SPECIMEN MATHEMATICO-PHYSICUM

INAUGURALE

DE

AËRIS RESISTENTIA

IN

GLOBOS PROJECTOS.

SPECIMEN MATHEMATICO-PHYSICUM
INAUGURALE
DE

AËRIS RESISTENTIA IN GLOBOS PROJECTOS,

QUOD,

ANNUENTE DEO TER OPT. MAX.

Ex Auctoritate MAGNIFICI RECTORIS

DION. GODEFR. VAN DER KEESSEL,

J. U. D. ET JURIS CIVILIS IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA PROFESSORIS ORDINARII,

NEC NON

Amplissimi SENATUS ACADEMICI *Consensu*
& Nobilissimæ FACULTATIS PHILOSOPHICÆ *Decreto*,

PRO GRADU DOCTORATUS ET MAGISTERII

Summisque in PHILOSOPHIA & ARTIBUS LIBERALIBUS
Honoribus & Privilegiis rite ac legitime consequendis,

Publico ac Solemni Examini submittit

THEOPHILUS HOOGEVEEN,
BREDANUS.

Ad diem XXIII. *Junii* MDCCLXXIII. *hora locoque solitis.*

LUGDUNI BATAVORUM,
E TYPOGRAPHEO DAMMEANO, 1773.

VIRO

GENEROSISSIMO ET PERILLUSTRI

PETRO VAN BLEISWYK,

A. L. M. J. U. ET PHILOS. DOCT.

REIPUBLICÆ HOLLANDICÆ ET WEST-FRISICÆ CONSILIARIO AC SYNDICO SUPREMO, ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVÆ CURATORI,

ETC. ETC.

SACRUM.

Regnare late creditur horridis
Gradivus armis; ſeu furor impulit,
Immugientum machinarum
Fulminibus tonitruque rauco

Ar-

Arces & altis oppida ſternere
Superba vallis; ſive animoſior
Lætatur, incurvo rotatu
Cum volitant per inane, caudas

Globi trahentes flammivomas, fero
Rumpente niſu viſcera, ſulphure
Repleta, mox late daturi
Non ſine terrifico ruinam

Fragore certam, non ſine vallium
Clamore magno. Latius imperat,
Cui proximus Regi Deorum
Ceſſit honos, animoſa Pallas.

Inter miniſtras dives amabiles
Divæ Matheſis fida præit comes,
Quæ, mente fidens perſpicaci,
Arte ſacra Odryſio vel ipſi

Scit jura Marti ponere fortior,
Ipſumque moles lethiferæ docet,
Qua lege, qua vi, quove curſu
Aërios penetrent receſſus.

O

O quantus ardor! quantus amabili
Refulſit olim ex ore nitor Deæ!
Victrice cum lauri revinxit
Fronde comas Batavis Athenis

TIBI merenti; TU, Patriæ Pater
BLEISVICE caræ, cum petulantias
Frænare doctus cœrularum
Naïadum, vetitos per agros

Laſcivientum, molibus *Aggerum*,
Iraſque cœcas Aequorei Jovis,
Vel ipſa juſſiſti profundi
Numina marmorei ſubeſſe

Arti Minervæ. Quam Dea geſtiit!
Ex quo ter amplis vidit honoribus
Auctum Batavorum Lycæum,
Præſidio decorata tanto:

Ex quo Salutis pondera publicæ
ATLANTA, ſanctis moribus inclytum,
Cervice ſuſtentaſſe vidit,
Grande decus Patriæ daturum.

Fau-

Fautor bonarum nobilis Artium,
VIR SUMME, Musæ da veniam meæ,
Audentior si forte tangat
Limen amor, timideque peccet;

Largas recordans munificentias,
Queis aucta floret tota Patris domus,
Quæ freta tanto non iniquas
Præsidio timuit procellas.

Unus supersum, spes Patris ultima,
Quam si fovebis, sidera vertice
Tangam coruscanti. Favoris
Aura TUI volucrem carinam

Propellat, alto laudis iter freto
Quæret, minaces nil scopulos timens,
Secura rerum, nil tumultus,
Nil rabiem maris inquieti.

Nostros sereno TU modo respice
Vultu labores; inspice, si vacat,
Paulum remissurus Batavo
Sollicitas super orbe curas.

SPE-

SPECIMEN MATHEMATICO-PHYSICUM INAUGURALE DE AËRIS RESISTENTIA IN GLOBOS PROJECTOS.

CAPUT PRIMUM.

De Resistentia Fluidorum in genere & Aëris in specie.

§. I.

Fluidum, utpote constans ex particulis minimis, non admodum arcte cohærescentibus, levigatis, hac gaudet proprietate, quod cuicunque impressioni particulæ ejus cedant, & cedendo aliæ alias impellentes facillime moveantur.

§. II. Duplici modo particulæ impressæ cedunt: vel Fluidum potest moveri & in corpus quiescens impingere, quod fit, cum aqua è foramine vasis erumpit & oppositum sibi corpus percutit; vocatur hæc Fluidorum actio, *Percussio Fluidorum.* Vel Fluidum potest quiescere & corpus in ipso moveri, ut apparet in corporibus per aëra projectis, vel in cymbis, quæ remis vel ventis propulsæ aquas findunt; orta hinc Reactio Fluidi vocatur *Resistentia Fluidorum.* De posteriori hic tantum acturi sumus, ne Dissertatio hæc in densius Volumen excrescat.

§. III. Quoniam Actioni ſemper æqualis eſt Reactio, ſequitur *Reſiſtentiam* ſeu *Vim Reſiſtentiæ ſequi proportionem motus per corpus motum amiſſi*, ſepoſita nempe vi Gravitatis, de qua hic nondum agimus. Quo magis ergo corpus motum de motu amittat, eo majorem cæteris paribus patietur Reſiſtentiam. Si vero quantitas motus amiſſi ſive Decrementum motus fiat temporibus inæqualibus, erit, ut notum ſatis, Reſiſtentia ut Decrementum Motus directe, & tempus, quo Motus decrevit, inverſe; id eſt, quo breviori tempore peragitur, eo major erit Reſiſtentia. Sit vis Reſiſtentiæ $= R$, decrementum Velocitatis $= -v$, Tempus $= T$, erit $R = \frac{-v}{T}$; unde $-v = TR$, ſive Decrementum Motus eſt in ratione compoſita Reſiſtentiæ & Temporis. Et quia corpus ſola vi impreſſa ſeu inſita progrediens, nulla gravitatis ratione habita, eadem ſemper directione linea recta pergeret, & quia actioni contraria & oppoſita eſt Reactio, ex Reſiſtentia Fluidi corpus à directione non deflectet, ſed eadem recta moveri perget, donec omnem amiſerit motum. Vis ergo Reſiſtentiæ eſt Vis Retardans tantum, & in eo convenit cum vi Gravitatis agente in corpora ſurſum projecta & verticaliter adſcendentia.

§. IV. Motus ergo Decrementum, cæteris paribus, indicat quantitatem Reſiſtentiæ; dato priore, datur Reſiſtentia. Motus vero Decrementum variat pro varia poſitione, conſtitutione vel textura particularum Fluidum componentium, vel pro varia figura & celeritate corporum in eo propulſorum.

§. V. Si *Fluidum* foret *non-continuum*, vel ſi ejus particulæ vi quadam centrifuga ſeu repulſiva à ſe invicem gauderent, atque ita certo aliquo à ſe invicem diſtarent intervallo, ita ut propulſæ aliæ alias non impedirent, ſed motu ſemel impreſſo libere moverentur; hoc in caſu, ex natura Colliſionis, Reſiſtentia facile computari poſſet ex majori minorive motus quantitate particulis his impreſſi. Verbi gratia, moveatur Cylindrus in tali Fluido in directione ſui axis, perſpicuum eſt, baſin Cylindri tantummodo in ejus particulas acturam eſſe, quæ, cum actioni opponatur Reactio, eadem Directione Motum reciperent. Cognitis ergo area baſeos Cylindri & Velocitate, qua movetur, in-

ve-

veniretur Resistentia, seu Vis singulis momentis motum retardans, æqualis ponderi columnæ Fluidi, cujus basis sit æqualis basi Cylindri, & altitudo dupla ejus, ex qua corpus libere in vacuo decidens Celeritatem acquireret, æqualem Celeritati, qua Cylindrus movetur. Si loco Cylindri in tali Fluido moveretur corpus, cujus latera oblique in ejus particulas incurrerent, ex. gr., Globus vel Conus in directione suæ cuspidis, particulæ non amplius perpendiculari directione in singulis corporis punctis reagent, sed oblique; itaque Resistentia non amplius sequetur rationem numeri particularum propulsarum, verum secundum Leges Percussionis obliquæ Resistentia tantummodo computari debet ex ea Motus parte, quæ fit directione, qua Globus movetur. Demonstravit primus illustris NEWTONUS (*a*), & post eum JOANNES BERNOULLIUS in Fluido ita constituto Resistentiam Cylindri fore ad Resistentiam Globi ut 2 ad 1, id est, positis diametris utriusque æqualibus, Cylindro duplo magis resisteretur Globo.

§. VI. Verum tale Fluidum meræ tantum est speculationis, & revera, quoad novimus, non existit: omnia nobis cognita Fluida sunt *continua*, & particulæ se mutuo tangunt in diversis superficierum partibus, vel saltem non longe à se invicem sunt dissitæ. Unaquæque ergo particula, cui motus imprimitur, non potest progredi, ita ut particulæ vicinæ non simul moveantur, quæ iterum non moventur, nisi & his proximæ moveantur: ex motu ergo unius particulæ innumeræ aliæ moverentur. Motus ergo cum his communicatus non necessario est in directione corporis moventis, sed quaquaversum, prout particulæ diversimode inter se sunt sitæ. In tali ergo *Fluido continuo* Resistentia longe alio modo se habet, quam in Fluido non continuo, quod §. præced. describebamus, & longe intricatioris est disquisitionis.

§. VII. *Fluida*, quæ novimus, discerni possunt in *Elastica* & *non-elastica*. Fluidum Elasticum est, cujus particulæ compressæ in minus spatium se adigi sinunt, & sublata pressione se dilatant, quæ dilatatio vel compressio eo major est, quo majus vel minus est pondus premens, id est, sunt volumina talis Fluidi in ratione inversa ponde-rum

(*a*) Princ. Philos. Natur. lib. 2. prop. 31.

rum prementium (*b*): tale Fluidum Aër eſt, quem reſpiramus. Fluidum non elaſticum eſt, cujus particulæ, utut magna vi compreſſæ, in arctius ſpatium redigi nequeunt, qualis vulgo cenſetur Aqua pura. Pro diverſo hoc Fluidorum genere, diverſimode operatur Reſiſtentia.

§. VIII. Corpus motum in *Fluido non Elaſtico* duplici modo conſiderari poteſt: vel Fluidum poteſt ita eſſe compreſſum pondere ſuperincumbentis Fluidi vel alia de cauſa, ut corpus in eo motum nullum poſt ſe relinquat vacuum, ſed locus relictus continuo repleatur: vel Fluidum poteſt eſſe minus compreſſum, ita ut corpus motum Velocitate majore, quam Fluidum ex preſſione ſua ſpatium relictum poſſit implere, poſt ſe relinquat ſpatium vacuum. In duobus his caſibus Reſiſtentia admodum differt.

§. IX. Si Fluidum tale ita ſit compreſſum, ut corpus, in eo motum, nullum poſt ſe relinquat ſpatium vacuum; verbi gratia, ſi ſit incluſum in vaſe undique clauſo, quod exacte replet, & cujus latera ſint immobilia; vel, quod idem eſt, ſi Fluidum ſit infinite compresſum, tali in caſu corpus in eo motum nullum poſt ſe relinquere poterit vacuum; ſi enim locus relinqueretur vacuus, vel latera vaſis ſe extendere deberent, quæ ponuntur immobilia, vel Fluidum deberet in arctius ſpatium redigi, quod in Fluido non elaſtico fieri nequit. Particulæ ergo propulſæ, motu curvilineo ab anteriore corporis parte ad poſticam ejus partem in gyrum actæ, locum relictum implebunt, atque ita æquilibrium inter columnas Fluidi ſervabitur. Hoc in caſu autem quid obtineret, non eadem Scriptorum Hydrodynamicorum inter ſe ſententia eſt. Secundum NEWTONUM Cylindrus, tali in Fluido motus, Reſiſtentiam pateretur æqualem ponderi Columnæ Fluidi, cujus baſis foret æqualis baſi Cylindri, & altitudo dimidia ejus, ex qua corpus decidens in vacuo Celeritatem acquireret æqualem Celeritati, qua Cylindrus movetur. Foret ergo Reſiſtentia Cylindro adverſans in Fluido non elaſtico infinite compreſſo quadruplo minor, quam in Fluido non-continuo, quod §. V. deſcribebamus. Verum ſecundum DANIELEM BERNOULLIUM Reſiſtentia in Cylindrum

(*b*) MUSSCHENBROEK Introduct. ad Philoſ. Natur. tom. II. §. 2104.

drum foret duplo minor in posteriore casu, quam in priore. Verum hanc quæstionem non ingrediar; egregie de ea egit D'ALEMBERT (*c*).

§. X. Si vero loco Cylindri in tali Fluido moveretur sphæra, sphæroïs vel conus vel aliud quodcunque corpus, dummodo eandem haberet latitudinem, secundum NEWTONUM (*d*) Resistentia omnium istorum corporum eadem foret, ac in Cylindro ejusdem latitudinis; verum secundum DAN. BERNOULLIUM Resistentia eo est minor, quo facilius particulæ Fluidi ab anteriore corporis parte ad posticam ejus partem moventur, foretque Resistentia in globum duplo minor, quam in Cylindrum, & duplo minor, quam in globum, qui in Fluido non continuo moveretur. In globo ergo NEWTONUS & BERNOULLIUS Resistentiam ponunt eandem. Illustris tamen 's GRAVESANDIUS (*e*) in Resistentia, Cylindro adversante, sequitur BERNOULLIUM; in Resistentia vero contra globum ab his duobus adhuc differt, quippe quam posuit ad Resistentiam contra Cylindrum, ut 2 ad 3. Hac de re ulterius consulendus D'ALEMBERT (*f*), qui uberius hanc quæstionem exponit.

§. XI. Si Fluidum non elasticum minus sit compressum, sive sit inclusum in vase, quod ex parte tantum replet, corpus in eo motum Celeritate majore, quam Fluidum ex pressione sua spatium relictum possit implere, Resistentia hinc crescet maximopere; id quod primus (*g*) observavit BENJAMIN ROBINS, NEWTONUS vero hoc de casu non egit. Etenim si Celeritas, qua Fluidum ex pressione sua in spatium relictum irruit, superet Celeritatem, qua corpus movetur, particulæ motu curvilineo regredientes spatium relictum implebunt vi majore, quam qua corpus movetur, & hinc in posticam corporis partem prement, qua pressione resistentia diminuitur. Verum si Celeri-

(*c*) *Essai d'une nouvelle Théorie de la Resistance des Fluides*, *p.* 32 *seqq.* & *Introd. p.* 16.
(*d*) Princ. Phil. Natur. tom. II. p. 310. edit. Genev.
(*e*) Phys. Elem. Math. tom. I. §. 1937.
(*f*) Ibid. pag. 82.
(*g*) *New Principles of Gunnery*, *cap.* 2. *pr.* 1. *Verhand. der Haarl. Maatsch.* 9. *Deel*, 3. *St. p.* 88. D'ALEMBERT l. c. pag. 136.

leritas moti corporis tanta ſit, ut Fluidi particulæ motu curvilineo non adeo celeriter locum relictum poſſint implere, neceſſario pone corpus ſpatium relinquetur vacuum, & corpus deſtituetur non tantum preſſione Fluidi à poſtica ſui parte, verum & ab anteriori ſui parte ſuſtinere debebit columnam Fluidi, cujus altitudo eſt æqualis altitudini Fluidi ſupra corpus, & latitudo major vel minor pro ſpatio magis minusve vacuo. Particulæ ſic in regreſſu impeditæ magis magisque directionem corporis ſequi cogentur, quo in caſu tale Fluidum ſimilis fiet naturæ Fluidi non continui, §. V. deſcripti, eſſetque (ex hypotheſi NEWTONI) Reſiſtentia Fluidi infinite compreſſi in Cylindrum ad Reſiſtentiam Fluidi minus compreſſi in eundem ut 1 ad 4, id eſt, Cylindrus in poſteriori caſu quadruplo majorem pateretur Reſiſtentiam quam in priore. Hunc caſum plenius conſiderat D'ALEMBERT (*b*). In Globo Reſiſtentia non erit tanta, quippe quæ in Fluido non-continuo duplo major eſt, quam in Fluido infinite compreſſo (§. IX.).

§. XII. In *Fluidis Elaſticis*, quippe quæ in majus vel minus ſpatium redigi ſe ſinunt, Reſiſtentia longe alio modo fit. Corpore enim in tali Fluido propulſo, particulæ Fluidi ab anteriore corporis parte condenſantur, & à poſtica parte dilatantur, quæ condenſatio & dilatatio non eædem ſunt in omnibus corporis punctis. Verbi gratia, moveatur globus ACBD (*Fig.* I.) in tali Fluido directione ſui axis BA, Fluidum in CEDA condenſabitur; & quia in puncto A agit directe in Fluidum, in punctis vero vicinis *m* oblique, erit condenſatio in puncto A maxima, & exprimetur per lineam AE, dum condenſatio fiet minor, quo magis oblique agat Fluidum in punctis *m* & exprimentur condenſationes per lineas *mn*. Simili plane modo dilatatio in B erit maxima, quippe quæ deſignatur per BF, in *pq* vero minor; in punctis autem C & D nec dilatatio nec condenſatio locum habebunt. Fluidum ergo ab anteriore parte Globi compreſſum in ſpatium minus compreſſum CFDB irruet Velocitate, quæ æqualis eſt preſſioni ejus naturali, & locum replebit.

§. XIII.

(*b*) L. c. pag. 129.

§. XIII. Attamen si Globus majori Velocitate moveatur, quam spatium relictum possit impleri, hic juxta & in Fluido non elastico locus pone globum relinquetur vacuus; hinc æque atque in Fluido non elastico globus destituetur non tantum pressione fluidi à postica sui parte, verum & sustinere debebit totam columnam Fluidi superincumbentis. Et quia præterea Fluidum condensetur & accumuletur, si sit elasticum, quod in non-elastico non obtinet, Resistentia hinc adeo crescit, ut secundum Robins Resistentia globi celerrime moti, ubi datur vacuum à postica parte, in initio motus esset triplo major, quam in fine, ubi Velocitas jam tantopere diminuta sit, ut locus relictus facile impleri possit. Verbi gratia, Cap. seq. ostensuri sumus, si globus moveatur in aëre Velocitate, qua uniformiter progrediendo ultra 1200 pedum Anglicanorum iter spatio unius minuti secundi absolvere posset, globum post se relicturum esse vacuum. Explodatur jam globus è tormento bellico ea Velocitate; diminuta hac, in fine motus Resistentia esset triplo minor quam in initio. Hanc assertionem probat B. Robins (*i*) experimentis quamplurimis ope Penduli cujusdam institutis, contra quod globi è sclopeto ope pulveris pyrii explodebantur. Machinæ hujus descriptionem elegantissimam & simplicissimum usum hic tradere vetat instituti nostri ratio.

§. XIV. Non tamen hæc ita intelligenda, ac si Resistentia contra globum rapidissime motum, & dein sensim retardatum, uno quasi temporis puncto evaderet triplo minor; verum hæc diminutio fit gradatim: decrescente Velocitate spatium vacuum pone corpus fiet minus & minus, donec tandem evanescat, & Celeritas Fluidi in locum relictum irruentis superet Celeritatem, qua corpus movetur.

§. XV. Generales hæ Fluidorum Resistentiæ præmittendæ erant ad ostendendum, duplicis generis Resistentiam in eodem Fluido pro majore minoreve Celeritate obtinere. Hoc autem Specimine constituimus in specie de *Resistentia* agere, quam *aër in globos projectos* exercet; quod ut rite fiat, sequentia ita subdividemus, ut in reliquo hoc Capite inquiramus in Legem Resistentiæ Aëris. Sequenti Capite

(*i*) *New Principles of Gunnery cap.* 1. *pr.* 8. & *cap.* 2. *pr.* 2.

pite progrediemur ad motum verticalem globorum per Aëra projectorum, ſimulque hunc cum motu in vacuo comparabimus. Tertium Caput deſtinavimus motui Curvilineo ex projectione vel obliqua vel horizontali oriundo, ubi inquirendum erit in veram naturam Curvæ, quam Globi vel Bombæ, è Tormentis vel Mortariis bellicis exploſæ, deſcribunt, quamque cum natura Curvæ, quæ in vacuo deſcriberetur, comparabimus. Apparebit hinc, quantopere errent hi Scriptores, qui ex profeſſo de re Militari & arte Tormentaria egerunt, ponentes Aëris Reſiſtentiam vix eſſe ſenſibilem. Hiſce eodem Capite nonnulla ſubjungemus de aberratione Globorum è Sclopetis, Tormentis vel Mortariis exploſorum à linea directionis, ex motu ipſorum rotatorio circum axem oriunda; quam aberrationem præcipuam eſſe cauſam Incertitudinis, quæ in jactibus globorum & bombarum obtinet, quantumpote breviter oſtenſuri ſumus. Progredior ad inveſtigationem *Legis Reſiſtentiæ.*

§. XVI. Initio hujus Capitis vidimus, Reſiſtentiam particularum Fluidi, cæteris paribus, ſequi decrementum motus ſeu velocitatis in corpore moto, ita ut creſcente Reſiſtentia diminuatur motus. Reſiſtentia vulgo recenſetur triplex. Prima oritur ex Tenacitate particularum Fluidi, quæ (quoniam in minori vel majori velocitate corporum, in eo motorum, eadem manet) conſtans eſt (*k*). Clariſſime hæc Tenacitas perſpici poteſt in guttis aquæ vel olei inferiori corporum ſuperficiëi adhærentibus, & in diverſis Fluidis diverſa eſt, major in oleo, quam in aqua, major in aqua, quam in aëre, &c. Altera Reſiſtentia oritur ex Attritu particularum Fluidi ſeu Frictione, quæ ex Experimentis à MUSSCHENBROEKIO (*l*) inſtitutis foret in ratione ſimplici Velocitatum, id eſt, corpus duplo velocius altero motum, duplo majorem patietur attritum, &c. Tertia Reſiſtentia oritur ex Inertia ſeu Reactione particularum Fluidi, eſtque ea in ratione

(*k*) 'S GRAVESANDE Phyſ. Elem. Mathem. §. 1975 ſeqq. D'ALEMBERT *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la Reſiſtance des Fluides*, p. 108 ſeq. LE SEUR & JACQUIER in Comment. ad NEWTON. tom. 2. pag. 3.

(*l*) Introduct. ad Philoſ. Natur. tom. I. p. 155. D'ALEMBERT *l. c. p.* 106.

tione duplicata Velocitatum; corpus enim duplo velocius altero motum, non tantum duplum numerum particularum protrudit, sed & duplo majori Velocitate in ipsas agit: hinc erit Resistentia ut quantitas particularum dato tempore dimovendarum, & ut Velocitas, qua dimoventur conjunctim; est autem quantitas Fluidi dimovenda in ratione Velocitatis; sequitur hinc, totam Resistentiam fore in ratione duplicata Velocitatum. Foret ergo in Fluidis Resistentia partim constans ex Tenacitate particularum, partim in ratione Velocitatis ex Attritu, & partim in ratione duplicata Velocitatum ex Inertia particularum ortum trahente. De hisce ulterius consuli meretur sæpius jam laudatus D'ALEMBERT, qui eleganter de hac materia egit (*m*). Addi & hisce potest quartum Resistentiæ genus, quæ tamen non semper adest, nisi in Velocitatibus majoribus, ubi corpus post se relinquit spatium vacuum; hoc enim in casu (§. XI.) nova orietur Resistentia ex sublato æquilibrio inter columnas Fluidi.

§. XVII. In Aëre autem, quia Tenacitas & Attritus vix sensibiles sunt, quantum ex Experimentis colligere licuit, non longe aberrabimus (*n*), si ponamus *Resistentiam Aëris*, cæteris paribus, *in ratione duplicata Velocitatis*, posito nempe, Velocitatem tantam esse, ut spatium relictum à fluido premente repleri possit; alioquin Resistentia fit triplo major. Hoc autem Specimine constituimus præcipue de ea Resistentia agere, quæ fit in ratione duplicata Velocitatum, quippe cujus frequentior usus est in arte Ballistica, cum compertum sit, globos medioçri Velocitate projectos plus utilitatis habere in re Bellica, in oppugnatione Munimentorum & pugnis Navalibus, quam ubi Velocitate maxima projiciuntur. Attamen de Resistentia triplo majore hic inde parcius acturi sumus. Sicut vero in sequentibus Resistentiam in minoribus Velocitatibus ponemus in ratione duplicata Velocitatum, ne videretur hæc assertio cuiquam dubia, provocamus ad accuratissima & indubitata Experimenta, quæ instituit insignis Mathematicus simulque expertissimus in praxi artis Ballisticæ B. ROBINS

(*m*) *L. c. pag.* 113. (*n*) ROBINS *Tracts of Gunnery* N°. 3.

BINS (*o*), præſentibus nonnullis Regiæ Societatis Anglicanæ membris, anno 1746. Elegantiſſimæ Machinæ, hanc in rem adornatæ, deſcriptionem hic dare, anguſti Speciminis cancelli non ſinunt.

