omgekeerd.

Niet steeds verkrijgen wij een enkele vertaling van de functie; bij de exponentieele functie en de hiermee samenhangende functies krijgt men verschillende vertalingen. Zoo heeft men:

$$e^{\alpha x} = \frac{p}{p - \alpha} \cdot 1, \tag{3, 10}$$

maar b.v. ook:

$$e^{\alpha x} = \frac{p^n}{\alpha^{n-1}(p - \alpha)} \cdot 1 \tag{3, 19}$$

Oplossing van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten.

Door de omzetting van zulk een differentiaalvergelijking in de p-taal gaat zij over in een algebraische vergelijking. Een vergelijking van de n-de orde wordt door de definitie $p = d/dx$ omgezet in een vergelijking van de n-de graad in p. Men lost hieruit de gezochte functie y op, en verkrijgt:

$$y = \frac{u(p)}{v(p)} \cdot 1. \tag{5, 12}$$

De gemakkelijkste oplossing verkrijgt men door deze breuk te splitsen op de bekende wijze:

$$\frac{u(p)}{v(p)} = \frac{u(0)}{v(0)} + \sum_{\alpha} \frac{u(\alpha)}{\alpha\, v'(\alpha)} \frac{p}{p - \alpha}, \tag{5, 14}$$

waarin α de wortels van $v(p) = 0$ zijn. Dit levert, weer in x-taal geschreven:

$$y = \frac{u(0)}{v(0)} + \sum_{\alpha} \frac{u(\alpha)}{\alpha\, v'(\alpha)} e^{\alpha x}. \tag{5, 15}$$

Dit resultaat is bekend onder den naam „expansietheorema van Heaviside".

Een eenvoudig voorbeeld ter toelichting. Gevraagd y op te lossen uit:

$$\frac{dy}{dx} - 3\,y = 3, \tag{6, 1}$$

met als beginvoorwaarde:

$$y_0 = 2.$$

De vergelijking wordt, met (1, 15):

$$py - p\,2 - 3\,y = 3,$$

en dus verkrijgt men:

$$y = \frac{2\,p + 3}{p - 3}\,.\,1 = -1 + \frac{3\,p}{p - 3}\,.\,1.$$

In x-taal wordt dit:

$$y = -1 + 3\,e^{3x}. \tag{6, 2}$$

In bepaalde gevallen kan men met voordeel de operatoren doen werken op de z.g. *„eenheidsfunctie"* $H(x)$, die gedefinieerd wordt door:

$$H(x) = 0 \text{ voor } x < 0,$$
$$H(x) = 1 \text{ voor } x > 0.$$

Als „differentiaalquotient" $\delta(x)$ van deze functie:

$$p\,H(x) = \delta(x)$$

en meer algemeen:

$$e^{-ap}\,p\,H(x) = \delta(x - a),$$

kan men een functie beschouwen, die overal nul is, behalve op de plaats $x = a$, en die daar een zoodanige waarde heeft, dat:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx\, f(x)\,\delta(x - a) = f(a). \quad (\alpha < a < \beta) \tag{8, 2}$$

Deze functie is geschikt tot het in rekening brengen van impulsen in de operatorenrekening; in de quantamechanica is zij door Dirac ingevoerd.

Een *hoofdstelling* is: Wanneer $y(x) = \varphi(p).1$, geldt:

$$x\,y(x) = -p\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\,\varphi(p)\,.\,1. \qquad (10,5)$$

Dit maakt het mogelijk elke functie van x direct om te zetten in een functie van p, indien men elke x vervangt door:

$$-p\,\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\,.$$

Reeksontwikkelingen in de p-taal worden niet naar positieve machten van p uitgevoerd, omdat positieve machten van p in x vertaald 0 leveren:

$$p^n\,.\,1 = 0. \qquad (3,5)$$

In zulk een geval stelt de restterm de geheele functie voor.

Aangezien de p slechts als symbool wordt opgevat is onderzoek naar de convergentie in de p-taal van geen belang (dit geldt niet als men van methode II uitgaat). Het komt slechts aan op de convergentie van de x-reeks, die eigenlijk wordt voorgesteld.

