Over Brown'sche Bewegingen in het Stralingsveld, en Waarschijnlijkheids-Beschouwingen in de Stralingstheorie.

A. D. FOKKER.

OVER BROWN'SCHE BEWEGINGEN IN HET STRALINGSVELD, EN WAARSCHIJNLIJKHEIDS-BESCHOUWINGEN IN DE STRALINGSTHEORIE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. G. JELGERSMA, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG DEN 24EN OCTOBER 1913, DES NAMIDDAGS TE 4 UREN, DOOR

ADRIAAN DANIËL FOKKER,
GEBOREN TE BUITENZORG.

JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN — HAARLEM.

Aan mijne Ouders.

Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij een aangename taak U, hooggeachte professoren van de faculteit der Wis- en Natuurkunde, en ook U, hooggeachte Bolland, mijne welgemeende erkentelijkheid te betuigen voor het aandeel, dat gij tot mijne academische vorming hebt bijgedragen.

Vooral gij, Ehrenfest, hebt mij gedurende het laatste jaar door de onmiskenbare blijken uwer hartelijke belangstelling en den opgewekten wetenschappelijken omgang in uw huis gesterkt.

Maar waar vind ik mijne woorden voor U, Lorentz, hooggeschatte promotor? Van het eerste oogenblik af, dat ik overwoog van Delft naar Leiden te komen, hebt gij mij gekend. Steeds stonden uwe huiskamer en uw studeervertrek voor mij open. En het laatste jaar hebt gij een groot deel van uwen tijd gegeven om mij iets mee te deelen van de nauwgezetheid, het sterke geduld en de onverzettelijke werkkracht, die gij in onuitputtelijke mate bezit. Hoe gaarne wenschte ik iets te leveren, dat ten volle waardig geweest ware, het werk van een uwer leerlingen te heeten! Ik acht dit met mijn proefschrift nog niet bereikt. Al te veelvuldig staat er een credo instede van ecce. Sed omnia praeclara tam difficilia quam rara sunt. Niemand weet dit beter dan gij. Indien ik ooit in mijn leven het geluk zal kennen van met uw lichten humor werkzaam te zijn tot iets goeds voor de wetenschappelijke menschheid, zal het zeker niet het minste te danken zijn aan het voorbeeld, dat gij mij steeds gaaft, van ook met het geringe tevreden te zijn.

INHOUD.

		Blz.
I.	Eenige algemeene beschouwingen	1
II.	Afleiding van PLANCKS stralingsformule	22
III.	De klassieke statistische beschouwingen	38
IV.	BROWN'sche bewegingen in het stralingsveld	45
V.	Uitkomsten van EINSTEIN	87
VI.	Waarschijnlijkheids-beschouwingen in de stralingstheorie	100
	Stellingen	125

HOOFDSTUK I.

Eenige algemeene beschouwingen.

§ 1. De wereld van gewaarwordingen en indrukken, waarin wij ons bevinden, is om te beginnen een totaal ongeordende verzameling van afzonderlijkheden. Wij kunnen ons er maar slecht een voorstelling van maken in welk eene vreemde, chaotische warreling de onmiddellijke gegevens onzer zintuigen elkander zouden opvolgen en verdringen, indien zij alle nieuw voor ons waren, en wij in eene ledige herinnering geen enkel houvast hadden om het reeds meer ondervondene te herkennen.

Er is ons echter eene behoefte aangeboren om de gewaarwordingen niet afzonderlijk te laten, maar met elkander in verband te brengen, en ze samen tot een eenheid, men zou kunnen zeggen eene gewaarwording van hooger orde, te vereenigen. Daarbij komt het vanzelf aan op de onderlinge verhoudingen waarin de afzonderlijke gewaarwordingen tot elkander staan.

Langzaam aan, door de inprenting der herhalingen, door de gewoonte, kan er een werktuigelijkheid ontstaan van de herkenning dier verhoudingen, die ons op slag orde kan doen weervinden in een complex van gegevens.

Bij het zien uit onze oogen b. v. is er een ontzaglijke oefening van associeering der lichtgewaarwordingen met gewaarwordingen in spieren van oogbal en lens noodig, een voortdurende oefening die zich niemand bewust is, alvorens men in staat is automatisch met één oogopslag een landschap te zien en er alle lijnen en diepten tusschen voor- en achtergrond, alle ruimte-verhoudingen, in te onderkennen.

Ons denken oefent zich voortdurend in het opsporen van de verhoudingen in wat wij waarnemen, en deze verhoudingen zijn de schemata volgens welke in ons bewustzijn de waarnemingen zich laten ordenen en samenvatten in een overzichtelijk geheel.

Hoe meer verhoudingen, hoe meer inwendigen samenhang der verschijnselen wij opmerken, des te vollediger is onze kennis, des te bewuster weten wij.

Ons vermogen is echter beperkt; vandaar dat wij bij gebrek aan volledige wereldkennis ons moeten vergenoegen met eene wereldopvatting. Dat wil zeggen, wij komen onder den indruk dat een bepaald stel verhoudingen meer omvatten kan dan andere, en dus belangrijker zijn; op deze gaat zich nu onze aandacht richten.

Zij kunnen zijn van een bepaalde soort, of het kunnen zijn die welke in de bijzondere ervaring van een bepaald persoon het meest voorkomen, of wel het denken stelt een verhouding op den voorgrond, voor welke het zeer gevoelig is, en die het met voorliefde overal weervindt.

Het kan zijn, dat een enkele verhouding al te sterk op den voorgrond wordt geschoven, en dat men in den waan dat deze alle andere omspant, en dat alle andere uit deze zijn af te leiden, van eene wereldverklaring gaat spreken.

Naar de ontwikkelde beschouwing is het echter duidelijk, dat men van verklaring slechts mag spreken in zoover een ordening van de verschijnselen, en de aanwijzing van een eenvoudigen samenhang wordt gegeven; dat alle verklaring heeft te zijn een uiteenleggen of herleiden van gecompliceerde en vreemde verschijnselen tot enkelvoudige en goed bekende, waarmede wij vertrouwd zijn.

Beter dan eene verklaring, die ons antwoord zou pogen te geven op het „waarom", is eene verklaring, die ons eene beschrijving geeft van het „hoe" der verschijnselen.

§ 2. In de wetenschap, als de stellige kennis, is men er op uit te streven naar een eenvoudige beschrijving, die zich zoo nauw mogelijk aansluit aan het waargenomene. Daar het voorwerp der natuurkundige wetenschappen in het bijzonder zich leent tot nauwkeurige beschrijving en ook een zooveel scherpere en meer ondubbelzinnige contrôle dier beschrijving in hare consequenties leveren kan, hebben deze wetenschappen zoo lang kunnen gelden als de bij uitstek exacte wetenschappen.

Deze eerenaam verplicht haar zichzelve hooge eischen te stellen. De natuurkunde stelt zich niet tevreden dan met een hoogen graad van preciseering en nauwkeurigheid. Daarbij blijft toetsing van de leer aan de werkelijkheid het parool, verificatie van theoretische verwachtingen door de waarneming de grootste triumf.

De waarneming blijft niet staan bij het wat. Het is goed, dat zij niet tevreden is met constateeren, maar precies vraagt: hoeveel? of hoe groot? De waarneming is onmiddellijk uit op meten, en het experiment wordt de kunst van het fijne meten.

Als voorts de wetenschap haar vernuft besteed heeft om doeltreffende methoden te verzinnen, en de fouten die onvermijdelijk in de waarnemingen gemaakt worden onschadelijk te maken, moet zij na het meten der verschijnselen haar bevindingen samenvatten tot een geheel.

De natuurkundige wetenschap is een kennis van den samenhang van meetbaarheden in de wereld. Aangezien alle meetbaarheid in de maat wordt uitgedrukt als een getal, wordt zij een kennis van de wereld in verhoudingen van getallen, die uitteraard een wiskundig aspect heeft.

§ 3. De natuurkundige wetenschap stelt zich ten doel, de wereld in wiskundige verhoudingen te denken, en hare eenheid, zoo mogelijk, wiskundig te begrijpen.

Zoodra nu met deze bedoeling getallen worden gemaakt tot symbolen van de werkelijkheid, wordt in de voorstelling veel van de aanschouwelijkheid dier werkelijkheid ingeboet. Alle subjectieve elementen, die onze oorspronkelijke ervaring eigen zijn, omdat wij de werkelijkheid met verschillende zintuigen waarnemen, worden ter zijde gelaten. Niet omdat de gegevens onzer zintuigen bedriegelijk zijn, maar omdat het vasthouden aan de qualitatieve verschillen, die zij ons doen opmerken, niet bevorderlijk zou wezen aan het construeeren van een samenvattend geheel. Wij zullen aan verschillende voorbeelden dit versoberen door het wegvallen van associaties met zinnelijke gewaarwordingen laten zien.

Aan den anderen kant echter is er een streven om de ijle zuiver mathematische uitkomsten weer wat te verzinnelijken, en door het construeeren van hypothetische dragers der wiskunstige functies ons denken te hulp te komen met een voorstelling, die weer hare aanschouwelijkheid heeft, zij het eene andere dan de primitieve aanschouwelijkheid.

§ 4. Het ligt in de rede, dat in de natuurkunde, waar mogelijk, verschil van qualiteit wordt herleid tot verschil in quantiteit, omdat slechts quantiteiten zich voor meting leenen.

Wanneer wij verschillend gekleurd licht denken, — paars en geel licht, — dan is voor den physicus het wezenlijke verschil niet dit, dat het eene ons alles geel, en het andere ons alles paars laat zien, evenmin houdt hij zich op met de eigenaardigheid dat de twee kleuren in ons oog door contrastwerking elkander kunnen te voorschijn roepen, en er tusschen beide dus een innige qualitatieve samenhang schijnt te bestaan.

Voor den physicus zijn beide lichtsoorten slechts hierdoor in wezen verschillend, dat hij het eene door een ander getal kan symboliseeren dan het andere.

Denkt hij volgens de emissietheorie van het licht, dan neemt hij als kenmerkend de getallen van verschillende breekbaarheid (refrangibilitas), de brekingsindices der stralen van verschillende kleur en alle verschil wordt ten slotte herleid tot een verschil in grootte der hypothetisch aangenomen deeltjes. [1]) Denkt hij volgens een golftheorie, dan zal hij bij voorkeur getallen kiezen, die in duizendsten van millimeters lengten aangeven, die bij verschillende proeven met het licht bijzondere beteekenis blijken te hebben, de „golflengten”.

Met hetzelfde gemak als het verschil van paars en geel elimineert de physicus uit zijn wereldvoorstelling het zinnelijk verschil tusschen

---

[1]) Newton. *Optica*, 1e Boek: deel I, def. VII en VIII, prop. I, Theor. I; 3e Boek: deel I, vraag 29.

de stralen die een warme kachel en een lichtende lamp uitzenden. Warmtestraal en lichtstraal zijn slechts in hun golflengte verscheiden, maar overigens volkomen gelijksoortig.

§ 5. Een ander voorbeeld van negatie van qualiteit kunnen wij vinden bij de bespreking van de temperatuur.

Elk zal een meer of minder heldere voorstelling hebben van een warm lichaam en zijn warmtegraad. Maar om er een definitie mee te construeeren is ons primitieve gevoel van warmte en koude veel te vaag. Het wordt ter zijde gesteld en doet verder niet mede.

De definitie noemt de temperatuur van een lichaam een getal, één uit een gansche rij van getallen, waarvan wij aan elk lichaam er een toekennen. De beteekenis van die getallen is aanvankelijk geen andere, dan dat de volgorde van twee hunner in de rij aangeeft in welke richting warmte zal overgaan als de correspondeerende lichamen met elkander in contact komen. De „overgang van warmte" wordt experimenteel vastgesteld, doordat men aan de lichamen diverse veranderingen waarneemt (in volumen, electrisch geleidingsvermogen, enz.), die echter met onze warmte-gewaarwording als zoodanig niets hoeven te hebben uitstaan.

Dat de constructie van deze getallenrij mogelijk is berust op de haast voor ieder evidente, maar niettemin slechts experimenteel vast te stellen waarheid, dat twee lichamen, die, wat warmteuitwissseling betreft, elk met eenzelfde derde lichaam in evenwicht zijn, ook met elkander in evenwicht zijn, [1]) en dat er geen cyclische verhouding mogelijk is, waarbij lichaam A aan B bij contact warmte zou afstaan, B aan C, en C weer aan A. [2]) Dat men over het vervuld zijn dezer twee voorwaarden als experimenteel gegeven kan beschikken, maakt het eerst mogelijk een definitie van „even warm" te geven, die aan logische eischen voldoet.

Het is de tweede hoofdwet der thermodynamica, die dit gegeven gegeneraliseerd doet uitkomen. [3]) Het is die wet, welke de constructie

---

[1]) Immers, indien $a=c$, en $b=c$, moet ook $a=b$.

[2]) Immers, indien $a>b$, en $b>c$, moet ook $a>c$.

[3]) Vgl. LORENTZ, *Abhandl. über Theoretische Physik* I, Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, § 4, p. 203.

van reeksen van temperatuurgetallen, van temperatuurschalen mogelijk maakt.

Of men in die getallenrij de richting van voren naar achteren of van achteren naar voren als die van stijgende orde neemt, is onverschillig. Men zou bijvoorbeeld aan smeltend lood het getal 500 kunnen toekennen, aan smeltend ijs 100, en die getallen als hun temperaturen definieeren, en aan kokend water dat blijkens proeven een temperatuur daartusschen moet hebben, een derde getal, bijvoorbeeld 300, en zoo vervolgens voor andere temperaturen. Maar evengoed kan men de temperatuur van het ijs op 500 stellen, en die van het lood op 100. Met de natuurlijke behoefte om te zeggen dat het warmere lood een hoogeren warmtegraad heeft, die door een grooter getal moet aangegeven worden, heeft de definieerende physicus niets te maken. Het staat hem vrij de temperatuurschaal zoo in te richten, dat de geleiding van warmte steeds geschiedt van lichamen van lager temperatuur naar die van hooger temperatuur.

Men heeft echter de schaal toevalligerwijze, of natuurlijkerwijze naar ons onmiddellijk gevoel van warmtegraad ingericht. Deze keus van hoog en lager is naderhand gebleken gunstig te zijn voor het vaststellen van een rationeele temperatuurschaal, die ons leidt tot een begrip van absolute temperatuur.

Bij een omkeerbaar kringproces langs twee isothermen en twee adiabaten is het bekend, dat de verhouding der hoeveelheden warmte Q en q die bij de isotherme werkingen opgenomen resp. afgestaan worden, onafhankelijk is van den bijzonderen aard van de stof, die het proces doorloopt. Dit geeft aanleiding om de temperatuurschaal in te richten onafhankelijk van de eigenschappen van bijzondere thermometers, d.w.z. onafhankelijk van de willekeur waarmede wij, als de volgorde maar behouden blijft, overigens aan de verschillende lichamen een temperatuurgetal kunnen toekennen.

Wij kiezen de temperatuurgetallen zoodanig, dat de verhouding van twee hunner T en t aangeeft de verhouding der bovengenoemde warmtehoeveelheden Q en q bij een omkeerbaar kringproces. Het is wel bevredigend, althans gemakkelijk, dat de temperatuur van het warmere lichaam gegeven wordt door de grootere T.

Maar bovendien levert ons de aldus ingerichte temperatuurschaal de opvatting van de temperatuur als essentieel positieve grootheid. De schalen der gewone thermometers brengen ons slechts de gedachte bij van temperatuurverschillen, maar niet van een nulpunt, beneden hetwelk geen temperatuur meer mogelijk zou zijn.

Hier is een nulpunt, dat absoluut is. Men kan niet nog lagere temperatuur denken. Wat zou een negatieve temperatuur beteekenen? Blijkens definitie der schaal dit, dat er een omkeerbaar kringproces mogelijk zou zijn tusschen twee isothermen en twee adiabaten, waarbij langs beide isothermen warmte werd opgenomen, die in mechanischen arbeid omgezet zou worden zonder dat er andere veranderingen in het systeem zouden overblijven. Dit zou tegen de tweede hoofdwet indruischen.

Het is voorts zeer aannemelijk, dat het absolute nulpunt niet bereikt zal worden, dat het een grenspunt is, dat niet behoort tot de verzameling der temperatuurgetallen. Nernst [1]) heeft uit de onderstelling, dat het nulpunt niet door een eindig proces bereikt kon worden, zijn „warmtetheorema" kunnen afleiden [2]). Het ware wellicht geoorloofd, deze onderstelling als een axioma voorop te zetten, en dìt aan te duiden met den naam van derde hoofdwet der thermodynamica, welke naam wel gebruikt is voor het warmtetheorema zelf. Daar dit theorema ingewikkeld is en mij minder eenvoudig duidelijk voorkomt dan het axioma der onbereikbaarheid van het nulpunt, schijnt mij dit laatste den naam van hoofdwet beter te verdienen.

§ 6. Tot de meest gebruikte termen behooren de woorden „kracht" en „massa", en naar men op het eerste gehoor zou meenen, zijn er ook weinig begrippen zoo intuitief duidelijk: de massa is de hoeveelheid stof, de kracht is de oorzaak die de stof in beweging brengt. Niets is natuurlijker dan dat men gewaagt van het „evenwicht" of het „spel" der „natuurkrachten". Maar in de kritiek der physica moeten die woorden wel wat van hun macht over de verbeelding ontdaan worden. Van de oorzaak van een beweging, of een verandering, of een omkeer, wordt de kracht niets meer dan

[1]) *Sitzungsber. d. k. pr. Academie der Wiss. Berlin*, 1912. p. 134.

[2]) Ook Lorentz. Over het warmtetheorema van Nernst, *Chem. Weekbl.* 1913, *n*°. 28, p. 621.

een .... rekengrootheid. Dat wil zeggen: het woord kracht beteekent voor den physicus niets reëels, en hij gebruikt het alleen om aan een bepaalden term in de vergelijkingen, die de bewegingen bepalen, bij definitie een naam te geven. [1])

Wanneer ik zeg, dat twee lichamen eene kracht op elkaar uitoefenen, beteekent het niet anders dan dat ik in de bewegingen van die lichamen om elkander heen bepaalde versnellingen kan waarnemen, — tenzij ik bedoel, dat ik een bepaalde gewaarwording van spierinspanning heb, wanneer ik met mijn hand die versnelling tracht te verhinderen. Met die psychische gewaarwording heeft echter de natuurkunde niets te maken. — Maar dan is de uitdrukking: „de lichamen trekken elkander aan" niet anders dan een verkorte beschrijving van de bewegingen, die ik in de natuur zie. [2]) Dan is de aantrekkingskracht, die wij in de graviteerende materie dichten, op zichzelf geen werkelijkheid. De werkelijkheid ligt in de bewegende lichamen en de regelmatigheden, de wetten, die wij daarbij opmerken. De kracht is een fictie, een hulpgrootheid bij het beschrijven der verschijnselen, en naar willekeur, dat is te zeggen bij conventie zoo doelmatig mogelijk te definieeren.

Duidelijk springt dit in het oog, wanneer wij opmerken, hoe in de z. g. relativiteitsmechanica men ertoe komt om naast de „kracht van Newton" een ietwat andere grootheid als de „kracht van Minkowski" in te voeren, die volgens eenvoudiger formules getransformeerd wordt bij den overgang naar een nieuw coördinatenstelsel.

Hertz [3]) is er in geslaagd, om de kracht als fundamenteel begrip uit de gewone mechanica te verwijderen, door verborgene massa's hypothetisch in te voeren.

Maar van de massa, als fundamenteel begrip van eene hoeveelheid van materie, blijft al even weinig over als van de kracht. In de bewegingsleer van electrisch geladen lichamen onderscheidt men longitudinale massa en transversale massa, als een verschillende traagheid tegen bewegingsverandering in richtingen langs en lood-

---

[1]) Vgl. Kirchhoff, *Mechanik*, Vorrede; voorts p. 23.

[2]) Vgl. Helmholtz, *Vorlesungen*, 1e deel, 1e stuk, p. 12.

[3]) *Principien der Mechanik*.

recht op de oogenblikkelijke snelheid, en de massa wordt afhankelijk van de snelheid. Maar dan is van ons oorspronkelijk begrip van massa als hoeveelheid materie slechts weinig overgebleven. Dat volgens nieuwere beschouwingen de inwendige energie van een lichaam ook zijne traagheid zou vergrooten, geeft nog meer aanleiding om te onderscheiden tusschen „schijnbare" massa en de massa, zooals die van ouds bekend was van de graviteerende materie. De vraag is gerezen, of die schijnbare massa's ook graviteerende massa's zouden kunnen zijn. Men heeft dit echter experimenteel nog niet kunnen beslissen. Hoezeer het ook verkeerd zou wezen om de graviteerende massa's met de electromagnetische te identificeeren, en daarmede „verklaard" te achten, het moet erkend worden, dat zij tenslotte ook, niet anders dan deze, zijn geschikt ingevoerde coëfficienten in de bewegingsvergelijkingen der graviteerende lichamen. [1])

§ 7. Voordat de nieuwere physica aanleiding gaf om dergelijke in de primitieve voorstellingen resoneerende woorden van hun verbeelden inhoud te ontdoen en met kritisch geweld tot rekengrootheden te herleiden, had men al sinds lang grootheden ingevoerd, die van den beginne pure rekengrootheden waren, zonder dat iemand zich daar eenige voorstelling bij had te vormen.

Zoo staat in de thermodynamica de entropie, een functie van den toestand van een systeem, die de neiging heeft, toe te nemen, bekend als eene rekengrootheid, die door deze eigenschap bepaald is, dat het verschil in entropie van een systeem in twee toestanden de som is van de gereduceerde warmtehoeveelheden, die het opneemt, wanneer het op omkeerbare wijze van den eenen toestand in den anderen overgaat. Een gereduceerde warmtehoeveelheid is de warmte, gedeeld door de absolute temperatuur, bij welke ze is opgenomen geworden.

Het is bezwaarlijk in te zien, welke beteekenis het deelen van een warmtehoeveelheid door een temperatuur kan hebben, en wat de som van dergelijke quotienten zou kunnen wezen. De entropie is een rekengrootheid.

---

[1]) Vgl. Kirchhoff, *Mechanik*, p. 12, p. 23. Vgl. L. E. J. Brouwer, *Grondsl. d. Wiskunde*, p. 89.

Toch heeft wel degelijk CLAUSIUS, toen hij den naam „entropie" invoerde, dien naam gegeven aan een nieuw physisch begrip, en niet aan een rekengrootheid, en wat hij zich bij dat begrip dacht, ook in den naam aangeduid. [1])

Hij denkt een omkeerbaar kringproces tusschen adiabaten en isothermen, waarbij twee veranderingen van wezenlijk belang zijn, te weten, de overgang van een warmtehoeveelheid Q_{12} van de temperatuur T_1 naar T_2, en de omzetting in arbeid van een warmtehoeveelheid Q bij de temperatuur T. Hij stelt in het licht, hoe men elke van deze beide veranderingen, als zij eenmaal plaats gegrepen heeft, kan teniet doen en vervangen door de andere, in tegengestelden zin gedacht, indien men maar het kringproces in passende richting uitvoert; dat men dus deze veranderingen als aequivalent kan beschouwen, en dat het er nu op aankomt, de manier te vinden, waarop men die veranderingen als wiskundige grootheden moet voorstellen, om uit de gelijkheid van deze „aequivalenzwerthe" de gelijkwaardigheid der veranderingen te kunnen lezen. Hij vindt, dat het ontstaan van de warmtehoeveelheid Q uit arbeid bij de temperatuur T den „aequivalenzwerth"

$$\frac{Q}{T}$$

heeft, formuleert de tweede hoofdwet der warmteleer aldus, dat de algebraïsche som van de in een kringproces voorkomende veranderingen slechts positief kan zijn, en geeft aan deze som, aan deze grootheid, in welke om zoo te zeggen alle veranderingen opgesloten zijn, den naam entropie, gemaakt uit ἐν en τροπή.

Dit physisch begrip was echter te kunstmatig geschapen, dan dat het kon blijven; wèl bleef de rekengrootheid. Naarmate men meer aan de entropie en de berekeningen daarmede gewend raakte, achtte men zich tevreden met een bewijs van de existentie der differentiaal van deze grootheid, en liet de beteekenis voor wat zij was.

Eerst veel later is er een rationeeler interpretatie gegeven, waarop wij nog terug zullen komen (§ 16).

---

[1]) *Pogg. Annalen* deel 125, p. 390; deel 103, p. 49 v.v. 1854.

§ 8. Het past ons nu er ook op te wijzen dat men niet voor niets algemeene noties tot rekengrootheden herleidt, en er nieuwe bij invoert. Dit is de voorwaarde, op welke alleen de uitspraken der natuurwetenschap aan bondigheid en omvattendheid kunnen winnen.

Wanneer van het licht, door een lichtbron uitgezonden, gezegd wordt, dat het deze of gene bepaalde golflengte heeft, dan is daarmede impliciet gegeven, welke verschijnselen wij kunnen verwachten, ja voorspellen, wanneer wij allerlei experimenten, en de meest verschillende, ondernemen. Immers, het bedrag der golflengte is gewonnen uit, en de gecondenseerde uitdrukking van het resultaat van proeven over interferenties en over buiging van dat licht; omgekeerd kan dus weer een physicus, die als ingewijde een goed verstaander is, daaraan genoeg hebben om te verklaren wat proeven zullen opleveren, als zij op behoorlijke manier worden opgezet. Bondiger dan door dit eene getal, de golflengte, kan het groote aantal verschijnselen al niet worden beschreven.

§ 9. Elke groote natuurwet heeft een keten te zijn, die zoo groot mogelijk gebied, eigenlijk zooveel mogelijk verschillende categorieën van verschijnselen omspant.

Dit wordt wel bij uitstek gepresteerd door de wet van het behoud van arbeidsvermogen. Iedereen weet, dat er geen energie kan teniet gaan, dat, indien op een lichaam arbeid wordt gedaan, het in zoo'n toestand geraakt, dat het zelf weer arbeid kan verrichten. Zoo is het 't geval in een uurwerk met de veer, die opgewonden, of het gewicht, dat opgetrokken wordt; zoo is het met den boog, die gespannen is, en den pijl voortschiet. Zoo is het met de door de zon verwarmde lucht, die zich uitzetten kan en met waterdamp omhoog stijgen, met het meegevoerde water, dat op de bergen stort, en vandaar in watervallen als „witte steenkool" machtige machines drijven kan en geheele fabrieken in beweging brengen.

Het is een sublieme vlucht geweest, toen, na de beschouwing van den arbeid eener kracht op een in beweging gebracht lichaam, — dien men gelijk vond aan $\frac{1}{2} m v^2$, wat men de kinetische energie is gaan noemen, — de wetenschappelijke gedachte verder heeft aangetoond, dat altijd wanneer deze grootheid vermindert in een mechanisch systeem, dat vrij is van uitwendige krachten, er een andere grootheid is aan te wijzen, die evenveel toeneemt; en dat het steeds mogelijk zal blijven, de afname der kinetische energie gelijk te stellen aan de toename eener andere grootheid ook indien men zich niet beperkt tot zuiver mechanische systemen, maar overgaat tot beschouwing van systemen, waarin warmteontwikkeling plaats grijpt en electrische en magnetische verschijnselen zich afspelen.

Dat er steeds, bij de wisselwerking van twee systemen, de gelijkheid is aan te wijzen van de aangroeiing van een grootheid in het eene systeem en de afname van een grootheid in het andere systeem, zoodat men die grootheden den gelijken naam mag geven van energie, geeft ons direct een schema, waarin zich de natuurkennis laat ordenen.

§ 10. Nog een andere stelling dan die van het behoud van arbeidsvermogen bezit, toepasselijk gemaakt op niet-mechanische verschijnselen, eene algemeene geldigheid. Het is het zoogenaamde principe van de kleinste werking, oorspronkelijk afkomstig van DE MAUPERTUIS. Van den vorm uitgaande, waarin HAMILTON het gegoten heeft, gaf HELMHOLTZ er eene groote uitbreiding aan [1]). HELMHOLTZ gaf het den naam van minimumstelling voor den kinetischen potentiaal.

In de mechanica beteekent het principe van HAMILTON, dat de tijdsintegraal, Φ, van het verschil $(T - U)$ van kinetische en potentieele energie van een conservatief systeem, genomen tusschen twee oogenblikken der werkelijke beweging, kleiner is dan hij zou wezen bij elke fingeerbare beweging, waarmee het systeem in denzelfden tijd langs een ietwat verschillende baan van denzelfden beginstand naar denzelfden eindstand zou loopen.

Volgens het principe van HAMILTON vindt men dus de werkelijke baan als de oplossing van een variatieprobleem. Voor de werkelijke baan moet

[1]) Über die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung, *Journ. f. d. reine und angew. Mathematik*, d. C. p. 137.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0$$

zijn. Uit dezen eisch kan men de bewegingsvergelijkingen van LAGRANGE afleiden.

Eigenlijk is het principe van HAMILTON niets anders dan een elegante samenvatting van die bewegingsvergelijkingen. Behalve de mechanische bewegingen worden echter vele andere physische verschijnselen beheerscht door vergelijkingen, die in vorm analoga van de bewegingsvergelijkingen zijn.

Al deze vergelijkingen heeft HELMHOLTZ eveneens leeren samentrekken in een overeenkomstige minimumstelling als het principe van HAMILTON, door aan te geven, wat men in verschillende gevallen voor $(T - U)$ te nemen heeft. Daarbij heeft hij zich losgemaakt van de beperking, dat T een homogene kwadratische functie der snelheden zou wezen en U alleen van de coördinaten zou afhangen. De kinetische potentiaal H, die in de plaats treedt van $(T - U)$, mag een willekeurige functie van de snelheden zijn, indien maar de eerste en tweede differentiaalquotienten eindig blijven. Verder blijft de minimumstelling mogelijk, ook als er uitwendige krachten op het systeem werken, die niet van een krachtfunctie afhangen; men heeft dan de minimumstelling van den kinetischen potentiaal te schrijven:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (H + \Sigma Q_\nu q_\nu)\, dt = 0$$

waarin de Q_ν de uitwendige krachten voorstellen, die in de richting van de coördinaten q_ν werken, en niet mede gevarieerd worden.

Tot nog toe heeft men alle verschijnselen onder deze stelling kunnen brengen, en men neemt voorloopig aan, dat zij als algemeen geldig principe alle nog te onderzoeken verschijnselen der physica zal blijven beheerschen. Het komt er maar op aan, te weten hoe voor een bepaald verschijnsel de functie H moet worden geconstrueerd. In den vorm van H condenseert men dan de verkregen kennis der verschijnselen, om naar believen de noodige grondvergelijkingen door de uitwerking van het variatieprobleem daar weer uit te kunnen destilleeren.

Door eene wiskundige transformatie giet men de grondvergelijkingen voor verschillende gebieden in denzelfden vorm, dien van het principe der kleinste werking. Dit is dan een trait d'union, die aan de geheele physica een formeele wiskundige eenheid geeft.

§ 11. Hebben wij van de vierde tot de achtste paragraaf de tendens der natuurwetenschap gevolgd, om alle oorspronkelijk haast tastbare noties te versoberen tot mathematische grootheden, en hebben wij vervolgens het nut daarvan erkend, toch is er daartegenover wel een andere tendens haast van nature werkzaam, namelijk deze, om de wiskundige formules weer te interpreteeren, ze door mechanische modellen te veraanschouwelijken, en de naakte wiskundige grootheden met een minder primitieve, meer geleerde voorstelling te bekleeden (vgl. § 3).

Allereerst kunnen wij dit streven opmerken bij de opvatting van de potentieele energie. Wij vinden het onmiddellijk duidelijk, dat een uitgerekte veer, zich intrekkende, weer arbeid kan verrichten. Wij zien een vervormd elastisch lichaam voor ons, en het valt ons gemakkelijk om de potentieele energie van die veer te zien in de deformatie. Wij schuiven zonder eenige bevreemding de elastische deformatie als drager onder ons idee van potentieele energie.

Maar het wordt anders, wanneer wij een bal zien, die met eenige snelheid, dus met kinetische energie, werd opgegooid. Wanneer hij tot stilstand is gekomen, is al zijn kinetische energie omgezet in potentieele. Maar waar heeft de bal die energie? Waar is de voorraadschuur, waar die ligt opgestapeld? Aan den bal zelf valt niets bijzonders op te merken. Er is niets veranderd dan de meetkundige configuratie van bal en aarde. Waar kan de potentieele energie zitten?

Zeer natuurlijk verzet zich bij velen het gewone denken er tegen, dat er een wiskundige functie, van zooveel belang bij de bewegingen, zou bestaan, zonder dat daaraan in de werkelijkheid iets meer zou beantwoorden dan een puur geometrische, leege figuurverandering. Zij worden verleid tot de uitspraak, dat de potentieele energie dan in de „middenstof” haar „zetel” moet hebben.

§ 12. Zoo is het ook om eene zekere aanschouwelijkheid in de voorstelling te doen, als MAXWELL den a e t h e r maakt tot den drager van electrische en magnetische krachtvelden. Alle energie, die geladen of magnetische lichamen krachtens hun onderlinge aantrekkingen en afstootingen hebben, wordt toegeschreven aan toestandsveranderingen in den „aether", die verborgen, hypothetische stof, die, gelukkig, al naar de behoeften der wisselende natuurkundige theorieën, alle eigenschappen vermocht aan te nemen, die men goed vond ze toe te schrijven.

Allereerst is de aether tegemoet gekomen aan de behoefte van hen, voor wie een werking-op-afstand ondenkbaar was. Door het medium zouden nu de trek en druk van het eene lichaam op het andere worden overgebracht. Echter verschuift deze hypothese de moeilijkheid slechts, zonder ze op te lossen. Het is niet juist, te meenen dat de raadselachtigheid van de werking-op-afstand — indien men van een raadsel gelieft te gewagen — in de grens nul wordt, wanneer men den afstand oneindig klein laat worden.

Al vermag de hypothese van een aether niet de zwarigheid, die het verstand maakt tegen een werking-op-afstand — niet alleen afstand in de ruimte, maar ook afstand in den tijd, — op te heffen, eenige aanschouwelijkheid verschaft zij ons wel.

Zoo zijn de aangenomen „spanningen van MAXWELL" in den aether heel duidelijke aankleedingen van rekengrootheden. Wanneer men naar de grondvergelijkingen der electronentheorie de kracht op de geladen materie binnen een omsluitend oppervlak als een ruimteintegraal schrijft, en er in slaagt dien integraal te vervormen in twee andere, waarvan er een verdwijnt, indien het veld constant is, en de andere een oppervlakteintegraal is, dan wordt deze oppervlakte-integraal zeer bevredigend door de spanningen van MAXWELL geïnterpreteerd. [1])

---

[1]) $$\mathbf{F}_x = \int_{ruimte} div\, \mathbf{d} \left\{ \mathbf{d}_x + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_y \mathbf{h}_z - \mathbf{v}_z \mathbf{h}_y) \right\} d\,S =$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{ruimte} \left\{ \mathbf{d}_y \mathbf{h}_z - \mathbf{d}_z \mathbf{h}_y \right\} dS + \int_{oppervlak} \frac{1}{2} \left\{ 2\, \mathbf{d}_x \mathbf{d}_n - \mathbf{d}^2 \cos(nx) \right\} d\sigma +$$

$$+ \int_{oppervlak} \frac{1}{2} \left\{ 2\, \mathbf{h}_x \mathbf{h}_n - \mathbf{h}^2 \cos(nx) \right\} d\sigma.$$

§ 13. Iets geheel analoogs gebeurt, wanneer men den integraal, die den arbeid aangeeft, op de geladen materie binnen een oppervlak per tijdseenheid verricht, gaat vervormen, en de verschillende stukken gaat interpreteeren. [1])

Men interpreteert een ruimte-integraal als aangroeiing van de magnetische en electrische energie, die men in die ruimte wenscht aangenomen te zien, en een oppervlakte-integraal als een stroom van energie, die door het oppervlak heen vloeit, den beroemden energiestroom van Poynting, in elk punt bepaald door de grootte en richting van de electrische en magnetische kracht daar ter plaatse.

Deze interpretatie is inderdaad zeer fraai, en vooral bij de beschouwing van lichtbundels maakt zij aanschouwelijk hoe de energie zich in den bundel voortbeweegt. Maar men houde in het oog, dat in andere gevallen, waar men een statisch electrisch en magnetisch veld heeft, het weinig zin heeft om aan de energie een voortdurende strooming in zich zelf terug toe te schrijven; dat hier het hechten aan een objectief bestaan van den energiestroom al geforceerd zou wezen. En indien men bij een electrische lamp wilde gaan zeggen, dat de energie van de batterij naar de lamp door den aether gaat, als energiestroom van Poynting en niet langs den draad, zou men door die voorstelling, door de geconstrueerde veraanschouwelijking van de formules, zich wel onnatuurlijk ver verwijderen van de onmiddellijke aanschouwelijkheid van de stoffelijke verbinding tusschen batterij en lamp.