§. XVIII. Si & Denſitas Aëris, & Magnitudo Globorum, & Velocitates, qua moventur, differant, erunt Reſiſtentiæ in ratione compoſita ex duplicata Velocitatum, ſimplici Denſitatis, & duplicata diametrorum. Poſitis enim Denſitate & Magnitudinibus iisdem, erunt (§. XVII.) Reſiſtentiæ in ratione duplicata Velocitatum; ſi vero & Denſitas & Velocitates ſint eædem, erunt Reſiſtentiæ ut ſuperficies globorum ſive ut quadrata Diametrorum: ſi denique Denſitates tantum differant, erunt Reſiſtentiæ ut Denſitates (*p*). Poſita ergo globi Velocitate $= D$, & diametro $= d$, erit $R = D d^2 v^2$, & hinc $D = \frac{R}{d^2 v^2}$, $d = \frac{\sqrt{R}}{v\sqrt{D}}$, & $v = \frac{\sqrt{R}}{d\sqrt{D}}$. Quoniam vero in praxi plerumque quæſtio eſt de inferiori Atmoſphæræ parte, ſine ſenſibili errore Denſitatem Aëris ubique eandem ponere poſſumus, licet nonnullis in caſibus ejus rationem habituri ſimus. Et quoniam varia corporum magnitudo non in cenſum venit, niſi ubi varii jactus inter ſe comparandi ſunt, quibus diverſæ magnitudinis globi feruntur, ponere poſſumus, cæteris paribus, *Reſiſtentiam in ratione duplicata Velocitatum.*

§. XIX. *Legem Reſiſtentiæ* ergo in poſterum vocabimus Celeritatis Quadratum. Cognita igitur ratione Celeritatis corporis in diverſis motus ſui partibus, cognoſcitur & Ratio Reſiſtentiæ; id eſt, ſi corporis unius Reſiſtentia ſit R, Velocitas V; alterius autem Reſiſtentia r, velocitas v, erit $V^2 : v^2 = R : r$ vel $V : v = \sqrt{R} : \sqrt{r}$. Data ergo quantitate Reſiſtentiæ pro uno Velocitatis gradu, dabitur ſimul pro omnibus aliis Velocitatis gradibus, ut Capite ſequenti ulterius manifeſtum fiet.

(*o*) *Ibid.*
(*p*) NEWTONI Princip. Philoſ. natur. Lib. 2. prop. 40. ſcholio in fine.

C A-

CAPUT SECUNDUM.

De Motu Verticali seu Rectilineo Globorum Projectorum per Aëra.

§. XX.

Corpus ad perpendiculum in Aëre projectum vel inde delapsum duplici vi sollicitatur, prima quæ oritur à Gravitate, altera à Resistentia Aëris. Videamus prius, quid à sola Gravitate oriretur, sive spectemus corpus verticaliter linea recta in Vacuo motum.

§. XXI. Notum est, omnia corpora in vicinia nostræ Telluris centrum ejusdem gravitate sua petere. Si libere è quiete decidant, erit eorum directio in linea ad Horizontem perpendiculari; si forte contingat, ut corpus sola vi Gravitatis cadens moveatur in linea curva, causa erit interveniens impedimentum, quod cogat corpus curvam describere, ut verbi gratia obtinet in Pendulis, Plano Inclinato &c.

§. XXII. Si Gravitas, motu semel impresso, cessaret in corpus agere, forent spatia percursa ut Tempora, id est, corpus uno $''$ percurrens 15 pedes, duobus $''$ percurreret $2 \times 15 = 30$ pedes. Sit spatium S, Tempus T, foret $S = T$. Quoniam vero motus est acceleratus, gravitate singulis momentis novam superaddente vim, erunt (ut Physicis satis compertum) spatia percursa in ratione duplicata Temporum sive Velocitatum: sit Velocitas v, erit $S = T^2 = v^2 = Tv$, unde erit $T = v = \sqrt{S}$, sive loco Temporum & Velocitatum poni possunt Radices Quadratæ Spatiorum. Corpus percurrens uno $''$ 15 pedes, duobus $''$ percurret $15 \times 4 = 60$ ped., tribus $''$ $15 \times 9 = 135$ ped. &c.; erunt ergo, ut notum, spatia percursa singulis $''$, ut numeri impares Arithmetica Progreſſione creſcentes, 1, 3, 5, 7, 9 &c. Si corpus adſcendat motus uniformiter retardabitur, unde & Spatia percurſa decreſcent eadem Arithmetica Progreſſione. Tabulam Spatiorum ſingulo $\overset{''}{m}$ percurſorum exhibet MUSSCHENBROEKIUS (*q*).

§. XXIII. Cum corpus motu accelerato cadit, in fine lapſus tantam acquiſivit vim, ut uniformiter Velocitate acquiſita pergendo eodem tempore duplum Spatium percurreret. Verbi gratia, corpus percurrens uno $\overset{''}{m}$ 15 pedes, habebit in fine motus ſui vim percurrendi uno $\overset{''}{m}$ 30 pedes: ſive poſito Spatio $= S$, habebit vim percurrendi Spatium $= 2\,S$.

§. XXIV. Celeritates ergo, quacunque de cauſa acquiſitæ, quantumlibet magnæ, conſiderari poſſunt tanquam acquiſitæ cadendo à certa altitudine; corpus habens vim uniformiter percurrendi ſpatium 30 pedum ſeu $2\,S$, cenſeri poteſt, acſi cecidiſſet ab altitudine 15 pedum ſeu S. Vocabimus ergo deïnceps *Celeritatem debitam altitudini* illam, ex qua grave decidens in vacuo in ſuperficie Telluris Celeritatem talem acquireret.

§. XXV. Stricte dicamus, quo minorem corpus habet diſtantiam à centro Telluris, eo majori vi Gravitas in illud agit, & quo magis ab eo diſtat, eo minorem in illud effectum habet; eſt enim Gravitatis actio in ratione reciproca Quadratorum Diſtantiarum à centro Telluris. Verum quoniam corpora in ſuperficie noſtræ Telluris projecta non admodum alte adſcendunt, ratione habita longe majoris diſtantiæ à centro Telluris, *Gravitas* in tantillo ſpatio tuto tanquam *uniformis* & eadem in calculo conſiderari poteſt. Jam ex computatione & Experimentis, à clar. LULOFS (*r*) Leidæ inſtitutis, corpus libere in vacuo decidens primo $\overset{''}{m}$ percurrit 15 pedes Rhenoland.,

(*q*) Introd. ad Philoſ. Natur. tom. I. §. 359.

(*r*) *Verhand. van de Haerl. Maetſch. der Wetenſch.* 3. *D. pag.* 503.

land., 7 poll., 6.412 lin.; five 15 pedes Parif., 1 poll., 3.14 lin; five fecundum DESAGULIERIUM (s) 16 ped. Anglicanos, $1\frac{1}{4}$ poll. vel quam proxime $16\frac{1}{10}$ ped. Angl., quo numero, ut expeditius agamus, in fequentibus utemur, quia in exemplis poftea proferendis ubique menfuram Anglicanam adhibemus. Eft vero pes Anglicus fatis prope ad pedem Rhenol., ut 32 ad 29.

§. XXVI. Cognito Spatio percurfo primo $\overset{''}{m}$, facile invenitur fpatium tempore quovis percurrendum: fit fpatium primo $\overset{''}{m}$ percurfum $= s$; fpatium tempore T percurfum $= S$, erit $1^2 : s = T^2 : S$, quia fpatia percurfa funt ut quadrata Temporum (§. XXII.), unde erit $S = sT^2$. Et quia corpus habet in fine motus vim percurrendi eodem tempore uniformiter duplum fpatium (§. XXIII.) erit (pofito C = Celeritati uno $\overset{''}{m}$ in fine lapfus) $1 : 2s = T : C$, unde $C = 2sT$.

§. XXVII. Ex duabus his æquationibus fequentes deduco Formulas, in quibus omnes cafus comprehenduntur.

$$C = 2sT = \sqrt{4Ss} = \frac{2S}{T} \qquad \Bigg| \qquad S = sT^2 = \frac{TC}{2} = \frac{C^2}{4s}$$

$$T = \sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{2S}{C} = \frac{C}{2s} \qquad \Bigg| \qquad s = \frac{S}{T^2} = \frac{C}{2T} = \frac{C^2}{4S}$$

Verbi gratia, habeat corpus Velocitatem debitam altitudini 11810 ped. Angl., & quæratur fpatium hac Velocitate uniformiter uno $\overset{''}{m}$ percurrendum, erit $C = \sqrt{4Ss} = \sqrt{4 \times 11810 \times 16.1} = \sqrt{760564} = 872\frac{1}{8}$ ped. Angl.

§. XXVIII. Corpora in vacuo mota, licet pondere inter fe differant, eadem movebuntur Velocitate, fi ab eadem cadant altitudine, adeo-

(s) *Proefondervindelyke Natuurkunde*, 1. *Deel*, p. 384.

adeoque majus minusve pondus & diverſa figura non in cenſum venit, ubi de projectione vel lapſu in vacuo agitur. Leviſſima plumula in vacuo Anthliæ Pneumaticæ æque celeriter cadit ac graviſſimum aurum vel plumbum (*t*).

§. XXIX. Et hæc eſt Theoria motus in Vacuo, cujus primus inventor fuit celeberrimus Italus GALILEUS (*u*), quamque poſt eum TORRICELLIUS aliique ad ſummum perfectionis gradum deduxerunt. Videndum nunc, quem effectum Aëris Reſiſtentia in corpora ſurſum vel adſcendentia vel deſcendentia ſortiatur. Ipſo jam GALILEO quoque nota fuit Aëris Reſiſtentia, diſputans enim contra Ariſtotelicos, projectile non à medio promoveri, ſed à vi impreſſa (*v*), *tam eſſe falſum*, ait, *quod medium projecto motum conferat*, *quam verum eſt*, *quod ei ſolum ſit impedimento*. Alibi tamen affirmat, Aëris vim reſiſtentem eſſe perexiguam, ſi pondera admodum differant. Auctores, qui poſt eum de re Balliſtica & arte Tormentaria ex profeſſo egerunt, inter quos haud infimum tenet locum BLONDELLUS (*w*), ſtrenue affirmarunt & contenderunt, corpora gravia mediocri Celeritate projecta quam minimum reſiſtentiæ in medio tam raro, quale aër eſt, experiri; adeoque tuto leviſſimum inde ortum errorem negligi poſſe. Hoc ſolo interim uſi fuere argumento, magnam intercedere differentiam inter ſpecificam Aëris & Metallorum gravitatem. Primus fuit NEWTONUS (*x*), qui de Reſiſtentia Fluidorum accuratius philoſophari cœpit, & ad certas reduxit regulas ſeu Leges, quas variis comprobavit Experimentis corporum ex inſigniori altitudine cadentium. Poſt eum DANIEL BERNOULLIUS (*y*) has Leges applicuit experimentis à GUNTHERO inſtitutis ope Tormentorum & Mortariorum bellicorum, ex quibus inſignis apparet differentia, ut poſtea uno alterove

(*t*) 's GRAVESANDE Phyſ. Elem. Math. tom. II. p. 618. NOLLET *Natuurkundige Leſſen*, 2. *Deel*, 1. *ſt. pag.* 181

(*u*) Dialogi de Syſtemate Coſmico.

(*v*) Ibid. p. 110.

(*w*) *L'Art de jetter les bombes*, *part.* 4. *pag.* 357.

(*x*) Princip. Philoſ. Natur. lib. 2.

(*y*) Comment. Petropolitan. tom. II. p. 338 ſeqq.

terove exemplo oſtenſuri ſumus. Attamen quod mirum, Auctores plerique, qui poſt NEWTONUM & BERNOULLIUM ex profeſſo de arte Bellica & re Pyrotechnica egerunt, non quidem omnino Aëris Reſiſtentiam negarunt, verum efficaciam ejus in globos vel bombas projectas in praxi inſenſibilem eſſe affirmarunt; dum interea majorem minoremve jactus amplitudinem eodem tormento & globo, eademque quantitate pulveris pyrii, majori minorive Aëris Denſitati adſcripſerunt, quaſi vero tantilla differentia majorem in projecta corpora efficaciam haberet, quam Aëris vis reſiſtens (*z*). Referente enim BELIDORIO, globi eadem vi projecti, ejusdemque magnitudinis tempore matutino & vespertino longius ejaculantur, quam circa meridiem, dum interea, ſi adamuſſim rem ponderemus, plane contrarium fieri deberet, dum, ſole in meridiano verſante calor major eſt, & hinc aër magis expanſus, quam ubi oritur vel occidit, & Reſiſtentia hinc reïpſa minor eſſe deberet. Ab altera parte peritiſſimus Pyrotechna & inſignis ſimul Mathematicus B. ROBINS (*a*) probavit, tantillam in Denſitate Aëris mutationem ſenſibilem non creare differentiam in amplitudine jactuum, & inſtitutis experimentis comprobavit, ſive æſtate, ſive hyeme, tempore ſive matutino ſive vespertino globos vel plane nihil, vel ſaltem perparum affici à calore vel frigore, & differentiam jactuum his regulis non adſtringi, ſed alterius generis cauſæ deberi, ut Capite Tertio oſtenſuri ſumus. Idem ROBINS (*b*) primus fuit, qui accuratiore calculo & inſtitutis experimentis ſtupendam aëris Reſiſtentiam in globos & bombas projectas demonſtravit. Uſus fuit Machina, de qua jam ante verbulo mentionem injecimus, cujus ope comprobavit, globum ponderis 12 libr. Angl. (*c*) (*avoirdupoiſe weight*) motum Velocitate 25 ped. Angl. uno $\stackrel{\prime\prime}{m}$, in primo motu, dum è tormento egreditur, Reſiſtentiam offendere æqualem ponderi dimidiæ unciæ. Jam Capite præced. vidi-

(*z*) BELIDOR *le Bombardier François*, *p.* 38. BARDET DE VILLENEUVE *Cours de la Science Militaire*, *Tom.* 6. *p.* 46. & *Tom.* 8. *p.* 152 *ſeqq*

(*a*) *New Principles of Gunnery*, *lib.* 1. *pr.* 10. & *Practical Maxims*, *Max.* 21.

(*b* *Tracts of Gunnery*, n°. 1 & 3.

(*c*) 108 libr. *avoirdupoiſe* æquant ſatis accurate 100 libr. Amſtel.

vidimus, Resistentiam Aëris esse (cæteris paribus) in ratione duplicata Velocitatum; hinc erit Resistentia in eundum globum motum Velocitate 100 ped. uno $\overset{''}{m} = 16$ dimidiis unciis, id est, $= \frac{1}{2}$ libr.; est enim $25\,q : 100\,q = \frac{1}{2} : 8$ unc. Si idem globus moveretur Velocitate 1000 ped. uno $\overset{''}{m}$, quales fere sunt jactus è tormentis, erit (quia $25\,q : 1000\,q : = \frac{1}{2} : 800$) Resistentia in primo motu $= 800$ unc. $= 50$ libr., quod quater & amplius superat ipsum globi pondus. Si jam colligamus omnia pondera, quæ toto motu globum impediunt, non potest non aër insignem in altitudine jactus creare differentiam: quod in sequentibus calculo & experimentis manifestum fiet.

§. XXX. Capite præcedente observavimus, duplicem dari Resistentiam in eodem Fluido pro majori minorive Velocitatis gradu, & corpus motum Velocitate majore, quam Fluidum à postica parte locum replere possit, Resistentiam esse triplo majorem, quam ubi tale quid locum non habet. Videamus, quanta in Aëre Celeritas huic triplæ Resistentiæ conveniat. Columna Aëris, cujus altitudo æqualis est altitudini Atmosphæræ, in æquilibrio est cum columna aquæ, cujus altitudo ad minimum est 32 ped. Angl. Verum secundum Musschenbroekium (*d*) gravitas specifica aëris est ad gravitatem specificam aquæ, ut 1 ad 700, assumta media aëris densitate: adeoque columna aëris premens alta est 32×700 ped.; hinc deduco Celeritatem, qua aër spatium à corpore relictum implet, deberi huic altitudini. Verum corpus in vacuo cadens (§. XXV.) primo $\overset{''}{m}$ percurrit ad minimum 16 ped. Angl.: sunt autem tempora in ratione subduplicata spatiorum, & (§. XXII.) corpus in fine lapsus habet vim percurrendi uniformiter eodem tempore duplum spatium, unde erit $\sqrt{16} : \sqrt{32 \times 700} = 2 \times 16 : 8\sqrt{32 \times 700}$; & Celeritas, qua aër in locum relictum irruit, tanta erit, ut uno $\overset{''}{m}$ uniformiter percur-

(*d*) Introduct. ad Philos. Natur. tom. II. §. 1417.

currere poſſet ſpatium $= 8\sqrt{32 \times 700} = 8 \times 18.7 = 1197$ ped. Angl., pro quibus ſatis tuto poni poſſunt 1200 pedes. Corpus ergo majori Velocitate motum, quam 1200 ped. uno $\overset{\prime\prime}{m}$, locum poſt ſe relinquet vacuum & triplam exinde patietur Reſiſtentiam. Si maximam ſumamus Aëris Denſitatem ad aquæ Denſitatem ut 1 ad 600, erit Celeritas in fine lapſus 1120 ped. Videtur ergo, quod obſervandum, hic aliquam dari convenientiam inter Velocitatem corporis, ubi Reſiſtentia jam jam fit triplo major, & inter Celeritatem Soni: ſonus enim ſive aër undulatus ſpatio unius $\overset{\prime\prime}{m}$ ad diſtantiam 1142 ped. Angl., obſervante NEWTONO (*e*), propagatur; adeoque credibile hinc videretur, Celeritatem Soni illam eſſe, qua Reſiſtentia hanc mutationem ſubit, & hunc eſſe terminum, ubi vacuum pone corpus formari incipit. Verum ulteriori hæc diſquiſitioni potius relinquimus: ſaltem non longe aberrabimus, ſi ponimus Reſiſtentiam intra Velocitatem 1100 & 1200 ped. uno $\overset{\prime\prime}{m}$ triplo majorem gradum acquirere. Si autem ſuperet hunc terminum, Reſiſtentia ſtupendum in modum creſcet. Moveatur, verbi gratia, idem globus, de quo §. præced. dicebamus, Velocitate 1700 ped. uno $\overset{\prime\prime}{m}$, foret Reſiſtentia initio motus, dum è tormento egreditur $= 3 \times 144\frac{1}{2} = 433\frac{1}{2}$ libr., quod plus quam triceſies ſexies ſuperat ipſum globi pondus.

§. XXXI. Quia actioni globi reactio ſeu Reſiſtentia aëris oppoſita eſt & contraria, directio ejus, ut ante vidimus, hinc nihil mutabitur; omnis ejus vis tantum conſiſtit in retardando corporis vel adſcenſu vel deſcenſu. Hiſce præmiſſis, procedimus ad ipſum calculum.

§. XXXII. Capite præced. patuit, *Reſiſtentiam Aëris eſſe*, cæteris paribus, *in ratione duplicata Velocitatum*, id eſt, erat $R : r = V^2 : v^2$ (§. XIX.). Sed hæc Regula indicat quidem proportionem inter Velocitatem & Reſiſtentiam, non vero ipſam Reſiſtentiæ quantitatem.

(*e*) Princ. Philoſ. Natur. lib. 2. ſect. 8. fin.

tem. Ideoque invenienda eſt Reſiſtentia pro uno Celeritatis gradu, & hinc Reſiſtentiæ quacunque Velocitate eliciuntur.

§. XXXIII. Quoniam vis Gravitatis eſt conſtans (§. XXV.), ſi inveniri poſſit Celeritatis iſte gradus, quo Reſiſtentiæ & Gravitatis vires inter ſe æquantur, nota quoque erit Reſiſtentiæ quantitas pro iſto gradu. Jam ſecundum NEWTONUM (*f*) Reſiſtentiæ & Gravitatis vis par eſt, ſi globus tantam poſſideat velocitatem, quantam acquirere poteſt libere cadendo in vacuo vi ſui ponderis, & deſcribendo *Spatium*, quod ſit ad $\frac{4}{3}$ partes diametri globi, ut Denſitas ejus ad Denſitatem Aëris. Spatium iſtud cum EULERO (*g*) in ſequentibus vocabimus *Exponentem Reſiſtentiæ*. Erit ergo *Exponens Reſiſtentiæ*, *altitudo debita Celeritati ei*, *quam*, *ſi globus habet*, *Reſiſtentiam pateretur æqualem Gravitati*. Cognitis ergo *Lege* & *Exponente Reſiſtentiæ*, ipſa Reſiſtentiæ globi quantitas quacunque motus ſui parte detegi poteſt. Lex enim Reſiſtentiæ dat proportionem inter Velocitatem & Reſiſtentiam; & Exponens Reſiſtentiæ dat quantitatem ejus, Gravitatem æquantem. Sit Exponens Reſiſtentiæ E, denſitas aëris ad denſitatem globi ut p ad q, diameter globi $= d$, erit $p : q = \frac{4}{3}d : E$, id eſt, $E = \frac{q}{p} \times \frac{4}{3}d$. Et quia corpus in extremo motu habet vim percurrendi uniformiter duplum ſpatium, foret Denſitas Aëris ad Denſitatem globi, ut vis Reſiſtentiæ ad vim uniformem in fine E acquiſitam, qua totus globi motus tolleretur, interea dum percurreret $\frac{8}{3}$ diametri ſui, id eſt, foret $2E = \frac{q}{p} \times \frac{8}{3}d$.

§. XXXIV. Moveatur jam globus ſurſum vel deorſum ex A verſus B (*Fig.* 2.); ſit Celeritas in A tanta, ut uniformiter progrediendo uno $\overset{\prime\prime}{m}$ deſcriberet ſpatium $= c$; ſit Celeritas in quocunque alio pun-

(*f*) Princip. Phil. Nat. tom. II. p. 312. & ibid. LE SEUR & JACQUIER in not. & p. 331., ubi hanc regulam applicat corporibus per aëra lapſis.
(*g*) Motus ſcientia Analytice expoſita ſive Mechanica tom. I. p. 156.

puncto P $= v$: & vis, quæ motum omnem tolleret, interea dum percurreret spatium $= 2E =$ duplæ Exponenti Resistentiæ; spatium istud censeri potest, ac si descriptum foret velocitate initiali c tempore a; ergo ut tempore a aufertur omnis velocitas c, sic tempore unius $\overset{\prime\prime}{m}$ auferetur Velocitas $= \frac{c}{a}$: sunt vero spatia motu uniformi percursa uti tempora (§. XXII.), id est, $c : \overset{\prime\prime}{1} = 2E : a = \frac{2E}{c}$, unde erit Velocitatis diminutæ quantitas $= \frac{c}{a} = \frac{cc}{2E}$. Porro, quia Lex Resistentiæ est Celeritatis quadratum (§. XIX.), erit $c^2 : v^2 = \frac{c^2}{2E} : \frac{v^2}{2E}$, & hinc $\frac{v^2}{2E}$ exprimet Velocitatis diminutæ quantitatem, seu vim resistentem in quocunque puncto P. Sit AP $= x$, ejus Fluxio P$p = \dot{x}$, decrementum Velocitatis, dum globus describit P$p = -\dot{v}$. Jam quoniam tempora sunt directe ut spatia, & inverse ut Celeritates (§. XXII.), erit tempus, quo spatiolum Pp describitur $= \frac{\dot{x}}{v}$. Est vero (§. III.) decrementum motus in ratione composita Temporis & Resistentiæ, unde erit $-\dot{v} = \frac{\dot{x}}{v} \times \frac{v^2}{2E}$. Præter autem vim Resistentiæ datur & vis Gravitatis, quæ constans est, sit hæc $= g$, &, quoniam, corpore adscendente, vis Gravitatis una cum vi Resistentiæ aëris, in retardando globi projecti motu, coöperatur, erit in adscensu Gravitas $= + g$; in descensu vero $= - g$, quia eidem Resistentiæ tunc adversatur, & globum in motu adjuvat. Erit ergo, sive corpus adscendat, sive descendat, vis Gravitatis $= \pm g$, quæ addita vi Resistentiæ, erit tota vis, motum globi retardans,

$$= -\dot{v} = \frac{\dot{x}}{v} \times \overline{\frac{v^2}{2E} \pm g}$$

$$-v\dot{v} = \dot{x} \times \frac{v^2 \pm 2Eg}{2E}$$

 hinc

hinc est $\dot{x} = \frac{-2Ev\dot{v}}{v^2 \pm 2Eg}$, cujus Fluens dependet à quadratura Hyperbolæ intra Asymptotos, cujus areæ proprietatem habent Logarithmorum (*b*); unde erit

$$x = -E \times \text{Hyperb. Logar. } \overline{v^2 \mp 2Eg} - C.$$

ut inveniatur quantitas constans C, fiat $v = c$, & substituatur in æquatione, erit $C = -E \times \text{Hyp. Log. } \overline{c^2 \mp 2Eg}$, unde

$$x = -E \times (\text{Hyp. Log. } \overline{v^2 \mp 2Eg} - \text{Hyp. Log. } \overline{c^2 \mp 2Eg})$$

vel $x = -E \times \text{Hyp. Log. } \frac{v^2 \pm 2Eg}{c^2 \pm 2Eg}$. En generalem Aequationem, exprimentem spatium percursum in aëre in descensu vel adscensu.