Aangezien negatieve machten van p als volgt vertaald worden:

$$p^{-n}.\,1 = \frac{x^n}{n!}\,.\,1, \qquad (3,3)$$

zal een reeksontwikkeling naar negatieve machten van p een eenvoudige reeks in de x-taal geven. Men ontwikkelt dus bij voorkeur naar negatieve machten van p:

$$y = a_0 + a_1\,p^{-1} + a_2\,p^{-2} + \ldots\ldots \qquad (12,11)$$

met als vertaling in x-taal:

$$y = a_0 + a_1\,\frac{x}{1!} + a_2\,\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots \qquad (12,12)$$

Deze reeksontwikkeling wordt vaak toegepast bij oplossingen van differentiaalvergelijkingen en is dan bekend onder den naam „power series solution" van Heaviside.

In de literatuur der bekende D-operatoren vindt men wel reeksontwikkelingen naar positieve machten van de operator p of D tot het oplossen van niet-homogene differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten. De restterm wordt hierbij niet beschouwd.

Een onderzoek van dit geval brengt ons tot de conclusie:
Regel: Wanneer men de oplossing

$$y = y_h + \frac{1}{v(p)} F(x) \tag{12, 30}$$

(y_h = oplossing homogene differentiaalvergelijking)

der differentiaalvergelijking:

$$\sum_0^n a_k \frac{d^k}{dx^k} y = F(x) \tag{13, 31}$$

door een ontwikkeling naar positieve machten van p verkrijgen wil:

$$y = y_h + (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots) F(x) \tag{12, 32}$$

vindt men wel de juiste oplossing, maar niet meer in de beginconstanten uitgedrukt.

De operatoren leveren ook uitstekende resultaten bij de *oplossing van lineaire differentiaalvergelijkingen met niet-constante coëfficienten*. Men verkrijgt in dit geval bij vertaling in de p-taal geen algebraische vergelijking, maar een differentiaalvergelijking. Men verkrijgt, wanneer de hoogste graad der coëfficienten m is, bij vertaling in de p-taal een differentiaalvergelijking van de m-e orde. Ook het omgekeerde is waar.

Bij negatieve machten van x in de coëfficienten kan men meestal het gemakkelijkst deze negatieve machten door vermenigvuldiging verdrijven. Men kan ze echter ook direct in de p-taal overbrengen met behulp van de formule:

$$x^{-n} f(p) = p \left(- \int dp \right)^n \frac{1}{p} f(p). \tag{15, 11}$$

Wanneer de coëfficienten der oorspronkelijke differentiaalvergelijking alleen exponentieele functies bevatten, wordt de p-vergelijking een *differentie*vergelijking. Immers:

$$e^{-\alpha x}\, y = \frac{p}{p+\alpha}\, \varphi(p+\alpha)\,.\,1. \qquad (3, 16)$$

Uitbreiding der theorie.

Het is mogelijk, met behulp van de functie de definitie van p uit te breiden tot gebroken waarden van n:

$$p^{-n}\,.\,1 = \frac{x^n}{\Pi(n)}\,. \qquad (15, 2)$$

Voor negatieve machten van x vindt men volgens de bovengenoemde formule (15, 11):

$$x^{-n}\,.\,1 = \frac{(-p)^n}{(n-1)!}\log p\,.\,1. \qquad (15, 14)$$

Met behulp hiervan kan men asymptotische reeksontwikkelingen verkrijgen.

Methode II. Transformatietheorie.

De methode van Heaviside berust op het invoeren van de multiplicatieve operator p in plaats van de operator d/dx.

Beide operatoren zijn lineair.

Wij vragen ons af: aan welke eischen moet een lineaire transformatie voldoen om de differentiatie-operator om te zetten in een multiplicatie?

Wij beschouwen de zeer algemeene lineaire transformatie:

$$f(x) = \int d\,\xi\, K(x, \xi)\, \varphi(\xi) \qquad (16, 4)$$

en vragen ons af, aan welke bijzondere voorwaarde deze algemeene transformatie moet voldoen, om de nieuwe variabele ξ de eigenschappen van $d/dx = p$ te geven.

