OVER

DE STROOMING VAN VLOEISTOFFEN DOOR BUIZEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

DOOR

MATTHEUS JACOBUS HUBERTUS HOUBA.

OVER
DE STROOMING VAN VLOEISTOFFEN DOOR BUIZEN.

OVER
DE STROOMING VAN VLOEISTOFFEN DOOR BUIZEN,

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. P. VAN GEER,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

OP ZATERDAG, DEN 10den MAART 1883, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR,

DOOR

MATTHEUS JACOBUS HUBERTUS HOUBA,

GEBOREN TE BAARLO.

NIJMEGEN — H. C. A. THIEME.
1883.

AAN MIJNE OUDERS.

INLEIDING.

Reeds aan Newton [1]) was het gebleken, dat zijne definitie: »fluidum est corpus omne, cuius partes cedunt vi cuique illatae et cedendo facile moventur inter se" voor de verklaring van sommige verschijnselen aangevuld diende te worden, en hij heeft zelfs eene hypothese over de »resistentia quae oritur ex defectu lubricitatis" opgesteld, die heden nog dienst doet. Daartoe schijnt hij zich evenwel te hebben bepaald.

De hydrodynamische vergelijkingen werden met inachtneming der wrijving voor het eerst opgesteld door Navier [2]), nadat echter reeds door practici als Couplet, Bossut, Dubuat, Prony, Girard en Eytelweyn met den weerstand, die bij strooming van water optreedt, was rekening gehouden in empirische formules, waarvan sommige, min of meer gewijzigd, nog in gebruik zijn. Later hebben nog Cauchy [3]), Poisson [4]), Stokes [5]) en O. E.

---

[1]) Phil. nat. princ. mathem. 1687. Liber II, sectio IX.

[2]) Mém. de l'Acad. de Paris. 1823. T. 6.

[3]) Excerc. de math. 1828. 3ième année.

[4]) Journ. de l'école pol. 1831. T. 13, cah. 20.

[5]) Cambr. phil. transact. vol. 8, 1849.

Meyer [1]) langs verschillende wegen de wrijvingskrachten in de bewegingsvergelijkingen ingevoerd. Onze afleiding in het eerste hoofdstuk sluit zich grootendeels aan bij die van Kirchhoff [2]), aan wien ook de grensvoorwaarden zijn ontleend.

In het tweede hoofdstuk wordt behandeld de rechtlijnige, stationnaire strooming door eene cylindrische buis met cirkelvormige doorsnede. De theoretische resultaten, voor het eerst door Stokes [3]) afgeleid, worden vergeleken met de proeven van Poiseuille [4]) over de strooming van water en met die van Warburg [5]) over de strooming van kwik door capillaire glazen buizen. De empirische door Poiseuille opgestelde formule en ook de proeven van Warburg zijn met de theorie in volmaakte overeenstemming en toonen bovendien aan, dat bij de strooming van water of kwik door glazen buizen de glijdingsconstante nul is; m. a. w. dat de vloeistof aan den wand in rust blijft.

Omdat de stroomsnelheid bij de proeven van Poiseuille en Warburg betrekkelijk gering was, scheen het ons noodig andere theoretisch en experimenteel bestudeerde gevallen van vloeistofbeweging te raadplegen omtrent de vraag, of er al dan niet glijding bestaat. Wij beschouwen daartoe in het derde hoofdstuk achtereenvolgens:

1. de experimenten van O. E. Meyer [6]), die metalen, hori-

---

[1]) Crelle's Journ. Bd. 59. 1861.

[2]) Vorles. über math. Physik.

[3]) l. c.

[4]) Mémoires des sav. étr. T. 9, 1847. Uittreksel in Pogg. Ann. Bd. 58.

[5]) Pogg Ann. 1870. Bd. 140.

[6]) Theoretisch gedeelte in Cr. J. Bd. 59, experimenteel in Pogg. Ann. Bd. 113. 1861.

zontaal gestelde schijven om eene vertikale as in de vloeistof deed schommelen,

2. de proeven door Dr. Goossens [1]) over de schijnbare adhaesie van vaste lichamen genomen naar aanleiding eener nieuwe verklaring van dat verschijnsel door Stefan [2]),

3. de onderzoekingen van Helmholtz en von Piotrowski [3]) over de beweging van een van binnen vergulden, gepolijsten, met vloeistof gevulden koperen bol, die om zijne vertikale middellijn schommelt,

4. de door Helmholtz [4]) besproken proeven van Girard [5]) over de strooming in koperen en glazen buizen,

5. de electrische endosmose naar aanleiding van een opstel van Helmholtz [6]) en proeven van Quincke [7]).

Wij worden daardoor geleid tot het besluit, dat men bij de beweging van water langs een glas- of niet gepolijst metaaloppervlak en bij kleine snelheid de glijding kan verwaarloozen, maar bij grootere snelheid *misschien*, en bij met zorg glad gemaakte oppervlakken *zeker* niet.

De hoofdstukken IV, V en VI zijn gewijd aan uitbreidingen van de wet van Poiseuille langs theoretischen weg.

In hoofdstuk III wordt de wet uitgebreid voor rechte buizen met andere dan cirkelvormige doorsnede. Na het bewijs ge-

---

[1]) Proefschrift. Over de schijnbare adhaesie van vaste lichamen. Leiden, 1878.

[2]) Sitz. Ber. der Wiener Akademie. Bd. 69. 1874.

[3]) Wiener Sitz. Ber. Bd. 40. 1860.

[4]) l. c. pag. 654.

[5]) Mémoires de l'Institut, 1813—1815.

[6]) Wiedem. Ann. Bd. 7, 1879.

[7]) Pogg. Ann. Bd. 113. 1861.

geven te hebben, dat het vraagstuk der rechtlijnige stationnaire strooming eener vloeistof in eene buis met gegeven doorsnede, zoowel met als zonder glijding, slechts één oplossing toelaat, hebben wij die oplossing medegedeeld voor buizen, die tot doorsnede hebben:

1. een rechthoek, waarvan de eene afmeting vele malen grooter is dan de andere, met en zonder glijding,

2. een gelijkzijdigen driehoek, zonder glijding,

3. eene ellips, zonder glijding,

4. een willekeurigen rechthoek. Hier hebben wij eene afleiding gegeven voor de oplossing, die door Boussinesq [1]) wordt medegedeeld. Behalve deze hebben wij nog twee andere oplossingen afgeleid, eenvoudiger dan die van Boussinesq. Eene daarvan wordt verkregen door de behandeling van een vraagstuk uit de electriciteitsleer, dat tot dezelfde vergelijkingen aanleiding geeft als het hydrodynamische probleem.

Aan het einde van het hoofdstuk worden een paar stellingen afgeleid, die gelden voor buizen met willekeurige doorsneden.

In hoofdstuk V wordt de wet van Poiseuille naar eene andere richting uitgebreid:

1. voor eene rechte buis met cirkelvormige doorsnede, die uit stukken van verschillende middellijn bestaat,

2. voor eene flauw gebogen buis met langzaam veranderende doorsnede; als bijzonder geval voor eene conische buis,

3. voor vertakte buizen.

In hoofdstuk VI hebben wij den invloed op de rechtlijnige strooming nagegaan van uitwendige krachten, die eene potentiaalfunctie hebben, meer in het bijzonder van de zwaartekracht,

---

[1]) Journ. de Liouville. T. 13, 1868.

en oplossingen medegedeeld voor de rechtlijnige strooming in vertikale en hellende buizen, en in open goten en kanalen.

De stationnaire toestand, die door de formule van Poiseuille wordt gekenmerkt, is in eene buis niet van het begin der strooming af aanwezig; in hoofdstuk VII hebben wij in navolging van Résal [1]), maar langs eenigszins eenvoudiger weg dan hij, de wijze nagegaan, waarop de stationnaire toestand in eene buis met cirkelvormige doorsnede ontstaat, als de snelheid in het begin reeds evenwijdig met de as en slechts functie van den afstand tot de as is.

In het laatste hoofdstuk worden de oorzaken besproken, waarom de wet van Poiseuille in het praktische leven slechts zelden dienst kan doen; binnen zekere grenzen alleen, die zelf echter noch theoretisch, noch experimenteel bepaald zijn, kan men haar gebruiken. De strooming in buizen algemeen mathematisch te behandelen, zal zeker wel niet mogelijk zijn; wel stelt het beginsel der mechanische gelijkvormigheid ons in staat uit bekende gevallen de uitkomsten van vele andere te voorspellen. Bij berekeningen voor waterleidingen, enz. behelpt men zich, om de stroomsnelheid in buizen te bepalen, met eene interpolatieformule, in hoofdzaak door de Prony [2]) opgesteld. Die formule in haar oorspronkelijken of door Darcy [3]), Weisbach [4]), en anderen gewijzigden vorm is misschien zonder voor de praktijk

---

[1]) Résal, Traité de méc. générale. Tome deuxième.

[2]) Prony, Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes. Paris 1804.

[3]) Darcy, Recherches expérim. relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Mem. de div. sav. T. XV. 1858.

[4]) Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

te groote fouten te gebruiken, maar den toestand juist weergeven kan zij niet.

Aan het slot wordt eene formule besproken, die in vele gevallen dienst kan doen als correctie van de formule van Poiseuille, maar volstrekt niet algemeen geldig is, evenmin als eene andere, door O. E. Meyer [1]) opgesteld.

---

[1]) O. E. Meyer, Pogg. Ann. Jubelb. 1874 en Bd. 153, 1874.

EERSTE HOOFDSTUK.

§ 1. De bewegingsvergelijkingen, die voor alle lichamen gelden, onverschillig, of die lichamen zich in vasten, vloeibaren of gasvormigen staat bevinden, zijn, zooals bekend is [1]):

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{du}{dt} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\
\mu \frac{dv}{dt} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\
\mu \frac{dw}{dt} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Daarin stellen voor:

x, y, z de coördinaten van een punt in de ruimte, u, v, w de componenten der snelheid en μ de dichtheid des lichaams in dat punt,

X, Y, Z de componenten der uitwendige krachten, werkende op de eenheid van massa in dat punt,

X_x, Y_x, Z_x, X_y enz. de componenten der drukkrachten in het punt, voor vlakken, waarvan de kleine indices de richting der normaal aangeven, berekend voor de eenheid van oppervlak.

Tusschen die componenten bestaan de betrekkingen:

$$X_y = Y_x, \; X_z = Z_x, \; Y_z = Z_y.$$

---

[1]) Zie bijv. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik.

Als X_n, Y_n, Z_n de componenten der drukking in het punt (x, y, z) op een willekeurig vlak met de normaal n voorstellen, heeft men nog:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n x) + X_y \cos(n y) + X_z \cos(n z), \\ Y_n &= Y_x \cos(n x) + Y_y \cos(n y) + Y_z \cos(n z), \\ Z_n &= Z_x \cos(n x) + Z_y \cos(n y) + Z_z \cos(n z). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Bovendien geldt de vergelijking:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0,$$

die continuiteitsvergelijking genoemd wordt en zich gemakkelijk laat brengen in den vorm:

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

§ 2. Al de aangehaalde vergelijkingen gelden voor alle lichamen. Wij zullen daaruit de bewegingsvergelijkingen voor onsamendrukbare vloeistoffen afleiden, waarmeê wij ons in deze dissertatie uitsluitend bezighouden.

μ is dan onveranderlijk, en de continuiteitsvergelijking gaat over in:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Het komt er verder op aan uitdrukkingen voor X_x, Y_x enz. te verkrijgen. Bij eene vloeistof in rust is de drukking in een zeker punt op een willekeurig vlakte-element uitgeoefend, loodrecht op en, zooals daaruit volgt, onafhankelijk van de richting van dat element. Datzelfde mag men aannemen van eene vloeistof in beweging, zoolang men de wrijvingskrachten verwaarloost, maar de ervaring heeft geleerd, dat verschillende verschijnselen dan niet naar behooren kunnen worden verklaard. Om tot die verklaring te komen is noodig aan te nemen, dat er eene zekere kracht gevorderd wordt om twee vloeistoflagen over elkaar heen te schuiven, en dat dus omgekeerd twee aan elkaar grenzende vloeistoflagen, die verschillende snelheden bezitten, versnellend of vertragend op elkaar werken.

Als men van de hypothese uitgaat, die reeds door Newton is gesteld [1]), dat de wrijving tusschen twee aan elkaar grenzende vloeistoflagen evenredig is aan het verschil harer snelheden, onafhankelijk van den druk, die er zonder die wrijvingskrachten zou bestaan, verder evenredig met de grootte van het vlak van aanraking, en aanneemt, dat de snelheid eene doorloopende functie van de coördinaten is, dan mag men stellen:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p - 2f\frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= p - 2f\frac{\partial v}{\partial y}, \\ Z_z &= p - 2f\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_y = Y_z &= -f\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ X_z = Z_x &= -f\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Y_x = X_y &= -f\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

p stelt dat gedeelte van den druk voor, dat onafhankelijk is van de wrijving, dus den druk, die in het punt (x, y, z) zou aanwezig zijn, indien de stroomende beweging ophield te bestaan. f is eene constante, afhankelijk van den aard der vloeistof en wordt constante der inwendige wrijving genoemd.

§ 3. Men kan die uitdrukkingen op de volgende wijze verkrijgen. De snelheid in het punt M (x, y, z) heeft tot componenten u, v, w, op het tijdstip t. Het dicht bij M gelegen punt M' met coördinaten $x + h$, $y + k$, $z + l$ heeft dan tot snelheidscomponenten:

$$\begin{aligned} u &+ \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{\partial u}{\partial z}l, \\ v &+ \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \frac{\partial v}{\partial z}l, \\ w &+ \frac{\partial w}{\partial x}h + \frac{\partial w}{\partial y}k + \frac{\partial w}{\partial z}l. \end{aligned}$$

De verschillen in snelheid zijn dus bepaald door de partieele differentiaalquotienten van u, v, w naar x, y, z. Volgens de genoemde hypothese zullen dus ook de wrijvingskrachten

[1]) Philos. nat. princ. math. 1687, Lib. II. Sect. IX.

daarvan afhangen, en wel lineair. De formules ondergaan eene aanmerkelijke vereenvoudiging, als men let op de isotropie der vloeistoffen. Men geraakt dan tot een dergelijk onderzoek, als in de elasticiteitstheorie gevorderd wordt om de grondvergelijkingen voor een isotroop lichaam op te stellen. Ook de uitkomsten stemmen in beide gevallen voor een groot gedeelte overeen; alleen zullen in de formules u, v, w niet zooals in de elasticiteitsformules de verplaatsingen volgens de assen, maar de componenten der snelheid voorstellen, en zal er hier in de drie normaalcomponenten eenzelfde van u, v, w onafhankelijke term moeten voorkomen, welke de drukking aangeeft, die er bestaan blijft, ook ingeval de vloeistofstrooming ophoudt te bestaan.

Volgens die beschouwing zouden wij hebben:

$$X_x = p - K\delta - 2f\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$Y_y = p - K\delta - 2f\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Z_z = p - K\delta - 2f\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$Z_y = Y_z = -f\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$X_z = Z_x = -f\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$Y_x = X_y = -f\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

In die formules is

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Omdat nu bij onsamendrukbare vloeistoffen $\delta = 0$ is, verdwijnt de term $K\delta$, en wij verkrijgen de opgegeven uitdrukkingen.

§ 4. Substitueeren wij de waarden voor X_x, X_y enz. uit (4) en (5) in de vergelijkingen (1), voeren wij daarbij in de gebruikelijke notatie:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \text{ enz.}$$

dan gaan die vergelijkingen, met inachtneming van de continuiteitsvergelijking (3) over in de volgende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{\mu}\Delta u,\\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{f}{\mu}\Delta v,\\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{f}{\mu}\Delta w.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Als de uitwendige krachten eene potentiaalfunctie hebben, die wij door U willen voorstellen, en als wij stellen:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ enz.}$$

dan kunnen wij voor de vergelijkingen (6) schrijven:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f}{\mu}\Delta u - \frac{\partial U}{\partial x} &= 0,\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{f}{\mu}\Delta v - \frac{\partial U}{\partial y} &= 0,\\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{f}{\mu}\Delta w - \frac{\partial U}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\right\} (7)$$

Deze vergelijkingen gelden voor onsamendrukbare vloeistoffen, overal, waar u, v, w doorloopende functien zijn van x, y, z.

Als de continuiteit ergens ophoudt, als bijv. de vloeistof begrensd is, hetzij door een vasten wand, hetzij door eene andere vloeistof, drup- of gasvormig, dan zijn aan die grens zekere voorwaarden te vervullen.

Vooreerst zullen de normale componenten der snelheid aan beide zijden van het grensvlak gelijk zijn. Als dus u, v, w betrekking hebben op de vloeistof zelve, die aan het oppervlakte-element ds ligt, waarvan n de naar binnen gerichte normaal voorstelt, en u_1, v_1, w_1 op de deeltjes aan de andere zijde van ds, dan moet:

$$(u - u_1)\cos(n\,x) + (v - v_1)\cos(n\,y) + (w - w_1)\cos(n\,z) = 0$$

zijn. $u - u_1$, $v - v_1$, $w - w_1$, kunnen wij als de componenten van de relatieve snelheid der vloeistofdeeltjes beschouwen, zoodat bovenstaande vergelijking derhalve ook uitdrukt, dat de relatieve snelheid loodrecht op de normaal, dus evenwijdig met ds is. Verder hebben wij om tot de integratie der bewegingsvergelijkingen te komen nog eene hypothese noodig [1]). Den druk op het oppervlakte-element ds uitgeoefend, denken wij ons ontbonden in twee componenten, de eene volgens n, de andere loodrecht op n, dus evenwijdig met ds. Wij nemen nu aan, dat de componente van den druk evenwijdig met ds, evenredig is aan de relatieve snelheid en tegengestelde richting heeft, iets wat door de meeste experimenten bevestigd wordt.

$$X_n \cos(n\,x) + Y_n \cos(n\,y) + Z_n \cos(n\,z)$$

is de componente der drukking op ds volgens n, en als wij die achtereenvolgens met $\cos(n\,x)$, $\cos(n\,y)$, $\cos(n\,z)$ vermenigvuldigen, verkrijgen wij de componenten daarvan naar de assen. Trekken wij die componenten van de totale drukcomponenten X_n, Y_n, Z_n af, dan houden wij de componenten van dat gedeelte der drukking over, dat evenwijdig is met ds. Volgens de genoemde hypothese is dan:

$$\left.\begin{aligned} X_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big) \cos(nx) &= E(u - u_1), \\ Y_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big) \cos(ny) &= E(v - v_1), \\ Z_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big) \cos(nz) &= E(w - w_1). \end{aligned}\right\} \quad 8$$

Is het begrenzingsvlak vast, dan is

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0.$$

E is eene constante afhankelijk van de vloeistof en het begrenzende lichaam. Is die oneindig groot, dan volgt uit bovenstaande vergelijkingen:

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1.$$

De buitenste vloeistoflaag heeft dan geene relatieve beweging ten opzichte van den wand, zij glijdt niet langs den wand.

In plaats van E gebruikt Helmholtz [2]) eene andere constante

$$\lambda = \frac{f}{E},$$

die hij glijdingsconstante noemt. Werkelijk geeft deze de maat

---

[1]) Kirchhoff, blz. 371.

[2]) Wiener Sitzungsber, XL, 1860, p. 639.

der glijding aan, omdat, als er geene glijding is, en dus $E = \infty$ $\lambda = 0$ wordt.

Een andere uiterste toestand treedt in, als $E = 0$, dus $\lambda = \infty$ is. Dan volgt uit (8), zooals gemakkelijk te zien is:

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz),$$

welke vergelijking aangeeft, dat de druk door de vloeistof loodrecht op het grensvlak uitgeoefend wordt. Wij hebben dan met een volmaakt gladden wand te doen.

§ 5. Met het oog op onze latere beschouwingen is het gewenscht hier nog de aandacht te vestigen op de wijze, waarop de getalwaarden der constanten f en λ met de fundamenteele eenheden van massa, lengte en tijd samenhangen, m. a. w. op de afmetingen van f en λ. Neemt men in aanmerking, dat f de tangentiale kracht per vlakte eenheid is bij een snelheidsverval 1, dan ziet men gemakkelijk in, dat de constante f de afmetingen

$$\frac{\text{Massa}}{\text{Lengte} \times \text{Tijd}}$$

heeft, terwijl λ eene lengte is.

TWEEDE HOOFDSTUK.

§ 1. Wij zullen nu de afgeleide vergelijkingen gebruiken om de beweging eener vloeistof in eene rechte cylindrische buis na te gaan, echter onder bijzondere omstandigheden. Wij nemen aan, dat de beweging overal rechtlijnig is, evenwijdig met de as der buis, die wij als evenwijdig met de Z-as zullen beschouwen. Wij hebben dus:

$$u = v = 0.$$

Uit de continuiteitsvergelijking volgt dan:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{d. i.}$$

w is onafhankelijk van z, of de snelheid is over de geheele lengte der buis voor elken vloeistofdraad, die evenwijdig met de as loopt, standvastig.

Wij nemen verder aan, dat de beweging stationnair is d. w. z. dat de snelheid in elk punt onafhankelijk is van den tijd. Dan is:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Veronderstellen wij nog, dat geene uitwendige krachten aanwezig zijn, dan volgt uit de eerste twee vergelijkingen van (7), eerste hoofdstuk:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

d. i. de druk is in alle punten eener doorsnede der buis dezelfde. De derde der vergelijkingen (7) gaat over in:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (1)$$

Wijl p onafhankelijk is van x en y, en w onafhankelijk van z, moeten beide leden constant zijn. Wij mogen daarom stellen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c, \qquad (2)$$

en dus
$$\frac{\partial p}{\partial z} = cf \qquad (3)$$

Vergelijking (3) geeft te kennen, dat p eene lineaire functie is van den afstand tot het begin der buis.

De drukcomponenten worden:

$$X_x = Y_y = Z_z = p,$$
$$Y_z = Z_y = -f\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$Z_x = X_z = -f\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$X_y = Y_x = 0.$$

Omdat aan den omtrek $\cos(nz) = 0$ is, verkrijgen wij uit de vergelijkingen (2) van het eerste hoofdstuk:

$$X_n = p\cos(nx),$$
$$Y_n = p\cos(ny),$$
$$Z_n = -f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right).$$

Uit de vergelijking (8) van het eerste hoofdstuk volgt daarom, daar $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ is, de grensvoorwaarde:

$$f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right) = Ew,$$

of
$$w = \lambda\frac{\partial w}{\partial n}, \qquad (4)$$

eene voorwaarde, die men in woorden kan uitdrukken door te zeggen, dat indien de vloeistof zich buiten den wand uitstrekte met hetzelfde snelheidsverval $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)$ als aan den wand, de snelheid op een afstand λ van dezen 0 zou zijn.

§ 2. Er rest ons nog de vergelijking (2) te integreeren met inachtneming van (4). Eene oplossing te geven, die voor alle vormen, die de doorsnede der buis hebben kan, te gebruiken is, is niet mogelijk. Wij zullen ons hier met het geval eener cirkelvormige doorsneê bezig houden, waarvan de straal R is, en waarvan het middelpunt in de Z-as ligt; wij nemen verder aan dat de beweging symmetrisch is om de as. Uit een bewijs, dat voorkomt in het vierde hoofdstuk, blijkt, dat dit laatste geene nieuwe beperking der beweging in zich sluit.

Als

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

is, dan hangt w slechts van ϱ af, en wordt de vergelijking (2)

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{dw}{d\varrho} = c,$$

of

$$\frac{d\left(\varrho \frac{dw}{d\varrho}\right)}{d\varrho} = c\varrho,$$

dus de eerste integraal:

$$\varrho \frac{dw}{d\varrho} = {}^1/_2\, c\varrho^2 + A,$$

of

$$\frac{dw}{d\varrho} = {}^1/_2\, c\varrho + \frac{A}{\varrho},$$

en de tweede integraal:

$$w = {}^1/_4\, c\varrho^2 + A\, l\, \varrho + B,$$

waarin A en B constanten voorstellen.

A moet nul zijn, daar anders voor $\varrho = 0$, w oneindig worden zou. De tweede constante bepalen wij uit de voorwaarde (4).

Voor $\varrho = R$ moet

$$w = -\lambda \frac{dw}{d\varrho} \text{ zijn.}$$

Daardoor verkrijgen wij:

$$w = -{}^1/_4\, c\,(R^2 - \varrho^2 + 2\lambda\, R).$$

Als p_0 en p_1 de waarden van p voorstellen bij het begin en het einde der buis, dus voor $z = 0$ en $z = l$, volgt uit:

$$\frac{dp}{dz} = cf, \text{ dat } c = \frac{p_1 - p_0}{fl}$$

is, zoodat de snelheid ten slotte wordt:

$$w = \frac{p_0 - p_1}{4\, fl}\,(R^2 - \varrho^2 + 2\,\lambda\, R)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Dit is de vergelijking eener parabool, waarvan de as in de as der buis valt, zoodat de vloeistofdeeltjes, die op zeker oogenblik zich in eene loodrechte doorsnede bevinden, zich later telkens op het oppervlak eener omwentelingsparaboloide bevinden, welker as met die der buis samenvalt.

Als wij w met $2\pi\varrho d\varrho$ vermenigvuldigen en intregeeren tusschen

0 en R, vinden wij voor het vloeistofvolumen, dat in de tijdseenheid door eene doorsnede stroomt:

$$Q = 2\pi \int_0^R w\varrho d\varrho = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{8\,fl}\,(R^4 + 4\,\lambda\,R^3). \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

§ 3. De veronderstellingen, die wij gemaakt hebben, en dus ook de resultaten gelden voor het geval, dat eene vloeistof stroomt door eene lange, enge, horizontale buis uit een wijd vat in een ander vat of ook in de open lucht. p_0 en p_1 kan men dan gelijk stellen aan de drukking in de buis op twee plaatsen, die op den afstand l van elkander verwijderd zijn, zoo men wil, bij het begin en het einde der buis.