§. XXXV. Fingamus globum projici sursum versus ab A ad B, usque dum in P omnem amiserit Velocitatem, erit $v = 0$, id est Velocitas in P nulla, & vis Gravitatis $+ g$, unde erit

$$x = -E \times \text{Hyp. Log. } \frac{2Eg}{c^2 + 2Eg}$$

$$x = E \times \text{Hyp. Log. } \frac{c^2 + 2Eg}{2Eg} = E \times \text{Hyp. Log. } \frac{c^2}{2Eg} + 1$$

§. XXXVI. Descendat corpus è quiete ex A versus B, erit $c = 0$ & vis Gravitatis $- g$, unde erit

$$x = -E \times \text{Hyp. Log. } \frac{v^2 - 2Eg}{-2Eg} = -E \times \text{Hyp. Log. } 1 - \frac{v^2}{2Eg}$$

§. XXXVII. Ut inveniatur Velocitas in fine lapsus acquisita, cadente globo è quiete, erit ex æquatione superiore

$$-\frac{x}{E}$$

(*b*) Simpson's *the Doctrine and Application of Fluxions P.* 1. *p.* 138. Wolfii Elem. Matheseos tom. I. p. 493.

$$-\frac{x}{E} = \text{Hyp. Log. } \overline{1 - \frac{v^2}{2Eg}}$$

ſit $-\frac{x}{E} = -\text{Hyp. Log. } A = \text{Hyp. Log. } \frac{1}{A}$

erit $1 - \frac{v^2}{2Eg} = \frac{1}{A}$, ſive, $1 - \frac{1}{A} = \frac{v^2}{2Eg}$

hinc $v^2 = 2Eg - \frac{2Eg}{A}$, &, $v = \sqrt{2Eg - \frac{2Eg}{A}}$.

§. XXXVIII. Si globus ſurſum projiciatur ex A verſus P, & velocitate in P amiſſa, rurſus deſcendat, ſequenti modo invenitur Velocitas, quam acquiſivit in fine lapſus, dum in A recidit. Erat ex §. XXXV altitudo, ad quam corpus adſcendit $=$

$x = E \times \text{Hyp. Log. } \overline{1 + \frac{c^2}{2Eg}}$; eſt vero in hoc caſu

$A = 1 + \frac{c^2}{2Eg}$, eodem modo operando, ac §. præc. Subſtituatur valor A in æquatione ſuperiore, erit

$$v^2 = 2Eg - \frac{2Eg}{A} = 2Eg \times \overline{1 - \frac{1}{A}}$$

$$v^2 = 2Eg \times \overline{1 - \frac{2Eg}{c^2 + 2Eg}} = 2Eg \times \frac{c^2}{c^2 + 2Eg}$$

$$v = \sqrt{\frac{2Egc^2}{c^2 + 2Eg}} = c\sqrt{\frac{2Eg}{c^2 + 2Eg}}$$

§. XXXIX. Tempus Adſcenſus vel Deſcenſus ſic reperitur. Sit Tempus, quo deſcribitur AP $= t$, ejus Fluxio $= \dot{t} =$ tempori, quo deſcribitur Pp, erit $\dot{t} : \dot{x} = 1'' : v$; unde $\dot{t} = \frac{\dot{x}}{v}$: eſt vero (§. XXXIV.) $\dot{x} = \frac{-2Evv}{v^2 \mp 2Eg}$; unde $\dot{t} = \frac{-2Ev}{v^2 \pm 2Eg}$; cujus Flu-

 ens

ens vario modo invenitur, prout corpus vel adſcendat vel deſcendat.

§. XL. Si projiciatur globus ſurſum verſus, erit vis Gravitatis $+g$, unde $\dot{t} = \frac{-2E\dot{v}}{v^2 + 2Eg} = -\frac{1}{g} \times \frac{2Eg\dot{v}}{v^2 + 2Eg}$. Fluens quantitatis $\frac{2Eg\dot{v}}{v^2 + 2Eg}$ erui tantum poteſt (i) ope Quadraturæ Circuli & inveniretur æqualis arcui, cujus Radius eſt $= \sqrt{2Eg}$, & Tangens $= v$: verum, quia Tabulæ Sinuum & Tangentium ponunt Radium $= 1$, ideo hic potius aſſumimus Rad. $= 1$; unde, quia $\sqrt{2Eg} : v = 1 : \frac{v}{\sqrt{2Eg}}$, erit *Arcus*, (cujus Tangens eſt $\frac{v}{\sqrt{2Eg}}$ & Rad. $= 1$) $= \frac{v\sqrt{2Eg}}{v^2 + 2Eg}$; erit ergo

$$\dot{t} = -\sqrt{\frac{2E}{g}} \times \frac{\dot{v}\sqrt{2Eg}}{v^2 + 2Eg}$$

$t = -\sqrt{\frac{2E}{g}} \times$ *Arcu* (cujus Rad. eſt 1, & Tangens $\frac{v}{\sqrt{2Eg}}$) $+ C$ Ut inveniatur Quantitas conſtans C, ſit $v = c$, & ſubſtituatur in æquatione, erit $t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times$ *different. arcuum*, quorum Radius communis eſt 1 & Tangentes $\frac{c}{\sqrt{2Eg}}$ & $\frac{v}{\sqrt{2Eg}}$. Si quæſtio ſit de toto tempore Adſcenſus, usque dum globus omnem amiſerit Velocitatem, erit $v = 0$, & hinc

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times arc., \text{ cujus Rad. eſt } 1, \text{ \& tang. } \frac{c}{\sqrt{2Eg}}.$$

§. XLI. Si Globus cadat è quiete, erit vis Gravitatis $-g$, & $c = 0$, unde in hoc caſu erit

$$\dot{t} = -\frac{1}{g} \times \frac{2Eg\dot{v}}{v^2 - 2Eg} = \frac{1}{g} \times \frac{2Eg\dot{v}}{2Eg - v^2}$$

t

(i) Simpson *ibid. p.* 166. Wolf. *ibid. p.* 447.

$$\dot{t} = \sqrt{\frac{E}{2g}} \times \frac{2\dot{v}\sqrt{2Eg}}{2Eg - v^2},$$ cujus Fluens est

$$t = \sqrt{\frac{E}{2g}} \times \text{Hyp. Logar.}\ \frac{\sqrt{2Eg} + v}{\sqrt{2Eg} - v},$$ cui quantitas constans non adjicienda est, quia est $c = 0$; foret enim sic $C = 0$.

Quia quantitas v Æquationem ingrediens variabilis est, adeoque incognita, substituatur ejus valor ex §. XXXVII. in æquatione, & ponatur facilitatis causa $2Eg = n$; erit

$$v = \sqrt{n - \frac{n}{A}};\ \text{unde}\ t = \sqrt{\frac{E}{2g}} \times \text{Hyp. Log.}\ \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n - \frac{n}{A}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n - \frac{n}{A}}}.$$

Ut termini simpliciores reddantur, multiplicentur & Numerator & Denominator Logarithmi Hyperbolici per $\sqrt{n} + \sqrt{n - \frac{n}{A}}$, erit

$$t = \sqrt{\frac{E}{2g}} \times \text{Hyp. Log.}\ \frac{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n - \frac{n}{A}}\right)^2 \times A}{n}$$

$$t = \sqrt{\frac{E}{2g}} \times 2\ \text{Hyp. Log.}\ \left(\sqrt{A} \times \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n - \frac{n}{A}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times \text{Hyp. Log.}\ \sqrt{A} + \sqrt{A - 1}.$$

§. XLII. Si corpus sursum adscendat ab A versus P, & vi perdita, qua ferebatur, iterum in A decidat, tempus, quod impenditur descensioni, facile reperitur ex ante dictis. Erat, ex §. XXXVIII., $A = 1 + \frac{c^2}{2Eg}$, quæ quantitas substituta loco A in æquatione superiore, erit

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times \text{Hyp. Log.}\ \left(\sqrt{1 + \frac{c^2}{2Eg}} + \frac{c}{\sqrt{2Eg}}\right).$$

§. XLIII.

§. XLIII. Quæ huc usque computavimus, uno alterove exemplo illustremus. Primum Exemplum desumo ex Schediasmate DAN. BERNOULLII, *Commentariis Petropolitanis* (*k*) inserto, ubi plura memorat Experimenta, à GUNTHERO per Tormenta & Mortaria Bellica instituta. Sumserat GUNTHERUS Tormentum Bellicum, quod, quantum fieri poterat, ad perpendiculum erigebatur: erat longitudo animæ Tormenti $= 6$ ped. Angl., diameter globi $= 0.2375$ ped. $= 2.85$ poll., & quantitas pulveris nitrati 6 unc. Holland. Accenso pulvere, globus perpendiculariter adscendens in terram recidit post elapsa $32\frac{1}{2}$ m''.

§. XLIV. Jam ex Theoria (*l*) pulveris pyrii & artis Pyrotechnicæ invenit BERNOULLIUS, vim, qua globus exibat è Tormento, debitam fuisse altitudini 11810 ped. Angl., id est, vis tanta erat, ac si libere cecidisset ab hac altitudine. Habebitur ergo ex Formula §. XXVII. inventa Velocitas in fine lapsus percurrendi uno m'' prope $872\frac{1}{8}$ ped. Angl.; erit ergo $c = 872\frac{1}{8}$; quæ Velocitas, quia minor est quam 1200 ped., tuto poni potest Resistentia in ratione duplicata Velocitatum.

§. XLV. Vidimus antea, Exponentem Resistentiæ esse altitudinem debitam Celeritati, quam si globus haberet, Resistentiam pateretur æqualem Gravitati; & Celeritatem hanc esse eam, quam acquirit libere cadendo in vacuo & describendo spatium, quod sit ad $\frac{4}{3}$ diametri sui, ut Densitas globi ad Densitatem Aëris. Erat autem secundum BERNOULLIUM Densitas globi ad Densitatem Aëris, ut 7650 ad 1; unde erit (§. XXXIII.) $E = \frac{q}{p} \times \frac{4}{3} d = \frac{7650}{1} \times \frac{4}{3} \times 0.2375 = 2422\frac{1}{2}$ ped. Angl.

§. XLVI.

(*k*) Tom. II. p. 338. seqq.

(*l*) Vide ROBINS *Tracts of Gunnery* no. 4. *Rule* 1 & 4.

§. XLVI. Quoniam corpus è quiete decidens primo $\overset{''}{m}$ percurrit in vacuo $16\frac{1}{10}$ ped. Angl. (§. XXV.), erit vis Gravitatis in fine hujus ſpatii tanta, ut uniformiter progrediendo duplum ſpatium percurreret eodem tempore, id eſt $32\frac{1}{5}$ ped. Erit ergo $g = 32\frac{1}{5}$.

§. XLVII. Si quæratur altitudo, ad quam globus in aëre pervenit, eſt ex §. XXXV., $x = E \times$ Hyp. Log. $\overline{1 + \frac{c^2}{2Eg}}$. Eſt vero

$$c^2 = 760564 \qquad 2E = 4845$$

$$g = 32\frac{1}{5}$$

$$\frac{c^2}{2Eg} = 4.875 \qquad 2Eg = 156009$$

$$1 + \frac{c^2}{2Eg} = 5.875.$$

Logar. $\overline{1 + \frac{c^2}{2Eg}} = 0.7690079$. *Logarithmi* vero *Hyperbolici* habentur, ſi *Briggiani* ſeu communes multiplicentur per 2.30258509., vel dividantur per 0.4342944482, unde erit

$$\text{Logar. Hyperb. } \overline{1 + \frac{c^2}{2Eg}} = 1.7707056$$

$$\text{eſt vero } E = 2422\tfrac{1}{2}$$

unde $x = E \times$ Hyp. Log. $\overline{1 + \frac{c^2}{2Eg}} = 4289\frac{1}{2}$ ped. Angl. = altitudini, ad quam globus in aëre pervenit.

§. XLVIII. Sit invenienda Velocitas in fine Deſcenſus acquiſita. Eſt ex §. XXXVIII. $v = c\sqrt{\frac{2Eg}{c^2 + 2Eg}}$; & $2Eg + c^2 = 156009 + 760564 = 916573$

$$\sqrt{\frac{2Eg}{2Eg + c^2}} = \sqrt{0.177029} = 0.420755$$

$$\text{hinc } v = c\sqrt{\frac{2Eg}{2Eg + c^2}} = 367 \text{ ped. Angl.}$$

Ideo-

Ideoque globus in fine descensus habebat Velocitatem uno $\overset{''}{m}$ percurrendi 367 ped. Angl.

§. XLIX. Tempus adscendendo elapsum computatur ex Formula (§. XL.) erat ibi $t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times$ Arc., cujus Rad. est 1 & Tangens $\frac{c}{\sqrt{2Eg}}$. Ex (§. XLVII.) est $\frac{c^2}{2Eg} = 4.875$, unde $\frac{c}{\sqrt{2Eg}} = 2.208$, qui numerus in Tabulis Tangentium respondet arcui $65^\circ, 38'$. Ut inveniatur longitudo hujus arcus, quoniam Radius est $= 1$, erit Diameter $= 2$, & ratio diametri ad circumferentiam 2 ad 2×3.1415 &c.: hinc $360^\circ : 2 \times 3.1415 = 65^\circ, 38' : 1.141 =$ longitudini arcus, cujus Radius est 1 & Tangens $65^\circ, 38'$. Est vero $\frac{2E}{g} = 150.466$ & $\sqrt{\frac{2E}{g}} = 12.265$, unde erit $t = 12.265 \times 1.141 = 13''.8 =$ tempori Adscensus.

§. L. Tempus Descensus reperitur §. XLII., ubi erat

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times \text{Hyp. Logar.} \left(\frac{c}{\sqrt{2Eg}} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{2Eg}}\right)$$

$$t = 12.265 \times \text{Hyp. Log.} \overline{2.208 + 2.424}$$

$$t = 12.265 \times 1.5329883 = 18''.8 = \text{tempori Descensus.}$$

§. LI. Erat Tempus Adscensus = 13.8 min. sec.
Tempus Descensus = 18.8 min. sec.

unde tota mora in aëre = 32.6 min. sec.
erat ex Experim. = 32.5 min. sec.

unde differentia tantum est = 0.1 sive $\frac{1}{10}$ min. sec.

Mi-

Mirum prima fronte videretur, globum in defcenfu plus temporis impendiffe, quam in adfcenfu; verum attendenti nullus fupererit fcrupulus: in adfcenfu enim Gravitas cum Aëre coöperatur in retardanda Velocitate; fi jam tempora forent æqualia, deberet in Defcenfu Aër coöperari cum Gravitate in accelerando motu, quod fieri nequit, dum è contrario retardat motum; adeoque neceffario globus plus temporis defcendendo impendere debet. In Vacuo autem tempus adfcenfus femper æquat tempus defcenfus.

§. LII. Quoniam in Vacuo globus adfcendiffet ad altitudinem 11810 ped., & fpatia percurfa fint in ratione duplicata Temporum (§. XXII.), erit (quia $16.1 : 1'' = 11810 : \overline{27.08}^2$) tempus adfcenfus, quod æquale eft tempori defcenfus, $= 27''.08$, & tota mora in vacuo $= 54''.16$, & hinc globus ex Aëris Refiftentia amifit $21''.56$. Summam omnium eorum, quæ hic computavimus, in fequentem refero Tabellam

	in vacuo	*in aëre*	*differ.*
Altitudo adfc. vel defc. in ped. angl.	11810	4289½	7520½
Celeritas in fine lapfus uno m	896	367	529
Tempus adfcenfus in min. fec.	27. 08	13. 8	13. 28
Tempus defcenfus in min. fec.	27. 08	18. 8	8. 28

§. LIII. Alterum Exemplum defumo ex iisdem *Comment. Petropolitanis* tom. II. Experimentum inftitutum fuit ab eodem GUNTHERO. Erigebatur Mortarium ad perpendiculum; erat diameter animæ Mortarii = 1.05 ped. Angl., diameter Bombæ 1.01 ped., ejus pondus 200 libr. Holland.; quantitas pulveris pyrii, camera mortarii contenti, 6 libr. Holland. Explofa Bomba recidit in terram elapfis 25 min. fec.

§. LIV. Ex Theoria artis Pyrotechnicæ, quam tradit ROBINS (*m*) BER-

(*m*) *Tracts of Gunnery No. 4.*

(BERNOULLIUS enim hoc exemplum ad calculum non revocavit) inveni, Celeritatem Bombæ, Mortarium egredientis, debitam fuiſſe altitudini 2960 ped. Angl., unde erit $c = 438$ ped., quod cum longe minus ſit, quam 1200, erit Lex Reſiſtentiæ, ut in exemplo priore, Celeritatis quadratum. Exponens Reſiſtentiæ E foret $= \frac{q}{p} \times \frac{4}{3} d$, ſi Bomba non eſſet cava, verum, ratione habita diametri ejus & ponderis, inveni fuiſſe ſatis prope $\frac{4}{5}$ globi ſolidi ejusdem diametri; hinc erit $E = 7650 \times 1.01 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = 8241 \frac{3}{5}$ ped.

§. LV. Calculo eadem ratione, qua in exemplo ſuperiore, inſtituto, erunt quantitates, ut in ſubjuncta Tabella.

	in vacuo	*in aëre*	*differ.*
Altitudo adſc. vel deſc. in ped. Angl.	2960	$2542\frac{1}{2}$	$417\frac{1}{2}$
Celeritas in fine lapſus uno $\overset{\prime}{m}$	438	$375\frac{1}{3}$	$62\frac{2}{3}$
Tempus adſcenſus in min. ſec.	13.56	12.28	1.28
Tempus deſcenſus in min. ſec.	13.56	12.73	0.83

Erat ergo totum tempus adſcendendo & deſcendendo in aëre elapſum $= 25''.01$, dum ex Experimento erant $25''$, unde differentia hic tantum eſt $\frac{1}{100}$ $\overset{\prime\prime}{m}$, ſive $\frac{3}{5}$ $\overset{\prime\prime\prime}{m}$.

§. LVI. Tertium Exemplum ſit notiſſimum Experimentum DESAGULIERII (*n*). A culmine ſeu turri rotunda fornicata Eccleſiæ B. Pauli *Londini*, cujus altitudo eſt 272 ped. Angl., demittebantur varii globi è plumbo ejusdem magnitudinis & ſpecificæ gravitatis: uniuscujusque diameter erat 2 poll. ſive $\frac{1}{6}$ ped., & pondus 2 librarum Romanarum (*Troy-Weight*). Erat tempus lapſus $4\frac{1}{2}$ $\overset{\prime\prime}{m}$; ſed, ut recte obſervat NOLLETUS (*o*), demi debet $\frac{1}{4}$ $\overset{\prime\prime}{m}$, quia momentum

(*n*) *Proefondervindelyke Natuurkunde*, 1. *Deel*, *p.* 384.

(*o*) *Natuurkundige Leſſen*, 2. *Deel*, 1. *ſt.* *pag.* 247 in not.

tum lapſus cenſebatur id, quo ſonus globi in ſolum impacti audiebatur. Verum, ex obſervationibus HALLEJI & FLAMSTEEDII, quas ſecutus fuit NEWTONUS (p), ſonus tempore unius $\overset{\prime\prime}{m}$ progreditur 1142 ped., hoc eſt accurate ſatis 272 ped. tempore $\frac{1}{4}\overset{\prime\prime}{m}$; unde tempus deſcenſus proprie erat $4\frac{1}{4}\overset{\prime\prime}{m}$. NEWTONUS (q), qui quoque memorat Experimentum iſtud DESAGULIERII, refert, fuiſſe tempus lapſus $4\frac{1}{4}\overset{\prime\prime}{m}$.

§. LVII. Gravitas ſpecifica Aëris eſt ad gravitatem ſpecificam plumbi, ut 1 ad 8820, ſumendo mediam Aëris Denſitatem: erit ergo Exponens Reſiſtentiæ $E = 8820 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{3} = 1960$ ped. Angl.

§. LVIII. Ut inveniatur tempus deſcenſus adhibenda eſt Formula §. XLI., globus enim è quiete decidebat, & erit

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times \text{Hyperb. Logar.} \left(\sqrt{A} + \sqrt{A-1}\right)$$

Eſt $x = 272$, & $E = 1960$, unde $\frac{x}{E} = 0.13929$; hinc (§. XXXVII.)

$$\text{Hyp. Log.}\ \frac{x}{E} = A = 1.14947 \qquad 2E = 3920$$
$$g = 32\tfrac{1}{5}$$

$$\sqrt{A} = 1.0722 \qquad \frac{2E}{g} = 121.74$$
$$\sqrt{A-1} = 0.3868$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{A-1} = 1.459 \qquad \sqrt{\frac{2E}{g}} = 11.034$$

$$\text{Hyp. Log.} \left(\sqrt{A} + \sqrt{A-1}\right) = 0.3777491$$

$$t = \sqrt{\frac{2E}{g}} \times \text{Hyp. Log.} \left(\sqrt{A} + \sqrt{A-1}\right) = \overset{\prime\prime}{4}.168$$

erant ex Experim. $= 4.25$

unde differentia eſt $= 0.082$ ſive circiter $\frac{1}{2}\overset{\prime\prime\prime}{m}$.

In

(p) Princip. Philoſ. Natur. tom. II. p. 394.; MUSSCHENBROEK Introd. ad Philoſ. Natur. tom. II. pag. 920. (q) Ibid. tom. II. pag. 334.

In Vacuo percurrisset idem globus, tempore $4''.168$ seu $4'', 10\frac{3}{5}'''$, pedes Angl. $279\frac{7}{10}$, adeoque hic differentia tantum est $7\frac{7}{10}$ ped. Et spatium 272 ped. in vacuo percurritur tempore $4'', 6\frac{3}{5}'''$; adeoque differentia hic est perexigua, scilicet fere $3\frac{1}{2}'''$.

§. LIX. Ab eodem culmine Ecclesiæ B. Pauli Londini ab eodem Desagulierio (r) demittebantur quoque 5 Vesicæ Suillæ, arefactæ, in formam sphæricam cavam efformatæ. Verbi gratia, erat diameter Vesicæ tertiæ 5.3 poll., pondus $137\frac{1}{2}$ gran., gravitas specifica ad gravitatem specificam aëris, ut $160\frac{1}{2}$ ad 23; unde erit $E = \frac{160.5}{23} \times \frac{4}{3} \times 5.3 = 49\frac{1}{4}$ poll. $= 4\frac{1}{10}$ ped. Erat Tempus lapsus $18\frac{1}{2}$ m'', dum in vacuo impendisset tantum $4'', 6\frac{3}{5}'''$, adeoque differentia hic est $= 14'', 23\frac{2}{5}'''$, multo major quam in globo plumbeo §. præced., ubi tempora lapsus in vacuo & in Aëre vix à se invicem discrepabant. Ratio hujus differentiæ hæc est.

§. LX. Ostendimus §. XIX, Resistentiam aëris esse in ratione composita ex duplicata Velocitatum, simplici Densitatis aëris, & duplicata diametrorum: quoniam vero in his experimentis Densitas aëris erat eadem, & æque plumbum ac vesica è quiete decidebant, adeoque in ipso motus initio Velocitates erant eædem, sequitur, Resistentiam aëris hic secutam fuisse proportionem Quadratorum Diametrorum, vel, quod eodem redit, rationem simplicem superficierum; sunt enim superficies sphærarum, ut quadrata diametrorum. Erat ergo Resistentia in globum plumbeum ad Resistentiam in Vesicam quam proxime ut 4 ad 28, vel ut 1 ad 7, adeoque Resistentia in Vesicam septies major erat quam in globum plumbeum initio motus. Non mirum ergo plumbum minore longe tempore cecidisse ab eadem altitudine.

§. LXI.

(r) Newton. *ibid.*

§. LXI. Manifeſta hinc eſt ratio, quare corpus in partes diviſum non adeo celeriter deſcendat, quam ſi integrum cadat; ſuperficies enim maſſæ, dividendo & ſubdividendo in partes minores, major fit: & hinc Reſiſtentia, ſequens proportionem ſuperficierum, magis magisque creſcet. Verbi gratia, vas aqua plenum plus efficaciæ ſortiretur, ſi ex alto effuſa particulas ſervaret junctas & inter ſe cohærentes, quam ſi in guttas divideretur. Aër non tantum reſiſtit aquæ labenti, ſed &, quia particulæ fluidorum parum cohæreſcunt, cadendo maſſa aquæ facile ab aëre in particulas ſcinditur, & Reſiſtentia ejus ſic augetur. Sine hac reſiſtentia aqua è vaſe effuſa eundem ſortiretur effectum, ac ſi fruſtum glaciëi ejusdem ponderis & molis delaberetur. Pes cubicus aquæ pondus æquat fere 65 libr.; decidens motu accelerato impingeret in ſolum non aliter ac fruſtum plumbi ejusdem ponderis. Dudum hæc demonſtrarunt Phyſici in tubo vitreo aëre vacuo, partim aqua repleto; aqua decidens à ſuperiori parte non aliter fundum quatit, ac ſi lapis ejusdem gravitatis in id impingeret.