§ 14. Door aan hulpvoorstellingen al te zeer de gedachte aan iets reëels te verbinden, loopt men gevaar in grofheid te vervallen.

Ongetwijfeld geven de door Faraday ingevoerde magnetische en electrische „krachtlijnen" een zeer aanschouwelijk beeld van de krachten, die lichamen in een veld ondervinden. Maar de voorstelling wordt grof, wanneer men die door ons getrokken krachtlijnen reëel denkt, als een soort vangarmen, waarmee een geladen ding den

---

[1]) $$\int_{ruimte} \rho(\mathbf{f}.\mathbf{v})\, dS = \frac{d}{dt}\int_{oppervlak} \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2)\, dS - c\int_{oppervlak} [\mathbf{d}.\mathbf{h}]_n\, d\sigma.$$

aether zou vastgrijpen en meesleuren, aldus zijn massa electromagnetisch vergrootende; of wel, wanneer men in ernst de vraag gaat overwegen of het niet zou kunnen voorkomen, dat een electron maar éen krachtlijn in een bepaalde richting zou uitsteken. [1])

§ 15. Een interpretatie van volslagen andere soort is die, waarop wij nu gaan wijzen, en die, instede van als hulpmiddel iets aanschouwelijks te maken, ons dwingt een vaste vorm en gewoonte van het wetenschappelijk denken te laten varen. Het is de interpretatie van coördinaat-en-tijd-transformaties en het invariant zijn van electromagnetische formules tegen die transformaties, die men samenvat in de dusgenaamde leer van het relativiteitsbeginsel.

Bij de onverdroten pogingen om een gemakkelijke berekeningsmethode te geven voor de electromagnetische verschijnselen in bewegende stelsels van lichamen, zijn VOIGT en LORENTZ ertoe gekomen, verschillende hulpgrootheden in te voeren. In plaats van een verschijnsel — het bedrag van eene meetbare grootheid op verschillende plaatsen en op verschillende tijdstippen — te beschrijven als functie van de gewone coördinaten en den gewonen tijd, gingen zij het beschrijven als functie van andere onafhankelijk veranderlijken, als functie van getransformeerde coördinaten en een getransformeerden tijd, die lineaire combinaties zijn van de gewone. Zij kozen deze combinaties zoodanig, dat, wanneer men ook de electrische en magnetische krachten geschikt samenvoegt tot complexen, die men de „nieuwe" electrische en magnetische krachten zou kunnen noemen, de lineaire differentiaalvergelijkingen, welke als grondvergelijkingen deze nieuwe grootheden als functies van getransformeerde coördinaten en getransformeerden tijd beheerschen, juist dezelfde zijn als de grondvergelijkingen voor de ongewijzigde grootheden.

Wanneer nu een lichaam voor ons zich met eene eenparige snelheid verschuift, kunnen wij een dusdanige transformatie uitvoeren, dat de coördinaten van het lichaam constant worden. Zeer duidelijk is het een groot gemak, dat men nu voor de „nieuwe" electrische

[1]) Vgl. E. GEHRCKE, Über eine physikalische Anwendung des Satzes vom zureichenden Grunde. *Verh. der D. Phys. Ges.*, d. 14, p. 379, 1912.

en magnetische krachten de formules die in stilstaande lichamen gelden, kan toepassen. Deze vereenvoudiging is een bijzonder groot voordeel, dat aan het invoeren der nieuwe grootheden is verbonden.

Lorentz, zooals gezegd, voerde ze in als mathematische hulpgrootheden. De transformatie beteekent de constructie van een fictief geval, waarin de berekeningen gemakkelijker zijn en waarmee het werkelijk geval in eenvoudige correspondentie staat.

Einstein echter interpreteert de invariantie der formules bij de transformaties anders. Hij vindt er aanleiding in de hypothese vóórop te stellen dat de natuurwetten, d.w.z. de wiskundige vergelijkingen die de verschijnselen beschrijven, onafhankelijk zullen zijn van de translatie van het coördinatenstelsel, waarin men ze beschrijft. Stelt men een proef op in een laboratorium, dat zich in een oceaanstoomer beweegt, of dat op aarde stil staat, dat zich met de aarde mee beweegt of wel in het zonnestelsel stilstaat, de instrumenten zullen steeds dezelfde uitkomst leveren; van hunne beweging zal geen invloed te bespeuren zijn. Het komt alles slechts op de relatieve werkingen en metingen aan.

Dit beginsel bevredigt een intuïtief verlangen van onzen geest. Maar opdat het waar zij, moeten wij laten gelden, dat de bewegende laboranten in een ander coördinaat-en-tijd-systeem werken en de wereld waarnemen, dan een rustige hemeling, die er in geslaagd zou zijn ergens in het heelal een absoluut onbewegelijke plek te vinden, van waaruit hij de wereld zou contempleeren en beschrijven. Het relativiteitsprincipe, vooropgesteld, eischt als consequentie de coördinaat-en-tijd-transformatie van Lorentz.

Dat de bewegende menschen voor alle lengten, die zij meten grootere getallen vinden dan de hemeling, is zoo vreemd niet als wij ons verzoenen met de gedachte dat hunne meebewegende meetstaven den hemeling wat gekrompen voorkomen, vergeleken bij 't geen zij zijn, als zij voor hem stilstaan.

Van veel grooter belang is echter, dat wij ook moeten laten gelden, dat de menschen er een ander idee van gelijktijdigheid op na zullen houden dan de hemeling; dat hij op verschillende plaatsen dingen voor en na elkander kan zien gebeuren, die zij gelijktijdig zouden noemen, en omgekeerd. En wij moeten aannemen dat indien de hemeling zijn vasten zetel zou verlaten om zich met de menschen mee te bewegen, hij zijn eigen opvatting van gelijktijdigheid als illusie zou prijs geven en de hunne zou erkennen als de juiste.

Dat in ons denken de gelijktijdigheid gedefinieerd dient te worden, en niet als iets absoluuts vanzelf duidelijk is, dat wij geen volstrekt kriterium hebben tusschen het voor en na in de dingen op verschillende plaats buiten ons, noch van gelijke tijdsduren, was reeds door POINCARÉ [1]) betoogd, maar EINSTEINS theorie heeft het als een actueele en urgente zaak in de wereld der physici geworpen, dat wij ons wetenschappelijk denken niet mogen baseeren op het vooroordeel dat er gelijktijdigheid objectief vaststaat, dat wij dit ingetreden denkpad hebben te verlaten.

Het relativiteitsbeginsel, in den beginne de interpretatie van de invariantie van electromagnetische formules tegen zekere transformaties, wil ver boven het vertolkte uitgaan. Het brengt eene omwenteling in de klassieke mechanica. Indien het daarmee ten slotte komt tot eene afsluitende, omvattende eenheid, zonder in complicaties dood te loopen, mogen wij wellicht met PLANCK de gedachte aan het betrekkelijke der gelijktijdigheid vergelijken met de bevrijdende, waaraan wij sinds de dagen van COPERNICUS vertrouwd zijn, dat er in de ruimte en bij de gewone bewegingen van geen absoluutheid, slechts van relativiteit te spreken is.

Lukt die afsluiting niet bevredigend, dan moeten wij niet de grenzen forceeren en planetenbewegingen gaan wringen in een keurslijf, dat gesneden is naar de maat der electrodynamica. De stoutmoedige interpretatie zal ook dan op haar eigen gebied voldoende nut gesticht hebben.

§ 16. Eene interpretatie van de entropie is geboren uit de pogingen van BOLTZMANN, om de irreversibiliteit in de thermodynamica die in flagranten strijd is met de omkeerbaarheid aller mechanische werkingen, te verzoenen met de kinetische opvattingen der gastheorie.

Het zou te ver voeren, indien hier in details werd getreden. Het

---

[1]) H. POINCARÉ, La mesure du temps, *Revue de métaphys. et de morale* d. VI, p. 1, 1898.

moge volstaan, te vermelden, dat de entropie thans opgevat mag worden als een logarithmus van de waarschijnlijkheid, dat de toestand van een systeem binnen bepaalde grenzen zal liggen.

Als het „principe van Boltzmann" schrijft men:

$$S = k \log W.$$

Hierin stelt S voor de entropie. W is hierdoor gegeven, dat $W d\mathfrak{z}$ de waarschijnlijk is, dat het systeem binnen de door de waarden $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ van een of andere grootheid bepaalde grenzen ligt, terwijl k dezelfde constante is als de „gasconstante voor één molecuul."

Er is echter veel discussie mogelijk over de wijze, waarop men die waarschijnlijkheid zal moeten definieeren, en natuurlijk rijst de vraag, of de wetenschap niet veel van hare exactheid zal verbeuren, wanneer zij hare beschouwingen gaat baseeren op kansrekening?

Hierbij is op te merken, dat men de kansrekening invoert, om een schema te hebben van „meest waarschijnlijke" systemen, waarop men de in werkelijkheid voorkomende kan afbeelden, en dat men de kansrekening zóó in te richten heeft, d. i. de waarschijnlijkheid zóó heeft te definieeren, dat de overeenstemming tusschen de meest waarschijnlijke systemen en de werkelijke zoo goed mogelijk is. is. Wanneer een bepaalde keus van waarschijnlijkheidsdefinitie niet tot bevredigend resultaat leidt, zal men eene andere moeten beproeven die het doel beter benadert. Het gaat er niet zoozeer om, à priori een meest waarschijnlijk systeem uit te denken, en dit als in de werkelijkheid voorkomend te voorspellen, als wel omgekeerd, om een schema te vinden, dat ons in staat stelt om een waargenomen systeem bevredigend als het meest waarschijnlijke voor te stellen.

§ 17. Dit proefschrift zal verder bepaaldelijk handelen over de interpretatie van de „stralingsformule van Planck", dat is de formule, die Planck gegeven heeft als kenschetsend voor den toestand in een afgesloten ruimte, waarin verschillende lichamen elkander energie toestralen en zich in een stationairen toestand bevinden, in „stralingsevenwicht." Zulk een ruimte noemen wij een „stralingsveld".

De formule van Planck stemt goed overeen met de metingen. Vooreerst zullen wij de formule als empirisch gegeven beschouwen en vragen wat wij daaruit kunnen afleiden wanneer wij de bewegingen nagaan, die verschillende lichamen in het stralingsveld zullen uitvoeren.

Ten tweede zullen wij nagaan, welke hypothese aan de formule ten grondslag moet gelegd worden.

Een kort overzicht van de afleiding der formule moge daaraan in het volgende hoofdstuk vooraf gaan.

HOOFDSTUK II.

Afleiding van Plancks stralingsformule.

§ 1. Volgens de tweede hoofdwet van de thermodynamica kan men rekenen, dat wanneer in een systeem verschillende lichamen met elkander in warmtewisseling staan, er ten slotte een stationaire toestand zal komen, waarin alle lichamen gelijke temperatuur hebben en per tijdseenheid evenveel warmte opnemen, als zij afstaan.

Of de verschillende lichamen daarbij met elkander in warmtegeleidend contact staan, dan wel, of zij slechts door straling energie kunnen uitwisselen, maakt geen verschil.

Denken wij ons nu, dat een aantal lichamen, binnen een ruimte, welke naar buiten voor warmte volstrekt ondoordringbaar is afgesloten, in den stationairen toestand van overal gelijke temperatuur gekomen zijn, dan kunnen wij de aandacht richten op de stralen, waarlangs in die ruimte de energie van het eene naar het andere lichaam stroomt, en den „stralingstoestand" in de ruimte gaan beschouwen. In wat volgt zullen wij de door de stralen doorkruiste ruimte leeg denken, als vacuum.

Van den stralingstoestand interesseert ons allereerst, hoeveel energie er per tijdseenheid door een klein vlakteëlement $d\sigma$ stroomt langs stralen, die gelegen zijn binnen een kegel met zeer kleine opening $d\omega$, waarvan de as een hoek ϑ maakt met de normaal van $d\sigma$. Men kan, nader preciseerende, nog twee onderling loodrechte polarisatierichtingen voor de straling vaststellen, en verlangen de energie te kennen, die door $d\sigma$ stroomt als straling, die naar de eene of de andere dezer richtingen gepolariseerd is.

Wanneer wij, om een kort overzicht van KIRCHHOFFS conclusies te geven, onze beschouwingen wat algemeen houden, kunnen wij allereerst opmerken, dat, zal er geen tegenstrijd komen met de tweede hoofdwet, naar weerszijden binnen dezelfde kegelopening evenveel energie door het element zal moeten stroomen, dat de energiestraling voor beide polarisatierichtingen even groot is, ook niet afhankelijk kan zijn van de oriënteering van het vlakteëlement, noch van zijne plaats; kortom, dat de stralingstoestand in het vacuum homogeen en isotroop zal zijn. Voorts is het duidelijk, dat de stralingstoestand niet zal kunnen afhangen van den aard der lichamen in onze ruimte, maar alleen van hun temperatuur. Nu is de totale energiestraling, voor welke wij, in navolging van PLANCK, de stralingen voor de twee polarisatierichtingen samenvoegende, $2K\cos\vartheta d\sigma d\omega$ zullen schrijven, samengesteld te denken uit vele deelstralingen van verschillende golflengte. De energie, die door $d\sigma$ heenstraalt als warmtestraling van een bepaalde frequentie, liggende tusschen ν en $\nu + d\nu$, zal men kunnen schrijven als

$$2K_\nu d\nu\cos\vartheta d\sigma d\omega, \text{ met dien verstande, dat } \int_0^\infty 2K_\nu d\nu = 2K.$$

Het komt er nu op aan, dat de stralingstoestand ook voor elk dezer deelstralingen homogeen en isotroop is, en behalve van de frequentie slechts afhangt van de temperatuur. Dit leidt KIRCHHOFF uit de tweede hoofdwet af. Men zou, kort, zich zoo kunnen uitdrukken, dat behalve de totale straling ook elke deelstraling in evenwicht is met alle, onverschillig welke, lichamen van gelijke temperatuur.

Door die lichamen, kan men verder zeggen, staat elke deelstraling in energiewisseling met alle deelstralingen van andere frequentie, en in den stationairen toestand zullen de verschillende deelstralingen met elkander in evenwicht zijn.

In dien stralingstoestand nu, die behoort bij het thermodynamisch evenwicht der lichamen van gelijke temperatuur T, zal de stralingsenergie op een bepaalde manier verdeeld zijn over de verschillende frequentiegebieden.

Deze evenwichtsstraling kan men nu noemen temperatuurstraling, om uit te drukken, dat haar bedrag en haar verdeeling over de frequenties alleen afhangen van de temperatuur der omgevende lichamen, of wel zwarte straling, omdat door een oppervlakte-element $d\sigma$ van een volkomen zwart lichaam, d. i. een lichaam 't welk alle opvallende stralen geheel absorbeert, evenveel naar buiten gestraald wordt als er op 't lichaam valt, en dus de straling van een volkomen zwart lichaam ook juist de evenwichtsstraling is.

Wanneer men weet hoe de totale straling 2K afhangt van de temperatuur, en hoe de partieele straling $2K_\nu\, d\nu$ afhangt van de frequentie ν en de temperatuur, mag men den stralingstoestand thermodynamisch als geheel bekend beschouwen.

Inplaats van door de energiestraling 2K of $2K_\nu\, d\nu$ kan men den toestand ook bepaald denken door de per volumeneenheid aanwezige stralingsenergie $\mathrm{u} = \frac{8\pi \mathrm{K}}{c}$, of wel door de deelstralingsenergie per volumeneenheid $u_\nu\, d\nu = \frac{8\pi\, K_\nu\, d\nu}{c}$.

Natuurlijk is weer $\mathrm{u} = \int\limits_0^\infty u_\nu\, d\nu$.

§ 2. Boltzmann heeft voor de totale straling afgeleid, hoe zij afhangt van de temperatuur, en wel op thermodynamischen grondslag, gebruik makende van de omstandigheid, dat de straling op begrenzende wanden een druk uitoefent, die gelijk is aan het derde deel van de per volumeneenheid nabij dien wand aanwezige energie, $p = \frac{1}{3}\mathrm{u}$ [1]).

Men denke zich een ruimte (volumen V) „gevuld" met zwarte

[1]) De stralingsdruk is voor elken bundel, die onder een hoek ϑ met de normaal op den wand invalt of den wand verlaat, gelijk aan $\cos^2\vartheta\; i_\nu d\nu\, d\omega$ als $i_\nu d\nu\, d\omega = \frac{2K_\nu\, d\nu\, d\omega}{c}$ de energie is, die de bundel per volumeneenheid bevat. Geïntegreerd over alle richtingen, waaronder in een homogeen isotroop stralingsveld stralen invallen en uittreden, wordt de druk $p = \frac{4\pi}{3}\int i_\nu d\nu = \frac{1}{3}\,\mathrm{u}$.

straling van de temperatuur T, en men late den toestand een weinig veranderen. De hoeveelheid warmte, die daarbij toegevoerd moet worden, zal dan dienen om de energie $U = V\mathrm{u}$ te vermeerderen, en om den arbeid pdV te verrichten. Daarbij moet een volledige differentiaal zijn

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{V\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial T}}{T} dT + \frac{\mathrm{u} + \dfrac{1}{3}\mathrm{u}}{T} dV.$$

Dit vereischt:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{V\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial T}}{T}\right\} = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{\dfrac{4}{3}\mathrm{u}}{T}\right\},$$

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial T}}{T} = -\frac{4}{3}\frac{\mathrm{u}}{T^2} + \frac{4}{3}\frac{\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial T}}{T}$$

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial T}}{\mathrm{u}} = \frac{4}{T}$$

$$\mathrm{u} = aT^4$$

waarin a eene constante beteekent.

§ 3. Om nu uit thermodynamische beschouwingen nog een tweede, belangrijke conclusie te trekken, ditmaal omtrent de energieverdeeling over het spectrum, moet men ook aan de straling zelf eene entropie toekennen. Hiertoe kan men gereedelijk overgaan, daar immers, wanneer een lichaam in het stralingsveld warmte verliest, zijn entropie vermindert; de totale entropie kan niet verminderen binnen onze adiabatisch afgesloten ruimte, dus moet de uitgezonden straling wat van de entropie hebben „meegenomen”, en het stralingsveld zal dus per eenheid van volumen een zekere entropie s bezitten.

Wat meer gekunsteld lijkt het, deze entropie gesplitst te denken in een aantal stukken $s_\nu\, d\nu$, elk voor rekening van een deelstraling, zoo dat

$$\mathrm{s} = \int_0^\infty s_\nu d\nu.$$

Men kan zich echter hieraan gewennen, door te bedenken, dat al de deelstralingen binnen een ruimte met volkomen spiegelende begrenzing een volkomen zelfstandig bestaan kunnen voeren, en dat, indien door een zeer klein materieel lichaampje, een zwart korreltje, welks eigen energie te verwaarloozen is tegen de energieën der deelstralingen, uitwisseling van energie tusschen deze onderling plaats grijpt, daarmee ook uitwisseling van entropie gepaard moet gaan.

Zal men op gewone wijze de entropieverandering van een deelstraling willen schrijven als quotient van de uitgewisselde energie en de temperatuur, dan moet men van een temperatuur van de deelstraling kunnen spreken. Dit kan slechts middellijk, door die temperatuur betrekking te laten hebben op een lichaam.

Zonder bezwaar kent men aan de zwarte straling, waarin de energieverdeeling stabiel is, de temperatuur toe van de lichamen, waarmede zij in evenwicht kan zijn. Aan den anderen kant kan men het stabiel zijn der energieverdeeling als een thermodynamisch evenwicht tusschen de deelstralingen onderling opvatten, waarin bij constante energie de entropie een maximum is. Dan moet voor een willekeurige wijziging der verdeeling, bij

$$\delta \mathrm{u} = \int_0^\infty \delta u_\nu \, d\nu = 0 \text{ ook } \delta \mathrm{s} = \int_0^\infty \frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} \delta u_\nu \, d\nu = 0.$$

Dit vereischt, dat $\dfrac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu}$ voor alle deelstralingen dezelfde waarde heeft. Maar dan wordt ook

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} = \frac{d\mathrm{s}}{d\mathrm{u}}.$$

Nu ziet men dadelijk, dat voor $\dfrac{d\mathrm{s}}{d\mathrm{u}}$ is te schrijven $\dfrac{1}{T}$, daar immers

$$d\mathrm{s} = \frac{d\mathrm{u}}{T},$$

als T de zoo even gedefinieerde temperatuur van de zwarte straling is.

Zoo komt men er toe, om de temperatuur voor een deelstraling te definieeren als

$$T = \frac{1}{\frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu}}.$$

De energie per volumeneenheid $u_\nu d\nu$ kunnen wij gesplitst denken in de energieën $i_\nu\, d\nu\, d\omega$ per volumeneenheid van de bundels, die in de verschillende richtingen gaan, als $i_\nu = \frac{1}{4\pi}\, u_\nu$.

Evenzoo kunnen wij de entropie $s_\nu d\nu$ gesplitst denken in afzonderlijk stukken $\eta_\nu d\nu d\omega$ voor de verschillende bundels, als $\eta_\nu = \frac{1}{4\pi}\, s_\nu$.

Wij steunen er op, dat de stralingstoestand geheel bepaald is door de temperatuur. Dat dus u_ν en i_ν functies zijn van alleen T en ν. Evenzoo s_ν en η_ν; echter kan men deze ook opvatten als functie van u_ν, resp. i_ν en ν.

De kunstgreep, dien wij nu gaan toepassen, zal deze zijn, dat wij door een omkeerbaar proces een lichtbundel veranderen in een anderen, met andere intensiteit, en van andere frequentie. De omkeerbaarheid van deze verandering doet ons zeker zijn, dat de entropie van den bundel dezelfde zal blijven. Als invariante functie van de intensiteit en de frequentie zal zij slechts een functie kunnen zijn van combinaties dezer grootheden, die ook zelf bij het proces invariant zijn. Deze invarianten zullen wij opzoeken.

§ 4. Het bedoelde omkeerbare proces is de terugkaatsing van stralen door een zich bewegenden spiegel.

Laat een bundel lichtstralen, die hun richtingen binnen $d\omega$ hebben en hun frequenties in een bepaald interval $d\nu$, en die een cylinder (doorsnede O, lengte l) met energie vullen, loodrecht vallen op een volkomen spiegel, die zich tegen de stralen in beweegt met een snelheid v, welke klein is, vergeleken bij de snelheid van het licht.

De tijd, gedurende welken de terugkaatsing plaats heeft, zal zijn $\frac{l}{c+v}$.

Gedurende dien tijd beweegt zich het eerste golffront van den spiegel af met relatieve snelheid $(c - v)$. Na de terugkaatsing is dus de lengte van den bundel $l' = \frac{c - v}{c + v} l$.

Het aantal golflengten wordt door de terugkaatsing niet veranderd. De golflengten veranderen dus evenredig met l, en de frequenties omgekeerd evenredig daarmede

$$\nu' = \frac{c + v}{c - v} \nu \quad \text{en} \quad d\nu' = \frac{c + v}{c - v} d\nu.$$

De energie van den bundel was $Ol\, i_\nu\, d\nu\, d\omega$. Die wordt vermeerderd met den door den spiegel verrichten arbeid. De stralingsdruk van den invallenden bundel is $i_\nu\, d\nu\, d\omega$, die van den teruggekaatsten $i_\nu'\, d\nu'\, d\omega'$, zoodat de energievergelijking wordt:

$$Ol'\, i_\nu'\, d\nu'\, d\omega' = Ol\, i_\nu\, d\nu\, d\omega + \frac{v}{c + v} lO \left\{ i_\nu\, d\nu\, d\omega + i_\nu'\, d\nu'\, d\omega' \right\}$$

$$Ol \left\{ \frac{c - v}{c + v} - \frac{v}{c + v} \right\} i_\nu'\, d\nu'\, d\omega' = Ol \left\{ 1 + \frac{v}{c + v} \right\} i_\nu\, d\nu\, d\omega$$

$$i_\nu'\, d\nu'\, d\omega' = \frac{c + 2v}{c - 2v} i_\nu\, d\nu\, d\omega.$$

De vergelijking van de entropie is natuurlijk eenvoudig:

$$Ol'\, \eta_\nu'\, d\nu'\, d\omega' = Ol\, \eta_\nu\, d\nu\, d\omega$$

$$\eta_\nu'\, d\nu'\, d\omega' = \frac{c + v}{c - v} \eta_\nu\, d\nu\, d\omega.$$

Alleen de betrekking tusschen $d\omega'$ en $d\omega$ moeten wij nog vinden. De vraag is: hoe hangt de hoek van terugkaatsing ϑ' af van den invalshoek ϑ?

Merk op, dat het aankomende en het reeds teruggekaatste deel van een golffront een gemeenschappelijke doorsnede hebben met den spiegel, die ik golfsnede wil noemen. Deze golfsnede verplaatst zich over den spiegel evenwijdig aan zichzelf. Met welke snelheid?

Stond de spiegel stil, en bewoog alleen het invallende golffront, dan zou de verplaatsingssnelheid van de snede zijn $\frac{c}{\sin \vartheta}$.

Stonden de golffronten van den invallenden straal stil, en bewoog de spiegel, dan zou de snelheid zijn $\frac{v}{tg\, \vartheta}$ in dezelfde richting. Voor den teruggekaatsten straal zijn deze getallen $\frac{c}{\sin \vartheta'}$ en $-\frac{v}{tg\, \vartheta'}$.

De totale, werkelijke verplaatsingssnelheid der golfsneden moet voor invallende en teruggekaatste golven dezelfde zijn, dus

$$\frac{c}{\sin\vartheta} + \frac{v}{tg\,\vartheta} = \frac{c}{\sin\vartheta'} - \frac{v}{tg\,\vartheta'},$$

$$\frac{c + v\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{c - v\cos\vartheta'}{\sin\vartheta'}.$$

$$d\vartheta\,\frac{c\cos\vartheta + v}{\sin^2\vartheta} = d\vartheta'\,\frac{c\cos\vartheta' - v}{\sin^2\vartheta'}.$$

Het is ons te doen om de verhouding

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\phi}{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\phi},$$

en wel, in ons geval, voor zeer kleine waarden van ϑ. Dan wordt

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{\vartheta'\,d\vartheta'}{\vartheta\,d\vartheta} = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2.$$

Wanneer wij, omdat v klein is tegen c, de verhouding $\left(\frac{c+2v}{c-2v}\right)$ beschouwen als $\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^2$, dan komt alleen in onze vergelijkingen voor de verhouding $\frac{c-v}{c+v}$, en wij vinden gemakkelijk, dat invariant

zijn $$\frac{i_\nu'}{\nu'^3} = \frac{i_\nu}{\nu^3}$$

en $$\frac{\eta_\nu'}{\nu'^2} = \frac{\eta_\nu}{\nu^2}.$$

Is dus η_ν een functie van i_ν en ν, dan moet het op deze manier

zijn, dat $$\frac{\eta_\nu}{\nu^2} = f\left(\frac{i_\nu}{\nu^3}\right),$$

waarin f een of andere functie voorstelt. Om de temperatuur in te voeren, differentieeren wij:

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} = \frac{\partial \eta_\nu}{\partial i_\nu} = \frac{1}{\nu} f'\left(\frac{i_\nu}{\nu^3}\right) = \frac{1}{T}.$$

Dan moet dus ook $$i_\nu = \nu^3\,\Psi\left(\frac{T}{\nu}\right),$$

en $$u_\nu = \nu^3\,F\left(\frac{T}{\nu}\right).$$

Dit is de betrekking, die bekend staat als de „verschuivingswet" van Wien. Zij eischt, op thermodynamische gronden, voor de stralingsformule een bepaalden vorm.

Voor de betrekking tusschen de stralingsentropie en de energie vinden we de vergelijking:

$$s_\nu = \nu^2 \, \Phi\left(\frac{u_\nu}{\nu^3}\right),$$

die volkomen gelijkwaardig is aan de vorige.

§ 5. Deze vergelijkingen zijn het uitgangspunt voor Planck. Hij gaat iets nader in op wat men noemen kan het mechanisme van de uitstraling en absorptie, of juister gezegd, hij past een kunstgreep toe om statistisch-mechanische beschouwingen de instralingstheorie te kunnen gebruiken.

Wij zullen zijne beschouwingen volgen, zooals hij ze nedergeschreven heeft in de eerste uitgave van zijne „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung", en wel omdat de gedachtengang in deze uitgave natuurlijker en overzichtelijker is, dan in de tweede uitgave.

De zwarte straling moet in evenwicht zijn met alle, onverschillig welke, lichamen, welke men ook kiest. Planck kiest nu een lineairen electrischen resonator zonder weerstand, die door de opvallende straling aan het meetrillen raakt, dat is dus energie uit de straling opneemt, en omgekeerd ook energie uitstraalt. Door deze willekeurige keuze blijft nog het eigenlijke mechanisme van de uitstraling en absorptie buiten beschouwing, want over den resonator laat Planck zich verder niet uit; veel minder nog weidt hij er over uit, hoe de onregelmatige warmtebeweging in een lichaam zich met behulp van resonatoren zou omzetten in straling, of hoe de electromagnetische energie in den resonator zich zou omzetten in warmte.

Allereerst stelt Planck op, wat men met een metaphoor de bewegingsvergelijking voor den resonator zou kunnen noemen. Schrijft men voor het wisselende electrisch moment van den resonator $f(t)$, en voor de komponent van de uitwendige electrische kracht langs den resonator E_z, dan wordt de trilling bij benadering beheerscht door de vergelijking

$$16\,\pi^4 \nu_0^{\,3} f + 4\pi^2 \nu_0 \ddot{f} - 2\sigma \dddot{f} = 3\sigma c^3 E_z. \text{ [1]}$$

Deze vergelijking levert PLANCK het middel, om voor de gemiddelde energie U van den resonator in een stationair stralingsveld te geraken tot de betrekking

$$U = \frac{c^3\, u_{\nu_0}}{8\pi\, \nu_0^{\,2}}.$$

Het verdient de aandacht, dat in deze betrekking de dempingsconstante σ niet voorkomt. Cum grano salis kan men daarin weer de wet van KIRCHHOFF herkennen: hoe grooter σ is, d.i. hoe grooter de uitstraling, des te grooter is ook de absorptie, zoodat ten slotte bij gemiddeld evenwicht de energie niet meer van σ afhangt.

§ 6. Verder gaande, wil PLANCK ook nog de entropie van den resonator weten.

Nu is het wonderlijk, wat wel de entropie van één resonator zou moeten heeten. Men gevoelt nauwelijks, wat die enkele resonator voor temperatuur zou hebben, en nog minder, wat voor entropie. Maar het is natuurlijk volkomen geoorloofd een bepaalde grootheid naar analogie een naam te geven. PLANCK rechtvaardigt dien naam, door op te merken, dat indien men een volumen, waarin zwarte straling met een resonator in evenwicht is, adiabatisch reversibel verkleint, waarbij de entropie niet veranderen mag, men het proces in tweeën kan denken:

a. compressie, waarbij alleen de energie van de straling toeneemt, haar entropie constant blijft, en voorts de energie van den resonator dezelfde blijft.

b. verlies van energie van de straling, ten bate van een aangroeiing der energie van den resonator.

Bij den onder *b* genoemden overgang van energie moet nu ook de

---

[1]) ν_0 is de eigen frequentie bij constante amplitudo. σ is het logarithmisch decrement der demping tengevolge der uitstralingen en klein gedacht.

totale entropie constant blijven. De entropie van de straling neemt ontegenzeggelijk af. Dan moet dus de resonator entropie opnemen; er moet dus sprake kunnen zijn van een eigen entropie van den resonator.

Van den resonator is het eenige gegeven zijn gemiddelde energie U. Zijn entropie S zal dus een functie moeten zijn van U. Hoe zal die functie eruit zien?

Bij een willekeurige reversibele uitwisseling van energie tusschen straling en resonator moet, zoolang er geen warmte naar buiten gaat, d. i. zoolang:

$$\delta U + V. \int \delta u_\nu \, d\nu = 0,$$

de entropie constant blijven:

$$\frac{dS}{dU} \delta U + V. \int_0^\infty \frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} \delta u_\nu . d\nu = 0.$$

Daar de energieuitwisseling tusschen den resonator en de deelstralingen beperkt blijft tot een klein interval bij zijn frequentie ν_0, leidt men hieruit af:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{\partial s_{\nu_0}}{\partial u_{\nu_0}}$$

Uit een vroegere formule zien we, dat dan

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\nu_0} \psi_1 \left(\frac{u_{\nu_0}}{\nu^3_0}\right)$$

$$= \frac{1}{\nu_0} \psi_2 \left(\frac{U}{\nu_0}\right),$$

en dus $S = \chi \left(\frac{U}{\nu_0}\right)$.

In den grond der zaak is dit nog altijd de verschuivingswet van Wien, maar nu door Planck klaar gemaakt om ze toe te passen op de door de statistische mechanica gestelde betrekking (I, § 16)

$$S = k \log W.$$

§ 7. Wanneer nu deze formule op den resonator moet worden toegepast, is de groote vraag: wat zal de waarschijnlijkheid beteekenen voor een resonator, die de gemiddelde energie U heeft?

Met de wisselingen van de phasen der incohaerente stralen, die op den resonator vallen, zal ook de energie van den resonator onophoudelijk en ongeregeld varieeren. Planck noemt dit „elementar ungeordnet”, en legt er den nadruk op, dat zonder deze ongeordendheid der wisselingen in de energie geen sprake kan zijn van de entropie van den resonator. Als men op éen oogenblik de bepaalde energie U van den resonator geeft, kan men niets over de entropie zeggen. Het heeft dan geen zin daarover te spreken, en er is dan ook geen ruimte voor waarschijnlijkheidsbeschouwingen. Eerst doordat wij, op een groot aantal op goed geluk getroffen tijdstippen de waarde U van de energie noteerende, de meest verschillende waarden verzamelen, die een gemiddelde U leveren, kan er van een entropie sprake zijn. Het is de verzameling van dit groot aantal (N) waarden U op achtereenvolgende oogenblikken, waarop wij voor een waarschijnlijkheidsredeneering vat hebben.

Dezelfde verzameling zal men verkrijgen, wanneer men naast elkaar in hetzelfde stationaire stralingsveld N gelijke resonatoren denkt, en op één oogenblik nagaat welke energie U elk afzonderlijk heeft. De ongeordendheid der waarden van U nà elkander die één resonator vertoont, vinden we dan terug in de waarden van U die naast elkander bij verschillende resonatoren voorkomen. Het gemiddelde zal U zijn, en ook voortdurend U blijven. Het overzicht is nu gemakkelijker, wanneer men voor dit systeem van N resonatoren de entropie berekent, en daaruit de entropie van één resonator.

Thermodynamisch („makroskopisch”) is de toestand van het systeem geheel bepaald door de energie $N\,U$, die de resonatoren gezamenlijk hebben. De fijnere details echter der verdeeling van deze energie over de resonatoren is ongeordend, aan het toeval overgelaten. Hier is dus ruimte voor eene waarschijnlijkheidsdefinitie.

Planck stelt de waarschijnlijkheid van den beschouwden toestand van het systeem gelijk aan het aantal manieren, waarop de distributie van de energie $N\,U$ over N resonatoren mogelijk is. Elke verdeeling levert dan wat hij noemt eene „komplexion”, waarvan het aantal de thermodynamische waarschijnlijkheid levert De vraag wordt dus:

op hoeveel manieren kan de energie NU verspreid liggen over N resonatoren?

§ 8. Denk om te beginnen de totale energie gesplitst in P porties $\varepsilon = \frac{NU}{P}$. Om ons een bepaalde verdeeling helder voor den geest te stellen, kunnen wij voor elke portie het nummer noteeren van den resonator, aan welken zij is toegevallen. In de verzameling van P nummers, die wij verkrijgen, komen de nummers van resonatoren die een veelvoud van ε aan energie hebben, herhaald voor.

Het aantal verdeelingen, dat wij kunnen denken, is dus het aantal „combinaties van N resonatoren, P aan P, met herhalingen."

De stelkunde leert, dat het aantal van deze is

$$\frac{N(N+1)\ldots\ldots(N+P-1)}{P!}.$$

Dit is het aantal van wat Planck noemt de mogelijke „komplexionen"; hieraan moet de waarschijnlijkheid van den toestand, waarin het systeem een energie NU heeft, gelijk zijn.