Volgens formule (6) is dus het volumen vloeistof, dat in de tijdseenheid door eene doorsnede stroomt, evenredig met het verschil in druk aan de beide uiteinden, en omgekeerd evenredig met de lengte der buis.

Als de vloeistof niet langs den wand glijdt, dus $\lambda = 0$ is, is de snelheid:

$$w = \frac{p_0 - p_1}{4\,fl}\,(R^2 - \varrho^2).$$

Het volumen bedraagt dan:

$$Q = \frac{\pi\,(p_0 - p_1)}{8\,fl}\,R^4\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zoodat het in dit geval evenredig is met de vierde macht der middellijn.

De snelheid aan de as is met glijding:

$$\frac{p_0 - p_1}{4\,fl}\,(R^2 + 2\lambda R),$$

bij afwezigheid van glijding:

$$\frac{p_0 - p_1}{4\,fl}\,R^2.$$

De gemiddelde snelheid d. i. de snelheid, die alle vloeistofdeeltjes zouden moeten hebben om hetzelfde volumen in de tijdseenheid te doen doorstroomen, vinden we natuurlijk door Q te deelen door πR^2. Zij is

met glijding: $$\frac{p_0 - p_1}{8\,fl}\,(R^2 + 4\,\lambda\,R), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zonder glijding: $\frac{p_0 - p_1}{8fl} R^2$. . . . . (9)

§ 4. De afgeleide formules leenen zich zeer goed tot vergelijking van de theorie met het experiment. Die formules zijn langs den weg der theorie eerst bekend sinds het jaar 1847. [1] Natuurlijk heeft reeds vóór dien tijd de praktijk behoefte doen gevoelen de stroomsnelheid van water in buizen te bepalen. Door verschillende waarnemers zijn dan ook proeven met betrekking tot dat onderwerp genomen, in den regel met buizen, die te wijd waren in verhouding tot hare lengte om er onze formules op te kunnen toepassen.

Proeven, die ons hier uitstekend van dienst zijn, zijn verricht door Dr. Poiseuille [2]; ondernomen tot physiologische doeleinden met glasbuizen van 0,015 tot 0,65 m.M. middellijn, zijn zij een model van nauwkeurigheid, zooals ons uit de overeenstemming van berekende en waargenomen grootheden zal blijken.

De wijze, waarop hij experimenteerde, komt in hoofdzaak op het volgende neer. Een kleine glazen bol bezit boven en onder eene korte buis; even boven en even onder den bol is met eene vijl een merk aangebracht, en de inhoudsruimte tusschen de twee merken is zorgvuldig bepaald. De onderste buis is rechthoekig omgebogen, en daaraan worden horizontaal de capillaire buizen bevestigd, waarmeê de proeven worden genomen, en welker lengte en middellijn met zorg worden gemeten. Men begint met den toestel door middel eener zuigpomp tot boven de bovenste streep met gedistilleerd, meermalen gefiltreerd water te vullen. Daarna wordt de bovenste buis in verbinding gebracht met een sterken koperen luchthouder, waarin de lucht is samengeperst. De lucht oefent op het water een druk uit, die gedurende de uitstrooming bijna constant blijft en door een

---

[1] Stokes, Transact. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. 8.

[2] Poiseuille, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. Memoires des sav. étr. Tome 9. Uittreksel in Pogg. Ann. 58.

open water- of kwikmanometer wordt gemeten. Door middel van verrekijker en secondentikker wordt nu telkens de tijd waargenomen, noodig om de vloeistof, die tusschen de twee merken zich bevindt, onder verschillende omstandigheden van druk, temperatuur, buislengte en — wijdte te doen wegstroomen.

De resultaten door Poiseuille verkregen zijn door eene commissie bestaande uit Arago, Babinet, Piobert en Regnault onderzocht en volkomen bevestigd.

Daar het moeielijk is capillaire buizen te vinden, die volkomen cylindrisch zijn en volkomen cirkelvormige doorsnede hebben, werden uit een groot aantal thermometerbuizen van kristalglas die uitgezocht, welke het minst van den gewenschten vorm afweken, en als middellijn werd aangenomen de meetkundig middenevenredige van twee loodrecht op elkaar staande middellijnen eener doorsnede.

§ 5. De proeven van Poiseuille hebben de volgende wetten bewezen:

I. Bij dezelfde buis en standvastige temperatuur zijn de volumina der in denzelfden tijd uitstroomende vloeistof evenredig, dus de tijden tot het uitstroomen van gelijke volumina noodig, omgekeerd evenredig met den druk.

De volgende getallen zijn gedeeltelijk aan de proeven van Poiseuille, gedeeltelijk aan die der commissie ontleend. De eerste kolom geeft den druk in m.M. kwik, de tweede de waargenomen tijden, de derde de tijden berekend in overeenstemming met genoemden regel.

Lengte der buis = 75,8 mM. Middellijn = 0,142 mM.

Druk	Waargenomen tijden	Berekende tijden.
51,068 mM.	20085 sec.	19835 sec.
97,764	10361	uitgangspunt der berek.
147,832	6851	6851,9
193,632	5233	5231,2
387,675	2612,5	2612,8
738,715	1372,5	1371,2
774,676	1308	1307,6.

Lengte der buis = 2,10 mM. Middellijn = 0,029 mM.

24,301 mM.	5651 sec.	5645,3 sec.
49,994	2751	uitgangspunt
96,123	1426	1427,2
148,307	925	925
193,357	707	709,5
386,852	354	354,6
773,223	178	177,4

Lengte der buis = 364 mM. Middellijn = 0,1316 mM.

53,987 mM.	8590 sec.	8598,2 sec.
210,129	2250	uitgangspunt
419,645	1125,7	1126,6
835,565	565	565,8
1576,000	286	uitgangspunt
2338,376	197,5	202,1
3095,540	154	152,7
3856,939	123	122,8
4616,534	106,25	102,4
5376,534	88,25	87,9
6136,534	77,50	77.

De genoemde wet geldt niet meer, zoodra de buis korter is dan een zeker minimum, dat afhankelijk is van de middellijn der buis. Eene buis van 0,029 m.M. middellijn voldeed er nog aan, zooals uit de opgegeven getallen blijkt, bij eene lengte van 2,10 m.M., terwijl eene buis van 0,65 m.M. middellijn, die aan genoemde wet voldeed bij 384 m.M. lengte, dat niet meer deed bij 200 m.M.

II. Bij constante drukking en middellijn zijn de tijden voor de uitstrooming van gelijke volumina noodig, evenredig met de lengte.

De volgende getallen mogen dit bewijzen:

Druk = 1472,45 mM water. Middellijn = 0,252 mM.

Lengte der buis.	Tijd voor uitstrooming noodig, waargenomen.	berekend.
108,24 mM.	633 sec.	633 sec.
84,52	492	492
54,00	314	314

Ook deze wet geldt niet meer voor te korte buizen; bijv. bij 9 m.M. lengte was de waargenomen tijd 71,5 sec., terwijl hij vergeleken met de vorige getallen had moeten bedragen 52,6 sec.

III. Bij gelijke drukking en lengte zijn de tijden omgekeerd evenredig met de vierde machten der middellijn.

Namen der buis	Middellijn	Volumina in 500 sec.
M	0,013949 mM.	1,4648 mM³
E	0,029380	28,8260
D	0,043738	141,5002
C	0,085492	2067,3912
B	0,113400	6398,2933
A	0,141600	15532,8451
F	0,652170	6995870,2463

Berekent men in overeenstemming met de wet der middellijnen het door eene buis gestroomde volumen, door vergelijking met eene andere buis, dan vindt men:

voor	*M*	door vergelijking met	*E*	1,4650
„	*E*	„	*D*	28,808
„	*D*	„	*C*	141,63
„	*C*	„	*B*	2066,93
„	*B*	„	*A*	6389,24
„	*A*	„	*F*	15547,10

Uit de aangehaalde voorbeelden ziet men, dat de drie wetten zeer nauwkeurig met de werkelijkheid overeenstemmen.

Het volumen der doorstroomende vloeistof kan dus voorgesteld worden door:

$$Q = k\,\frac{HR^4}{l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

waarin H de drukking, R den straal, l de lengte der buis voorstellen, en k eene constante afhankelijk van den aard der vloeistof en de temperatuur.

De formule (10) stemt geheel overeen met de formule (7), die ons door de theorie is verschaft. De proeven van Poiseuille, genomen, voordat de theoretische afleiding der formule bekend was, geven dus een hechten steun aan de theorie, maar toonen tevens aan, dat er geene glijding, ten minste geene merkbare, bestaat bij strooming van water door glazen buizen, dat de buitenste vloeistoflaag zich dus niet meê beweegt, maar een koker vormt, waardoor de andere vloeistof stroomt. Wij hebben hierbij echter in het oog te houden, dat de stroomsnelheid bij de proeven van Poiseuille betrekkelijk gering was.

§ 6. Door Poiseuille zijn ook nog enkele proeven genomen met aether en kwik. De strooming van den aether voldeed aan dezelfde wetten als die van het water.

Kwik echter leverde andere resultaten. Terwijl de volumina bij water en aether evenredig werden bevonden met de vierde machten der middellijn, waren zij bij kwik ongeveer evenredig met de derde machten. Was die uitkomst juist, dan zou de formule (6) ons noodzaken tot de gevolgtrekking, dat λ bij kwik zeer groot is ten opzichte van R, dat dus glas tegenover kwik als zeer glad zou mogen beschouwd worden. Die gevolgtrekking zou in overeenstemming kunnen zijn met de verschillende wijze, waarop kwik en water zich tegenover glas gedragen; water maakt glas nat, kwik doet dat niet. Poiseuille zegt echter zelf, dat zijne proeven met kwik noch in genoegzaam getal, noch nauwkeurig genoeg genomen zijn om die geheel te kunnen vertrouwen.

De reeds genoemde commissie van geleerden heeft Poiseuille tot het vervolgen zijner experimenten met kwik aangespoord. Hij schijnt echter daaraan geen gevolg gegeven te hebben, waarom later Warburg [1]) die taak heeft opgenomen. De resultaten door den laatste verkregen laten zich ook door de formule (7) voorstellen, zoodat daaruit blijkt, dat ook bij strooming van kwik door glazen buizen $\lambda = 0$ is en dus geene glijding bestaat. Door Warburg werd gevonden:

Buis III. Temp. $17^1/_4$°.

lengte in mM.	R, in mM.	$p_0 - p_1$ in mM. kwik.	Volumen, waargenomen in 1000 sec.	Volumen, berekend volgens de wet van den druk.
871,5	0,22346	100,6 mM.	126,5 gr.	127,1 gr.
		193,3	244,3	uitgangspunt.

1) 1870. Pogg. Ann. Bd. 140.

Buis IV	Temp. $17^2/_3{}^\circ$			
461	0,14447	99,2 mM.	41,8	41,4
		185,5	77,5	uitgangspunt.

Berekent men nu uit de tweede waarneming bij de buis IV (185,5 m.M. drukverschil), in de onderstelling $\lambda = 0$, het volumen voor de buis III bij 193,3 m.M. drukverschil, dan vindt men daarvoor 245,3 gr., terwijl de waarneming gaf 244,3, dus eene overeenstemming, die niets te wenschen overlaat.

Omdat het waarnemen der volumina tijdroovend is, en het toch wenschelijk is nader te bevestigen, dat $\lambda = 0$ is, heeft Warburg nog andere proeven genomen.

Als men het kwik door twee achter elkaar geplaatste buizen laat stroomen en tusschen de twee buizen een manometer plaatst, neemt deze als het drukverschil constant gehouden wordt, na eenigen tijd een onveranderlijken stand aan. De door middel van een kathetometer afgelezen kwikhoogte in den manometer, vermeerderd met de capillaire depressie, geeft de drukking aan het einde der eerste, bij het begin der tweede buis. Als wij die drukking p', en den druk bij het begin en het einde p_0 en p_1 noemen, dan moet, indien $\lambda = 0$ is, en l de lengte der eerste en l' die der tweede buis voorstelt,

$$\frac{p_0 - p'}{l} R^4 = \frac{p' - p_1}{l'} R'^4 \text{ zijn.}$$

Om deze formule te bevestigen werd $p' - p_1$ uit de overige gemeten grootheden berekend en met de waargenomen waarde vergeleken. De volgende tabel geeft het resultaat van drie zulke berekeningen.

l mM.	R	$p_0 - p'$	l'	R'	$p' - p_1$ waargenomen	$p' - p_1$ berekend.
371	0,11804	181,80	871,5	0,22346	33,60	33,25
265,25	0,13070	162,2	871,5	„	61,3	62,36
122,75	0,11804	135,9	„	„	75,2	75,12

De verschillen tusschen berekening en meting vallen geheel binnen de grenzen der waarnemingsfouten en zijn bovendien deels positief, deels negatief. Ook hier merken wij op, dat de stroomsnelheid betrekkelijk klein was; bij buis III en 193,3 m.M.

drukverschil is zij 114,93 m.M., bij buis IV en 185,5 m.M. drukverschil 87,23 m.M.

De experimenten van Warburg toonen dus aan, dat ook voor kwik en glas $\lambda = 0$ is, en zijn overigens geheel in overeenstemming met de theorie.

Nog andere waarnemers hebben door hunne experimenten de wet van Poiseuille bevestigd. Wij achten niet noodig die hier nader te bespreken, wegens de overeenstemming tusschen de proeven van P., die voorzeker niets te wenschen overlaat.

§ 7. Door Hagen werd in 1839 [1]) eene formule voor het vloeistofvolumen afgeleid, dat door eene cylindrische buis stroomt met cirkelvormige doorsnede, waarop wij in een volgend hoofdstuk terugkomen. Wij moeten hier echter reeds op eene onjuistheid in zijne beschouwingen wijzen. Hij stelt even als wij, dat de vloeistof zich splitst in holle concentrische buizen, die door elkaar heengeschoven worden met eene snelheid, welke van het midden naar den wand afneemt. Hij neemt echter aan, dat het snelheidsverschil tusschen twee op elkaar volgende vloeistofkokers constant is, zoodat de snelheid van zulk een koker evenredig zou zijn met den afstand tot den wand, en het in de tijdseenheid door eene doorsnede stroomende volumen de gedaante eens kegels zou hebben met de doorsnede tot grondvlak en de snelheid aan de as tot hoogte. Dat is, zooals ons gebleken is, niet juist; de snelheidsverandering geschiedt van den wand tot aan de as volgens de vergelijking eener parabool, en het doorstroomende volumen heeft de gedaante eener omwentelingsparaboloide. In een later opstel [2]) heeft Hagen de genoemde voorstelling dan ook laten varen.

§ 8. In 1871, dus nadat praktijk en theorie de juistheid van Poiseuille's formule genoegzaam hadden gestaafd, werd door

---

[1]) Pogg. Ann 46. Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren.

[2]) Abhandl. der Acad. der Wissensch. in Berlin, 1869. II.

Moseley [1]) voor de snelheid der vloeistof in eene buis met cirkelvormige doorsnede de volgende formule afgeleid:

$$v = v_0 \, e^{-\frac{wir}{\mu}},$$

waarin w het gewicht eener kubieke eenheid vloeistof voorstelt, r den afstand tot de as, $i = \frac{h}{l}$ is, h = de hoogte in het reservoir boven de uitstroomingsopening, μ een coëfficient voor de inwendige wrijving, v_0 de snelheid aan de as.

Hij komt tot die formule o. a. op de volgende wijze:

»$2\pi rl$ being the surface of a film (vloeistofkoker), whose radius is r, and μ the resistance per unit of surface to its being made to move over the film, whose radius is $r + dr$, $2\pi rl\mu$ represents the whole resistance to its being so moved. And since the distance it is moved over in the unit of time is represented by $-\frac{dv}{dr}\,dr$, the whole work, per unit of time, of that resistance is represented by

$$-\,2\pi rl\mu \,\frac{dv}{dr}\,dr.$$

Also, since h is the head of water, and the vertical section of the film, which receives the constant pressure of this head of water is represented by $2\pi r \, . \, dr$, the pressure constantly acting to give motion to the film is $2\pi r \, . \, dr \, . \, wh$. But in the unit of time this pressure acts through the distance v, because the film moves through that distance. Therefore the work per unit of time of the pressure which gives motion to the film is represented by

$$2\pi whvr \, . \, dr$$

Therefore, since the motion is uniform, by the principle of virtual velocities

$$-\,2\pi l\mu r \,\frac{dv}{dr}\,dr = 2\pi whvrdr,$$

[1]) Philosophical Magazine, XLII. Fourth Series. On the steady flow of a Liquid. By Henry Moseley, Canon of Bristol.

$$\frac{\frac{dv}{dr}}{v} = -\frac{wh}{\mu l} = -\frac{wi}{\mu},$$

$$^{e}\log\frac{v}{v_0} = -\frac{wir}{\mu},$$

$$v = v_0\, e^{-\frac{wir}{\mu}}.$$

In this investigation the accumulation of work in the liquid, which escapes per unit of time is neglected."

De uitkomst is natuurlijk verkeerd. De groote fout schuilt in de wijze, waarop de wrijving in rekening is gebracht. Een vloeistofkoker (film) ondervindt niet alleen wrijving aan den buitenkant maar evenzeer aan den binnenkant, en deze laatste is door Moseley buiten beschouwing gelaten. Neemt men die in aanmerking, dan komt men tot hetzelfde resultaat, dat wij vroeger reeds verkregen.

Immers de in- en uitwendige stralen van een vloeistofkoker zijn r en $r + dr$.

De wrijvingskracht aan den binnenkant, die versnellend werkt, bedraagt over de lengte dl:

$$2\pi r .\ f\,\frac{dv}{dr}\,dl,$$

aan den buitenkant, waar zij vertragend werkt, en daarom negatief genomen wordt:

$$-\ 2\pi\,(r + dr)\ f\left(\frac{dv}{dr} + \frac{d\left(\frac{dv}{dr}\right)}{dr}\,dr\right)dl.$$

De som gelijkstellende aan het verschil in drukkrachten

$$-\ 2\pi\, r dr .\,\frac{dp}{dl}\,dl,$$

komen wij tot dezelfde vergelijking, die wij vroeger hebben afgeleid.

De fout, waarop hier gewezen is, komt ook voor in de andere redeneeringen van Moseley, waardoor hij de juistheid der besproken formule tracht aan te toonen.

§ 9. Keeren wij even tot de formule van Poiseuille terug, om te laten zien, hoe door middel daarvan de wrijvingsconstante kan worden gevonden. Hij vond de constante k in formule (10) in hooge mate afhankelijk van de temperatuur. De volledige formule, waardoor zich het gewicht van het doorstroomende volumen water laat voorstellen, is volgens zijne proeven bij verschillende temperaturen tusschen 0° en 45° C.:

$$G = 1836{,}7\,(1 + 0{,}03368\;T + 0{,}0002210\;T^2)\,\frac{PD^4}{L}.$$

Daarbij zijn eenheden milligr. en millim., T zijn graden Celsius, P de druk gemeten door een kwikzuil van 10° C., D is de middellijn der buis.

Onze formule gaf voor het volumen:

$$Q = \frac{\pi}{2^7} \cdot \frac{p}{f} \cdot \frac{D^4}{L},$$

dus voor het gewicht, als μ het gewicht der volumeneenheid is,

$$G = \frac{\pi}{2^7} \cdot \frac{\mu}{f} \cdot p\frac{D^4}{L}\,.$$

Door gelijkstelling van deze met die van P., en in aanmerking te nemen, dat de dichtheid van kwik bij 10° C. = 13,577 is, vinden wij:

$$\frac{f}{\mu} = \frac{0{,}00018142}{1 + 0{,}03368\;T + 0{,}0002210\;T^2}, \qquad (11)$$

waardoor f wordt aangegeven als een druk in mG. op een mM².

De waarde, die door Wüllner in zijn leerboek wordt opgegeven bl. 331, is om twee redenen minder juist, 1° omdat de temperatuur van het kwik bij de berekening niet is in aanmerking genomen, 2° omdat de dichtheid van het water is weggelaten.

Om (11) over te brengen in het C—G—S-stelsel, hebben wij in aanmerking te nemen, dat te Parijs, waar de proeven genomen zijn, de versnelling der zwaartekracht $g = 9{,}809$ M bedraagt.

Wij vinden in dat stelsel:

$$\frac{f}{\mu} = \frac{0{,}01779}{1 + 0{,}03368\;T + 0{,}0002210\;T^2}.$$

Thans is μ de massa der volumeneenheid. De afmetingen van

$\frac{f}{\mu}$ zijn $\frac{(\text{Lengte})^2}{\text{Tijd}}$.

Uit de proeven van Warburg bij buis III en IV volgt, dat bij 17° C. de wrijvingscoefficient van kwik = $0{,}01602 \frac{G}{C.S}$ is, waarmeê de waarde 0,01591, die door Koch [1]) gevonden is, zeer goed overeenstemt.

---

[1]) Zie Wiedem. Ann, Bd. 14, 1881.

DERDE HOOFDSTUK.

§ 1. De empirische formule van Poiseuille stemt, zooals ons in het vorige hoofdstuk gebleken is, binnen zekere grenzen zoo nauwkeurig met de werkelijkheid overeen, dat aan hare juistheid niet te twijfelen valt, en daar nu de formule der theorie aan deze gelijk wordt, als men de glijdingsconstante gelijk nul stelt, zoo zou men dus moeten besluiten, dat er geene glijding bestaat.

Het zal echter van belang zijn, dat wij behalve de uitstroomingsproeven nog de uitkomsten van eenige andere experimenten raadplegen, waarbij de glijding eene rol speelt, die tevens aan eene theoretische behandeling onderworpen zijn, en ons daarom ook over het al dan niet bestaan van glijding een oordeel kunnen doen uitspreken. Immers de stroomsnelheid bij de genomen proeven is steeds betrekkelijk gering, en het is zeer goed denkbaar, dat glijding, bij kleine snelheid niet aanwezig, wel optreedt bij grootere snelheid. (Dan zou de kracht tusschen vloeistof en wand niet meer evenredig aan het snelheidsverschil zijn, of E zou ophouden constant te zijn). Evenzeer is het mogelijk, dat de aard van het vaste lichaam, waarlangs de vloeistof stroomt, op het verschijnsel van invloed is.

Wij zullen in het kort nagaan, wat hieromtrent uit de proeven van eenige onderzoekers te leeren valt.

O. E. Meyer [1]) heeft met het doel om de wrijvingsconstante van water en eenige zoutoplossingen te verkrijgen, in

[1]) Crelle's Journal Bd. 69, Pogg. Ann. 113.

navolging van Coulomb [1]) eene cirkelvormige schijf van glas, geel koper of blik horizontaal aan een draad in de vloeistof opgehangen, en die schijf door torsie van den draad om hare as in slingering gebracht. De schijf brengt de aangrenzende vloeistoflaag en deze de volgende lagen tot op zekeren afstand der schijf in beweging. Daardoor en ten gevolge van de onvolkomen elasticiteit van den draad nemen de slinger-amplituden af volgens eene meetkundige reeks. Uit het logarithmisch decrement (log. van de reden der meetkundige reeks) kan volgens berekeningen van Meyer de wrijvingsconstante worden afgeleid. Uit de overeenkomstige resultaten bij glazen, geelkoperen en blikken schijven verkregen, besluit hij, dat de glijding van water bij glas, geelkoper en blik dezelfde is, en dus nul, omdat uit Poiseuille's proeven volgt, dat zij nul is bij glas.

Ook bij deze experimenten is de snelheid klein, zoodat de conclusie van Meyer ook alleen voor kleine snelheden juist behoeft te zijn, en de vraag, of bij grootere snelheid de vloeistof aan het vaste lichaam hecht, niet beantwoord wordt.

§ 2. Een ander verschijnsel, dat ons iets leeren kan, wordt behandeld door Stefan in de Wiener Berichte van 1874 en in de dissertatie van Dr. Goossens (Over de schijnbare adhaesie van vaste lichamen).

Wanneer men twee vlak geslepen platen van glas of metaal vast tegen elkaar legt, is er steeds een zekere kracht noodig om ze van elkaar te scheiden. Werd dat verschijnsel adhaesie genoemd, omdat men het toeschreef aan de aantrekking van de moleculen der verschillende platen op elkaar, Stefan gaf daarvan in de Wiener Berichte van 1874 eene andere verklaring. Hij maakte eene der twee platen horizontaal, onbewegelijk vast en hing de andere daarboven aan den eenen arm eener balans; hij bevond, dat ieder overwicht op de schaal aan den anderen arm, hoe klein ook, voldoende is om de platen van

[1]) Mémoires de l'institut national 3.

elkaar te scheiden, mits het slechts lang genoeg werkt. Hij stelt zich, hetgeen gebeurt, aldus voor. Wanneer na het maken van evenwicht een overwicht op de schaal gelegd wordt, verwijdert zich eerst de bovenste plaat oneindig weinig van de onderste, er ontstaat eene ruimte, waar de lucht verdund is, in die ruimte stroomt lucht toe, vervolgens wordt de afstand weer iets grooter, er stroomt op nieuw lucht toe enz. Daar nu wegens de inwendige wrijving en wegens het hechten der lucht aan het glas, de toestrooming in de nauwe ruimte tusschen de platen slechts langzaam plaats heeft, is er eenige tijd noodig om de platen van elkaar te verwijderen. Daaruit moet dan ook volgen, dat het verschijnsel afhankelijk is van de middenstof, waarin zich de platen bevinden, en dat de schijnbare adhaesie bemerkbaar moet zijn, niet alleen, als de platen vast tegen elkaar gedrukt zijn, maar ook reeds, als zij zich op eenigen afstand van elkaar bevinden. Van beide zaken kan men zich overtuigen, als men de platen in water in plaats van in lucht ophangt.