Deze bijzondere kenmerken zijn:

A. De operator d/dx wordt getransformeerd in een locale lineaire operatie (met locaal bedoelen wij een operator, die slechts werkt op x en de infinitesimale omgeving van x, dus b.v. geen integratie).

B. Nog verder specialiseerende eischen wij, dat d/dx wordt getransformeerd in de operator der vermenigvuldiging:

$$\frac{d}{dx}\ldots = \alpha\,\xi\ldots \quad (\alpha \text{ constant}) \tag{B}$$

C. Bij de transformatie moet een constante term in een constante term van dezelfde waarde worden getransformeerd:

$$1 \doteq 1. \tag{C}$$

Wij toonen aan, dat deze drie eischen de genoemde vergelijking (16, 4) specialiseeren tot:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C dp\,\frac{e^{px}}{p}\varphi(p) \tag{16, 17}$$

en dit is inderdaad de integraal, die Bromwich, zij het zonder afleiding, heeft voorgesteld tot grondslag van de operatorenrekening.

α. De gewone operatorenrekening, zooals wij die hebben uiteengezet in het eerste deel, verkrijgt men door als integratieweg voor deze integraal een gesloten contour te nemen, die alle in het eindige gelegen polen van de integrand omsluit.

β. Men kan echter ook als eisch stellen, in plaats van C:

C'. Bij de transformatie moet de eenheidsfunctie $H(x)$ worden, overgevoerd in de eenheid:

$$H(x) \doteq 1,$$

in dit geval kan men uitsluitend functies beschouwen, die nul zijn voor $x < 0$.

Stelt men deze eisch, dan moet men als integratieweg voor de integraal van Bromwich (16, 17) een weg van $a + i\infty$ tot $a - i\infty$ nemen, en a zoo kiezen, dat alle polen van de integrand links van de integratieweg liggen.

In plaats van uit te gaan van de transformatie (16, 4), die een functie van x omzetten moet in een functie van p, kan men ook de *inverse transformatie* beschouwen, die een functie van p moet omzetten in een functie van x. Door eischen analoog aan de bovenstaande wordt de algemeene transformatie gespecialiseerd tot:

$$\int_0^\infty dx\,p\,e^{-px} f(x) = \varphi(p)\,H(x) \tag{18, 10}$$

en deze integraal is juist die, welke door C a r s o n tot het uitgangspunt der operatorenrekening is voorgesteld.

Men moet deze laatste integraal beschouwen als inversie van die van B r o m w i c h met de grenzen aangegeven bij β. Een inversie van de integraal van B r o m w i c h met de grenzen aangegeven bij α is niet voor het algemeene geval aan te geven.

De integraal van B r o m w i c h en die van C a r s o n hangen ook met elkaar samen door middel van de inversietheorema's van M e l l i n. Met deze theorema's is het mogelijk, als een der integralen bekend is, de andere te vinden. Men vindt deze theorema's in de formules (18, 11) tot (18, 14).

Aan de hand van de specialiseering der algemeene transformatie (16, 4) door de eischen A, B, C is het mogelijk, zich een goed inzicht te vormen van het verband tusschen operatorenrekening en andere methodes tot het transformeeren van differentiaalvergelijkingen. Men vindt de kernen der transformatie-integralen overzichtelijk vereenigd in het schema van § 22.

Het blijkt (§ 19), dat de transformatie van L a p l a c e tot het transformeeren van differentiaalvergelijkingen, die de vorm

$$f(x) = \int d\,\xi\, e^{\pm x\xi}\, \varphi(\xi)$$

heeft, wel voldoet aan de eischen A en B, maar niet aan de eisch C. Deze laatste is dan ook heel kenmerkend voor de operatorenrekening.

De transformaties (§ 20), die L a p l a c e gebruikte voor het transformeeren van een lineaire differen*tie*vergelijking in een differen*tiaal*vergelijking, kan men samenvatten in de gedaante:

$$f(x) = \int d\,\xi\, \xi^{\alpha x} B(\xi)\, \varphi(\xi).$$

Deze transformatie kan men afleiden door eischen A en B te stellen, die echter in plaats van op de operator d/dx betrekking hebben op de operator Θ, die gedefinieerd wordt door:

$$\Theta f(x) = f(x+1). \qquad (17, 12a)$$

Ook hier kan men de formules van M e l l i n gebruiken, zij zijn trouwens voor dit geval afgeleid.