Wij schrijven dus gevoegelijk

$$W = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}.$$

De entropie van het systeem moet dan zijn

$$S_N = k \log \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}.$$

Neemt men, met Stirling, voor groote n:

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

dan is met voldoende benadering

$$\log n! = (n+\tfrac{1}{2}) \log n - n.$$

Wanneer men $\frac{1}{2}$ en ook 1 tegen n verwaarloozen mag, wordt daarmee

$$S_N = k\,\{(N+P)\,log\,(N+P) - N\,log\,N - P\,log\,P\}$$

$$= k\,N\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\left[log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)+log\,N\right] - -log N - \frac{U}{\varepsilon}\left[log\frac{U}{\varepsilon}+log N\right]\right\}$$

$$= k\,N\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\,log\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

De entropie voor één resonator wordt:

$$S = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\,log\,\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

§ 9. Nu hebben we vastgesteld, dat $S = \chi\left(\frac{U}{\nu}\right)$ moest zijn, zonder dat in deze functie naast het argument U/ν nog andere dan algemeene constanten zouden kunnen optreden. Wij concludeeren, dat ε evenredig moet zijn met ν,

$$\varepsilon = h\nu.$$

Hierin stelt h eene constante voor.

Daardoor wordt onze formule:

$$S = k\left\{\left(1+\frac{U}{h\nu}\right)log\left(1+\frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu}\,log\,\frac{U}{h\nu}\right\}.$$

Bedenken wij dat $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$, dan is

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{h\nu}\,log\,\frac{1+\frac{U}{h\nu}}{\frac{U}{h\nu}},$$

waaruit volgt

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Denken we ten slotte aan de betrekking $U = \frac{c^2}{\nu^2} K_\nu$, dan volgt de stralingsformule van Planck:

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

of

$$u_\nu = \frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

§ 10. Langs deze reeks van plausibiliteiten verleidt Planck ons tot zijne stralingsformule, die door de metingen goed wordt bevestigd.

Dat de waarschijnlijkheid hier werd aangegeven door een groot getal, in plaats van op de gewone mathematische wijze door een echte breuk, is van geen ingrijpend belang. Het kan in den logarithmus slechts een verschil maken van een constanten term, de additieve constante van de entropie. In de tweede uitgave echter van zijn boek draagt Planck zorg, zijne waarschijnlijkheid uitdrukkelijk als „thermodynamische waarschijnlijkheid" te definieeren, die steeds grooter dan 1 moet zijn, omdat naar zijne latere opvattingen de entropie steeds grooter dan nul is, in overeenstemming met het „warmtetheorema" van Nernst.

Het ligt voor de hand, om bij het onderzoek naar het aantal verdeelingsmanieren van een bepaalde hoeveelheid energie over N resonatoren te beginnen met die hoeveelheid in een groot aantal eindige porties te verdeelen, en voor deze de mogelijke wijze van distributie na te gaan, met de bedoeling om te zien hoeveel distributies mogelijk zijn, als men het aantal porties grooter en grooter, en de porties energie dus steeds kleiner laat worden.

Voordat echter tot de grens wordt overgegaan, vergelijkt Planck reeds zijne uitkomst, waarin de porties ε nog eindig zijn, met den gewijzigde vorm der wet van Wien, en concludeert daaruit, dat ε evenredig moet zijn met ν, stel $h\nu$. Dat is Plancks interpretatie van de verschuivingswet van Wien. Daarmee is nog niet gezegd, dat h eindig moet blijven. De onderstelling, dat de energie met oneindig kleine bedragen zou kunnen veranderen (h oneindig klein), blijkt echter te leiden tot een stralingsformule, die aan het stralingsveld een oneindig groote energie toekent.[1]) Verwerpt men dit, dan moet dus ondersteld worden, dat h niet oneindig klein mag worden, maar uitteraard eindig is. Dit is de „quantenhypothese", welke onderstelt dat een resonator slechts energie kan opnemen of afstaan in veelvouden van het quantum $\varepsilon = h\nu$, waarin $h = 6.5 \times 10^{-27}$ een universeele constante is.

---

[1]) Het is dezelfde formule, welke de uitkomst is van de toepassing der „klassieke" statistische mechanica in de stralingstheorie. Vgl. III, § 2.

De quantenhypothese komt mij nu voor te zijn eene interpretatie van de verschuivingswet van WIEN met behulp van de waarschijnlijkheidsapparatuur van PLANCK, in overeenstemming gebracht met de waarneming, volgens welke de energie in het stralingsveld eindig is.

Want op het mechanisme van emissie en absorptie gaat PLANCK eigenlijk, zooals reeds gezegd, niet in.

§ 11. De invoering van de quantenhypothese is niet mogelijk, tenzij men inbreuk maakt op de gewone electrodynamische wetten, en de differentiaalvergelijking voor den resonator van § 5 laat vallen. Logisch mag die hypothese niet worden ingevoerd, nadat uit de differentiaalvergelijking 't verband tusschen stralingsintensiteit en resonatorenergie is afgeleid. Daarom voert PLANCK bij de tweede uitgave van zijn theorie reeds om te beginnen de speciale onderstelling in, dat een resonator de energie continu kan absorbeeren, maar slechts dan zal kunnen uitstralen, en dan ook al zijn energie opeens, wanneer hij een veelvoud van $h\nu$ verzameld heeft. Of bij het passeeren van $U = h\nu$, $U = 2h\nu$ enz. de uitstraling al of niet zal plaats hebben, hangt af van de intensiteit van de opvallende straling. De kans op uitstraling stelt PLANCK omgekeerd evenredig met die intensiteit.

Ook de waarschijnlijkheidsbeschouwingen kleedt PLANCK bij de tweede uitgave anders in, meer in aansluiting met het gewone schema der statistische mechanica.

Dat ik in dit hoofdstuk niettemin PLANCKS beschouwingen van 1906 volgde, vindt zijn reden hierin, dat de gedachtenontwikkeling, welke daar leidde tot de quantenhypothese, m.i. natuurlijker is dan de theorie, die in de tweede uitgave deze hypothese als iets gereeds, iets willekeurigs vooropstelt, en dat aldus ook de conclusie duidelijker wordt, die aan het eind van § 10 getrokken is.

HOOFDSTUK III.

De klassieke statistische beschouwingen.

§ 1. Het is niet anders dan natuurlijk, dat men bij het invoeren van waarschijnlijkheidsbeschouwingen in het gebied der stralingstheorie liefst gebruik gaat maken van wat er bij het uitwerken der leer in de statistische mechanica reeds bereikt is, en graag werkt naar een voorbeeld, dat in de kinetische gastheorie proefhoudend is gebleken.

Het is bekend, dat men den toestand van een systeem als gegeven kan beschouwen, wanneer men de n algemeene coördinaten van dat systeem en de n bewegingsmomenten in de richting dier coördinaten kent, en dat men het samenstel dezer gegevens, de „phase", kan voorstellen door een punt in een $2n$-dimensionale uitgebreidheid. Met opzet kiest men als parameters dier uitgebreidheid de bewegingsmomenten en niet de snelheden, omdat dit bij de beschouwing van conservatieve systemen, die de bewegingsvergelijkingen van Hamilton volgen, een voordeel geeft. Denkt men n.l. een bepaald volumenelement $d\lambda$ van de $2n$-dimensionale uitgebreidheid ingenomen door punten, die de phasen van een groot aantal systemen voorstellen, dan zullen, wanneer men die systemen zich laat bewegen en eenige oogenblikken later weer hunne toestanden bepaalt, krachtens de bewegingsvergelijkingen van Hamilton de phasenpunten met elkander weer een volumenelement $d\lambda'$ bepalen, dat evengroot is als het oorspronkelijke $d\lambda$. Dit is het theorema van Liouville. Ook ligt $d\lambda'$ tusschen dezelfde energiegrenzen als $d\lambda$.

Dit geeft aanleiding om de waarschijnlijkheid a priori, dat een phasenpunt van een systeem in verschillende volumenelementen van de phasenuitgebreidheid tusschen dezelfde energiegrenzen ligt, evenredig te stellen met het volumen dier elementen.

Uit deze hypothese volgt de belangrijkste uitkomst der statistische mechanica, de zoogenaamde „wet van de aequipartitie" der energie. Volgt men een enkel systeem in zijn beweging gedurende een lang tijdsverloop, of wel denkt men een groot aantal systemen met gelijken energie-inhoud naast elkander, dan zal men voor het gemiddelde van elken term, die in de uitdrukking van de energie als kwadraat van een coördinaat (potentieele energie) of als kwadraat van een bewegingsmoment (kinetische energie) voorkomt, gemiddeld over het tijdsverloop of over de verzameling systemen, een even groot bedrag vinden, en wel het bedrag $\frac{1}{2} k\, T$, waarin k een algemeene constante is, de gasconstante voor één molecuul, en T de temperatuur van het systeem kan genoemd worden.

§ 2. Wil men van deze wet een toepassing maken op een systeem, waarvan ook energiestralers deel uitmaken, een systeem waarbij de straling een niet te verwaarloozen deel van de totale energie heeft, dan moet men allereerst dit systeem met straling geheel afgesloten denken, en de coördinaten aangeven, met welke men den toestand van het systeem kan definieeren.

JEANS heeft zich een afgesloten holte gedacht binnen volkomen spiegelende wanden. Om het ons gemakkelijk te maken zullen wij die holte kubusvormig denken. In die holte denken wij stralingsenergie in den aether aanwezig, een bepaalden stralingstoestand, laten wij zeggen een trilling van den aether. Nu zijn er in den kubus allerlei staande lichttrillingen mogelijk, met allerhande frequenties en richtingen der golfnormalen. Het aantal van onafhankelijk van elkander mogelijke staande-golfstelsels met frequenties tusschen ν en $\nu + d\nu$ in den kubus met de ribbe l is

$$N(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\, l^3 \nu^2}{c^3}\, d\nu.$$

Wij gaan nu uit van de gedachte, dat elke stralingstoestand binnen de kubusholte kan worden genomen als superpositie van de elementaire staande trillingen, elk met een passende amplitudo en phase.

Als coördinaten van ons systeem zullen wij nu de op 't oogenblik bereikte uitwijkingen in de buiken van een elementair golfstelsel nemen, en als momenten de afgeleiden der electromagnetische energie naar de fluxies dier uitwijkingen.

Wanneer de holte volkomen leeg is, is er geen mogelijkheid, dat er energie zal overgaan van een elementair golfstelsel naar een ander. Om de wisselwerking te introduceeren moeten wij binnen de holte een zwart korreltje denken, dat overigens zoo klein moge zijn, dat het geen noemenswaardige eigen energie heeft, vergeleken bij die van de aethertrillingen, en dus alleen als uitwisselaar werkt, zonder verder van belang te zijn.

Nu kan men de wet van de aequipartitie toepassen, en moet dan voor elken vrijheidsgraad, voor de gemiddelde energie van elk der elementaire golfstelsels $2 \times \frac{1}{2} kT$ in rekening brengen. Zoo vindt men voor de stralingsenergie in het interval $(\nu, \nu + d\nu)$ per volumeeenheid:

$$u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi \, k\nu^2 \, T}{c^3} \, d\nu.$$

Deze stralingsformule geeft de werkelijkheid goed weer in het gebied van de groote golflengten, waar zij met die van Planck overeenstemt. Maar volgens haar kan de energie van het zwarte stralingsveld, $u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu$ niet eindig zijn. Er zijn voor kortere golflengten onbehoorlijk, oneindig veel vrijheidsgraden, die elk op een energie kT zouden aanspraak maken.

§ 3. De gevolgde redeneering is in zooverre gekunsteld, dat wederom niet wordt ingegaan op het mechanisme van emissie en absorptie. Weliswaar wordt in de holte pour besoin de la cause een absorbeerend en emitteerend korreltje gedacht, maar dat speelt in de berekeningen niet de minste rol.

Een andere vraag is, of de statistisch-mechanische beschouwingen zonder meer mogen worden toegepast op een systeem met oneindig veel vrijheidsgraden.

In zijn rapport aan de „Réunion-SOLVAY" preciseert LORENTZ de theorie. Allereerst beschouwt hij een systeem, bestaande uit ongeladen deeltjes, geladen deeltjes en aether, binnen een volkomen spiegelenden wand en geeft precies aan wat de coördinaten q_1 van de ongeladen materie, q_2 van de electronen en q_3 van den aether zullen zijn. Om het aantal coördinaten eindig te houden, denkt hij die golfstelsels, welker golflengte beneden een kleine waarde λ_0 ligt, (zoo klein dat zij bij de proeven niet in aanmerking komen), door bepaald aangenomen vaste verbindingen uitgesloten. De vergelijkingen van HAMILTON blijven voor dit systeem van kracht, daarmee het theorema van LIOUVILLE, en de uitkomst van de statistische beschouwing levert wederom het in de vorige paragraaf vermelde resultaat. De conclusie is, dat zoolang de gewone vergelijkingen der electrodynamica gelden, er geen uitweg is om aan deze met de waarneming strijdige formule te ontkomen.

Bij deze beschouwingen is in de bewegingsvergelijkingen voor de coördinaten q_2 alles opgesloten wat van belang is voor de absorptie en emissie der energie. Hier is, impliciet, rekening gehouden met het mechanisme der uitstraling en opslorping.

§ 4. Er is een fundamenteel verschil tusschen de werkingen, die de moleculen in de gewone modellen der statistische mechanica op elkander uitoefenen, en de werkingen in een systeem van geladen deeltjes, die zich onder elkanders invloed bewegen.

De werkingen, waarvoor de gewone mechanica gebouwd is, hangen alleen af van de gelijktijdige standen van 't oogenblik en zijn ook niet afhankelijk van de snelheden.

Wij weten, dat er voor geladen deeltjes de beginselen van een aparte mechanica zijn ontwikkeld. Hun bewegingsvergelijkingen hangen af van de snelheden. Met name zijn het hun massa's die met de snelheid veranderen. Nog erger is, dat in de bewegingsvergelijkingen voor een deeltje voorkomen de snelheden en versnellingen der andere deeltjes, die zij hadden, niet op het gelijktijdige oogenblik, maar op een vroeger tijdstip.

De werking op afstand-in-den-tijd is het principieele verschil tusschen de mechanica der electrische deeltjes en de gewone mechanica.

Op gene is de statistische methode gansch niet ingericht. Zij wordt pas bruikbaar, wanneer men den aether invoert en de beschouwingen over de golfstelsels. Daarmee echter voert men de continuïteit, en het oneindig aantal vrijheidsgraden in. Bovendien, zooals Van der Waals Jr.[1]) opmerkte, kan men dan voor electronen met louter electromagnetische massa geen bewegingsvergelijkingen meer hebben, omdat hun snelheden, als het veld gegeven is, noodzakelijk mede gegeven zijn.

§ 5. Wil er een statistische mechanica te bouwen zijn voor een electromagnetisch systeem, dan zal men van dit systeem weer verlangen, dat vooreerst het een eindig aantal coördinaten heeft, dat is, bestaat uit een eindig aantal stoffelijke en electrische punten; ten tweede, dat het afgesloten is, dat wil zeggen, dat geen der punten een ander dan op een tot het systeem behoorend punt zou werken. Dit laatste zou men kunnen bereiken door het invoeren van volkomen spiegelende wanden, die althans denkbaar zijn.

Voorts zou men op gemakkelijke manier moeten kunnen aangeven, hoe de versnellingen afhangen van alle andere versnellingen op alle vroegere tijdstippen.

Wanneer men er dan met een waarschijnlijksheidsbeschouwing in slagen zou aan te geven welke energie gemiddeld ten deel zou vallen aan een stoffelijk-electrisch punt, dat, elastisch gebonden, trillingen zou uitvoeren, dan had men daarmee de spectrale verdeeling der energie gevonden.

Voorloopig echter is hier nog geen uitzicht op.

Men zou kunnen meenen, dat een statistische electrodynamica zooals hier bedoeld, geen ander resultaat vermocht op te leveren dan het reeds gevondene, omdat het geen verschil kan maken in de uitkomst, of men zich van den aether als een hulpmiddel bedient, of niet. Echter behoeft dit niet het eenige onderscheid te

---

[1]) Vgl. Lorentz, *Rapp. Réunion de Bruxelles*, p. 29, 1911; Van der Waals Jr., *Versl. Kon. Ac. v. Wet. Amsterdam*, d. XXI, p. 1099, 1912.

zijn. Het is niet uitgesloten, dat men door de nadere beschouwing van de versnellingen wellicht aanleiding zou vinden, een andere phaseuitgebreidheid, bijvoorbeeld van $3n$ afmetingen, met als parameters ook functies der versnellingen, te construeeren en op grond van de invariantie van volumen-elementen dézer uitgebreidheid bij het verloop der verschijnselen een definitie van waarschijnlijkheid te geven, verschillend van die welke op het theorema van LIOUVILLE berust, en die in hare uitkomsten zich mogelijkerwijze nauwer aan de werkelijkheid zou aansluiten.

§ 6. Dat de gewone statistische mechanica in de stralingstheorie niet een bevredigende uitkomst vermag te geven, behoeft ons ook hierom niet te verwonderen, omdat wij in de structuur van die statistiek niet nog een tweede universeele constante vinden, behalve de gemiddelde kinetische energie van een molecuul bij bepaalde temperatuur.

Toch moet er een tweede universeele constante in de stralingstheorie optreden. Universeel bedoelt hier te zeggen: tot gelding komend bij de emissie en absorptie van elk lichaam. Het voorkomen van een maximumintensiteit in de zwarte straling voor een bepaalde golflengte λ_m, die bij een bepaalde temperatuur een volkomen bepaalde waarde heeft, verraadt de aanwezigheid van iets gemeenschappelijks in de constitutie van alle lichamen, en eng verbonden met het mechanisme der emissie en absorptie.

Inderdaad komt deze constante dan ook voor den dag als de h in de formule van PLANCK.

Deze h heeft de dimensies van eene energie maal een tijd, dat is van eene werking. Maar ook heeft h de dimensie van een oppervlak in een tweedimensionale uitgebreidheid, waarvan de parameters zijn een coördinaat en een bewegingsmoment.

Dit gaf PLANCK aanleiding om h te interpreteeren als een elementair gebied van de phase-uitgebreidheid van een resonator, als een elementair gebied van waarschijnlijkheid. Door, bij de tweede uitgave, van te voren op bepaalde manier de phase-uitgebreidheid te verdeelen in stukken van deze grootte, voert hij kunstmatig een tweede constante in binnen de statistische mechanica der resonatoren.

Een interpretatie van de hypothese van dit elementair gebied van waarschijnlijkheid echter kan eerst geleverd worden door een ingaan op het mechanisme der emissie en absorptie.

§ 7. De gedachte ligt nabij, dat deze universeele constante zou duiden op een universeele eigenschap van de deeltjes, die de uitstraling in de lichamen bewerkstelligen. Zij zou erop kunnen duiden, dat het overal electronen zijn die de mechanische in electromagnetische energie omzetten, met dezelfde eigenschappen.

In dit verband heeft Einstein erop gewezen, dat h, wat dimensies betreft, gelijk staat met $\frac{\varepsilon^2}{c}$, wanneer ε het elementaire electrostatische quantum der electriciteit is, de lading van een electron. Maar natuurlijk is de dimensie van h op vele manieren te reconstrueeren door combinaties van grootheden van andere dimensie [1]).

---

[1]) Lorentz, *Versl. Kon. Ac. v. Wet. Amsterdam* d. IX, p. 418, 1901. *Rapp. Réunion de Bruxelles*, p. 33. 1911.

HOOFDSTUK IV.

Brown'sche bewegingen in het stralingsveld.

§ 1. Ofschoon duidelijk in strijd met de opvatting der voor de gewone materie geldige klassieke statistische mechanica, komt de formule van Planck toch zoo goed met de metingen overeen, dat het de moeite waard is, te vragen wat men er al zoo mee bereiken kan, wanneer men ze als een empirische formule beschouwt, die in het kort samengevat ons alle gegevens over het stralingsveld biedt, die tot nu door de waarneming zijn verzameld.

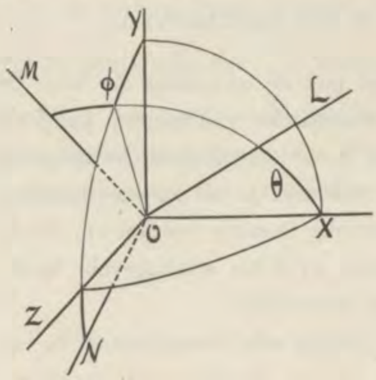
In dit hoofdstuk zullen wij de „Brown'sche bewegingen" in het stralingsveld nagaan. Voorwerpen, in het stralingsveld geplaatst, zullen van de straling een druk ondervinden. Bij het ongeordende, incohaerente der stralen, zullen de impulsen zeer onregelmatig wisselen. Daardoor zullen de voorwerpen in onregelmatige beweging geraken, die geheel hetzelfde karakter heeft als de onregelmatige bewegingen, die kleine in een vloeistof gesuspendeerde deeltjes vertoonen als gevolg van de botsingen der vloeistof-moleculen, en die naar den Engelschen bioloog Brown genoemd zijn. Denzelfden naam zullen wij overdragen op de bewegingen in het stralingsveld.

Wij zullen trachten te berekenen de gemiddelde energie, die een electron in het stralingsveld zal verkrijgen, wanneer het zich daarin vrij bewegen kan; de gemiddelde energie van een volkomen spiegelenden zuiger in een langen koker, die gevuld is met zwarte straling en volkomen spiegelende wanden heeft; voorts de gemiddelde energie van voortgang en van rotatie, die een groot, volkomen spiegelend lichaam, van willekeurigen vorm in het stralingsveld zal krijgen.

Wij zullen daarbij tot uitkomsten geraken, die wel evenredig zijn met de waarden $\frac{1}{2}\,kT$ en $\frac{3}{2}\,kT$, welke de klassieke theorie verwacht, maar die slechts kleine breukdeelen van deze waarden zijn.

De evenredigheid met kT komt niet alleen uit de speciale formule van Planck te voorschijn, in het algemeen wordt zij gewaarborgd door de verschuivingswet van Wien. [1])

§ 2. Den toestand in het stralingsveld denken wij ons als superpositie van een groot aantal stelsels van platte golven. Elk stelsel is bepaald door de richting van de golfnormaal, d. i. door de coördinaten θ en ϕ van de richting L waarin de golven loopen, door de frequentie n (het aantal trillingen in den tijd $2\,\pi$), door een phaseconstante ψ, en door de trillingsrichting, den polarisatietoestand.



Nu kan men bij het ontbinden van het veld in de elementaire stelsels zoo te werk gaan, dat men voor elke bepaalde richting L slechts stelsels heeft met twee onderling loodrechte polarisatietoestanden, die men willekeurig kiezen kan. Onze keuze zal zoo zijn, dat wij stelsels krijgen gepolariseerd met de diëlectrische verplaatsing in het meridiaanvlak LOX, of loodrecht daarop, dus langs OM, of langs ON.

Het stralingsveld wordt dan gegeven door de formules:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}_x &= \sum \alpha\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_x &= \sum \lambda\, A \cos(n\chi + \psi),\\
\mathbf{d}_y &= \sum \beta\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_y &= \sum \mu\, A \cos(n\chi + \psi),\\
\mathbf{d}_z &= \sum \gamma\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_z &= \sum \nu\, A \cos(n\chi + \psi),
\end{aligned}
$$

waarin $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z, \mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y, \mathbf{h}_z$, de componenten zijn der electrische en der magnetische kracht; voorts is

---

[1]) Vgl. Lorentz. *Rapp. Réunion de Bruxelles.* p. 38, 1911.

$$\chi = t - \frac{x \cos\theta + y \sin\theta \cos\Phi + z \sin\theta \sin\Phi}{c},$$

en, voor stelsels die gepolariseerd zijn,
met $\mathbf{d}$ in het meridiaanvlak $L\,O\,X$:

$$\alpha = -\sin\theta,\ \beta = \cos\theta \cos\Phi,\ \gamma = \cos\theta \sin\Phi,$$
$$\lambda = 0,\qquad \mu = -\sin\Phi\ ,\ \nu = \cos\Phi,$$

met $\mathbf{d}$ loodrecht op het meridaanvlak $L\,O\,X$:

$$\alpha = 0,\qquad \beta = -\sin\Phi,\qquad \gamma = \cos\Phi,$$
$$\lambda = \sin\theta,\ \mu = -\cos\theta\cos\Phi,\ \nu = -\cos\theta\sin\Phi.$$

De verschillende stelsels zullen worden aangeduid door verschillende indices bij $A, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, n, \theta, \Phi, \psi$.

De splitsing is geheel in den trant van de ontbindingen in reeksen van FOURIER. De elementaire stelsels zijn volslagen incohaerent, d. w. z. de phaseconstanten ψ hebben daarin onafhankelijk van elkander alle mogelijke waarden. [1])

§ 3. Het komt er nu op aan, de coëfficienten A te kennen. Ze alle nauwkeurig aan te geven, is echter onmogelijk.

Maar, zooals reeds gezegd werd, men is tevreden als men voor den stralingstoestand kent de functie K_n, d. w. z. wanneer men weet, hoeveel energie er per tijdseenheid door een vlakteëlement $d\sigma$ gestraald wordt in richtingen binnen een kleine kegelopening $d\omega$, welke nagenoeg loodrecht zijn op $d\sigma$, en voor rekening van frequenties binnen een interval dn. Meer dan dit bedrag, $2\,K_n\,dn\,d\sigma\,d\omega$ wanneer men alle polarisatietoestanden bij elkander rekent, kunnen de experimenten ons niet geven.

Nu is er aan de definitie van K_n door de ficties dn en $d\omega$ die kunstmatig de energie in stukken splitsen, iets vaags, dat pas precieser wordt, wanneer wij, na de ontbinding van het stralingsveld in de elementaire stelsels, zeggen: $2\,K_n\,dn\,d\sigma\,d\omega$ is de energie, die gemiddeld per tijdseenheid door $d\sigma$ zou stroomen, wanneer alleen de stelsels, gericht binnen $d\omega$, en met frequenties tusschen n en $n + dn$ aanwezig zouden zijn. Dan is de energiestroom $\mathbf{s}$ volgens POYNTING $c\,[\mathbf{d}.\,\mathbf{h}]$, of wel, in de richting van de golfnormaal, van de grootte $c\mathbf{d}^2$.

[1]) Vgl. EINSTEIN en HOPF, *Ann. d. Phys.* d. XXXIII, p. 1100. 1910.

Dit is

$$|\mathbf{s}| = c\left\{\sum A_i^2 \cos^2(n_i t + \psi_i) + 2\sum A_i A_j \cos(n_i t + \psi_i)\cos(n_j t + \psi_j)\right\}.$$

Doordat de stralen incohaerent zijn, blijft er alleen over

$$|\mathbf{s}| = c \sum A_i^2 \cos^2(n_i t + \psi_i),$$

of gemiddeld

$$|\mathbf{s}| = \tfrac{1}{2}\, c \sum A_i^2.$$

Vergelijken wij dit met $2\, K_n\, dn\, d\omega$, dan blijkt

$$\sum_{dn,\, d\omega} A^2 = \frac{4\, K_n\, dn\, d\omega}{c}.$$

Voor de straling van slechts een van beide boven aangegeven polarisatietoestanden, voor „gepolariseerde" straling, zouden wij hebben

$$\sum_{dn,\, d\omega\ gepol.} A^2 = \frac{2\, K_n\, dn\, d\omega}{c}.$$

De gegevens, die wij bij onze berekeningen aan de formule van Planck ontleenen zullen, zijn dus deze grootheden $\sum A^2$ voor de verschillende speelruimten dn en $d\omega$.

§ 4. Nu vangen wij de beschouwing van het arbeidsvermogen van beweging, dat een electron gemiddeld heeft, wanneer het geheel vrij zich in een stralingsveld kan bewegen, aan met de opmerking, dat in het gewirwar van de verschillende stralen, die elkaar doorkruisen, het electron hoogst grillig heen en weer zal geslingerd worden. Elke straal op zichzelf zal het electron in trilling brengen, en deze trillende beweging zal het electron weer in tweeden aanleg krachten doen ondervinden, van denzelfden straal en van alle andere. De incohaerente stralen interfereeren met elkander op om zoo te zeggen onberekenbare wijze, zoodat wij op ons electron in het geheel geen oog zouden kunnen houden, indien men niet [1]), op het voorbeeld van Einstein en Hopf [2]), die eenen resonator in het stralingsveld beschouwden, duurzame effecten, tengevolge eener voortgaande

[1]) Zie Lorentz. *Rapp. Réunion de Bruxelles.* 1911. p. 37.

[2]) A. Einstein en L. Hopf. Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld. *Ann. d. Phys.* d. XXXIII p. 1105. 1910.

beweging van het electron, gescheiden had van de onregelmatige interferentie-impulsen, die het electron tengevolge van zijn door den eenen straal opgewekte trillende beweging, van de andere stralen ontvangt.

Wij zullen de snelheid van de voortgaande beweging op den tijd $t = 0$ definieeren als de middelwaarde

$$\mathbf{V}_x = \frac{\int\limits_0^\tau \mathsf{v}_x \, d\vartheta}{\tau}$$

van de werkelijke snelheid over een klein tijdvak τ, dat zoo groot gedacht is, dat daarin v_x vele malen van grootte gewisseld kan hebben, maar aan den anderen kant zoo klein, dat de middelwaarde $\mathbf{V}_x$ dezelfde is aan het begin en aan het eind van het interval. $\mathbf{V}_x$ moet onafhankelijk zijn van de „physisch-oneindig-kleine" grootheid τ.

Verder gaan wij de beweging beschouwen over een klein interval T, zoo groot, dat daarin $\mathbf{V}_x$ oneindig weinig verandert, bijvoorbeeld met $\Delta \mathbf{V}$, maar ook alweer zoo klein, dat $\frac{\Delta \mathbf{V}_x}{T}$ onafhankelijk is van de grootte van T. T wordt weer, evenals τ, gedacht als een „physisch-oneindig-kleine" grootheid, maar eene van lagere orde dan τ.

Wanneer wij onder $\mathbf{K}_x$, $\mathbf{K}_y$ en $\mathbf{K}_z$ de componenten der werkende kracht in de X-, Y- en Z-richtingen verstaan, en door ϑ een oogenblik voorstellen, gelegen in het interval tusschen $t = 0$ en $t = \tau$, dan geldt, voor elke richting

$$m\mathsf{v}_{\vartheta + T} = m\mathsf{v}_\vartheta + \int\limits_\vartheta^{T+\vartheta} \mathbf{K}\, dt.$$

Gaan wij deze vergelijking integreeren, en stellen wij dan $\mathbf{K}$ voor als een functie van $\vartheta + t'$, waarin $t' = t - \vartheta$, dan volgt

$$\int\limits_0^\tau m\mathsf{v}_{\vartheta+T}\, d\vartheta = \int\limits_0^\tau m\mathsf{v}_\vartheta \, d\vartheta + \int\limits_0^\tau d\vartheta \int\limits_0^T \mathbf{K}_{\vartheta + t'}\, d\vartheta.$$

Verwisselen wij nu de volgorde van integratie, en deelen we door τ, dan blijkt:

$$\frac{\int\limits_0^\tau m\mathsf{v}_{T+\vartheta}\, d\vartheta}{\tau} = \frac{\int\limits_0^\tau m\mathsf{v}_\vartheta \, d\vartheta}{\tau} + \int\limits_0^T dt' \frac{\int\limits_0^\tau \mathbf{K}_{t'+\vartheta}\, d\vartheta}{\tau}.$$

Nu is $\dfrac{\int_0^\tau \mathbf{K}_{t'+\theta}\,d\theta}{\tau}$ bij definitie de gemiddelde waarde $\mathbf{K}_m$ voor den tijd $t = t' + \theta$, waarin $\theta = 0$ is. In den laatsten term is dus geen onderscheid meer te maken tusschen t en t'. Voorts mogen wij, daar wij ondersteld hebben, dat $\tau \ll T$ is, schrijven

$$\int_0^T \mathbf{K}_m\,dt = \int_0^T \mathbf{K}_x\,dt = \mathbf{X},$$

waarin $\mathbf{X}$ de totale impuls in de X-richting is gedurende T.

Hiermede zijn wij geraakt tot een vergelijking van de gemiddelde snelheden vóór en na het interval T, waarvan de laatste met den index 1 gemarkeerd is:

$$m\mathbf{V}_{1x} = m\mathbf{V}_x + \mathbf{X},$$

Een overeenkomstige vergelijking geldt voor de beweging in de richtingen van Y- en Z- as. Aan den aanvang van het interval T willen wij echter $\mathbf{V}_y = \mathbf{V}_z = 0$ stellen.

Alles wat wij over de beweging zullen kunnen weten, moet uit den impuls $\mathbf{X}$ te voorschijn komen. Wanneer nu $\mathbf{X}$ te splitsen blijkt in een duurzaam gedeelte, evenredig met T, op de een of andere manier afhankelijk van de snelheid $|\mathbf{V}| = V$, als een weerstand, en een met de interferenties wisselend gedeelte, kan men schrijven

$$m\mathbf{V}_{1x} = m\mathbf{V}_x - Q(V)T + \mathbf{X}_{int}, \quad m\mathbf{V}_{1y} = \mathbf{Y}_{int}, \quad m\mathbf{V}_{1z} = \mathbf{Z}_{int},$$

verder de kwadraten bij elkaar optellen, en het gemiddelde nemen over een groote verzameling van electronen, die alle door een gelijk stralingsveld heen vliegen.

$$\overline{m^2\mathbf{V}_1^2} = \overline{m^2\mathbf{V}^2} + \overline{Q(V)^2T^2} - 2\,\overline{m\mathbf{V}_x Q(V)}\,T + \overline{\mathbf{X}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Y}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Z}_{int}^2} +$$
$$+ 2\overline{m\mathbf{V}_x\mathbf{X}_{int}} - 2\,\overline{Q(V)\mathbf{X}_{int}}\,T.$$

Het gemiddelde snelheidskwadraat zal in het ensemble hetzelfde zijn, voor en na het interval T, verder zal men T^2 om de kleinheid van T kunnen verwaarloozen. Voorts zullen $\mathbf{V}_x$ en $\mathbf{X}_{int}$ onafhankelijk van elkander in alle grootten, positieve en negatieve, kunnen voorkomen, zoodat het gemiddelde van $\mathbf{V}_x\mathbf{X}_{int.}$ nul zal zijn. Hetzelfde mag men zeggen van het gemiddelde van $Q(V)\,\mathbf{X}_{int.}$, zoodat overblijft de vergelijking

$$0 = -2m\,\overline{VQ(V)}\,T + \overline{\mathbf{X}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Y}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Z}_{int}^2}.$$

Hierin is, in overeenstemming met de gemaakte onderstelling $\mathbf{V} = \mathbf{V}_z = 0$, $\mathbf{V}^x = |\mathbf{V}| = V$ gesteld.

Het laat zich aanzien, dat $\overline{\mathbf{X}_{int.}^2}$, $\overline{\mathbf{Y}_{int.}^2}$, *en* $\overline{\mathbf{Z}_{int.}^2}$ evenredig met T moeten uitvallen. Wij hebben dan hier eene vergelijking, waaruit men, als Q en $\overline{\mathbf{X}^2}$ aan te geven zijn met behulp eener op het veld toepasselijke stralingsformule, zich over het gemiddelde snelheidskwadraat eene meening kan vormen.

Mocht het blijken, dat de onbekende functie $Q(V)$ een gewoon produkt wordt,

$$Q(V) = Q.V,$$

dan is de zaak al heel eenvoudig. Dan resulteert voor het gemiddeld arbeidsvermogen van beweging van een electron:

$$\tfrac{1}{2}\, m\overline{V^2} = \frac{\overline{\mathbf{X}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Y}_{int}^2} + \overline{\mathbf{Z}_{int}^2}}{4\, Q.\, T}$$

§ 5. Deze zelfde formule kan men ook op andere wijze afleiden, zooals prof. Lorentz mij deed opmerken.

Het essentieele is alweer, dat men de op het electron in het stralingsveld werkende kracht kan splitsen in een onregelmatig wisselende kracht en een voortdurenden, met de snelheid evenredigen weerstand, dien het electron ondervindt, omdat het van de stralen, die het tegenkomt, grooteren druk lijdt dan van de stralen, die het achterop komen.

Stel dat wij eene groote verzameling van electronen hebben, die in een stralingsveld met snelheden $\mathbf{V}$ (componenten ξ, η, ζ) voortvliegen, en dat volgens een of andere wet de snelheden zoo verdeeld zijn, dat er

$$F(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda$$

electronen hun snelheidscomponenten hebben binnen de speelruimte $d\lambda$, d.w.z. tusschen ξ en $\xi + d\xi$, η en $\eta + d\eta$, ζ en $\zeta + d\zeta$.