Goossens heeft zich in zijne dissertatie ten doel gesteld de verklaring door Stefan gegeven, te toetsen en in navolging van hem uit de beweging der platen in water de wrijvingsconstante van water te bepalen. Voor de bijzonderheden verwijs ik naar het opstel van Stefan en de dissertatie van Goossens. Goossens gebruikt in de veronderstelling, dat glijding niet bestaat, de volgende formule:

$$t = \frac{3\pi\, f\, R^4}{4q}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

waarin t de tijd is, noodig om platen met den straal R door het overwicht q van den oorspronkelijken afstand a tot op den afstand α van elkander te verwijderen. (f wrijvingsconstante). Bij aanwezigheid van glijding zou de formule anders moeten luiden.

Als α groot wordt ten opzichte van a, kan men $\frac{1}{\alpha^2}$ verwaarloozen, en de formule wordt:

$$t = \frac{3\pi\, f\, R^4}{4\, qa^2}\text{ of } qta^2 = {}^3/_4\, \pi\, f\, R^4.$$

qta^2 moet dus voor dezelfde platen standvastig zijn.

Omdat Goossens voor qla^2 ongeveer dezelfde waarde vindt bij glazen platen, voor- en nadat zij verzilverd zijn, besluit hij, dat geene glijding bestaat, tenzij men mocht willen aannemen, dat voor een glas- en zilveroppervlak de glijding gelijk is, wat hij bij werkelijk bestaan van glijding niet waarschijnlijk acht. Stefan komt ten gevolge van dergelijke proeven tot eene tegenovergestelde conclusie als Goossens; zijne proeven zijn echter te weinig in aantal.

De formule door Goossens gebezigd, geldt alleen voor kleine snelheden, immers de vertikale snelheid is verwaarloosd, hetgeen bij grootere snelheden niet zou mogen gebeuren. Bij de proeven waren werkelijk de snelheden klein, maar men is dan ook niet gerechtigd uit die experimenten te besluiten, dat er in geen geval glijding bestaat.

§ 3. Door Helmholtz en von Piotrowski is de beweging nagegaan van een met vloeistof gevulden, koperen, aan de binnenzijde vergulden en gepolijsten bol, die om zijne vertikale middellijn schommelt. De resultaten van hun onderzoek, waarvan het theoretische deel door H., het experimenteele door v. P. verricht is, komen voor in een opstel in de Sitz. Ber. der Wiener Akademie. Bd. 40., en die resultaten zijn vooral belangrijk, omdat er uit blijkt, dat zelfs bij kleine snelheid glijding kan bestaan.

Alvorens tot het eigenlijke onderwerp over te gaan, hing von Piotrowski een glazen fleschje bifilair op aan twee dunne verzilverde koperdraden, en liet het met water gevuld schommelen om zijne vertikale as. Hij vond voor den slingertijd 23,93 sec. en voor het logarithmisch decrement 0,0625.

Daarna werd het fleschje van binnen verzilverd. De zilverlaag was zoo dun, dat een onderscheid in de waterhoeveelheid, die voor en na de verzilvering zich in het fleschje bevond, door eene balans, die bij 5 milligr. doorsloeg, niet te ontdekken was. Die waterhoeveelheid bedroeg 143590 milligr. Na de verzilvering werd gevonden voor den slingertijd 24,01 sec. en voor het logar. decrement 0,0600.

Uit deze vermeerdering van slingertijd en vermindering van logar. decr. zou men moeten besluiten, dat de glijding bij zilver grooter is dan bij glas, dus dat er glijding bestaat.

De proeven met het fleschje zijn te weinig in aantal om beslissend te zijn. Wanneer Helmholtz en von Piotrowski daaruit alleen het bestaan van glijding zouden willen afleiden, zou men daaraan niet veel bewijskracht kunnen toekennen. Zij doen dit echter niet; want volgens hun eigen meening bestaat de mogelijkheid, dat de waargenomen verschillen veroorzaakt zijn door die onbekende invloeden, waarvan reeds Gauss gewaagt, en die zoowel slingerduur als logar. decr. bij twee gelijke, onmiddellijk op elkaar volgende experimenten niet geheel constant doen zijn.

De hoofdreden, waarom Helmholtz en von Piotrowski het bestaan van glijding aannemen, is niet in het voorloopige onderzoek met het fleschje maar in dat met den bol zelf te vinden.

§ 4. Uitgaande van de bewegingsvergelijkingen, maar voor bewegingen, waarbij de termen van de tweede orde ten opzichte der snelheid tegen die der eerste orde kunnen worden verwaarloosd, toont Helmholtz aan, dat elke der lagen, waarin de vloeistof door concentrische bollen verdeeld kan worden, in haar geheel draaiende schommelingen om de vertikale middellijn volbrengt, en dat de hoeksnelheid van elke laag daarbij voorgesteld kan worden door:

$$\psi = \frac{A\alpha}{\varrho^2}\left\{ e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - \varepsilon)\right\}$$
$$- \frac{A}{\varrho^3}\left\{ e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t) - e^{-\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho - \gamma t)\right\}.$$

In deze formule is

ϱ de straal der laag,

A eene constante,

$k^2 h$ de wrijvingscoefficient, als h de dichtheid is,

β en γ constanten,

$$m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2},\quad \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{\gamma}{\beta},$$

(Daar β steeds klein is, is ε een hoek slechts weinig boven 45°)

$$\alpha = \frac{\sqrt{m}}{k}, \quad \sigma = \alpha \sin \varepsilon, \quad \tau = \alpha \cos \varepsilon.$$

De uitdrukking voor ψ wordt in het middelpunt schijnbaar oneindig groot, in werkelijkheid echter heffen de oneindig groote termen elkaar op, zooals blijkt uit een anderen vorm, waarin ψ kan worden gebracht.

De termen met $\cos(\sigma\varrho + \gamma t)$ stellen golven voor, die van den omtrek naar het middelpunt zich voortplanten, en wel met afnemende intensiteit, wijl zij met $e^{\tau\varrho}$ vermenigvuldigd zijn. De termen met $\cos(\sigma\varrho - \gamma t)$ stellen golven voor, die van het middelpunt naar den omtrek gaan, eveneens met afnemende intensiteit, wijl die termen als factor $e^{-\tau\varrho}$ bevatten.

De krachten, die de vloeistof in beweging brengen, kunnen alleen van het vat afkomstig zijn. De geheele vloeistofbeweging kan men zich daarom aldus voorstellen, dat van het oppervlak golven zich voortplanten naar het middelpunt, en vandaar teruggekaatst weer naar het oppervlak, beide met afnemende intensiteit.

De slingertijd T is blijkbaar $= \frac{2\pi}{\gamma}$, de golflengte $= \frac{2\pi}{\sigma}$, en de in den exponent van e voorkomende constante $\beta = \frac{\Delta}{T}$, als Δ het logar. decrement is.

De teruggekaatste golven kunnen wegens de snelle demping in de vloeistof verwaarloosd worden, zooals ons nader zal blijken. Wij kunnen dus stellen:

$$\psi = \frac{A\alpha}{\varrho^2} e^{\tau\varrho - \beta t} \cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) - \frac{A}{\varrho^3} e^{\tau\varrho - \beta t} \cos(\sigma\varrho + \gamma t) \,..(1)$$

Voor de uiterste laag moet, als R de straal van den bol is, ϱ vervangen worden door R. Wij kunnen dan korter schrijven:

$$\psi = Ce^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta).$$

Door gelijkstelling daarvan met (1), (na vervanging van ϱ door R) vindt men:

$$C \cos \delta = \left(\frac{A\alpha}{R^2} - \frac{A}{R^3} \cos \varepsilon\right) e^{\tau R},$$

$$C \sin \delta = \frac{A}{R^3} \sin \varepsilon . \, e^{\tau R},$$

dus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \varepsilon}{\alpha R - \cos \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daarbij moet, indien C hetzelfde teeken zal hebben als A, sin δ hetzelfde teeken hebben als sin ε, dus positief zijn.

Bij eene der proeven met water was

$$k = 1{,}1858.$$

Poiseuille vond bij dezelfde temperatuur $k = 0.95206$.

Stel $k = 1$. Hierbij zijn als lengte- en tijdseenheid millim. en sec. gebezigd.

Bij de experimenten van von Piotrowski met uitgekookt water was de schommeltijd:

$$T = 22{,}974 \text{ sec.},$$

het log. decr.

$$\Delta = 0{,}05467.$$

Hieruit volgt:

$$\log \beta = \log \left(\frac{\Delta}{T}\right) = 7{,}37648 - 10,$$

$$\log \gamma = \log \left(\frac{2\pi}{T}\right) = 9{,}43693 - 10,$$

$$\log m = 9{,}43695 - 10,$$

$$\varepsilon = 45^0\ 15',$$

$$\log \alpha = 9{,}71848 - 10.$$

Aangezien $R = 24{,}65$ m.M. was, verkrijgt men:

$$\alpha R = 12{,}89.$$

Blijkens (2) is dan δ een kleine positieve hoek. Men vindt

$$\delta = 3^0\ 30'.$$

De golflengte is $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\alpha \sin \varepsilon} = 15{,}08$ mM.

Terwijl de golf eene golflengte doorloopt, vermindert de amplitude in verhouding van

$e^{\tau\varrho}$ tot $e^{\tau\left(\varrho - \frac{2\pi}{\alpha \sin \varepsilon}\right)}$, dus ongeveer van 1 tot $e^{-2\pi}$ of van 1 tot 0,00187.

Daaruit blijkt, hoe snel de beweging op kleine afstanden van het oppervlak reeds verzwakt, en wij recht hadden de teruggekaatste golven weg te laten.

Dat δ niet groot zijn kan, blijkt ook hieruit. De uitdrukking (1) kan men aldus schrijven:

$$\psi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{A}{\varrho}\,e^{\tau\varrho-\beta t}\cos(\sigma\varrho+\gamma t)\right],$$

en in de nabijheid van den wand verandert de vorm [ ] sneller, doordat $e^{\tau\varrho}$ en $\cos(\sigma\varrho+\gamma t)$ varieeren dan door de verandering van $\frac{A}{\varrho}$. Het deel, dat de beide eerste oorzaken voor $\frac{\partial}{\partial\varrho}$ [ ] opleveren (de eerste term van (1)) overweegt dus. Dan kan $\sigma R+\gamma t+\varepsilon+\delta$ ook slechts weinig van $\sigma R+\gamma t+\varepsilon$ verschillen.

Door middel van de vergelijkingen uit het eerste hoofdstuk:

$$X_n = X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz),$$

enz.

en de uitdrukkingen, daar verkregen voor X_x, X_y enz., kan men, in aanmerking nemende, dat in casu:

$$u = -\psi y,\ v = x\psi \text{ en } w = 0$$

en aan den wand:

$$\cos(nx) = -\frac{x}{R},\ \cos(ny) = -\frac{y}{R},\ \cos(nz) = -\frac{z}{R} \text{ is,}$$

de componenten, en verder het moment der wrijvingskrachten bepalen, door de binnenste vloeistof op de buitenste laag uitgeoefend, en die gelijk zijn aan de krachten, waarmede de wand op deze laag werkt. In de uitdrukkingen, die men daarvoor verkrijgt, treedt $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}$ voor $\varrho = R$ op, zooals ook het geval moet zijn, daar de krachten tusschen twee lagen van het verschil harer hoeksnelheden moeten afhangen. Nu vindt men uit (1):

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \left[\frac{A\alpha^2}{\varrho^2}\cos(\sigma\varrho+\gamma t+2\varepsilon) - \frac{3A\alpha}{\varrho^3}\cos(\sigma\varrho+\gamma t+\varepsilon) + \right.$$
$$\left. + 3\frac{A}{\varrho^4}\cos(\sigma\varrho+\gamma t)\right]e^{\tau\varrho-\beta t}$$

en na hierin $\varrho = R$ gesteld te hebben, kan men weer de verschillende termen tot één vereenigen. Wegens de grootte van αR

predomineert de eerste term; wij kunnen dus reeds verwachten, dat de phase van $\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$ niet veel van die van den eersten term verschilt.

Stellen wij dus, voor $\varrho = R$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = C_1\, e^{-\beta t} \cos\,(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1),$$

dan moet δ_1 niet groot zijn.

Door vergelijking met de vorige uitdrukking vindt men:

$$C_1 \cos \delta_1 = \left(\frac{A\alpha^2}{R^2} - \frac{3A\alpha}{R^3} \cos \varepsilon + 3\,\frac{A}{R^4} \cos 2\varepsilon\right) e^{\tau R},$$

$$- C_1 \sin \delta_1 = \left(\frac{3A}{R^4} \sin 2\varepsilon - \frac{3A\alpha}{R^3} \sin \varepsilon\right) e^{\tau R}$$

en dus:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{3\alpha\, R \sin \varepsilon - 3 \sin 2\varepsilon}{\alpha^2\, R^2 - 3\alpha\, R \cos \varepsilon + 3 \cos 2\varepsilon}.$$

Door substitutie der reeds gevonden waarden van αR en ε bij het experiment met uitgekookt water, blijkt

$$\delta_1 = 9^0\ 59'$$

te zijn.

Tusschen de hoeksnelheid der uiterste laag en bovengenoemde kracht bestaat een phaseverschil:

$$\varepsilon + \delta_1 - \delta$$

en dit verschil zal blijkens de kleine waarden, die wij voor δ en δ_1 vonden, bij eene vloeistof als water, weinig van ε, dus ook weinig van 45^0 afwijken.

Bestond er geene glijding, dan zou de hoeksnelheid van den vasten wand met die der uiterste vloeistoflaag moeten overeenstemmen en dus ook tegenover de kracht een phaseverschil

$$\vartheta = \varepsilon + \delta_1 - \delta$$

moeten vertoonen.

Wanneer echter glijding bestaat, zal er een phaseverschil η zijn tusschen wand en vloeistof, en dan wordt het verschil in phase tusschen de hoeksnelheid van den wand en de beschouwde kracht:

$$\vartheta = \varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta.$$

Uit de proeven heeft von Piotrowski ϑ afgeleid. Daar men nu ε kent, en ook (als men eene waarde van k aanneemt) δ en δ_1 kan berekenen (zie boven), is men in staat te beoordeelen, in hoeverre η al of niet 0 is.

Voor ϑ werd gevonden:

bij uitgekookt water $7°38'$,
bij gewoon bronwater $27°59'$,

zoodat in die gevallen η eene grootte hebben moet, die niet binnen de grenzen der fouten vallen kan, al zijn dan ook volgens Helmholtz' eigen meening de numerieke uitkomsten der experimenten om bijzondere redenen niet geheel te vertrouwen.

Voor λ vond Helmholtz bij ongekookt water 2,35 m.M. Verder verkreeg hij:

bij alkohol $\eta = 1^0\ 37^0$, $\lambda = 0{,}11$ mM.,
bij aether $\eta = 4^0\ 7'$, $\lambda = 0{,}12$ mM.

Deze laatste waarden zouden binnen de waarnemingsfouten kunnen vallen.

De proeven van Helmholtz bewijzen dus, dat water bij beweging langs een gepolijst goudoppervlak glijding vertoont, zelfs bij niet groote snelheid.

De gevolgtrekking ligt dus voor de hand, dat de aard van den wand niet zonder invloed is op de glijding, dat men misschien bij de beweging van water langs een glas- of niet gepolijst metaaloppervlak bij kleine snelheid de glijding kan verwaarloozen, maar zonder nader onderzoek niet bij groote snelheid, of met zorg glad gemaakte oppervlakken.

Helmholtz [1]) bespreekt verder de proeven van Girard [2]) over de strooming van vloeistoffen in koperen buizen en vindt aanleiding ook daar glijding te constateeren en de glijdingsconstante te berekenen.

De wijdste buis van Poiseuille had 0,65 m.M. middellijn en 383,8 m.M. lengte. De engste van Girard 1,83 m.M. middellijn en 1790 m.M. lengte. De stroomsnelheid was hier binnen ze-

---

[1]) l. c. pag. 654.

[2]) Mémoires de l'Institut 1813–1815.

kere grenzen nog direct met den druk en omgekeerd met de lengte evenredig.

Zeker, zegt Helmholtz, is het te betwijfelen, of de wet van Poiseuille hier nog geheel streng geldt. Groot zou de afwijking echter nog niet hebben kunnen zijn; althans Girard vindt, dat het uitgestroomde volumen nog volgens Poiseuille's wet van druk en lengte afhangt.

Girard heeft ook proeven genomen met glazen buizen van 0,767 m.M. diameter en 939 m.M. lengte. Bij den druk eener waterzuil van 182,4 m.M en 0° geschiedde de lediging van $^1/_4$ liter in 1036 sec. Volgens de formule van Poiseuille waren onder deze omstandigheden 976 sec. noodig geweest. Het verschil tusschen proefneming en berekening kan door eene fout van 0,03 m.M. in de meting van de middellijn verklaard worden, of door ellipticiteit, of doordat de buis reeds te wijd was om er de wet voor capillaire buizen op toe te passen. In elk geval is het verschil nog klein. Daarentegen had $^1/_4$ liter water van 0,5° onder een waterdruk van 100 m.M. slechts 624,5 sec. noodig om door de bovengenoemde koperen buis van 1,83 m.M. middellijn en 1790 m.M. lengte te stroomen, terwijl P.'s formule meer dan het vierdubbele van den tijd, namelijk 2949,3 sec. zou vorderen.

Voor deze koperen buis vond Girard volgens een reeks proefnemingen

$$\frac{gDH}{4Lu} = 2{,}8367.$$

g is de intensiteit der zwaartekracht, D de middellijn, L de lengte der buis, H waterdrukhoogte, u de gemiddelde snelheid, alles gereduceerd tot m.M.. In de veronderstelling, dat de afwijking van Poiseuille's wet alleen in de glijding hare oorzaak vindt, is volgens formule (8), tweede hoofdstuk,

$$u = \frac{(p_0 - p_1)}{8fL}\,(R^2 + 4\ \lambda\ R).$$

Stellen wij $2{,}8367 = e$, en nemen wij in aanmerking, dat $p_0 - p_1 = Hg\mu$ is, (μ dichtheid) dan volgt uit de experimenten van Girard:

$$\lambda = \frac{f}{\mu e} - \tfrac{1}{4} R.$$

Als de waarde van $\frac{f}{\mu}$ aan Poiseuille ontleend wordt, is $\lambda = 0{,}3984$ m.M. Deze waarde is wel aanmerkelijk kleiner dan de door Piotrowski gevondene, maar wij kunnen ons ook gemakkelijk voorstellen, dat de glijding bij een gepolijst goudoppervlak aanmerkelijk grooter zijn kan dan bij (misschien geoxydeerd) koper.

§ 6. Jacobson gelooft niet, dat bij de proeven van Girard glijding aan te wijzen valt. Hij zegt [1]: »Da bei Girard's Versuchen an der kupfernen Röhre — wie aus Hagen's und meinen Beobachtungen folgt — nicht anzunehmen ist, dass die Grenze der linearen Bewegung überschritten war, so scheinen mir seine auffallenden Angaben, dass bei l = 1790 m.M. die Geschwindigkeit grösser als bei l = 1590 und beinahe gleich der bei l = 992 mM. vorhandenen gewesen, nicht anders als durch erhebliche Ungleichheiten des Durchmessers erklärt werden zu können."

Bij het naslaan dezer »auffallenden Angaben" in Girard's opstel, die natuurlijk aan Helmholtz' redeneering veel afbreuk zouden doen, bleek mij, dat Jacobson eene drukfout niet heeft opgemerkt, die in Girard's opstel voorkomt. Op bl. 279 wordt opgegeven voor het aantal seconden noodig om bij eene lengte van 1790 m.M. $^1/_2$ liter te doen doorstroomen 1249; maar als wij nemen de hoeveelheid, die per seconde uitstroomt, namelijk 0,2223 cM^3, zien wij, dat 1249 moet veranderd worden in 2249, waarmede ook de opgegeven snelheid in overeenstemming is. Het bezwaar van Jacobson vervalt daardoor. (Het aantal sec. bij eene buis van 1590 m.M lengte is 1861).

§ 7. Toch komt het ons voor, dat de oorzaak der afwijking van Poiseuille's formule bij de experimenten van Girard niet geheel in de glijding mag gezocht worden.

Het volumen, dat in t seconden door een buis stroomt, is

---

[1]) Archiv für Anatomie und Physiologie, jaargang 1861, blz. 306.

$$\text{met glijding: } \frac{\pi(p_0 - p_1)\,(R^4 + 4\lambda\, R^3)}{8fL}t,$$

$$\text{zonder glijding: } \frac{\pi(p_0 - p_1)\,R^4}{8fL}t.$$

Daar nu $^1/_4$ liter water onder 100 m.M. druk 624,5 sec. noodig had om door te stroomen, terwijl Poiseuille's formule 2949,3 sec. zou vorderen, zoo moet daaruit, als de glijding de eenige oorzaak der afwijking is, volgen:

$$(R^4 + 4\lambda\ R^3) : R^4 = 2949{,}3 : 624{,}5,$$

en de waarde van γ uit deze vergelijking moet overeenstemmen met die, welke Helmholtz langs den opgegeven weg uit dezelfde experimenten heeft afgeleid. Wij vinden echter $\lambda = 0{,}8515$ mM., dus eene $2^1/_7$ maal zoo groote waarde, waaruit o. i. blijkt, dat ook andere oorzaken in hooge mate tot de afwijking hebben meêgewerkt.

§ 8. Schijnen de proeven van Girard aan te toonen, dat bij strooming van water door koperen buizen glijding bestaat, aan den anderen kant worden wij door een later opstel van Helmholtz [1]) in de overtuiging bevestigd, dat water zich in glazen buizen, als de snelheid klein is, zonder glijding beweegt.

In dat opstel wordt o. a. gehandeld over de electrische endosmose, die, in zoover zij ook eene strooming van vloeistoffen door buizen betreft, met het onderwerp dezer dissertatie in nauw verband staat.

In 1807 werd door Reuss [2]) waargenomen, dat een galvanische stroom door eene vloeistof geleid, in de richting der positieve electriciteit de vloeistof meêvoert, als deze ergens door een poreuzen wand wordt afgebroken. De waarneming van Reuss schijnt weinig bekend te zijn geworden, want later, in 1816, werd Porret als de ontdekker van het verschijnsel aangezien, dat men met den naam van electrische endosmose bestempelt. Het verschijnsel werd door velen bestudeerd o. a.

---

[1]) Studiën über electrische Grenzschichten. Wiedem. Ann. 7.

[2]) Mémoires de la société impér. des naturalistes de Moscou T. II.

door Wiedemann [1]), die aan den galvanischen stroom als zoodanig het vermogen toekende de vloeistof meê te voeren. Deze bewering werd door Graham, von Quintus Icilius, van Breda en Logeman tegengesproken, vooral op grond hiervan, dat zonder diaphragma geen meêslepen van vloeistof zou zijn aan te wijzen.

Vele en belangrijke proeven werden door Quincke [2]) genomen, die ondubbelzinnig aantoonden, dat, als door eene glazen buis met vloeistof gevuld een electrische stroom wordt geleid, die vloeistof wordt meêgevoerd in den regel in de richting der positieve electriciteit, en dat het dringen der vloeistof door een poreuzen wand een verschijnsel van denzelfden aard is, inzoover die wand als een stelsel zeer fijne kanalen kan worden beschouwd.

Daarmeê hangt ten nauwste samen een ander, om zoo te zeggen, het omgekeerde verschijnsel, namelijk het ontstaan van een electrischen stroom bij persing van water door poreuze wanden of door capillaire buizen, dat, wat de diaphragma's betreft, eveneens door Quincke in 1859 [3]) en voor capillaire buizen door Zöllner in 1872 [4]) werd ontdekt.

Aan Quincke hebben wij ook eene verklaring der verschijnselen te danken, die in het opstel van Helmholtz scherper wordt geformuleerd en waaruit door dezen wetten worden afgeleid, die, zoover de experimenten reiken, met de werkelijkheid blijken overeen te stemmen.

Waar vloeistof en buis met elkaar in aanraking zijn is eene electromotorische kracht werkzaam, die aan het scheidingsoppervlak eene zoogenaamde electrische »Doppelschicht" doet ontstaan, waarvan het positieve deel in den regel in de vloeistof valt. Dat deel der dubbellaag heeft eene uiterst geringe, doch niet te verwaarloozen dikte. Wordt nu door de vloeistof een electrische stroom geleid, dan wordt door dezelfde electri-

---

[1]) Pogg. Ann. 87 en 99.

[2]) Pogg. Ann. 113.

[3]) Pogg. Ann. 107 en 110.

[4]) Ber. der K. Sächs. Ges. der Wiss. 1872.

sche kracht (door het potentiaalverval bepaald), die dezen stroom onderhoudt, ook de positief electrische wandlaag (bij afwezigheid van glijding niet het buitenste deel der laag) in de richting van den stroom voortgedreven, en doet op hare beurt door de inwendige wrijving de geheele doorsnede der vloeistof aan de beweging deelnemen. Is er behalve de electrische stroom nog een hydrostatische druk aanwezig, die ook de vloeistof voortdrijven kan, dan is de beweging in de buis de algebraïsche som van beide bewegingen. Indien de hydrostatische druk juist zooveel vloeistof terug, als de electrische stroom voorwaarts drijft, treedt de stationnaire toestand in, waarbij langs den wand der buis de vloeistof in de richting van den electrischen stroom, en in het midden in de richting van den hydrostatischen druk bewogen wordt.