Met de transformaties van Laplace hangt de integraal van Fourier ten nauwste samen, zoodat ook deze in het schema zijn plaats vindt.

Hiermee hangen weer de transformaties uit de quantamechanica samen.

De transformatie van een quantamechanische grootheid naar haar canonisch geconjugeerde blijkt het dichtste te staan bij de operatorenrekening. Inderdaad is de fundamenteele quantamechanische relatie:

$$qp - pq = i\hbar 1 \qquad (\hbar = h/2\pi) \tag{21, 3}$$

op de factor $i\hbar$ na identiek met een der grondformules (2, 7), die wij voor de operatorenrekening hebben afgeleid.

De overeenkomst is echter niet zoo groot als zij formeel schijnt, aangezien men q, p en 1 moet opvatten als z.g. „q-getallen", zoodat 1 een (continue) diagonaalmatrix voorstelt met als elementen $\delta(q' - q'')$. De eisch C, die men in de quantamechanica moet stellen:

$$1(p) \doteqdot 1(q) \tag{21, 6}$$

luidt:

$$\delta(p' - p'') \doteqdot \delta(q' - q''). \tag{21, 7}$$

Deze eisch is een andere dan de eisch C in de operatorenrekening: in de operatorenrekening geldt n.l. integendeel:

$$p\, e^{-\alpha p} H(x) = \delta(x - \alpha). \tag{21, 12}$$

WICHTIGSTE FORMELN.

$$p^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \qquad (1, 1); \qquad p^n . 1 = 0. \qquad (n > 0) \qquad (3, 8)$$

$$p^{-n} f(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} dx_n f(x) \quad (1, 8); \; p^{-n} . 1 = \frac{x^n}{n!}. \quad (n > 0) \quad (3, 6)$$

$$\frac{p}{p-\alpha} f(x) = f(x) + \alpha e^{\alpha x} \int_0^x dx \, e^{-x\alpha} f(x); \qquad (10, 3)$$

$$\frac{p}{p-\alpha} . 1 = e^{\alpha x} \; (3, 11); \; \frac{p}{p-\alpha} \varphi(p-\alpha) . 1 = e^{x\alpha} f(x),$$

wenn $\varphi(p) . 1 = f(x)$. (3, 16)

$$\frac{1}{p-\alpha} f(x) = e^{\alpha x} \int_0^x dx \, e^{-\alpha x} f(x); \qquad (10, 2)$$

$$\frac{1}{p-\alpha} . 1 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}, \text{ (nach (3, 20)).} \qquad (3, 23)$$

$$\frac{p^n}{p-\alpha} . 1 = \alpha^{n-1} e^{\alpha x}, \text{ (nach (3, 19)).} \qquad (3, 24)$$

$$\frac{1}{p(p-\alpha)} . 1 = \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} x, \text{ (nach (3, 21)).} \qquad (3, 25)$$

$$\frac{1}{p^n(p-\alpha)} . 1 = \frac{1}{\alpha^{n+1}} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^n . 1!} x - \dots - \frac{1}{\alpha . n!} x^n.$$

(nach (3, 22)). (3, 26)

Aufspaltung in Partialbrüche ergibt:

$$\frac{p^2}{(p-\alpha)\;(p-\beta)} . 1 = \frac{1}{\alpha-\beta} (\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}), \qquad (3, 27)$$

$$\frac{p}{(p-\alpha)\;(p-\beta)} . 1 = \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{\beta x} - e^{\alpha x}). \qquad (3, 28)$$

$(n-1)$-malige Differentiation von (3, 10) nach α:

$$\frac{p}{(p-\alpha)^n} \cdot 1 = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha x}. \qquad (3, 29)$$

Differentiation von (3, 20) nach α:

$$\frac{1}{(p-\alpha)^2} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2} \qquad (3, 30)$$