Denk dat de componenten van de weerstandskracht, die op elk electron werkt, gegeven zijn door

$$-q\xi,\ -q\eta,\ -q\zeta,$$

en stel de tijdsintegralen van de componenten der andere kracht, die onafhankelijk van $\mathbf{V}$ is, over het korte tijdsinterval T, gelijk aan

$$\mathbf{X},\ \mathbf{Y},\ \mathbf{Z}.$$

Wanneer wij nu willen nagaan, aan welke voorwaarde de verdeelingswet $F(\xi, \eta, \zeta)$ moet voldoen, om stationair te zijn, zullen wij vragen, hoeveel deeltjes er op den tijd $t + T$ zullen liggen in het element $d\lambda$ aan het punt (ξ, η, ζ) in het snelheids-diagram. Het is duidelijk, dat het die zullen zijn, welke op den tijd t lagen in het element $d\lambda'$ aan het punt

$$\xi' = \xi + \frac{q}{m}\zeta T - \frac{\mathbf{X}}{m},$$

$$\eta' = \eta + \frac{q}{m}\eta T - \frac{\mathbf{Y}}{m},$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{q}{m}\zeta T - \frac{\mathbf{Z}}{m}.$$

en onderhevig zijn geweest aan den bepaalden impuls $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$.

Wij merken op, dat

$$d\lambda' = d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = d\xi\, d\eta\, d\zeta \left(1 + 3\frac{q}{m}T\right) = d\lambda\left(1 + 3\frac{q}{m}T\right),$$

en dat de verdeelingsfunctie in $d\lambda'$ de waarde heeft

$$F' = F + \frac{\partial F}{\partial \xi}\left(\frac{q}{m}T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m}\right) + \frac{\partial F}{\partial \eta}\left(\frac{q}{m}T\eta - \frac{\mathbf{Y}}{m}\right) + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\left(\frac{q}{m}T\zeta - \frac{\mathbf{Z}}{m}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\left(\frac{q}{m}T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m}\right)^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\left(\frac{q}{m}T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m}\right)\left(\frac{q}{m}T\eta - \frac{\mathbf{Y}}{m}\right) + \ldots$$

Van de $F'\,d\lambda'$ electronen die er in $d\lambda'$ waren, hebben niet alle den impuls $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ gekregen. Wij moeten statistisch met eene waarschijnlijkheid rekenen voor het geval, dat een electron in het stralingsveld een impuls krijgt met componenten tusschen $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Y} + d\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}$. Deze waarschijnlijkheid denke men zich gegeven door

$$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\mathbf{X}\, d\mathbf{Y}\, d\mathbf{Z},$$

waarin de functie φ voldoen moet aan de voorwaarde

$$\int \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\mathbf{X}\, d\mathbf{Y}\, d\mathbf{Z} = 1,\quad \int \mathbf{X}\,\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\mathbf{X}\, d\mathbf{Y}\, d\mathbf{Z} = 0,$$
$$\int \mathbf{Y}\,\mathbf{Z}\,\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\, d\mathbf{X}\, d\mathbf{Y}\, d\mathbf{Z} = 0, \text{ enz.},$$

wanneer de integratie over alle mogelijke waarden van $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ wordt uitgestrekt.

Met bepaalden impuls $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ komen dus uit $d\lambda'$

$$F' \, d\lambda' \, \Phi \, (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \, d\mathbf{X} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{Z}$$

electronen in $d\lambda$. Behalve deze komen er, met anderen impuls, ook uit andere elementen $d\lambda'$ aan andere snelheidspunten gelegen, electronen naar $d\lambda$. Al deze elementen $d\lambda'$ zijn even groot, de verdeelingsfunctie F' echter zal telkens andere waarden hebben.

Het geheele aantal, dat na T in $d\lambda$ is gekomen, moet dus door een integratie naar $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ gevonden worden, en de voorwaarde, dat de verdeelingsfunctie stationair is, zal wezen:

$$F \, d\lambda = \int F' \, d\lambda' \, \Phi \, (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \, d\mathbf{X} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{Z},$$

$$F = \left(1 + 3 \frac{q}{m} T\right) \int \left\{ F + \sum \frac{\partial F}{\partial \xi} \left(\frac{q}{m} T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m} \right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \left(\frac{q}{m} T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m} \right)^2 +$$
$$\left. + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \, \partial \eta} \left(\frac{q}{m} T\xi - \frac{\mathbf{X}}{m} \right) \left(\frac{q}{m} T\eta - \frac{\mathbf{Y}}{m} \right) \right\} \Phi \, (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) d\mathbf{X} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{Z}.$$

Wanneer wij tweede en hoogere machten van $\frac{q}{m} T$ verwaarloozen, blijkt:

$$0 = 3 \frac{q}{m} T . F + \frac{q}{m} T \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2 m^2} \left(\overline{\mathbf{X}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \overline{\mathbf{Y}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \overline{\mathbf{Z}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \right).$$

De eenvoudigste verdeelingsfunctie, die wij zouden willen aannemen, is de uit de gastheorie bekende wet van Maxwell:

$$F = C e^{-h (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Wanneer deze zal kunnen gelden voor onze electronenverzameling, dan moet zij aan de opgeschreven vergelijking voldoen.

Nu is
$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -2 h \xi F,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = -2 h F + 4 h^2 \xi^2 F.$$

Overeenkomstige vergelijkingen gelden voor de andere differentiaalquotiënten. Er moet dus aan de voorwaarde voldaan zijn:

$$0 = 3\frac{q}{m}T - \frac{q}{m}T.2h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \frac{h}{m^2}(\overline{\mathbf{X}^2}+\overline{\mathbf{Y}^2}+\overline{\mathbf{Z}^2}) +$$
$$+\frac{2h^2}{m^2}(\xi^2\overline{\mathbf{X}^2}+\eta^2\overline{\mathbf{Y}^2}+\zeta^2\overline{\mathbf{Z}^2}).$$

Hieraan wordt voldaan, wanneer

$$\overline{\mathbf{X}^2} = \overline{\mathbf{Y}^2} = \overline{\mathbf{Z}^2} = \frac{mqT}{h}.$$

Wij weten echter, dat het gemiddelde snelheidskwadraat voor de verdeelingswet van Maxwell is:

$$\overline{V^2} = \overline{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{3}{2h}.$$

Blijkbaar is dus

$$\overline{\tfrac{1}{2}mV^2} = \frac{\overline{\mathbf{X}^2}+\overline{\mathbf{Y}^2}+\overline{\mathbf{Z}^2}}{4qT},$$

welk resultaat geheel overeenstemt met het boven reeds gevondene.

§ 6. Wanneer wij overgaan tot de berekening, zullen we eerst zorgen, dat door eene draaiing van de coördinaatassen de X-as komt te liggen in de richting van de gemiddelde snelheid $\mathbf{V}$ van het electron. Voorts transformeeren we onze gegevens volgens de regelen der theorie van het relativiteitsprincipe naar een ander stelsel, dat zich langs de X-as met eene snelheid $|\mathbf{V}|$ beweegt, zoodat het electron zich steeds in de nabijheid van den nieuwen oorsprong O' bevindt. In den vervolge zullen wij deze snelheid $|\mathbf{V}|$ aanduiden met v.

Door de toepasselijke formules

$$x = ax' + bct', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = at' + \frac{b}{c}x',$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad b = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\mathbf{d}'_x = \mathbf{d}_x, \quad \mathbf{d}'_y = a\,\mathbf{d}_y - b\,\mathbf{h}_z, \quad \mathbf{d}'_z = a\,\mathbf{d}_z + b\,\mathbf{h}_y,$$
$$\mathbf{h}'_x = \mathbf{h}_x, \quad \mathbf{h}'_y = a\,\mathbf{h}_y + b\,\mathbf{d}_z, \quad \mathbf{h}'_z = a\,\mathbf{h}_z - b\,\mathbf{d}_y,$$

krijgen wij ter beschrijving van het stralingsveld in het nieuwe stelsel:

$$\mathbf{d}'_x = \sum \alpha' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}'_x = \sum \lambda' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathbf{d}'_y = \sum \beta' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}'_y = \sum \mu' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathbf{d}'_z = \sum \gamma' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}'_z = \sum \nu' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$

waarin $$A' = (a - b\cos\theta)\,A,$$

en verder de geaccentueerde grootheden dezelfde functies zijn van x', y', z', t', n', θ', φ', als vroeger de ongestreepte van x, y, z, t, n, θ en φ, wanneer men neemt

$$n' = (a - b\cos\theta)\,n,$$

$$\cos\theta' = \frac{a\cos\theta - b}{a - b\cos\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{a - b\cos\theta}, \quad \varphi' = \varphi.$$

De coëfficiënten A' kunnen wij in verband brengen met de functie, die in het nieuwe stelsel de intensiteit der straling in verschillende richting bepaalt, en die zal afhangen van de richting van de kegelopening $d\omega'$.

Wij zullen voor die functie schrijven $K'_{n'\theta'}$, en ze op dezelfde wijze uit A' definieeren als K_n uit A. Wij vinden dan vanzelf, als dn, $d\omega$ en dn', $d\omega'$, correspondeerende intervallen zijn:

$$\sum_{dn'\,d\omega'} A'^2 = \sum_{dn\,d\omega} (a - b\cos\theta)^2 A^2,$$

$$K'_{n'\theta'}\,dn'\,d\omega' = (a - b\cos\theta)^2 K_n\,dn\,d\omega.$$

Nu vindt men $dn' = (a - b\cos\theta)\,dn$,

$$d\omega' = \sin\theta'\,d\theta'\,d\Phi' = \frac{1}{(a - b\cos\theta)^2}\sin\theta\,d\theta\,d\Phi = \frac{1}{(a - b\cos\theta)^2}\,d\omega,$$

zoodat

$$K'_{n'\theta'} = (a - b\cos\theta)^3 K_n = \frac{1}{(a + b\cos\theta')^3} K_n.$$

Wij zullen de impulsen in het nieuwe stelsel berekenen door integratie der kracht over een interval $T' = \frac{T}{a}$. Wanneer wij tenslotte de impulsen noodig hebben, zooals die in het oude stelsel gemeten moeten worden, dan zullen wij een verschil in rekening moeten brengen slechts van de orde van grootte $\frac{v^2}{c^2}$. Dit verwaarloozen wij.

§ 7. De kracht, welke op het electron werkt, is eenvoudig

$$\mathbf{K}_x' = e\,\mathbf{d}_x' + \frac{e}{c}\left[\frac{dy'}{dt'}\mathbf{h}_z' - \frac{dz'}{dt'}\mathbf{h}_y'\right].$$

Indien men de waarden van $\mathbf{d}_x$, $\mathbf{h}_x$, enz. in den oorsprong O' aangeeft door een index 0, dan is

$$\mathbf{K}_x' = e\,\mathbf{d}_{x0}' + e\left[x'\frac{\partial \mathbf{d}_x'}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathbf{d}_x'}{\partial y'} + z'\frac{\partial \mathbf{d}_x'}{\partial z'}\right] +$$
$$+ \frac{e}{c}\left[\frac{dy'}{dt'}\mathbf{h}_{z0}' - \frac{dz'}{dt'}\mathbf{h}_{y0}'\right] + \frac{e}{c}\left[\frac{dy'}{dt'}\left\{x'\frac{\partial \mathbf{h}_z'}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathbf{h}_z'}{\partial y'} + z'\frac{\partial \mathbf{h}_z'}{\partial z'}\right\} -\right.$$
$$\left. - \frac{dz'}{dt'}\left\{x'\frac{\partial \mathbf{h}_y'}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathbf{h}_y'}{\partial y'} + z'\frac{\partial \mathbf{h}_y'}{\partial z'}\right\}\right] + \ldots\ldots$$

Dergelijke vormen zijn ook voor $\mathbf{K}_y'$ en $\mathbf{K}_z'$ te schrijven. De opgeschreven ontwikkeling vooronderstelt, dat x', y', z' steeds zeer klein blijven tegen de golflengte van alle stralen, die met merkbare intensiteit voorkomen (vgl. § 15). Om $x', y', z', \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ te leeren kennen, komt het aan op de bewegingsvergelijkingen, waarin wij een term voor den schijnbaren weerstand, wegens de uitstraling van energie door het electron, opnemen:

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2} = \mathbf{K}_x' + \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3x'}{dt'^3},\quad m\frac{d^2y'}{dt'^2} = \mathbf{K}_y' + \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3y'}{dt'^3},$$
$$m\frac{d^2z'}{dt'^2} = \mathbf{K}_z' + \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3z'}{dt'^3}.$$

Uit deze bewegingsvergelijkingen wenschen wij alleen x', y', z' op te lossen om ze in $\mathbf{K}_x'$ te kunnen schrijven. De hoofdterm van $\mathbf{K}_x'$ is van de orde van grootte $e(\mathbf{d})$. x', y', z' komen slechts voor in termen, die van de orde van grootte $e(\mathbf{d})\frac{(x)}{\lambda}$, en $e(\mathbf{d})\left(\frac{(x)}{\lambda}\right)^2$ zijn. Wanneer wij nu van te voren afspreken, dat wij de tweede macht van de zeer kleine waarde $\frac{(x)}{\lambda}$ zullen verwaarloozen, behoeven wij bij de bepaling van x', y', z' geen termen te behouden, die tegen den hoofdterm van de grootte $\frac{(x)}{\lambda}$ zijn. Den uitstralingsterm echter behouden wij om zijn bijzonder karakter. Dan wordt de vergelijking voor x':

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2} = e\sum \alpha' A' \cos(n'\chi' + \psi) + \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3x'}{dt'^3}.$$

In χ' behooren x', y', z' gelijk nul gesteld te worden, daar wij $\mathbf{d}_{x_0}'$ enz. nemen moeten,

$$m\frac{dx'}{dt'} = e\sum A'\frac{\alpha'}{n'}\sin(n'\chi' + \psi) + \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^2x'}{dt'^2}$$

$$= e\sum A'\frac{\alpha'}{n'}\sin(n'\chi' + \psi) + \frac{e^2 . e}{6\pi c^3 m}\sum \alpha' A'\cos(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \frac{e^4}{36\pi^2 c^6 m}\frac{d^3x'}{dt'^3}$$

$$mx' = e\sum\frac{-A'\alpha'}{n'^2}\cos(n'\chi' + \psi) + e.\frac{e^2}{6\pi c^3 m}\sum\frac{\alpha' A'}{n'}\sin(n'\chi' + \psi) + \ldots$$

Dergelijke uitdrukkingen komen voor den dag bij behandeling der y'- en z'-vergelijkingen.

Wij merken op, dat $\frac{e^2}{6\pi c^3 m} = u = \frac{R}{c}$ is, (R = straal electron) en dat wij verder $\frac{R^2}{c^2}$ zullen verwaarloozen.

Dat wij de integratie-constanten op nul stellen, wordt door de keuze van ons assenstelsel gerechtvaardigd.

§ 8. Onze bedoeling is op $\int_0^{T'} \mathbf{K}'_x\, dt'$ gericht. De eerste term van $\mathbf{K}'_x$ zal bij integreeren over T', welk interval zeer vele trillingstijden bevat, niets opleveren. Wij moeten dus overgaan tot den tweeden en derden term. Daarin is

$$\frac{\partial \mathbf{d}_x'}{\partial x'} = \sum\frac{n'\cos\theta'}{c}\alpha' A'\sin(n'\chi' + \psi),$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_x'}{\partial y'} = \sum\frac{n'\sin\theta'\cos\phi}{c}\alpha' A'\sin(n'\chi' + \psi),$$

$$\frac{\partial \mathsf{d}_x'}{\partial z'} = \sum \frac{n' \sin \theta' \sin \Phi}{c} \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi),$$

$$\mathsf{K}_x' (=) \frac{e^2}{cm} \Bigg[\sum \frac{-\alpha' A'}{n'^2} \cos(n'\chi' + \psi) \sum n' \cos\theta' \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \frac{-\beta' A'}{n'^2} \cos(n'\chi' + \psi) \sum n' \sin\theta' \cos\Phi \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \frac{-\gamma' A'}{n'^2} \cos(n'\chi' + \psi) \sum n' \sin\theta' \sin\Phi \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \frac{\beta' A'}{n'} \sin(n'\chi' + \psi) \sum \nu' A' \cos(n'\chi' + \psi) -$$

$$- \sum \frac{\gamma' A'}{n'} \sin(n'\chi' + \psi) \sum \mu' A' \cos(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ u \Big\{ \sum \frac{\alpha' A'}{n'} \sin(n'\chi' + \psi) \sum n' \cos\theta' \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \frac{\beta' A'}{n'} \sin(n'\chi' + \psi) \sum n' \sin\theta' \cos\Phi \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \frac{\gamma' A'}{n'} \sin(n'\chi' + \psi) \sum n' \sin\theta' \sin\Phi \alpha' A' \sin(n'\chi' + \psi) +$$

$$+ \sum \beta' A' \cos(n'\chi' + \psi) \sum \nu' A' \cos(n'\chi' + \psi) -$$

$$- \sum \gamma' A' \cos(n'\chi' + \psi) \sum \mu' A' \cos(n'\chi' + \psi) \Big\} \Bigg]$$

In χ' moet overal $x' = y' = z' = 0$ gesteld worden.

De combinatie van twee stralen, 1 en 2, levert in de som het bedrag:

$$\mathsf{K}_{12}' (=) \frac{e^2}{cm} \Big[A_1' A_2' \cos(n_1' \chi_1' + \psi_1) \sin(n_2' \chi_2' + \psi_2) \times$$

$$\times \Big\{ - \frac{n_2' \cos\theta_2'}{n_1'^2} \alpha_1' \alpha_2' - \frac{n_2' \sin\theta_2' \cos\Phi_2}{n_1'^2} \beta_1' \alpha_2' -$$

$$- \frac{n_2' \sin\theta_2' \sin\Phi_2}{n_1'^2} \gamma_1' \alpha_2' + \frac{\beta_2' \nu_1'}{n_2'} - \frac{\gamma_2' \mu_1'}{n_2'} \Big\}$$

$$+ A_1' A_2' \sin(n_1' \chi_1' + \psi_1) \cos(n_2' \chi_2' + \psi_2) \times$$
$$\times \left\{ -\frac{n_1 \cos\theta_1'}{n_2'^2} \alpha_1' \alpha_2' - \frac{n_1' \sin\theta_1' \cos\Phi_1}{n_2'^2} \alpha_1' \beta_2' - \right.$$
$$\left. - \frac{n_1' \sin\theta_1' \sin\Phi_1}{n_2'^2} \alpha_1' \gamma_2' + \frac{\beta_1' \nu_2'}{n_1'} - \frac{\gamma_1' \mu_2'}{n_1'} \right\}$$
$$+ u A_1' A_2' \sin(n_1' \chi_1' + \psi_1) \sin(n_2' \chi_2' + \psi_2) \times$$
$$\left\{ \frac{n_2' \cos\theta_2'}{n_1'} \alpha_1' \alpha_2' + \frac{n_2' \sin\theta_2' \cos\Phi_2}{n_1'} \beta_1' \alpha_2' + \frac{n_2' \sin\theta_2' \sin\Phi_2}{n_1'} \gamma_1' \alpha_2' + \right.$$
$$\left. + \frac{n_1' \cos\theta_1'}{n_2'} \alpha_1' \alpha_2' + \frac{n_1' \sin\theta_1' \cos\Phi_1}{n_2'} \alpha_1' \beta_2' + \frac{n_1' \sin\theta_1' \sin\Phi_1}{n_2'} \alpha_1' \gamma_2' \right\}$$
$$+ u A_1' A_2' \cos(n_2' \chi_1' + \psi_1) \cos(n_2' \chi_2' + \psi_2) \times$$
$$\left\{ \beta_1' \nu_2' - \gamma_1' \mu_2' + \beta_2' \nu_1' - \gamma_2' \mu_1' \right\} \Big]$$

§ 9. Bij de sommeering $\Sigma\, \mathbf{K}'_{ij}$ kunnen wij apart houden de termen, waarvoor $i=j$ is, waarin dus de twee factoren gemaakt zijn uit gegevens van eenzelfden straal, en de andere, waarin de gegevens van twee verschillende stralen gecombineerd staan, die dus de werking op het electron aangeven van twee stralen, welke met elkander interfereeren.

Wanneer wij met de eerste onze rekening vervolgen, blijkt dat in den impuls $\int_0^{T'} \mathbf{K}'_{ii}\, dt'$ niets opgeleverd wordt, dan door de termen, die den $\sin^2(n_i' \chi_i' + \psi_i)$ of den $\cos^2(n_i' \chi_i' + \psi_i)$ bevatten. Hun effect verandert wel steeds van grootte, maar wisselt nooit van teeken. Zij vertegenwoordigen een **blijvende kracht**, welker impuls in den tijd T' bedraagt:

$$\frac{e^2}{cm} \cdot \frac{1}{2} T' A'^2 u \left\{ \cos\theta' \alpha'^2 + \sin\theta' \cos\Phi\, \alpha' \beta' + \sin\theta' \sin\Phi\, \alpha' \gamma' + \beta' \nu' - \gamma' \mu' \right\}.$$

De stralen, die gepolariseerd zijn met hun $\mathbf{d}'$ in 't meridiaanvlak $O' L' X'$, leveren (vgl. voor α', β', enz. § 2)

$$\sum_I \frac{1}{2} \frac{e^2}{cm} T' u A'^2 \left\{ \sin^2\theta' \cos\theta' - \sin^2\theta' \cos\theta' \cos^2\Phi - \right.$$
$$\left. - \sin^2\theta' \cos\theta' \sin^2\Phi + \cos\theta' \cos^2\Phi + \cos\theta' \sin^2\Phi \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{cm} T' u \sum_I A'^2 \cos\theta'.$$

De stralen, gepolariseerd met $\mathbf{d}' \perp O'L'X'$, leveren precies hetzelfde:

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{cm} T' u \sum A'^2 \left\{ \cos\theta' \sin^2\phi + \cos\theta' \cos^2\phi \right\}.$$

Wij hebben dus, voor alle stralen, te sommeeren

$$\sum A'^2 \cos\theta'.$$

Dit kan onmiddellijk als een integraal geschreven worden.

$$\sum A'^2 \cos\theta' = \frac{1}{c} \int 4 K'_{n'\theta'} \cos\theta' \, dn' \, d\omega'.$$

Gaan we nu terug naar het oude coördinatenstelsel, dan is de integraal:

$$\frac{4}{c} \int K'_{n'\theta'} \cos\theta' \, dn' \, d\omega' = \frac{4}{c} \int_0^\infty K_n \, dn \int_{bol} (a - b\cos\theta)(a\cos\theta - b) \, d\omega$$

$$= \frac{4}{c} \int_0^\infty K_n \, dn \int_{bol} [\cos\theta\,(a^2 + b^2) - ab(1 + \cos^2\theta)] \, d\omega,$$

$$\sum A'^2 \cos\theta' = -\frac{64}{3c} \pi \int_0^\infty K_n \, dn \times ab.$$

Dus blijkt de impuls der duurzame weerstandskracht te bedragen:

$$-Q(v).\, T' = -\frac{32\, e^2 \pi}{3\, c^2 m} T' u \frac{\frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_0^\infty K_n \, dn$$

of, bij verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$:

$$Q.\, v = \frac{32\, \pi e^2.\, v}{3\, c^3 m} u \int_0^\infty K_n \, dn; \qquad u = \frac{e^2}{6\, \pi\, c^3 m}.$$

§ 10. De andere termen, de interferentietermen, geven een som, wier gemiddelde op nul is te schatten, maar die daarvan kan en zal afwijken. Wanneer wij op een groot aantal electronen letten, die alle dezelfde snelheid v hebben, zal voor hen gemiddeld het interferentiestuk van den impuls nul zijn. Maar bij elk afzonderlijk zal het een daarvan onregelmatig afwijkende waarde hebben.

Wij zullen ons eenigszins een oordeel kunnen vormen over de grootte van deze onregelmatige interferentieïmpulsen, indien wij de grootte kunnen aangeven van hun kwadratisch-gemiddelde. Dit is ook voor ons vraagstuk al wat wij noodig hebben. Wij vragen dus het kwadratisch-gemiddelde $\overline{\mathbf{X}^2{}_{int}}$ van

$$\mathbf{X}_{int} = \int_0^{T'} \mathbf{K}'_{int}\, dt' = \Sigma \int_0^{T'} \mathbf{K}_{12}{}'_{int}\, dt' = \Sigma\, \mathbf{X}_{12\,int}.$$

Nu laat het zich aanzien, dat in het grillige stralingsveld $\mathbf{X}_{12}$, $\mathbf{X}_{13}$, $\mathbf{X}_{23}$, enz. de meest verscheidene waarden, onafhankelijk van elkander, zullen aannemen. Dit is aanleiding om te schrijven

$$\overline{\mathbf{X}_{int}{}^2} = \overline{(\Sigma\, \mathbf{X}_{12})^2} = \Sigma\, \overline{\mathbf{X}_{12}{}^2}$$

Bij de integratie van $\mathbf{K}_{12}{}'$ naar t' schrijven wij:

$$\begin{aligned}
&\cos(n_1' \chi_1' + \psi_1) \sin(n_2' \chi_2' + \psi_2) = \cos(n_1' t' + \psi_1) \sin(n_2' t' + \psi_2) \\
&\quad = \tfrac{1}{2} \sin\{(n_1' + n_2') t' + \psi_1 + \psi_2\} - \tfrac{1}{2} \sin\{(n_1' - n_2') t' + \psi_1 - \psi_2\}, \\
&\sin(n_1' \chi_1' + \psi_1) \cos(n_2' \chi_2' + \psi_2) = \tfrac{1}{2} \sin\{(n_1' + n_2') t' + \psi_1 + \psi_2\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \sin\{(n_1' - n_2') t' + \psi_1 - \psi_2\}, \\
&\cos(n_1' \chi_1' + \psi_1) \cos(n_2' \chi_2' + \psi_2) = \tfrac{1}{2} \cos\{(n_1' + n_2') t' + \psi_1 + \psi_2\} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \cos\{(n_1' - n_2') t' + \psi_1 - \psi_2\}, \\
&\sin(n_1' \chi_1' + \psi_1) \sin(n_2' \chi_2' + \psi_2) = -\tfrac{1}{2} \cos\{(n_1' + n_2') t' + \psi_1 + \psi_2\} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \cos\{(n_1' - n_2') t' + \psi_1 - \psi_2\}.
\end{aligned}$$

Bij de verdere berekeningen zullen wij termen krijgen met $n_1' - n_2'$ en met $n_1' + n_2'$ in den noemer. Het blijkt dat wij verder alleen rekening behoeven te houden met de combinaties van die stralen, voor welke $n_1' - n_2'$ zeer klein is. Dit is aanleiding om de termen met $n_1' + n_1'$ in den noemer, die zeer klein zijn vergeleken bij de andere, te verwaarloozen. Dus

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T'} \mathbf{K}_{12}{}' dt' = \frac{e^2}{cm} A_1' A_2' \frac{1}{2(n_1' - n_2')} \Big[\big\{ \cos\{(n_1' - n_2') T' + \psi_1 - \psi_2\} \\
&- \cos(\psi_1 - \psi_2) \big\} \times \Big[- \frac{n_2' \cos\theta_2'}{n_1'^2} \alpha_1' \alpha_2' - \frac{n_2' \sin\theta_2' \cos\Phi_2}{n_1'^2} \beta_1' \alpha_2' \\
&- \frac{n_2' \sin\theta_2' \sin\Phi_2}{n_1'^2} \gamma_1' \alpha_2' + \frac{\beta_2' \nu_1'}{n_2'} - \frac{\gamma_2' \mu_1'}{n_2'} + \frac{n_1' \cos\theta_1'}{n_2'^2} \alpha_1' \alpha_2'
\end{aligned}$$

$$+ \frac{n_1' \sin\theta_1' \cos\Phi_1}{n_2'^2}\alpha_1'\beta_2' + \frac{n_1' \sin\theta_1' \sin\Phi_1}{n_2'^2}\alpha_1'\gamma_2' - \frac{\beta_1'\nu_2'}{n_1'} + \frac{\gamma_1'\mu_2'}{n_1'}\Bigg]$$

$$+ u \left\{\sin\left\{(n_1' - n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\} - \sin(\psi_1 - \psi_2)\right\} \times$$

$$\times \Bigg[\frac{n_2'\cos\theta_2'\alpha_1'\alpha_2' + n_2'\sin\theta_2'\cos\Phi_2\beta_1'\alpha_2' + n_2'\sin\theta_2'\sin\Phi_2\gamma_1'\alpha_2'}{n_1'}$$

$$+ \beta_2'\nu_1' - \gamma_2'\mu_1' + \frac{n_1'\cos\theta_1'\alpha_1'\alpha_2' + n_1'\sin\theta_1'\cos\Phi_1\beta_1'\alpha_2' +}{n_2'}$$

$$\frac{+ n_1'\sin\theta_1'\sin\Phi_1\gamma_1'\alpha_2'}{n_2'} + \beta_1'\nu_2' - \gamma_1'\mu_2'\Bigg]\Bigg].$$

$$\int_0^{T'} \mathbf{K}_{12}'\,dt' = \frac{e^2}{cm} A_1' A_2' \frac{\sin\frac{1}{2}(n_1' - n_2')T'}{n_1' - n_2'} \times$$

$$\left[-\sin\left\{\tfrac{1}{2}(n_1'-n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\}M + uN\cos\left\{\tfrac{1}{2}(n_1'-n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\}\right].$$

De beteekenis van M en N blijkt dadelijk uit eene vergelijking met den vorigen regel.

Voor de som der kwadraten van de impulsen $\mathbf{X}_{12}$ moeten wij schrijven

$$\Sigma\,\mathbf{X}^2_{12} = \frac{e^4}{c^2m^2}\Sigma A_1'^2 A_2'^2 \frac{\sin^2\frac{1}{2}(n_1' - n_2')T'}{(n_1' - n_2')^2} \times$$

$$\left[M^2\sin^2\left\{\tfrac{1}{2}(n_1' - n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\} + \right.$$

$$u^2N^2\cos^2\left\{\tfrac{1}{2}(n_1' - n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\} - 2uMN \times$$

$$\left.\sin\left\{\tfrac{1}{2}(n_1' - n_2')T' + \psi_1 - \psi_2 \ldots\right\}\cos\left\{\tfrac{1}{2}(n_1' - n_2')T' + \psi_1 - \psi_2\right\}\right].$$

Wanneer wij nu een begin maken met het middelen over een groot ensemble electronen, kunnen wij om te beginnen al diegene nemen, voor welke de A_1' en A_2', n_1', n_2', Φ_1', Φ_2', θ_1', θ_2' dezelfde zijn. Hierbij zullen de phaseconstanten dusdanig alle mogelijke waarden vertoonen, dat wij voor $\sin^2\left\{\frac{1}{2}(n'_1 - n'_2)T' + \psi_1 - \psi_2\right\}$ de gemiddelde waarde mogen zetten, $\frac{1}{2}$, en voorts het product van sinus en cosinus gemiddeld nul rekenen. Verder mogen we hier ook u^2 weglaten.

Alvorens met de sommatie verder te gaan, moeten wij nu 4 gevallen onderscheiden, die een verschillende waarde voor M opleveren.

1°. straal 1 en straal 2 hebben beide $\mathbf{d}'$ in vlak $O'L'X'$,

2°. straal 1 en straal 2 hebben beide $\mathbf{d}'$ loodrecht op vlak $O'L'X'$, 3°. $\mathbf{d}_1'$ in $O'L'X'$, $\mathbf{d}_2' \perp O'L'X'$,

4°. $\mathbf{d}_1' \perp O'L'X'$, $\mathbf{d}_2'$ in $O'L'X'$.

$$1^e \text{ geval: } M_{\mathrm{I}}^2 = \Big[-\frac{n_2'}{n_1'^2}\{\sin\theta_1'\sin\theta_2'\cos\theta_2' - \cos\theta_1'\sin^2\theta_2'\cos\phi_1\cos\phi_2 - \cos\theta_1'\sin\theta_2'\sin\phi_1\sin\phi_2\}$$
$$+\frac{n_1'}{n_2'^2}\{\sin\theta_1'\cos\theta_1'\sin\theta_2' - \sin^2\theta_1'\cos\theta_2'\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin^2\theta_1'\cos\theta_2'\sin\phi_1\sin\phi_2\}$$
$$+\frac{1}{n_2'}\{\cos\theta_2'\cos\phi_1\cos\phi_2 + \cos\theta_2'\sin\phi_1\sin\phi_2\}$$
$$-\frac{1}{n_1'}\{\cos\theta_1'\cos\phi_1\cos\phi_2 + \cos\theta_1'\sin\phi_1\sin\phi_2\}\Big]^2,$$

$$2^e \text{ geval: } M_{\mathrm{II}}^2 = \Big[-\frac{1}{n_2'}\{\cos\theta_1'\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\theta_1'\cos\phi_1\cos\phi_2\}$$
$$-\frac{1}{n_1'}\{\cos\theta_2'\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\theta_2'\cos\phi_1\cos\phi_2\}\Big]^2,$$

$$3^e \text{ geval: } M_{\mathrm{III}}^2 = \Big[+\frac{n_1'}{n_2'^2}\{\sin^2\theta_1'\cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin^2\theta_1'\sin\phi_1\cos\phi_2\}$$
$$+\frac{1}{n_2'}\{-\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2\} -$$
$$-\frac{1}{n_1'}\{-\cos\theta_1'\cos\theta_2'\cos\phi_1\sin\phi_2 +$$
$$+\cos\theta_1'\cos\theta_2'\sin\phi_1\cos\phi_2\}\Big]^2,$$

$$4^e \text{ geval: } M_{\mathrm{IV}}^2 = \Big[-\frac{n_2'}{n_1'^2}\{\sin^2\theta_2'\sin\phi_1\cos\phi_2 - \sin^2\theta_2'\cos\phi_1\sin\phi_2\}$$
$$-\frac{1}{n_1'}\{-\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2\}$$
$$+\frac{1}{n_2'}\{-\cos\theta_1'\cos\theta_2'\sin\phi_1\cos\phi_2 +$$
$$+\cos\theta_1'\cos\theta_2'\cos\phi_1\sin\phi_2\}\Big]^2.$$

§ 11. Gaan we nu de sommatie in kleine stapjes uitvoeren, d. w. z. blijven we eerst met onze gepolariseerde stralen binnen dn_1', $d\omega_1'$, en dn_2', $d\omega_2'$, dan kunnen we nu voor $\overline{\sum A_1'^2}_{gep.}$ en $\overline{\sum A_2'^2}_{gep.}$ schrijven $\frac{2K'_{n_1'\theta_1'}\,dn_1'\,d\omega_1'}{c}$ en $\frac{2K'_{n_2'\theta_2'}\,dn_2'\,d\omega_2'}{c}$.

Schrijven wij de som als een integraal over twee bollen, dan moeten wij nog door 2 deelen, omdat anders elke combinatie $d\omega_1'\, d\omega_2'$ dubbel zou geteld zijn. Wij krijgen nu verder niets dan eenvoudige berekeningen.

$$\overline{\mathsf{X}_{int.}^2} = \sum \overline{\mathsf{X}_{12}^2} = \frac{e^4}{4\, c^2\, m^2} \int \frac{2\, K'_{n_1'\vartheta_1'}\, dn_1'\, d\omega_1'}{c} \cdot \frac{2\, K'_{n_2'\vartheta_2'}\, dn_2'\, d\omega_2'}{c}$$

$$\left[M_{\rm I}^2 + M_{\rm II}^2 + M_{\rm III}^2 + M_{\rm IV}^2\right] \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(n_1' - n_2')\, T'}{(n_1' - n_2')^2}.$$

Wij zullen aannemen, dat in den integraal

$$\int_0^\infty K'_{n_1'\vartheta_1} \left[\sum M^2\right] \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(n_1' - n_2')\, T'}{(n_1' - n'_2)^2}\, dn_1'$$

het maximum van den laatsten factor zoo scherp is, dat wij in $K'_{n_1'\vartheta'_1}$ en in $\left[\sum M^2\right]$, $n_1' = n_2'$ mogen stellen en ze voor het integraalteeken brengen.