§. LXII. Vel inde ſapientiſſimi Conditoris Providentia clare elucet, dum aëris vis reſiſtens multum utilitatis adfert, imo & ſummopere eſt neceſſaria, dum alias pluviæ & grandines, accelerato motu ab altitudine ſat inſigni cadentes, niſi retardarentur, ingentes in ſuperficie telluris ederent vaſtationes, lædendo ſegetes & arbores, pecora, homines & aves volitantes internecioni dando, ſubruendo ædium tecta, &c. Rudiore calculo effectum grandinis in vacuo cadentis eruamus. Secundum Musschenbroekium (s) inferior limes regionis Atmoſphæræ, ubi grando formatur, eſt altitudinis 9600 ped. Rhenoland., quod plus eſt quam 10000 ped. Angl., quo numero facilitatis gratia hic utemur. Corpus delabens in vacuo primo m'' percurrit ad minimum 16 ped. Angl., ſunt vero tempora in ratione ſubduplicata ſpatiorum percurſorum, unde erit $\sqrt{16} : 1'' = \sqrt{10000} : 25''$, id eſt, erit Tempus lapſus uniuscujusque globuli grandinis $25''$. Verum corpus in fine lapſus habet vim percurrendi uniformiter eodem tempore duplum ſpatium,

(s) Introd. ad Philoſ. Natur. tom. II. p, 1018.

tium, id eſt, 20000 ped., quod (§. XXVIII.) convenit 800 ped. uno m̋. Vidimus autem in exemplo, §. XLIV. allato, globum è tormento bellico exploſum fuiſſe vi, qua $872\frac{1}{8}$ ped. uno m̋ perficere potuiſſet. Hinc decidentes grandinis globuli cenſeri poſſunt habituri eandem efficaciam, ac ſi globuli plumbei ejusdem gravitatis è fiſtula ferrea ſeu ſclopeto ope pulveris pyrii exploſi fuiſſent. Quibus accedit, quod grandinis globuli ſæpiſſime, ut notum, ſat inſignem habeant magnitudinem, & nucleum duriſſimum conſiſtentiæ glacialis. Si jam ingens ſit grandinis tempeſtas, & accedat inſuper flantis venti impetus, apparet, quam immenſa ederetur ſtrages.

CAPUT TERTIUM.

De Motu Globorum Projectorum Curvilineo in Aëre.

§. LXIII.

Omnis motus Curvilineus ad minimum ex duplici vi oritur, vel ſaltem ad duplicem vim referri poſſunt omnes vires corpus ſollicitantes: alteram, quæ agit ſecundum Tangentem ad Curvam, vocamus cum EULERO (*t*) *vim Tangentialem*; alteram vero, quæ agit directione ad Curvam perpendiculari, vocamus *Normalem*. Verbi gratia, moveatur corpus in Curva BMK (*Fig.* 4.), erit vis Tangentialis in puncto M, quæ agit directione lineæ MI tangentis Curvam in M, & vis Normalis erit, quæ agit directione MO perpendiculari ad Curvam ſeu Tangentem in M.

§. LXIV. Antequam ad motum curvilineum in Aëre tranſeamus, hic itidem, ut in Cap. præced., motum Projectorum in Vacuo quantum-

(*t*) Mechanica tom. I. cap 3. init.

tumpote breviter explorabimus; quo facto, facilius erit, Motum in Aëre ad calculum revocare.

§. LXV. Auctores, qui de Theoria Projectorum in Vacuo agunt, vulgo ponere solent, vim Gravitatis in superficie Telluris agere directionibus inter se parallelis seu perpendicularibus ad planum Horizontis, & corpus ferri in Curva, quam Geometræ vocant *Parabolam Apollonianam*. Verum hæc hypothesis, si stricte sumatur, non est accurata, dum omnes directionis lineæ, vel in centro, vel prope centrum Telluris conveniunt, adeoque parallelæ non sunt. Vera corporis Projectoria in Vacuo est *Ellipsis*, vel Ellipseos pars, cujus alter focus est centrum Telluris. Quia autem centrum Telluris maximo ab ejus superficie distet intervallo, ratione habita Amplitudinum jactuum, ad quas corpora projiciuntur, sine sensibili errore Gravitatis directio sibi mutuo parallela statui potest, & curva descripta proinde *Parabola*. Ellipsis enim, quo fiat oblongior, eo magis accedit ad Parabolam & duæ hæ Curvæ in eo tantum differunt, quod in hac focus unus ab altero infinitam, in illa finitam habeat distantiam, adeo ut Ellipsis degeneret in Parabolam, si focorum distantia ex finita fiat infinita. Eodem modo Astronomi in computationibus suis Trajectorias Cometarum considerant tanquam Parabolicas, dum revera sint Curvæ Ellipticæ, admodum excentricæ & oblongæ, in se tamen redeuntes. Si igitur statuamus directiones Gravitatis sibi mutuo parallelas, motum curvilineum in Vacuo sic computo.

§. LXVI. Sit (*Fig.* 3.) planum Horizontis AE, & Gravitatis actio secundum lineas verticales sibi mutuo parallelas QP, HG, &c.; linea Directionis AQ comprehendens cum Horizonte angulum Elevationis EAQ. Sit vis, qua corpus projicitur, tanta, ut uniformiter progrediendo uno $\overset{\prime\prime}{m}$ describeret spatium $AQ = c$: sit spatium eodem tempore percursum, dum libere caderet $= QM = g$; erit (§. XXVII.) Celeritas, qua corpus projicitur, debita altitudini $\frac{c^2}{4g}$, sit hæc $= P$. Porro sit Tangens anguli Elevationis $= t$, posito radio $= r$: sit $AP = x$, $PM = y$, erit $r : x = t : PQ = \frac{tx}{r}$, & $AQ = \sqrt{AP^2 + PQ^2} = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 + t^2}$. Si nulla daretur Gravitas, corpus sola vi impressa motu uniformi progrederetur in linea AQ; verum Gravitatis vi corpus perpetuo à linea Directionis retrahitur, dum alias descripsisset AQ uno $\overset{\prime\prime}{m}$, interea cecidit per QM & descripsit curvam AM itidem uno $\overset{\prime\prime}{m}$. Erit ergo, quia spatia motu uniformi percursa sunt uti tempora, $c : \overset{\prime\prime}{1} = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 + t^2} : \frac{x}{rc}\sqrt{r^2 + t^2} =$ tempori unius $\overset{\prime\prime}{m}$, quo describitur AQ vel AM: & quia spatia percursa sunt ut quadrata Temporum, si motus sit acceleratus, erit

$$1^2 : g = \frac{x^2}{r^2 c^2} \times \overline{r^2 + t^2} : \frac{g x^2}{r^2 c^2} \times \overline{r^2 + t^2};$$

$$\text{itaque } QM = \frac{g x^2}{r^2 c^2} \times \overline{r^2 + t^2} = \frac{x^2}{4Pr^2} \times \overline{r^2 + t^2}.$$

Est vero $PM = PQ - QM$, sive $y = \frac{tx}{r} - \frac{x^2}{4Pr^2} \times \overline{r^2 + t^2}$.

§. LXVII. Si jam quæratur amplitudo jactus horizontalis, fiet $AE = x$ & hinc evanescet PM, id est, fiet $y = 0$, adeoque & ejus valor §. præced. inventus $= 0$: unde transponendo habemus

$$\frac{tx}{r} = \frac{x^2}{4Pr^2} \times \overline{r^2 + t^2}$$

$$t = \frac{x}{4Pr} \times \overline{r^2 + t^2}$$

$$x = 4Pr \times \frac{t}{r^2 + t^2}$$

Quoniam (posita Secante anguli Elevationis $= S$) sit $S^2 = r^2 + t^2$ erit

erit $x = 4P \times \frac{rt}{S^2}$. Sit ſinus $= s$, Coſinus $= c$, ſinus dupli anguli Elevationis $= n$, erit ex Trigonometricis (u).

$$r : c = S : r = 2s : n$$

$$\text{eſt vero } S : t = r : s$$

$$\text{unde } S^2 : tr = 2r : n$$

Hinc $\frac{tr}{S^2} = \frac{n}{2r}$, & $x = 2P \times \frac{n}{r}$, id eſt, erit Radius ad Sinum dupli Anguli Elevationis, ut dupla globi Velocitas ad Amplitudinem jactus horizontalem.

§. LXVIII. Si quæratur Angulus, quo amplitudo jactus eſt maxima, debet x eſſe Maximum, adeoque (ex natura *Maximorum* & *Minimorum*) ejus Fluxio ſeu $\dot{x} = 0$, unde

$$\dot{x} = 0 = 4Pr \times \frac{r\dot{t} + t^2\dot{t} - 2t^2\dot{t}}{\overline{r^2 + t^2}^2}$$

hinc $r^2\dot{t} + t^2\dot{t} = 2t^2\dot{t}$; ideoque $r^2 = t^2$, ſive $r = t$. Erit ergo jactus omnium maximus, ſi tangens anguli Elevationis ſit æqualis Radio, id eſt, angulus 45° ſeu ſemirectus. Facto $r = t$ in æquatione §. præced., fiet $x = 4Pr \times \frac{t}{t^2 + r^2} = 2P$, id eſt, erit amplitudo jactus, ſi angulus ſit 45°, æqualis duplæ altitudini, Celeritati initiali debitæ.

§. LXIX. Altitudo jactus GH ſic invenitur. Quoniam y debet eſſe Maximum, erit ejus Fluxio $= 0$, unde, quia t conſtans eſt, erit $\dot{y}$

(u) Keill Elem. Trigon. Oper. p. 519.

$$\dot{y} = 0 = \frac{t\dot{x}}{r} - \frac{2tx\dot{x}}{4Pr^2} \times \overline{r^2 + t^2}$$

$$t = \frac{2x}{4Pr} \times \overline{r^2 + t^2}$$

$$\text{unde } x = 2P \times \frac{tr}{r^2 + t^2} = \tfrac{1}{2}\ AE = AG.$$

Substituto valore quantitatis x in æquatione generali §. LXVI., erit $y = P \times \frac{t^2}{r^2 + t^2} = P \times \frac{t^2}{S^2}$, seu $\left(\text{ob } \frac{t}{S} = \frac{s}{r}\right) = P \times \frac{s^2}{r^2}$.

§. LXX. Posito angulo semirecto sive 45°, erit $r = t$, adeoque $y = \frac{1}{2} P = \frac{1}{4} x$, id est, erit altitudo jactus, ubi angulus est semirectus, una quarta pars totius amplitudinis horizontalis, sive æqualis dimidiæ altitudini, Celeritati Initiali debitæ.

§. LXXI. Et hæc præcipua sunt, quæ de motu curvilineo in Vacuo dicenda erant, quæque in sequentibus usui venient. Copiosius hanc Theoriam tractarunt KEILLIUS (v) & Rev. DE LA CAILLE (w) sine ope Algebræ: SIMPSONUS (x) sine ope Sectionum Conicarum; EULERUS (y) vero ope calculi Differentialis. Primus fuit GALILEUS (z), qui demonstravit corpora vel horizontaliter vel oblique projecta, remotis impedimentis externis, & solæ Gravitatis Legi parentibus, describere Parabolam, methodumque docuit, qua computari possent jactus globorum tormentariorum ad quaslibet elevationes. Discipulus ejus TORRICELLIUS dein ostendit, quomodo punctum vel infra horizontalem lineam depressum, vel supra ipsum elevatum feriri possit. Ad praxin tamen deducta non fuit hæc Theoria, nisi post inventum bombarum & mortariorum usum; tunc temporis demum auctores Galilæi doctrinam felicissime ad praxin deduci posse

(v) Introd. ad veram Physicam lect. 16.
(w) Lect. Elem. Mechanicæ part. 3. art. 2.
(x) *Select Exercises for young proficients in the Mathematicks* p. 179.
(y) Mechanic. tom. 1. cap. 3. p. 236. (z) Dialogi de Motu.

poſſe opinati ſunt. BLONDELLUS (*a*) itaque juſſu Academiæ Regiæ Pariſienſis anno 1683. Theoriam ſcripſit, qua, methodo Galileana uſus, exhibuit angulos elevationum, ad quos tormenta & mortaria ſunt erigenda, ut propoſitus feriatur ſcopus. Non defuere tamen, qui Reſiſtentiam aëris haud contemnendam putarunt, ſaltem BLONDELLUS (*b*) huic objectioni ſatisfacere conatus fuit, præcipuo hoc nixus argumento, globos, quorum pondera ſæpiſſime ſepties millies graviora ſunt aëre, quorum ſuperficies non adeo magna, quique maxima vi projiciuntur, inſenſibilem in aëre offendere Reſiſtentiam, & curvam deſcriptam ad ſenſum ſimillimam apparere Parabolæ. Ante ipſum tamen jam ANDERSONUS, referente ROBINSIO (*c*), motum Projectorum Parabolicum parum reſpondere animadvertit inſtitutis à ſe quamplurimis Experimentis; aliam igitur excogitavit hypotheſin, globum ſcilicet è tormento exploſum ſecundum directionem ſibi impreſſam ad certam aliquam diſtantiam moveri in linea recta, qua demum abſoluta, curvam Parabolicam deſcribere inciperet. Verum hanc opinionem, quippe Legibus Naturæ contrariam, Dynamici poſt eum non receperunt. Primus fuit NEWTONUS (*d*), ut ante jam obſervavimus, qui Fluidorum Reſiſtentiam ad certas reduxit Regulas, docuitque veram Trajectoriam motorum corporum magis accedere ad Hyperbolam, Aſymptoto verticali inſtructam, quam ad Parabolam. Ipſe NEWTONUS tamen naturam Curvæ non tradidit, quod poſt eum fecere JOANNES BERNOULLIUS (*e*), LE SEUR & JACQUIER (*f*), HERMANNUS (*g*), EULERUS (*h*), aliique. Neglecta tamen ipſorum Theoria à pleriſque penitus fuit, qui ex profeſſo de arte Militari & Pyrotechnica ſcripſerunt, methodo Galileana inhærentes; nec mirum, cum (ut verbis utar præſtantiſſimorum Mathematicorum LE SEUR & JACQUIER (*i*)) vera Trajectoria adeo perplexa ſit, ut ex illa vix quicquam ad uſus philoſophicos aut Mechanicos accommoda-

(*a*) *l'Art de jetter les bombes.* (*b*) *Ibid. part. 4. lib. 1. p.* 371 & 405.
(*c*) *New Principles of Gunnery Præf.* (*d*) Princ. Philoſ. Nat. tom. II. p. 93. ſeqq.
(*e*) Oper. tom I. p. 537. & Acta Erud. Lipſienſ. A°. 1713. p. 115.
(*f*) Comment. ad NEWTON. tom. II. p. 118. (*g*) Phoronomia p. 277. ſeqq.
(*h*) Mechanica tom. I. cap. 6. (*i*) Ibid. pag. 118.

datum poſſit deduci. Dudum tamen theoriam Blondellianam praxi non ſatisfacere perſpexerunt, qui in arte Balliſtica præ aliis excelluerunt, DE RESSONS (*k*), BELIDOR, (*l*), &c. Primus fuit peritiſſimus ROBINS, qui edito hac de re tractatu anno 1742, repetitis ſæpius experimentis, pleniſſime comprobavit, veram corporum Projectoriam in medio reſiſtente quam longiſſime à Parabola aberrare. Verbi gratia, (*m*) inſtituto calculo invenit, globum, cujus diameter eſt $\frac{3}{4}$ poll., exploſum è ſclopeto Velocitate, qua 1700 ped. Angl. uno m'' percurrere poſſet, ex hypotheſi Parabolæ pertingere debere ad diſtantiam 17 milliarium Angl., cum ſecundum Experimenta ne ad dimidiam quidem milliaris partem accedat jactus.

§. LXXII. Accedimus ad ipſum calculum, ſeu inveſtigationem Curvæ, quam globi vel bombæ è tormentis vel mortariis exploſæ deſcribunt. Legem Reſiſtentiæ hic itidem, ut in Cap. præc., ponemus Celeritatis Quadratum; lineas itidem Directionis, ſecundum quas Gravitas agit, ubique inter ſe parallelas, quia ortus exinde error plane in praxi eſt (§. LXV.) inſenſibilis.

§. LXXIII. Sit itaque (*Fig.* 4.) BMK curva, quam corpus in aëre vel deſcenſu vel adſcenſu deſcribit, & axis ejus BN; ordinata in puncto quocunque $PM = y$, ejus Fluxio $Qm = \dot{y}$; abſciſſa $BP = x$, ejus Fluxio Pp ſeu $MQ = \dot{x}$; arcus $BM = z$, ejusque Fluxio $Mm = \dot{z}$. Sit porro Curvæ BMK Evoluta LFO, ita ut Radius oſculi ſeu Curvaturæ v. g. in puncto B ſit BF, in puncto M ſit MO, &c. Sint coradius MG, & ſubradius OG, facientes angulum rectum MGO. Sit præterea ACc Curva Celeritatum, cujus ſingulæ ordinatæ BA, PC, *pc* exprimant Celeritates in punctis Curvæ B, M, *m*. Tandem ſit NSTt Parabola axe continuato BN deſcripta, cujus quælibet ordinatæ RS, VT, *vt* exprimant Ce-

(*k*) *Hiſtoire de l'Academie Royale des Sciences A°.* 1716. *in Mech.*
(*l*) *Le Bombardier François p.* 19. (*m*) *New Principles of Gunnery cap.* 2. *pr.* 6.

Celeritates debitas altitudinibus NR, NV, Nv in Vacuo. Exprimatur Gravitas abſoluta (agens directionibus ſibi mutuo parallelis BN, MG, &c.) quia conſtans eſt (§. XXV.), per numerum 1; ſitque coradius $= s$, ejusque Fluxio $\dot{s}$.

§. LXXIV. Vis agens in corpus motum in quocunque Curvæ puncto M reſolvitur in vim Tangentialem & Normalem (§. LXIII.): vis autem, quam Reſiſtentia aëris in corpus projectum exerit, oppoſita ſemper eſt directioni (§. III.), qua corpus movetur; directio vero corporis in quolibet puncto M eſt ſecundum Tangentem MI, gravitate enim ceſſante corpus hanc Tangentem ſequeretur. Itaque vis Reſiſtentiæ tantummodo agit in vim corporis Tangentialem, adeoque ejus directionem nihil immutat, ſed Celeritatem tantum retardat. Ex hac retardatione evenit, ut Vis Normalis MO majorem acquirat efficaciam in corpore à directione retrahendo, & ſemitam ejus magis inflectendo.

§. LXXV. Vis Gravitatis agens ſecundum MG reſolvitur in duas partes, in vim ſecundum MH ſeu GI, & in vim ſecundum HG ſeu MI. Erit ergo vis Gravitatis ſecundum MH ad vim Gravitatis abſolutam ſecundum MG, ſive 1, ut MH ad MG, vel (ob Triangula ſimilia MGH, MGO) ut MG ad MO; unde erit vis Gravitatis ſecundum MH ſeu GI $= \frac{MG}{MO} = \frac{s}{MO}$. Porro notum eſt ex Geometria Sublimiore Radium oſculi MO eſſe Radium Circuli, curvam in M (ut vocant) oſculantis. Verum ex natura virium Centralium Velocitates in Circulo ſunt in ratione ſubduplicata Compoſita Radiorum & virium centralium; erit ergo Celeritas in M $=$ CP $=$ $\sqrt{MO \times \frac{s}{MO}} = \sqrt{s} = \sqrt{GM} =$ radici quadratæ Coradii. Quia autem Radius Oſculi in B eſt BF, coincidens cum Coradio, erit Celeritas in B $=$ AB $= \sqrt{BF}$, & ſic Celeritas in quocunque Curvæ puncto ſe habet in ratione ſubduplicata Coradii.

§. LXXVI.

§. LXXVI. Quoniam Vis Gravitatis Normalis ſecundum MH Velocitatem Corporis nec auget nec minuit, ſed directionem ejus tantummodo immutat, incrementum vel decrementum Velocitatis corporis in directione Gravitatis ſecundum Tangentem MI quærendum eſt. Eſt vero vis Gravitatis ſecundum MI ſeu HG ad gravitatem abſolutam ſeu 1, ut HG ad MG, id eſt, (ob triangula ſimilia MGI, MQm) ut $\dot{x}$ ad $\dot{z}$; erit ergo Incrementum Velocitatis, deſcendente corpore, $= \frac{\dot{x}}{\dot{z}}$. Ponatur porro Vis Reſiſtentiæ $= R$, quæ cum tantummodo agat in Vim (§. III.) Tangentialem, cui directe opponitur, erit totum Celeritatis Incrementum, dum corpus Spatiolum Mm percurrit $= \frac{\dot{x}}{\dot{z}} - R$.

§. LXXVII. Si corpus in Vacuo caderet per lineam NV velocitate accelerata, foret $\sqrt{NV} : \sqrt{NR} = VT : SR = PC : AB = \sqrt{s} : \sqrt{BF}$, unde erit $NV : NR = s : BF$. Sunt vero (n) Velocitates in Circulo, ubi Vis Centrifuga æquatur Gravitati, debitæ altitudini ſemi-radii Circuli, ergo & hic erit $NR = \frac{1}{2} BF$, & $NV = \frac{1}{2} s$, ejusque Fluxio ſeu $Vv = \frac{1}{2} \dot{s}$. Verum corpus, dum in vacuo percurrit ſpatiolum Vv, acquirit Incrementum Velocitatis ut, quod æquale eſt incremento Velocitatis cD, dum in aëre percurrit ſpatiolum Mm; ſunt vero ſpatiola Vv, Mm ut tempuſcula, quibus percurruntur, & tempuſcula inverſe ut vires incrementa æqualia Velocitatum ut & cD creantes; unde erunt hæ vires inverſe ut ſpatiola percurſa. Erit ergo vis incrementum ut producens ſive vis abſoluta Gravitatis ad vim incrementum cD producens, id eſt, erit

$$1 : \frac{\dot{x}}{\dot{z}} - R = Mm : Vv = \dot{z} : \tfrac{1}{2}\dot{s}$$

$$\text{unde } \tfrac{1}{2}\dot{s} = \dot{x} - R\dot{z}, \ \& \ R = \frac{2\dot{x} - \dot{s}}{2\dot{z}}$$

§. LXXVIII.

(n) Keill ad Hugenii Theor. de Vi centrifuga & motu circulari Th. 5.

§. LXXVIII. Quoniam eſt $s : MO = \dot{y} : \dot{z}$, erit $s = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \times MO$. Eſt vero Radius Oſculi (*o*) MO, poſito $\dot{y}$ conſtante, ſemper $= \frac{\dot{z}^3}{\dot{y}\ddot{x}}$, unde

$$s = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \times \frac{\dot{z}^3}{\dot{y}\ddot{x}} = \frac{\dot{z}^2}{\ddot{x}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{x}} = \text{Coradio Evolutæ}$$

$$\text{hinc } \dot{s} = \frac{2\dot{x}\,\ddot{x}^2 - \overline{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \times \dddot{x}}{\ddot{x}^2}$$

Subſtituatur valor $\dot{s}$ in æquatione §. præc., invenietur $R = \frac{\dot{z}^2\,\dddot{x}}{2\dot{z}\,\ddot{x}^2} = \frac{\dot{z}\,\dddot{x}}{2\,\ddot{x}^2}$, quæ eſt æquatio, quam tertius Fluxionis gradus ingreditur, adeoque ſatis intricata. Attamen datur Methodus, qua æquatio hæc exprimi poteſt per primum Fluxionis gradum, ſed ſpecie tantum, quæ methodus videre eſt apud EULERUM (*p*), LE SEUR & JACQUIER (*q*) &c., dum eam hic tradere nihil attinet.

§. LXXIX. Quia Gravitas in adſcenſu corporis cum Reſiſtentia coöperatur in retardando ejus motu, erit Decrementum Velocitatis, dum corpus adſcendit per mM $= \frac{\dot{x}}{\dot{z}} + R$; manifeſtum ergo eſt, ſive corpus adſcendat ſive deſcendat, differentiam tantummodo in eo dari, quod R in deſcenſu ſit negativa, in adſcenſu poſitiva. Vel inde patet, Curvam non poſſe eſſe Parabolam; Parabola enim ab utraque axis

(*o*) WOLFII Elem. Matheſeos, tom. I. p. 508.
(*p*) Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes pag. 9.
(*q*) In Comment. ad NEWTON. t. II. p. 116.

axis parte ſimilis eſt & æqualis; verum hoc latius oſtenſuri ſumus in ſequentibus.

§. LXXX. Si Denſitas Aëris, in quo movetur corpus, non eadem ſit in diverſis Curvæ punctis, vel, ſi corpus tam alte adſcendat, ut ſat inſignis detur differentia inter Denſitatem aëris in ſuperiori & inferiori Curvæ parte, Denſitas Aëris ſic invenitur. Oſtendimus §. XIX, Reſiſtentiam hoc in caſu fore in ratione compoſita ex ſimplici Denſitatum & Quadrato Velocitatum, unde erit $R = \frac{\dot{z}\,\dddot{x}}{2\,\ddot{x}^2} = sD$ (deſignante D Denſitate); eſt enim (§. LXXV.) Celeritas in M $= \sqrt{s}$. Subſtituto valore quantitatis s, erit $R = \frac{\dot{z}^2}{\ddot{x}} \times D$, unde $D = \frac{\dddot{x}}{2\dot{z}\ddot{x}}$.

§. LXXXI. Antequam ad Conſtructionem Curvæ tranſeamus, & ad Exempla Practica applicemus, non abs re fuerit, methodo inverſa determinare Reſiſtentiam, quæ fieret, ſi corpus in data curva moveretur. Conſiderabimus vero tres Curvas, *Parabolam*, *Circuli Quadrantem*, & præcipue *Hyperbolam*, cujus una *Aſymptotus* verticalis, quippe quæ multo accedit propius ad veram Projectoriam, quam Parabola; quamque Newtonus in praxi ſubſtituere voluit.