Werkt geene uitwendige electromotorische kracht op de buis, maar alleen een hydrostatische druk, die het water voortdrijft, dan worden ook de binnenste deelen der electrisch geladen grenslaag meêgevoerd. Zoolang deze met constante snelheid evenwijdig aan den buiswand verschoven worden, en dus voortdurend gelijkmatig onder den invloed der vrije *E.* van den wand blijven, wordt het electrisch evenwicht niet gestoord. Buiten de eindopening der buis echter worden de deeltjes van den wand gescheiden, waardoor hunne positieve lading aan den bindenden invloed der negatieve van den wand onttrokken wordt en vrij komt.

Bij het begin der buis nemen telkens nieuwe lagen de plaats der oude aan den wand in, en doordat de wand reeds negatief geladen is, wordt positieve electriciteit aan de vloeistof vóór het begin der buis onttrokken en negatieve daarin achter gelaten. De vóór het begineinde opgezamelde negatieve en de achter het uiteinde vrijwordende positieve electriciteit zullen zich gedeeltelijk door de vloeistofzuil der buis, gedeeltelijk door elke andere geleiding, die haar geboden wordt, vereenigen. In zulk eene geleiding moet dus een galvanische stroom ontstaan. Is geene andere geleiding aanwezig, dan zal het electrisch potentiaalverschil tusschen de uiteinden der buis zoover stijgen, tot door de vloeistof binnen in de buis zooveel electriciteit terugstroomt, als door de waterdeeltjes aan den wand voorwaarts gevoerd wordt.

§ 9. De voorgaande verklaring geeft van beide verschijnselen zeer eenvoudig rekenschap. Laat ons Helmholtz nog volgen in zijne mathematische behandeling van het vraagstuk der meêvoering van vloeistof door een galvanischen stroom in capillaire buizen, waaruit voor ons omtrent de kwestie in dit hoofdstuk behandeld iets te leeren valt.

Wij denken ons de vloeistof in eene isoleerende cylindrische buis besloten; aan het grensvlak van beide een electrische dubbellaag, welker dikte wij als oneindig klein in vergelijking van de dwarsafmetingen der buis beschouwen. Even als vroeger nemen wij de as der buis als Z-as aan, en maken omtrent de beweging dezelfde onderstelling als in het begin van Hoofdstuk II. De stationnaire strooming wordt dan, zooals wij weten, bepaald door de vergelijking:

$$Z - \frac{\partial p}{\partial z} = - f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(p = hydrostatische druk, f = wrijvingsconstante, w = snelheid, en Z de uitwendige, hier electrische kracht, die in de richting der Z-as op de volumeneenheid der vloeistof werkt.)

Zij ε de electrische dichtheid der buitenste vloeistoflagen, die evenals w slechts functie is van x en y; zij I de intensiteit van den galvanischen stroom, σ de specifieke weerstand der vloeistof, φ de electrische potentiaalfunctie, alle grootheden volgens electrostatische maat gemeten, en q de doorsnede der buis, dan is volgens de wet van Ohm

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{I\sigma}{q},$$

en

$$=Z \quad - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{I\sigma}{q}.$$

Vergelijking (3) gaat daardoor over in

$$- \frac{\varepsilon I \sigma}{q} + \frac{\partial p}{\partial z} = f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$\frac{\partial p}{\partial z}$ is onafhankelijk van z, omdat ε en w dat zijn, en is $= \frac{P}{L}$, als P het verschil in druk voorstelt bij het begin en het einde der buis, waarvan de lengte $= L$ is.

Aan den wand moet

$$w = \lambda \, \frac{\partial w}{\partial n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

zijn, als λ de glijdingsconstante, en n de naar binnen gerichte normaal is.

Om aan (4) en (5) te voldoen, kan w in twee deelen gesplitst worden:

$$w = w_0 + w_1$$

zoo, dat

$$\frac{P}{L} = f\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$- \frac{\varepsilon \sigma I}{q} = f\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

en aan den wand:

$$w_0 = \lambda \, \frac{\partial w_0}{\partial n}, \ldots (6_a) \qquad w_1 = \lambda \, \frac{\partial w_1}{\partial n} \ldots\ldots\ldots \quad (7_a)$$

is. w_0 stelt de beweging tengevolge van den hydrostatischen druk voor, w_1 die tengevolge der electrische kracht. De geheele beweging is de algebraïsche som van beide.

Volgens de vergelijking van Poisson is, daar $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ is,

$$- 4\pi\varepsilon = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Hieruit en uit (7) volgt:

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\varphi - \frac{4\pi f q}{I\sigma} \, w_1\right].$$

Daar nu φ bij constante I lineair van z afhangt, en w in het geheel niet, zoo moet dus

$$\varphi - \frac{4\pi f q}{I\sigma} \, w_1 = - \frac{\sigma I z}{q} + B$$

zijn, waarin B eene functie van x en y voorstelt, die voldoet aan

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial^2 y} = 0 \text{ [1]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aan den wand moet volgens (7_a)

$$\varphi_u - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\sigma I z}{q} + B - \lambda \frac{\partial B}{\partial n}$$

zijn. φ_u is de potentiaalfunctie der rondom de buis gelijkelijk verdeelde dubbellaag, daarom zal zij, zoo slechts de dikte der laag overal oneindig klein is tegen den krommingsstraal van het oppervlak, in alle punten van den omtrek eener doorsnede dezelfde waarde moeten hebben. Dus moet

$$B - \lambda \frac{\partial B}{\partial n} = \text{constante} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

zijn. Aan (8) en (9) wordt voldaan door

$$B = \text{constante} = C,$$

en dit is de eenig mogelijke waarde, die voldoen kan; want stel, dat twee functiën B voldeden, dan moest hun verschil B' voldoen aan

$$\frac{\partial^2 B'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B'}{\partial y^2} = 0,$$

en aan den omtrek aan

$$B' - \lambda \frac{\partial B'}{\partial n} = 0.$$

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt echter, zooals in hoofdstuk IV bewezen wordt:

$$B' = 0.$$

In het binnenste gedeelte der buis, waar $\varepsilon = 0$ is, kunnen wij stellen:

$$\varphi_i = -\frac{\sigma I z}{q},$$

dus is

$$\varphi_u - \varphi_i - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = C,$$

---

[1]) Helmholtz geeft op:

$$\varphi - \frac{4\pi f q}{I\sigma} w_1 = C - \frac{zq}{I\sigma} + bx + cy,$$

C, b, c constanten. Dat is echter blijkbaar niet juist.

en de snelheid w_1 wordt bepaald door:

$$\frac{4\pi f q}{I\sigma} w_1 = \varphi - \varphi_u + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Als er geen drukverschil aan de beide einden der buis bestaat, zal de andere stroomcomponente $w_0 = 0$ zijn, en w_1 blijft alleen over. Het volumen Q_1 der door eene doorsnede stroomende vloeistof is dan alleen van w_1 afhankelijk.

Omdat de dikte der electrische laag tegenover de afmetingen der doorsnede van de buis oneindig klein is verondersteld, kunnen wij w_1, die constant is in het binnenste deel der buis, over de geheele doorsnede als constant aanzien, en verkrijgen dus:

$$Q_1 = \frac{\sigma I}{4\pi f}\left(\varphi_i - \varphi_u + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10_a)$$

welke waarde onafhankelijk is van de afmetingen der buis.

Als verder A de electromotorische kracht voorstelt, die den galvanischen stroom I over de lengte L onderhoudt, dan is:

$$\frac{I\sigma L}{q} = A,$$

en dus kunnen wij ook schrijven voor Q_1:

$$Q_1 = \frac{qA}{4\pi L f}\left(\varphi_i - \varphi_u + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10_b)$$

Helmholtz toont verder aan, hoe deze formules met proeven over electrische endosmose door poreuze aarden wanden van Wiedemann en Quincke in overeenstemming zijn, en hoe uit die proeven het potentiaalverschil $\varphi_i - \varphi_u$ berekend kan worden. Daarvoor verwijzen wij naar het opstel van Helmholtz zelf.

Is er ook een hydrostatische druk, dus ook eene waarde w_0, dan is deze, zooals in het tweede hoofdstuk aangetoond is,

$$w_0 = \frac{P}{4fL}\left(r^2 - R^2\right) - \frac{\lambda P R}{2Lf}.$$

(Wij veronderstellen de buis cirkelvormig met den straal R.) Het met snelheid w_0 doorstroomende volumen is:

$$Q_0 = -\frac{\pi P R^4}{8fL} - \frac{\pi P R^3 \lambda}{2fL}.$$

Is de druk zoodanig dat de waterstand constant is, dan moet

$$Q_0 + Q_1 = 0$$

of $\quad 0 = -\frac{\pi P}{8Lf}\left\{R^4 + 4R^3\lambda\right\} + \frac{R^2 A}{4Lf}\left\{\varphi_i - \varphi_u + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}$

zijn, waaruit volgt:

$$\frac{\pi}{2}\, P\,\left(R^2 + 4\lambda R\right) = A\left(\varphi_i - \varphi_u + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right), \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

en bij afwezigheid van glijding:

$$\frac{\pi}{2}\, PR^2 = A\,\left(\varphi_i - \varphi_u\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11_a)$$

§ 10. Door Quincke en Wiedemann zijn proeven genomen, die eene vergelijking met de afgeleide formules toelaten. Wij zullen alleen de experimenten van Quincke bespreken, waaruit voor ons omtrent de kwestie der glijding iets te leeren valt.

Eene capillaire glasbuis is op twee zuilen van lak zóó bevestigd, dat zij een kleinen hoek maakt met den horizon. De buis is aan het lage uiteinde door middel van een kurk in eene wijdere buis bevestigd, die U-vormig omgebogen in een glazen ballon eindigt. De glazen bol en de capillaire buis zijn gedeeltelijk met vloeistof gevuld, en de bol is zoo groot, dat door eenige verschuiving der vloeistof in de capillaire buis, het niveau in den bol niet merkbaar verandert. In den wand der buis zijn platinadraden gesmolten, waardoor het mogelijk is een bepaald gedeelte der vloeistofzuil in de geleiding van een galvanischen stroom op te nemen. Die galvanische stroom doet dan de vloeistof aan het hooge uiteinde der buis stijgen, tot zulk eene hoogte, dat de hierdoor veroorzaakte hydrostatische druk evenveel vloeistof naar beneden als de electrische stroom naar boven voert. Door middel van eene millimeterschaal is men in staat de verschuiving der vloeistof waar te nemen en daaruit en uit den hellingshoek der buis de stijghoogte te berekenen.

Door experimenten met buizen van verschillende doorsnede heeft Quincke [1]) aangetoond, dat de stijghoogte voldoet aan:

$$\frac{\Delta h\,.\,\sin\alpha}{22{,}9} = \frac{nb}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

---

[1]) Pogg. Ann. 113, bl. 543.

Daarin is Δh de verschuiving in schaaldeelen, van welke 22,9 op een m.M. gaan, α de hoek der buis met den horizon, n het aantal Grove'sche elementen, waaruit de batterij bestond, b eene constante.

Deze formule is in overeenstemming met formule (11_a), welke de theorie geeft, en toont dus aan, dat λ zeer klein moet zijn tegenover R, in overeenstemming met onze vroegere conclusie. Anders zou immers de stijghoogte niet omgekeerd evenredig zijn met R^2 volgens form. (11_a), maar met $R^2 + 4\,\lambda\, R$ volgens form. (11).

Is ons hier opnieuw gebleken, dat λ, die, zooals wij zagen, eene lengte voorstelt, verdwijnt tegenover den straal der buis, de formule (11) verschaft ons de gelegenheid λ te vergelijken met eene in vergelijking van den straal uiterst kleine grootheid, namelijk met de dikte der electrische wandlaag.

In het tweede lid van (11) komt voor de som: $\varphi_i - \varphi_u + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. De term $\varphi_i - \varphi_u$ is van de orde $\delta \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, als δ de dikte der wandlaag is, en bedraagt, zooals men uit andere experimenten weet, slechts weinige Daniell's. Indien λ, ofschoon zeer klein ten opzichte van R, bijv. 100 maal grooter was dan δ, dan zou men, als door middel van formule (11_a) het potentiaalverschil $\varphi_i - \varphi_u$ berekend wordt, eene waarde moeten verkrijgen, die 100 maal te groot zou zijn.

Helmholtz [1]) heeft uit de proeven van Quincke $\varphi_i - \varphi_u$ voor gedistilleerd water en glas berekend en vindt

$$\varphi_i - \varphi_u = 3{,}9346 \text{ Daniell's},$$

waaruit dus blijkt, dat λ niet vele malen grooter kan zijn dan δ.

---

[1]) l. c. pag. 361.

VIERDE HOOFDSTUK.

§ 1. Wij zullen ons in dit hoofdstuk bezig houden met de behandeling der rechtlijnige strooming van vloeistoffen in buizen met andere dan cirkelvormige doorsneden.

Als geene uitwendige krachten aanwezig zijn, en de as der buis evenwijdig is met de Z-as, zijn de vergelijkingen, die het vraagstuk bepalen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = cf, \text{ dus } c = \frac{p_1 - p_0}{fl},$$

en aan den wand:

$$w = \lambda \frac{\partial w}{\partial n}, \text{ met glijding} \qquad (1_a)$$

en $w = 0$, zonder glijding . . . . (1_b)

§ 2. Wij zullen vooreerst aantoonen, dat het vraagstuk voor elke gegeven doorsnede bepaald is, zoodat de vergelijking (1) met de voorwaarde aan den wand in elk concreet geval slechts ééne oplossing toelaat.

Dat kan geschieden door een bewijs, zooals er in de electriciteits- en elasticiteitstheorie herhaaldelijk voorkomen. Veronderstellen wij eens, dat er twee waarden aan konden voldoen, dan zou het verschil w' van de twee waarden moeten voldoen aan:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0, \qquad (2)$$

en aan den wand aan:

$$w' = \lambda \frac{\partial w'}{\partial n}, \text{ bij glijding,}$$

en $\qquad\qquad w' = 0$ zonder glijding.

Vermenigvuldiging van (2) met $w' dxdy$, en integratie over eene doorsnede geeft:

$$\int\int w' \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right) dxy\ d = 0.$$

Daaruit volgt door partieele integratie, als ds een element van den omtrek eener doorsnede voorstelt,

$$\int w' \frac{\partial w'}{\partial n} ds + \int\int \left\{\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy = 0.$$

Bij afwezigheid van glijding is de eerste integraal en dus ook de tweede nul. Daar de tweede echter louter uit positieve elementen bestaat, moet dus w' constant zijn, en derhalve nul, omdat aan den wand $w' = 0$ is.

Is er glijding, dan volgt uit $w' = \lambda \frac{\partial w'}{\partial n}$, dat w' en $\frac{\partial w'}{\partial n}$ hetzelfde teeken hebben, en de laatst verkregen vergelijking bevat dus eene tegenstrijdigheid, (omdat $\int w' \frac{\partial w'}{\partial n} ds$ positief is) zoolang niet w' constant is; maar dan volgt ook weêr uit de voorwaarde voor w' aan den wand, dat die constante niet anders kan zijn dan nul.

§ 3. Laat ons nu vooreerst de stationnaire rechtlijnige strooming beschouwen tusschen twee oneindige evenwijdige, platte vlakken op den afstand $2a$ van elkaar verwijderd. Wij denken het YZ-vlak midden tusschen de twee vlakken en evenwijdig daarmeê. De Z-as geeft de richting der strooming aan. De snelheid is dan natuurlijk alleen functie van x. De vergelijkingen, die de snelheid bepalen, zijn in dat geval:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c,$$

$$w = -\lambda \frac{\partial w}{\partial x} \text{ voor } x = +a,$$

$$\text{en } w = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \text{ voor } x = -a.$$

Daaraan wordt voldaan door:

$$w = {}^1/_2\, cx^2 + c'x + c'',$$

mits wij de constanten c' en c'' zoo bepalen, dat aan de voorwaarde aan den wand voldaan is. Wij vinden gemakkelijk $c' = 0$, hetgeen wegens de symmetrie der beweging ten opzichte van het YZ-vlak ook noodzakelijk is, en

$$c'' = {}^1/_2\, ca^2 - \lambda ca, \text{ dus}$$

$$w = {}^1/_2\, c\,(x^2 - a^2) - a\lambda c. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dit geval doet zich ten naaste bij voor bij eene buis met rechthoekige doorsnede, maar waarvan de eene afmeting zeer groot is in vergelijking van de andere. Voor het in de tijdseenheid doorstroomende volumen verkrijgt men, als de zeer groote afmeting wordt voorgesteld door $2b$:

$$Q = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} w dx dy = -\,{}^4/_3\, ca^3b - 4a^2b\lambda c \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4_a)$$

Als $\lambda = 0$ is, dus geene glijding bestaat, zijn snelheid en volumen respectievelijk:

$$w = {}^1/_2\, c\,(x^2 - a^2) \;\ldots (4_b) \text{ en } Q = -\,{}^4/_3\, ca^3b = -\,{}^1/_{12}\, c \cdot \frac{a}{b}\, O^2, \;\ldots (4_c)$$

als O het oppervlak eener doorsnede $= 4ab$ is. Wij zullen deze uitkomsten later nog op andere wijzen verkrijgen.

§ 4. In de tweede plaats nemen wij eene buis, die een gelijkzijdigen driehoek tot doorsnede heeft. Hier, evenals in de volgende vraagstukken wordt geene glijding verondersteld.

Wij nemen tot Y-as eene der hoogtelijnen van den driehoek, tot X-as de daarbij behoorende basis, welker lengte wij $2a$ stellen.

Behalve aan de vergelijking (1) moet dan nog voldaan worden aan de volgende voorwaarden:

$$w = 0, \text{ als } y = 0, \text{ als } 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a\sqrt{3}} = 0 \text{ en als}$$

$$1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{a\sqrt{3}} = 0 \text{ is.}$$

Aan deze voorwaarden wordt natuurlijk voldaan door het gedurig produkt van de vormen:

$$y,\; 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a\sqrt{3}},\; 1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{a\sqrt{3}} \text{ en eene constante } c', \text{ dus}$$

door:

$$c'y \left\{\left(1 - \frac{y}{a\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}\right\}.$$

Als het gedurig produkt dus nog slechts zoodanig is, dat de som der tweede differentiaalquotienten naar x en naar y genomen constant is, zal een dergelijke vorm voor w voldoen. Differentiatie overtuigt ons, dat werkelijk die som constant is, en bepaalt tevens de waarde van c' door vergelijking met (1). Ten slotte vinden wij :

$$w = {}^3/_4 \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot y \left\{ \left(1 - \frac{y}{a\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2} \right\} \dots\dots\dots \quad (5)$$

De vorm, waarin w voorkomt, toont duidelijk aan, dat om w hare grootste waarde te doen verkrijgen $x = 0$ moet zijn, en y de waarde hebben moet, die $y\left(1 - \frac{y}{a\sqrt{3}}\right)^2$ tot een maximum maakt, en die $= {}^1/_3\sqrt{3}$ is. De grootste snelheid wordt daarom gevonden in het zwaartepunt der doorsnede.

Het volumen is:

$$Q = 2\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{3}(a-x)} w dy = \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot a^4,$$

en als wij het oppervlak des driehoeks $a^2\sqrt{3}$ door O voorstellen,

$$Q = \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot \frac{O^2}{20\sqrt{3}} = 0{,}0289 \times \frac{p_0 - p_1}{fl} O^2 \dots\dots \quad (6)$$

§ 5. Heeft de buis een elliptische doorsnede, waarvan de assen $2a$ en $2b$ zijn, dan geldt, behalve de vergelijking (1), de voorwaarde

$$w = 0, \text{ als } 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ is.}$$

Om de waarde van w te vinden, die hier voldoet, bedenken wij, dat elke vorm van den tweeden graad ten opzichte van x en y door tweemaal differentieeren naar x en y eene constante oplevert. Aan alle voorwaarden is dus voldaan, als wij stellen:

$$w = c' \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

die aan den omtrek nul is.

Als wij dezen vorm tweemaal naar x en tweemaal naar y differentieeren en de uitkomsten samentellen, vinden wij:

$$- 2c'\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Deze waarde moet gelijk zijn aan $c = \frac{p_1 - p_0}{fl}$, waardoor de constante c' wordt bepaald. De definitieve waarde wordt dan:

$$w = \frac{p_0 - p_1}{2fl} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \ldots\ldots\ldots (7)$$

De punten van gelijke snelheid blijken hier op gelijkvormige ellipsen gelegen te zijn, en de grootste snelheid verkrijgen wij voor $x = y = 0$, dus aan de as. Het in de tijdseenheid door de buis stroomende volumen vloeistof is blijkbaar:

$$Q = \int_{-a}^{+a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} w dx dy = \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot \frac{\pi ab}{4} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}, \ldots\ldots (7_a)$$

of, als het oppervlak der doorsnede $\pi ab = O$ gesteld wordt,

$$Q = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot \frac{O^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = 0,0796 \cdot \frac{p_0 - p_1}{fl} \cdot \frac{O^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \ldots (7_b)$$

Voor $a = b$ gaan deze uitdrukkingen voor de snelheid en het volumen, zooals behoort, over in die, welke wij vroeger voor eene cirkelvormige doorsnede hebben afgeleid.

§ 6. Wij zullen nu het geval eener rechthoekige doorsnede behandelen, waarbij wij niet tot zulke eenvoudige uitdrukkingen geraken als bij de voorgaande gevallen.

Laat $2a$ en $2b$ de afmetingen des rechthoeks voorstellen en de Z-as evenwijdig met de zijvlakken door het midden der doorsnede gaan.

Wijl er, zooals wij aangetoond hebben, slechts ééne oplossing bestaat, is het voor de uitkomst natuurlijk onverschillig, langs welken weg wij daartoe komen.

Wij beschouwen eerst de waarde, die wij voor de snelheid bij de elliptische doorsnede verkregen hebben en zullen die voor dit geval trachten geschikt te maken. Wij vonden:

$$w = \frac{p_0 - p_1}{2fl} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

welke waarde aan de vergelijking (1) voldoet. Maar opdat aan den wand de snelheid nul zij, moet $w = 0$ zijn, 1° als $x = \pm a$, en 2° als $y = \pm b$ is. De vorm binnen de haakjes in form. (7) heeft echter voor $x = \pm a$ de waarde $-\frac{y^2}{b^2}$ en voor $y = \pm b$ de waarde $-\frac{x^2}{a^2}$. Om nu (7) zóó te veranderen, dat zij aan vergelijking (1) zal blijven voldoen, zullen wij binnen de haakjes twee termen moeten bijvoegen, die zoodanig zijn, dat de som hunner tweede differentiaalquotienten naar x en y genomen, nul is. Bovendien moet de eerste term voor $x = \pm a$ de waarde nul, en voor $y = \pm b$ de waarde $\frac{x^2}{a^2}$ aannemen, en de tweede term nul worden voor $y = \pm b$, en overgaan in $\frac{y^2}{b^2}$ voor $x = \pm a$. Als wij den eersten gevonden hebben, kunnen wij den tweeden door verwisseling der letters natuurlijk onmiddellijk opschrijven.

Functiën, waarvan de som der tweede differentiaalquotienten verdwijnt, zijn

$$e^{py} \cos px, \qquad e^{-py} \cos px,$$
$$e^{py} \sin px, \text{ enz.}$$

Dezelfde eigenschap bezitten ook de uitdrukkingen, die door optelling of aftrekking hiervan verkregen worden. De vorm

$$\left(e^{py} + e^{-py}\right) \cos px$$

heeft, evenals w die hebben moet, de eigenschap, niet te veranderen, wanneer x of y van teeken veranderen, en het ligt dus voor de hand voor den gezochten term te stellen:

$$\sum A \left(e^{py} + e^{-py}\right) \cos px.$$

De coefficient p kan nu zoo bepaald worden, dat de som voor $x = a$ verdwijnt.

Daartoe moet

$$pa = \left(2k' + 1\right)\frac{\pi}{2} \text{ dus } p = \left(2k' + 1\right)\frac{\pi}{2a} \text{ zijn,}$$

waarin k' elk geheel getal kan voorstellen.

Als we ter bekorting stellen:

$$k = \left(2k' + 1\right)\frac{\pi}{2},$$

dan zal dus de vorm

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} A\left(e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}\right)\cos k\frac{x}{a}$$

reeds aan twee der voorwaarden voldoen. De constante A moet nu nog zoodanig bepaald worden, dat de vorm gelijk wordt aan

$$\frac{x^2}{a^2} \text{ als } y = b \text{ is.}$$

Dus moet $$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} A\left(e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}\right)\cos k\frac{x}{a} = \frac{x^2}{a^2} \text{ zijn.}$$

$\frac{x^2}{a^2}$ kan volgens het theorema van Fourier in eene reeks ontwikkeld worden:

$$\frac{x^2}{a^2} = c_1 \cos\frac{\pi x}{2a} + c_2 \cos 3\,\frac{\pi x}{2a} + \ldots. + c_{k'} \cos k\frac{x}{a} + \ldots..$$

De coëfficienten op de gewone wijze bepalende, vinden wij:

$$c_{k'} = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{x^2}{a^2}\cos k\frac{x}{a}\,dx.$$

Hieruit volgt, dat wij, om aan de laatste voorwaarde te voldoen, moeten stellen:

$$A\left(e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{x^2}{a^2}\cos k\frac{x}{a}\,dx.$$

De waarde van het tweede lid dezer vergelijking is

$$\frac{2(-1)^{k'}}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

en de waarde van A is daardoor bekend.