Dan wordt $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(n_1' - n_2')\, T'}{(n_1' - n_2')^2}\, dn_1' = \int_{-n_2'}^\infty \frac{\sin^2 \frac{1}{2} T' x}{x^2}\, dx =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} T' x}{x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\, \pi\, T'.$$

en verder

$$\overline{\mathsf{X}_{int}^2} = \frac{e^4}{2 c^4 m^2}\, \pi\, T' \int \frac{K'_{n_2'\vartheta_1'} \cdot K'_{n_2'\vartheta_2'}}{n_2'^2}\, dn_2'\, n_2'^2 \left[\sum M^2\right] d\omega_1'\, d\omega_2'$$

$$= \frac{e^4}{2 c^4 m^2}\, \pi\, T' \int_0^\infty \frac{K n^2}{n^2}\, dn \int \frac{1}{(a + b\cos\vartheta_1')^3} \cdot \frac{1}{(a + b\cos\vartheta_2')^2} \left[\sum n'^2 M^2\right] d\omega_1'\, d\omega_2'.$$

Met de vereenvoudiging $n_2' = n_1' = n'$ wordt nu ook

$$n'^2 M_{\rm I}^2 = (\cos\vartheta_2' - \cos\vartheta_1')^2 \left\{\sin\vartheta_1' \sin\vartheta_2' + \cos\vartheta_1' \cos\vartheta_2' \cos(\phi_1 - \phi_2)\right\}^2,$$

$$n'^2 M_{\rm II}^2 = (\cos\vartheta_2' - \cos\vartheta_1')^2 \cos^2(\phi_1 - \phi_2),$$

$$n'^2 M_{\rm III}^2 = \sin^2(\phi_1 - \phi_2)(\cos\vartheta_2' - \cos\vartheta_1')^2 \cos^2\vartheta_1',$$

$$n'^2 M_{\rm IV}^2 = \sin^2(\phi_1 - \phi_2) \cos^2\vartheta_2' (\cos\vartheta_2' - \cos\vartheta_1')^2.$$

Deze uitdrukkingen moeten geïntegreerd worden over twee hemelbollen. Inplaats van dat te doen kunnen wij makkelijker met $4\pi \times 4\pi$ vermenigvuldigen, en voor elken term zijn gemiddelde in de plaats stellen.

Is $\cos\vartheta_1' = u_1$, $\cos\vartheta_2' = u_2$, dan weten we:

$$\overline{u_1^{\,2}} = \overline{u_2^{\,2}} = \frac{1}{3},\quad \overline{u_1^{\,4}} = \overline{u_2^{\,4}} = \frac{1}{5},\quad \overline{u_1^{\,2}u_2^{\,2}} = \frac{1}{9},\quad \overline{u_1^{\,2}u_2^{\,4}} = \overline{u_1^{\,4}u_2^{\,2}} = \frac{1}{15}.$$

De oneven machten van een cosinus of sinus leveren nul op, en de gemiddelde waarde van $\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$ en $\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$ is $\frac{1}{2}$.

Wij houden nu over, van

$$n'^2 M_{\mathrm{I}}^2 \colon (u_2^{\,2} + u_1^{\,2})[1 - u_1^{\,2} - u_2^{\,2} + u_1^{\,2}u_2^{\,2} + u_1^{\,2}u_2^{\,2}\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$
$$= u_1^{\,2} + u_2^{\,2} - u_1^{\,4} - u_2^{\,4} - 2u_1^{\,2}u_2^{\,2} +$$
$$+ (u_1^{\,4}u_2^{\,2} + u_1^{\,2}u_2^{\,4})(1 + \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

van $n'^2 M_{\mathrm{II}}^2 \colon (u_1^{\,2} + u_2^{\,2})\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$,

van $n'^2 M_{\mathrm{III}}^2 \colon (u_1^{\,4} + u_1^{\,2}u_2^{\,2})\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$,

van $n'^2 M_{\mathrm{IV}}^2 \colon (u_1^{\,2}u_2^{\,2} + u_2^{\,4})\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Nu kunnen wij nog inzien, dat de factor

$$\frac{1}{(a + b\cos\vartheta_1')^3}\cdot\frac{1}{(a + b\cos\vartheta_2')^2}$$

met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$, van geen verder belang is. Want de term met $\frac{v}{c}$, die in dezen factor zou moeten worden behouden, $-b\,(3\cos\vartheta_1' + 2\cos\vartheta_2')$, zou in het produkt met $[\sum n'^2 M^2]$ oneven machten van $\cos\vartheta'$ leveren, die toch bij integratie wegvallen. Dus wordt onze integraal

$$\int [\sum n'^2 M^2]\, d\omega'_1\, d\omega'_2 = 4\pi \times 4\pi \times$$
$$\times \left[\frac{3}{2}(\overline{u_1^{\,4}u_2^{\,2}} + \overline{u_1^{\,2}u_2^{\,4}}) - \frac{1}{2}(\overline{u_1^{\,4}} + \overline{2u_1^{\,2}u_2^{\,2}} + \overline{u_2^{\,4}}) + \frac{3}{2}(\overline{u_1^{\,2}} + \overline{u_2^{\,2}})\right]$$
$$= 16\pi^2\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + 1\right]$$
$$= \frac{2^7\pi^2}{3^2}.$$

Ten slotte wordt dus

$$\overline{\mathbf{X}_{int.}^{\,2}} = \frac{2^6\pi^3 T'}{3^2}\,\frac{e^4}{c^4 m^2}\int_0^\infty \frac{K_n^{\,2}}{n^2}\,dn.$$

Evenveel zal men vinden voor $\overline{\mathbf{Y}_{int.}^{\,2}}$ en $\overline{\mathbf{Z}_{int}^{\,2}}$.

§ 12. De gemiddelde kinetische energie van een electron blijkt nu te zijn:

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \frac{\overline{\mathsf{X}_{int.}^2} + \overline{\mathsf{Y}_{int.}^2} + \overline{\mathsf{Z}^2_{int.}}}{4\,QT'} = 3 \times \frac{\dfrac{2^6.\pi^3}{3^2}\, T' \,\dfrac{e^4}{c^4 m^2} \displaystyle\int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\,dn}{2^2 \dfrac{2^5 \pi}{3} \dfrac{e^2}{mc^3} u\, T' \displaystyle\int_0^\infty K_n dn},$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = 3\pi^3 c^2 . \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\,dn}{\displaystyle\int_0^\infty K_n\,dn}.$$

Om gemakkelijker de stralingsformules te kunnen substitueeren, zullen we onze formule, waarin n de frequentie in den tijd 2π is, omwerken op eene, berekend op de frequentie ν per tijdseenheid. Voor een bepaald interval moet $K_n\, dn = K_\nu\, d\nu$ zijn. $n = 2\pi\nu$, dus moet $K_n = \dfrac{K_\nu}{2\pi}$ gesteld worden. Dit geeft ons:

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{8} c^2 \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{K_\nu^2}{\nu^2}\,d\nu}{\displaystyle\int_0^\infty K_\nu d\nu}.$$

PLANCK geeft voor K_ν de formule:

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} . \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

§ 13. Laat ons deze formule gebruiken, en als nieuwe integratie-veranderlijke nemen

$$x = \frac{h\nu}{kT},\ d\nu = \frac{kT}{h}\,dx\ ,\ \frac{K_\nu^2}{\nu^2} = \frac{k^4\, T^4\, x^4}{h^2\, c^4\, (e^x - 1)^2},$$

dan volgt:

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{8} c^2 \frac{\dfrac{k^5\, T^5}{h^3\, c^4} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4}{(e^x - 1)^2}\,dx}{\dfrac{k^4\, T^4}{h^3\, c^2} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx}$$

$$=\frac{3}{8}kT\,\frac{\int\limits_0^\infty \frac{x^4}{(e^x-1)^2}\,dx}{\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx}.$$

De beide integralen zijn uit elkaar af te leiden. In 't algemeen:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx=\frac{1}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{e^x-1}\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}\,e^x}{(e^x-1)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{n+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}}{e^x-1}\,dx+\frac{1}{n+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}}{(e^x-1)^2}\,dx.$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}}{(e^x-1)^2}\,dx=(n+1)\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx-\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}}{e^x-1}\,dx.$$

Verder is

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx=$$

$$=x^n\,log\,(1-e^{-x})\Bigg|_0^\infty-n\int\limits_0^\infty x^{n-1}\,log\,(1-e^{-x})\,dx=$$

$$=n\int\limits_0^\infty x^{n-1}\left[e^{-x}+\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{3}+\frac{e^{-4x}}{4}\,\ldots\ldots\right]dx.$$

Nu is

$$\int\limits_0^\infty x^{n-1}\,e^{-px}\,dx=-\frac{x^{n-1}}{p}\,e^{-px}\Bigg|_0^\infty+\frac{n-1}{p}\int\limits_0^\infty x^{n-2}\,e^{-px}\,dx=$$

$$=\frac{(n-1)!}{p^n}.$$

Dit geeft ons:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}\,dx=n!\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\,\ldots\ldots\right]=n!\,S_{(n+1}.$$

Dus blijkt

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}}{(e^x-1)^2}\,dx=(n+1)!\,S_{(n+1)}-(n+1)!\,S_{(n+2)}.$$

Dit gebruiken wij in onze uitkomst:

$$\overline{\tfrac{1}{2}\, mv^2} = \frac{3}{8} k\, T \,.\, \frac{4!\,(S_4 - S_5)}{3!\, S_4},$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}\, mv^2} = \frac{3}{2} k\, T \, \frac{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{q^4} - \sum\limits_1^\infty \frac{1}{q^5}}{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{q^4}}.$$

Met gebruikmaking van de eerste 32 termen der reeksen vind ik

$$\sum_1^{32} \frac{1}{q^4} - \sum_1^{32} \frac{1}{q^5} = 0{,}0454, \qquad \sum_1^{32} \frac{1}{q^4} = 1{,}082.$$

Dit levert voor de gemiddelde kinetische energie van het electron

$$\overline{\tfrac{1}{2}\, mv^2} = \frac{3}{2} k\, T \times 0{,}0417\,.$$

Deze uitkomst is vrijwel 24 maal zoo klein als de „wet van de aequipartitie" zou hebben doen verwachten.

§ 15. Wij kunnen nu gemakkelijk laten zien, dat de onderstelling gerechtvaardigd is, welke wij in § 4 gemaakt hebben, n. l. deze, dat het mogelijk zou zijn, een interval T te kiezen, groot genoeg om een groot aantal perioden der trillingen te bevatten, zonder dat de gemiddelde snelheid V met meer dan een slechts oneindig-klein bedrag veranderde. Indien dit niet zoo ware, zouden wij niet, zooals wij nu gedaan hebben, den stralingsweerstand gedurende het interval gelijk aan $-\,Q\,V$ hebben mogen stellen.

Indien een voortvliegend deeltje, met massa m, een weerstand $-\,wV$ ondervindt, dan is zijn bewegingsvergelijking:

$$m\,\frac{dV}{dt} = -\,wV,$$

dus
$$V = V_0\, e^{-\frac{w}{m}t}.$$

Uit deze formule blijkt dat de aanvankelijke snelheid tot $\frac{1}{e}$, ongeveer $\frac{1}{3}$, zal zijn verminderd in den tijd $t = \frac{m}{w}$. Voor ons voortvliegend electron is in het stralingsveld de wrijvingscoëfficient Q. De tijden, waarin zijn snelheid met een eindig bedrag vermindert, zijn dus van de orde van grootte van $\frac{m}{Q}$, dat is

$$\tau = \frac{m}{\frac{32 \pi e^2}{3 m c^3} u \int K_n \, dn} = \frac{3 m^2 c^3}{32 \pi e^2} \cdot \frac{6 \pi c^3 m}{e^2} \cdot \frac{1}{\int K_n \, dn}$$

$$= \frac{9}{16} \frac{m^3 c^6}{e^4} \frac{1}{\int K_n \, dn}$$

Bedenkt men, dat $m = \frac{e^2}{6 \pi R c^2}$, als R de straal van het electron voorstelt, en vergelijkt men τ met den trillingstijd $T = \frac{\lambda}{c}$ van een straal, dan blijkt de verhouding te zijn

$$\frac{T}{\tau} = \frac{16}{9} (6 \pi)^2 \frac{R^2 \lambda \frac{1}{c} \int K_n \, dn}{m c^2} = 8 \pi \frac{R^2 \lambda \, \mathrm{u}}{m c^2}.$$

Dit is 4π maal de verhouding van de in een volumen $R^2 \lambda$ aanwezige stralingsenergie tot de energie van een deeltje dat een massa m heeft er zich met lichtsnelheid voortbeweegt. Wij zullen in onze schatting voor λ nemen de golflengte λ_m voor welke de straling de grootste intensiteit heeft. Uit experimeteele gegevens vind ik: [1])

$$m = \frac{4,7}{5,3} \times 10^{-27} \text{ gram},$$

$$R = \frac{2 . 5,3}{3^3 . 4,7} \times 10^{-13} \text{ centim.},$$

$$\lambda_m = 0,001 \text{ centim.},$$

$$\mathrm{u} = 2 . 3^3 . 5,3 \times 10^{-7} \text{ erg. per cM}^3.$$

De laatste twee getallen zijn gerekend voor een temperatuur van 300 graden absoluut. Inderdaad vinden wij nu de verhouding zeer klein:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{2^6 \pi \, 5,3^4}{3^5 . 4,7^3} \times 10^{-29},$$

[1]) KAYE en LABY. Physical and Chemical constants. 1911.

zoodat wij onze voorstelling alleszins gerechtvaardigd mogen achten.

Een tweede onderstelling is gemaakt in § 7, n.l. dat het electron bij zijn trillingen zich van zijn gemiddelden stand verwijdert over afstanden, welke slechts zeer klein zijn, vergeleken bij de golflengten der stralen. De uitkomst van die paragraaf levert voor het gemiddelde van x'^2:

$$\overline{x'^2}\,(=)\,\frac{e^2}{m^2}\overline{\left[\,\Sigma\,\frac{-A'\,\alpha'}{n'^2}\cos\left(n'\,\chi'+\psi\right)\right]^2},$$

$$\overline{x'^2}\,(=)\,\frac{e^2}{m^2}\cdot\frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{A'^2}{n'^4}\,\alpha'^2.$$

Voor $\overline{y'^2}$ en $\overline{z'^2}$ vindt men overeenkomstige uitdrukkingen, maar met β'^2 en γ'^2. Dus is voor de uitwijking s:

$$\overline{s^2}\,(=)\,\frac{e^2}{m^2}\cdot\frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{A'^2}{n'^4}$$

Dit zullen wij vergelijken met het kwadraat der golflengten.

$$\frac{\overline{s^2}}{\lambda^2}\,(=)\,\frac{e^2\,\lambda^4\int u_n\,dn}{\lambda^2\,m^2\,(2\pi c)^4}$$

$$(=)\,\frac{3}{2^3\,\pi^3}\,\frac{R\,\lambda^2\,\mathrm{u}}{mc^2}.$$

Dezen keer staat er in den teller de stralingsenergie, aanwezig in een volumen $R\lambda^2$. De verhouding wordt

$$\frac{\overline{s^2}}{\lambda^2_m}\,(=)\,\frac{5{,}3^3}{2.\,3\,\pi^3\,4{,}7^2}\times 10^{-19}.$$

Ook de onderstelling, dat s klein is tegen de golflengten, is dus alleszins gerechtvaardigd.

Onmiddellijk kan men, hier aansluitende, ook tot de orde van grootte van de gemiddelde energie $\overline{\varepsilon}$ der trillende beweging besluiten. Want $\overline{\tfrac{1}{2}\,m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\,(=)\,\tfrac{1}{2}\,mn^2\,\overline{s^2}\,(=)\,m\,\frac{2\pi^2\,c^2}{\lambda^2}\,\overline{s^2}.$

Vergelijkt men dit met de energie van de voortgaande beweging, die bij $T = 300$ van de orde is van

$$kT\,(=)\,1{,}34\,.\,10^{-16}\,.\,300\,,$$ [1]

dan blijkt

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{kT}\,(=)\,2\pi^2\,\frac{3}{2^3\,\pi^3}\,\frac{R\lambda^2\,\text{u}}{kT}$$

$$(=)\,\frac{5{,}3^2}{\pi\,4{,}7\,.\,1{,}34}\times 10^{-12},$$

zoodat tegenover de gemiddelde energie van de voortgaande beweging de gemiddelde trillingsenergie te verwaarloozen is.

§ 16. Als een tweede geval kunnen wij ons eenen oneindig-langen koker denken van rechthoekige doorsnede, waarbinnen een zuiger zich heen en weer kan bewegen. De wanden van den koker en den zuiger onderstellen wij daarbij volkomen geleidend, dus volkomen spiegelend. Aan beide zijden zal op den zuiger de stralingsdruk werken, maar door onregelmatige interferenties zal de druk van 't oogenblik afwijken van den duurzamen, en nu eens op de eene zijde, dan weer op de andere, grooter zijn. De zuiger zal zich onder den invloed van die impulsen in beweging stellen. Zoodra hij zich beweegt, wordt echter de duurzame druk aan de voorzijde grooter dan aan de achterzijde, zoodat de beweging vertraagd wordt. Heeft de zuiger eens een beweging, welke sneller is dan die door de interferentie-impulsen kan onderhouden worden, dan zal hij die weer verliezen. Er zal een zekere verhouding ontstaan tusschen de gemiddelde snelheid van den zuiger en de grootte van de onregelmatige impulsen.

Het gemiddelde snelheidskwadraat kan men berekenen voor één zuiger op verschillende tijdstippen, of wel voor een verzameling van zeer vele gelijke zuigers, die men op hetzelfde oogenblik beschouwt. Wij denken de X-richting evenwijdig aan den koker.

De methode is geheel gelijk aan die voor het electron gevolgd werd. Wij letten weer op de snelheid aan het begin en aan het eind van

---

[1] PLANCK, *Vorl. ü. d. Theorie d. Wärmestr.* 1913. p. 166.

een klein interval T. Hier echter zullen wij bij de berekening uit elkander houden den druk op het voorvlak van den zuiger (dat naar den kant der positieve X gericht is) en dien op het achtervlak. Behalve een duurzame weerstandsimpuls $-PvT$ zal er in den impuls zijn een onregelmatig interferentiestuk $\mathbf{X}_a$ van den druk op het achtervlak, $\mathbf{X}_v$ op het voorvlak. Nu wordt de vergelijking:

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v} + \mathbf{X}_a + \mathbf{X}_v - PvT.$$

Hieruit volgt op de vroeger aangegeven wijze

$$\overline{\tfrac{1}{2}\, m\, v^2} = \frac{\overline{\mathbf{X}_a{}^2} + \overline{\mathbf{X}_v{}^2}}{4\,P\,T}.$$

Het moge aangestipt worden, dat wanneer men van buigingsverschijnselen wil afzien, het geval van een volkomen spiegel die zich slechts loodrecht op zijn vlak bewegen kan, geen verschil vertoont met het hier behandelde.

In onzen rechthoekigen koker kunnen wij zonder bezwaar de stralen die komen invallen op de gewone manier aangeven door het stel vergelijkingen van § 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{xi} &= \Sigma\, \alpha\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_{xi} &= \Sigma\, \lambda\, A \cos(n\chi + \psi),\\
\mathbf{d}_{yi} &= \Sigma\, \beta\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_{yi} &= \Sigma\, \mu\, A \cos(n\chi + \psi),\\
\mathbf{d}_{zi} &= \Sigma\, \gamma\, A \cos(n\chi + \psi), & \mathbf{h}_{zi} &= \Sigma\, \nu\, A \cos(n\chi + \psi).
\end{aligned}$$

Wanneer de zuiger oneindig dun is, denken we den oorsprong op den tijd $t = 0$ in het vlak van den zuiger en in het midden, de X-as loodrecht op den zuiger in de bewegingsrichting. Heeft de zuiger eenige dikte, dan denken we ons de twee velden van invallende straling afzonderlijk gegeven, het eene, achter den zuiger $\left(\theta \text{ tusschen } 0 \text{ en } \frac{\pi}{2}\right)$, op een coördinatenstelsel met den oorsprong in het achtervlak, het andere, vóór den zuiger $\left(\theta \text{ tusschen } \frac{\pi}{2} \text{ en } \pi\right)$, op een stelsel met den oorsprong in het vóórvlak van den zuiger. De afmetingen van den rechthoekigen zuiger zijn $2p$ en $2q$.

De berekening van den druk op vóór- en achtervlak zullen wij van den beginne aan scheiden. De formules echter zijn gelijk op eene kleine finesse na, die van geen belang is.

§ 18. Allereerst passen wij zoo'n transformatie toe, dat de nieuwe oorsprong zich met den zuiger medebeweegt. Dan wordt, als in § 6,

$$\mathbf{d}_{xi}' = \Sigma\ \alpha' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}_{xi}' = \Sigma\ \lambda' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathbf{d}_{yi}' = \Sigma\ \beta' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}_{yi}' = \Sigma\ \mu' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathbf{d}_{zi}' = \Sigma\ \gamma' A' \cos(n'\chi' + \psi), \quad \mathbf{h}_{zi}' = \Sigma\ \nu' A' \cos(n'\chi' + \psi).$$

De lichtstralen worden nu aan het vlak $x' = 0$ teruggekaatst door een volkomen geleidenden wand. Daar zijn dus de tangentieele componenten van $\mathbf{d}'$, en de normale van $\mathbf{h}'$ nul. Om dit te bereiken, schrijven wij voor de teruggekaatste stralen:

$$\mathbf{d}_{xr}' = \Sigma\ \alpha' A' \cos(n'\chi'_r + \psi), \quad \mathbf{h}_{xr}' = \Sigma - \lambda' A' \cos(n'\chi_r' + \psi),$$
$$\mathbf{d}_{yr}' = \Sigma - \beta' A' \cos(n'\chi_r' + \psi), \quad \mathbf{h}_{yr}' = \Sigma\ \mu' A' \cos(n'\chi_r' + \psi),$$
$$\mathbf{d}_{zr}' = \Sigma - \gamma' A' \cos(n'\chi_r' + \psi), \quad \mathbf{h}_{zr}' = \Sigma\ \nu' A' \cos(n'\chi_r' + \psi),$$

waarin $$\chi_r' = t' - \frac{-x' \cos\theta' + y' \sin\theta' \cos\phi + z' \sin\theta' \sin\phi}{c}.$$

Dit teruggekaatste veld moeten wij superponeeren op het invallende, om het veld te krijgen dat den stralingsdruk geeft.

§ 19. Wanneer wij een zekere ruimte S door een oppervlak σ begrenzen, dan heeft de electromagnetische kracht op 't geen daarbinnen is, de component langs de X-as:

$$\mathbf{F}_x = \tfrac{1}{2} \int d\sigma \left\{ 2\, \mathbf{d}_x \mathbf{d}_n - \mathbf{d}^2 \cos(nx) \right\} + \tfrac{1}{2} \int d\sigma \left\{ 2\, \mathbf{h}_x \mathbf{h}_n - \mathbf{h}^2 \cos(nx) \right\} -$$
$$- \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int [\mathbf{d} . \mathbf{h}]_x dS.$$

Wanneer wij voor het oppervlak σ kiezen een platte rechthoekige doos, die juist den zuiger omsluit, dan komt de laatste integraal niet in aanmerking. In ons geval wordt dan

$$\mathbf{F}_x' = \tfrac{1}{2} \underset{\textit{Voorvlak.}}{\int d\sigma \left\{ \mathbf{d}_x'^2 - \mathbf{h}'^2 \right\}} - \tfrac{1}{2} \underset{\textit{Achtervlak.}}{\int d\sigma \left\{ \mathbf{d}_x'^2 - \mathbf{h}'^2 \right\}}.$$

Laten wij den eersten term verder uitwerken. Dan blijkt aan het voorvlak $x' = 0$:

$$\mathsf{F}_{v}' = \tfrac{1}{2}\int dy'\,dz'\Big[\Big\{\sum 2\alpha' A' \cos(n'\chi'_{x'=0}+\psi)\Big\}^2 -$$

$$-\Big\{\sum 2\mu' A' \cos(n'\chi'_{x'=0}+\psi)\Big\}^2 - \Big\{\sum 2\nu' A' \cos(n'\chi'_{x'=0}+\psi\Big\}^2\Big]$$

§ 20. Dit is makkelijk te splitsen in een duurzaam stuk F_c' en een interferentiestuk $\sum \mathsf{F}_{12}$, als volgt:

$$\mathsf{F}_c' = 2\int dy'\,dz' \sum\Big\{\alpha'^2 - \mu'^2 - \nu'^2\Big\} A'^2 \cos^2(n'\chi'_{x'=0}+\psi),$$

of, indien men bij de integratie naar y' en z' voor den gekwadrateerden cosinus zijn gemiddelde, $\frac{1}{2}$, neemt:

$$\mathsf{F}_c' = 4\,pq \sum A'^2 \Big\{\alpha'^2 - \mu'^2 - \nu'^2\Big\}.$$

In het andere stuk $\sum \mathsf{F}_{12}'$ wordt elke term F_{12}' voorgesteld door:

$$\mathsf{F}'_{12} = 4\int dy'\,dz'\,A_1'\,A_2'\,\{\alpha_1'\,\alpha_2' - \mu_1'\,\mu_2' - \nu_1'\,\nu_2'\}\times$$

$$\times \cos\Big\{n_1'\,t' - \frac{n_1'}{c}(y'\sin\theta_1'\cos\Phi_1 + z'\sin\theta_1'\sin\Phi_1) + \psi_1\Big\}\times$$

$$\times \cos\Big\{n_2'\,t' - \frac{n_2'}{c}(y'\sin\theta_2'\cos\Phi_2 + z'\sin\theta_2'\sin\Phi_2\Big\}.$$

Wij zullen eerst F_c' verder nagaan. Men heeft

$$A'^2\{\alpha'^2 - \mu'^2 - \nu'^2\} = - A'^2\cos^2\theta,$$

zoowel voor stralen, die gepolariseerd zijn met d in het invalsvlak als met d loodrecht daarop.

Wij vinden nu, daar voor stralen, die binnen dn' en $d\omega'$ bevat zijn

$$\sum_{dn'd\omega'} A'^2 = \frac{4}{c} K'_{n'\theta'}\,dn'\,d\omega',$$

$$\mathsf{F}_c' = -\frac{16\,pq}{c}\int K'_{n'\theta'}\cos^2\theta'\,dn'\,d\omega'$$

of wel:

$$\mathsf{F}_c' = -\frac{16\,pq}{c}\int K_n\,dn\,(a\cos\theta - b)^2\,d\omega.$$

Voor de duurzame kracht op het achtervlak vinden wij juist dezelfde uitdrukking met tegengesteld teeken. Echter is er een klein verschil in de integratiegrenzen. Aan het voorvlak wordt de zuiger getroffen door alle stralen, die een θ hebben tusschen $\frac{\pi}{2}$ en π. Aan het achtervlak echter leveren slechts die stralen een bijdrage tot den druk, voor welke θ' tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ ligt. Dat wil zeggen, de eene grens voor θ wordt dáár geleverd door

$$\frac{a \cos\theta - b}{a - b\cos\theta} = 0, \quad \cos\theta = \frac{b}{a} = \frac{v}{c}.$$

Het blijkt echter dadelijk, dat wij bij verwaarloozing van hoogere machten van $\frac{v}{c}$, deze finesse mogen verwaarloozen.

De duurzame kracht op den zuiger wordt:

$$-P(v) = -\frac{16\,pq}{c}\int_0^\infty K_n dn \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \sin\theta\,(a\cos\theta - b)^2 +$$

$$+\frac{16\,pq}{c}\int_0^\infty K_n\,dn \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{bg\cos\frac{v}{c}} d\theta \sin\theta\,(a\cos\theta - b)^2.$$

$$P(v) = \frac{16\,pq}{c}\int_0^\infty K_n\,dn\,.\,2\pi\left[2\frac{\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{3}\frac{\frac{v^3}{c^3}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

of, indien wij hoogere machten van $\frac{v}{c}$ weglaten:

$$P(v) = P\,.\,v\,. = 2^6\,\pi\frac{pq}{c^2}\int_0^\infty K_n\,dn\,.\,v.$$

§ 21. Nu gaan wij door met de berekening van het interferentiestuk $\Sigma\,\mathsf{F}_{12}'$.

$$\mathsf{F}_{12}' = 4 \int dy'\, dz'\, A_1'\, A_2' \left\{ \alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2' \right\} \times$$
$$\times \cos \left\{ n_1'\, t' - \frac{n_1'}{c} (y' \sin \theta_1' \cos \Phi_1 + z' \sin \theta_1' \sin \Phi_1) + \psi_1 \right\} \times$$
$$\times \cos \left\{ n_2'\, t' - \frac{n_2'}{c} (y' \sin \theta_2' \cos \Phi_2 + z' \sin \theta_2' \sin \Phi_2) + \psi_2 \right\},$$

$$\mathsf{F}_{12}' = 4 \int_{-p}^{+p} dy' \int_{-q}^{+q} dz'\, A_1'\, A_1' \left\{ \alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2' \right\} . \times$$
$$\times \Big[\tfrac{1}{2} \cos \Big\{ (n_1' + n_2')\, t' - \frac{y'}{c} (n_1' \sin \theta_1' \cos \Phi_1 + n_2' \sin \theta_2' \cos \Phi_2) -$$
$$- \frac{z'}{c} (n_1' \sin \theta_1' \sin \Phi_1 + n_2' \sin \theta_2' \sin \Phi_2) + \psi_1 + \psi_2 \Big\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cos \Big\{ (n_1' - n_2')\, t' - \frac{y'}{c} (n_1' \sin \theta'_1 \cos \Phi_1 - n_2' \sin \theta_2' \cos \Phi_2) -$$
$$- \frac{z'}{c} (n_1' \sin \theta_1' \sin \Phi_1 - n'_2 \sin \theta'_2 \sin \Phi_2) + \psi_1 - \psi_2 \Big\} \Big].$$

Bij de integratie komt er een stuk met een noemer $n_1' + n_2'$. Dit zullen wij in de berekening verder weglaten tegen het andere met den zeer kleinen noemer $n_1' - n_2'$.

Ter bekorting zullen wij schrijven:

$$\varpi = \frac{1}{c} (n_1' \sin \theta_1' \cos \Phi_1 - n_2' \sin \theta_2' \cos \Phi_2),$$
$$\varkappa = \frac{1}{c} (n_1' \sin \theta_1' \sin \Phi_1 - n_2' \sin \theta_2' \sin \Phi_2).$$

Wij vinden, door integratie naar y':

$$\mathsf{F}_{12}' = 2 \int dz'\, A_1'\, A_2' \left\{ \alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2' \right\} \times$$
$$\times \frac{1}{\varpi} \Big[- \sin \left\{ (n_1' - n_2')\, t' - p\, \varpi - z\, \varkappa + \psi_1 - \psi_2 \right\} +$$
$$+ \sin \left\{ (n_1' - n_2')\, t' + p\, \varpi - z\, \varkappa + \psi_1 - \psi_2 \right\} \Big]$$
$$= 4 \int_{-q}^{+q} dz'\, A_1'\, A_2' \left\{ \alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2' \right\} \times$$
$$\frac{\sin p\, \varpi}{\varpi} \cos \left\{ (n_1' - n_2')\, t' - z\, \varkappa + \psi_1 - \psi_2 \right\}.$$

De intregatie naar z' levert geheel op dezelfde manier:

$$\mathsf{F}_{12}' = 8\, A_1'\, A_2' \,\{\alpha_1'\, \alpha_1' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2'\}. \frac{\sin p\, \varpi}{\varpi} . \frac{\sin q\, \varkappa}{\varkappa} \times$$
$$\times \cos \{(n_1' - n_2')\, t' + \psi_1 - \psi_2\}.$$

§ 22. Nu moeten wij den impuls van het interferentiestuk hebben.

$$\mathsf{X} = \int_0^{T'} dt' \,\Sigma\, \mathsf{F}_{12}' = \Sigma \int_0^{T'} \mathsf{F}_{12}'\, dt' = \Sigma\, \mathsf{X}_{12}.$$

Het gemiddelde kwadraat van dezen impuls kunnen wij eveneens splitsen, doordat de diverse X_{12} onafhankelijk van elkander alle positieve en negatieve waarden kunnen aannemen,

$$\overline{\mathsf{X}^2} = \overline{[\Sigma\, \mathsf{X}_{12}]^2} = \Sigma\, \overline{\mathsf{X}_{12}^{\,2}}.$$

De som moet uitgestrekt worden, bij de berekening van $\overline{\mathsf{X}_v^{\,2}}$ over alle stralen die het voorvlak treffen, bij de berekening van $\overline{\mathsf{X}_a^{\,2}}$ over alle stralen die het achtervlak treffen.

$$\mathsf{X}_{12} = \int_0^{T'} \mathsf{F}_{12}'\, dt' = 16\, A_1'\, A_2' \,\{\alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2'\}. \frac{\sin p\, \varpi}{\varpi} . \frac{\sin q \varkappa}{\varkappa} \times$$
$$\times \frac{\sin \frac{n_1' - n_2'}{2}\, T'}{n_1' - n_2'} . \cos \left\{ \frac{n_1' - n_2'}{2}\, T' + \psi_1 - \psi_2 \right\}.$$

$$\mathsf{X}_{12}^{\,2} = 256\, A_1'^2\, A_2'^2 \,\{\alpha_1'\, \alpha_2' - \mu_1'\, \mu_2' - \nu_1'\, \nu_2'\}^2. \frac{\sin^2 p\, \varpi}{\varpi^2} . \frac{\sin^2 q\, \varkappa}{\varkappa^2} \times$$
$$\times \frac{\sin^2 \frac{n_1' - n_2'}{2}\, T'}{(n_1' - n_2')^2} . \cos^2 \left\{ \frac{n_1' - n_2'}{2}\, T' + \psi_1 - \psi_2 \right\}.$$

Wanneer wij nu een begin maken met het nemen van het gemiddelde, kunnen wij den laatsten cosinuskwadraat, daar $\psi_1 - \psi_2$ alle mogelijke waarden kan hebben, vervangen door zijn gemiddelde $\frac{1}{2}$.

Wij kunnen nu in de som $\Sigma\, \overline{\mathsf{X}_{12}^{\,2}}$ de gemiddelde waarden van A'^2 weer aangeven met behulp van de stralingsfunctie $K'_{n'\,\vartheta'}$ van § 6.

Daarmee herleidt zich de opgave tot het berekenen van den integraal

$$\overline{\mathsf{X}_v^2} = \Sigma \overline{\mathsf{X}_{12}^2} =$$

$$= \frac{2^8}{c^2} \int K'_{n'_1 \theta'_1} \cdot K'_{n'_2 \theta'_2} \cdot \{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}\} \cdot \frac{\sin^2 p\varpi}{\varpi^2} \cdot \frac{\sin^2 q\varkappa}{\varkappa^2} \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \frac{n_1 - n_2}{2} T'}{(n_1 - n_2)^2} \times dn_1'\, dn_2'\, d\omega_1'\, d\omega_2'.$$

Daarin stellen I, II, III, IV voor wat de vorm

$$\left\{\alpha_1' \alpha_2' - \mu_1' \mu_2' - \nu_1' \nu_2'\right\}^2$$

wordt, indien men de vier mogelijke polarisatiecombinaties beschouwt, waarin twee stralen kunnen verkeeren. Denkt men beide stralen gepolariseerd met d' in het invalsvlak, dan krijgt men:

$$\mathrm{I} = (\sin\theta_1' \sin\theta_2' - \sin\phi_1' \sin\phi_2' - \cos\phi_1' \cos\phi_2')^2$$

Denkt men den eersten straal met d' in het invalsvlak, den tweeden met d' loodrecht daarop, dan wordt:

$$\mathrm{II} = (-\sin\phi_1' \cos\theta_2' \cos\phi_2' + \cos\phi_1' \cos\theta_2' \sin\phi_2')^2$$

Op dezelfde manier rekent men verder uit

$$\mathrm{III} = (-\cos\theta_1' \cos\phi_1' \sin\phi_2' + \cos\theta_1' \sin\phi_1' \cos\phi_2')^2$$

en

$$\mathrm{IV} = (-\cos\theta_1' \cos\theta_2' \cos\phi_1' \cos\phi_2' - \cos\theta_1' \cos\theta_2' \sin\phi_1' \sin\phi_2')^2.$$

Voorts is bij den overgang van som op integraal nog een factor $\frac{1}{2}$ in rekening gebracht, omdat anders bij de integratie de combinatie 1.2 dubbel in de rekening zou staan (ook als 2.1), waar zij maar enkel behoort.