§. LXXXII. Sit BMK (*Fig.* 4.) *Parabola Apolloniana*, verticem in B habens, erit ex natura ejus $ax = y^2$, unde, quia $\dot{y}$ conſtans eſt (§. LXXVIII.), erit $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, & $a\ddot{x} = 2\dot{y}\dot{y}$, & $a\dddot{x} = 0$, unde & R erit $= 0$, & $D = 0$, id eſt, Reſiſtentia & Denſitas Medii erunt nullæ. Parabolam ergo in vacuo tantummodo deſcribi poſſe, liquet.

§. LXXXIII. Sit Curva *Quadrans Circuli* BMK (*Fig.* 5.), & Radius MO $= a$, coincidens cum Radio Oſculi: ſit BP $= x$, erit MG $= s =$ OP $= a - x$, unde $\dot{s} = -\dot{x}$, &

R

$$R = \frac{2\dot{x} - \dot{s}}{2\dot{z}} = \frac{3\dot{x}}{2\dot{z}} = \frac{3Pp}{2Mm} = \frac{3PM}{2BO},$$

unde erit Vis Refiftentiæ ad Vim Gravitatis, ut 3PM ad 2BO, vel ut $\frac{3}{2}$ finus anguli BOM ad Radium. Eft igitur ex hac hypothefi vis Gravitatis conftans, quia BO in quacunque curvæ parte conftans eft; verum Refiftentia erit admodum variabilis, quippe quæ dependeat à magnitudine lineæ PM. Cadente puncto M in B, evanefcet PM, unde Refiftentia in B erit nulla, & corpus ibi in Vacuo verfabitur; & MG, exprimens Celeritatis quadratum, fiet = OB, adeoque Celeritas in B erit maxima. Cadente pnncto M in K, fiet PM = OB = OK, & evanefcet GM, unde fiet Celeritas nulla, id eft, corpus in K quiefcet. Ulterius de hac hypothefi confulendus EULERUS (r), & ROBINS (s). Ex hifce ergo manifeftum, ob Refiftentiam nimis variabilem corpus in aëre non moveri in Quadrante Circuli.

§. LXXXIV. Sit Curva *Hyperbola* NAM (*Fig.* 6.), cujus una Afymptotus CT verticalis faciat cum altera Afymptoto CR angulum quemcunque C: eft ergo C centrum Hyperbolæ. Confideremus CT tanquam axem, erit CP $= x$, ejus Fluxio Pp $= rm = \dot{x}$, PM $= y$, rM $= -\dot{y}$, AM $= z$, Mm $= \dot{z}$, AB $= a$, tangens anguli C $= t$, pofito radio $= 1$, & linea MT tangat Hyperbolam in M, ducaturque MQ parallela RC, & MX parallela CT. Hinc fient

$$1 : x = t : PR = tx, \text{ unde } MR = tx - y$$

$$-\dot{y} : y = \dot{z} : MT, \text{ unde } \dot{z} = -\frac{\dot{y}}{y} \times MT$$

$$tx : tx - y = x : QC = \frac{tx - y}{t} = MX.$$

Eft autem ex natura Hyperbolæ AB² = PM × MR, five

a^2

(r) Mechanica Tom. I. p. 293.

(s) *Remarks on* EULERS *Treatife of Motion.* §. 71 *feqq.*

$a^2 = txy - y^2$, hinc $x = \frac{a^2 + y^2}{ty}$, &, posito $\dot{y}$ constante (§. LXXVIII.), capiantur Fluxiones primæ, secundæ & tertiæ, eritque

$$\dot{x} = \frac{2ty^2\dot{y} - a^2t\dot{y} - ty^2\dot{y}}{t^2\,y^4} = \frac{y^2 - a^2}{ty^2} \times \dot{y}$$

$$\ddot{x} = \frac{2tyy^3 - 2ty^3y + 2ta^2y\dot{y}}{t^2y^4} \times \dot{y} = \frac{2a^2}{ty^3} \times \dot{y}^2$$

$$\dddot{x} = \frac{-6a^2ty^2\dot{y}}{t^2\,y^6} \times \dot{y}^2 = \frac{-6a^2}{ty^4} \times \dot{y}^3$$

$$R = \frac{\dot{z}\,\dddot{x}}{2\,\ddot{x}^2} = -\frac{\dot{y}}{y} \times \mathrm{MT} \times \frac{-6a^2}{ty^4} \times \dot{y}^3 \times \frac{t^2\,y^6}{8a^4\,\dot{y}^4}$$

$$R = \frac{3\,\mathrm{MT} \times ty}{4a^2} = \frac{3\,\mathrm{MT} \times t}{4tx - 4y} = \frac{3\,\mathrm{MT}}{4\,\mathrm{QC}} = \frac{3\,\mathrm{MT}}{4\,\mathrm{MX}}.$$

Erit ergo Resistentia ad Gravitatem, ut 3 MT ad 4 QC seu 4 MX: similiter in puncto A erit $R = \frac{3\,\mathrm{AB}}{4\,\mathrm{AH}}$, in puncto N erit $R = \frac{3\,\mathrm{NF}}{4\,\mathrm{NI}}$, &c. Descendente corpore in infinitum, ex natura Hyperbolæ punctum M magis magisque ad Asymptoton suam accedet, donec eam in infinitum tangat, unde evanescet tandem PM, & fient æque MT ac MX infinite magnæ; unde fiet R infinite parva.

§. LXXXV. Quoniam in M Celeritatis Quadratum est

$$s = \frac{\dot{z}^2}{\ddot{x}} = \frac{ty}{2a^2} \times \mathrm{MT}^2 = \frac{t}{tx - y} \times \tfrac{1}{2}\,\mathrm{MT}^2 = \frac{\mathrm{MT}^2}{2\mathrm{MX}}$$

erit ipsa Celeritas $\sqrt{s} = \sqrt{\frac{\mathrm{MT}^2}{2\mathrm{MX}}}$. Si ponatur Parabola, cujus abscissa sit 2 MX, & ordinata MT, erit (quia Parameter tertia est proportionalis ad abscissam & ordinatam) Celeritas in puncto M in ra-

ratione ſubduplicata Parametri iſtius Parabolæ, verticem in M habentis. Eodem modo in puncto A Celeritas ſe habebit in ratione ſubduplicata Parametri Parabolæ, ſive $\sqrt{\frac{AB^2}{2AH}}$. Deſcendente puncto M in infinitum, fient MT, MX infinite magnæ, unde Celeritatis quadratum evadet $= \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$, id eſt, Celeritas in infinitum creſcet.

§. LXXXVI. Denſitas Medii eſt $D = \frac{R}{s} = \frac{3MT}{4MX} \times \frac{2MX}{MT^2} = \frac{3}{2MT}$, id eſt, erit Denſitas in M in ratione inverſa Tangentis MT; evaneſcente ergo PM, fiet MT infinite magna, adeoque D infinite parva, id eſt, corpus in infinitum deſcendens tandem in medio movebitur rariſſimo, quod proxime accedit ad ſpatium vacuum; non mirum ergo, Reſiſtentiam fieri infinite parvam (§. LXXXIV.), dum Celeritas in infinitum adaugetur (§. LXXXV.). Accedente puncto M ad Hyperbolæ verticem, erit tangens AB omnium minima, unde conſequitur, corpus in A verſaturum eſſe in medio denſiore, quam in punctis inferioribus. Similiter in adſcenſu, verbi gratia, in puncto N, ob creſcentem Tangentem NF, medii Denſitas infra N in infinitum decreſcet.

§. LXXXVII. Liquet ex hiſce, talem Hyperbolam in medio reſiſtente in duplicata Velocitatum ratione, qualis aër eſt, deſcribi non poſſe, id quod & de ſuperiorum ordinum Hyperbolis verum eſſe facile demonſtrari poſſet (*t*). Quo magis enim projectum corpus ad ſuperficiem Telluris cadendo accedit, eo majorem ſtricte loquendo offendet Aëris Denſitatem, dum è contrario in Hypotheſi Hyperbolæ aëris Denſitas deberet decreſcere. Quia vero in inferiori Atmoſphæræ parte Medii Denſitas pro uniformi haberi poteſt (ob differen-

(*t*) Vide Euleri Mechanicam Tom. I. pag. 400. ſeqq. le Seur & Jacquier ad Newton. tom. II. p. 107.

rentiam in praxi vix ſenſibilem), ſi ponamus Denſitatem in N, æqualem Denſitati in A, vera corporis Projectoria infra Hyperbolam continebitur. Corpore enim projecto è puncto N, directione Tangentis N F, ea velocitate, quæ eſt in ratione ſubduplicata Parametri Parabolæ, cujus abſciſſa eſt 2 N I, ordinata N F & vertex N, reſiſtentia in N erit major, quam in hypotheſi Hyperbolæ, adeoque vera Projectoria N S M magis erit depreſſa, quam Hyperbola; & hinc vertex S magis ab Aſymptotis diſtabit, quam A. Interim, quia tangens prope verticem Hyperbolæ non adeo celeriter creſcat vel decreſcat, Denſitas Medii in ſuperiori ejus parte ſatis erit conſtans, unde Hyperbolæ hæ in praxi ſubſtitui poſſent, hac tamen conditione, ut angulus elevationis ſumatur exiguus, & corpus non admodum alte adſcendat.

§. LXXXVIII. Quicquid id eſt, hoc certe conſtat, lineam a projectili in aëre deſcriptam magis accedere ad Hyperbolam cum Aſymptoto verticali, quam ad Parabolam; talis enim Hyperbola certis ſub conditionibus in aëre deſcribi poteſt, dum Parabola non niſi in Vacuo deſcribitur. Obſervari interim meretur, veroſimile admodum eſſe, lineam in aëre deſcriptam in deſcenſu habere Aſymptoton verticalem, in quo conveniret cum Hyperbola, dum Parabolæ nullis gaudent Aſymptotis. Hoc vero latius in ſequentibus oſtendetur. Pluribus de hac hypotheſi egere NEWTONUS, ejusque Commentatores LE SEUR & JACQUIER. Videamus jam, quomodo ipſa Curvæ in Aëre deſcriptæ natura erui, & ad praxin deduci poſſit.

§. LXXXIX. Ex ante dictis (§. LXXIX.) ſatis ſuperque jam patere potuit, Curvam in Aëre deſcriptam ab utraque axis parte non eſſe ſui ſimilem & æqualem; adſcendente enim corpore, vis Reſiſtentiæ cum vi Gravitatis coöperatur in retardando ejus motu, in deſcenſu vero duæ hæ vires ſibi mutuo ſunt oppoſitæ, & aër motum retardat, dum Gravitas accelerat. Igitur arcus Adſcenſus M A (*Fig.* 7.) longior eſt arcu deſcenſus A F; ſi enim forent æquales, Reſiſtentia cum Gravitate coöperari deberet in accelerando corporis deſcendentis motu, quod fieri nequit. Sequitur & hinc, angulum De-

Descensus NFB majorem esse angulo Adscensus RMP, adeoque inter puncta F & A debere esse intermedium M, in quo angulus SMP æquatur angulo Elevationis RMF.

§. XC. Sit Curvæ MAF (*Fig.* 7.) axis APP, arcus AM $= z$, MQ $= \dot{z}$, abscissa AP $= x$, Pp $=$ Qm $=$ Mn $= \dot{x}$, ordinata PM $= y$, Mm $=$ nQ $= \mp \dot{y}$: decrescentibus ordinatis PM, dum corpus adscendit, erit nQ $= - \dot{y}$; accrescentibus ordinatis, dum corpus descendit, erit nQ $= + \dot{y}$. Porro Velocitas in M resolvitur in duas partes, in Velocitatem secundum lineam horizontalem Mm, & Velocitatem secundum perpendicularem Qm. Velocitas secundum Mm vocetur v, & sit Velocitatis Decrementum, à sola Aëris Resistentia oriundum, eadem directione $= - \dot{v}$. Hinc erunt

$\mp \dot{y} : \dot{z} = - \dot{v} : - \dot{v} \times \frac{\dot{z}}{\mp \dot{y}} =$ Decrement. Velocitatis ex Resist. direct. MQ.

$\mp \dot{y} : \dot{x} = - \dot{v} : - \dot{v} \times \frac{\dot{x}}{\mp \dot{y}} =$ Decrement. Velocitatis ex Resist. direct. Qm.

$\mp \dot{y} : \dot{z} = v : v \times \frac{\dot{z}}{\mp \dot{y}} =$ Velocitati corporis directione MQ.

$\mp \dot{y} : \dot{x} = v : v \times \frac{\dot{x}}{\mp \dot{y}} =$ Velocitati corporis directione Qm.

Hinc Fluxio Velocitatis directione Qm $= \dot{v} \times \frac{\dot{x}}{\mp \dot{y}} + v \times \frac{\ddot{x}}{\mp \dot{y}}$ exprimet totum Velocitatis Decrementum vel Incrementum, prout corpus est vel in adscensu vel descensu. Decrementum vero hac directione à Resistentiæ vi orta est $= - \dot{v} \times \frac{\dot{x}}{\mp \dot{y}}$, unde Decrementum vel Incrementum eadem directione, ex sola Gravitate orta, erit $= v \times \frac{\ddot{x}}{\mp \dot{y}}$. Erit ergo vis Gravitatis ad vim Resistentiæ,

ut

ut $v \times \frac{\ddot{x}}{\mp \dot{y}}$ ad $- \dot{v} \times \frac{\dot{z}}{\mp \dot{y}}$, id eſt, ut 1 ad $- \frac{\dot{v}}{v} \times \frac{\dot{z}}{\ddot{x}}$: erat autem ex §. LXXVIII. Vis Gravitatis ad vim Reſiſtentiæ, ut 1 ad $\frac{\dot{z}\dddot{x}}{2\ddot{x}^2}$, unde

$$- \frac{\dot{v}}{v} \times \frac{\dot{z}}{\ddot{x}} = \frac{\dot{z}}{\ddot{x}} \times \frac{\dddot{x}}{2\ddot{x}}, \text{ ſive } - \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dddot{x}}{2\ddot{x}}$$

§. XCI. Sit Exponens Reſiſtentiæ, ut in Cap. præc. (§. XXXIII.), $= E$, & corpus ex altitudine E decidens habebit in fine lapſus Velocitatem, qua uniformiter eodem tempore duplum ſpatium ſive $2E$ percurrere poſſet, ſit ſpatium, hac Velocitate uno $\overset{\prime\prime}{m}$ percurſum, $= e$. Sit porro corporis Velocitas in vertice Curvæ A tanta, ut motu uniformi uno $\overset{\prime\prime}{m}$ percurrere poſſet ſpatium $= c$. Jam, quia (§. XXXIII.). Exponens Reſiſtentiæ eſt altitudo debita Celeritati ei, qua Reſiſtentiæ & Gravitatis vires æquantur, & quia Reſiſtentiæ Lex eſt Celeritatis Quadratum, erit vis Gravitatis ad vim Reſiſtentiæ, ut e^2 ad $v^2 \times \frac{\dot{z}^2}{\dot{y}^2}$, vel ut 1 ad $\frac{v^2}{e^2} \times \frac{\dot{z}^2}{\dot{y}^2}$; erat autem ex §. præced. ut 1 ad $\frac{\dot{z}\dddot{x}}{2\ddot{x}^2}$, unde

$$\frac{\dot{z}\dddot{x}}{2\ddot{x}^2} = \frac{v^2}{e^2} \times \frac{\dot{z}^2}{\dot{y}^2}$$

$$\frac{\dddot{x}}{2\ddot{x}} = \frac{v^2}{e^2} \times \frac{\dot{z}\ddot{x}}{\dot{y}^2} = - \frac{\dot{v}}{v}$$

$$\frac{\dot{z}\ddot{x}}{\dot{y}^2} = - \frac{e^2 \dot{v}}{v^3} = - e^2 v^{-3} \dot{v}$$

§. XCII.

§. XCII. Aequationem hanc ſic ſolvo. Sit tangens, anguli Elevationis RMP $=$ SMP $=$ QMB, $= t$, poſito Radio $= 1$, erit $1 : \mp \dot{y} = t : \dot{x}$; hinc $\dot{x} = \mp \dot{y} t$, & $\dot{z} = \mp \dot{y} \sqrt{1 + t^2}$, ſeu $\mp \dot{z} = \dot{y} \sqrt{1 + t^2}$. Fluens igitur quantitatis $z^{\cdot}$ duplicem habet valorem; ſi quæratur de arcu adſcenſus erit $- z^{\cdot}$, ſi de arcu deſcenſus erit $+ z^{\cdot}$. Porro, quia (§. LXXVIII.) $\dot{y}$ conſtans eſt, erit $\ddot{x} = \mp \dot{y}\dot{t}$: hinc, ſubſtituendo valores inventos in Aequatione, invenietur

$$\frac{\dot{z}\ddot{x}}{\dot{y}^2} = \mp \frac{\dot{y}^2 \dot{t} \sqrt{1 + t^2}}{\dot{y}^2} = \mp \dot{t} \sqrt{1 + t^2} = - e^2 v^{-3} \dot{v}$$

$$\frac{e^2}{2 v^2} - C = \text{Fluent.} \mp \dot{t} \sqrt{1 + t^2}$$

Conſtans C habetur ponendo $v = c$, & ſubſtituendo in termino priore, unde $\frac{e^2}{2 v^2} - \frac{e^2}{2 c^2} = \text{Fluent.} \mp \dot{t} \sqrt{1 + t^2}$.

Ut vero habeatur Fluens quantitatis $\mp \dot{t} \sqrt{1 + t^2}$, ponatur hæc $= \mp \frac{A}{2}$, & erit

$\mp \frac{1}{2} \dot{A} = \mp \dot{t} \sqrt{1 + t^2}$, & (multiplicando per $\sqrt{\frac{1 + t^2}{1 + t^2}}) = \mp \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \times \dot{t}$; hinc

$$\frac{1}{2} \dot{A} = \frac{\dot{t}}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{t^2 \dot{t}}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{\dot{t}}{2\sqrt{1 + t^2}} + \frac{t^2 \dot{t}}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{\dot{t}}{2\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\frac{1}{2} \dot{A} = \frac{\dot{t} + 2t^2 \dot{t}}{2\sqrt{1 + t^2}} + \frac{\dot{t}}{2\sqrt{1 + t^2}}$$

verum *Fluens* $\frac{\dot{t} + 2t^2\dot{t}}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2}$

G &

& *Fluens* $\frac{\dot{t}}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}$ Hyperb. Logar. $\overline{t+\sqrt{1+t^2}}$

hinc $\frac{e^2}{2v^2} - \frac{e^2}{2c^2} = \mp \frac{1}{2} A = \mp \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} \mp \frac{1}{2}$ Hyp. Log. $\overline{t+\sqrt{1+t^2}}$

$\frac{e^2}{2v^2} = \frac{e^2}{2c^2} \mp \frac{1}{2} A$, five $\frac{e^2}{v^2} = \frac{e^2}{c^2} \mp A$

ideoque $v^2 = \frac{e^2c^2}{e^2 \mp c^2A}$, five $v = \frac{ec}{\sqrt{e^2 \mp c^2A}}$, quæ eſt Velocitas vel initialis, vel in fine lapſus, directione horizontali Mm. Et pro Velocitate initiali erit $v = \frac{ec}{\sqrt{e^2 - c^2A}}$; pro velocitate autem in fine deſcenſus $v = \frac{ec}{\sqrt{e^2 + c^2A}}$; Invenitur & Velocitas in vertice Curvæ $A = c = \frac{ev}{\sqrt{e^2 \pm v^2A}}$, ubi v^2A eſt poſitiva, ſi v deſignet Velocitatem in initio adſcenſus; negativa vero, ſi v ſit in fine deſcenſus in F.

§. XCIII. Arcus Adſcenſus MA, & Deſcenſus AF ſic inveniuntur. Quoniam (§. XXXIII.) Denſitas Aëris eſt ad Denſitatem globi, in eo projecti, ut vis Reſiſtentiæ ad vim uniformem, qua totus globi motus tolleretur, interea dum percurreret ſpatium æquale duplæ Exponenti Reſiſtentiæ, ſeu $2E$; ſit vis illa uniformis = Celeritati abſolutæ corporis = $\frac{v\dot{z}}{\mp \dot{y}}$, erit Velocitas, quæ deſtruitur à Reſiſtentia Aëris, dum corpus percurrit ſpatiolum $\mp \dot{z}$, $= \frac{z^2\dot{v}}{\mp 2yE}$ $= \frac{-\dot{v}z}{\mp y}$ (§. XC.), vel $\frac{\mp \dot{z}v}{2E} = -\dot{v}$, vel $\frac{\mp \dot{z}}{2E} = -\frac{\dot{v}}{v}$, cujus Fluens, adjecto conſtante C (quæ invenitur ponendo $z = 0$, & $v = c$) eſt

$\frac{\mp z}{E2}$

$$\frac{\mp z}{2E} = \text{Hyp. Logar. } c - \text{Hyp. Logar. } v = \text{Hyp. Logar. } \frac{c}{v}$$

$\mp z = 2E \times \text{Hyp. Log. } \frac{c}{v}$; & ſubſtituto valore v §. præc. invento,

$$\mp z = 2E \times \text{Hyp. Log. } \sqrt{\frac{e^2 \mp c^2 A}{e^2}}$$

$\mp z = E \times \text{Hyp. Log. } 1 \mp \frac{c^2}{e^2} \times A$; & poſito $\frac{e^2}{c^2} = n$

$$\mp z = E \times \text{Hyp. Log. } 1 \mp \frac{A}{n}$$

Si vero quæratur $\mp z$ in terminis v, erit ſubſtituto c ex §. præc.
$\mp z = 2E \times \text{Hyp. Log. } \sqrt{\frac{e^2}{e^2 \pm v^2 A}} = E \times \text{Hyp. Log. } \frac{e^2}{e^2 \pm v^2 A}$

$$\text{ſive } \mp z = -E \times \text{Hyp. Logar. } 1 \pm \frac{v^2}{e^2} \times A$$

§. XCIV. Eſt igitur *Arcus Adſcenſus* MA =
$-z = E \times \text{Hyp. Log. } 1 - \frac{A}{n} = -E \times \text{Hyp. Log. } 1 + \frac{v^2}{e^2} \times A$

vel $z = -E \times \text{Hyp. Log. } 1 - \frac{A}{n} = E \times \text{Hyp. Log. } 1 + \frac{v^2}{e^2} \times A$
Arcus vero *Deſcenſus* AF eſt =
$z = E \times \text{Hyp. Log. } 1 + \frac{A}{n} = -E \times \text{Hyp. Log. } 1 - \frac{v^2}{e^2} \times A$

§. XCV. Inventis abſciſſa AP & ordinata PM vel PF, habentur jactus *altitudo* PA, & *amplitudo horizontalis* MP & PF. Quoniam eſt

$$\mp z = E \times \text{Hyp. Logar. } 1 \mp \frac{A}{n}$$

erit $\mp \dot{z} = E \times + \frac{\dot{A}}{n \mp A} = 2E \times \frac{\mp \dot{t}\sqrt{1+t^2}}{n \mp A} = \dot{y}\sqrt{1+t^2}$ (§. XCII.)

 unde

$$\text{unde } \mp \dot{y} = \frac{\dot{t}}{n \mp A} \times 2E$$

Erit ergo in Adſcenſu $y = \textit{Fluent.}\ \dfrac{\dot{t}}{n - A} \times 2E = MP$;

$$\text{in deſcenſu vero } y = \textit{Fluent.}\ \frac{\dot{t}}{n + A} \times 2E$$

Si tangentis t angulus ſit SMP = RMP, erit in deſcenſu $y =$ PM; ſi vero tangentis t angulus ſit BFN, erit $y =$ PF. Eodem modo invenitur $\dot{x} = t\dot{y}$ (§. XCII.) $= \dfrac{t\dot{t}}{n \mp A} \times 2E$, ubi in adſcenſu eſt $x = \textit{Fluent.}\ \dfrac{t\dot{t}}{n - A} =$ toti altitudini AP; & in deſcenſu, ſi tangens t ſit anguli SMP = angulo elevationis, habetur pars altitudinis AP $= \textit{Fluent.}\ \dfrac{t\dot{t}}{n + A} \times 2E$; tota vero altitudo, ſi t ſit tangens anguli deſcenſus BFN.

§. XCVI. Una adhuc remanet difficultas, quæ Theoriæ iſtius Curvæ ad Praxin applicationem facit intricatiſſimam; inveniendæ ſcilicet adhuc reſtant Fluentes quantitatum $\dfrac{\dot{t}}{n \mp A}$ & $\dfrac{t\dot{t}}{n + A}$; Poſſent hæ quidem methodo conſueta inveniri, reſolvendo ſcilicet in ſeries infinitas, quamque ii docent, qui ex profeſſo de Calculo Integrali ſeu Methodo Fluentium ſcripſerunt; verum hæ ſeries, niſi celerrime convergant, in praxi nullius fere poſſunt eſſe uſus. Alia potius & faciliore utemur Methodo, quæ elegantiſſima eſt, & huc redit. Sit (*Fig.* 8.) linea GN infinitæ longitudinis, cujus portiones Gs, Gt, Gu, &c. exprimant valores Tangentium t, quorum Radius communis eſt = GL = 1; erunt ergo, ut notum ex Trigonometricis, lineæ Gs, Gs' &c. minores Radio GL, ſi minor ſit angulus Elevationis Semirecto; majores autem, ſi ſit major; ſi vero angulus ſit 45°, erit tangens $t =$ GL = Radio = 1. Fluxiones cujuslibet harum Tangentium ſunt $\dot{t}$. Porro ſit Curva HR, cujus or-

ordinatæ GH, *se* &c. sint $= \frac{1}{n - A}$, & alia Curva GQ, cujus ordinatæ *sg*, $s'g'$ &c. sint $= \frac{\dot{t}}{n - A}$, quæ semper erunt minores, si angulus sit minor, quam semirectus; majores, si sit major; dependent quippe à magnitudine Tangentis *t*. Liquet ergo (posito verbi gratia G*t* = *t*), Fluxiones arearum GH*mt*, G*ht* fore $= \frac{\dot{t}}{n - A}$ & $\frac{t\dot{t}}{n - A}$. Harum arearum Fluentes per Approximationem ope Curvæ generis Parabolici primus invenire docuit NEWTONUS (*u*), eumque secuti latius illustrarunt HERMANNUS (*v*), LE SEUR & JACQUIER (*w*), SIMPSONUS (*x*), aliique.