$(n-1)$-fache Differentiation:

$$\frac{1}{(p-\alpha)^n} \cdot 1 = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right) + \frac{1}{(-\alpha^n)}. \qquad (3, 31)$$

$$\sin \alpha x = \frac{\alpha p}{p^2+\alpha^2} \cdot 1, \quad \cos \alpha x = \frac{p^2}{p^2+\alpha^2} \cdot 1. \qquad (4, 3), (4, 4)$$

$$\sinh \alpha x = \frac{\alpha p}{p^2-\alpha^2} \cdot 1, \quad \cosh \alpha x = \frac{p^2}{p^2-\alpha^2} \cdot 1. \qquad (4, 1), (4, 2)$$

$$e^{-\beta x} \sin \omega x = \frac{p\omega}{(p+\beta)^2+\omega} \cdot 1, \text{ nach } (4, 3) \text{ und } (3, 16). \qquad (4, 5)$$

$$e^{-\beta x} \cos \omega x = \frac{p(p+\beta)}{(p+\beta)^2+\omega^2} \cdot 1, \text{ nach } (4, 4) \text{ und } (3, 16). \qquad (4, 6)$$

$$\sin(\omega x \pm \varphi) = \frac{p\omega \cos\varphi \pm p^2 \sin\varphi}{p^2+\omega^2} \cdot 1, \text{ nach } (4, 3), (4, 4). \qquad (4, 7)$$

$$\sin(\omega x \pm \varphi) = \frac{p^2 \cos\varphi \mp \omega p \sin\varphi}{p^2+\omega^2} \cdot 1, \text{ nach } (4, 3), (4, 4). \qquad (4, 8)$$

$$e^{-\beta x} \sin(\omega x \pm \varphi) = \frac{p\omega \cos\varphi \pm p(p+\beta)\sin\varphi}{(p+\beta^2)+\omega^2}, \text{ nach } (4, 5), (4, 6) \qquad (4, 9)$$

$$e^{-\beta} \cos(\omega x \pm \varphi) = \frac{p(p+\beta)\cos\varphi \mp \omega p \sin\varphi}{(p+\beta)^2+\omega^2}, \text{ nach } (4, 5), (4, 6). \qquad (4, 10)$$

A. $\omega_0^2 > \alpha^2$:

Differentiation der folgenden Formel (4, 12):

$$\frac{p^2}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2} \cdot 1 = -\frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha x} \sin(\omega x - \varphi). \qquad (4, 11)$$

$$\frac{p}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2} \cdot 1 = \frac{e^{-\alpha x}}{\omega} \sin \omega x \text{ nach } (4, 5). \qquad (4, 12)$$

Integration von (4, 12):

$$\frac{1}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2}\,.\,1 = \frac{1}{\omega_0^2}\Big(1 - e^{-\alpha x}\sin(\omega x + \varphi)\Big). \qquad (4,\ 13)$$

worin $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{\alpha}$.

B. $\omega_0^2 < \alpha^2$; $-m$ und $-n$ Wurzeln von $p^2 - 2\,\alpha\,p + \omega_0^2 = 0$:

$$\frac{p^2}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2}\,.\,1 = \frac{1}{m - n}(m\,e^{-mx} - n\,e^{-nx}). \qquad (4,\ 14)$$

$$\frac{p}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2}\,.\,1 = \frac{1}{n - m}(e^{-mx} - e^{-nx}). \qquad (4,\ 15)$$

$$\frac{1}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2}\,.\,1 = \frac{1}{\omega_0^2} - \left(\frac{e^{-mx}}{m} - \frac{e^{-nx}}{n}\right) \qquad (4,\ 16)$$

C. $\omega_0^2 = \alpha^2$:

$$\frac{p^2}{p^2 + 2\,\alpha p + \omega_0^2}\,.\,1 = \frac{p^2}{(p + \alpha)^2}\,.\,1 = e^{-\alpha x}(1 - \alpha x). \qquad (4,\ 17)$$

und (3, 29), (3, 30).