§ 23. Wij hebben nu de uitkomst staan als een integraal met zes veranderlijken:

$$n_1', n_2', \theta_1', \theta_2', \phi_1', \phi_2'.$$

Wij zullen nu nieuwe veranderlijken gaan invoeren, en wel

$$n_1' = n_1', \quad \theta_1' = \theta_1', \quad \phi_1' = \phi_1',$$

$$m = n_2' - n_1',$$

$$\varpi = \frac{1}{c}(n_1' \sin\theta_1' \cos\phi_1' - n_2' \sin\theta_2' \cos\phi_2'),$$

$$\varkappa = \frac{1}{c}(n_1' \sin\theta_1' \sin\phi_1' - n_2' \sin\theta_2' \sin\phi_2').$$

Hierdoor wordt onze integraal:

$$\overline{\mathsf{X}_v^2} = \frac{2^8}{c^2}\int K'_{n_1'\theta_1'}\, K'_{n_2'\theta_2'}\, \sin\theta_1' \sin\theta_2' \,\{I + II + III + IV\} \times$$

$$\times \left| \frac{\partial(n_1', n_2', \theta_1', \theta_2', \Phi_1', \Phi_2')}{\partial(n_1', \theta_1', \Phi_1', \varpi, \varkappa, m)} \right| \cdot \frac{\sin^2 p\varpi}{\varpi^2} \cdot \frac{\sin^2 q\varkappa}{\varkappa^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m}{2} T}{m^2} \times$$

$$\times\, dn_1'\, d\theta_1'\, d\Phi_1'\, d\varpi\, d\varkappa\, dm.$$

De factoren $\frac{\sin^2 p\varpi}{\varpi^2}$, $\frac{\sin^2 q\varkappa}{\varkappa^2}$ en $\frac{\sin^2 \frac{T}{2} m}{m^2}$ geven zoo'n scherp maximum voor $\varpi = 0$, $\varkappa = 0$ en $m = 0$, dat men bij de integratie naar ϖ, $\varkappa$ en m de andere factoren voor het integraalteeken mag brengen, op voorwaarde dat men in die factoren ϖ, $\varkappa$ en m gelijk nul stelt. Men kan dus schrijven

$$\overline{\mathsf{X}_v^2} = \frac{2^8}{c^2}\iint \Bigg[K'_{n_1'\theta_1'}\, K'_{n_2'\theta_2'}\, \sin\theta_1' \sin\theta_2' \,\{I + II + III + IV\} \times$$

$$\times \left| \frac{\partial(n_1', n_2', \theta_1', \theta_2', \Phi_1', \Phi_2')}{\partial(n_1', \theta_1', \Phi_1', \varpi, k, m)} \right| \Bigg]_{\varpi = 0, \varkappa = 0, m = 0} dn_1'\, d\theta_1'\, d\Phi_1' \times$$

$$\times \int \frac{\sin^2 p\varpi}{\varpi^2}\, d\varpi \cdot \int \frac{\sin^2 q\varkappa}{\varkappa^2}\, d\varkappa \cdot \int \frac{\sin^2 \frac{T}{2} m}{m^2}\, dm.$$

De grenzen voor den laatsten integraal zijn $-n_1'$ en $+\infty$. Daar de in aanmerking komende waarden van n zeer groot zijn, kan men gevoegelijk voor de grenzen $-\infty$ en $+\infty$ nemen. Ditzelfde geldt voor de andere twee integralen. Met elkander leveren nu de integraties naar m, $\varkappa$ en ϖ op:

$$p\pi \times q\pi \times \frac{T}{2}\pi.$$

In wat overblijft moet gesteld worden:

$$n_2' - n_1' = 0,\quad n_1' \sin\theta_1' \cos\Phi_1' - n_2' \sin\theta_2' \cos\Phi_2' = 0,$$
$$n_1' \sin\theta_1' \sin\Phi_1' - n_2' \sin\theta_2' \sin\Phi_2' = 0.$$

Dit vereischt, aangezien $\sin\theta_1'$ en $\sin\theta_2'$ slechts hetzelfde teeken kunnen hebben, dat wij in onzen vorm stellen

$$n_2' = n_1',\quad \theta_2' = \theta_1',\quad \Phi_2' = \Phi_1'.$$

Dan vereenvoudigt zich $\{I + II + III + IV\}$ tot $2\cos^4\theta_1'$.

Den functionaaldeterminant schrijft men het gemakkelijkst als het omgekeerde van zijn reciprook:

$$\left|\frac{\partial(n_1', n_2', \theta_1', \theta_2', \phi_1', \phi_2')}{\partial(n_1', \theta_1', \phi_1', \varpi, \varkappa, m)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(n_1', \theta_1', \phi_1', \varpi, \varkappa, m)}{\partial(n_1', n_2', \theta_1', \theta_2', \phi_1', \phi_2')}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{\partial(\varpi, \varkappa, m)}{\partial(\theta_2', \phi_2', n_2')}\right|}.$$

Wanneer men in den determinant dadelijk de waarden $n_2' = n_1' = n'$, $\theta_2' = \theta_1' = \theta'$, $\phi_2' = \phi_1' = \phi'$ schrijft, wordt:

$$\left|\frac{\partial(\varpi, \varkappa, m)}{\partial(\theta_2', \phi_2', n_2')}\right| = \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} -n' \cos\theta' \cos\phi', & n' \sin\theta' \sin\phi', & -\sin\theta' \cos\phi' \\ -n' \cos\theta' \sin\phi', & -n' \sin\theta' \cos\phi', & -\sin\theta' \sin\phi' \\ 0 & , \quad 0 & , \quad 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n'^2}{c^2} \sin\theta' \cos\theta',$$

als $\cos\theta'$ negatief is.

Wij vinden dus voor onze uitkomst

$$\overline{\mathsf{X}_v^2} = -2^8 \pi^3 pq\, T' \int \frac{K'^2_{n'\theta'}}{n'^2} \sin\theta' \cos^3\theta'\, dn'\, d\theta'\, d\phi'.$$

De uitdrukking is behoorlijk positief, aangezien aan het voorvlak θ', met verwaarloozing van een onbelangrijke finesse, gerekend kan worden te loopen van $\frac{\pi}{2}$ tot π. Voor het gemiddelde impulskwadraat aan het achtervlak vinden wij een dergelijke uitdrukking. Echter moet daarin het positieve teeken staan, omdat $\cos^3\theta'$ in dat geval positief is.

Voor den integraal schrijven wij nu (vgl. § 6):

$$\int \frac{K'^2_{n'\theta'}}{n'^2} \cos^3\theta'\, dn'\, d\omega' = \int \frac{K_n^2}{n^2} (a \cos\theta - b)^3\, dn\, d\omega.$$

Dit levert, met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$:

$$\overline{\mathsf{X}^2_v} = 2^8 \pi^3 pq\, T' \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{v}{c}\right] \int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn.$$

Aan het achtervlak vindt men:

$$\overline{\mathsf{X}_a^2} = 2^8 \pi^3 pq\, T' \left[\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{v}{c}\right] \int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn.$$

§ 24. Voor de gemiddelde kinetische energie van den spiegelenden zuiger vinden wij dus nu:

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \frac{\overline{\mathsf{X}_v^{\,2}} + \overline{\mathsf{X}_a^{\,2}}}{4\,P\,T'}$$

$$= \frac{2^8\,\pi^4\,pq\,T' \int\limits_0^\infty \frac{K_n^{\,2}}{n^2}\,dn}{4\,.\,2^6\,\pi \frac{pq}{c^2}\,T' \int\limits_0^\infty K_n\,dn},$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \pi^3\,c^2\,\frac{\int\limits_0^\infty \frac{K_n^{\,2}}{n^2}\,dn}{\int\limits_0^\infty K_n\,dn}.$$

Deze uitkomst voor den spiegel, die maar één vrijheidsgraad heeft, komt goed overeen met de uitkomst voor het electron met zijne drie vrijheidsgraden.

§ 25. Men zal eenigszins verrast zijn geweest, dat het gemiddeld kwadraat der interferentie-impulsen alleen aan het voorvlak, of alleen aan het achtervlak van den zuiger, van de snelheid bleek af te hangen.

Echter hoeft het ons niet te verwonderen, dat waar aan het voorvlak de relatieve stralingsdichtheid grooter is, ook de impulswisselingen grooter zijn dan aan het achtervlak.

Ernstiger is het, dat men om dit resultaat de geldigheid der methode voor de berekening van de gemiddelde energie in twijfel zou kunnen trekken.

Deze twijfel is echter ongegrond. Want al mag in de berekening het voor- en achtervlak van den zuiger afzonderlijk beschouwd worden, in ons probleem werkt alleen de kracht op den zuiger als geheel, en om de methode van EINSTEIN en HOPF toe te passen moeten wij $\mathsf{X}_{int.} = \mathsf{X}_a + \mathsf{X}_v$ als één impuls beschouwen. Het kwadratisch gemiddelde van dézen impuls $\mathsf{X}_{int.}$ is onafhankelijk van de snelheid van den zuiger. Wij mogen dus op de geldigheid van onze uitkomst gerust zijn.

§ 26. Van de verkregen uitkomsten voor de duurzame en wisselende impulsen op voor- en achtervlak van den zuiger willen wij nu gebruik gaan maken bij de beschouwing van de beweging die een volkomen spiegelend lichaam van willekeurigen vorm in het stralingsveld zal verkrijgen. Wij zullen de afmetingen van het lichaam zoo groot onderstellen tegen de golflengten, dat van alle buigingsverschijnselen mag worden afgezien. Verder zullen wij ook nog aannemen, dat het lichaam naar buiten overal bol is. Het ligt voor de hand, het oppervlak in elementen te verdeelen, die bij benadering rechthoekjes kunnen zijn. De afmetingen ook van deze elementen zullen wij steeds groot tegen de golflengten aannemen.

De overeenkomst van zoo'n element met het voor- of achtervlak van den zuiger is duidelijk. Slechts zal de normaal in den regel niet met de bewegingsrichting samenvallen, maar er daarentegen eenen hoek Ω mee maken. Wij zullen de berekening voor een scheef voortbewegend element niet uitvoerig herhalen. Wij zullen het ervoor houden dat de bij den zuiger gevonden evenredigheid van den blijvenden druk en de gemiddelde wisselimpulskwadraten met het oppervlak $4pq$ algemeen blijft doorgaan, zoodat er met een uitkomst per eenheid van oppervlak te rekenen is.

Denk nu, dat een element met het oppervlak O zich in de X-richting voortbeweegt met de snelheid v, en dat zijn naar buiten getrokken normaal een hoek Ω met de X-as maakt.

Allereerst denken wij weer de transformatie van § 6 uitgevoerd, waardoor het element tot rust wordt gebracht, en wij hebben:

$$\mathsf{d}'_x = \Sigma\, \alpha' A' \cos(n'\chi' + \psi), \qquad \mathsf{h}'_x = \Sigma\, \lambda' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathsf{d}'_y = \Sigma\, \beta' A' \cos(n'\chi' + \psi), \qquad \mathsf{h}'_y = \Sigma\, \mu' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$
$$\mathsf{d}'_z = \Sigma\, \gamma' A' \cos(n'\chi' + \psi), \qquad \mathsf{h}'_z = \Sigma\, \nu' A' \cos(n'\chi' + \psi),$$

met

$$\sum_{dn'\,d\omega'\ gepol.} A'^2 = \frac{2K'_{n'\vartheta'}\,dn'\,d\omega'}{c}, \quad K'_{n'\vartheta'} = \frac{1}{(a + b\cos\vartheta')^3} K_n.$$

Zonder bezwaar kunnen we denken, dat het vlak van ons element door de Z-as gaat. Wij komen er nu van zelf toe, om onze coördinaten te draaien tot een stelsel $O' \Xi \mathrm{H} Z'$, waarin de Ξ-as samenvalt met de normaal.

Voor de invallende lichtstralen zullen wij de coördinaten θ' en ϕ der golfnormalen transformeeren in de coördinaten ρ en ϑ, die den poolsafstand van de Ξ-as, en het azimuth van af het $O' \Xi \mathrm{H}$-vlak zullen voorstellen.

Voor de coördinatentransformatie geldt het schema:

	X'	Y'	Z'
Ξ	$\cos\Omega$	$\sin\Omega$	0
H	$-\sin\Omega$	$\cos\Omega$	0
Z'	0	0	1

$$x' = \xi \cos\Omega - \eta \sin\Omega,$$
$$y' = \xi \sin\Omega + \eta \cos\Omega,$$
$$z' = z.$$

De richtingscosinussen van de golfnormaal $O' L'$ zijn:

tegen X', Y', Z': $\cos\theta'$, $\sin\theta' \cos\phi$, $\sin\theta' \sin\phi$,
tegen Ξ, H, Z': $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta \cos\rho$, $\sin\vartheta \sin\rho$.

Dus is

$$\cos\theta' = \cos\vartheta \cos\Omega - \sin\vartheta \cos\rho \sin\Omega,$$
$$\sin\theta' \cos\phi = \cos\vartheta \sin\Omega + \sin\vartheta \cos\rho \cos\Omega,$$
$$\sin\theta' \sin\phi = \sin\vartheta \sin\rho.$$

In ons stelsel zal de stralingsfunctie nu afhangen van Ω, ϑ, ρ. Met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$:

$$K'_{n'\Omega\vartheta\rho} = \left\{a - b\left(\cos\vartheta \cos\Omega - \sin\vartheta \cos\rho \sin\Omega\right)\right\}^3 K_n.$$

De speelruimte dn' blijft bij deze eenvoudige draaiing onveranderd. Dus:

$$dn' = \left\{a - b\left(\cos\vartheta \cos\Omega - \sin\vartheta \cos\rho \sin\Omega\right)\right\} dn,$$

terwijl $d\omega' = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\rho$ is.

§ 28. Voor den duurzamen druk op het element ontleenen wij nu onmiddellijk aan § 20:

$$\mathsf{F}_\xi = -\frac{4O}{c}\int K'_{n'\Omega\vartheta\rho} \cos^2\vartheta \, dn' \, d\omega'$$

$$= -\frac{4O}{c}\int_0^\infty K_n\,dn \int d\omega' \left\{a - b(\cos\vartheta\cos\Omega - \sin\vartheta\cos\rho\sin\Omega)\right\}^4 \cos^2\vartheta.$$

De integratie over $d\omega'$ moet gebeuren naar ϑ van $\frac{\pi}{2}$ tot π, en naar ρ van 0 tot 2π.

Met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$ houden wij ter berekening over:

$$\int d\omega' \Big[a^4\cos^2\vartheta - 4a^3 b(\cos^3\vartheta\cos\Omega - \cos^2\vartheta\sin\vartheta\cos\rho\sin\Omega)\Big] =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}a^4 + a^3 b\cos\Omega\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\frac{v}{c}\cos\Omega.$$

De duurzame druk in de richting van de normaal is dus

$$\mathsf{F}_\xi = -\frac{8\pi O}{c}\left(\frac{1}{3} + \frac{v}{c}\cos\Omega\right)\int_0^\infty K_n\,dn.$$

Voor het gemiddeld kwadraat der ongedurige wisselimpulsen vinden wij volgens § 23:

$$\overline{\Xi^2} = -2^6\pi^3 O\,T\int\frac{K'^2_{n'\Omega\vartheta\rho}}{n'^2}\cos^3\vartheta\,dn'\,d\omega' =$$

$$= -2^6\pi^3 O\,T\int_0^\infty\frac{K_n^2}{n^2}dn\int d\omega'\left\{a - b(\cos\vartheta\cos\Omega - \sin\vartheta\cos\rho\sin\Omega)\right\}^5\cos^3\vartheta.$$

De tweede integraal moet weer over den halven bol met negatieve $\cos\vartheta$ geïntegreerd worden:

$$\int d\omega'\Big[a^5\cos^3\vartheta - 5a^4 b(\cos^4\vartheta\cos\Omega - \cos^3\vartheta\sin\vartheta\cos\rho\sin\Omega)\Big] =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}a^5 - a^4 b\cos\Omega\right) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{v}{c}\cos\Omega,$$

zoodat

$$\overline{\Xi^2} = 2^5\pi^4 O\,T\left(1 + 4\frac{v}{c}\cos\Omega\right)\int_0^\infty\frac{K_n^2}{n^2}dn.$$

§ 29. Wij zullen dit gebruiken bij de beschouwing van de translatiebeweging van een groot spiegelend lichaam in het stralingsveld.

Laat ons de X-, Y- en Z-assen in het lichaam vastgesteld denken, en onderstellen, dat het met eene snelheid $\mathbf{v}$, waarvan de componenten zijn $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$, voortvliegt. Wanneer wij den hoek tusschen de normaal op ieder vlakte-element $d\sigma$ en de richting der snelheid noemen Ω_v, dan blijkt de stralingsweerstand, als een integraal over het oppervlak van het lichaam, te zijn

$$\mathbf{F}_v = \sum \mathbf{F}_\xi \cos \Omega_v = -\frac{8\pi}{c} \int_0^\infty K_n\, dn \int d\sigma \left(\frac{1}{3} + \frac{v}{c} \cos \Omega_v\right) \cos \Omega_v,$$

$$\mathbf{F}_v = -\frac{8\pi v}{c^2} \int_0^\infty K_n\, dn \int d\sigma \cos^2 \Omega_v . = -q\, v,$$

$$\text{als} \quad q = \frac{8\pi}{c^2} \int_0^\infty K_n\, dn \int d\sigma \cos^2 \Omega_v.$$

Wat nu de wisselimpulsen betreft, die het lichaam in zijn geheel krijgt, moet men opmerken, dat, daar de wisselimpulsen op de verschillende oppervlakte-elementen onafhankelijk van elkander varieeren, men schrijven mag voor het kwadratisch gemiddelde van den wisselimpuls in de richting der snelheid:

$$\overline{\Phi^2} = \sum \overline{\Xi^2} \cos^2 \Omega_v ,$$

$$\overline{\Phi^2} = 2^5 \pi^4 T \int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn \int d\sigma \cos^2 \Omega_v \left(1 + 4 \frac{v}{c} \cos \Omega_v\right).$$

Wanneer nu ons lichaam een middelpunt heeft, wordt de tweede integraal eenvoudig $\int d\sigma \cos^2 \Omega_v$ voor elke richting van de snelheid $\mathbf{v}$. Dan kunnen wij voor het gemiddeld arbeidsvermogen van beweging in een bepaalde richting, dus voor één vrijheidsgraad, weer als vroeger schrijven:

$$\overline{\tfrac{1}{2} m v^2} = \frac{\overline{\Phi^2}}{4qT} = \pi^3 c^2 \frac{\int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn}{\int_0^\infty K_n\, dn}.$$

§ 30. Laten wij vervolgens het lichaam draaibaar denken om een vaste as. Indien het traagheidsmoment om deze as I is en ω de hoeksnelheid, en het moment van den stralingsdruk om deze as de som is van een weerstandskoppel $-w\omega$ en een koppel met wisselend moment, waarvan $\mathbf{R}$ de impuls in den zeer korten tijd T is, dan zal voor dezen eenen vrijheidsgraad te rekenen zijn op een gemiddelde kinetische energie:

$$\overline{\tfrac{1}{2} I \omega^2} = \frac{\overline{\mathbf{R}^2}}{4 w T}.$$

De gegevens van § 28 verschaffen ons

$$- w\omega = -\frac{8\pi}{c}\int_0^\infty K_n dn \int d\sigma \cos(nv) \left\{\frac{1}{3} + \frac{\rho\omega}{c}\cos(nv)\right\}\rho,$$

waarin ρ den afstand van het element $d\sigma$ van de rotatieas voorstelt, en (nv) den hoek tusschen de normaal van het element en zijn snelheid. Er blijft over:

$$w = \frac{8\pi}{c^2}\int_0^\infty K_n dn \int d\sigma\, \rho^2 \cos^2(nv).$$

Voor het gemiddelde kwadraat der wisselende draaiïmpulsen vinden wij:

$$\overline{\mathbf{R}^2} = 2^5 \pi^4 T \int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2} dn \int d\sigma\, \rho^2 \cos^2(nv) \left\{1 - 4\frac{\rho\omega}{c}\cos(nv)\right\}.$$

In het algemeen zal de integraal $\int d\sigma\, \rho^3 \cos^3(nv)$ niet wegvallen. Dan verkeeren wij in het in § 25 gesignaleerde onaangename geval, dat de berekeningsmethode niet geldig is, omdat het gemiddelde kwadraat der draaiïmpulsen niet onafhankelijk van de rotatiesnelheid ω blijkt.

Wanneer wij echter onderstellen, dat ons lichaam zoo groot traagheidsmoment heeft, dat $\rho\omega$ steeds zeer klein blijft tegen de lichtsnelheid c, dan mag men den term in $\overline{\mathbf{R}^2}$ die afhangt van ω verwaarloozen, en vindt men:

$$\overline{\tfrac{1}{2} I\omega^2} = \pi^3 c^2 \frac{\int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2} dn}{\int_0^\infty K^n dn},$$

dezelfde waarde die wij boven voor de gemiddelde kinetische energie der translatie in eene bepaalde richting verkregen.

Een overeenkomstige onderstelling, n.l. dat de massa m van het zich bewegende lichaam groot genoeg is, kan ons ook bevrijden van de restrictie, die in de vorige paragraaf gemaakt werd, toen wij ons beperkten tot lichamen met middelpunten.

HOOFDSTUK V.

Uitkomsten van Einstein.

§ 1. Einstein heeft van de stralingsformule van Planck eene interpretatie gegeven in eenige artikelen, waarvan de strekking was, te betoogen, dat er redenen zijn om aan te nemen, dat de energie der straling zich in de ruimte niet onbeperkt uitbreidt, zooals de electromagnetische grondvergelijkingen zouden vereischen, maar gelocaliseerd blijft in kleine gebieden. Men zou moeten aannemen dat een groot aantal zelfstandige complexen [1]) van electrische en magnetische krachtlijnen onafhankelijk van elkander zich door de ruimte bewegen. Men zou ze kunnen denken als golfvelden van geringe afmeting rond zich bewegende punten, onveranderlijke singulariteiten [2]) die niet al in de grondvergelijkingen gegeven zouden zijn, maar die men daarnaast zou kunnen invoeren, evenals men de onveranderlijke grootte en lading der electronen heeft ingevoerd. Deze „lichtquanta" zou men zich dan haast puntvormig hebben te denken. Elk quantum zou een veldje zijn met bepaalde golflengte, dus bepaalde frequentie, en een passend energiequantum $h\nu$ in zich medenemen.

§ 2. Het eerst heeft hij, in 1905 [3]), gewezen op de analogie die er is tusschen de afhankelijkheid der entropie van het volumen bij een ideaal gas en bij zwarte straling van hooge frequenties.

Voor de hooge frequenties is de dichtheid der energie zeer gering; in den gedachtengang van de hypothese der lichtquanta is er dan

---

[1]) „Gebilde".

[2]) *Verhandl. d. Deutschen Phys. Ges.* d. XI, p. 482, 1909.

[3]) Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. d. Phys.* d. XVII, p. 132.

grooter kans, dat de verschillende quanta geheel buiten elkander blijven en niet met elkaar interfereeren, hetgeen de overeenkomst met afzonderlijk voortvliegende moleculen sterker op den voorgrond kan doen treden.

Voor de hooge frequenties, of zoo men wil ook voor lagere, als de temperatuur ook maar lager genomen wordt, en dus in de zwarte straling de energiedichtheid voor de straling van het interval $(\nu, \nu + d\nu)$ gering blijft, geldt voor die dichtheid bij benadering

$$u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu.$$

Daaruit vindt men, met behulp van de betrekking

$$\frac{d s_\nu}{d u_\nu} = \frac{1}{T}$$

voor de waarde der entropie per eenheid van volumen:

$$s_\nu \, d\nu = -\frac{k}{h\nu} u_\nu \, d\nu \left\{ log \frac{c^3 u_\nu \, d\nu}{8\pi h\nu^3 d\nu} - 1 \right\}.$$

De integratieconstante is hierbij op nul gesteld na de natuurlijke overweging, dat wanneer de energie $u_\nu \, d\nu$ nul is, en er dus geen straling in de ruimte is, ook de entropie per volumeneenheid in de ruimte nul moet worden gesteld, aangezien er niets is om ze aan toe te kennen.

Hebben wij nu een volumen v met de straling gevuld, en dus eene energie $E = v \, u_\nu \, d\nu$, dan is de entropie van de monochromatische straling in die ruimte

$$S = v \, s_\nu d\nu = -\frac{kE}{h\nu} \left\{ log \frac{c^3 E}{8\pi h v \nu^3 d\nu} - 1 \right\}.$$

Laat men nu op onomkeerbare wijze, zonder arbeidsverrichting, dus zoo, dat de energie E constant blijft, de straling zich van een volumen v_0 uitbreiden tot een volumen v, dan is daarbij de entropievermeerdering:

$$S - S_0 = \frac{kE}{h\nu} log \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Voor een ideale gasmassa, die uit n moleculen bestaat, vindt men, uitgaande van de betrekking $S = k \, log \, W$ (I, § 16),

$$S - S_0 = k \, n \, log \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

De twee formules komen overeen, wanneer men stelt $n = \frac{E}{h\nu}$, d. i. n gelijk aan het aantal energiequanta $h\nu$, dat wij in de totale energie E hebben. De overeenstemming wordt begrijpelijk, wanneer men de lichtquanta haast puntvormig mag denken, en, juist als bij de gasmoleculen, mag redeneeren: de waarschijnlijkheid dat een quantum in een volumen v ligt, is $\frac{v}{v_0}$ maal zoo groot als die, dat het in een volumen v_0 ligt. Voor de n quanta is dus de waarschijnlijkheid $\left(\frac{v}{v_0}\right)^n$ malen grooter in het grootere volumen. Dan is de entropie-toename $k \, n \, log \left(\frac{v}{v_0}\right)$.

§ 3. Een andermaal [1]) let Einstein op twee gedeelten van eene ruimte, die met zwarte straling gevuld is, en speciaal op de energie-wisselingen in die beide gedeelten, voorzoover het de monochromatische straling in een klein interval $(\nu, \nu + d\nu)$ betreft. Het eene deel moge een volumen v hebben, klein tegen het volumen V van het andere. De toestand zal stationair zijn, wanneer gemiddeld de energie over de twee deelruimten verdeeld is evenredig met hun volumina.

$$E = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20},$$
$$\varepsilon_{10} = v \, u_\nu \, d\nu, \; \varepsilon_{20} = V \, u_\nu \, d\nu.$$

Deze verdeeling beantwoordt aan het maximum der entropie, die te schrijven is als de som van twee deelentropieën der deelruimten,

$$S_0 = s_{10} + s_{20}.$$

Van deze verdeeling komen echter aanhoudend afwijkingen voor.

---

[1]) *Physik. Zschr.* d. X p. 185, 1909.

Wanneer nu de kleine ruimte aan energie een teveel, en de groote ruimte een tekort heeft, dat ligt tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, dus

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} + \vartheta, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - \vartheta,$$

dan is de entropie:

$$s_1 + s_2 = s_{10} + s_{20} + \frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_{10}}\vartheta - \frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_{20}}\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial \varepsilon_{10}^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial \varepsilon_{20}^2}\right)\vartheta^2 + \ldots$$

Aangezien $\frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_{10}} = \frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_{20}} = \frac{1}{T}$ is, en wij hoogere machten van de kleine ϑ zullen verwaarloozen, volgt

$$S = s_{10} + s_{20} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial \varepsilon_{10}^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial \varepsilon_{20}^2}\right)\vartheta^2.$$

Aan de statistische mechanica ontleenen wij nu, dat dit beteekent: dat de waarschijnlijkheid op eene afwijking van de stationaire energieverdeeling, gelegen tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, bedraagt:

$$W d\vartheta = e^{\frac{1}{k}(s_{10} + s_{20})} \cdot e^{\frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial \varepsilon_{10}^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial \varepsilon_{20}^2}\right)\vartheta^2} d\vartheta.$$

Wij merken op, dat de tweede exponent negatief is. Immers dit is de voorwaarde, opdat bij de verdeeling $(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20})$ de entropie een maximum is, zooals ondersteld werd.

Voor het gemiddelde van de energieafwijkingen vinden wij nu:

$$\overline{\vartheta^2} = -\frac{k}{\frac{\partial^2 s_1}{\partial \varepsilon_{10}^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial \varepsilon_{20}^2}}.$$

Uit $\varepsilon_{10} = v\, u_\nu d\nu$ en $\frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_{10}} = \frac{1}{T}$ ziet men gemakkelijk:

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial \varepsilon_{10}^2} = \frac{1}{v\, d\nu}\frac{d}{du_\nu}\left(\frac{1}{T}\right), \quad \frac{\partial^2 s_2}{\partial \varepsilon_{20}^2} = \frac{1}{V\, d\nu}\frac{d}{du_\nu}\left(\frac{1}{T}\right).$$

Indien nu V groot is tegen v, wordt

$$\overline{\vartheta^2} = -\frac{k\, v\, d\nu}{\frac{d}{du_\nu}\left(\frac{1}{T}\right)}.$$

Dit levert als wij de formule van Planck toepassen, aannemende, dat die de empirische gegevens weergeeft, $u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$,

$$\overline{\vartheta^2} = \left\{ h\nu\, u_\nu + \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu^2 \right\} v\, d\nu.$$

Einstein legt er den nadruk op, dat alleen de tweede term te voorschijn komt, wanneer men de stralingsformule van Rayleigh en Jeans, die in overeenstemming is met de statistische mechanica, toepast, en hij tracht door eene beschouwing over de dimensies aan te toonen, dat dit het stuk is, dat ontstaat door de gewone wisselingen in de energie als gevolg van de interferenties van verschillende stralen. Inderdaad kan men dit stuk ongetwijfeld door rechtstreeksche berekening vinden als men van de in het vorige hoofdstuk gebruikte splitsing van het veld in afzonderlijke golfstelsels uitgaat.

Den eersten term echter, die des te meer overweegt, naarmate de dichtheid van de energie kleiner is, en ν grooter, vat men het gemakkelijkst op als teweeggebracht door de aanwezigheid van puntvormige energie-quanta, die op ongeregelde wijze in de deelruimte v komen en verdwijnen. Wanneer n het aantal quanta is, dat in den stationairen toestand, bij de meest waarschijnlijke verdeeling, aan het volumen v toevalt, dan zal zijn

$$n = \frac{v\,.\,u_\nu\, d\nu}{h\nu}.$$

Het eerste lid is dus te schrijven als $(h\nu)^2 n$.

Nu is het bekend, dat wanneer men een groot aantal (N) elementen naar eene waarschijnlijkheidswet verdeelen gaat, er van de meest waarschijnlijke verdeeling, waarbij aan een bepaalden ontvanger (in ons geval de deelruimte v) een aantal n toekomt, zulke afwijkingen kunnen voorkomen, als $n \ll N$, dat het gemiddelde kwadraat der afwijkingen Δn van n is

$$\overline{\Delta n^2} = n.$$

De afwijkingen in den energie-inhoud van de deelruimte v zullen nu volgens de hypothese der quanta zijn $\Delta n\,.\,h\nu$. Het gemiddelde van de kwadraten wordt dan $(h\nu)^2\,.\,n$, wat inderdaad met het eerste lid voor de uitdrukking van $\overline{\vartheta^2}$ overeenkomt.

§ 4. Voorts gaat EINSTEIN [1]) na, hoe het gesteld is met de wisselingen in de grootte van den stralingsdruk op een „monochromatischen" spiegel, d. i. een spiegel, die alleen de stralen van een klein interval $(\nu, \nu + d\nu)$ volkomen terugkaatst, de andere geheel doorlaat. De spiegel, die alleen loodrecht op zijn vlak bewegelijk is gedacht, ondervindt alleen van de stralen, die hij terugkaatst een druk. Het is geheel ons geval van hoofdstuk IV, § 16 en EINSTEIN geeft de formule

$$\overline{\mathbf{X}^2} = 2Q\tau\,\overline{mv^2},$$

die ook wij gebruikten, waarin $\mathbf{X}$ is de resultante van den wisselimpuls in den zeer kleinen tijd τ op voor- en achtervlak.

Juist andersom echter gebruikt EINSTEIN deze formule om $\overline{\mathbf{X}^2}$ te berekenen, als hij voor $\overline{\frac{1}{2}mv^2}$ de waarde $\frac{1}{2}\,kT$ aanneemt.

Hij vindt voor den weerstandscoefficient

$$Q = \frac{3}{2c}\left\{u_\nu - \frac{1}{3}\nu\frac{du_\nu}{d\nu}\right\} f\,d\nu,$$

wanneer f het oppervlak van den spiegel voorstelt.

Door toepassing van PLANCKS formule komt er

$$\frac{\overline{\mathbf{X}^2}}{\tau} = \frac{1}{c}\left\{h\nu\;u_\nu + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}u_\nu{}^2\right\} f\,d\nu.$$

Deze formule laat zien, hoe de gemiddelde wisselimpuls per tijdseenheid ten nauwste samenhangt met de gemiddelde afwijking der energie per volumeneenheid (zie de vorige paragraaf). Deze formule geeft EINSTEIN weer aanleiding tot hetzelfde betoog; hij zegt dat de term $\frac{1}{c}\,h\nu.\,u_\nu f\,d\nu$ weer het best verklaard wordt door de hypothese der lichtquanta.

Men kan de quanta, waarvan het aantal per volumeneenheid normaliter is $N = \frac{u_\nu\,d\nu}{h\nu}$, onderscheiden naar de verschillende rich-

---

[1]) *Phys. Zschr.* l. c.

tingen waarin zij vliegen, en voor het aantal van die met een richting binnen de kegelopening $d\omega$ schrijven $n\,d\omega$, als $n = \frac{N}{4\pi}$.

Gedurende den korten tijd τ arriveeren aan den spiegel alle quanta, welke, met richtingen binnen een kegelopening $d\omega$, die een hoek θ met de normaal maakt, te zamen een volumen innemen $f \cos\theta . c\tau$ dus normaliter

$$\mathrm{n} = f \cos\theta .\, c\tau\, n\, d\omega.$$

Van dit aantal zullen er nu echter afwijkingen voorkomen, en wel in $\overline{\Delta \mathrm{n}^2} = \mathrm{n}$.

Al deze quanta geven bij de terugkaatsing aan den spiegel een impuls $2\mu \cos\theta$, als μ hun electromagnetische hoeveelheid van beweging is $\left(\mu = \frac{h\nu}{c}\right)$. Wanneer er nu afwijkingen zijn van het normale aantal quanta, krijgen wij in onze kegelopening een kwadratisch gemidddelde van afwijking in den impuls:

$$\overline{\Delta \mathrm{n}^2} . 4\mu^2 \cos^2\theta = \mathrm{n} . 4\mu^2 \cos^2\theta = 4\mu^2 c\tau f \cos^3\theta\, n\, d\omega.$$

Voor den tijd τ wordt dus het kwadratisch gemiddelde van de afwijkingen van den normalen impuls op een der beide vlakken van den spiegel:

$$4\mu^2 c\tau f n \int \cos^3\theta\, d\omega = 2\pi\, \mu^2 c\tau f n = \tfrac{1}{2}\, \mu^2 c\tau f N,$$

of met het oog op de waarden van N en μ:

$$\frac{1}{2}\frac{f}{c}\, \tau h\nu\, u_\nu\, d\nu.$$

Het kwadratisch gemiddelde voor de resultanten op voor- en achtervlak te zamen wordt twee maal zoo groot. Dus

$$\frac{\overline{\mathsf{X}^2}}{\tau} = \frac{f}{c}\, h\nu\, u_\nu\, d\nu,$$

hetgeen juist de eerste term van het tweede lid in de formule is.

§ 5. De door EINSTEIN gegeven formule voor Q (zie de vorige §)

komt dadelijk voor den dag, als men onze vroegere formules van hoofdstuk IV § 20 raadplegende, schrijft

$$F_c = -16\frac{pq}{c}\,dn'\int K'_{n'\vartheta'}\ \cos^2\vartheta'\,d\omega',$$

Men moet in het oog houden, dat de spiegel slechts stralen terugkaatst, die voor hem een relatieve frequentie $2\pi\nu$ hebben, dat zijn dus die stralen, welke in een coördinatensysteem, dat zich met den spiegel medebeweegt, beschreven worden door formules waarin de frequentie is $n' = 2\pi\nu$.

Voorts moet men er op letten, dat

$$\begin{aligned} K'_{n'\vartheta'} &= (a - b\cos\vartheta)^3\, K_n \\ &= (a - b\cos\vartheta)^3\, K_{n'(a + b\cos\vartheta)}, \end{aligned}$$

met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$:

$$K'_{n'\vartheta'} = \left(1 - 3\,\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\left[K_{n'} + n'\,\frac{v}{c}\cos\vartheta\,\frac{dK_{n'}}{dn'}\right],$$

$$d\omega' = \left(1 + 2\,\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)d\omega,$$

$$\cos\vartheta' = \left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right).$$

Het verschil in druk op voor- en achtervlak, den weerstand, herleidt men dan op

$$-P(v) = -16\,pq\,dn'\,\frac{3v}{c^2}\,\pi\left[K_{n'} - \frac{1}{3}\,n'\,\frac{dK_{n'}}{dn'}\right],$$

of met invoering van u_ν en ν,

$$K_n = \frac{K_\nu}{2\pi} = \frac{cu_\nu}{16\,\pi^2},\quad dn' = 2\pi\,d\nu,\quad \frac{d}{dn'} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{d\nu},$$

$$-P(v) = -2\,pq\,d\nu\,\frac{3v}{c}\left\{u_\nu - \frac{1}{3}\,\nu\,\frac{du_\nu}{d\nu}\right\},$$

wat door $4\,pq = f$ volkomen in Einsteins formule overgaat.