Ponantur in linea GN ordinatæ GH, *sge*, $s'g'e'$ &c., & æque per puncta H, *e*, e' &c., ac G, *s*, s' &c. ducantur Curvæ Parabolicæ, quæ, quo major sumatur numerus horum punctorum, eo propius convenient & coincident cum Curvis HR, GQ. Notum autem Parabolarum areas perfecte posse quadrari, adeoque areæ GH*mt*, G*ht* &c. inveniri possunt Approximatione, in praxi satis accurata. Sint verbi gratia ordinatæ ad axem GN = α, β, γ, δ, ε &c., erit area GH*mt* &c., si sumantur ordinatæ tres $= \frac{\alpha + 4\beta + \gamma}{6} \times t$; si sumantur quatuor, erit $= \frac{\alpha + 3\beta + 3\gamma + \delta}{8} \times t$; si quinque, erit $= \frac{7\alpha + 32\beta + 12\gamma + 32\delta + 7\varepsilon}{90} \times t$; & ita porro. Explicationem & demonstrationem hujus Methodi fusiorem tradit supra laudatus SIMPSONUS (*y*), qui omnino consulendus. Itaque hæ areæ, mul-

(*u*) Arithmetica Universalis & Princip. Phil. Natur. lib. 3. lemm. 5.
(*v*) Phoronomia p. 389. (*w*) In Comment. ad NEWTON. tom. II. p. 43 & 117.
(*x*) *Mathematical Dissertations on a variety of Physical and Analytical subjects* p. 109-119. & *the Doctrine and Application of Fluxions part. 2. p. 440.*
(*y*) *Math. Diss. ibid.*

multiplicatæ per $2E$, & divisæ per Quadratum Radii $= 1$, exhibebunt valores abscissæ & ordinatæ in parte Curvæ, in qua corpus adscendit, adeoque partem Amplitudinis Horizontalis, & totam Altitudinem.

§. XCVII. Eadem plane Methodo inveniuntur Fluentes quantitatum $\frac{\dot{t}}{n+A}$ & $\frac{t\dot{t}}{n+A}$ pro abscissis & ordinatis in parte Curvæ, in qua corpus descendit. Sit Curva GP ab altera axis parte, cujus ordinatæ sn, $s'n'$ &c. exprimant valores $\frac{t}{n+A}$, & altera Curva IO, cujus ordinatæ GI, sa, $s'a'$ &c. itidem sint $= \frac{1}{n+A}$, erunt æque, atque in §. præced., areæ inter axem & curvam interceptæ mensuræ quantitatum x & y; si sumatur $t =$ tangenti anguli Elevationis $=$ (*Fig.* 9.) CES $=$ CAD, erit $x =$ CS, & $y =$ SE, si vero t sit tangens anguli Descensus EFB, erit $x =$ CD & $y =$ DF. Clarius res apparebit sequentibus duobus exemplis.

§. XCVIII. Primum Exemplum sit Experimentum, cujus meminit ROBINS (z). Gravidatum fuit Tormentum globo 18 libr. (*avoirdupoise weight*), cujus diameter erat 5 poll. Angl.; erat quantitas pulveris nitrati 2 libr., & angulus Elevationis Tormenti $3^{\circ}, 30'$. Accenso pulvere, globus ferebatur ad distantiam 975 ulnarum Anglicanarum (*yards*). Aequat ulna Anglicana tres pedes Angl. Ex Theoria pulveris pyrii & artis Tormentariæ (a) invenit ROBINS, Celeritatem, qua projiciebatur globus, debitam fuisse altitudini 5025 uln. Angl., seu 15075 ped. Angl.; erat Exponens Resistentiæ seu E quam proxime 1500 uln. (§. XXXIII.).

§. XCIX. Erat ergo Velocitas globi initialis tanta, ut uniformiter uno $\overset{''}{m}$ percurrere potuisset spatium $= \sqrt{15075 \times 64\frac{1}{3}} = 984$ ped.

(z) *Tracts of Gunnery* n°. 2. *prop.* 1. (a) *Ibid.* n°. 4. *prop.* 5.

ped. = 328 uln. Eſt vero hæc tantum Velocitas directione Tangentis in A, adeoque ſic invenitur v, ſeu pars Velocitatis directione horizontali AZ. (*Fig.* 9.).

$$\text{Logar. } 328 = 2.5158738$$

$$\text{Logar. Coſin. } 3^{\circ}, 30' = 9.9991892$$

$$\text{Logar. Radius} = 10.0000000$$

Logar. $v = 327\frac{1}{3} = 2.5150630$; Eſt ergo $v = 327\frac{1}{3}$ uln. Quia porro angulus eſt $3\frac{1}{2}^{\circ}$, erit tangens ejus $= 0.0611626 = t$, unde $t^2 = 0.00374$, & $\sqrt{t^2+1} = 1.0018$; hinc $t + \sqrt{t^2+1} = 1.06296$, cujus Logarithmus Hyperbolicus eſt $= 0.0593$; eſt vero $t\sqrt{t^2+1} = 0.0612$, unde (§. XCII.) $A = 0.1205$. Eſt e (§. XCI.) $= \sqrt{3 \times 1500 \times 64\frac{1}{3}} = 538$ ped. $= 179\frac{1}{3}$ uln.

§. C. Velocitas in vertice curvæ C ſic invenitur: eſt

$$v = 327\tfrac{1}{3},\ v^2 = 107145,\ v^2A = 12910.9,\ e^2 = 32260$$

$$\text{hinc } c = \frac{ev}{\sqrt{e^2 + v^2A}} = 276\tfrac{1}{2} \text{ uln. uno } \overset{''}{m}$$

$$\text{ergo \& } n = \frac{e^2}{c^2} = \frac{32260.00}{33708.96} = 0.4207$$

§. CI. *Amplitudo horizontalis Adſcenſus* AD (*Fig.* 8, & 9.) ſic invenitur. Sit GL = Rad. = 1, tangens $t = 0.0611626 = G\overset{''}{s}$. Dividatur $G\overset{''}{s}$ in quotcunque partes Gs, $G\overset{'}{s}$ &c., & erigantur ordinatæ GH, se &c. ad Curvam HR. Sint ordinatæ quatuor GH, se, $\overset{'}{s}\overset{'}{e}$, $\overset{''}{s}\overset{''}{e}$, erit ordinata inter has intermedia, multiplicata per t, = areæ $GH\overset{''}{e}\overset{''}{s}$ = (§. XCVI.) $\frac{GH + 3\,se + 3\,\overset{'}{s}\overset{'}{e} + \overset{''}{s}\overset{''}{e}}{8} \times G\overset{''}{s}$. Liquet ergo, abſciſſam t in tres partes eſſe diviſam Gs, $G\overset{'}{s}$, $G\overset{''}{s}$;

erit-

eritque abſciſſa in G $=$ 0, in $s = \frac{1}{3}\, t$, in $s' = \frac{2}{3}\, t$, in $s'' = t$; unde erunt abſciſſæ

0, $Gs = 0.0203875$, $Gs' = 0.040775$, $Gs'' = 0.0611626$

ſi abſciſſa ſit $=$ 0, erit t, adeoque & $A = 0$; hinc ordinata $GH = \frac{1}{n - A} = \frac{1}{n} = \frac{1}{0.4207} = 2.377$. Si abſciſſa ſit Gs erit $A = 0.0407$; unde $se = 2.632$. Si ſit Gs', erit $A = 0.08155$, unde $s'e' = 2.95$. Denique, ſi abſciſſa ſit Gs'', erit $A = 0.1205$, unde $s''e'' = 3.331$. Sunt ergo ordinatæ

$GH = 2.377$, $se = 2.632$, $s'e' = 2.95$, $s''e'' = 3.331$: erit ergo ordinata intermedia $= \frac{GH + 3\,se + 3\,s'e' + s''e''}{8} = 2.80675$, quæ multiplicata per Gs'', ſeu $t = 0.0611626$, exhibebit aream $HGs''e'' = 0.17166784 =$ Fluent. $\frac{\dot{t}}{n - A}$, quæ multiplicata per $2E = 3000$ uln. Angl., dat $AD = y =$ *amplitudini horizontali Adſcenſus* $= 515$ uln. Angl.

§. CII. Ut inveniatur *Altitudo adſcenſus* $CD = x = 2E \times$ Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n - A}$, inveniri debet area $Gg''s''$. Sunt ordinatæ ex §. præced.

$\frac{1}{n - A} =$	$GH = 2.377$	$se = 2.632$	$s'e' = 2.95$	$s''e'' = 3.331$
$t =$	0	$Gs = 0.02038\frac{3}{4}$	$Gs' = 0.0407\frac{3}{4}$	$Gs'' = 0.06116\frac{1}{4}$
$\frac{t}{n - A} =$	0	$gs = 0.05366$	$g's' = 0.120286$	$g''s'' = 0.2037323$

Eodem modo procedendo, quo ante, invenitur ordinata intermedia

dia $= \frac{0 + 3gs + 3g\acute{s} + g\ddot{s}}{8} = 0.09062$, quæ, multiplicata per t, dat aream $G\ddot{g}\ddot{s} =$ Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n-A} = 0.00554 7212$; unde CD $= x$ $= 2E \times$ Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n-A} = 16\frac{1}{2}$ uln. Angl., quæ erit Altitudo maxima, ad quam globus adſcendit.

§. CIII. In deſcenſu globi per arcum CF eſt $y = 2E \times$ Fluent. $\frac{\dot{t}}{n+A} = 2E \times$ area $GI\ddot{a}\ddot{s}$; unde ſi angulus CES ſumatur = angulo Elevationis, erit $y =$ SE = DB; ut ergo inveniatur *pars Amplitudinis horizontalis Deſcenſus* DB, dividatur rurſus $G\ddot{s}$ per quatuor ordinatas GI, sa, $\acute{s}\acute{a}$, $\ddot{s}\ddot{a}$; &c, quoniam $G\ddot{s}$ eſt $= t = 0.0611626$, erunt abſciſſæ ordinatis his reſpondentes

0	$Gs = 0.0203875$	$G\acute{s} = 0.040775$	$G\ddot{s} = 0.0611626$
$\frac{1}{n+A} = GI = 2.377$	$sa = 2.1673$	$\acute{s}\acute{a} = 1.99$	$\ddot{s}\ddot{a} = 1.8416$

Eadem Methodo, qua ante, invenitur ordinata intermedia = 2.0873, unde $y = 2E \times$ area $GI\ddot{a}\ddot{s} = 3000 \times 2.0873 \times 0.0611626 = 383$ uln. Angl. = ordinatæ, reſpondenti angulo CES = parti Amplitudinis DB.

§. CIV. Ex hiſce facile reperitur x ſeu *abſciſſa* CS ordinatæ SE reſpondens $= 2E \times$ Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n+A} = 2E \times$ area $G\ddot{s}\ddot{n}$. Eſt enim

H $\qquad \frac{1}{n+A}$

$\frac{1}{n+A} =$	$GI = 2.377$	$sa = 2.1673$	$s'a' = 1.99$	$s''a'' = 1.8616$
$t =$	0	$Gs = 0.02038\frac{3}{4}$	$Gs' = 0.0407\frac{3}{4}$	$Gs'' = 0.06116\frac{1}{4}$
$\frac{t}{n+A} =$	0	$sn = 0.0441858$	$s'n' = 0.081142$	$s''n'' = 0.113865$

Ex quibus ordinata intermedia eſt $= 0.06123$, unde $x = 3000 \times 0.0611626 \times 0.06123 = 11\frac{1}{4}$ uln. Angl. $=$ *Deſcenſui* globi ad illud usque punctum, ubi ordinata in E facit cum curva angulum æqualem angulo Elevationis.

§. CV. Ut tota inveniatur amplitudo horizontalis, reſtat adhuc determinare lineam BF, quæ ſequenti modo reperitur. Fiat area $Gn''s''$ longior, donec $Gt'o'$ ſit $= Gg''s''$, & pars areæ $n''s''t'o'$ multiplicata per $2E$ exhibebit valorem lineæ $SD = CD - CS = EB = 16\frac{1}{2} - 11\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4}$ uln. Angl. Producatur ſimiliter area inter Curvam IO & axem intercepta usque ad $t'b'$, & area $GIb't' \times 2E$ dabit quantitatem lineæ BF. Eſt

$$\text{area } Gg''s'' = 0.0055472 = Gt'o'$$
$$Gn''s'' = 0.0037448$$

unde area $n''s''t'o' = 0.0018024$, quæ diviſa per $s''n'' = 0.011386$ haberetur $s''t' = 0.01592$, ſi omnes ordinatæ forent æquales; ex §. præc. autem patet, ordinatas curvæ GP accreſcere, unde erit $s''t'$ aliquanto minor. Sit $s''t' = 0.01467$, & erigantur ordinatæ tres $s''a''$, tb, $t'b'$, erit $s''t'$ in duas partes diviſa, ita ut $s''t = t t' = 0.007335$ hinc $Gt = 0.06116 + 0.07335 = 0.068497$; $A = 0.13706$, & $\frac{1}{n+A}$

=

$= tb = 1.7928$, & $\frac{t}{n+A} = to = 0.12264$. Eodem modo reperitur $\acute{t}\acute{b} = 1.747$, & $\acute{o}\acute{t} = 0.132474$. Quia hic tres tantum sumsimus ordinatas, erit intermedia Curvæ GP $= \frac{\ddot{s}\ddot{n} + 4to + \acute{t}\acute{o}}{6} = 0.1228$, quæ multiplicata per $\ddot{s}\acute{t}$, dat aream $\ddot{s}\acute{t}\acute{o}\ddot{n} = 0.0018014$, quæ à paulo ante inventa vix differt. Si differentia foret sat insignis, operatio deberet repeti, & $\acute{s}\ddot{t}$ vel augeri vel minui, donec eventus vel verus evaderet, vel vero proximus. Porro area $\ddot{s}\acute{t}\acute{b}\ddot{a}$ est $= \frac{\ddot{s}\ddot{a} + 4tb + \acute{t}\acute{b}}{6}$ $\times\ \ddot{s}\acute{t} = 0.0263077$, quæ multiplicata per $2E = 3000$, habebitur *pars Amplitudinis Horizontalis* BF $= 79$ uln. Angl.

§. CVI. Ex hisce invenitur tota *Amplitudo horizontalis* jactus $=$ AF $=$ AD $+$ DB $+$ BF $= 515 + 383 + 79 = 977$ uln. Angl.: atqui ex experimento globus projiciebatur ad distantiam 975 uln., unde differentia inter Theoriam & Praxin tantum est 2 uln. seu 6 ped.

§. CVII. Quoniam G$\acute{t}$ denotat Tangentem anguli EFB $= 0.01467 + 0.06116 = 0.07583$, erit angulus, quem globus in puncto descensus cum horizonte facit quam proxime $4^\circ, 21'$.

§. CVIII. Longe faciliori calculo inveniuntur arcus adscensus AC, & descensus CF. Est *arcus adscensus* AC (§. XCIV.) $=$

$$z = E \times \text{Hyp. Logar. } 1 + \frac{v^2}{e^2} \times A.$$

Quoniam in adscensu est (§. XCIX.) $A = 0.1205$, erit $1 + \frac{v^2}{e^2} \times A = 1.4114$, cujus Logar. Hyperb. $= 0.3436$, unde $z = 1500 \times 0.3436 = 515\frac{2}{5}$ uln. Angl. Est *arcus descensus* CF $=$

$$z = E \times \text{Hyp. Logar. } 1 + \frac{A}{n}.$$

 Quia

Quia hic ſumi debet tangens anguli Deſcenſus $= 0.06116 + 0.01467 = 0.07583 = t$, erit $A = t\sqrt{t^2+1} + \text{Hyp. Log. } t + \sqrt{t^2+1} = 0.1517$; hinc $1 + \frac{A}{n} = 1.36104$, cujus Hyp. Logar. eſt $= 0.308217$; unde $z = 462\frac{1}{3}$ uln. Angl., & totus arcus ACF $= 977\frac{7}{15}$ uln.

§. CIX. Sit invenienda Velocitas, quam globus in fine deſcenſus in F acquiſivit. Eſt ex §. XCIII. $z = 2E \times \text{Hyp. Log. } \frac{c}{v} = 2E \times (\text{Hyp. Log. } c - \text{Hyp. Log. } v)$; hinc Hyp. Log. $v = -\frac{z}{2E} + \text{Hyp. Log. } c$. Eſt autem

$c = 276\frac{1}{2}$, & Log. Hyp. $c = 5.6217$, & $\frac{z}{2E} = \frac{462\frac{1}{3}}{3000} = 0.1541$

unde Hyp. Log. $v = 5.6217 - 0.1541 = 5.4676$

$v = 237$ uln. Angl. uno $\overset{\prime}{m}$.

Eſt vero hæc tantum pars Velocitatis directione horizontali DF, dum tota Velocitas eſt ſecundum lineam Tangentem Curvam in F, quæ ex calculo Trigonometrico facile reperitur:

Logar. Secans $4^\circ, 21'$	=	10.0012529
Logar. 237 uln.	=	2.3747483
Logar. Radius	=	10.0000000
Logar. 237.85 uln.	=	2.3760012

Erat igitur *Velocitas* globi *in fine Deſcenſus* tanta, ut motu uniformi percurrere potuiſſet uno $\overset{\prime}{m}$ $237\frac{17}{20}$ uln. Angl.

§. CX. In minoribus Elevationibus, ſaltem non excedentibus 10°, cognita diſtantia tormenti à ſcopo feriendo, Velocitas, qua globus in ſcopum impingit, reperitur faciliore methodo, & in praxi ſatis accurata. Amplitudo enim jactus AF ab arcu deſcripto ACF tantum

tum differt $\frac{7}{15}$ uln. Angl., quæ differentia attentionem vix meretur, ratione habita totius amplitudinis AF = 977 uln. Censeri itaque potest globus, ac si directione horizontali percurrisset lineam AF, & gravitas nullam in globum vim exercuisset. Hinc in minoribus jactus angulis substitui potest Formula, Cap. præc. §. XXXIV. inventa, ubi de motu rectilineo agebatur. Erat enim AF seu

$$x = -E \times \text{Hyp. Log. } \frac{v^2 \mp 2Eg}{c^2 \mp 2Eg},$$

designante c Velocitatem initialem & g Gravitatem, quæ cum ponatur = o, manet Formula eadem, licet directio è perpendiculari mutetur in horizontalem; erit ergo

$$x = -E \times \text{Hyp. Log. } \frac{v^2}{c^2} = 2E \times \text{Hyp. Log. } \frac{c}{v}$$

$$\text{Hyp. Log. } v = -\frac{x}{2E} + \text{Hyp. Log. } c = -\frac{977}{3000} + \text{Hyp. Log. } 328$$

$$\text{Hyp. Log. } v = -0.3256666 + 5.7930136 = 5.467347$$

hinc v = 237 uln. Angl. = Velocitati globi in F.

quæ idcirco accurate satis convenit cum eadem Velocitate §. præc. inventa.

Applicari hæc Formula haud incommode posset rei Bellicæ; frequentioris nempe hodie usus est in oppugnandis urbibus munitis Suggestus (*Batteryen*) excitare, in quibus tormenta reposita, & modico pulvere pyrio onusta, paululum elevantur, ita ut supra Horizontem surgant angulo ad summum 3 vel 4 graduum. Inservit præcipue hæc methodus tormentis obsessorum è plostellis dejiciendis, vel saltem ad usum ineptis reddendis. Explosi enim globi è tormentis sic paratis ad tantam adscendunt altitudinem, quanta sufficit superandæ duntaxat Vallorum Loricæ (*Borstweer*), qui dein descendentes, angulo ad horizontem paulo tantum majore, legunt tantum non verrendo Loricam eo ipso loco, ubi tormenta oppidanorum sunt reposita, quæ repetitis sic ictibus percussa brevi temporis spatio è plostelſtellis dejiciuntur, & ſilentio damnantur. Talem tormentorum Suggeſtum Galli vocant *Batterie à Ricochet*, primusque ejus inventor fuit illuſtris VAUBAN, & referente ROBINSIO (*b*) primum uſi ſunt in obſidione urbis *Aeth* in *Hannonia*, anno 1692. Plura de hac methodo dabunt, qui ex profeſſo de Architectura Militari & oppugnandis munimentis ſcripſerunt (*c*).

§. CXI. Ad calculum hactenus revocata applicemus motui ejusdem globi in Vacuo, ubi deſcribit Parabolam AXZ (*Fig.* 9.). Erat Celeritas initialis debita altitudini 5025 uln. angl., unde ſic reperitur jactus amplitudo. Eſt ex §. LXVII. Radius ad ſinum dupli anguli Elevationis, ut dupla Celeritas ad amplitudinem jactus horizontalem AZ.

Logar. ſin. $3\frac{1}{2}^{\circ} \times 2$ ſeu 7°	=	9.0858945
Logar. 2×5025	=	4.0021661
Logar. Radius	=	10.0000000
Logar. 1225	=	3.0880606,

unde Amplitudo jactus horizontalis AZ erit fere 1225 uln., & AY = YZ = $612\frac{1}{2}$ uln. Angl.

Eſt ex §. LXIX. Altitudo jactus maxima $XY = P \times \frac{s^2}{r^2}$, id eſt, Quadratum Radii eſt ad quadratum ſinus anguli Elevationis, ut Celeritas, qua projicitur globus, ad XY; id eſt,

2 Logar. ſin. $3\frac{1}{2}^{\circ}$	=	17.5713506
Logar. 5025	=	3.7011361
2 Logar. Radius	=	20.0000000
Logar. $18\frac{3}{4}$	=	1.2724867, unde XY = $18\frac{3}{4}$ uln.

§. CXII.

(*b*) *New Principles of Gunnery præf. p.* 39.

(*c*) BARDET DE VILLENEUVE *Cours de la ſcience Militaire tom.* VIII. *p.* 116.

§. CXII. Positis in Parabola abscissa $= x$, ordinata $= y$, parametro $= a$ est (*d*) arcus AX $=$ XZ $=$

$$\frac{y}{a}\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2} + \tfrac{1}{4}a \times \text{Hyp. Log.}\ \frac{y + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2}}{\tfrac{1}{2}a}$$

Est autem ex natura Parabolæ $a = \frac{y^2}{x} = 20032$; hinc

$$\frac{y}{a}\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2} = 0.03057678 \times 10034.9 = 3069.$$

$$\&\ \tfrac{1}{4}a \times \text{Hyp. Log.}\ \frac{y + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2}}{\tfrac{1}{2}a} = 307.5$$

---

unde AX $= 614\frac{2}{5}$ uln., & differentia inter AX & AY $= 1\frac{9}{10}$ uln.

§. CXIII. Velocitas in vertice Parabolæ sic reperitur. Demonstrat Eulerus (*e*), Velocitatem in quocunque Parabolæ puncto debitam esse altitudini, quæ æquatur distantiæ istius puncti à Foco Parabolæ. Est vero distantia Foci à vertice Parabolæ æqualis quartæ parti Parametri, sive $= \frac{1}{4}a = 5008$, unde Velocitas ipsa globi tanta est in X, ut uniformi motu uno $\dot{m}$ percurrere potuisset (§. XXVIII.) spatium $= 327\frac{1}{2}$ uln. Angl. Quoniam autem distantiæ punctorum A & Z à foco Parabolæ sunt eædem, erunt & Velocitates initio & fine jactus eædem.

§. CXIV. Summam eorum, quæ computavimus, in sequentem refero Tabellam

In

(*d*) *The Doctrine and Application of Fluxions part.* 1. *p.* 162.

(*e*) Mechanica tom. I. p. 235. Cor. 9.

In Vacuo.	*In Aëre.*	*Differ.*
AY = $612\frac{1}{2}$ *uln.*	AD = 515 *uln.*	$97\frac{1}{2}$ *uln.*
YZ = $612\frac{1}{2}$ —	DF = 462 —	$150\frac{1}{2}$ —
XY = $18\frac{3}{4}$ —	CD = $16\frac{1}{2}$ —	$2\frac{1}{4}$ —
AX = $614\frac{2}{5}$ —	AC = $515\frac{2}{5}$ —	99 —
XZ = $614\frac{2}{5}$ —	CF = $462\frac{1}{2}$ —	$151\frac{1}{15}$ —
Celer. in A = 328	*Celer. in* A = 328	0
—— X = $327\frac{1}{2}$	—— C = $276\frac{1}{2}$	51 —
—— Z = 328	—— F = $237\frac{17}{20}$	$90\frac{3}{20}$ —
Angulus A = $3^{\circ}, 30'$	*Angulus* A = $3^{\circ}, 30'$	0
Angulus Z = $3^{\circ}, 30'$	*Angulus* F = $4^{\circ}, 21'$	$0^{\circ}, 51'$

Liquet exinde, quod & ante jam demonſtravimus, lineam à projectili in aëre deſcriptam quam longiſſime à Parabola aberrare. Primo enim, quia axis Parabolæ XY perpendicularis eſt ad Horizontem, erit in vacuo arcus adſcenſus æqualis arcui deſcenſus, dum in aëre arcus deſcenſus ſemper minor eſt. Secundo, ſi punctum adſcenſus & deſcenſus ſint in eadem linea horizontali, in hypotheſi Parabolæ vertex à duobus his punctis æquis ſpatiis diſtabit, dum in aëre vertex curvæ ſemper propior eſt puncto Deſcenſus. Tertio anguli adſcenſus & deſcenſus in eodem plano horizontis ſunt æquales in vacuo, dum in aëre angulus deſcenſus ſemper eſt major. Quarto denique Celeritas initio adſcenſus æquatur Celeritati in fine deſcenſus, ſi globus in vacuo moveretur, in aëre vero Celeritas in fine deſcenſus ſemper eſt minor. Differentia in duobus his caſibus ſequenti exemplo magis adhuc eluceſcet.