De eerste der gezochte termen, waarmede de uitdrukking binnen de haakjes in de waarde (7) moet vermeerderd worden, is dus:

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{2(-1)^{k'}}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}}\cos k\frac{x}{a}.$$

Op dezelfde manier vinden wij den tweeden term, die uit den vorigen ontstaat, door verwisseling van x, y, a en b met y, x,

b en a, zoodat dus de snelheid bij eene rechthoekige doorsnede wordt voorgesteld door [1]):

$$w = \frac{p_0 - p_1}{2fl} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \times \right.$$

$$\left. \left[\frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} + \frac{e^{k\frac{x}{b}} + e^{-k\frac{x}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\frac{y}{b} \right] \right\} \ldots\ldots (8)$$

Het volumen der doorstroomende vloeistof vinden wij natuurlijk door vermenigvuldiging van w met $dxdy$ en integratie tusschen de grenzen $y = -b$ en $+b$, en $x = -a$ en $+a$.

Als wij ter bekorting het oppervlak des rechthoeks, dus $4\,ab$, door O voorstellen, en de constante

$$\alpha = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{1}{k^3} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \left[\frac{a}{b} \frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} + \frac{b}{a} \frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \right] \right\}$$

dan is:

$$Q = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} w\,dx\,dy = \alpha \frac{p_0 - p_1}{fl} : \frac{O^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Daarin moet nog de waarde van α berekend worden.

$$\frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \text{ en } \frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}}$$

kunnen vervangen worden door:

$$1 - \frac{2}{1 + e^{2k\frac{b}{a}}} \text{ en } 1 - \frac{2}{1 + e^{2k\frac{a}{b}}}.$$

Wij vinden dan als coëfficienten van

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b} \text{ en } \frac{b}{a}$$

binnen de haken respectievelijk de drie reeksen:

$$2 \sum \frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) = 2 \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots\right) - \right.$$

---

[1]) Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides, par M. Boussinesq, Journ. de Liouville. Deuxième série. Tome XIII. Année 1868.

B. geeft de formule op zonder eenige afleiding.

$$-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\left(\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\ldots\right)\Bigg] = 0{,}1224, \text{ (met eene fout } < 0{,}0004) -$$

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{b}{a}}}, \text{ en}$$

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{a}{b}}}.$$

De beide laatste reeksen convergeeren sterker dan die in den eersten coëfficient. Veronderstellen wij $a > b$, dan hebben wij alleen den eersten term der tweede reeks noodig, want de tweede is kleiner dan

$$4\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\cdot\frac{1}{3^3}-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{1}{3^5}\right]\frac{1}{1+e^{3\pi}} < 0{,}0001.$$

Indien wij de berekening uitvoeren, vinden wij, daar

$$e^{\pi} = 23{,}14 \text{ is,}$$

$$\alpha = \frac{1}{8}\Bigg\{\frac{1}{3}+0{,}1224\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}\,\frac{0{,}1955}{1+(23{,}14)^{\frac{a}{b}}}-$$

$$-\frac{a}{b}\Bigg[\frac{0{,}1955}{1+(23{,}14)^{\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0348}{1+(23{,}14)^{3\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0080}{1+(23{,}14)^{5\frac{b}{a}}}$$

$$+\frac{0{,}0030}{1+(23{,}14)^{7\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0014}{1+(23{,}14)^{9\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0008}{1+(23{,}14)^{11\frac{b}{a}}}$$

$$+\frac{0{,}0005}{1+(23{,}14)^{13\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0003}{1+(23{,}14)^{15\frac{b}{a}}}+\frac{0{,}0002}{1+(23{,}14)^{17\frac{b}{a}}}$$

$$+\frac{0{,}0001}{1+(23{,}14)^{19\frac{b}{a}}}\Bigg]\Bigg\}.$$

Voor de volgende waarden der verhouding $\frac{a}{b}$:

1, 2, 3, 4, 5, 10

heeft α respectievelijk de waarden:

0,0703, 0,0715, 0,0731, 0,0747, 0,0757 en 0,0786.

Voor $\frac{a}{b} = \infty$ kan men in de uitdrukking voor α de termen met $\frac{b}{a}$ als factor weglaten, en het verschil $e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}$ door $2k\frac{b}{a}$ en de som $e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}$ door 2 vervangen. Dan is

$$\alpha = \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{3} + 2\,\Sigma\frac{1}{k^2}\Big(1 - \frac{2}{k^2}\Big)\Big].$$

Als men de leden der vergelijking

$$\frac{y^2}{b^2} = 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{(-)^{k'}}{k}\Big(1 - \frac{2}{k^2}\Big)\cos k\frac{y}{b}.$$

met dy vermenigvuldigt en integreert tusschen $y = 0$ en $y = b$, verkrijgt men:

$$2\,\Sigma\frac{1}{k^2}\Big(1 - \frac{2}{k^2}\Big) = \frac{1}{3},$$

welke uitkomst ook door splitsing in twee reeksen kan gevonden worden.

Voor $\frac{a}{b} = \infty$ is derhalve

$$\alpha = \frac{1}{12} = 0{,}0833 \text{ dus:}$$

$$Q = \frac{p_0 - p_1}{fl} \times \frac{4}{3}ab^3.$$

Zoo vinden wij hier, zooals behoort, dezelfde waarde terug, die wij vroeger in formule ($4c$) meer direct hebben verkregen.

De coëfficient α voor eene rechthoekige doorsnede neemt dus steeds toe, naarmate de doorsnede platter wordt, en nadert tot de grens 0,0833. Als de verhouding $\frac{a}{b}$ grooter is dan 10, kan men nemen $\alpha = 0{,}081$ met eene betrekkelijke fout ten hoogste gelijk aan $\frac{1}{40}$. Deze waarde is ongeveer dezelfde als de coëfficient 0,0796 bij de uitstroomingshoeveelheid eener buis met elliptische doorsnede.

§ 7. De uitdrukking (8) voor de snelheid in rechthoekige buizen is vrij ingewikkeld. Wij kunnen een eenigszins eenvoudiger vorm opstellen, door niet van de stroomsnelheid bij de elliptische doorsnede, maar van de uitdrukking ($4b$)

$$w = -\, {}^1\!/_2\, c\,(a^2 - x^2)$$

uit te gaan, die wij verkregen bij de strooming tusschen twee evenwijdige vlakken.

Uit overeenkomstige beschouwingen, als bij de vorige oplossing gebezigd zijn, blijkt, dat wij moeten stellen:

$$w = -\frac{1}{2}\, c \left(a^2 - x^2 + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} A \frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} \right),$$

(waarin weer $k = (2k' + 1)\frac{\pi}{2}$ is).

De som der tweede differentiaalquotienten is $= c$, in overeenstemming met vergelijking (1), w is nul voor $x = \pm a$. De laatste voorwaarde, waaraan w nog moet voldoen is, dat zij nul wordt, als $y = \pm b$ is. Omdat

$$\frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} = 1 \text{ is voor } y = \pm b\,,$$

moet $$x^2 - a^2 = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} A \cos k\frac{x}{a} \text{ zijn.}$$

Ontwikkelen wij $x^2 - a^2$ volgens het theorema van Fourier, dan blijkt, dat A gelijk moet zijn aan

$$\frac{(-)^{k'+1}\, 4a^2}{k^3}, \text{ en dus:}$$

$$w = -\frac{1}{2}\, c \left(a^2 - x^2 - 4a^2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k^3} \frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} \right) \ldots \quad (10)$$

Ook de volgende uitdrukking voor w zal dus voldoen:

$$w = -\frac{1}{2}\, c \left(b^2 - y^2 - 4b^2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k^3} \frac{e^{k\frac{x}{b}} + e^{-k\frac{x}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\frac{y}{b} \right) \ldots \quad (11)$$

Integratie verschaft ons voor het volumen de uitdrukkingen:

$$Q = -c \left(\frac{4}{3} a^3 b - \frac{256 a^4}{\pi^5} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{1}{(2k'+1)^5} \frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \right) \ldots \ldots \quad (12)$$

en

$$Q = -c \left(\frac{4}{3} a b^3 - \frac{256 b^4}{\pi^5} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{1}{(2k'+1)^5} \frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \right) \ldots \ldots \quad (13)$$

Deze formules zijn eenvoudiger dan de vorige, en vertoonen, zooals de afleiding deed verwachten, dit eigenaardige, dat in form. (10), het gedeelte

$$- \tfrac{1}{2}\, c\, (a^2 - x^2)$$

de snelheid, en in form. (12) het gedeelte

$$- c \times \tfrac{4}{3}\, a^3 b$$

het doorstroomende volumen voorstelt voor eene rechthoekige buis, waarbij de afmeting b zeer groot is ten opzichte van a. Eveneens is er in de form. (11) en (13) een gedeelte, dat de snelheid, respectievelijk het volumen voorstelt, als de afmeting a zeer groot is ten opzichte van b.

§ 8. Wij willen nu wijzen op de analogie van het vraagstuk der stationnaire vloeistofbeweging in eene cylindrische buis met een vraagstuk uit de electriciteitsleer, waardoor wij de snelheid in eene rechthoekige buis nog in een anderen vorm verkrijgen.

Zooals wij aantoonden, wordt, wanneer x en y rechthoekige coördinaten in de doorsnede der buis zijn, de snelheid w als functie daarvan bepaald door de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c,$$

$$\left(c = \frac{p_1 - p_0}{fl} \right)$$

in verband met de voorwaarde, dat aan den wand

$$w = 0$$

moet zijn.

Het overeenkomstige vraagstuk uit de electriciteitstheorie is het volgende.

Laat in de oneindig lang onderstelde buis electriciteit met de overal even groote dichtheid $-\frac{c}{4\pi}$ verdeeld zijn, laat voorts de buiswand geleidend en met den grond verbonden zijn, wat is dan de potentiaalfunctie φ (teweeggebracht deels door de genoemde electrische verdeeling, deels door de tegengestelde influentieelectriciteit van den wand) in eenig punt binnen de buis ?

Volgens de vergelijking van Poisson moet overal

$$\Delta\varphi = c$$

zijn. Daar echter (wegens de oneindig groote lengte der buis) φ onafhankelijk van z moet zijn, wordt dit:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c.$$

Bovendien is aan den wand $\varphi = 0$, zoodat φ in dit vraagstuk door geheel dezelfde vergelijkingen bepaald wordt, als w in het hydrodynamische probleem. Daar verder de vergelijkingen, zooals wij in het begin van dit hoofdstuk aantoonden, slechts ééne oplossing toelaten, moet de waarde voor φ in het eene geval dezelfde zijn als die van w in het andere.

De wetenschap, dat te gelijk met het eene vraagstuk ook het andere is opgelost, brengt *direct* de oplossing niet verder; want de mathematische moeielijkheden blijven dezelfde. Maar indirect kan de analogie van dienst zijn, daar wij wellicht door beschouwingen aan de electriciteitstheorie ontleend, tot eene oplossingsmethode kunnen komen, die in de hydrodynamica minder voor de hand lag.

§ 9. Beschouwen wij weer het eerste voorbeeld van dit hoofdstuk. De vloeistof beweegt zich in de richting der Z-as tusschen de beide oneindig ver uitgestrekte platte vlakken met de vergelijkingen:

$$x = -a \quad \text{en} \quad x = +a.$$

Het vraagstuk uit de electriciteitsleer luidt aldus:

De ruimte tusschen de beide geleidende platte vlakken is gevuld met electriciteit van de dichtheid $-\frac{c}{4\pi}$; de potentiaalfunctie te berekenen.

Men kan dan met behulp van de theorie der electrische beelden [1]), eene verdeeling van electriciteit buiten de beschouwde ruimte aangeven, die met de electriciteit in de ruimte binnen en aan de grensvlakken φ dezelfde waarde doet aannemen, als in werkelijkheid het geval is.

Wij brengen n.l. tal van vlakken aan met de vergelijkingen:

$$x = 3a,\ 5a,\ 7a, \text{ enz.} \qquad \text{en } x = -3a,\ -5a,\ -7a, \text{ enz.}$$

en denken ons in de lagen, waarin aldus de ruimte verdeeld wordt, electriciteit, afwisselend met de dichtheden $-\frac{c}{4\pi}$ en $+\frac{c}{4\pi}$,

---

[1]) Zie b. v. Grinwis, Wrijvingselectriciteit.

zóó, dat tusschen de oorspronkelijke twee vlakken, die wij V_1 en V_2 zullen noemen, de dichtheid $-\frac{c}{4\pi}$ is.

Dan zal *deze* verdeeling van electriciteit alleen (zonder dat er electriciteit op de vlakken zelf aanwezig is) tusschen V_1 en V_2 dezelfde potentiaalfunctie teweeg brengen, die ook het gevolg is van de electriciteit tusschen V_1 en V_2 met de influentie-electriciteit op de geleidende (en met den grond verbonden) vlakken. Immers bij de laatste electriciteitsverdeeling zijn de voorwaarden voor de potentiaalfunctie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c, \text{ tusschen } V_1 \text{ en } V_2, \text{ en } \varphi = 0 \text{ aan } V_1 \text{ en } V_2.$$

Bij de laatste E.-verdeeling daarentegen is tusschen V_1 en V_2 ook $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c$, en $\varphi = 0$ aan V_1 en V_2, omdat aan elke hoeveelheid positieve E. aan de eene zijde van V_1 (of V_2) eene gelijke hoeveelheid negatieve E. als spiegelbeeld met betrekking tot dit vlak beantwoordt. Daar in beide gevallen φ door dezelfde vergelijkingen bepaald wordt, moet in elk punt tusschen V_1 en V_2 φ bij de twee genoemde electriciteitsverdeelingen dezelfde waarde hebben.

Wij kennen dus thans eene E.-verdeeling over de ruimte, wier potentiaalfunctie overal tusschen V_1 en V_2 in het hydrodynamische probleem de waarde van de snelheid bepaalt.

Men kan die potentiaalfunctie des noods door rechtstreeksche optelling of integratie $\left(\varphi = \sum \frac{e}{r}\right)$ vinden.

Hier is intusschen eene dergelijke berekening te omslachtig, terwijl wij het antwoord door directe integratie der vergelijking: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c$, met de voorwaarden $w = 0$, als $x = \pm a$ is, zeer gemakkelijk verkregen hebben.

Het electrostatische vraagstuk blijkt hier geenerlei vereenvoudiging aan te brengen; het is dan ook alleen besproken als inleiding tot de behandeling van het geval van vloeistofbeweging door eene rechthoekige buis, waar wij het antwoord eenigszins al tastende hebben verkregen.

Het middelpunt der doorsnede zij weer oorsprong van het rechthoekige coördinatenstelsel, de *XZ*- en *YZ*-vlakken loopen elk evenwijdig met een der grensvlakken der buis, de afmetingen der doorsnede zijn $2a$ en $2b$. Denken wij ons vlakken aangebracht met de vergelijkingen:

$$x = +a, +3a, +5a \text{ enz.} \qquad x = -a, -3a, -5a \text{ enz.},$$

en

$$y = +b, +3b, +5b \text{ enz.} \qquad y = -b, -3b, -5b \text{ enz.}$$

Zij verdeelen de ruimte in rechthoekige prismatische deelen, waarvan de buis er een is. Wanneer wij in deze deelen E aanbrengen afwisselend met de dichtheden $-\frac{c}{4\pi}$ en $+\frac{c}{4\pi}$, zoodat in twee naast elkaar liggende deelen altijd de teekens verschillen, $\left(\text{binnen de buis } -\frac{c}{4\pi}\right)$ dan zal de potentiaalfunctie binnen de buis overal voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = c,$$

en aan den omtrek $\varphi = 0$ zijn. Zij zal dus de waarde van w voorstellen.

Berekening door rechtstreeksche integratie is moeielijk. Wij kiezen den volgenden weg.

Laat $\psi(x)$ eene functie zijn, die van $x = -a$ tot $x = +a$, de waarde $+1$, van $x = +a$ tot $x = +3a$ de waarde -1, van $x = +3a$ tot $x = +5a$, de waarde $+1$ heeft, enz. (dus periodiek met de periode $4a$). Laat eveneens $\chi(y)$ van $y = -b$ tot $y = +b$ de waarde $+1$, van $y = +b$ tot $y = +3b$ de waarde -1 hebben en periodiek zijn met de periode $4b$. Dan kan de dichtheid in *alle* punten der ruimte worden voorgesteld door:

$$-\frac{c}{4\pi}\,\psi(x)\,\chi(y),$$

en de vergelijking, waardoor φ bepaald wordt in alle deelen der ruimte, is:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = c\psi(x)\,\chi(y).$$

De functiën $\psi(x)$ en $\chi(y)$ kunnen door het theorema van Fourier worden voorgesteld.

$\psi(x)$ heeft de periode $4a$ en verandert niet van teeken, als x dit doet. Wij stellen dus:

$$\psi(x) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + A_2 \cos 2\frac{\pi x}{2a} + A_3 \cos 3\frac{\pi x}{2a} + \text{. enz}$$

De coëfficienten zijn:

$$A_0 = \frac{1}{4a}\int_{-2a}^{+2a} \psi(x)dx,$$

$$A_m = \frac{1}{2a}\int_{-2a}^{+2a} \psi(x) \cos m\frac{\pi x}{2a}dx.$$

Let men op de waarden van $\psi(x)$, dan vindt men:

$$A_0 = 0 \quad \text{en}$$

$$A_m = \frac{4}{m\pi} \sin \frac{1}{2} m\pi$$

dus

$$A_2 = A_4 = A_6 \ldots\ldots = 0,$$

$$A_1 = \frac{4}{\pi},\ A_3 = -\ \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\pi},\ A_5 = +\ \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{\pi} \text{ enz.}$$

$$\psi(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{2k'+1} \cos (2k'+1) \frac{\pi x}{2a}.$$

Evenzoo is:

$$\chi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{l'=0}^{l'=\infty} \frac{(-1)^{l'}}{2l'+1} \cos (2l'+1) \frac{\pi x}{2b}.$$

De vergelijking ter bepaling van φ wordt dus:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{16c}{\pi^2} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \sum_{l'=0}^{l'=\infty} \frac{(-1)^{k'+l'}}{(2k'+1)(2l'+1)} \cos(2k'+1) \frac{\pi x}{2a} \cos (2l'+1) \frac{\pi y}{2b}.$$

Wij kunnen nu een aantal deelen van φ bepalen, zoodat voor elk deel φ' de uitdrukking $\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}$ een der termen van het tweede lid wordt. De som der deelen φ' levert dan φ op. φ' moet voldoen aan:

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}=\frac{16c}{\pi^2}\frac{(-1)^{k'+l'}}{(2k'+1)\,(2l'+1)}\cos(2k'+1)\frac{\pi x}{2a}\cos(2l'+1)\frac{\pi y}{2b}.$$

Daaraan wordt voldaan door:

$$\varphi'=-\frac{64c}{\pi^4}\frac{(-1)^{k'+l'}}{(2k'+1)\,(2l'+1)}\times$$

$$\frac{1}{\frac{(2k'+1)^2}{a^2}+\frac{(2l'+1)^2}{b^2}}\cos(2k'+1)\frac{\pi x}{2a}\cos\ (2l'+1)\frac{\pi y}{2b}\ \ldots\ldots (14)$$

Sommeert men dit naar k' en l' telkens van 0 tot ∞, dan vinden wij de eenige oplossing, die mogelijk is. Dat φ aan de wanden nul wordt is duidelijk, want φ' wordt nul voor $x=\pm a$ en $y=\pm b$. Voorts blijkt uit het theorema van Fourier, dat $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ binnen de buis de voorgeschreven waarde verkrijgt. De waarde van φ is die van w in het hydrodynamische vraagstuk. Duidelijk blijkt, dat voor $x=y=0$, dus voor de punten in de as de snelheid het grootst is. De hoeveelheid vloeistof, die per tijdseenheid door de buis stroomt, wordt dus:

$$\int\int\varphi\,dx\,dy$$

over de doorsnede genomen.

Voor $\int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-b}^{+b}\varphi'\,dx\,dy$ vindt men:

$$-\frac{1024\ c\,ab}{\pi^6}\cdot\frac{1}{(2k'+1)^2\ (2l'+1)^2}\cdot\frac{1}{\frac{(2k'+1)^2}{a^2}+\frac{(2l'+1)^2}{b^2}},$$

zoodat de hoeveelheid doorstroomende vloeistof wordt gegeven door

$$Q=-\frac{1024c}{\pi^6}ab\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\ \sum_{l'=0}^{l'=\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2\,(2l'+1)^2}\ \frac{1}{\frac{(2k'+1)^2}{a^2}+\frac{(2l'+1)^2}{b^2}}.$$

Deze laatste formule is voor de berekening zeer gemakkelijk. Voor eene vierkante buis is de dubbele som gelijk aan:

$$0{,}56\ .\ .\ a^2,$$

waaruit volgt:

$$Q = - c \times 0{,}56\ .\ .\ a^4,$$

welk antwoord volkomen met het vroeger gevondene overeenstemt.

Door eene der afmetingen van de doorsnede, bijv. b zeer groot te stellen, verkrijgt men:

$$Q = - \frac{1024}{\pi^6} ca^3b \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \sum_{l'=0}^{l'=\infty} \frac{1}{(2k'+1)^4 (2l'+1)^2} =$$

$$- \frac{1024c}{\pi^6} \left\{ \sum \frac{1}{(2k'+1)^4} \right\} \times \left\{ \sum \frac{1}{(2l'+1)^2} \right\} a^3b =$$

$$- \frac{1024c}{\pi^6} \times \frac{1}{96} \pi^4 \times \frac{1}{8} \pi^2 a^3 b = - \frac{4}{3} ca^3b,$$

welk antwoord wij reeds langs verschillende wegen verkregen.

§ 10. Wij mogen niet nalaten te wijzen op de volgende merkwaardige, zuiver mathematische stellingen, die voortvloeien uit de gelijkstelling der verschillende vormen, waaronder zich de snelheid en het volumen bij eene rechthoekige buis aan ons vertoonden.

Men vindt gemakkelijk:

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \left[\frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^{k\frac{x}{b}} + e^{-k\frac{x}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\frac{y}{b} \right] \right\} =$$

$$= a^2 - x^2 - 4a^2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k^3} \frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} =$$

$$= b^2 - y^2 - 4b^2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k^3} \frac{e^{k\frac{x}{b}} + e^{-k\frac{x}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\frac{y}{b} =$$

$$= \frac{32}{\pi^6} \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \sum_{l'=0}^{l'=\infty} \frac{(-1)^{k'+l'}}{(2k'+1)(2l'+1)} \times$$

$$\frac{1}{\frac{(2k'+1)^2}{a^2} + \frac{(2l'+1)^2}{b^2}} \cos (2k'+1)\frac{\pi x}{2a} \cos (2l'+1) \frac{\pi y}{2b}.$$

Door de tweede dezer waarden met $\frac{1}{a^2}$ vermenigvuldigd op te tellen bij de derde met $\frac{1}{b^2}$ vermenigvuldigd, en die som gedeeld door $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ gelijk te stellen aan de eerste verkrijgt men:

$$2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k} \left[\frac{e^{k\frac{y}{a}} + e^{-k\frac{y}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\frac{x}{a} + \frac{e^{k\frac{x}{b}} + e^{-k\frac{x}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\frac{y}{b} \right] = 1.$$

De verschillende waarden voor het volumen geven:

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left\{\frac{1}{3} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\left[\frac{a}{b}\,\frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} + \frac{b}{a}\,\frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}}\right]\right\} =$$

$$= 2a^2\left\{\frac{1}{3} - 2\frac{a}{b}\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^5}\,\frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}}\right\} =$$

$$= 2b^2\left\{\frac{1}{3} - 2\frac{b}{a}\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^5}\,\frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}}\right\} =$$

$$= \frac{512}{\pi^6}\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\sum_{l'=0}^{l'=\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2\,(2l'+1)^2}\cdot\frac{1}{\frac{(2k'+1)^2}{a^2} + \frac{(2l'+1)^2}{b^2}}.$$

Uit de eerste drie dezer laatste vormen vindt men weer:

$$2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^3}\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} + \frac{b}{a}\,\frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}}\right] = 1.$$

§ 11. Wij zullen voor eene buis met rechthoekige doorsnede ook nog de oplossing met inachtneming der glijding meêdeelen, die door Résal [1]) wordt opgegeven. Behalve aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

moet dan door w aan de voorwaarden voldaan worden:

$$\left.\begin{aligned} w &= \lambda\,\frac{\partial w}{\partial x} \text{ voor } x = \pm a, \\ w &= \lambda\,\frac{\partial w}{\partial y} \text{ voor } y = \pm b. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Stellen wij:

$$w = \sum A \cos mx \cos ny,$$

[1]) Traité de Mécanique générale. Tome deuxième.

waarin m en n willekeurige getallen zijn, dan blijkt, dat aan (15) voldaan wordt, als

$$\sum A\left(m^2 + n^2\right) \cos mx \cos ny = -c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

is, terwijl uit de vergelijkingen (16) volgt, dat m en n wortels moeten zijn der vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} m \operatorname{tg} ma &= \frac{1}{\lambda}, \\ n \operatorname{tg} nb &= \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

die voor m en n een oneindig aantal waarden geven.