§ 6. Nog een ander resultaat van Einstein willen wij met onze berekeningen vergelijken.

In een reeds meergenoemd artikel [1]) heeft hij met HOPF de beweging van een resonator in het stralingsveld beschouwd. Het was EINSTEIN en HOPF hier erom te doen, aan een nieuw voorbeeld te doen zien, dat de wet van de aequipartitie noodzakelijk leidt tot de stralingsformule van RAYLEIGH en JEANS. Indien de gemiddelde energie, die de resonator door zijn wisselwerking met de moleculen alleen verkrijgen zou, dezelfde moet zijn als die hij door wisselwerking met het stralingsveld zou krijgen; indien men deze laatste in de onbekende stralingsformule uitdrukt, en voor de eerste de „aequipartitiewaarde" geschreven heeft, zal men uit de gelijkstelling de onbekende stralingsformule kunnen berekenen. EINSTEIN en HOPF vonden inderdaad op deze manier de formule van RAYLEIGH en JEANS terug.

Voor den resonator vonden zij:

$$\overline{\mathsf{X}^2} = \frac{c^4 \sigma \tau}{40 \pi^2 \nu_0^3} u_{\nu_0}^2,$$

$$Q = \frac{3 c \sigma}{10 \pi \nu_0} \left\{ u_{\nu_0} - \frac{\nu_0}{3} \frac{du_\nu}{d\nu_0} \right\},$$

waarin ν_0 de eigen frequentie van den resonator voorstelt, en σ de dempingsconstante, die in PLANCK's differentiaalvergelijking (zie boven II, § 5) voorkomt.

Voor de gemiddelde kinetische energie van een resonator volgt dus:

$$\overline{\tfrac{1}{2} m v^2} = \frac{\dfrac{c^4 \sigma \tau}{40 \pi^2 \nu_0^3} u_{\nu_0}^2}{4 \times \dfrac{3 c\sigma}{10 \pi \nu_0} \left\{ u_{\nu_0} - \dfrac{1}{3\nu_0} \dfrac{du_\nu}{d\nu_0} \right\} \tau}.$$

Het verdient de aandacht, dat de beschouwde resonatoren ondersteld werden alleen in de Z-richting een electrisch moment te kunnen hebben en zich alleen in de X-richting te kunnen bewegen. Het resultaat zou niet anders zijn, wanneer ook een electrisch moment in de Y-richting mogelijk was, want zoowel de weerstand, als het gemiddeld impulskwadraat zou dan verdubbeld worden. Ten slotte kan ook een electrisch moment in de X-richting niets veranderen, aangezien dit geen aanleiding zou geven tot een kracht in de

[1]) *Ann. d. Phys.* d. XXXIII. p. 1105. 1910.

X-richting. De resonator mag dus willekeurig kunnen trillen; zoolang hij zich alleen langs de X-as kan bewegen, blijft de uitkomst goed.

Dit resultaat wenschen wij nu te vergelijken met ons geval van een vrij electron. De resonator reageert slechts op een bepaalde monochromatische straling met trillingen van dezelfde frequentie. Het vrije electron echter reageert op elke straling met trillingen van dezelfde frequentie. Deze opgewekte trillingen verschaffen in tweede instantie aan het veld een verderen greep op resonator en electron, en het zijn de hieruit volgende weerstand en de impulswisselingen, waar het op aankomt.

Voor het electron, dat op alle frequenties reageert, hebben we nu ook de wrijving en de impulswisselingen voor alle frequenties bij elkander opgeteld. Men kan het electron in zekeren zin beschouwen als een resonator met oneindig veel eigen-frequenties tegelijk.

Dit geeft ons aanleiding om een conglomeraat te beschouwen van zeer vele resonatoren, die alle verschillende frequenties hebben.

Het zal ons blijken dat zulk een conglomeraat, indien het telkens voor elk gelijk frequentie interval $d\nu$ evenveel resonatoren bevat, juist een derde van de kinetische energie van een vrij electron verkrijgt.

Elken resonator denken wij ons als een electron, dat om een evenwichtstand slechts met bepaalde eigen frequentie kan trillen.

Het is duidelijk dat wij den resulteerenden weerstand op dit conglomeraat, en het gemiddeld kwadraat van de wisselingen in den resulteerenden impuls zullen vinden door een integratie van de reeds gevonden uitdrukkingen over de verschillende resonatoren.

Daarbij moet bedacht worden dat volgens PLANCK [1])

$$\sigma = \frac{2\pi}{c^3}\sqrt{\frac{K}{L^3}}, \quad \text{en} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{L}},$$

zoodat, aangezien bij onze electron-resonators L de electromagnetische massa van een electron is, $\frac{\sigma}{\nu} = \beta$ voor alle resonatoren van het conglomeraat een constante is, en dus voor het integraalteeken mag gebracht worden.

---

[1]) *Vorl. ü. d. Theorie d. Wärmestr.* 1e druk, p. 109, p. 111.

Dan wordt de weerstandscoefficiënt:

$$Q = \frac{3\,c\,\beta}{10\,\pi}\int_0^\infty d\nu \left\{ u_\nu - \frac{1}{3}\,\nu\,\frac{du_\nu}{d\nu} \right\},$$

of na partieele integratie van den laatsten term, waarbij wij bedenken dat $\nu\,u_\nu$ zoowel voor $\nu = 0$ als voor $\nu = \infty$ verdwijnt,

$$= \frac{2\,c\,\beta}{5\,\pi}\int_0^\infty u_\nu\,d\nu\,,$$

het gemiddeld kwadraat der wisselimpulsen:

$$\overline{\mathsf{X}^2} = \frac{c^4\,\beta\,\tau}{40\,\pi^2}\int_0^\infty \frac{u_\nu^{\,2}}{\nu^2}\,d\nu\,,$$

en dus

$$\overline{\tfrac{1}{2}\,m\,v^2} = \frac{c^3}{64\,\pi}\,\frac{\int_0^\infty \frac{u_\nu^{\,2}}{\nu^2}\,d\nu}{\int_0^\infty u_\nu\,d\nu}\,,$$

of, daar

$$K_n = \frac{c\,u_\nu}{16\,\pi^2}\,,$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}\,m\,v^2} = \pi^3\,c^2\,\frac{\int_0^\infty \frac{K_n^{\,2}}{n^2}\,dn}{\int_0^\infty K_n\,dn}\,.$$

Dit is, voor het conglomeraat met slechts één vrijheidsgraad, behoorlijk een derde gedeelte van wat wij voor het electron met zijn drie vrijheidsgraden vonden.

§ 7. Na hier uit Einsteins uitkomst ons resultaat te hebben afgeleid, kunnen wij omgekeerd ook gemakkelijk aanwijzen, waar uit onze berekening de formules van Einstein te voorschijn kunnen komen. In plaats van op de integralen naar n, die wij berekend hebben, zal het nu aankomen op den differentiaal voor het eindige bepaalde interval Δn_0. Onderstel, dat voor een conglomeraat van $\alpha\Delta n_0$ resonatoren met frequenties tusschen n_0 en $n_0 + \Delta n_0$ de uitkomsten gelden, die wij uit § 9 en § 11 van hoofdstuk IV kunnen overnemen:

$$-Q v = \frac{2 e^2}{c^2 m} \cdot \frac{e^2}{6 \pi c^3 m} \cdot \Delta n' \int K'_{n'\theta'} \cos\theta' \, d\omega',$$

$$\overline{\mathsf{X}_{int}^2} = \frac{e^4}{2c^4 m^2} \pi T' \Delta n' \int \frac{K'_{n'\theta_1'} \cdot K'_{n'\theta_2'}}{n'^2} \left[n'^2 \Sigma M^2\right] d\omega_1' \, d\omega_2'.$$

Wij merken op, dat de n', en $\Delta n'$, geldende in het „meebewegende" stelsel, overeenkomen met de eigenfrequentie n_0 en het interval Δn_0 van de aangenomen resonatoren.

Wij schrijven gereedelijk, als in § 5, en met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$:

$$K_{n'\theta'} = \frac{1}{(a + b \cos\theta')^3} K_{an' + bn' \cos\theta'}$$

$$= \frac{1}{(a + b\cos\theta')^3} \left\{ K_{an'} + bn' \cos\theta' \frac{\partial K_{an'}}{\partial an'} \right\} = K_{n'}' \left(1 - 3\frac{v}{c}\cos\theta'\right) +$$

$$+ \frac{\partial K_{n'}}{\partial n'} \frac{v}{c} n' \cos\theta'.$$

Dan wordt

$$-Q.v = \frac{e^4}{3\pi c^5 m^2} \Delta n_0 \, 4\pi \left[-3 \frac{v}{c} K_{n_0} \overline{\cos^2\theta'} + n_0 \frac{v}{c} \frac{\partial K_{n'}}{\partial n_0} \overline{\cos^2\theta'} \right],$$

of, met
$$K_{n_0} = \frac{c \, u_{\nu_0}}{16 \pi^2},$$

$$Q = \frac{e^4 \Delta n_0}{2^2 . 3 c^5 m^2 \pi^2} \left[u_{\nu_0} - \frac{1}{3} \nu_0 \frac{\partial u_{\nu_0}}{\partial \nu_0} \right].$$

Verder wordt

$$\overline{\mathsf{X}_{int.}^2} = \frac{e^4}{2c^4 m^2} \pi T' \Delta n' . \frac{1}{n'^2} \int \left\{ K_{an'}^2 + bn' (\cos\theta_1' + \cos\theta_2') \frac{K_{an'} \partial K_{an'}}{\partial an'} \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{(a + b\cos\theta_1')^3 (a + b \cos\theta_2')^3} \left[n'^2 \Sigma M^2\right] d\omega_1' d\omega_2'.$$

De integraal wordt met verwaarloozing van $\frac{v^2}{c^2}$ verder vereenvoudigd tot

$$\int K_{n'}^2 \left\{ 1 - 3 \frac{v}{c} (\cos\theta_1' + \cos\theta_2') \right\} \left[n'^2 \Sigma M^2\right] d\omega_1' d\omega_2' +$$

$$+ \int K_{n'} \frac{\partial K_{n'}}{\partial n'} \frac{v}{c} n' (\cos\theta_1' + \cos\theta_2') \left[n'^2 \Sigma M^2\right] d\omega_1' \, d\omega_2'.$$

De tweede integraal levert bij integratie nul op, omdat de vorm van oneven graad is in de $\cos\theta$. Hetzelfde geldt voor het tweede stuk van den eersten integraal. Ten slotte krijgen wij dus, als in IV, § 11, bij integratie over twee bollen:

$$K_{n'}^2 \, . \, 4\pi \times 4\pi \times \frac{8}{9}.$$

$$\overline{\mathsf{X}_{int.}^2} = \frac{2^6 \, e^4 \, \pi^3}{3^2 \, c^4 \, m^2} \, T' \, \Delta n' \, \frac{K_{n'}^2}{n'^2},$$

wat, met $K_{n'} = \dfrac{c \, u_{\nu_0}}{16\,\pi^2}$ en $n' = 2\,\pi\nu_0$ wordt:

$$\overline{\mathsf{X}_{int.}^2} = \frac{e^4 \, \Delta n_0}{2^4 . \, 3^2 \, \pi^3 c^2 \, m^2} \, T' \, \frac{u_{\nu_0}^2}{\nu_0^2}.$$

Dit alles geldt voor een conglomeraat van $\alpha \, \Delta n_0$ resonatoren.

Wanneer men nu stelt $\alpha = \dfrac{5 \, e^4 \, \nu}{2 . \, 3^2 . \, \pi \, c^6 \, m^2 \, \sigma}$,

vindt men voor één resonator de uitdrukkingen

$$Q = \frac{3 \, c\sigma}{10 \, \pi\nu} \left\{ u_\nu - \frac{1}{3\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} \right\}$$

$$\text{en } \overline{\mathsf{X}_{int.}^2} = \frac{c^4 \, \sigma \, T'}{40 \, \pi^2 \, \nu^3} \, u_\nu^{\,2}$$

van Einstein weder terug.

HOOFDSTUK VI.

Waarschijnlijkheids-beschouwingen in de Stralingstheorie.

§ 1. In dit laatste hoofdstuk zullen wij trachten de waarschijnlijkheidsbeschouwingen in de stralingstheorie nader te preciseeren door het aangeven van de kansregels, met welke wij te werken hebben. Wanneer wij precies vaststellen, volgens welke regels wij de loterij zullen inrichten, die als uitkomst verschillende toestanden met meer of minder waarschijnlijkheid geeft, kan de bedoeling van theorieën over die waarschijnlijkheid ons helderder voor oogen komen te staan.

Wij zullen handelen over systemen, die bestaan uit M bolvormige, volkomen veerkrachtige en gladde moleculen, en R lineaire electromagnetische resonatoren van bepaalde frequentie ν, die met elkander in wisselwerking staan, maar naar buiten geen energie kunnen afgeven. De bewegingstoestand is voor elk molecuul bepaald door de drie coördinaten van zijn middelpunt en de drie componenten van zijn hoeveelheid van beweging. Voor een resonator kunnen wij den toestand bepalen door zijn electrisch moment f, en, zoo zijn energie wordt voorgesteld door $U = \frac{1}{2} K f^2 + \frac{1}{2} L \dot{f}^2$, door de daaraan beantwoordende „hoeveelheid van beweging"

$$\psi = \frac{\partial U}{\partial \dot{f}} = L \dot{f}.$$

§ 2. Zooals in het derde hoofdstuk reeds werd opgemerkt, kunnen wij den toestand van ons geheele systeem van M moleculen en R resonatoren voorstellen door één „phasenpunt" in eene $(6\,M + 2\,R)$-dimensionale uitgebreidheid. Wij zullen dit echter niet doen, en ons ertoe bepalen, eene afbeelding van de phase van het systeem te maken op twee diagrammen. Het eene, een zesdimensionale uitgebreidheid met als parameters de coördinaten en de componenten der hoeveelheden van beweging der moleculen, zal dienen om er den bewegingstoestand der moleculen in af te beelden door overeenkomstige punten; het andere, een tweedimensionale uitgebreidheid met als parameters de bovengenoemde f en ψ zal voor de afbeelding der resonatoren dienen. Wanneer de toestand van een molecuul of een resonator afgebeeld is door een punt in een der diagrammen, zullen wij gemakshalve zeggen dat het molecuul of de resonator zich in dat punt bevindt.

De toestand van het systeem wordt nu voorgesteld door het samenstel van M punten in het molecuuldiagram en R punten in het resonatorendiagram.

§ 3. Vervolgens denken wij de diagrammen verdeeld in een groot aantal gebieden met verschillende uitgestrektheid $g_1, g_2, g_3, \ldots$ in het molecuuldiagram en $h_1, h_2, h_3 \ldots$ in het resonatorendiagram, en stellen vast, dat een molecuul of een resonator, die in een gebied $g_\varkappa$ of $h_\varkappa$ ligt, de energie $\varepsilon_\varkappa$ of $\upsilon_\varkappa$ zal hebben, die bij dat gebied behoort. Er worde afgezien van het verschil der energieën van de moleculen of resonatoren in verschillende punten van één gebied.

Wanneer wij ten slotte ons nog een trommel gegeven denken met een groot aantal loterijbriefjes, waarvan er a_1 het gebied g_1 aanwijzen, a_2 het gebied g_2, b_1 het gebied h_1, b_2 het gebied h_2, en zoo vervolgens, zijn wij gereed om de loterij te beginnen, die verschillende toestanden van het systeem zal opleveren.

§ 4. Wij nemen een molecuul en trekken een briefje uit den trommel. Wanneer dit een gebied $g_\varkappa$ aanwijst, plaatsen wij het molecuul in dat gebied $g_\varkappa$. Wijst het een resonatorengebied $h_\varkappa$ aan, dan plaatsen wij een resonator in het aangewezen gebied. Na elken trek doen wij het briefje weer in den loterijtrommel terug. Ten slotte hebben wij alle M moleculen en alle R resonatoren geplaatst, en een toestand van het systeem geconstrueerd, waarbij er m_1 moleculen in g_1, m_2 in $g_2 \ldots$, r_1 resonatoren in h_1, r_2 in $h_2 \ldots$ enz. gelegen zijn.

Deze constructie denken wij ons tallooze malen herhaald. In de verschillende toestanden, die wij daarbij krijgen, zal de energie van het systeem zeer verschillende waarden hebben. Daar het er ons echter om te doen is, de toestanden met elkander te vergelijken, waarin het systeem een bepaalde energie E bezit, zullen wij al die constructies van de verdere beschouwing uitsluiten, welke een toestand leveren met een andere dan de gegeven energie. Om verder in beschouwing te blijven, moet de toestand voldoen aan de voorwaarde:

$$m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + r_1\upsilon_1 + r_2\upsilon_2 + \ldots\ldots = E$$

Wij zullen aanstonds opmerken, dat deze vergelijking van groot belang is. Hebben wij alle toestanden, die niet aan de energievoorwaarde voldoen, uitgesloten, dan zullen wij nagaan, welke toestand in de verzameling, die er overblijft, het meest voorkomt. Dezen toestand zullen wij dan als den meest waarschijnlijken definieeren.

Onze hypothese zal vervolgens deze zijn, dat de toestand, waarin een systeem als het onze met dezelfde energie in de natuur voorkomt, maar weinig verschillen zal van den toestand, dien wij na onze berekeningen als den meest waarschijnlijken hebben gedefinieerd.

§ 5. Er zijn in den loterijtrommel in het geheel $N = \Sigma a_\varkappa + \Sigma b_\varkappa$ briefjes. De waarschijnlijkheid, dat ik voor een molecuul een der $a_\varkappa$ briefjes zal trekken die het gebied $g_\varkappa$ aanwijzen, is dus $\dfrac{a_\varkappa}{\Sigma a_\varkappa + \Sigma b_\varkappa}$.

De waarschijnlijkheid, dat uit de loterij een toestand te voorschijn komt, waarin m_1 bepaalde moleculen in g_1 liggen, r_1 bepaalde resonatoren in h_1, en zoo vervolgens, is dus blijkbaar

$$\frac{1}{N^{M+K}} \cdot a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots\ldots b_1^{r_1} b_2^{r_2} \ldots\ldots$$

Wij zijn er echter niet op gesteld, dat m_1 bepáálde moleculen in g_1 zullen liggen. De toestand zal voor ons niet verschillend heeten, wanneer het andere moleculen zijn, die in g_1 liggen, mits het er maar evenveel zijn. Dit vergroot natuurlijk de waarschijnlijkheid.

Daar nu M moleculen op

$$\frac{M!}{m_1!\, m_2! \ldots .\, m_k!}$$

manieren verdeeld kunnen zijn in k verschillende groepen, die resp. m_1, $m_2 \dots m_k$ moleculen bevatten, en iets dergelijks geldt voor de R resonatoren, wordt dus de waarschijnlijkheid voor den toestand gegeven door

$$w = \frac{M!\,R!}{N^{M+R}} \cdot \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots . b_1^{r_1} b_2^{r_2} \dots .}{m_1!\,m_2! \dots . r_1!\,r_2! \dots .}.$$

Dit beteekent, dat wanneer wij een groot aantal malen, Q, door de loterij een toestand geconstrueerd hebben, wQ malen het systeem in den toestand, bepaald door $(m_1, m_2, \dots . r_1, r_2 . \; ..)$ zal voorkomen.

Wanneer wij uit de verzameling van Q toestanden, die de loterij opgeleverd heeft, al diegene weglaten, die niet aan de energievoorwaarde voldoen, dan blijven de wQ toestanden in de restverzameling q van al die combinaties $(m_1, m_2, \dots r_1, r_2, \dots)$, die wel aan de voorwaarde voldoen. De waarschijnlijkheid om een bepaalden toestand uit de vele toelaatbare te treffen wordt dan $W = \frac{wQ}{q}$. De meest waarschijnlijke toestand zal dus die zijn, voor welken

$$W = \lambda \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots . b_1^{r_1} b_2^{r_2} \dots .}{m_1!\,m_2! \dots . r_1!\,r_2! \dots .}$$

een maximum is. Wanneer wij dien toestand gaan veranderen door kleine variaties δm_1, δr_1, enz. aan te brengen in m_1, r_1, enz., dan moet de variatie van W daarbij nul zijn. Wij staan dus voor een variatieprobleem.

§ 6. Het zoeken van het maximum van W, of, gemakkelijker, van $log\ W$, komt neer op het zoeken van het minimum voor

$$\begin{aligned} - log\ W = - log\ \lambda + log\ m_1!\,m_2! \dots . r_1!\,r_2! \dots . - m_1\, log\ a_1 - \dots \\ - r_1\, log\ b_1 - \dots . . \end{aligned}$$

Wanneer wij voor de groote getallen m en r de benaderingsformule van Stirling mogen toepassen,

$$n!\,(=)\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

$$log\ n!\,(=)\, n\, log\ n - n,$$

dan wordt blijkbaar het minimum vereischt van

$$H = \sum m_\varkappa \log \frac{m_\varkappa}{a_\varkappa} - \sum m_\varkappa + \sum r_\varkappa \log \frac{r_\varkappa}{b_\varkappa} - \sum r_\varkappa.$$

Varieeren wij den toestand door de kleine variaties $\delta m_\varkappa$ en $\delta r_\varkappa$, waarbij natuurlijk

$$\delta m_1 + \delta m_2 + \ldots. = 0$$

en
$$\delta r_1 + \delta r_2 + \ldots. = 0,$$

en bovendien de variatie van de energie nul moet zijn, opdat wij niet aan een gevarieerden toestand raken, die uitgesloten is,

$$\varepsilon_1 \delta m_1 + \varepsilon_2 \delta m_2 + \ldots. + \upsilon_1 \delta r_1 + \upsilon_2 \delta r_2 + \ldots. = 0,$$

dan is de hoofdvoorwaarde, waaraan bij het minimum van H voldaan moet zijn deze:

$$\delta H = \log \frac{m_1}{a_1} . \delta m_1 + \log \frac{m_2}{a_2} . \delta m_2 + \ldots + \log \frac{r_1}{b_1} . \delta r_1 + \log \frac{r_2}{b_2} . \delta r_2 \ldots = 0.$$

Deze vergelijking moet gelden voor elk willekeurig samenstel van variaties $(\delta m_\varkappa, \delta r_\varkappa)$, dat niet door de drie bijkomstige voorwaarden wordt uitgesloten. Brengen wij deze in rekening door volgens de methode der onbepaalde vermenigvuldigers de eerste met A, de tweede met B en de derde met C te vermenigvuldigen, ze vervolgens bij de hoofdvoorwaarde op te tellen, en eindelijk elken coefficiënt nul te stellen, dan krijgen wij M vergelijkingen voor de molecuulverdeeling

$$\log \frac{m_\varkappa}{a_\varkappa} + A + C\varepsilon_\varkappa = 0$$

en R vergelijkingen voor de resonatorenverdeeling

$$\log \frac{r_\varkappa}{b_\varkappa} + B + C\upsilon_\varkappa = 0,$$

waaruit wij voor de waarschijnlijkste verdeeling vinden:

$$m_\varkappa = \alpha a_\varkappa e^{-C\varepsilon_\varkappa}, \quad r_\varkappa = \beta b_\varkappa e^{-C\upsilon_\varkappa},$$

Hierin worden de coëfficienten α, β en C daardoor bepaald, dat

$$\sum m_\varkappa = M, \quad \sum r_\varkappa = R,$$

en, als ε de totale in het systeem aanwezige energie is,

$$\sum m_\varkappa \varepsilon_\varkappa + \sum r_\varkappa \upsilon_\varkappa = E.$$

§ 7. Wij merken op, dat bij de waarschijnlijkste verdeeling het aantal moleculen of resonatoren, dat in een bepaald gebied valt, evenredig is met het aantal $a_\varkappa$ of $b_\varkappa$ van de loterijbriefjes, die voor dat gebied in den trommel gedaan waren.

De grootte van de gebieden komt er hier niet op aan. Wel echter is van groot belang de energie in het gebied, die in den factor $e^{-C\varepsilon_\varkappa}$ of $e^{-C\upsilon_\varkappa}$ invloed heeft op de verdeeling. Indien men twee gebieden $g_\varkappa$ en g_λ zou willen samenvoegen tot één, dat zou aangewezen worden door $(a_\varkappa + a_\lambda)$ briefjes in den trommel, zou men voor dit gebied bij de dan waarschijnlijkste verdeeling niet vinden $m_\varkappa + m_\lambda$, tenzij de energie $\varepsilon_\varkappa$ die aan 't eene, en ε_λ die aan 't andere gebied beantwoordt, aan elkander gelijk gesteld zouden zijn.

Het is duidelijk, dat men door $a_\varkappa$ en $b_\varkappa$ verschillend te nemen, door de waarschijnlijkheid a priori dat een molecuul of resonator in een of ander gebied zal liggen, anders te kiezen, verschillende verdeelingen over de gebieden als de meest waarschijnlijke gedefinieerd kan krijgen. Bij gebrek aan overeenstemming van den waarschijnlijksten toestand met den in de natuur waargenomen toestand kan men trachten door eene verandering in deze waarschijnlijkheid a priori de werkelijkheid beter te benaderen.

§ 8. De klassieke leer der statistische mechanica neemt nu de aantallen $a_\varkappa$ en $b_\varkappa$ evenredig met de uitgestrektheid van het aangewezen gebied $g_\varkappa$ of $h_\varkappa$. Daar voorts in een gebied van eindige grootte de energie $\varepsilon_\varkappa$ of $\upsilon_\varkappa$ met een eindig bedrag varieeren kan, en wij niettemin voor alle moleculen of resonatoren in eenzelfde gebied dezelfde energie willen aannemen, worden wij ter vermijding van eindige fouten ertoe geleid, voor de gebieden ten slotte oneindig kleine uitgestrektheden $dS_\varkappa$ en $d\sigma_\varkappa$ te nemen.

Wij zien nu dadelijk, dat volgens deze leer het aantal moleculen in het element $dS_\varkappa = dx\,dy\,dz\,m^3\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ van het molecuuldiagram is

$$m_\varkappa = \alpha_1\, dS_\varkappa\, e^{-\frac{1}{2} Cm \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\}},$$

wanneer ξ, η, ζ de componenten der snelheid van het molecuul zijn; en dat het aantal resonatoren in het element $d\sigma_\varkappa = df\, d\psi$ van het resonatorendiagram is:

$$r_\varkappa = \beta_1\, d\sigma_\varkappa\, e^{-\frac{1}{2} C \{Kf^2 + \frac{1}{L}\psi^2\}}.$$

α_1, β_1 en C zijn bepaald door het totale aantal moleculen, resp. resonatoren, en door de totale energie van het systeem.

Uit deze verdeelingswetten berekenen wij voor de gemiddelde energie van een molecuul

$$\bar{\varepsilon} = \overline{\tfrac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = \frac{\int m_\varkappa\, \varepsilon_\varkappa}{\int m_\varkappa} = \frac{3}{2C},$$

van een resonator $\bar{U} = \dfrac{\int r_\varkappa\, \upsilon_\varkappa}{\int r_\varkappa} = \dfrac{1}{C}$.

Men is gewend, de gemiddelde kinetische energie van een gasmolecuul als maat voor de temperatuur te gebruiken en te stellen $\bar{\varepsilon} = \dfrac{3}{2} kT$. Dus onze constante C, die bepaald wordt door de totale energie van het systeem, is het omgekeerde van kT,

$$C = \frac{1}{kT}.$$

Wij zien voorts dadelijk, dat in dit geval de gemiddelde energie voor een vrij molecuul met drie graden van bewegingsvrijheid $^3/_2$ maal zoo groot is als voor een resonator die, met slechts één vrijheidsgraad, zoowel kinetische als potentieele energie kan hebben. Dit is de wet van de aequipartitie, die in hoofdstuk III, § 1, ter sprake kwam.

§ 9. Volgens de quantenhypothese in de eerste uitgave van PLANCKS theorie der warmtestraling kunnen de resonatoren energie slechts in veelvouden van de quanta $h\nu$ bezitten. Dat wil zeggen, dat zij in het resonatorendiagram slechts kunnen liggen op de bepaalde ellipsen

$$U = \frac{1}{2} K f^2 + \frac{1}{2L} \psi^2 = (\varkappa - 1) h\nu,$$

waarin $\varkappa$ de waarden 1, 2, 3,... enz. hebben kan. Onze gebieden zijn dus samengekrompen tot een punt en verder oppervlaklooze ellipsen. Voor elk dezer ellipsen is a priori de waarschijnlijkheid even groot, d.w.z. wij denken voor elk dezer ellipsen evenveel, b, loterijbriefjes in den trommel aanwezig.

Het waarschijnlijkst is dan de verdeeling der resonatoren over de ellipsen volgens deze wet:

$$r_\varkappa = \beta b e^{-CU_\varkappa} = \beta b e^{-C(\varkappa - 1) h\nu}.$$

Dit levert als uitkomst een gemiddelde energie der resonatoren

$$\overline{U} = \frac{\sum\limits_{1}^{\infty} \beta b e^{-C(\varkappa - 1) h\nu} (\varkappa - 1) h\nu}{\sum\limits_{1}^{\infty} \beta b e^{-C(\varkappa - 1) h\nu}}$$

$$= -\frac{d}{dC} \log \sum_{1}^{\infty} e^{-C(\varkappa - 1) h\nu} = -\frac{d}{dC} \log \frac{1}{1 - e^{-Ch\nu}}$$

$$\overline{U} = \frac{h\nu}{e^{Ch\nu} - 1}.$$

Dit is het resultaat, dat ook in hoofdstuk II, § 9, gevonden is.

§ 10. Nu zullen wij trachten te vinden, hoe de loterij moet worden ingericht, opdat het resultaat in overeenstemming zij met de theorie der resonatoren, die PLANCK in de tweede uitgave meedeelt.

Als zeer essentieel stelt PLANCK voorop, dat bij het inrichten van de loterij de grootte van de kleine elementen, waarin wij de diagrammen verdeelen, niet willekeurig mag genomen worden, maar dat er eene grootte G der *„Elementargebiete des Zustandsraumes"* als een geheel bepaalde eindige grootheid bestaat (PLANCK, § 125). Daarop laat hij in dezelfde paragraaf volgen, dat die elementaire gebieden tegelijk ook *„Gebiete gleicher Wahrscheinlichkeit"* zijn. Den zin van deze laatste opmerking heb ik beproefd mij duidelijk te maken door vergelijking met de zinsneden (§ 138):

„Der thermodynamische Zustand des Oszillatorensystems ist dadurch fixiert, dasz die Verteilungsdichten $w_1, w_2 \dots$ der Oszillatoren auf die einzelnen Elementargebiete gegeben sind. Innerhalb eines Elementargebietes entspricht die Verteilung der Oszillatoren dem Gesetze der elementaren Unordnung, d. h. sie ist nahezu gleichmässig."

Het kan geen zin hebben, te spreken van de wet der *„elementaren Unordnung"* binnen het elementair gebied, wanneer men dit niet weer, ter toepassing van de gewone statistische methode, onderverdeeld mag denken in nog kleinere elementen $d\sigma$. Wij moeten, schijnt het, de opmerking van Plancks § 125, dat er elementaire gebieden van even groote waarschijnlijkheid bestaan, zoo opvatten, dat de kans dat een resonator ligt in een element van het eene gebied weliswaar een andere is dan de kans, dat hij ligt in een even groot element van een ander gebied, maar dat de kansen voor twee even groote elementen in eenzelfde gebied gelijk zijn. Hoewel de consequenties dezer opvatting ons tot de slotsom zullen leiden, dat wij Plancks bedoeling anders moeten verstaan, zullen wij voorloopig vasthouden aan de gedachte, dat het *„gleicher"* beteekent het even groot blijven der waarschijnlijkheid in het inwendige van elk elementair gebied.

§ 11. De elementaire gebieden van gelijke waarschijnlijkheid, die Planck voor de resonatoren aangeeft, zijn de strooken van het oppervlak tusschen de ellipsen $U = h\nu$, $U = 2\,h\nu$, enz., die in de vorige paragraaf al te berde kwamen. De strooken hebben alle gelijk oppervlak, h.

Voor de gemiddelde energie van de resonatoren, die met elkander in eene strook $\varkappa$ (tusschen $U = (\varkappa - 1)\,h\nu$ en $U = \varkappa h\nu$) gelegen zijn, vindt Planck uit zijn onderstellingen

$$\overline{U_\varkappa} = (\varkappa - 1)\,h\nu + \tfrac{1}{2}\,h\nu$$

en voor de gemiddelde energie van alle resonatoren

$$\overline{U} = \tfrac{1}{2}\,h\nu + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Terloops worde aangestipt, dat door eene andere beschouwing over de wisselwerking van resonatoren en straling, PLANCK uit deze nieuwe betrekking toch weer zijn oude stralingsformule afleidt.

§ 12. De eerste benaderende poging om PLANCKS onderstellingen in loterijregels te vertalen zal nu zijn, dat wij in den loterijtrommel voor elk element $d\sigma$ uit de strook $\varkappa$ aanwezig denken $b_\varkappa\, d\sigma$ briefjes. $b_\varkappa$ zal dan voor de verschillende strooken $\varkappa$ nog verschillende waarden kunnen hebben, die wij later doelmatig kunnen vaststellen.

Het is dadelijk in te zien, dat nu de verdeelingswet voor den meest waarschijnlijken toestand zal zijn:

$$r = \beta\, b_\varkappa\, d\sigma\, e^{-C\upsilon},$$

als υ is de energie van de resonatoren in het element $d\sigma$.

Bij deze verdeeling is de gemiddelde energie van de resonatoren uit de strook $\varkappa$

$$\overline{U_\varkappa} = \frac{1}{C} - \frac{h\nu}{e^{Ch\nu} - 1} + (\varkappa - 1)\, h\nu,$$

en de gemiddelde energie voor alle resonatoren:

$$\overline{U} = \frac{1}{C} - \frac{h\nu}{e^{Ch\nu} - 1} + \frac{\sum\limits_1^\infty b_\varkappa (\varkappa-1)\, h\nu\, e^{-C(\varkappa-1)h\nu}}{\sum\limits_1^\infty b_\varkappa\, e^{-C(\varkappa-1)h\nu}}.$$

Indien $b_\varkappa$ voor alle strooken even groot is, vinden wij de waarde $\frac{1}{C}$ terug.

§ 13. We zijn hier echter niet tot de uitkomst van PLANCK geraakt. Inplaats van $\frac{1}{2}h\nu$ vinden wij in $\overline{U_\varkappa}$ het stuk

$$\frac{1}{C} - \frac{h\nu}{e^{Ch\nu} - 1},$$

dat slechts voor zeer kleine $h\nu$ overgaat in $\frac{1}{2}h\nu$. Wij kunnen ook niet anders dan een verkeerd energiegemiddelde vinden, omdat de verdeeling in de strook niet gelijkmatig of vrijwel gelijkmatig is, zooals PLANCK verlangt. Wij hebben bij onze poging PLANCKS bedoeling blijkbaar misverstaan.

De factor $e^{-C\upsilon}$ in r is het, die de overeenstemming tegenhoudt. Deze factor kan niet verdwijnen zoolang in onze beschouwingen de energie-vergelijking blijft staan. Deze is essentieel, en dus zal een gelijkmatige verdeeling niet te verkrijgen zijn.

Men zou kunnen meenen, dat de gelijkmatige verdeeling voor den dag gebracht zou kunnen worden door in den loterijtrommel voor elk element $d\sigma$ in de strook $\varkappa$ niet $b_\varkappa\, d\sigma$, maar

$$b_\varkappa\, d\sigma\, e^{\{C\upsilon - (\varkappa - 1) h\nu\}}$$

briefjes te doen. Dit zou in de strook $\varkappa$ in elk element een aantal resonatoren

$$b_\varkappa\, d\sigma\, e^{-C(\varkappa-1) h\nu}$$

geven, de verdeeling zou over de strook gelijkmatig zijn, en men zou, $b_\varkappa$ voor alle strooken even groot nemende, PLANCKS resultaten krijgen.