§. CXV. Alterum Experimentum ſit, cujus mentionem facit idem Robins (*f*). Adhibitum fuit Mortarium bellicum: erat ejus Animæ

(*f*) *Tracts of Gunnery n°.* 5.

mæ Longitudo 26 poll., diameter 13 poll., & camera continere poterat 9 libr. pulveris nitrati. Onerabatur Mortarium 9 libr., 10 unc. pulveris, & globo cavo seu Bomba 200 librarum. Erat angulus Elevationis 45°. Explosa Bomba ferebatur ad distantiam 2000 ulnarum Angl. seu *yards*. Ratione habita Cavitatis Globi, quales è mortariis ejiciuntur, & Atmosphæra paulum rariore in superiore Curvæ descriptæ parte, erat Exponens Resistentiæ seu $E = 2672$ uln., & Velocitas, qua Bomba ejiciebatur, debita erat altitudini $1363\frac{1}{2}$ uln.

§. CXVI. Calculo eadem ratione instituto, qua in exemplo præcedente, invenietur $e = 239\frac{1}{3}$, & Velocitas initialis Bombæ tanta, ut motu uniformi uno $\dot{m}$ percurrere posset 171 uln., unde $v = 120\frac{2}{3}$.

Quia angulus est semirectus, erit Tangens æqualis Radio, id est, $t = 1$, unde $A = t\sqrt{1+t^2} + \text{Hyp. Logar. } \overline{t + \sqrt{1+t^2}} = 1.41424 + 0.88136 = 2.2956$, & Celeritas in altitudine adscensus maxima $= c = \dfrac{ev}{\sqrt{e^2 + v^2 A}} = 95\frac{4}{5}$; hinc $n = \dfrac{e^2}{c^2} = 6.2416$

Porro, quia Tangens t est æqualis Radio $=$ GL (*Fig.* 8.), erit abscissa in G $= 0$, in $s' = \frac{1}{3}$, in $t = \frac{2}{3}$, in L $= 1$, unde

$\dfrac{1}{n-A} =$	GH $= 0.16021$	$s'e' = 0.1798$	$mt = 0.20768$	LK $= 0.2535$
$t =$	0	G$s' = \frac{1}{3}$	G$t = \frac{2}{3}$	GL $= 1$
$\dfrac{t}{n-A} =$	0	$g's' = 0.05993$	$ht = 0.13845$	LK $= 0.2535$

Hinc reperitur *pars amplitudinis horizontalis* AD (*Fig.* 8. & 10.) $= 2E \times \text{Fluent.} \dfrac{\dot{t}}{n-A} = 2E \times$ area HGLK $= 5344 \times 0.19702 \times 1 = 1053$ uln. Angl.; & *altitudo maxima* CD $= 2E \times$

 Fluent.

Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n-A} = 2E \times$ area GLK $= 5344 \times 0.10608 \times 1 = 567$ uln. quam proxime.

Ut inveniantur partes amplitudinis SE $=$ DB, & altitudinis CS congruentes angulo CES $=$ angulo Elevationis CAD $= 45^{\circ}$, erunt ordinatæ ab altera axis parte GN sequentes

$\frac{1}{n+A} =$	GI $= 0.16021$	$s'a' = 0.14449$	$tb = 0.13042$	LM $= 0.1172$
$t =$	0	G$s = \frac{1}{3}$	G$t = \frac{2}{3}$	GL $= 1$
$\frac{t}{n+A} =$	0	$s'n' = 0.04816$	$to = 0.08694$	LM $= 0.1172$

Hinc habetur *pars amplitudinis horizontalis* DB $= 2E \times$ Fluent. $\frac{\dot{t}}{n+A} = 2E \times$ area GIML $= 5344 \times 0.13777 \times 1 = 736\frac{2}{4}$ uln. Angl., & *pars altitudinis* CS $= 2E \times$ Fluent. $\frac{t\dot{t}}{n+A} = 2E \times$ area GML $= 5344 \times 0.0653 \times 1 = 349$ uln. Angl., unde DS $=$ CD $-$ CS $=$ EB $= 567 - 349 = 218$ uln. Angl.

Determinanda adhuc remanet pars amplitudinis horizontalis BF. Fiat tangens GL longior, donec area G$u'c'$ sit æqualis areæ GKL, eritque

Area G$u'c'$ $=$ GLK $= 0.10608$
est vero Area GLM $= 0.06530$

---

unde erit Area LM$u'c'$ $= 0.04078$.

Divisa area LM$u'c'$ per LM $= 0.1172$ foret L$u' = 0.348$; verum, crescentibus ordinatis uc, $u'c'$ &c, debet Lu' esse aliquanto minor: fiat $= 0.32$, erit G$u' =$ GL $+$ L$u' = 1.32 = t =$ tangenti ti anguli descensus EFB. Dividatur $L\acute{u}$ per tres ordinatas LM, uc, $\acute{u}\acute{c}$, eritque abscissa in L = 1, in u = 1.16, in $\acute{u}$ = 1.32 & ordinatæ respondentes,

$\frac{1}{n+A}$ =	LM = 0.1172	ur = 0.1109	$\acute{u}\acute{r}$ = 0.10507
t =	GL = 1	Gu = 1.16	$G\acute{u}$ = 1.32
$\frac{t}{n+A}$ =	LM = 0.1172	uc = 0.128644	$\acute{u}\acute{c}$ = 0.138692

Eadem Methodo, qua in præcedentibus, invenitur area $LM\acute{u}\acute{c}$ = 0.1283 × 0.32 = 0.041056, quæ aliquanto superat eandem aream paulo ante inventam, adeoque $G\acute{u}$ aliquanto minor est, quam 1.32; verum in praxi differentia hæc exigua est, adeoque non in censum venit. Reperitur ergo reliqua *pars amplitudinis horizontalis* BF = $2E \times$ Fluent. $\frac{t}{n+A} = 2E \times$ area $LM\acute{r}\acute{u}$ = 5344 × 0.32 × 0.11096 = 0.0355072 × 5344 = $189\frac{3}{4}$ uln. Angl. Erit ergo tota *Amplitudo horizontalis* = 1053 + $736\frac{1}{4}$ + $189\frac{3}{4}$ = 1979 uln. Angl., adeoque differentia inter calculum & Experimentum est 21 uln. Angl. seu 63 ped. Angl.

Quia tangens $G\acute{u}$ paulo minor est, quam 1.32, erit angulus, quem Bomba descendendo ad horizontem fecit = EFB = $52^{\circ}, 50'$ quam proxime.

§. CXVII. Est *arcus adscensus* AC (§. XCIV.) = $z = E \times$ Hyp. Log. $1 + \frac{v^2}{e^2} \times A$ = 2672 × 0.453192 = 1211 uln. Quoniam autem tangens anguli descensus est 1.32 = t, erit A = 3.2762, unde *arcus Descensus* $z = E \times$ Hyp. Log. $1 + \frac{A}{n}$ = 2672 × 0.421989 = $1127\frac{1}{2}$ uln.

Velocitatis pars v in fine Descensus directione horizontali BF sic reperitur. Est Logar. Hyperb. $v = -\frac{z}{2E}$ + Hyp. Logar. $c =$ $-\frac{1127\frac{1}{2}}{5344} + 4.5622627 = 4.3516422$, unde $v = 77.6$ uln., & tota Velocitas directione lineæ Tangentis Curvam in F sic deprehenditur:

Logar. Rad. = 10.0000000
Logar. 77.6 = 1.8898617

11.8898617

Logar. Cosin. $52°, 50'$ = 9.7811344

Logar. $128\frac{1}{2}$ = 2.1087273.

Est ergo Velocitas, qua bomba in terram recidit tanta, ut uno m $128\frac{1}{2}$ uln. Angl. motu uniformi pervadere potuisset.

§. CXVIII. Si bomba nullam in aëre offendisset Resistentiam, foret curva descripta Parabola AXZ (*Fig.* 10.). Hinc, quia Tangens t anguli Elevationis $45°$ est = Radio = 1, erit (§. LXVIII.) jactus amplitudo horizontalis omnium maxima, & æqualis duplæ altitudini, Celeritati initiali debitæ, unde AZ = 2727 uln., & AY = YZ = $1363\frac{1}{2}$ uln., & altitudo maxima XY erit $= \frac{1}{2}$ AY $= \frac{1}{4}$ AZ $= 681\frac{3}{4}$. Posito itaque AY $= y$, & XY $= x$, & Parametro $= a$, erit ex natura Parabolæ $ax = y^2$, est vero in nostro casu $x = \frac{1}{2}y$, unde $\frac{1}{2}a = y$; unde erit arcus AX = XZ =

$$z = \frac{y}{a}\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2} + \tfrac{1}{4}a \times \text{Hyp. Log.}\ \frac{y + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + y^2}}{\tfrac{1}{2}a}$$

sive $z = \frac{1}{2}y\sqrt{2} + \frac{1}{2}y \times \text{Hyp. Log. } \overline{1+\sqrt{2}} = 964 + 600 = 1564$ uln.

Celeritas in vertice Parabolæ X est (§. CXIII.) debita altitudini æquali distantiæ X à Foco Parabolæ $= \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}y = x$. Incidit ergo Focus in puncto Y lineæ horizontalis AZ, adeoque Celeritas in in X debita est altitudini $x = 681\frac{3}{4}$, quæ convenit (§. XXVIII.) $120\frac{4}{5}$ uln. Angl. uno m.

§. CXIX. Quæ computavimus, sequenti comprehenduntur Tabella:

In Vacuo.	*In Aëre.*	*Differ.*
AY = $1363\frac{1}{2}$ *uln.*	AD = 1053 *uln.*	$310\frac{1}{2}$ *uln.*
YZ = $1363\frac{1}{2}$ —	DF = 926 —	$437\frac{1}{2}$ —
XY = $681\frac{3}{4}$ —	CD = 567 —	$114\frac{3}{4}$ —
AX = 1564 —	AC = 1211 —	353 —
XZ = 1564 —	CF = $1127\frac{1}{2}$ —	$436\frac{1}{2}$ —
Celer. in A = 171	*Celer. in* A = 171	0
——— X = $120\frac{4}{5}$	——— C = $95\frac{4}{5}$	25 —
——— Z = 171	——— F = $128\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$ —
Angulus A = 45°	*Angulus* A = 45°	0
Angulus Z = 45°	*Angulus* F = $52^\circ, 50'$	$7^\circ, 50'$.

§. CXX. Si punctum feriendum sit infra horizontalem lineam depressum, vel supra eandem elevatum, eadem methodo jactus amplitudo erui potest. Ut eodem utamur exemplo, sit (*Fig.* 8. & 10.) punctum feriendum T, cujus depressio infra horizontem sit WT = DV = 783 uln., erit CV = CD + DV = 567 + 783 = 1350 uln. Divisa hæc quantitas per $2E$ seu 5344, exhibet aream GPN = 0.25262, à qua subtracta area GLM = 0.0653, remanet area LMPN = 0.18732, cui respondere deprehendetur abscissa GN = 2.25, unde calculo eadem ratione instituto, qua in præcedentibus, invenitur UT = BW = $635\frac{1}{4}$ uln. Erit itaque VT = DB + UT = $736\frac{1}{4}$ + $635\frac{1}{4}$ = $1371\frac{1}{2}$ uln., & AW = AD + VT = 1053 + $1371\frac{1}{2}$ = $2424\frac{1}{2}$, unde AT = $\sqrt{AW^2 + WT^2}$ = 2548 uln. Angl. Et, quia GN = 2.25 exprimat Tangentem anguli, cujus Radius eſt 1, erit angulus Deſcenſus UTF = $66^{\circ}, 2'$. Quo magis ergo corpus deſcendat, eo major evadet angulus Deſcenſus; creſcente enim linea EU, creſcit area GION, ut & axis GN, exprimens Tangentem anguli Deſcenſus.

§. CXXI. Quoniam Tangens anguli recti eſt infinitæ longitudinis, poterit axis GN in infinitum accreſcere; creſcet ergo tandem t, adeoque & A in infinitum; & hinc fient ordinatæ Curvæ IO ſeu $\frac{1}{n+A}$ infinite parvæ, & curva magis magisque ad axem GN accedens, nunquam cum ipſo concurrere poterit: erit itaque GN Aſymptotus Curvæ IO. Liquet hinc, aream inter IO & axem interceptam, adeoque & UT, quæ rationem ſequitur hujus areæ, non ultra certum terminum accreſcere poſſe, & angulum deſcenſus non niſi in infinito fieri poſſe rectum. Conſequi hinc mihi videtur, Curvam in Aëre deſcriptam in deſcenſu habere Aſymptoton Verticalem pq. Patet ex hiſce iterum, quod antea §. LXXXVIII. adfirmavimus, veram corporis, per aëra projecti, Curvam magis accedere ad Hyperbolam cum Aſymptoto verticali, quam ad Parabolam. Fatendum tamen cum ſummo Eulero (g) certum eſſe, Curvam hanc non habere Aſymptoton Hyperbolicam, ſed diverſi generis.

§. CXXII. Ex allatis & computatis huc usque Experimentis evidenter patet, quantopere errent ii, qui Theoriam Projectorum Galilæanam ad jactus globorum & bombarum applicare ſtuduerunt, ſtatuentes Aëris Reſiſtentiam nimis exiguam, quam ut ullam hujus rationem in praxi haberi opus eſſet, & Curvam deſcriptam ſaltem quam proxime eſſe Parabolam Apollonianam. Verum Aëris Reſiſtentiam haud contemnendam eſſe, ſufficienter probat poſtremo allatum exemplum; debuiſſet enim bomba ſpatium 2727 uln. abſolvere, dum revera tantum pervenit ad diſtantiam 2000 uln. Quam erronea ergo hypotheſis, quæ flocci facit vim, cujus effectus tantus eſt, ut amplitudo jactus hinc plus quarta ſui parte fuerit imminuta? Solis his caſibus dici poteſt corpus apparenter deſcribere Parabolam, ſi parva

(g) Mechanica Tom. I. p. 405.

va projiciatur vi ac Velocitate, ſequitur enim aëris vis reſiſtens, cæteris paribus, rationem duplicatam Velocitatum. Sic quam proxime deſcribit Parabolam aqua ex foramine vaſis laterali erumpens, vel è tubo oblique poſito proſiliens, vel etiam lapis ope ſolius brachii projecta.

§. CXXIII. Theoria Projectorum in Aëre huc usque tradita ponit Legem Reſiſtentiæ eſſe Celeritatis quadratum (§. XCI.): inventæ ergo Regulæ tantummodo applicari debent iis caſibus, ubi Velocitas globi initialis minor eſt quam 1200 ped. Angl. uno $\dot{m}$ (§. XXX.), ut in exemplis allatis obſervavimus. Verum ſuperante globi Velocitate hunc terminum, Reſiſtentia (ut Capite primo oſtendimus) fit triplo major, tunc enim velocius movetur globus, quam ut aër, convenienter naturæ ſuæ premens, ſpatium pone globum relictum replere poſſit. Hoc in caſu ergo, facile liquet, differentiam inter veram corporis Projectoriam in aëre & in vacuo adhuc multo majorem eſſe debere. Ut exemplo res fiat clarior, memorat Robins (*b*) Experimentum factum ab Eldred, qui ſæculo præcedente erat à tormentis in arce Doverienſi: ſumſerat is Tormentum, cui nomen *demi-culverin*, cujus longitudo erat $10\frac{2}{3}$ ped. Angl.; immittebatur globus 9 libr., eratque menſura pulveris pyrii 7 libr. Tormento 12° elevato, ejiciebatur globus ad diſtantiam 2840 uln. Angl. Vis, qua projiciebatur globus, debita erat altitudini 19200 uln., id eſt, Velocitas tanta erat, ut motu uniformi uno $\dot{m}$ 1921 pedes percurrere potuiſſet. Invenitur hinc jactus amplitudo ex §. LXVII.

Logar. Sin. $2 \times 12^{\circ}$	$=$	9.6093133
Logar. 2×19200	$=$	4.5843312
Logar. Radius	$=$	10.0000000
Logar. 15618	$=$	4.1936445

ſive

(*b*) *Tracts of Gunnery* n°. 5.

five jactus Amplitudo in vacuo erat = 15618 uln. Angl.
in aëre vero = 2840 uln. Angl.

unde differentia est = 12778 uln. Angl. seu quam proxime $7\frac{1}{4}$ milliar. Angl., continet enim Milliare Anglicanum (*i*) 1760 uln. Angl. Tanta ergo fuit hoc in casu Aëris Resistentia, ut globus in amplitudine jactus horizontali paulo minus quam $\frac{4}{5}$ partes amiserit ejus amplitudinis, ad quam in vacuo pervenisset. Plura dabit exempla sæpius laudatus ROBINS (*k*).

§. CXXIV. Aucta ergo Globi Velocitate ultra terminum 1200 ped. uno min. sec., Aëris Resistentia immane quantum crescit: observari interim meretur, amplitudinem jactus horizontalem hinc non effici multo majorem; globus enim è tormento explosus Velocitate, hunc terminum superante, triplo majorem ab aëre offendit Resistentiam, adeoque longe citius ejus retardatur motus. Exempli gratia (*l*), tormentum oneratum globo 24 libr., totidemque libris pulveris pyrii, explodit globum ad distantiam 3000 uln. Angl., dum idem globus ope tantum 5 libr. pulveris pertinget ad amplitudinem 2500 ulnarum. Jam compertum fuit, quantitatem pulveris, cujus pondus æquat duntaxat quadrantem ponderis ipsius globi, excutere globum Velocitate paulo minore, quam 1200 ped. uno $\overset{\prime}{m}$; adeoque in priore casu Velocitas erat major, in posteriore casu minor quam 1200 ped. Sequitur hinc, proportionem pulveris pyrii 5 ad 24 produxisse tantum proportionem in amplitudine jactus 25 ad 30, seu 5 ad 6; & augmentum pulveris 19 libr. globum tantum propulsisse ad distantiam 500 ulnis majorem. Liquet etiam amplitudinem jactus horizontalem solam non posse esse certum indicium Velocitatis, qua globus gulam tormenti egrediebatur.

§. CXXV. Satis ex §. præcedenti manifestum, in jactibus globorum omne pulveris pyrii additamentum ultra $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{3}$ ponderis ipsius

(*i*) ROBERTSON *a compleat Treatise of Mensuration*, *p.* 56.
(*k*) Loc. cit.
(*l*) ROBINS *Practical Maxims*, *Max.* 12.

ſius globi effectum non producere multo majorem, imo in re Bellica obeſſe verius quam prodeſſe. Hinc enim non tantum inutilis eſt jactura pulveris, verum & tormentum vehementiori igne maximopere incaleſcit, unde ſæpius refrigerationem flagitat; prætereaque ab increſcente pulveris vi elaſtica horrendo impetu renititur, & fulcrum ſeu ploſtellum (*affuyt*), cui incumbit, longius retroagitur, majoremque inde patitur vim ſtratum (*platte-form*), cui innititur. Neceſſario ergo inſigne fit temporis diſpendium, ſive numerus jactuum certo temporis ſpatio minor eſt, quod quantum in re Bellica, præcipue in præliis, adferat incommodum, quis non videt? Paucis hoc fuſius oſtendiſſe non inutile fuerit, licet ab inſtituto meo paulum alienum.

§. CXXVI. In re Bellica triplici præcipue in caſu Tormenta uſui veniunt, tum in præliis terreſtribus, tum in pugnis navalibus, tum in oppugnandis & defendendis urbibus munitis. Et primo quidem in præliis, ſi tormenta campeſtria armentur globis, menſura pulveris pyrii, cujus pondus non excedit $\frac{1}{5}$ ponderis globi, maximam præbet utilitatem, velocitate (*m*) globi tunc accedente ad 1200 ped. Angl. uno $\acute{m}$. Majus enim additamentum ob triplam Aëris Reſiſtentiam, & incommoda hinc orta obeſſet potius quam prodeſſet, dum ab altera parte effectus inde perparum augeretur, ut ſupra oſtendimus. Si vero Tormenta onerantur Grandine Pyrotechnica (*n*) (*Schroot of Cartetſche*), menſura pulveris pyrii adhuc minor optatum præſtare poteſt effectum, ſic enim exploſi globi plumbei, catenæ, clavi &c., Grandinem hanc conſtituentes, non tam facile diſperguntur, majoremque ſic in exercitu hoſtili edunt ſtragem; alias enim nimium diſſipantur & maximam partem pereunt inutiliter, dum Velocitas minor, qua exploduntur, ſufficit ad lethalia vulnera infligenda.

§. CXXVII. Alter uſus Tormentorum eſt in pugnis Navalibus, quo in caſu imprimis inſerviunt perforandis navium hoſtilium lateribus,

(*m*) Robins *ibid. Max.* 20.
(*n*) Belidor *le Bombardier François*, *p.* 308.
(*o*) Robins *ibid.*

bus, quorum terminata ſemper eſt craſſities. Jam Experimenta (*o*) probant, globum 18 libr. exploſum ope $3\frac{1}{2}$ libr. pulveris ſufficere transadigendo truncum querneum, cujus craſſities eſt 36 pollicum: compertum quoque fuit globum, cujus vis ea tantum eſt, ut craſſitiem lateris Navis penetrans Velocitatem amittat, dum in extrema ipſius ſuperficie eſt, maximam ſortiri efficaciam; ſic enim foramen fit majus, dum globus hoc modo latus navis penetrans lignum disrumpit, lacerat, & fragmina rimasque facit; alias enim globus majori Velocitate exploſus facilius perforat, nec majus efficit foramen, quam ipſius globi eſt magnitudo, quod ex elaſticitate ligni maxima ex parte coït. Velocitati huic globo conciliandæ, qua hoc efficiat, ſufficit, ſi pulveris pyrii menſura quadrantem ponderis ipſius globi non excedat.

§. CXXVIII. Præcipuus vero Tormentorum uſus eſt in oppugnandis urbibus munitis, & maxime quidem, ubi munimenta oppidorum ſunt diruenda. Prima fronte viderentur globi, quo majori Velocitate exploduntur contra Vallum, eo majori impetu & graviori ruina Loricam convulſuri, Murique partem dejecturi, quo vallum plerumque veſtitum ſeu obtectum eſt (*Bres ſchieten*). Verum licet globi minore Velocitate, quam 1200 ped. uno $\dot{m}$ non tam alte penetrent, differentia tamen tanta non eſt, quin ſupra memorata incommoda, quæ hinc evitantur, hunc defectum ſatis compenſent: expeditior hinc fit tormentorum uſus, & frequentiores ictus, quantumvis minore Velocitate adactos, ſi in unum contrahantur, magis nocere Experientia teſtis eſt. Referente ROBINSIO (*p*), hanc Methodum ſecuti fuerunt Galli in noviſſimo bello Belgico viginti quinque abhinc annis, & quod excedit; in omnibus enim obſidionibus, quas ſuſceperunt, ubi vallum erat convellendum, quantitas pulveris pyrii pondere æquans $\frac{1}{3}$ ponderis globi ſperatum habuerunt effectum. Verbi gratia, tormenta, ejaculantia globum 24 libr. onerabantur 8 libr. pulveris pyrii. Ubi vero munimenta more antiquorum conſtructa ſunt,

(*p*) *A propoſal for increaſing the ſtrenght of the Brittiſch Navy*, *Math. Tracts Tom. I*, p. 291.

ſunt, id eſt, ſimpliciter conſtant muris, cujus craſſities plerumque & ad ſummum eſt 4 vel 5 pedum, eadem quæſtio eſt ac §. præced. & maxima dabitur ruina, ſi globus murum penetrans omnem pœne amiſerit Velocitatem, ubi ab altera parte egreſſus fuerit. Quæ dicta ſunt, applicari quoque debent jactibus bombarum ope mortariorum. Ex hiſce liquet, in omnibus operationibus, quæ in re Bellica occurrunt, ubi Tormenta uſui veniunt, Velocitatem minorem, quam 1200 ped. uno m̋, optimum præſtare effectum. Verum, miſſis his, ad propoſitum redeamus.