$$y = f,$$

$$xy = -\,p\,\frac{d}{dp}\,\frac{1}{p}\,f,$$

$$x^2 y = p\,\frac{d^2}{dp^2}\,\frac{1}{p}\,f,$$

$$x^n y = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n \frac{1}{p}\,f,$$

$$(10,\ 17)$$

$$\frac{dy}{dx} = pf - p\,y\,(0),$$

$$x\,\frac{dy}{dx} = -p\,\frac{d}{dp}\,f,$$

$$x^2\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{d^2}{dp^2}\,f,$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx} = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n f;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2 f - p^2 y\,(0) - py'\,(0)\,,$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -p\frac{d}{dp}pf + py\,(0)\,,$$

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} = p\;\frac{d^2}{dp^2}\,pf,$$

$$x^n\,\frac{d^2y}{dx^2} = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n pf.$$

Die ganz allgemeine Formel ist:

$$x^n\,\frac{d^m y}{dx^m} = p\left(-\frac{d}{dp}\right)^n p^{m-1} f + (-1)^{n+1}\left[\left[(m-1)\,(m-2)\ldots\right.\right.$$
$$\ldots (m-n+1)\,p^{m-n}\,y(0) + (m-2)\ldots(m-n)\,p^{m-n-1}\,y'(0) +$$
$$\left.\left. + (m-3)\ldots(m-n-1)\,p^{m-n-2}\,y''\,(0) + \ldots\ldots\right]\right]. \quad (10,18)$$

Mit den doppelten Klammern bezeichnen wir, dasz die darin verfaszte Reihe nur fortgesetzt werden darf bis der Exponent von p gleich 1 ist (also nur $m-n-k > 1$).

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} d\,u\,\frac{e^{xu}}{u}\,; \qquad (8,4)$$

$$e^{\alpha p}\,f(x) = f(x+\alpha) \qquad (11,20)$$

$$-\log p = \log x + C \qquad (15,11)$$

$$x^{-n}\,.\,1 = \frac{(-p)^n}{(n-1)!}\,\log p\,.\,1. \qquad (15,14)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C dp\,\frac{e^{px}}{p}\,\varphi(p) \qquad \text{(Bromwich)} \qquad (17,17)$$

$$f(x)\,H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dp\,\frac{\varphi(p)}{p}\,e^{px} \qquad \text{(Bromwich)} \qquad (17,21)$$

$$\varphi(p)\,H(x) = \int_0^\infty dx\,p\,e^{-px} f(x) \qquad \text{(Carson)} \qquad (18,10)$$

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Het is niet gewenscht, de oorspronkelijke gedachte van H e a v i s i d e, dat p een operator is, geheel te verlaten.

B. v. d. P o l en K. F. N i e s s e n, Phil. Mag. 7, 13 (1932) 537.

II.

Tegen de bewering van L o w r y, dat het de voorkeur verdient de integraal van B r o m w i c h

$$\int dp\, \frac{e^{xp}}{p}\, \varphi(p)$$

te nemen met als integratieweg een contour, dat loopt van $-\infty - 0i$ tot $-\infty + 0i$ in plaats van $c - i\infty$ tot $c + i\infty$ valt op te merken, dat, in bepaalde toepassingsgebieden, alleen de tweede integraal tot het doel voert.

H. V. L o w r y, Phil. Mag. 7, 13 (1932) 1035.

III.

Het onjuiste resultaat, dat J e f f r e y s verkrijgt:

$$\frac{1}{p - \alpha}\, 1 = - \frac{1}{\alpha}$$

wordt door hem niet op de juiste wijze verklaard.

H. J e f f r e y s, Operational Methods in mathematical Physics, 2nd. Ed. p. 19.

IV.

De bewering van E. J. B e r g e, dat niemand de beteekenis kent van operatoren, uitgeoefend op het quadraat der eenheidsfunctie, berust op een misverstand.

G r a m i s c h, T r o p p e r, B e r g, Rechnung mit Operatoren, S. 10.

V.

Tegen de opvattingen van Lévy over de theorie van Carson zijn bezwaren in te brengen.

P. Lévy, Bull. d. Sciences math. (2) 50, (1926) 174.

VI.