De geldigheid der ontwikkeling aannemende kan men de coëfficienten A bepalen. Daartoe vermenigvuldigen wij de beide leden der vergelijking (17) met

$$dxdy \cos m'x \cos n'y,$$

waarin m' en n' wortels zijn van (18), en integreeren naar x, tusschen de grenzen 0 en a, en naar y tusschen 0 en b.

$$-c \int_0^a\!\!\int_0^b dxdy \cos m'x \cos n'y =$$

$$\sum A\left(m^2 + n^2\right) \int_0^a\!\!\int_0^b dxdy \cos mx \cos m'x \cos ny \cos n'y \quad \ldots . \quad (19)$$

De waarde der integraal $\int_0^a dx \cos mx \cos m'x$ is

$$\frac{\cos ma \cos m'a\,(m \operatorname{tg} ma - m' \operatorname{tg} m'a)}{m^2 - m'^2}$$

en dus volgens (18) $= 0$, als m verschilt van m'. Hetzelfde geldt voor de integraal

$$\int_0^b dy \cos ny \cos n'y,$$

zoodat de dubbele integraal in het tweede lid van (19) de waarde nul heeft, als niet te gelijk $m = m'$ en $n = n'$ is.

Als $m = m'$ en $n = n'$ is, wordt die integraal

$$\frac{2ma + \sin 2ma}{4m} \cdot \frac{2nb + \sin 2nb}{4b}$$

en die in het eerste lid:

$$\frac{\sin ma}{m} \cdot \frac{\sin nb}{n}.$$

Nu is A bekend, en wij vinden ten slotte voor w:

$$w = -16c \sum \frac{\sin ma \sin nb \cos mx \cos ny}{(m^2+n^2)(2ma + \sin 2ma)(2nb + \sin 2nb)}.$$

Integratie geeft voor het volumen:

$$Q = -64c \sum \frac{\sin^2 ma \quad \sin^2 nb}{mn\,(m^2+n^2)(2ma + \sin 2ma)(2nb + \sin 2nb)}$$

Is er geene glijding, dus $\lambda = 0$, dan moet aan den wand $w = 0$ zijn, hetgeen vereischt, dat

$$m = (2k+1)\frac{\pi}{2a} \text{ en } n = (2l+1)\frac{\pi}{2b} \text{ is.}$$

waarin k en l alle geheele getallen tusschen 0 en ∞ voorstellen. De uitdrukking voor w gaat dan over in die, welke wij aan het electriciteitsvraagstuk hebben ontleend.

§ 12. Wij zullen eindelijk nog een paar stellingen bewijzen, die gelden voor buizen met willekeurige doorsnede.

I. De snelheid is steeds evenredig met het verschil in druk bij het begin en het einde der buis en omgekeerd evenredig met de lengte.

De vergelijkingen, die de snelheid bepalen voor eene buis met den omtrek $f\,(xy) = 0$ zijn:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c \text{ en } w = 0, \text{ of } w = \lambda \frac{\partial w}{\partial n} \text{ voor } f\,(xy) = 0.$$

Voor eene andere c bijv. c' zijn de vergelijkingen:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = c' \text{ en eveneens } w' = 0, \text{ of } w' = \lambda \frac{\partial w'}{\partial n} \text{ voor } f\,(xy) = 0.$$

Die vergelijkingen kunnen wij in den volgenden vorm schrijven:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{w}{c}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{w}{c}\right)}{\partial y^2} = 1 \text{ en } \frac{w}{c} = 0, \text{ of } \frac{w}{c} = \lambda \frac{\partial\left(\frac{w}{c}\right)}{\partial n},$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{w'}{c'}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{w'}{c'}\right)}{\partial y^2} = 1 \text{ en } \frac{w'}{c'} = 0, \text{ of } \frac{w'}{c'} = \lambda \frac{\partial\left(\frac{w'}{c'}\right)}{\partial n},$$

waaruit blijkt, dat $\frac{w}{c}$ en $\frac{w'}{c'}$ door dezelfde vergelijkingen bepaald worden, en wij dus mogen stellen:

$$\frac{w}{c} = \frac{w'}{c'} \text{ of } w' = \frac{c'}{c}\, w.$$

De snelheid is dus evenredig met de constante c, die zelf volgens (1) evenredig is met $p_0 - p_1$, en omgekeerd evenredig met l.

II. Wanneer er geene glijding bestaat, is het volumen vloeistof, dat door buizen stroomt met gelijkvormige doorsneden c. p. evenredig met de vierde machten der afmetingen van de doorsneden.

Als voor zekere buis de vergelijkingen, die de snelheid bepalen, zijn:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c, \text{ en } w = 0, \text{ als } f(x,y) = 0 \text{ is,}$$

dan zullen wij in eene buis met gelijkvormige doorsnede voor de coördinaten van eenig punt kunnen stellen $x' = ax$, $y' = ay$, en als de snelheid w' is, dan zijn de vergelijkingen in dit laatste geval:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} = c, \text{ of } \frac{\partial^2 \frac{w'}{a^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{w'}{a^2}}{\partial y^2} = c, \text{ en } w' = 0 \text{ voor } f(x,y) = 0.$$

Daar dus w en $\frac{w'}{a^2}$ door dezelfde vergelijkingen worden bepaald, moet

$$w = \frac{w'}{a^2} \text{ of } w' = a^2 w \text{ zijn.}$$

De snelheden in homologe punten der gelijkvormige doorsneden zijn dus evenredig met de tweede machten der coördinaten. Omdat wij nu om het volumen vloeistof te verkrijgen, dat in eene tijdseenheid door de buis stroomt, elk element der doorsnede met de overeenkomstige snelheid moeten vermenigvuldigen en over de geheele doorsnede integreeren, ziet men gemakkelijk in, dat de volumina evenredig zullen zijn met de vierde machten der afmetingen.

Deze stelling kan van praktisch nut zijn om, als het volumen voor eene buis met willekeurige doorsnede experimenteel is gevonden, het volumen voor eene buis met gelijkvormige doorsnede te vinden.

VIJFDE HOOFDSTUK.

§ 1. Hebben wij in het vorige hoofdstuk de wet van Poiseuille uitgebreid voor rechte buizen met andere dan cirkelvormige doorsnede, nog in eene andere richting zullen wij die wet uitbreiden.

Vooreerst stellen wij ons voor, dat de buis uit op elkaar volgende stukken bestaat, die allen eene cirkelvormige doorsnede, maar met verschillende middellijn hebben. Daar, waar de buizen aan elkaar sluiten, zal de beweging niet geschieden, zooals wij dat voor de afleiding van de wet verondersteld hebben; daar zullen onregelmatigheden voorkomen, die verder in de buis weer zullen verdwijnen; zij zullen zich klaarblijkelijk over een afstand moeten uitstrekken, die van dezelfde orde van grootte is als de middellijn der buis. Wij veronderstellen de buizen zóó lang ten opzichte harer middellijn, dat het gedeelte, waar de beweging onregelmatig is, zeer klein is ten opzichte van de geheele lengte der buizen.

Wij hebben voor de doorstroomende hoeveelheid bij eene rechte buis met cirkelvormige doorsnede gevonden:

$$Q = k \frac{p_0 - p_1}{l} R^4,$$

waarin ter bekorting $k = \frac{\pi}{8f}$ is gesteld.

Als de lengten en stralen der verschillende stukken, waaruit de buis bestaat, zijn: $l_1, l_2, l_3, \ldots . l_n$ en $R_1, R_2, R_3 \ldots . R_n$; als de druk bij het begin der buis p_0, bij het eerste overgangspunt p_1, bij het tweede p_2 enz. en aan het einde p_n is, dan kunnen wij, omdat door elke doorsnede van elke buis in denzelfden tijd hetzelfde volumen Q moet stroomen, de volgende betrekkingen opstellen:

$$p_0 - p_1 = \frac{l_1}{kR_1^4}\, Q,$$

$$p_1 - p_2 = \frac{l_2}{kR_2^4}\, Q,$$

enz.

$$p_{n-1} - p_n = \frac{l_n}{kR_n^4}\, Q.$$

Door samentelling:

$$p_0 - p_n = \frac{1}{k}\left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} + \dots \frac{l_n}{R_n^4}\right) Q,$$

dus

$$Q = \frac{k\,(p_0 - p_1)}{\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} + \dots \frac{l_n}{R_n^4}}.$$

Het is van belang op te merken, dat de formule van Poiseuille veel overeenkomst vertoont met de formule van Ohm voor de intensiteit van een electrischen stroom. De lengte der buis treedt op dezelfde wijze op als de lengte des geleiders, het verschil in drukking komt overeen met het potentiaalverschil; in plaats van de vierde macht van den straal der buis hebben wij in de formule van Ohm slechts de tweede macht van dien des geleiders.

Dezelfde overeenkomst moet er dan ook noodzakelijk bestaan tusschen de formule, die wij voor eene buis uit verschillende stukken bestaande, hebben afgeleid en die voor de intensiteit van een electrischen stroom, welke achtereenvolgens geleiders van verschillenden weerstand doorloopt.

§ 2. In de tweede plaats beschouwen wij de stationnaire beweging in eene flauw gebogen buis, waarvan de doorsnede niet overal dezelfde is, maar toch ook slechts langzaam verandert.

Onder de as S der buis verstaan wij eenige kromme lijn binnen de buis voortloopende; doorsnede noemen wij de figuur door snijding met een plat vlak loodrecht op die as ontstaande.

Wanneer de stationnaire toestand is ingetreden, kunnen wij ons een groot aantal lijnen denken, die in elk punt de richting der strooming aangeven (*stroomlijnen*). Zij zullen de doorsneden *bijna* loodrecht snijden. Denken wij ons vervolgens in eenige doorsnede eene oneindig kleine gesloten lijn getrokken, en trekken wij door elk punt daarvan eene stroomlijn, dan liggen deze alle op het oppervlak eener *stroombuis*. Zij in een punt P van zulk eene buis v de snelheid, ω het deel der doorsnede binnen die stroombuis vallende, α de hoek tusschen v en de normaal der doorsnede, dan passeert per tijdseenheid door ω de hoeveelheid vloeistof $v\omega \cos \alpha$, waarvoor men, daar α zeer klein is, met verwaarloozing van grootheden der tweede orde mag schrijven $v\omega$. Daaruit volgt, dat langs elke stroombuis het produkt $v\omega$ constant blijft.

Een volumen-element der vloeistof heeft eene normale en eene tangentiale versnelling. De eerste is $\frac{v^2}{\varrho}$ als ϱ den kromtestraal eener stroomlijn voorstelt. Deze versnelling kan, als geene uitwendige krachten op de vloeistof werken, alleen voortvloeien uit eene ongelijkheid der drukking in verschillende punten eener doorsnede.

Wanneer intusschen de dwarsafmetingen der buis zeer klein zijn, vergeleken met den kromtestraal ϱ, dan zal men van die ongelijkheid mogen afzien. Want het drukverval in eenige in de doorsnede gelegen richting moet van de orde $\mu \frac{v^2}{\varrho}$ zijn, dus als λ eenige afmeting der doorsnede is, zullen de drukverschillen binnen eenige doorsnede zijn van de orde $\mu\, v^2 \frac{\lambda}{\varrho}$.

De tangentiale versnelling langs eenige stroomlijn s hangt samen met de wijze, waarop de doorsnede ω eener stroombuis verandert, als men langs de buis voortgaat; die versnelling is namelijk

$$- \frac{\frac{d\omega}{ds}}{\omega} v^2 .$$

Wij kunnen daarvan afzien, wanneer de doorsnede der buis slechts zeer langzaam verandert. $\left(\frac{d\omega}{ds}\right.$ is dan zeer klein$\left.\right)$. Dan mogen wij dus stellen, dat de wrijving, die een vloeistofelement van de naastliggende vloeistof ondervindt, evenwicht maakt met het drukverschil in de richting der stroomlijn s.

Laat ξ en η rechthoekige coördinaten in eene doorsnede voorstellen, dan is w eene functie daarvan. Op een element $d\tau$ werkt in de richting der stroomlijn de wrijving:

$$f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)d\tau,$$

en wij verkrijgen dus:

$$f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)=\frac{dp}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Eigenlijk is hierin $\frac{dp}{ds}$ niet in alle punten eener doorsnede even groot. Want wij hebben wel gezien, dat de waarde van p in alle punten eener doorsnede gelijk mag gesteld worden, maar twee op oneindig kleinen afstand van elkaar gelegen doorsneden snijden van de verschillende stroomlijnen stukken ds van ongelijke lengte af. Daar echter de verhoudingen dier verschillende stukken van de eenheid afwijken met een bedrag van de orde $\frac{\lambda}{\varrho}$, zullen wij al die stukken aan elkaar mogen gelijkstellen en dus in (1) $\frac{dp}{ds}$ vervangen door $\frac{dp}{dS}$, het drukverval aan de as der buis. De vergelijking wordt dan:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}=\frac{1}{f}\,\frac{dp}{dS}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Het tweede lid is thans onafhankelijk van ξ en η, zoodat wij voor elke doorsnede eene vergelijking verkrijgen, van geheel denzelfden vorm, als wanneer de buis cylindrisch was. Alleen is thans $\frac{dp}{dS}$ niet meer voor alle doorsneden even groot; die grootheid is eene voorloopig onbekende functie van S.

Stel, dat men voor elke doorsnede w uit (2) zoo kan bepalen, dat aan den omtrek $w = 0$ is. Dan wordt dus gevonden:

$$w = -\frac{1}{f} F(\xi, \eta) \frac{dp}{dS},$$

en door integratie vindt men voor de hoeveelheid, die door de doorsnede stroomt, eene uitdrukking van den vorm:

$$Q = -\frac{1}{f} M \frac{dp}{dS}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

waarin M voor elke doorsnede een geheel bepaald getal wordt. $\frac{1}{f} M$ stelt blijkbaar voor elke doorsnede de hoeveelheid vloeistof voor, die door eene cylindrische buis van die doorsnede stroomt, als het drukverval voor de eenheid van lengte gelijk is aan de eenheid. Voor iedere doorsnede heeft M eene andere waarde; weet men, hoe de doorsnede langs de buis verandert, dan is M eene bekende functie van S.

Tot nog toe bleef $\frac{dp}{dS}$ onbekend. Wij kunnen die grootheid thans uit den druk aan het begin en het einde der buis bepalen (p_0 en p_1), wanneer wij in aanmerking nemen, dat Q onafhankelijk van S moet zijn. Uit (3) volgt:

$$dp = -fQ \frac{dS}{M},$$

dus, als men langs de as integreert (van $S = 0$ tot $S = l$):

$$p_0 - p_1 = fQ \int_0^l \frac{dS}{M}.$$

Hieruit volgt voor de hoeveelheid vloeistof, die door de buis stroomt:

$$Q = \frac{p_0 - p_1}{f \int_0^l \frac{dS}{M}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Wij leeren uit het voorgaande, dat als eene cylindrische buis slechts flauw gebogen is, wij dezelfde uitdrukkingen voor het volumen mogen aannemen, die wij in vorige hoofdstukken voor rechte buizen hebben verkregen.

§ 3. Wij zullen de formule (4) toepassen op het geval, dat de buis conisch is met cirkelvormige doorsnede. De as des kegels zij de Z-as, φ de hoek, dien de as met de schuine zijde maakt, R_0 de straal bij het begin der buis. Dan is, omdat de straal eener willekeurige doorsnede $R = R_0 + z \operatorname{tg}\varphi$ is, voor dit geval

$$M = \frac{\pi}{8} (R_0 + z \operatorname{tg} \varphi)^4,$$

en dus:

$$Q = \frac{p_0 - p_1}{f} \cdot \frac{1}{\displaystyle\int_0^l \frac{dz}{\frac{\pi}{8}(R_0 + z \operatorname{tg} \varphi)^4}} = k \; \frac{3(p_0 - p_1) \operatorname{tg} \varphi}{\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{(R_0 + l \operatorname{tg} \varphi)^3}}.$$

Als de straal aan het einde der buis R_1 is, dan is

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_1 - R_0}{l},$$

en wij kunnen dan voor de bovenstaande formule schrijven:

$$Q = k \; \frac{3(p_0 - p_1)\,(R_1 - R_0)\, R_1^3\, R_0^3}{l\,(R_1^3 - R_0^3)} = k \; \frac{3(p_0 - p_1)\, R_1^3\, R_0^3}{l\,(R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2)}.$$

Als $R_1 - R_0$ klein is, zoodat wij het kwadraat van die grootheid kunnen verwaarloozen, dan is ten naaste bij

$$R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2 = 3\, R_1 R_0,$$

en de bovenstaande formule wordt:

$$Q = \frac{k(p_0 - p_1)\, R_1^2\, R_0^2}{l}.$$

Ook hier is dus de hoeveelheid vloeistof, die in de tijdseenheid door de buis stroomt, evenredig met het verschil in druk bij het begin en het einde der buis en omgekeerd evenredig met de lengte. Verder blijkt zij evenredig te zijn met het produkt van de vierkanten der stralen bij het begin en het einde, of met het produkt der doorsneden.

§ 4. Wij geven eindelijk nog aan, hoe men de hoeveelheid doorstroomende vloeistof kan bepalen, als de buis zich vertakt, door eene bewerking, die weer geheel overeenkomstig is met die, waardoor men in de electriciteitsleer bij stroomverdeeling de intensiteit van den hoofdstroom en in de verschillende takken bepaalt. Wij nemen daarbij aan, dat de buis en de takken zoo lang zijn, dat de onregelmatigheden bij de vertakking van geringen invloed zijn.

Wij stellen de lengte der buis tot aan de splitsing l_1, haar straal R_1, de hoeveelheid vloeistof, die er doorstroomt in de tijdseenheid Q_1. We nemen aan, dat zij zich in twee deelen splitst, waarvan de lengten l_2 en l_3, de stralen R_2 en R_3, en de hoeveelheden Q_2 en Q_3 zijn. Is bij het begin der buis de druk p_0, bij de vertakking p_1, bij het einde der eene buis p_2 en der andere p_3, dan gelden de formules:

$$Q_1 = \frac{k(p_0 - p_1)}{l_1} R_1^4,$$

$$Q_2 = \frac{k(p_1 - p_2)}{l_2} R_2^4,$$

$$Q_3 = \frac{k(p_1 - p_3)}{l_3} R_3^4.$$

Daar bovendien bij stationnaire beweging $Q_1 = Q_2 + Q_3$ moet zijn, kunnen uit die vier vergelijkingen p_1 geëlimineerd en Q_1, Q_2 en Q_3 opgelost worden.

Ook andere gevallen van vertakking van buizen kunnen op dezelfde wijze worden behandeld, en het zou niet moeielijk vallen, van elke der welbekende wetten van Kirchhoff, over het verloop van electrische stroomen, de hydrodynamische analogie aan te geven.

ZESDE HOOFDSTUK.

§ 1. Bij de afleiding der formules in vorige hoofdstukken is verondersteld, dat geene uitwendige krachten op de vloeistof werken.

De bewegingsvergelijkingen bij aanwezigheid van dergelijke krachten zijn [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f}{\mu}\Delta u = X,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{f}{\mu}\Delta v = Y,$$

enz. wanneer X, Y, Z de componenten der uitwendige krachten zijn voor de massa-eenheid der vloeistof.

Stel, dat er eene krachtfunctie U bestaat, zoodat $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ is. Stelt men dan

$$p - \mu U = p',$$

zoo worden de vergelijkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{f}{\mu}\Delta u = 0,$$

enz.

Het vraagstuk komt dan op hetzelfde neer, alsof er geene uitwendige krachten bestonden, alleen is p door p' vervangen.

Als bijv. de buis met cirkelvormige doorsnede (zie tweede hoofdstuk) vertikaal staat, dan is:

---

[1]) Zie hoofdstuk I, § 4.

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

dus

$$U = gz.$$

De formule (3) wordt dan:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = cf \text{ dus } c = \frac{p_1' - p_0'}{fl} = \frac{p_1 - p_0}{fl} - \frac{\mu g}{f}.$$

Daardoor wordt het volumen

$$Q = \frac{\pi}{8f}\left(\frac{p_0 - p_1}{l} + \mu g\right)(R^4 + 4\lambda R^3).$$

§ 2. Beschouwen wij nu de strooming door eene hellende buis. Wij kiezen de Y-as horizontaal, de X- en Z-assen in een vertikaal vlak; de Z-as, langs welke de as der buis ligt, maakt met het horizontale vlak den hoek α. Voor de zwaartekracht is dan:

$$X = g \cos \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = g \sin \alpha, \text{ dus:}$$

$$U = g\,(x \cos \alpha + z \sin \alpha).$$

Voor de beweging door de buis verkrijgen wij nu dergelijke uitdrukkingen als bij afwezigheid der zwaartekracht. Er is eene stationnaire strooming mogelijk, waarbij overal langs de as der buis $\frac{\partial p'}{\partial z}$ eene standvastige waarde heeft, en in elke loodrechte (niet vertikale) doorsnede p' constant is. Zij $\frac{\partial p'}{\partial z} = -A$, dus

$$p' = -Az + B.$$

(A en B constanten).

De hoeveelheid vloeistof, die per tijdseenheid door de buis stroomt, is dan ϑA, als ϑ de hoeveelheid vloeistof aangeeft, die door de buis stroomt, als deze horizontaal ligt, en het drukverval $= 1$ is.

In de hellende buis wordt de druk in elk punt bepaald door:

$$p = p' + \mu U,$$

of

$$p = -Az + g\mu\,(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + B,$$

dus is langs de as der buis ($x = 0$)

$$p = -Az + g\mu \sin \alpha + B,$$

het drukverval langs de as:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = A - g\mu \sin \alpha.$$

Hieruit volgt:

$$A = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\mu \sin \alpha,$$

en de uitstroomende hoeveelheid wordt

$$-\vartheta \frac{\partial p}{\partial z} + \vartheta g\mu \sin \alpha.$$

Is de druk langs de as overal even groot, dus $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, dan is de hoeveelheid $\vartheta g\,\mu \sin \alpha$.

De beweging geschiedt dan alleen ten gevolge der zwaartekracht.

§ 3. Verbeelden wij ons thans, dat de buis door het YZ-vlak in twee met betrekking tot dat vlak symmetrische deelen verdeeld wordt. Dan kunnen wij, als de laatst beschouwde bewegingstoestand is ingetreden, de bovenste helft der vloeistof, (n.l. boven het YZ-vlak) wegnemen, zonder iets aan den bewegingstoestand der onderste helft te veranderen. Vooreerst toch is de druk, dien de bovenste helft op de onderste uitoefent, overal even groot, $\left(\text{immers } \frac{\partial p}{\partial z} \text{ was } 0\right)$ en deze druk kan ook door de lucht worden uitgeoefend (bovendien doet het bedrag dezer overal even groote drukking niets ter zake). Verder was tengevolge van de symmetrie der buis met betrekking tot het YZ-vlak ook de beweging symmetrisch ten opzichte van dat vlak, dus aan het genoemde vlak $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$. Daaruit volgt, dat de vloeistof boven het YZ-vlak geenerlei wrijving op de onderste helft uitoefende, zoodat het voor de beweging dezer laatste volkomen onverschillig is, of de bovenste helft er is of niet.

Wij verkrijgen derhalve het volgende resultaat. In eene lange hellende cylindrische open goot (of kanaal) is eene stationnaire vloeistofbeweging mogelijk, waarbij het vrije oppervlak een plat vlak is met de lijn der grootste helling evenwijdig aan de as der goot. Om de hoeveelheid doorstroomende vloeistof te bepalen neme men de loodrechte doorsnede van de vloeistofmassa, completeere die door haar spiegelbeeld er bij te voegen tot een gesloten figuur en bepale voor eene buis met deze figuur tot doorsnede de hoeveelheid vloeistof ϑ, die er bij een drukverval $= 1$ doorstroomt, dan is de hoeveelheid vloeistof, die door de goot stroomt $^1/_2\ \vartheta \mu\, g \sin \alpha$.

Zoo zal dus het volumen zijn:

Voor eene half-cirkelvormige goot, met glijding:

$$\frac{\pi \mu g}{16 f}\,(R^4 + 4\lambda R^3) \sin \alpha\,;$$

zonder glijding,

$$\frac{\pi \mu g}{16 f}\,R^4 \sin \alpha.$$

Voor een zeer breed kanaal, met platten bodem, eene diepte $= a$, eene breedte (zeer groot) $= 2b$, zonder glijding,

$$\frac{2 \mu g}{3 f}\,a^3 b \sin \alpha.$$

Voor een kanaal, waarvan de doorsnede een rechthoek, de diepte $= a$, de breedte $= 2b$ is,

$$\frac{512 \mu g}{\pi^6 f} \sin \alpha \,.\, ab \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 (2l+1)^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{(2k+1)^2}{a^2} + \dfrac{(2l+1)^2}{b^2}}.$$

§ 4. Eenigszins uitvoeriger willen wij beschouwen de strooming in een hellend, zeer breed kanaal met platten bodem, voor het geval ook, dat zich boven de vloeistof lucht bevindt, die, wanneer zij in de richting van het kanaal in beweging is, invloed op den vloeistofstroom zal uitoefenen. De coördinaatassen en de richting van het kanaal blijven als in het vorige vraagstuk. Het bovenvlak der vloeistof zij het YZ-vlak; de doorsnede der vloeistofmassa met het XY-vlak is een rechthoek met eene zeer lange zijde $2b$ evenwijdig aan de Y-as, en de zijde a (diepte van de vloeistof) evenwijdig aan de X-as. Aan den bodem is dus $x = a$.

Bij stationnaire strooming is weer in elke doorsnede p' constant. Zal aan het oppervlak p overal dezelfde waarde hebben, dan moet

$$p' + \mu U = p' + g\mu z \sin\alpha$$

langs het oppervlak constant, dus

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = - g\mu \sin\alpha$$

zijn. De bewegingsvergelijking wordt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{f}\,\frac{\partial p'}{\partial z} = - \frac{g\mu}{f}\sin\alpha,$$

waaruit volgt:

$$w = - \frac{g\mu}{2f}\sin\alpha \,.\, x^2 + C_1 x + C_2,$$

door welke formule bepaald wordt, hoe de snelheid met de diepte verandert. De integratieconstanten worden bepaald door de voorwaarden voor $x = 0$ en $x = a$.