§. CXXIX. Ex ſuperioribus abunde liquet, in exercenda arte Tormentaria Aëris Reſiſtentiam minime negligendam eſſe; dolendum interim, Theoriam traditam nimis intricatam eſſe, ideoque applicationem ejus exemplis practicis difficiliorem, quam ut ad uſum vocari poſſit. Verum alius præterea adhuc ſupereſt ſolvendus nodus, qui dudum Architectos militares & Pyrotechnas cruciavit. In exemplis ante allatis, quibus calculum noſtrum applicavimus, Theoria à Praxi non multum diſcrepare deprehenditur, in omnibus autem Experimentis minime res ita feliciter ſuccedit; dantur enim, in quibus differentia haud contemnenda eſt. Unico confirmaſſe hæc exemplo ſufficiat. Experimentum fuit inſtitutum prope Woolwich (q): elevabatur Mortarium Nauticum ad angulum ſemirectum ſeu 45̊, & onerabatur 12 libr. pulveris nitrati, & globo cavo ſeu bomba, cujus diameter erat 10 poll. & pondus 96 libr. Accenſo pulvere, reperta fuit amplitudo jactus horizontalis = 3350 uln. Angl., eratque Celeritas initialis debita altitudini 3115 uln., & Exponens Reſiſtentiæ = 2057 uln. Ex tradita Theoria invenietur jactus amplitudo = 3190 uln., unde differentia inter calculum & Experimentum eſt 160 uln. ſeu 480 ped. Angl.

§. CXXX. Sponte hinc ſuboritur quæſtio, utrum deſcrepantia hæc Theoriæ ſit adſcribenda, an Praxi? Nulli autem nos dubitamus iis

(q) *Tracts of Gunnery* n°. 5.

iis aſſentiri, qui maximam ſaltem partem in ipſa praxi hunc defectum quærunt; deprehenſum enim fuit, ipſa Experimenta eodem modo inſtituta, iisdemque adhibitis cautelis, quam longiſſime haud raro à ſe invicem differre. Hoc aſſertum evidenter demonſtrant Experimenta (*r*) à Gallis prope *Metz* in *Lotharingia* inſtituta. Tormentum, 10 pedum longitudinis, elevatum fuit 5° ſupra horizontem, & ope 9 libr. pulveris pyrii explodebatur globus 24 librarum. Ex theoria evenire debuiſſent pro amplitudine jactus 843 hexapedæ Gallicæ (*toiſes*). Experimentum decies octies repetitum fuit eodem tormento & globo, eademque menſura pyrii pulveris, ad eundem elevationis angulum, erantque jactus ſequentes

	hexap.		*hexap.*		*hexap.*		*hexap.*		*hexap.*
1	715	5	742	9	854	13	808	16	735
2	917	6	806	10	822	14	856	17	900
3	855	7	870	11	858	15	1010	18	783
4	812	8	854	12	826				

Octavus & nonus hic tantum ſunt æquales, dum differentia omnium maxima eſt inter primum & decimum quintum jactum, nempe 295 hexap. Gall., ſeu 1770 ped. Pariſ., qui conveniunt 1711 ped. Rhenol., eſt enim (*s*) ex dimenſionibus PICARDI pes Regius Pariſienſis ad pedem Rhenolandicum quam proxime, ut 30 ad 29. Hinc ruſus (§. CXXIV.) deduco, amplitudinem jactus horizontalem criterium ſuppeditare non poſſe Velocitatis initialis, qua globus exploſus fuit, dum in exemplo allato Velocitates hæ quam proxime erant æquales, & amplitudines nimis diſcrepant.

§. CXXXI. Præcipuam phænomeni hujus cauſam Architecti Militares & Pyrotechnæ alii aliis adſcripſere circumſtantiis, & ſtatuerunt, globum ad majorem minoremve explodi diſtantiam, vel pro majori denſitate, qua pulvis pyrius in tormento ſit compactus, vel prout tormentum magis minusve incaluerit, vel prout Atmoſphæra ma-

(*r*) Ibid.

(*s*) LULOFS *Beſchouwing des Aardkloots*, *p.* 632.

magis minusve fuerit condensata. Hinc orta ubique fere recepta opinio (*t*), globos tempore matutino explosos ad majorem ejaculari distantiam, quam tempore meridiano, quem errorem verbulo me jam ante refutasse memini. Quicquid id est, hæ causæ, dummodo debita adhibeatur cautela, maximam partem evitari possunt, tantamque creare nequeunt differentiam. Præcipuum hujus incertitudinis fontem quærendum esse autumo in ipsa Aëris Resistentia.

§. CXXXII. Globus è tormento explosus triplici vi sollicitatur; una, quæ ipsum propellit secundum lineam directionis, originem habet à vi pulveris pyrii; altera, qua deorsum tendit, debetur Gravitati; tertia vero adhuc datur vis, quæ oblique in globum agens, ipsum deflectit à linea directionis, vel dextrorsum vel sinistrorsum. Globi nempe non ita exacte replent animam tormenti, quin explosi radant ejus latus dextrum vel sinistrum, superius vel inferius; hinc oritur frictio globi, & præter motum ejus progressivum, etiam motus rotatorius circum axem. Necessario hinc evenire debet, ut globo aër ex obliquo resistat; hac enim in parte ejus, ubi vis centrifuga conspirat cum motu progressivo, aëris resistentia prævalebit, & major erit, quam ab altera parte, ubi duo hi motus sibi mutuo sunt oppositi. Globus ergo explosus constanter hanc partem versus deflectetur, versus quam tendit vis centrifuga in antica parte. Liquet hinc, lineam à globo non amplius describi eodem plano, conspirante cum linea directionis, sed proprie esse duplicis Curvaturæ; & figura ejus optime concipietur, si vera Projectoria, ante inventa, descripta intelligatur in superficie Cylindri, cujus positio variat, pro varia globi rotatione, ut infra clarius apparebit. Aëra vero oblique resistere globo projecto & circum axem voluto, sequens simplicissimum demonstrat Experimentum. Suspendatur globus, è ligno vel alia materia confectus, è fune cujuslibet longitudinis: circumrotando globum spiræ funis contorqueantur: globus dein ad quamlibet à linea verticali distantiam dimoveatur, & sibi relictus instar penduli oscillabit, & acquiret motum progressivum; dum interea funis contortus re-

(*t*) Belidor *le Bombardier François*, *p.* 38.

resolvitur, & globo conciliat motum Rotatorium circum axem. Globus duplici hoc motu gaudens deflectet vel dextrorsum vel sinistrorsum ad notabilem sæpe distantiam à linea directionis; & si observabimus, qua in parte motus progressivus conspiret cum vi ejus Centrifuga, semper prædici poterit, in utram partem sit declinaturus.

§ CXXXIII. Ex hisce facile explicari potest, qua de causa globi eadem vi, eodemque tormento, in eadem directionis linea, explosi tantopere nonnunquam varient in amplitudine jactus horizontali: globus enim si dextrum latus tormenti radat deflectet versus dextram ex rotatione circum axem; si sinistrum, versus sinistram lineæ directionis partem. Simili quoque modo si radat latus superius, deflectet sursum versus, & hinc amplitudo jactus fiet longior, dum è contrario amplitudo contrahetur, si globus radat latus tormenti inferius, & deflectat deorsum. Jam experimento (*u*) constitit, in distantia 760 uln. globum sæpe aberrasse 100 uln. à linea directionis; imo, si angulus Elevationis non sit minor quam 8° vel 10°, differentiam inter duos jactus eorundem globorum, eodem modo projectorum nonnunquam accedere posse (*v*) ad 600 vel 700 uln. Hinc, si ea vi globus in altero jactu deflectat sursum, in altero deorsum, non mirum, tantam amplitudinis interesse posse differentiam, quanta in exemplo §. CXXX. memorato apparuit. Quoniam autem prædici nequit, quorsum sit deflexurus (id quod dependet à varia actione & impulsu pulveris pyrii in eundem), amplitudo jactus horizontalis hinc semper manebit dubia. Deflectionem seu declinationem talem in explosis globis revera obtinere, accuratissimis experimentis demonstravit ROBINS (*w*), ex professo institutis, ad hanc veritatem omni dubitationis aleæ eripiendam.

§. CXXXIV. Ratio hinc quoque reddi potest, quare sulcata seu striata sclopeta longe accuratius in scopum colliment. Sclopeta autem

(*u*) ROBINS *New Principles of Gunnery cap.* 2. *pr.* 5.
(*v*) Id. *Practical Maxims*, *Max.* 13.
(*w*) *Tracts of Gunnery* n°. 3.

tem ſtriata (*getrokke busſchen*) ſunt, quorum tubus ſeu interior ſuperficies in formam Helicis eſt ſulcata per diverſas ſpiras, ita ut referat cochleam (ut vocant) interiorem ſeu fœminam; ea tamen differentia, quod in tali ſclopeto convolutiones ſpirarum non ita ſint multiplices, magisque accedant ad lineam rectam, quam in cochleis vulgaribus. Globi in hujusmodi ſclopetum intruduntur, qui, quoniam ex plumbo metallo molliore conſtant, facile formam harum ſtriarum induunt, ita ut globus quaſi referat cochleam exteriorem ſeu marem. Globus, ex ita ſtriato ſclopeto avolans, acquirit, præter motum progreſſivum, etiam motum rotatorium, tali modo, ut axis globi rotati coincidat cum linea directionis. Manifeſtum hinc, Aëra Reſiſtentiam ſuam æquabiliter diſtribuere verſus omnes globi partes, & æqualem ejus efficaciam eſſe in æquali à polis diſtantia: globus itaque, terebrando quaſi, aëra penetrabit, & axis ejus, dum è ſclopeto egreditur, eundem ſervabit parallelismum, donec ſcopum tetigerit. Concedendum interim, ob vehementiorem intra ſpiras frictionem, globos egreſſos partem Velocitatis amittere, ideoque tantum non pertendere ſpatium, quantum ſi ſtriæ iſtæ abfuiſſent. Hinc etiam ſtriæ iſtæ frequentiore uſu quodammodo detritæ amplientur, & diminuta hinc frictione, longius avolant globi. Optime de hoc genere ſclopetorum ſcripſere ROBINS (x) & LEUTMAN (y).

§. CXXXV. Antequam finem huic Specimini imponam, ex dictis adhuc duo Corollaria deducere liceat, quæ primo intuitu omnino paradoxa videntur. Prius eſt: ex aberratione globi ante deſcripta, nonnunquam contingere poteſt, præſertim ſi angulus Elevationis non ſit minor quam 8° vel 10°, ut globus exploſus ea menſura pulveris pyrii, quæ pondere æquat ipſum globi pondus, brevius pervadat ſpatium, quam ſi idem globus ex eodem tormento, ad eandem elevationem aptato, explodatur ope pulveris pyrii, cujus pondus æquat duntaxat $\frac{1}{3}$ ponderis globi. Exempli gratia, vidimus ante (§. CXXIV.) globum 24 libr. exploſum ope 24 libr. pulveris pyrii pertingere ad diſtan-

(x) *The nature and advantage of rifled barrel pièces, Math. Tracts tom. I. p.* 328.
(y) Comment. Petropolit. tom. 3 & 4.

diſtantiam 3000 uln., & ope 5 libr. pulveris pertingere ad diſtantiam 2500 uln., adeoque differentiam tantum eſſe 500 uln. Verum §. CXXXIII. apparuit, ex aberratione globi circum axem rotati, differentiam inter amplitudines horizontales ejusdem globi exploſi ex eodem tormento, ad eandem Elevationem compoſito, eademque pulveris menſura nonnunquam accedere poſſe ad 600 vel 700 uln. Si itaque globus ope 24 libr. pulveris exploſus, radendo latus tormenti inferius, deflectat deorſum, & hinc amplitudinem jactus diminuat; dum ab altera parte ope 5 libr. pulveris, radendo latus tormenti ſuperius, deflectat ſurſum, & hinc amplitudo adaugeatur; hoc in caſu, inquam, non mirum, globum quintuplo minore pulveris pyrii quantitate exploſum, ſi non ad majorem, ſaltem ad eandem pertingere poſſe diſtantiam.

§. CXXXVI. Alterum hoc eſt. Docuit obſervatio, tormenta, quorum animæ ejusdem ſunt diametri, quo ſunt longiora, eo majori vi globos evomere, & longius propellere: haud raro tamen ab altera parte obſervatum fuit plane contrarium obtinere, quod patet ex eo, quod narratur (z) de GUSTAVO ADOLPHO, *Sueciæ* Rege, qui cum globos explodi juſſerat è tormento, ad os aliqua ſui parte mutilo, expertus fuit, globum ex decurtato hoc tormento emiſſum longius avolaſſe. Verum ex obliqua Aëris Reſiſtentia paradoxum hoc facile explicari poteſt, dum ex aberratione globi hinc orta amplitudo jactus in longiore Tormento potuerit eſſe diminuta, & è contrario in breviore adaucta.

(z) DALHAM Inſtitutiones Phyſicæ, Tom. II. p. 313.

F I N I S.

THE-

T H E S E S.

I.

Leges quasdam Poſitivas Univerſales à Deo latas eſſe, contendenti ſummo Grotio *aſſentimur.*

I I.

Statum Solitarium Sociali eſſe præferendum, minime Fam. Rousseau *largiendum eſſe, autumo.*

I I I.

Atheos non eſſe Dei ſubditos, impia eſt & abſurda Hobbesii *ſententia.*

I V.

Quæ circa originem Idearum explicandam & illuſtrandam tradiderunt tum Nob. Cartesius *tum Ill.* Leibnitius, *admittenda non videntur.*

V.

Manichæorum *commentum de duplici principio æterno, uno cauſa boni, altero mali, omni caret fundamento.*

V I.

Spatium non eſſe Subſtantiam, ſive aliquid reale, tenemus; quique pro oppoſita ſtant ſententia, inextricabilibus ſeſe involvunt difficultatibus.

V I I.

Principia, quibus nituntur Newtoni Fluxiones *toto cœlo differunt à principiis, quibus nituntur* Leibnitii Differentialia; *illius interim conceptus rigori Mathematico magis eſt accommodatus, hujus autem non omni exceptione major.*

V I I I.

Qui Curvæ, à Globis vel Bombis deſcriptæ, proprietates Parabolæ applicant, omni Experientiæ contrariantur.

I X.

Ex diſtantia, ad quam globi, è tormentis exploſi, feruntur, judicium ferri nequit de Velocitate, qua gulam tormenti fuere egreſſi.

X.

Aquam revera elaſticam eſſe, ſive in arctius ſpatium poſſe comprimi, nulla adhucdum evicerunt Experimenta; oppoſitæ tamen ſententiæ non favent Philoſophorum Florentinorum tentamina.

X I.

Qui Gravitatem ab Aethere subtili premente repetunt, hypotheses hypothesibus temere addunt.

X I I.

Qui ex eo, quod radii Lunares in foco speculi caustici collecti ne vel minimum ostendant caloris indicium, demonstrare volunt, dari posse lumen absque calore, nimis præcipitanter judicant.

X I I I.

Adscensum aquæ in tubulis capillaribus ad Attractionem referre, nulli dubitamus.

X I V.

Ad eandem quoque referimus Refractionem radiorum Luminis, per alia & alia media transeuntium.

X V.

Maris Fluxum & Refluxum ab ejusdem Gravitatione in Solem, præcipue vero in Lunam oriri, existimamus.

X V I.

Quæ ad explicandam Diluvii Universalis causam tradidit Rev. BURNET, *merito rejiciuntur.*

X V I I.

Orbitæ Cometarum admodum excentricæ, secantes Planetarum orbitas, CARTESII *doctrinam de Vorticibus egregie refellunt.*

X V I I I.

Aberrationes Fixarum BRADLEJANÆ *sententiam de motu Telluris annuo circum Solem omni dubitationis aleæ eripiunt.*

X I X.

Telluris Figura Sphæroidea, versus Polos applanata, demonstrat rotationem ejus circum axem.

X X.

Ab eadem Telluris Figura dependere Præcessionem Aequinoctiorum, defendimus.

F R A-

FRATRI CARISSIMO

THEOPHILO HOOGEVEEN,

CUM PHILOSOPHORUM ORDINI ADSCRIBERETUR.

Nuper ab aetherea demiſſus Jupiter aula,
Armigero vehitur per inanes aetheris oras
Alite, quo ventos agitat: velocior aura
Et rapido torrente ruit, collectaque findens
Nubila, fraternas properans defertur ad undas,
Oceanique pedem campis advertit, & imis
Rectorem pelagi penetralibus evocat aulae,
Ore ſacro fundens ſpirantia verba querelas.
Quae cauſa impulerit rapidos huc tendere curſus,
Forſitan inquires, Frater. Quae mente recondo,
Expediam; placidam Tu dictis adjice mentem;
Tu da conſilium, & regno ſuccurre ruenti.
Nil intentatum praeceps, nil linquit inauſum
Gens humana; petit quin imperterrita coelum
Stultitia, meritas nil curans fulminis iras.
Ambigua vix ſorte datum eſt immania coeli
Regna tenere mihi, & pelagi Tibi contigit ampli
Imperium ſaevusque tridens: en turba gigantum
Impia, congeſtis ad ſidera montibus, auſa eſt
Sollicitare Deos, ſaevoque laceſſere bello.
Audax Japeti genus, auxiliante Minerva,
E vili fictis argilla gentibus ignem
Intulit aethereum. Contemſit munera vitae,
Qui primus rabidis metuens nil concita ventis

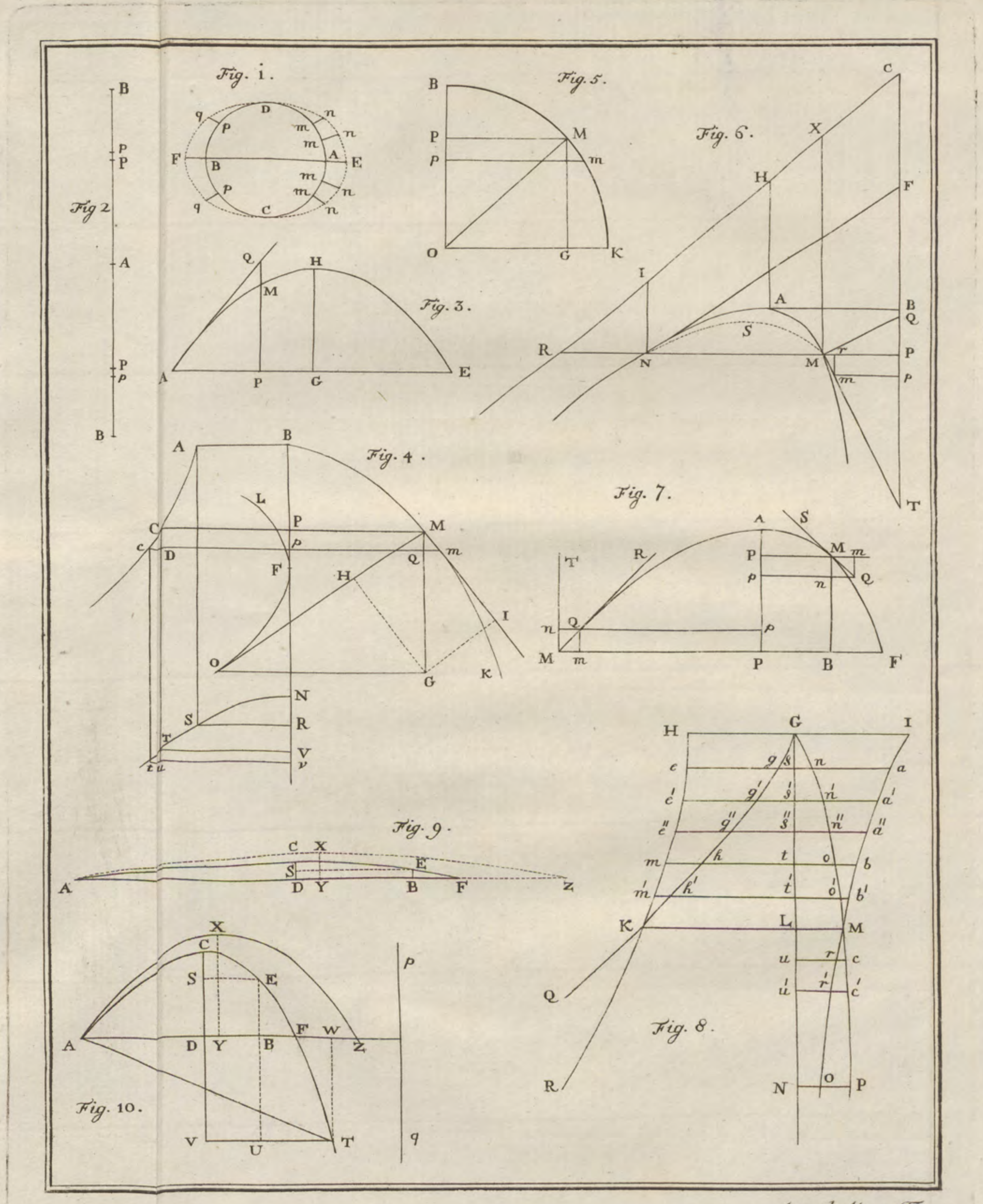
Aequora, nec tumidis jactari naufragus undis,
Inventa vastum sulcavit nave profundum.
Ignivomo malesana vehi Clymeneïa proles
Ausa fuit curru. Liquidum per inane negatis
Daedalus humano generi se sustulit alis.
Sed quid plura? ferox vires assumsit eundo,
Longaque paulatim per secla audacia crevit:
Quoque magis mundi moles operosa senescit,
Hoc graviore metu crucior, ne viribus auctis
Exsecranda lues effundat ubique venenum.
Haec ratio superis me misit ab aetheris oris
Ad Tua conversum confestim numina, Frater,
Fraternam cum poscat opem commune periclum.
Uranies etenim studiis instructus ephebus
Palladiisque sacris, scrutari viscera Vestae,
Immensas gremio condentis divite gazas,
Non sat habens, aquae qua vi, qua mole resistant
Corporibus, liquido per easdem tramite motis,
Sedulus inquirit; terram, camposque liquentes
Quid jubeat vi stare sua, spumantibus undis,
Et nullo nixos fulcimine: limite cur non
Excedant, natura semel quem provida fixit.
Atque ita stricta Tuo praescribit jura tridenti
Ambitiosus homo. Quin fraenis nescia flecti
Vis animi, aërios audet tentare recessus,
Rimantis, qua lege & qua vi mota ferantur
Corpora. Quid? liquidi percurrit flammea mundi
Atriaque, & pictas stellis rutilantibus arces.
Quam vereor, ne mox humeris mortalibus alas
Aptet, & ad superum festinet tecta Deorum,
Ut spectet, mecum quid tractet regia conjux.
Non haec Divorum toleranda audacia Regi.

Dixe-

Dixerat, attonita Numen cum talia voce
Reddidit aequoreum. Noſtri propiore minantur
Qui regni interitum, frater dilecte, periclo,
Dum diros narras caſus, ceu fulmine tacta
Mens ſtupet. Heu! demens tantum ne audacia crevit!
Tanta ſui generis tenuit fiducia gentes!
Ipſa mali verae ſunt cauſae Numina; nam ſi
Aonias proles Latonia ſiſteret undas,
Si ſuboles ſine matre, Tuo prognata cerebro,
Mitteret incautos male provida Pallas alumnos;
Si non arcanis ſtudiis, generique negandis
Humano teneros, formaretque artibus annos,
Aeterna populos regeremus pace quieti.
Gens ubi ſollicitos nos unquam ruſtica reddit,
Aſtriferum ſpectans indocto lumine coelum?
Haec validis terram proſcindere gnara juvencis,
Doctaque foecundis committere ſemina campis,
Caetera Numinibus prudens curanda relinquit.
En Tibi cauſa mali; vulſis radicibus iſtam
Quamprimum junctis tollamus viribus. Illud
Si tamen haud fieri poterit, Tu fulmine coelum
Terribili defende tuum, mea regna tridente
Ipſe regam ſceptro, & vigili cuſtode tuebor.
Tales inter ſe fundentes voce querelas
Alterna fratres forte indignata Minerva
Audiit, impatiensque morae ſic ora reſolvit.
Quid ſtruitis? Numquid terris abolere paratis
Ingenuas artes, cultumque & ſacra Minervae?
Sic pulcris animum Juvenis conatibus auctum
Conſiliis veſtris infringere? mergere crudae
Barbariae denſa cupitis caligine gentes?
Non ita: ſed docilis noſtris nutritus Alumnus

Verſatusque diu ludis, pede pergat eodem,
Ingeniique ferant foecundam germina meſſem.
Intima doctrinae Juveni penetralia pandam.
Quas mare, quas terrae, quasque officioſa recondit
Divitias natura ſinu perquirat, & altis
Altius aethereis penetret mens nobilis oris:
Aſtraque cuncta notet placido rutilantia coelo,
Obliquamque viam ſolis, Lunaeque labores;
Qua Phoebum ratione Venus, qua penniger Hermes
Circumeant propiore via, qua ſidere Mavors
Sanguineo rutilans, nulloque ſatellite cinctus,
Semotusque magis Phoebo: palantia luſtret
Aſtra Jovis, tardosque Senis volventia gyros.
Maſcula vis animi ſic creſcat, & ardua quaevis
Ingenio ſuperet: famaeque animoſa cupido
Exagitet mentem ſtimulis. Sic juſta labores
Exactos merces, & gloria digna ſequatur.
Haec ubi dicta dedit, flagrantia fervidus ira
Huc illuc pelagi dominator lumina torſit,
Coeruleasque rotas agitans, & coerula findens
Cum ſonitu ſpumante Salo, turbata tridente
Aequora quaſſabat, tumidisque inſurgere ventis
Juſſit, & horrendos ad litora volvere fluctus.
Nec minus indignans motis ſe ſuſtulit alis
Jupiter, & liquido ſua tramite tecta petivit.
Interea Pallas frondentes ſedula ramos
Implicat, & Juvenis praecingit flore capillos.

THEODORUS HOOGEVEEN,
Med. Doct. Lector Anat. Chirurg.
& artis Obſtetric.



A. v. d. Meer F.