De door March geponeerde gelijkwaardigheid van de integraal van Carson

$$\int_0^\infty p\, e^{-xp}\, h(x)\, dx$$

met de integraal van Bromwich

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{px}}{p\, H(p)}\, dp$$

genomen over een groote cirkel is in het algemeen niet juist.

H. W. March, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927) 311.

VII.

De stelling:

„Opdat de voor $|z| < 1$ reguliere $w = F(z)$, die voldoet aan $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ en $F'(z) \neq 0$ voor $|Z| < 1$, den eenheidscirkel op een volledig convex gebied afbeeldt, is voldoende en noodzakelijk, dat

$$R\left\{\frac{(z\,F'(z))'}{F'(z)}\right\} > 0$$

is voor $|z| < 1$"

bevat een overbodig gegeven. Men kan b.v. de voorwaarde „$F'(z) \neq 0$ voor $|z| < 1$" weglaten.

A. Marx, Math. Ann. 107 (1932) 62.

VIII.

Het zou aanbeveling verdienen, dat leerboeken der analytische meetkunde, die de projectieve indeeling der collineaties uitvoerig behandelen, ook die der correlaties althans voor het platte vlak minder kort zouden behandelen.

Zie bv. Barrau, Anal. Meetk. I.

IX.

De theorie van Gurney geeft nog geen bevredigende verklaring van het verschijnsel der electrische „Ueberspannung".

R. W. Gurney, Proc. Roy. Soc. Lond. A 134 (1931) 137.

X.

De door Polanyi voorgestelde verklaring van de electrolytische methode tot het concentreeren van waterstof met het atoomgewicht 2 is niet bevredigend.

M. Polanyi, Naturwiss. 21 (1933) 316.

XI.

De overgangswaarschijnlijkheid van een electron naar een toestand met negatieve massa is veel grooter dan door Pauli wordt aangegeven.

Handb. d. Phys. XXIV/1 (2. Aufl.) Quantentheorie, S. 245.

XII.

De door P. Debije gegeven formule voor de intensiteitsverdeeling van de verstrooiing van Röntgenstralen behoeft voor kleine hoeken tusschen primaire en secundaire straal een aanvulling.

P. Debije, Phys. Zeits. 28 (1927) 139.

XIII.

De door F. Zernike en J. A. Prins gegeven formule voor de verstrooiing van Röntgenstralen door een eendimensionaal model moet voor kleine buigingshoeken gecorrigeerd worden.

F. Zernike en J. A. Prins, Zs. f. Phys. 41 (1927) 184.

XIV.

Tegen een afleiding van de waarde van het smeltpunt van ijs in de Kelvinschaal uit metingen van het Joule-Kelvin-effect aan lucht kan men ernstige bedenkingen opperen.

Roebuck, Proc. Amer. Acad. 60, 13 (1925) 537.

XV.

De bewering van Meissner, dat zijn indium (2) zuiverder is dan dat van de Haas en Voogd, is in strijd met het door hem gevonden sprongpuntsinterval van deze stof.

Meissner, Ann. der Phys. 13 (1932) 555.

XVI.

Het door Davey gemeten verschil in soortelijke electrische weerstand van een koper-éénkristal en een polykristal van dezelfde chemische zuiverheid is waarschijnlijk te verklaren door een verschil in physische zuiverheid.

Davey, Phys. Revue, 25 (1925) 248.

XVII.

De bewering van Peyerls, dat bij een kristal de onzuiverheden de warmteweerstand doen toenemen met een bedrag evenredig aan de absolute temperatuur, is onjuist.

Peyerls, Ann. der Phys. 3 (1929) 1055.

XVIII.

De ontwikkeling der theorie van de wisselwerking tusschen straling en materie geeft nog geen verklaring van de bron der stellaire stralingsenergie.

XIX.

Het is gewenscht, dat de exameneischen voor het vak natuurkennis voor het verkrijgen van de hoofdakte als onderwijzer door deskundigen nader worden vastgesteld.

XX.

Het is gewenscht, dat als examinatoren voor het vak natuurkennis van het genoemde examen personen optreden, die onderwijsbevoegdheid in de natuurkunde of althans in de scheikunde bezitten.