Onderstellen wij glijding langs den bodem, dan moet voor $x = a$

$$w = - \lambda\frac{\partial w}{\partial x} \text{ zijn.}$$

Dit geeft ééne voorwaarde. Nemen wij vervolgens aan, dat de lucht boven het kanaal in beweging is, dan verkrijgen wij als tweede voorwaarde:

$$W - w = - \eta\frac{\partial w}{\partial x}, \text{ voor } x = 0.$$

(η is de glijdingsconstante voor water en lucht, W snelheid der lucht). Wij vinden daaruit voor de snelheid op de diepte x:

$$w = - \frac{g\mu}{2f}\sin\alpha \left\{ x^2 - \frac{a^2 + 2a\lambda}{a + \eta + \lambda}(x + \eta) \right\} + W\frac{a - x + \lambda}{a + \eta + \lambda}.$$

Vermenigvuldiging van w met $dxdy$ en integratie naar x tusschen de grenzen 0 en a en naar y tusschen de grenzen $- b$ en b, geeft voor het volumen, dat in de tijdseenheid door het kanaal stroomt:

$$Q = - \frac{g\mu}{f}.\sin\alpha.\, a^2 b \left\{\frac{1}{3}a - \frac{a + 2\lambda}{a + \eta + \lambda}\left(\frac{1}{2}a + \eta\right)\right\} + W\frac{ab\,(a + 2\lambda)}{a + \eta + \lambda}$$

Als aan den bodem geene glijding bestaat, dus $\lambda = 0$ is, is

$$w = - \frac{g\mu}{2f}\sin\alpha \left\{ x^2 - \frac{a^2}{a + \eta}(x + \eta) \right\} + W\frac{a - x}{a + \eta}$$

en

$$Q = - \frac{g\mu}{f}\sin\alpha \,.\, a^3 b \left\{\frac{1}{3} - \frac{\tfrac{1}{2}a + \eta}{a + \eta}\right\} + W\frac{a^2 b}{a + \eta} =$$

$$= \frac{g\mu}{f}\sin\alpha \,.\, a^3 b\, \frac{a + 4\eta}{6\,(a + \eta)} + W\frac{a^2 b}{a + \eta}.$$

Als $\alpha = 0$ is, dus het kanaal horizontaal ligt, verkrijgen wij voor de snelheid der vloeistof in zulk een kanaal door den wind voortgesleept:

$$w = W \frac{a - x + \lambda}{a + \eta + \lambda}, \text{ met glijding.}$$

$$w = W \frac{a - x}{a + \eta}, \text{ zonder glijding;}$$

en voor het volumen:

$$W \frac{ab(a + 2\lambda)}{a + \eta + \lambda}, \text{ met glijding,}$$

$$W \frac{a^2 b}{a + \eta}, \text{ zonder glijding.}$$

Wordt er geene kracht door de lucht uitgeoefend, dan moeten wij in de verschillende formules $\eta = \infty$ stellen. De snelheid in een horizontaal kanaal wordt dan blijkbaar, zooals behoort, nul; die in een hellend kanaal:

$$w = -\frac{g\mu}{2f} \sin \alpha \, (x^2 - a^2 - 2a\lambda), \text{ met glijding}$$

en

$$-\frac{g\mu}{2f} \sin \alpha \, (x^2 - a^2), \text{ zonder glijding.}$$

Het volumen is:

$$\frac{2}{3} \frac{g\mu}{f} \sin \alpha \, . \, a^2 b \, (a + 3\lambda), \text{ met glijding,}$$

$$\frac{2}{3} \frac{g\mu}{f} \sin \alpha \, . \, a^3 b, \text{ zonder glijding.}$$

Dit laatste antwoord stemt overeen met het vroeger direct afgeleide.

ZEVENDE HOOFDSTUK.

§ 1. De formule (5) in het tweede hoofdstuk afgeleid, geldt voor de strooming in eene cylindrische buis met cirkelvormige doorsnede, in de veronderstelling, dat de snelheid overal evenwijdig is met de as der buis, en dat de stationnaire toestand is ingetreden. Zooals in het vierde hoofdstuk is aangetoond, geeft die formule bovendien de eenig mogelijke oplossing, die het vraagstuk toelaat.

Op de volgende wijze kan men leeren, hoe de stationnaire toestand in zulk eene buis ontstaat, wanneer wordt aangenomen, dat de snelheid aanvankelijk reeds evenwijdig is aan de as der buis en alleen van den afstand r tot de as afhangt, dus door eene gegeven functie $F(r)$ kan worden voorgesteld.

u en v zijn ook hier $= 0$, eveneens $\frac{\partial w}{\partial z}$, en als bovendien geene uitwendige krachten werken, ook $\frac{\partial p}{\partial x}$ en $\frac{\partial p}{\partial y}$.

Van de bewegingsvergelijkingen (7) uit het eerste hoofdstuk blijft dan weer alleen over de derde, die overgaat in:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{f}{\mu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

De oplossing van die vergelijking kan in tweeën gesplitst worden. Bij de eerste is

$$\mu\frac{\partial w}{\partial t} = f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \dots\dots\dots\dots (1)$$

bij de tweede, die onafhankelijk van t is,

$$f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -c \dots\dots\dots\dots (2)$$

waarin $c = - \frac{\partial p}{\partial z}$ is.

De voorwaarde aan den wand is [1]):

$$w = - \frac{f}{E} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \text{ voor } r = R. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1^a)$$

$\left(E \text{ constante der uitwendige wrijving; } \lambda = \frac{f}{E}\right)$.

Eene bijzondere oplossing van (1) is:

$$w = s e^{-\frac{mt}{\mu}}, \qquad (m \text{ willekeurig getal})$$

waarbij dan, zooals door substitutie in (1) volgt, s moet voldoen aan:

$$\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds}{dr} + \frac{ms}{f} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De waarde van s wordt dan, zooals wij weten, gegeven door de reeks:

$$s = 1 - \frac{mr^2}{f.2^2} + \frac{m^2}{f^2}\frac{r^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{f^3}\frac{r^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\ldots,$$

die men als eerste Besselsche functie gewoonlijk door $I_0\left(\sqrt{\frac{mr^2}{f}}\right)$ voorstelt.

Zal nu echter $w = s e^{-\frac{mt}{\mu}}$ ook voldoen aan de voorwaarde voor den buiswand, dan is m aan eene conditie gebonden. Men vindt uit $(1a)$:

$$\frac{E}{f}\left(1 - \frac{m}{f}\frac{R^2}{2^2} + \frac{m^2}{f^2}\frac{R^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{f^3}\frac{R^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{enz.}\right)$$

$$= 2\frac{m}{f}\frac{R}{2^2} - 4\frac{m^2}{f^2}\frac{R^3}{2^2.4^2} + 6\frac{m^3}{f^3}\frac{R^5}{2^2.4^2.6^2} - \text{enz.}, \ . \quad (3^a)$$

eene vergelijking, die een oneindig aantal waarden voor m oplevert. Bepaalt men zich nu tot deze waarden van m, en de daarmeê overeenkomstige functiën voor s, dan zal

$$w = \sum A s e^{-\frac{mt}{\mu}} \qquad (A \text{ constante}).$$

aan (1) en $(1a)$ voldoen.

De constanten A kunnen hierin bepaald worden door de

---

[1]) Zie tweede hoofdstuk.

conditie, dat voor $t = 0$ de snelheid overal de gegeven waarde $F(r)$ moet hebben. De totale snelheid bestaat echter uit het zoo even berekende deel en uit de reeds vroeger gevonden oplossing van (2), nl.

$$w = \frac{c}{4f}(R^2 - r^2) + \frac{c}{2E} R.$$

Stellen wij dus ter afkorting:

$$F(r) - \frac{c}{4f}(R^2 - r^2) - \frac{c}{2E} R = F_1(r),$$

dan moet

$$\sum As = F_1(r)$$

zijn.

De ontwikkeling der gegeven functie $F_1(r)$ in den vorm ΣAs heeft zekere overeenkomst met die van Fourier; ook hier zijn de functien s, die in de verschillende termen voorkomen, bekend, alleen zijn het thans geene goniometrische functien.

Wanneer men de mogelijkheid der reeksontwikkeling:

$$F_1(r) = A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3 + \text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

aanneemt, kunnen de coëfficienten op analoge wijze als bij de reeks van Fourier bepaald worden. Ten einde namelijk A_k te vinden, vermenigvuldige men (4) met

$$r s_k dr$$

en integreere tusschen 0 en R. Men kan dan bewijzen, dat in het tweede lid alle termen behalve die met A_k wegvallen.

Dus, zoolang als l en k verschillend zijn, is

$$I = \int_0^R r s_k s_l dr = 0.$$

Bewijs: Voor (3) kan men schrijven:

$$sr = -\frac{f}{m}\frac{d}{dr}\left(r\frac{ds}{dr}\right),$$

en wij hebben dus:

$$\left.\begin{aligned} s_k r &= -\frac{f}{m_k}\frac{d}{dr}\left(r\frac{ds_k}{dr}\right) \text{ en} \\ s_l r &= -\frac{f}{m_l}\frac{d}{dr}\left(r\frac{ds_l}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Door substitutie van de eerste waarde vindt men:

$$\frac{m_k}{f} I = -\int_0^R s_l \frac{d}{dr}\left(r\frac{ds_k}{dr}\right) dr =$$

$$= -\left(rs_l\frac{ds_k}{dr}\right)_0^R + \int_0^R r\frac{ds}{dr}\,\frac{ds_l}{dr}\,dr.$$

Door substitutie der tweede eveneens:

$$\frac{m_l}{f} I = -\left(rs_k\frac{ds_l}{dr}\right)_0^R + \int_0^R r\frac{ds_k}{dr}\,\frac{ds_l}{dr}\,dr.$$

Door aftrekking van beide waarden komt er:

$$\frac{m_k - m_l}{f} I = \left(rs_k\frac{ds_l}{dr} - rs_l\frac{ds_k}{dr}\right)_0^R.$$

Het tweede lid verdwijnt voor $r = 0$, en eveneens voor $r = R$, daar aan den buiswand

$$Es_k + f\frac{ds_k}{dr} = 0 \text{ en } Es_l + f\frac{ds_l}{dr} = 0$$

is, en dus

$$s_k : s_l = \frac{ds_k}{dr} : \frac{ds_l}{dr}.$$

Derhalve is $I = 0$, *q. e. d.*

Daarentegen verdwijnt niet de term met A_k, want

$$I' = \int_0^R rs_k^2 dr = \frac{1}{2}R^2 S_k^2\left(1 + \frac{E^2}{fm_k}\right),$$

indien S_k de waarde van s_k voor $r = R$ is.

Bewijs: Door partieele integratie vindt men:

$$I' = \int_0^R rs_k^2 dr = \frac{1}{2}\left(r^2 s_k^2\right)_0^R - \int_0^R r^2 s_k \frac{ds_k}{dr}\,dr.$$

Maar uit (5) volgt:

$$r^2 s_k \frac{ds_k}{dr} = -\frac{f}{m_k}\, r\frac{ds_k}{dr}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{ds_k}{dr}\right) = -\frac{f}{2m_k}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{ds_k}{dr}\right)^2\right],$$

en men heeft dus:

$$I' = \frac{1}{2}(r^2 s_k^2)\Big|_0^R + \frac{f}{2m_k}\left[r^2\left(\frac{ds_k}{dr}\right)^2\right]_0^R.$$

Aangezien aan den wand

$$\frac{ds_k}{dr} = -\frac{E}{f}s_k$$

is, wordt dit:

$$I' = \frac{1}{2}R^2 S_k^2\left(1 + \frac{E^2}{fm_k}\right), \quad q.\ e.\ d.$$

Wij verkrijgen dus in het tweede lid der vergelijking

$$I' \,.\, A_k$$

en in het eerste

$$\int_0^R r s_k F_1(r)\,dr,$$

en hebben derhalve:

$$A_k = \frac{2\int_0^R r s_k F_1(r)\,dr}{R^2 S_k^2\left(1 + \frac{E^2}{fm_k}\right)},$$

waardoor de coëfficient in de reeksontwikkeling bepaald wordt, en de snelheid

$$w = \sum A s e^{-\frac{mt}{\mu}} + \frac{c}{4f}(R^2 - r^2) + \frac{c}{2E}R \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (6)$$

geheel gevonden is.

De uitkomst stemt overeen met die van Résal [1]), maar wordt door hem langs eenigszins omslachtiger weg afgeleid, terwijl hij ook de oplossing van (2) in den vorm eener oneindig voortloopende reeks vindt.

De toestand nadert, zooals het geval moet zijn, tot:

$$w = \frac{c}{4f}(R^2 - r^2) + \frac{c}{2E}R.$$

§ 2. Het is nu niet moeielijk te beoordeelen, hoe lang het duurt, vóor de stationnaire toestand bereikt is. Bepalen wij

---

[1]) Traité de Mécanique générale, par H. Résal. Tome Deuxième, p. 264.

ons tot het geval, dat aan den wand geene glijding bestaat, dus aldaar $w = 0$ is, dan verandert de vergelijking (3_a) in:

$$1 - \frac{m}{f}\,\frac{R^2}{2^2} + \frac{m^2}{f^2}\,\frac{R^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{f^3}\,\frac{R^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{enz.} = 0, \quad \ldots (7)$$

en nu moeten wij voor m nemen de waarden, die aan deze vergelijking voldoen.

Aan de vergelijking (7) wordt voldaan [1]) door de volgende waarden van $\sqrt{\frac{m}{f}}R^2$:

2,404, 5,520, 8,654 enz.

Met elk van die waarden komt een deel der beweging, dat langzamerhand verdwijnt, overeen. Zoeken wij nu bijv. den tijd noodig om het gedeelte, dat met de eerste waarde 2,404 overeenkomt, tot op 0,1 te reduceeren. Dan moet

$$e^{-\frac{mt}{\mu}} = 0{,}1 \text{ zijn, en}$$

$$\sqrt{\frac{m}{f}}R^2 = 2{,}404,$$

waaruit volgt:

$$m = \frac{(2.404)^2 f}{R^2}, \text{ en}$$

$$\frac{m}{\mu} = \frac{(2.404)^2 f}{R^2.\mu}.$$

Stellen wij de temperatuur 10° C, dan is volgens Poiseuille [2])

$$\frac{f}{\mu} = 1{,}309\,\frac{\text{mM}^2}{\text{sec.}},$$

dus:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{7{,}565}{R^2}.$$

---

[1]) Zie bijv. Die Theorie des Schalles van J. W. Strutt, Baron Rayleigh. Deutsche Ausgabe von Neesen. Erster Band bl. 364, waar die waarden van Bourget, Mémoire sur le mouvement vibratoire etc. Ann. de l'école normale t. III. 1866, overgenomen zijn. Die waarden kunnen overigens uit de door Hansen berekende en o. a. in Lommel's Studien über die Bessel'schen Functionen opgenomen tabellen von $I^0(z)$ gemakkelijk worden afgeleid.

[2]) Zie form. (11), tweede hoofdstuk.

en, daar $\frac{mt}{\mu} = 2.3 \ldots$ zijn moet, dus:

$$t = 2.3 \times \frac{\mu}{m} = 0.33 \; R^2.$$

Daaruit volgt bij een straal van $\frac{1}{2}$ m.M. een tijd van ongeveer 0,08 sec. [1])

Die gedeelten der beweging, welke met de andere wortels overeenkomen, zullen, zooals uit de berekening blijkt, veel spoediger verdwijnen.

Tevens ziet men, dat de stationnaire toestand in eene buis met n maal grooteren straal na n^2 maal langeren tijd zal intreden, en overigens bij lagere temperatuur spoediger dan bij hoogere.

---

[1]) Helmholtz geeft in Wiedem. Ann. Bd. 7 eene dergelijke berekening. Daarin schuilt blijkbaar eene vergissing; ook de waarde der wrijvingsconstante is te groot genomen.

ACHTSTE HOOFDSTUK.

§ 1. In het tweede hoofdstuk is gebleken, dat de formule van Poiseuille binnen zekere grenzen zoo nauwkeurig met de experimenten overeenstemt, dat aan hare geldigheid binnen die grenzen geen twijfel mogelijk is.

Dat de formule niet de strooming kan weergeven in alle buizen, hetzij die lang of kort zijn, hetzij de snelheid groot of klein is, kan ons volstrekt niet bevreemden, als wij ons de veronderstelling herinneren, waarvan wij bij de afleiding der formule zijn uitgegaan, namelijk, dat de beweging is stationnair, en de snelheid overal evenwijdig met de as der buis, waaruit dan volgt, dat de snelheid alleen functie is van den afstand tot de as, en de druk alleen noodig om die snelheid te onderhouden, om weerstanden te overwinnen. (In den regel hebben wij in dit hoofdstuk alleen het oog op buizen met cirkelvormige doorsneden).

Het vraagstuk der strooming in buizen, zooals het zich gewoonlijk voordoet, komt hierop neer. Eene vloeistof staat tot zekere hoogte in een vat of reservoir; onder aan dat vat bevindt zich eene buis, die uitmondt in een ander vat of in de open lucht, men vraagt de gemiddelde snelheid te bepalen. Het is de vloeistofdruk in het vat, soms vermeerderd met een anderen druk of met de zwaartekracht, die de beweging doet ontstaan.

Er zal na een zekeren tijd een stationnaire toestand intreden, maar in de eerste plaats staat het vast, dat bij het begin der buis, waar de vloeistof uit het wijdere vat komt, de richting niet evenwijdig zal zijn aan de as der buis, daar zal de »contractio venae" zich vertoonen, en zullen onregelmatigheden in de beweging voorkomen, die afhankelijk zijn van de wijze, waarop de buis met het vat gemeenschap heeft, en die grooter zullen zijn, en zich verder in de buis voortplanten, naarmate deze wijder is en de snelheid grooter. Verder in de buis zal bij voldoende lengte de regelmatige, rechtlijnige beweging ontstaan, en zou in eene oneindig lange buis blijven bestaan, maar zal vóór de eindopening weer verdwijnen.

In de tweede plaats is het duidelijk, dat de werkende druk niet alleen dient om weerstanden te overwinnen, maar gedeeltelijk om de snelheid te doen ontstaan, en dat dit gedeelte van den druk des te grooter zal zijn, naarmate de snelheid grooter is.

De wet van Poiseuille zal dus alleen (misschien met de wijziging voor glijding) in zulke gevallen met goed gevolg kunnen worden toegepast, waarin het gedeelte van den druk, dat noodig is om aan de vloeistof de snelheid mede te deelen, (*snelheidsdruk*) zeer gering is in vergelijking van het andere deel, dat de snelheid onderhoudt, (*weerstandsdruk*), en waarbij het deel der buis, waar de beweging niet regelmatig, evenwijdig met de as der buis is, klein is tegenover de geheele lengte.

Men kan zelfs betrekkelijk lange buizen hebben, waarbij van de toepassing der wet van P. geen sprake zijn kan, omdat zij naar evenredigheid der lengte te wijd zijn. Dat blijkt ons bijv. uit de volgende getallen aan Darcy [1]) ontleend.

De buis, waarmeê de proeven zijn genomen, was van gegoten ijzer, had eene lengte van 111,36 M. en een straal van 12 cM. De eerste kolom geeft het drukverschil aan in twee op den afstand van 100 M. van elkaar verwijderde punten der buis, de tweede de gemiddelde snelheid.

2,290 M. waterhoogte.	1,547 M.
3,200 „ „	1,833 „
4,105 „ „	2,073 „
13,981 „ „	3,833 „

[1]) Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris. 1857.

De drukhoogten verhouden zich hier niet als de snelheden, (volgens de wet van P.) maar ongeveer als de vierkanten der snelheden, en er kan dus van de geldigheid der wet van P. voor een eenigszins aanmerkelijk stuk der buis geen kwestie zijn.

§ 2. Het zal wel moeielijk, zoo niet onmogelijk zijn, de strooming in buizen algemeen langs mathematischen weg te behandelen. Het beginsel der mechanische gelijkvormigheid stelt ons echter in staat om uit de kennis der experimenteele uitkomsten van eenige gevallen die van vele andere te voorspellen, al is ook de inrichting zoo gecompliceerd, dat aan eene volledige berekening der verschijnselen niet te denken valt.

Verbeelden wij ons eene proef genomen over de strooming eener vloeistof uit een vat A naar een ander vat B, door eene buis van willekeurigen vorm. Dan zijn u, v, w, p daarbij zekere bepaalde functiën van x, y, z en t, die aan de bewegingsvergelijkingen :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - \frac{f}{\mu}\Delta u,$$

enz. voldoen. (Geval I).

Wij verbeelden ons nu diezelfde vloeistof in een toestel gelijkvormig met I. Alle afmetingen zijn α maal grooter. (Geval II) Noemen wij nu in beide gevallen overeenkomstige tijdstippen die, waarop de tijden, sedert een vast oogenblik verloopen, zich verhouden als 1 tot β, en nemen wij aan, dat twee vloeistofdeeltjes, die eens op overeenkomstige tijdstippen in gelijkstandige punten gelegen zijn, zich steeds op overeenkomstige tijdstippen in gelijkstandige punten bevinden. Daartoe is natuurlijk noodig, dat de snelheden zich verhouden als 1 en $\frac{\alpha}{\beta}$.

Wij zien hieruit, hoe, als de getallen α en β gegeven zijn, de toestand van II door dien van I bepaald is. Nemen wij verder aan, dat de druk in geval II γ maal grooter is dan de druk in het gelijkstandige punt in geval I, en zoeken wij de voorwaarden, die tusschen α, β en γ moeten bestaan, opdat aan de bewegingsvergelijkingen voldaan zij. Substitueeren wij in de bewegingsvergelijkingen :

$$\begin{array}{ll} \alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z, & \text{voor } x,\ y,\ z, \\ \beta t & \quad ,, \quad t \\ \frac{\alpha}{\beta}u,\ \frac{\alpha}{\beta}v,\ \frac{\alpha}{\beta}w, & \quad ,, \quad u,\ v,\ w, \\ \gamma p, & \quad ,, \quad p, \end{array}$$

dan zal aan die vergelijkingen voldaan zijn, als :

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha\beta},\ \text{dus } \beta = \alpha^2,\ \gamma = \frac{1}{\alpha^2} \text{ is}$$

(immers de termen der verg. worden resp. $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta^2}$ en $\frac{1}{\alpha\beta}$ maal grooter).

Wanneer wij dus in toestel II een α^2 maal kleineren druk laten werken, zal daarin eene gelijkvormige beweging optreden. De overeenkomstige tijden (bijv. de tijden, waarna de stationnaire toestand bereikt wordt) verhouden zich als 1 tot α^2, de snelheden als 1 en $\frac{1}{\alpha}$, de volumina vloeistof, die in overeenkomstige tijden door gelijkstandige doorsneden stroomen, als 1 en α^3, de volumina, die in gelijke tijdselementen (op overeenkomstige tijdstippen genomen), dus ook, als de stationnaire toestand bereikt is, in gelijke tijden doorstroomen als 1 en α.

Heeft men bijv. geexperimenteerd met eene nauwe en tamelijk korte buis, en daardoor water laten stroomen onder een standvastig drukverschil, en experimenteert men vervolgens met eene buis, waarvan alle afmetingen 10 maal grooter zijn, en die op gelijkvormige wijze tusschen de twee vaten is aangebracht, dan zal, wanneer men drukkingen bezigt, die 100 maal kleiner zijn, de stationnaire toestand na een 100 maal langeren tijd optreden. Als in de beide buizen de stationnaire toestand bereikt is, en in de kleine geldt de wet van Poiseuille, dan moet zij ook in de wijde buis gelden. Wijkt daarentegen in de eerste proef de beweging af van die wet, dan zal de afwijking bij de tweede proef relatief even groot zijn.

Zoo werd bijv. door P. geconstateerd, dat zijne formule nog geldt voor water stroomende door eene buis van 0,1316 m.M. middellijn en 364 m.M. lengte bij 6136,534 m.M. kwikdruk. Wij mogen dus verwachten, dat zij bij dezelfde temperatuur ook zal gelden voor eene buis van 1,316 m.M. middellijn, 3640 m.M. lengte en 61,365 m.M. kwikhoogte en voor eene buis van 2,632 m.M. wijdte, 7280 m.M. lengte en 15,34 m.M. kwikdruk.

§ 3. Men kan op dergelijke wijze ook proeven vergelijken met denzelfden toestel en verschillende vloeistoffen (of dezelfde vloeistof bij verschillende temperatuur).

Veronderstellen wij weer eene proef genomen met eene bepaalde vloeistof en dus weer u, v, w, p functieën van x, y, z en t, die aan de bewegingsvergelijkingen voldoen. (Geval I.) Veronderstellen wij nu eene vloeistof met m maal grootere dichtheid en n maal grooteren wrijvingscoëfficient in denzelfden toestel. (Geval II). Noemen wij weer overeenkomstige tijdstippen die, waarop de tijden van af een vast oogenblik verloopen, zich verhouden als 1 en β, dan moeten, als twee vloeistofdeeltjes, die op overeenkomstige tijdstippen in dezelfde punten zich bevonden, dat steeds zullen doen, de snelheden zich verhouden als 1 tot $\frac{1}{\beta}$. Substitueeren wij nu in de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{array}{lll} \beta t & \text{voor} & t, \\ \frac{1}{\beta}u,\ \frac{1}{\beta}v,\ \frac{1}{\beta}w & \text{„} & u,\ v,\ w, \\ \gamma p & \text{„} & p, \\ m\mu & \text{„} & \mu, \\ nf & \text{„} & f, \end{array}$$

dan zien wij, dat aan die vergelijkingen voldaan zal zijn, als

$$\frac{\gamma}{m} = \frac{1}{\beta^2} = \frac{n}{m\beta}$$

is, waaruit volgt:

$$\beta = \frac{m}{n} \text{ en } \gamma = \frac{n^2}{m}.$$

De drukkingen p moeten zich dus verhouden als 1 en $\frac{n^2}{m}$; de in gelijke tijden bij stationnairen toestand doorstroomende hoeveelheden Q verhouden zich als 1 en $\frac{n}{m}$; de tijden, na welke de stationnaire toestand bereikt wordt, als 1 en $\frac{m}{n}$.