De bezwaren hiertegen zijn allereerst, dat bij deze onderstelling over de waarschijnlijkheid a priori, moeilijk van „*Gebiete gleicher Wahrscheinlichkeit*" kan gesproken worden, en voorts, dat het niet wel aangaat vóór het begin der loterij de inrichting, de regels der loterij, n.l. de aantallen briefjes voor elk element $d\sigma$, te laten afhangen van het resultaat. Immers de constante C wordt pas bepaald nadat de waarschijnlijkste verdeeling is gevonden, uit de energie-vergelijking. Men kan pas zeggen, dat het systeem de temperatuur $T = \frac{1}{kC}$ heeft, wanneer het met zijn totalen energie-inhoud E in den stationairen, d. i., voor ons, in den meest waarschijnlijken toestand is gekomen. Men kan dus niet bij het doen van briefjes in onzen loterijtrommel, die van te voren voor het gebruik gereed moet zijn, en in alle gevallen gebruikt moet kunnen worden, onverschillig welke totale energie het systeem heeft, al rekening gaan houden met de constante C, die men vooraf niet eens kent.

Zooveel is zeker, dat bij de tot nu onderstelde beteekenis van „*Gebiete gleicher Wahrscheinlichkeit*", met dit laatste woord niet kan bedoeld zijn een waarschijnlijkheid a priori, maar wel een waarschijnlijkheid a posteriori. Wanneer wij de waarschijnlijkste verdeelingswet gevonden hebben, en een systeem in den door deze wet bepaalden toestand verkeert, wanneer wij dan op goed geluk een der resonatoren in het oog vatten, wat is dan de kans dat wij hem in dit of dat element aantreffen? Het antwoord op deze vraag is de waarschijnlijkheid a posteriori, die in elk gebied overal evengroot zou moeten uitvallen.

§ 14. Zooals reeds werd opgemerkt, is deze waarschijnlijkheid a posteriori steeds behept met den factor $e^{-C\upsilon}$, of wel

$$e^{-C(\varkappa - 1)h\nu} \cdot e^{-C\{(\upsilon - (\varkappa - 1)h\nu\}},$$

waarvan de factor $e^{-C\{\upsilon - (\varkappa - 1)h\nu\}}$ niet in Plancks theorie past. Wij merken op, dat in den exponent voorkomt wat de energie meer bedraagt dan een veelvoud van $h\nu$.

Men zou dezen factor kunnen doen verdwijnen, wanneer men erin slaagde, uit de energievergelijking, juister gezegd, uit de variatie van de energievergelijking, het overschot van de energie υ in een bepaald element boven een veelvoud van $h\nu$ te laten verdwijnen.

Dit kan men doen door de hypothese, dat weliswaar de resonatoren slechts energie kunnen opnemen of afstaan in veelvouden van het quantum $h\nu$, maar dat, indien alle al de quanta hadden afgestaan, die zij kunnen afstaan, zij toch nog over het oppervlak der ellips $U = h\nu$ gelijkmatig verdeeld zouden liggen. Wanneer aldus de mogelijkheid van uitwisseling van het overschot der energie boven een quantenveelvoud uitgesloten is, kan dit overschot niet meer in den exponent invloed hebben op de waarschijnlijkste verdeeling.

§ 15. Ten andere kan men het doen door vast te stellen, dat hoewel in de verschillende punten van de gebieden van eindige grootte h de energie met een eindig bedrag verandert, toch bij de energievergelijking voor alle resonatoren in dezelfde strook $\varkappa$ dezelfde energie $(\varkappa - \frac{1}{2})\,h\nu$ zal worden in rekening gebracht. Natuurlijk verdwijnt dan evenzeer het overschot $\{\upsilon - (\varkappa - 1)\,h\nu\}$. De overeenstemming met Plancks formules wordt volkomen, als dan $b_\varkappa$ voor alle strooken even groot is.

Deze vaststelling komt overeen met den regel, de loterij te houden voor de eindige, onverdeelde, even groote gebieden h, met voor elk evenveel briefjes, en na afloop eener loterij de resonatoren van een bepaald gebied gelijkmatig over dat gebied te verdeelen. Aan de verdeeling in het gebied zou dan van te voren de eisch gesteld worden, dat zij niet slechts *„nahezu"*, maar volkomen *„gleich mässig"* ware. Planck behandelt ze ook als zoodanig.

Hier zijn wij ten slotte tot het juist begrip van Plancks bedoeling gekomen. Elk elementair gebied is even groot, en a priori even waarschijnlijk als elk ander. Wij doen beter, inplaats van aan *„Gebiete gleicher Wahrscheinlichkeit"* te denken aan *„gleich wahrscheinliche Gebiete"*. Wat het inwendige van een gebied betreft: men kan daar niet meer van waarschijnlijkheid spreken. Het inwendige van een gebied is aan het kansspel der loterij onttrokken, omdat bij axioma een uniforme verdeeling der resonatoren over het gebied is voorgeschreven.

§ 16. Het is moeilijk, in deze speciale onderstellingen en vaststellingen bij de loterij niet iets gekunstelds te zien. Maar men bemerkt licht, waarom Planck het rekenschema zoo gewild heeft. Het is hem te doen om aansluiting bij zijne beschouwingen over de absorptie en emissie van energie door de resonatoren in het stralingsveld.

In de tweede uitgave neemt Planck n.l. aan, dat de absorptie van energie door de resonatoren continu verloopt, dat dus de energie van den resonator gestadig toeneemt. De emissie echter kan slechts bij veelvouden van $h\nu$ geschieden, en alleen dan, wanneer juist de energie van den resonator een veelvoud van $h\nu$ geworden is. Dat beteekent, dat een resonator, die in één element van een strook $\varkappa$ in het diagram gekomen is, alle elementen van die strook zeker zal doorloopen. Wanneer er dan geen resonator in een element van de strook $\varkappa$ is, die niet ook zeker te eeniger tijd in elk ander element van de strook geweest is of komen zal, dan is er inderdaad aanleiding elke strook gelijkmatig met resonatoren bezet te onderstellen.

Daar echter de inrichting der loterij voor systemen van moleculen en resonatoren niets te maken heeft met de wisselwerking van resonatoren en stralingsveld, valt het niet te verwonderen dat het pasklaar maken der loterij voor het bereiken van een vooropgesteld doel iets gewilds moet hebben.

§ 17. Men kan natuurlijk gemakkelijk eene loterij gaan inrichten voor een systeem van moleculen en resonatoren, niet van één bepaalde frequentie, maar van verschillende frequenties. Dan is voor de resonatoren van elke frequentie ν afzonderlijk een diagram te teekenen, hetwelk voor elk element $d\sigma_\nu$ een aantal briefjes $b_\nu\, d\sigma_\nu$ in den trommel heeft. Daar wij de phasen van de resonatoren voor hunne verdeeling van geen belang achten, zullen wij voortaan voor $d\sigma_\nu$ steeds een element nemen, gelegen tusschen twee ellipsen $U_\nu = E$ en $U_\nu = E + dE$. Het oppervlak van zoo'n element bedraagt dan $d\sigma^\nu = \frac{dE}{\nu}$. Deze afspraak is niet in strijd met de reeds gegeven beschouwingen. Het aantal loterijbriefjes voor dit element $d\sigma_\nu$ zullen wij nu aanduiden met $b_{\nu E}\, d\sigma_\nu$. Overeenkomstige hypothesen en vaststellingen betreffende de loterij in elk diagram als die welke in de vorige bladzijden gemaakt zijn, leveren voor de resonatoren van verschillende frequentie overeenkomstig resultaat. Behalve de behandelde keuzen van $b_{\nu E}$ zijn er echter nog vele andere keuzen mogelijk. Al naar men de loterij anders inricht, komt eene andere gemiddelde energie en een andere stralingsformule voor den dag.

Wij komen nu op het onderzoek van P. EHRENFEST [1]) waarvan ik eene korte paraphrase wil beproeven te geven.

§ 18. EHRENFEST beschouwt eene leege kubusholte, door volkomen spiegelende wanden begrensd, en de verschillende trillingswijzen, die daarin mogelijk zijn. Wij hebben reeds vermeld, dat wanneer l de lengte van de kubusribben is, er in den kubus

$$N(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi l^3 \nu^2}{c^3}\, d\nu$$

electromagnetische trillingswijzen zijn, die hare frequenties binnen het interval $(\nu, \nu + d\nu)$ hebben.

Op elk dezer trillingswijzen denkt EHRENFEST statistisch-mechanische beschouwingen van toepassing, alsof het resonatoren waren van de frequentie ν. Wij merken op, dat wanneer de gemiddelde

[1]) Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? *Ann. d. Phys.* d. XXXVI, p. 91, 1911.

energie van zoo'n trillingswijze gevonden wordt $\overline{U_\nu}$ te bedragen, de energiedichtheid in onze holte wordt

$$u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \overline{U_\nu} \, d\nu,$$

en dus de beschouwing van de kubusholte en de trillingswijzen in de plaats treedt van de bekende betrekking tusschen energiedichtheid van de monochromatische straling en de gemiddelde energie van een resonator.

§ 19. Voorts heeft de beschouwing van de holte nog een tweede voordeel. Door namelijk de holte langzaam, omkeerbaar, gelijkvormig te comprimeeren tot de kubusribbe l' geworden is, kunnen wij een gelijkvormig stelsel krijgen, waarvan de entropie gelijk is aan die van het oorspronkelijke.

Het tweede stelsel onderscheidt zich van het eerste, 1°, doordat elke trillingswijze overgegaan is in een van andere frequentie en 2°, doordat de energie van elke trillingswijze door den door de spiegelende wanden verrichten arbeid toegenomen is.

Volgens RAYLEIGH [1]) is daarbij $\nu l = \nu' l'$ en $\frac{E}{\nu} = \frac{E'}{\nu'}$, en wij merken op, dat hierdoor elke trillingswijze, die in het diagram (ν) lag in het element $d\sigma_\nu$, met energie tusschen E en $E + dE$, door de compressie is komen te liggen in een diagram (ν') in een element $d\sigma_{\nu'}$, met energie tusschen $\frac{\nu'}{\nu} E$ en $\frac{\nu'}{\nu} E + \frac{\nu'}{\nu} dE$. Deze overeenkomstige elementen zijn evengroot.

Wanneer wij ervan gebruik gaan maken, dat de entropie van de toestanden in de twee kubi dezelfde is, zal het op deze manier zijn, dat wij de waarschijnlijkheden voor die twee toestanden dezelfde stellen.

De waarschijnlijkheid voor den toestand in den grooten kubus A is gedefinieerd als de kans bij een loterij die gehouden wordt met behulp van een aantal diagrammen (ν_1), $(\nu_2)\ldots$ voor resonatoren van verschillende frequenties, die in elementen $d\sigma_{\nu_1}$, $d\sigma_{\nu_2} \ldots$ verdeeld

---

[1]) Lord RAYLEIGH. *Phil. Mag.* 1902, p. 339.

zijn, en een loterijtrommel die een aantal briefjes voor elk dier elementen bevat. Evenzoo moeten wij de waarschijnlijkheid voor een toestand in den kleinen kubus B gedefinieerd denken als de kans bij een loterij, die gespeeld wordt met andere diagrammen (ν_1'), (ν_2')..., die in de elementen $d\sigma_{\nu_1}'$, $d\sigma_{\nu_2}'$... verdeeld zijn. Het ligt voor de hand, dat wij bij de verdeeling der overeenkomstige diagrammen (ν_1) en (ν_1') zoo te werk gaan, dat aan elk element $d\sigma_{\nu_1}$ van (ν_1) een overeenkomstig element $d\sigma_{\nu_1}'$ in (ν_1') beantwoordt. Wij zullen nog verder gaan, en, wanneer $\nu_2 = \nu_1'$ is, voor A het diagram (ν_2) verdeelen congruent met het diagram (ν_1').

§ 20. In de twee gelijkvormige stelsels liggen in overeenkomstige elementen precies evenveel resonatoren. Wanneer de waarschijnlijkheid voor de twee toestanden even groot moet zijn, kan het niet anders, of bij de twee loterijen moeten voor die overeenkomstige elementen evenveel briefjes in de trommels aanwezig geweest zijn. Dus moest

$$b_{\nu_1 E_1} d\sigma_{\nu_1} = b_{\nu_1' E_1'} d\sigma_{\nu_1}'.$$

Nu bedenken wij, dat er geen reden is, waarom de twee loterijen gehouden zouden worden met verschillende trommels en diagrammen.

Dat de trillingswijzen in de twee gevallen zijn trillingswijzen in kubi van verschillende afmeting, achten wij, nadat wij ze opgevat hebben als resonatoren, volkomen irrelevant. Wanneer zij als resonatoren beschouwd worden, heeft voor haar als zoodanig alleen de frequentie ν beteekenis. Bij een statistische beschouwing van moleculen en de resonatoren van kubus A, een andermaal van moleculen en de resonatoren van kubus B, moeten wij voor de resonatoren precies dezelfde loterijregels onderstellen.

Bovendien, konden wij niet bij het berekenen van de waarschijnlijkheid voor den toestand in B denzelfden loterijtrommel met dezelfde diagrammen en diagramverdeelingen en hetzelfde aantal briefjes voor elk diagramelement, dienst laten doen als bij de waarschijnlijkheidsberekening voor den toestand in A, dan zouden wij bezwaarlijk de waarschijnlijkheden voor de twee toestanden met elkander kunnen vergelijken, laat staan gelijk stellen.

Wij komen tot de slotsom, dat dus, als $\nu_2 = \nu_1'$ is, en $E_2 = E_1'$, ook geldt

$$b_{\nu_1 E_1}\, d\sigma_{\nu_1} = b_{\nu_2 E_2}\, d\sigma_{\nu_2}$$

Aangezien $\frac{E_1}{\nu_1} = \frac{E_1'}{\nu_1'} = \frac{E_2}{\nu_2}$ invariant is en $d\sigma_\nu = d\sigma_{\nu_1}' = d\sigma_{\nu_2}$ vereischt dit, dat ook $b_{\nu E}$ een functie moet zijn van $\frac{E}{\nu}$. Wij kunnen dus schrijven

$$b_{\nu E} = g\left(\frac{E}{\nu}\right).$$

Deze betrekking regelt het aantal briefjes in den loterijtrommel voor elementen in verschillende diagrammen. Deze loterijregel waarborgt ons de verschuivingswet van Wien, zooals wij aanstonds zullen zien, en is er mede aequivalent [1]).

Wij blijven met dezen regel in overeenstemming, wanneer wij bij de briefjes voor de verschillende stookjes $d\sigma_\nu$ in den trommel nog G_r $(r = 0,\ 1,\ 2\ldots)$ briefjes doen, die aan zullen wijzen, dat een resonator in zijn diagram juist zal liggen op de ellips $U_\nu = q_r\nu$.

Voor elk dezer ellipsen (r) van alle diagrammen, voor de resonatoren van alle frequenties zullen er G_r briefjes in den trommel gedaan worden.

§ 21. Na de vaststelling dezer regels, vinden wij op de gewone wijze voor de meest waarschijnlijke verdeeling der resonatoren van de frequentie ν over de verschillende elementen van het diagram:

$$n_\nu = \beta_\nu\, g\left(\frac{E}{\nu}\right) d\sigma_\nu\, e^{-CE},$$

over de verschillende ellipsen in het diagram:

$$n_{\nu r} = \beta_\nu\, G_r\, e^{-C q_r \nu},$$

waarbij, ter bepaling van β_ν:

$$\int \beta_\nu\, g\left(\frac{E}{\nu}\right) d\sigma_\nu\, e^{-CE} + \Sigma \beta_\nu\, G_r\, e^{-C q_r \nu} = N(\nu)\, d\nu.$$

Schrijft men nu

$$g\left(\frac{E}{\nu}\right) d\sigma_\nu = \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{E}{\nu}\right) . \nu d\sigma_\nu,$$

dan stelt, aangezien in het diagram $\nu d\sigma_\nu = dE$ is,

---

[1]) Zie § 25.

$$\frac{1}{\nu} g\left(\frac{E}{\nu}\right) = \gamma(\nu, E)$$

voor wat EHRENFEST noemde de *„Gewichtsfunction"*.

Voor de gemiddelde energie der resonatoren met frequentie ν vindt men vervolgens:

$$\overline{U_\nu} = \frac{\frac{1}{\nu}\int\limits_0^\infty dE\,.\,E g\left(\frac{E}{\nu}\right) e^{-CE} + \Sigma\, G_r E_r\, e^{-Cq_r\nu}}{\frac{1}{\nu}\int\limits_0^\infty dE g\left(\frac{E}{\nu}\right) e^{-CE} + \Sigma\, G_r\, e^{-Cq_r\nu}}.$$

Wanneer wij een andere veranderlijke $q = \frac{E}{\nu}$ invoeren, dan krijgen wij: [1])

$$\overline{U_\nu} = \nu \frac{\int\limits_0^\infty dq\,.\,q\; g(q)\, e^{-C\nu q} + \Sigma\, G_r q_r e^{-C\nu q_r}}{\int\limits_0^\infty dq\,.\,g(q)\, e^{-C\nu q} + \Sigma\, G_r\, e^{-C\nu q_r}}.$$

Wanneer wij nu in aanmerking nemen, dat de breuk een functie f van $C\nu$ blijkt te zijn, en dus voor de stralingsdichtheid schrijven

$$u_\nu\, d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} f\,(C\nu)\, d\nu,$$

hebben wij slechts op te merken dat, evenals vroeger bij het evenwicht tusschen moleculen en resonatoren, C voorstelt $\frac{1}{kT}$, om in te zien dat wij hier de verschuivingswet van WIEN hebben (vgl. II, § 4).

$$u_\nu\, d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} f\left(\frac{\nu}{kT}\right) d\nu.$$

§ 22. EHRENFEST stelt de vraag: aan welke voorwaarden moeten de functie $g(q)$ en de getallen G_r voldoen, opdat de afgeleide stralingsformule in overeenstemming blijft met de waarnemingen?

Aan den rooden kant van het spectrum worden de waarnemingen goed weergegeven door de formule

---

[1]) Vgl. EHRENFEST *l. c.* p. 100, 102.

$$u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \, kT \, d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{C\nu} d\nu,$$

aan den violetten kant van het spectrum door de formule

$$u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} e^{-\beta\frac{\nu}{T}} d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} e^{-k\beta C\nu} d\nu,$$

De eischen, waaraan $g(q)$ en G_r moeten voldoen, zijn dus, dat zij voor $f(C\nu)$ een dusdanige functie moeten opleveren, dat voor kleine waarde van $(C\nu)$:

$$\lim_{C\nu=0} C\nu \, f(C\nu) = 1,$$

voor groote waarden van $C\nu$:

$$\lim_{C\nu=\infty} \frac{f(C\nu)}{e^{-k\beta C\nu}} = 1.$$

§ 23. Voor kleine waarden van $C\nu$ zal in $f(C\nu)$ de teller oneindig van één orde hooger dan de noemer moeten worden, die, essentieel positief, eindig of oneindig kan zijn. Wanneer de functie g en G_r voor de hoogere waarden van q en q_r niet al te sterk afnemen, kan aan den eersten eisch, voor den rooden kant van het spectrum, voldaan zijn.

§ 24. Wat volgt nu uit den eisch, dat voor groote waarden van $C\nu$

$$\lim_{C\nu=\infty} \frac{\int_0^\infty dq.\, q\, g(q)\, e^{C\nu(k\beta - q)} + \sum G_r q_r e^{C\nu(k\beta - q_r)}}{\int_0^\infty dq.\, g(q)\, e^{-C\nu q} + \sum G_r e^{-C\nu . q_r}} = 1.$$

Als $g(q)$ continu is, zal in den noemer de integraal onvermijdelijk nul worden. Eerste vereischte om de breuk eindig te houden, is dus, dat G_0 van nul verschilt, als G_0 behoort bij de waarde $q_r = 0$.

Voorts zal de teller zeker oneindig worden, indien niet $g(q)$ nul is voor alle waarden van q kleiner dan $k\beta$, en ook alle G_r, met uitzondering van G_0, die behooren bij waarden van $q_r < k\beta$, nul zijn.

Als $g(q)$ nul is voor alle $q < k\beta$, zal de integraal in den teller ook nul worden, zoodat, om aan den gestelden eisch te voldoen, ook voor een waarde $q_1 = k\beta$ er een G_1 moet zijn, die van nul verschilt; dan blijft althans de tweede term van den teller eindig.

Men vindt gemakkelijk de formule van Planck, en die van Wien, als men $g(q)$ doorloopend nul stelt, en voor $q_r = rh$ telkens neemt $G_r = A =$ const., dan wel $G_r = \frac{1}{r!}$ [1])

De gevonden voorwaarden voor de continue functie $g(q)$ en de discontinuïteiten G_r zijn natuurlijk slechts in zooverre bindend, als de formules van Rayleigh-Jeans en van Wien de werkelijkheid in de beide uiteinden van het spectrum op de juiste manier benaderen. Indien b.v. aan den violetten kant u_ν mocht afnemen als $\nu^3 . \varkappa e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$, waarin $\varkappa$ een functie van $C\nu$ was, die zelf kon aangroeien, en oneindig worden, dan verviel de eisch, dat er voor $q_1 = k\beta$ een discontinuiteit G_1 moest zijn; immers dan mocht $\lim\limits_{C\nu = \infty} f(C\nu)\, e^{k\beta\, C\nu} = \frac{1}{\varkappa}$ zeer wel nul worden.

§ 25. Onafhankelijk echter van de meer of minder juiste wijze, waarop de formule van Wien voor de hooge frequenties de werkelijkheid benadert, is het een strikte eisch, dat er voor $q = 0$ een discontinuïteit G_0 zal wezen. Immers, zonder deze, zou de energie der deelstraling $u_\nu\, d\nu$ oneindig groot worden, en a fortiori de totale energiedichtheid in het stralingsveld.

Ditzelfde betoogt Poincaré [2]). Mijn bestek laat niet toe, bij zijne beschouwingen stil te staan. Slechts de resultaten mogen hier kort vermeld worden.

Poincaré beschouwt systemen van resonatoren en moleculen, die alleen door plotselinge stooten energie kunnen uitwisselen. Eigenlijk neemt hij geen moleculen, maar resonatoren, waarin het trillend deeltje zoo slap gebonden is aan den evenwichtsstand en de trillingstijd zoo groot wordt, dat men het mag beschouwen als een los molecuul met één vrijheidsgraad van beweging.

[1]) Ehrenfest, *l. c.* p. 108.

[2]) Sur la théorie des quanta. *Journ. de Phys.* 5e r., d. II, p. 5, 1912.

Hij voert eene waarschijnlijkheidsfunctie w in, die overeenkomt met onze $g\left(\frac{E}{\nu}\right)$, en die in onze loterij dezelfde interpretatie zou krijgen. De waarschijnlijkheid a priori n.l. dat een resonator verkeert binnen een element $d\sigma$ van zijn toestandsdiagram is evenredig aan $w d\sigma$. Dit wordt bereikt door in den loterijtrommel $w d\sigma$ briefjes voor dit element te doen. POINCARÉ bewijst, dat deze functie w niet afhankelijk is van de phase die de resonator in het element $d\sigma$ heeft, wat wij boven zonder meer aangenomen hebben.

Na aangetoond te hebben, dat, indien het aantal resonatoren en moleculen zéér groot is, de verhouding van hun gemiddelde energieën onafhankelijk is van de verhouding van de aantallen, waarin zij voorkomen, welke ook de keuze van w is, gaat hij voort te bewijzen, dat, indien de stralingsenergie eindig moet blijven, de functie w voor $E = 0$ eene discontinuïteit moet vertoonen van de soort, die wij door onze G_0 hebben voorgesteld.

„Donc, quelle que soit la loi du rayonnement, si l'on suppose que le rayonnement total est fini, on sera conduit à une fonction w présentant des discontinuités analogues à celles que donne l'hypothèse des quanta.” [1])

Er moet vermeld worden, dat dit resultaat steunt op de betrekking $u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} U_\nu \, d\nu$, die ook EHRENFEST niet ontberen kan, en op de verschuivingswet van WIEN. Ik merk terloops op, dat wij met de rekenwijze van POINCARÉ gemakkelijk kunnen afleiden, dat wij, de verschuivingswet van WIEN vooropstellende, voor de waarschijnlijkheidsfunctie w noodzakelijk moeten kiezen een functie van $\left(\frac{E}{\nu}\right)$, zooals wij in § 17 op anderen grond gedaan hebben, met de verschuivingswet van WIEN als uitkomst.

§ 26. De aangehaalde conclusie van POINCARÉ over de noodzakelijkheid van *„des discontinuités analogues à celles que donne l'hypothèse des quanta,”* geeft J. DE BOISSOUDY [2]) aanleiding om te trachten met zoo min mogelijk discontinuïteiten een andere formule af te

[1]) *l. c.* p. 29.

[2]) Sur une nouvelle forme de la loi du rayonnement noir et de l'hypothèse des quanta. *Journ. de Phys.* d. III. p. 385. Mei 1913.

leiden, die de waarnemingen even goed weergeeft als die van Planck, en wel met slechts éene discontinuïteit.

Neemt men als het wezenlijke der discontinuïteiten van Planck aan, dat de energie van een resonator slechts met sprongen kan wisselen, dan wil De Boissoudy daarvan overhouden, dat de energie van een resonator van nul slechts kan springen op $h\nu$, dat zij echter daarboven continu veranderlijk is.

Neemt men als het wezenlijke aan de verdeeling van het diagram in eindige „gebieden van gelijke waarschijnlijkheid" (zie § 10), dan zullen wij het diagram verdeelen in één ellips van eindigen inhoud h, *„d'extension finie, pour une energie nulle"*, en verder in oneindig kleine elementen.

Indien de aequipartitie doorging, zou de waarschijnlijkheid, dat een resonator een energie had, gelegen tusschen E en $E + dE$, gegeven zijn door $W\,dE = Ce^{-CE}\,dE$. Volgens de onderstelling van De Boissoudy zullen nu alle resonatoren, die volgens deze verdeelingswet een energie beneden $h\nu$ zouden hebben, in 't geheel geen energie hebben. Voor de gemiddelde energie van een resonator volgt dan

$$\overline{U_\nu} = \int_{h\nu}^{\infty} W\,E\,dE = \frac{1}{C} \cdot \frac{Ch\nu + 1}{e^{Ch\nu}}$$

en voor de stralingsdichtheid:

$$u_\nu = \frac{8\pi\,h\,\nu^3}{c^3} \cdot \frac{Ch\nu + 1}{Ch\nu\; e^{Ch\nu}} = \frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{x + 1}{xe^x},$$

$$\text{als } x = Ch\nu = \frac{h\nu}{kT}.$$

§ 27. Wanneer men deze formule vergelijkt met die van Planck, die, in dezelfde veranderlijke x uitgedrukt, luidt:

$$u_\nu = \frac{8\,\pi\,h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^x - 1},$$

dan ziet men dat beide formules zoowel voor kleine als voor groote x zich op dezelfde manier gedragen.

De Boissoudy vermeldt, dat voor de tusschengelegen waarden het verschil (als men h en k dezelfde neemt) zoo klein is, dat het de grenzen der waarnemingsfouten niet overschrijdt. Hij geeft aan, hoe uit de ligging van het maximum zijner functie, vergeleken met de waarnemingen van Lummer en Pringsheim, volgt

$$\frac{ch}{k} = 14200,$$

in zeer goede overeenstemming met de metingen van HOLBORN en VALENTINER, terwijl uit de totale stralingsintensiteit N, het aantal moleculen in een grammolecuul te bepalen is op

$$N = 68{,}6 . 10^{22},$$

in overeenstemming met de gemiddelde waarde, die PERRIN voor dit getal van AVOGADRO gevonden had.

Daarbij wordt $h = 5{,}73 \times 10^{-27}$ (C.G.S.)

en $k = 1{,}21 \times 10^{-16}$ erg/graad.

De overeenstemming van N met de waarde van PERRIN is uit de formule van DE BOISSOUDY fraaier dan uit die van PLANCK te verkrijgen.

§ 28. Wanneer DE BOISSOUDY van de „waarschijnlijkheids"functie $W = Ce^{-CE}$ spreekt, dan heeft hij daarmee weer de vroeger (§ 13) door ons gesignaleerde waarschijnlijkheid-a-posteriori op het oog. De functie W geeft meer een verdeelingswet dan dat zij een waarschijnlijkheidsfunctie is, en zeer zeker mag men ze niet verwarren met de echte waarschijnlijkheidsfunctie w, waar POINCARÉ van spreekt, $\nu\gamma(\nu, E)$ bij EHRENFEST, en die wij den vorm hebben gegeven $g\left(\frac{E}{\nu}\right)$ (§ 20, 21).

Het is echter gemakkelijk aan te geven, welke onderstelling DE BOISSOUDY omtrent de echte waarschijnlijkheidsfunctie maakt. Het is n.l. deze:

Neem $g(q)$ nul voor $0 < q < h$, en $g(q) =$ constant $= A$ voor $q > h$.

Neem $G_0 = \int_0^h Ae^{-C\nu q}\, dq = A \left\{ \frac{1}{C\nu} - \frac{e^{-C\nu h}}{C\nu} \right\}$.

Hiermee wordt (§ 18):

$$\overline{u_\nu} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{\int_h^\infty Ae^{-C\nu q}\, q\, dq}{\int_h^\infty Ae^{-C\nu q}\, dq + \int_0^h Ae^{-C\nu q}\, dq} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{Ch\nu + 1}{C\nu\, e^{Ch\nu}}.$$

De regel voor de loterij is dus deze:

Doe voor elk element van het diagram buiten de ellips

$$U = h\nu$$

een aantal $Ad\sigma_\nu$ briefjes in den loterijtrommel. Doe $A\left\{\frac{1}{C\nu} - \frac{e^{-Ch\nu}}{C\nu}\right\}$ briefjes in den trommel, die den oorsprong, het punt $E = 0$ in het diagram aanwijzen, en begin dan de loterij.

Het is zeer onbevredigend, dat aldus vóór het begin de inrichting van de loterij zou moeten worden afhankelijk gesteld van den uitslag. Hetzelfde bezwaar dat in § 13 besproken is, geldt ook weer hier. Dat namelijk G_0 afhangt van C, den vermenigvuldiger van de derde bijkomende voorwaarde in het variatieprobleem, welke eerst bepaald moet worden uit de omstandigheid, dat bij de verdeeling van maximale waarschijnlijkheid de totale energie een bepaalde waarde heeft, kan ons niet dan gewrongen voorkomen. De temperatuur die een systeem resonatoren en moleculen met bepaalde totale energie zal aannemen, wordt bepaald door die verdeeling der energie over de resonatoren en moleculen, welke de meest waarschijnlijke is. Welke verdeeling de meest waarschijnlijke is, moet bepaald kunnen worden onafhankelijk van de temperatuur, die eerst achterna beteekenis heeft. Dit is niet mogelijk, als reeds bij de inrichting van de loterij G_0 afhankelijk is van C, dat is van $\frac{1}{kT}$.

§ 29. De kerngedachte van De Boissoudy, het concentreeren van de waarschijnlijkheid van het geheele gebied $0 < E < h\nu$ op een enkel singulier punt in den oorsprong, is in 1911 op de juiste wijze reeds uitgewerkt door Ehrenfest [1]). De loterijregels zijn:

Stel $g(q) = 0$ voor $0 < q < h$, en $g(q) = \text{const.} = A$ voor $q > h$.
Stel $G_0 = Ah$.

Dan wordt $$u_\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{Ch\nu + 1}{Ch\nu\,(Ch\nu\, e^{Ch\nu} + 1)},$$

of, in de notatie van De Boissoudy

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{x + 1}{x(xe^x + 1)}.$$

Deze formule echter stemt niet met de waarnemingen overeen.

[1]) l. c.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De beteekenis, die in de natuurkunde aan het woord causaliteit gehecht wordt, is bezig te veranderen.

II.

Absolute onomkeerbaarheid komt in de wereld der physische verschijnselen niet voor.

III.

Het verdient de voorkeur, het axioma van de onbereikbaarheid van het nulpunt der absolute temperatuurschaal als zelfstandig en onafleidbaar beginsel naast de eerste en tweede hoofdwet der mechanische warmteleer op te stellen. (Vgl. NERNST, *Sitz. d. kön. pr. Acad. Berlin*, 1912, p. 134.)

IV.

De logische onverduwbaarheid, waarover GEHRCKE klaagt, wegens het ontbreken in de huidige leer der electromagnetische verschijnselen van een onderstelling omtrent structuureigenaardigheden van electrische en magnetische krachtlijnen, die eene vermeende asymmetrie derzelve zou ophelderen, ligt minder aan de theorie dan aan het toekennen van reëel bestaan aan maaksels van krachtlijnen. (E. GEHRCKE, Über eine physikalische Anwendung des Satzes vom zureichenden Grunde. *Verh. d. D. Phys. Ges.* XIV. p. 379. 1912.)

V.

De zwarigheid, waarop men zou kunnen stuiten als men tracht zich voor te stellen, zonder aetherhypothese, dat het licht van bewegende lichamen afkomstig, zich met dezelfde snelheid voortplant als dat van een stilstaande lichtbron, is het gevolg van toekennen van reëel bestaan aan het „uitgezonden" licht.

VI.

Handelende over den verschillenden gang van uurwerken, al naar de klokken zich bewegen of stilstaan, zegt Campbell, dat het geen zin heeft te spreken van een werkelijken gang. Zijne opmerking: „*In this case there is no real rate*", is om hare overdrijving onjuist. (N. Campbell, *Phil. Mag.* XXI, p. 512, 513. 1911.)

VII.

Birkeland is er niet in geslaagd, zijne hypothese over het ontstaan van de magnetisatie der aarde als gevolg van hare rotatie in een stroom van uit de zon weggeslingerde electronen, waarschijnlijk te maken. (Kr. Birkeland. Sur la conservation et l'origine du magnétisme terrestre. *Comptes Rendus*, 28 Juli 1913, p. 277.)

VIII.

De onderstelling, dat de zon negatief geladen is tot een potentiaal van 600 millioen Volt, brengt mede, dat men in de aarde eene magnetiseerende kracht heeft aan te nemen, die bij de mogelijke oorzaken van het magnetisme niet over het hoofd mag worden gezien. (Kr. Birkeland, *Comptes Rendus*, 4 Nov. 1912, p. 892, A. Schuster, A critical examination of the possible causes of terrestrial magnetism. *Proc. Physical Soc. of London* XXIV, p. 121. 1912.)

IX.

Overeenstemming van de uitkomsten van Voigts koppelingstheorie over het Zeeman-effect met de waarnemingen van Paschen en Back toont aan, dat voor de intramoleculaire werking van electronen op elkander nog geen afwijkingen van de minimumstelling voor den kinetischen potentiaal moeten worden aangenomen. (W. VOIGT, Weiteres zum Ausbau der Koppelungstheorie der ZEEMAN-effekte, *Ann. d. Phys.* XLI, p. 403, 1913.)

X.

In de door POINCARÉ gegeven afleiding voor den algemeenen vorm eener foutenwet, die als waarschijnlijke waarde van eene te meten grootheid het gemiddelde der waargenomen waarden leveren moet, behoeft de overgang tot een oneindig aantal waarnemingen nadere toelichting. (H. POINCARÉ, *Calcul des Probabilités*, 2[e] uitg. p. 177, 1912.)

XI.

Het bewijs, dat de verzameling van alle reëele getallen tusschen 0 en 1 onaftelbaar is, kan eenvoudiger zijn, dan het bij FOUËT is te vinden. (E. A. FOUËT, *Leçons élém. sur la théorie des fonctions analytiques*. 2[e] uitg. p. 22. 1907.)

XII.

Ten onrechte betoogt DRUDE, dat men niet in eene soort traagheid tegen magnetiseering de reden mag zoeken, waarom bij optische verschijnselen de magnetische susceptibiliteit der lichamen steeds nul gesteld mag worden. (P. DRUDE, *Lehrbuch der Optik*. p. 445.)

XIII.

De uitkomst van TAMMANNS berekeningen, dat bij adiabatische samendrukking van water van 0° C. de temperatuur aanvankelijk daalt, om daarna weer te rijzen, is zoowel in strijd met de tweede hoofdwet der thermodynamica, als met waarnemingen van TAMMANN en ROGÓYSKI. (G. TAMMANN. *Über die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen*, 1907. p. 133—135.)

XIV.

Hoezeer ook de aanraking met de cultuurvoortbrengselen der klassieke oudheid bij de vorming van den geest een weldadigen invloed kan doen gelden, het is niettemin ongemotiveerd, aan bezitters van een diploma van eindexamen der H. B. S. met 5-jarigen cursus de bevoegdheid tot het afleggen van examens in de faculteit der wis- en natuurkunde te ontzeggen.

XV.

De Nederlandsche taal evenaart de meest gebruikte andere, zoo zij ze al niet overtreft, in het vermogen de wetenschappelijke gedachte eenvoudig en juist weer te geven.