Uit het voorgaande volgt, dat $Q\frac{\mu}{f}$ en $p\frac{\mu}{f^2}$ in beide gevallen dezelfde waarde hebben. Derhalve zal tusschen deze beide grootheden bij *alle* vloeistoffen dezelfde betrekking bestaan, of

$$Q\frac{\mu}{f} = F\left(p\frac{\mu}{f^2}\right)$$

zijn.

Stel bijv. dat men eene empirische formule van de gedaante

$$p = aQ + bQ^2$$

heeft opgesteld en wel voor de eene vloeistof:

$$p = a_1 Q + b_1 Q^2, \dots\dots\dots\dots (1)$$

voor de tweede:

$$p = a_2 Q + b_2 Q^2 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Voor (1) en (2) kan men schrijven:

$$p\frac{\mu_1}{f_1^2} = \frac{a_1}{f_1}\,Q\frac{\mu_1}{f_1} + \frac{b_1}{\mu_1}\left(Q\frac{\mu_1}{f_1}\right)^2,$$

$$p\frac{\mu_2}{f_2^2} = \frac{a_2}{f_2}\,Q\frac{\mu_2}{f_2} + \frac{b_2}{\mu_2}\left(Q_2\frac{\mu_2}{f_2}\right)^2.$$

Men moet dus hebben:

$$\frac{a_1}{f_1} = \frac{a_2}{f_2} \text{ en } \frac{b_1}{\mu_1} = \frac{b_2}{\mu_2},$$

of de coëfficient a moet evenredig zijn met de wrijvingsconstante, de coëfficient b met de dichtheid.

Uit deze beschouwingen blijkt ook duidelijk, dat de grenzen, waarbinnen de wet van Poiseuille voor zekere buis geldt, niet dezelfde zijn voor verschillende vloeistoffen en voor éène zelfde vloeistof nog afhankelijk zijn van de temperatuur. Overigens is er van die grenzen zelf weinig bekend, evenmin van de strooming in buizen buiten die grenzen.

§ 4. In de praktijk bijv. bij berekeningen voor waterleidingen, behelpt men zich meestal met de formule [1]):

$$p = l\,(av + bv^2),$$

---

[1]) Zie bijv. Résal, Traité de mécan. géner. T. II. p. 306 of Cours de mécan. appliquée par Bresse. II Hydraulique.

waarin p de werkende druk, l de lengte, v de gemiddelde snelheid voorstelt, a en b twee constanten, door proefneming bepaald, die afhankelijk zijn van vloeistof, buiswand en buiswijdte.

Het is mogelijk, dat de formule als interpolatieformule zonder al te groote fouten in de praktijk kan gebezigd worden, maar een getrouw beeld van den toestand kan zij zeker niet geven. De constante b zou wel zulke functie van den straal kunnen wezen, dat bij lange en enge buizen de tweede term tegen den eersten verdwijnt, en dus de formule over kan gaan in die van Poiseuille, maar de formule maakt geen onderscheid tusschen de beweging in de verschillende doorsneden der buis, welke toch zeker als de formule van P. niet geldt, in eene doorsnede bij het begin veel verschillen kan van die in eene meer in het midden gelegen. De redeneeringen, waardoor men die formule in de handboeken over hydraulica tracht af te leiden, zijn dan ook weinig steekhoudend. Slaan wij bijv. op, wat een wiskundige als Résal hierover ten beste geeft, in zijn reeds aangehaald: Traité de mécanique générale. [1])

»On admet en Hydraulique que toutes les molécules, qui, à un instant quelconque se trouvent comprises entre deux sections infiniment voisines du tuyau, ne cessent pas de se trouver entre deux sections de cette nature dans la suite du mouvement. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse des tranches, qui n'est rationnelle que dans le cas de tuyaux de très petite section."

Zoo als ons vroeger bleek, is deze hypothesé volstrekt niet »*rationnelle*" bij enge buizen.

Verder [2]) zegt hij: »En maintenant l'hypothèse des tranches, il est visible qu'on sera obligé de faire intervenir une résistance totale pour rendre compte des faits observés relativement au mouvement des liquides sur de grandes longueurs. Cette résistance pour une tranche d'épaisseur ds sera évidemment proportionnelle à ds; il parait naturel de la supposer proportionnelle au péri-

---

[1]) p. 281.

[2]) l. c. p. 304.

mètre intérieur du tuyau et à une certaine fonction de la vitesse moyenne; enfin on admet qu'elle est proportionnelle au poids spécifique du fluide et indépendante de la forme de la section."

Ook op dit laatste is blijkbaar nog al iets aan te merken.

§ 5. Wij willen nog eene formule bespreken, die niet algemeen bruikbaar is voor alle gevallen, maar alleen als een correctie der formule van Poiseuille kan worden aangezien.

Veronderstellen wij eene buis, waarin de wet van Poiseuille voor zekere vloeistof en zeker maximum van druk geldt. Ook dan is bij het begin en het einde der buis een stuk, waar de beweging niet volgens die formule geschiedt, en een gedeelte van den druk is noodig, om de snelheid mede te deelen aan de vloeistof, maar de afwijkingen van de wet zijn zoo klein, dat zij niet in aanmerking komen. Wordt nu de druk achtereenvolgens herhaaldelijk vermeerderd, of de buis korter gemaakt, of beide tegelijk gedaan, dan worden de afwijkingen van de wet relatief grooter, zij kunnen niet meer verwaarloosd worden, en eindelijk zal er een toestand geboren worden, waarin van Poiseuille's wet geen sprake meer kan zijn. Voordat deze laatste toestand intreedt, zal men toestanden kunnen hebben, waarin wel voor de geheele buis de wet van Poiseuille niet meer past, maar waarin de stukken bij het begin en het einde, die de oorzaak der afwijkingen zijn, nog niet zeer groot zijn, en waarin de snelheidsdruk nog niet het grootste deel van den geheelen druk vormt. Kenden wij de plaatsen in de buis, waar de regelmatige beweging begint en ophoudt, en den daar aanwezigen druk, dan zou men op het stuk tusschen die punten de formule van Poiseuille kunnen toepassen. Is het verschil in druk tusschen de twee punten p, de lengte van het bedoelde stuk der buis l, haar straal R, en de gemiddelde snelheid v, dan is [1])

$$v = \frac{pR^2}{8fl}.$$

Proeven te nemen om te onderzoeken, of die beschouwingen

[1]) Zie tweede hoofdstuk, formule (9).

met de werkelijkheid overeenkomen, is niet gemakkelijk; v kan men bepalen uit het volumen, maar om p en l te bepalen moet men drukmeters aanbrengen, die den aard der strooming natuurlijk veranderen. Er bestaan echter experimenten van Jacobson [1]), die ons hier van eenigen dienst kunnen zijn.

Jacobson bracht aan eene zeer kleine opening in den wand der buis op 9,2 m.M. van het begin eene rechthoekig naar boven omgebogen buis aan, die als manometer dienst deed. Daar de opening zeer klein is, laat zich verwachten, dat de strooming niet te veel veranderd zal worden. De hoogte van de vloeistof in den manometer, verminderd met de capillaire stijghoogte, geeft dan bij stationnairen toestand het verschil in druk tusschen het punt der buis, waar de manometer is aangebracht en het uiteinde, omdat het water onder dampkringsdruk uitstroomde.

Van zijne proeven zullen wij er drie aanhalen.

I. Drukhoogte in den manometer $h = 391{,}1$ m.M., de gemiddelde snelheid $v = 631{,}74$ m.M., de straal $R = 0{,}8769$ m.M., de lengte der buis van het punt, waar de druk gemeten wordt, tot het einde $l = 509$ m.M., temper. $15^0, 1$ C^0.

Daaruit vinden wij:

$\frac{f}{\mu} = 0{,}00011691$, (eenheden zijn m.G., m.M. en sec.)

en volgens Poiseuille 0,00011668 bij 15^0 C.

II. $h = 107{,}1$ m.M. $R = 1{,}1470$ m.M. $v = 396{,}79$ m.M. $l = 427{,}8$ m.M., temp. 20,2 C.

Daaruit volgt: $\frac{f}{\mu} = 0{,}00010378$

en volgens Poiseuille 0,00010296 bij 20^0.

III. $h = 81{,}8$ m.M. (hier gemeten op $1^1/_2$ m.M. van het begin), $R = 2{,}545$ m.M., $l = 1730$ m.M., temp. 0,8^0 C.

Wij vinden: $\frac{f}{\mu} = 0001816$,

volgens Poiseuille 0,00018142 bij 0^0.

Deze overeenstemming is, dunkt ons, zoo goed, als men ver-

[1]) Müller's Archiv 1860 en 1861.

langen kan, als men in aanmerking neemt, dat de druk vrij dicht bij het begin werd gemeten, en het stuk bij het einde der buis, waar ook zeker afwijkingen bestonden, niet in aanmerking genomen is.

§ 6. Het voorgaande kan op zich zelf natuurlijk niet van praktisch nut, maar wel van dienst zijn om eene formule op te stellen, die, als de afwijkingen van Poiseuille's wet niet al te groot zijn, goede resultaten kan opleveren.

Stellen wij, dat door eene buis met een reservoir verbonden water stroomt, zij de druk in het reservoir p_0; stellen wij verder, dat de beweging volgens Poiseuille's wet in de buis aanvangt in het punt A op een afstand x van het begin, dat de druk in $A = p_1$ is, dat de beweging volgens die wet ophoudt in het punt B, waar de druk p_2 is, en dat de lengte $AB = l$, het stuk van B tot het uiteinde y is, en aan dit uiteinde de druk p_3 heerscht, dan is tusschen A en B

$$p_1 - p_2 = \frac{8fl}{R^2}v. \qquad (v \text{ gemiddelde snelheid.})$$

Van de strooming vóór A weten we weinig, we kunnen in het algemeen stellen:

$$p_0 - p_1 = F_1\,(v,\, x,\, R).$$

Evenzoo voor de strooming bij het uiteinde:

$$p_2 - p_3 = F_2(v,\, y,\, R).$$

Door samenstelling van die drie vergelijkingen verkrijgen wij dan, als P het drukverschil tusschen het begin en het einde voorstelt:

$$P = \frac{8fl}{R^2}v + F_1(v,\, x, R) + F_2(v, y, R).$$

Behalve de functiën F en F_1 zijn daarin x, y en dus eigenlijk ook l volslagen onbekend. Met betrekking tot de functien F en F_1 zou men nu met meer of minder geluk veronderstellingen kunnen maken, ook omtrent x en y, en dan misschien kunnen komen tot eene formule, die voor alle gevallen bruikbaar is.

Zoolang de afwijkingen van de wet van Poiseuille niet zeer groot zijn, zal men x en y tegenover l kunnen verwaarloozen en dus voor l de geheele lengte der buis nemen. Bedenkt men verder, dat bij het begin der buis de strooming wel eenige overeenkomst hebben zal met de strooming uit eene opening in den wand, dan is het niet onwaarschijnlijk, dat tot zekere hoogte de volgende formule:

$$h = \frac{8fl}{\mu R^2 g} v + \frac{1}{2\varkappa^2 g} v^2$$

zal voldoen, waarin f, l, μ, R hunne vroegere beteekenis hebben, h de vloeistofhoogte in het reservoir, $\varkappa$ een factor voor de contractie van den vloeistofstraal, g de versnelling der zwaartekracht voorstelt. Als wij in plaats van v, het volumen $Q = \pi R^2 v$ invoeren, dan wordt zij:

$$h = \frac{1}{R^4}\left(\frac{8fl}{\pi\mu g} Q + \frac{1}{2\varkappa^2\pi^2 g} Q^2\right) \ldots\ldots\ldots (3)$$

Deze formule is ook in overeenstemming met de voorwaarde, waaraan zij volgens § 3 van dit hoofdstuk moet voldoen.

Voor eene zeer lange buis nadert zij tot die van Poiseuille, voor eene korte tot die van Toricelli. Bovendien blijkt er onmiddellijk uit, dat bij eene bepaalde lengte der buis de wet van Poiseuille des te nauwkeuriger zal gelden, naarmate Q kleiner, dus naarmate h of R kleiner wordt.

Nemen wij voor $\frac{f}{\mu}$ de waarde van Poiseuille, als eenheid van lengte den c.M., zoodat h ongeveer het aantal grammen druk op den c.M^2 voorstelt, nemen wij verder 0,62 voor $\varkappa$, die verschillende waarden hebben kan, afhankelijk van de wijze, waarop de buis met het vat communiceert, dan gaat de vorige formule over in:

$$h = \frac{1}{R^4}\left(\frac{0{,}00004620}{1 + 0{,}03368T + 0{,}0002210\ T^2} l.Q + \frac{1}{2\varkappa^2\pi^2 g} Q^2\right)$$

of bij T = 10° C:

$$h = \frac{1}{R^4}(0{,}000033938 l\ Q + 0{,}00013434\ Q^2) \ldots\ldots (4)$$

Wij hebben deze formule voor 10° C berekend om ze te kunnen vergelijken met eene dergelijke formule door Hagen [1]) als

[1]) Pogg. Ann. Bd 46.

resultaat zijner proefnemingen opgesteld. Deze laatste luidt voor 8^0 R. = 10^0 C.:

$$h = \frac{1}{R^4}(0{,}000012354\, l.Q + 0{,}00037752\, Q^2),$$

maar hierin zijn de eenheden parijsche duimen, en daar 1 par. duim = 2,707 c.M. is, zoo wordt zij voor den c.M. als eenheid:

$$h = \frac{1}{R^4}(0{,}000033435\, l.Q + 0{,}00013946\, Q^2)$$

en stemt dus met de door ons op zoo geheel verschillende wijze afgeleide voor een groot gedeelte overeen.

Ik heb de formule verder getoetst aan enkele andere experimenten, en verkreeg vrij goede overeenstemming, als de afwijkingen van de wet van Poiseuille niet al te groot waren.

Nemen wij bijv. een paar proeven van Dubuat. [1]) Hij vond:

I. $l = 98{,}129$, $R = 0{,}3271$, $h = 5.639$ cM, $Q = 13{,}01$ cM^3,

II. $l = 98{,}129$, $R = 0{,}3271$, $h = 7.344$ cM, $Q = 15{,}13$ cM^3.

Berekenen wij door form. (4) uit de overige grootheden h, dan vinden wij bij I $h = 5{,}77$ c.M. en bij II $h = 7{,}1$ c.M., welke waarden met de waargenomen hoogten vrij wel overeenstemmen. Die overeenstemming zou waarschijnlijk door eene andere waarde voor $\varkappa$ te nemen nog grooter gemaakt kunnen worden; ook was de temperatuur bij die proeven iets hooger dan 10^0 C.

Hagenbach [2]) komt tot de formule (3) door afzonderlijk de drukhoogte te berekenen, die noodig is, om de levende kracht aan de vloeistof mede te deelen. Hij vindt dan voor $\varkappa$ eene constante waarde $= \sqrt[3]{1/2} = 0{,}7937$, die zeker vrij goed overeenstemt met den door Weisbach (0,815) en anderen opgegeven factor voor de contractie bij cylindrische mondstukken, maar de geheele formule van Hagenbach komt minder juist met verschillende proeven overeen dan de onze; ook kan $\varkappa$ natuurlijk niet constant zijn, maar hangt van de wijze af, waarop buis en reservoir met elkaar verbonden zijn.

---

[1]) Principes d'hydraulique T. I p. 74.

[2]) Pogg. Ann. 109.

Hagenbach schrijft verder de afwijkingen, die bij toepassing zijner formule blijven bestaan, aan een »Erschütterungswiderstand" toe, die over de geheele lengte der buis aanwezig zou zijn. Zou echter die weerstand wel goed te rijmen zijn met de wet van Poiseuille, en zou de grond der afwijkingen niet veeleer bij het begin en het einde der buis gezocht moeten worden?

§ 7. Eene andere formule, die ook als bijzondere gevallen de wetten van Poiseuille en Toricelli in zich bevat, is:

$$t = V \left\{ \frac{1}{\pi \varkappa R^2 \sqrt{2gh}} + \frac{8\eta l}{\pi R^4 \varrho g h} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Daarin is t de uitstroomingstijd voor het volumen V, door eene cylindrische buis, waarvan de straal R, de lengte l is, h de drukhoogte, $\varkappa$ een coefficient voor de contractie, g de versnelling der zwaartekracht, ϱ de dichtheid, η de wrijvingscoëfficient. Die formule is door O. E. Meyer [1]) opgesteld, zonder dat hij echter eenigen theoretischen grond daarvoor bijbrengt, en hij toont aan, dat zij kan toegepast worden op de proeven van Baumgartner. [2]) Ook onze formule kan dat. Nemen wij bijv. het experiment van Baumgartner bl. 48 bij de temperatuur van 10° C.: $h = 40$ c.M. $R = 0{,}1035$ c.M. $Q = \frac{108}{60} = 1{,}8$ gr. (waarvoor bij benadering c.M.^{3} kan genomen worden) $l = 65$ c.M.

Berekenen wij door de form. (2) h uit de andere gegevens, dan vinden wij 38,5, hetgeen zeker voldoende overeenstemt, als men in aanmerking neemt, dat de wrijvingscoefficient in form. (2) uit proeven van P. met gedistilleerd en gefiltreerd water verkregen is, terwijl Baumgartner met gewoon water experimenteerde.

Is het mogelijk, dat formule (5) de strooming in buizen kan weergeven, als nog voor *bijna* de geheele buis de wet van Poiseuille geldt, wij kunnen O. E. Meyer niet toegeven, wat hij zegt, Pogg. Ann. Bd. 153, bl. 619: »Ferner habe ich in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung (Jubelband 1874) Beob-

[1]) Pogg. Ann. Jubelband en Bd 153.

[2]) Pogg. Ann. 153.

achtungen mitgetheilt, aus denen es mir gelang, das Gesetz der Ausflussgeschwindigkeit ganz allgemein für weite und enge, für lange und kurze Röhren herzuleiten."

De bedoelde wet is vervat in de formule:

$$t = \alpha + \beta l + \gamma l^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

De termen $\alpha + \beta l$ moeten overeenkomen met de twee termen in formule (5). Als de afwijkingen van Poiseuille's wet niet al te groot zijn, zal men misschien tot zekere hoogte met die twee termen kunnen volstaan. Bij grootere afwijkingen niet meer, dan is een derde term (of termen) noodig, en de moeielijkheid is juist in dien term gelegen. Die term moet bij het langer en enger worden der buizen langzamerhand minder invloed hebben, en eindelijk verwaarloosd kunnen worden; nu zegt Meyer wel, dat dit mogelijk zal zijn, als γ evenredig is met eene macht van R, maar hij geeft die macht niet op en kon die uit zijne experimenten, omdat daarbij de straal constant was, ook niet vinden.

In den term βl, die de strooming volgens de wet van Poiseuille moet weergeven, kan l eigenlijk niet de geheele lengte zijn, maar de lengte verminderd met de stukken der buis, waar de wet van P. niet geldt. De fout, die ontstaat door voor l de geheele lengte te nemen, wordt met de afwijkingen van Poiseuille's wet natuurlijk grooter.

Verder meent Meyer, dat γ omgekeerd evenredig is met het vierkant van den druk. Hij kan echter moeielijk zelf meenen dit aangetoond, of zelfs maar waarschijnlijk gemaakt te hebben. Immers uit de berekeningen vindt hij (bl. 8)

voor	$p = 5$	atmosfeeren	$\gamma = 0{,}02$,
	$p = 4$	„	$\gamma = 0{,}05$,
	$p = 2$	„	$\gamma = 0{,}11$,
	$p = 2$	„	$\gamma = 0{,}26$,
	$p = 1$	„	$\gamma = 0{,}73$,

en neemt men de produkten γp^2, die volgens Meyer constant zijn moesten, dan verkrijgt men achtereenvolgens: 0,50, 0,80, 0,99, 1,04, 0,73.

Meyer heeft ons dus omtrent dien derden term weinig geleerd, waarop wij kunnen bouwen. Het is ons dan ook niet mogen gelukken met zijne formule bij andere experimenten goede resultaten te verkrijgen, dan in zoover wij met de beide eerste termen konden volstaan.

§ 8. Ter vergelijking met de formule van Meyer brengen wij de formule (3) in eene andere gedaante. Stellen wij ter bekorting:

$$\frac{8f}{\pi\mu g}\cdot\frac{1}{R^4} = m \text{ en } \frac{1}{2\varkappa^2\pi^2 g}\cdot\frac{1}{R^4} = n^2,$$

dan luidt die formule:

$$h = mlQ + n^2Q^2.$$

Als wij nu het in t sec. uitstroomende volumen V noemen, dan is $Q = \frac{V}{t}$, en de formule wordt:

$$h = ml\frac{V}{t} + n^2\frac{V^2}{t^2}.$$

Lossen wij daaruit $\frac{t}{V}$ op, zoo is:

$$\frac{t}{V} = \frac{ml + \sqrt{m^2l^2 + 4n^2h}}{2h}.$$

Als nu in plaats van $\sqrt{m^2l^2 + 4\,n^2h}$ genomen wordt, $ml + 2n\sqrt{h}$, dan gaat zij over in:

$$\frac{t}{V} = \frac{ml}{h} + \frac{n}{\sqrt{h}},$$

en dit is de formule (5) van Meyer. Nu is echter

$$\sqrt{m^2l^2 + 4n^2h} < ml + 2n\sqrt{h},$$

en de grootte van het verschil hangt natuurlijk van de betrekkelijke waarde van ml en $2n\sqrt{h}$ af. Dit geeft ons eenig licht omtrent den derden term van Meyer. Wij zien nu ten minste, dat die term negatief zijn moet, zooals Meyer ook werkelijk bij zijne experimenten vond; maar tevens worden wij versterkt in de meening, dat de formule (6) niet voor alle gevallen gelden kan.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De oplossing, die in het leerboek van Sturm (Cours d'analyse, Quarante-Sixième Leçon, Tome second, p. 119) gegeven wordt van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^n y}{dx^n} - y = 0$$

is foutief.

II.

Ten onrechte beweert Dr. Goossens (Over de schijnbare adhaesie van vaste lichamen. Leiden, 1878, p. 44), dat er bij beweging van vloeistoffen langs een vasten wand geene glijding bestaat.

III.

De redeneering, waardoor Hagenbach (Pogg. Ann. Bd. 109, p. 394) het niet bestaan van glijding tracht te bewijzen, is onhoudbaar.

IV.

De beste methode om den wrijvingscoëfficient van vloeistoffen te bepalen, is die door strooming in buizen.

V.

Te algemeen is de stelling: »Jede Theorie, welche von der Hypothese molecularer Abstossung ausgeht, ist von vorn herein zu verwerfen".

(O. E. Meyer, *Kinetische Theorie der Gase*, p. 162).

VI.

Der eigentliche Werth einer Theorie besteht nicht etwa in der ihr zu Grunde liegenden Hypothese, sondern darin, dass sie erkannte Thatsachen einheitlich zu verknüpfen und neue Beziehungen zu erkennen gestattet.

(A. Naumann, *Grundriss der Thermochemie*, p. 3.)

VII.

De proeven van Edlund (Wiedem. Ann. Bd. 1, p. 161) over de electrische stroomen, die ontstaan bij strooming van vloeistoffen door buizen, zijn niet in strijd met de verklaring door Quincke (Pogg. Ann. Bd. 113, p. 582) van het ontstaan dier stroomen gegeven.

VIII.

Onwaar is de bewering van Planck (Wiedem. Ann. Bd. 15, p. 474): »Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie consequent durchgeführt, ist unerträglich mit der Annahme endlicher Atome.”

IX.

Het experiment, beschreven door Tolver Preston (Nature, vol. 17, p. 202) is niet in strijd met de tweede hoofdstelling der mechanische warmtetheorie.

X.

De waarden voor de verhouding van de dwarscontractie en de lengtedilatatie bij veerkrachtige lichamen, welke Wüllner (Lehrbuch der Experimentalphysik, Erster Band, dritte Auflage, p. 187) uit de proeven van Regnault afleidt, verdienen weinig vertrouwen.

XI.

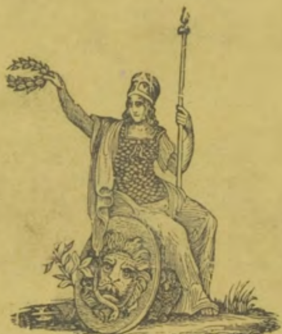
Hetzelfde geldt van de uitkomsten, door Cornu (Comptes rendus, T. 69, p. 333) verkregen.

XII.

Ongegrond zijn de bezwaren tegen de kinetische gastheorie, die Hirn (Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique T. 43. — 1881) uit zijne proeven over den invloed van de temperatuur op den weerstand der lucht afleidt.

XIII.

De theoretische beschouwingen van Warburg en von Babo, in hunne verhandeling: »Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen, insbesondere gasförmig flüssigen Körpern" (Wied. Ann. Bd. 17, p. 390), geven volstrekt geene verklaring van de resultaten hunner proeven.



Snelpersdruk van H. C. A. THIEME, te Nijmegen.