HET BEGINSEL DER KLEINSTE WERKING

IN VERBAND MET DE

BEWEGINGSVERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE & HAMILTON.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

VAN

A. KEMPE.

GEDRUKT BIJ J. J. GROEN, TE LEIDEN.

HET BEGINSEL DER KLEINSTE WERKING
IN VERBAND MET DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN
VAN LAGRANGE EN HAMILTON.

HET BEGINSEL DER KLEINSTE WERKING

IN VERBAND MET DE

BEWEGINGSVERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE EN HAMILTON.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Mr. A. E. I. MODDERMAN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN,

op Zaterdag den 12den October 1878, des namiddags te 2 uren,

DOOR

ADRIAAN KEMPE,

GEBOREN TE AMSTERDAM.

GEDRUKT BIJ J. J. GROEN, TE LEIDEN.

„Les progrès des Sciences & la verité, ne peuvent que gagner tôt ou tard aux disputes qui s'élévent entre les Savans: et ceux ci n'y perdroient jamais rien, s'ils apportoient à ces controverses la modération et la politesse, qu'on a droit d'attendre de ceux qui ne cherchent que la verité."

Beguèlin. Mem. de l'Acad. de Berlin An. 1751.

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJNEN VADER

EN

AAN MIJNE MOEDER.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Geschiedkundige Bizonderheden.

In de „Histoire de l'Acad. Royale des sciences de Paris Année 1744" komt onder de bijgevoegde: „Memoires de Mathematique et de Physique" een stuk voor getiteld: „Accord de differentes loix de la Nature qui avoient jusqu'ici paru imcompatibles par M. P. L. Moreau de Maupertuis."

Het stuk is een zonderling mengsel van Metaphysika en Wiskunst, waarin de schrijver te kennen geeft dat het hem nu eindelijk gelukt is den sleutel te vinden tot het geheim dat anderen zoo lang een raadsel was gebleven. Maupertuis van het standpunt uitgaande dat de mensch de grondslagen der Phylosophie — hij meent hiermede de bespiegelende — moest trachten te bevestigen door de Wiskunde, en dat in dat pogen aan de hoogste roeping zijner intellectueele vermogens voldaan werd, behandelt in genoemd geschrift de wetten der terugkaatsing en breking van het licht. Wanneer hij hierbij de gevoelens van Descartes, Leibnitz en Fermat aanhaalt, dan geschiedt dit alleen om aan te toonen dat genoemde „grands hommes" in hunne meeningen gedwaald hadden en met miskenning der werkelijke: „causes finales" tot onjuiste verklaringen en dus natuurlijk met elkaâr in strijd gekomen waren. De schrijver echter: „méditant profondement sur cette matière," heeft eindelijk gevonden wat het licht in zijne beweging de wetten van Snellius doet volgen: „Le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre." Nu volgt een verklaring wat dat is.

„Lorsqu'un corps, zoo gaat de schrijver voort, est porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action; cette action dépand de la vitesse qu'a le corps et de l'espace qu'il parcourt; mais elle n'est ni la vitesse ni l'espace pris séparément. La quantité d'action est d'autant plus grande qui la vitesse du corps est plus grande et qui le chemin qu'il parcourt est plus long, elle est proportionnelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec la quelle le corps le parcourt. C'est cela, c'est cette quantité d'action qui est ici la vraie depense de la Nature, et ce quelle ménage le plus qu'il est possible dans le mouvement de la lumière."

Maupertuis schijnt met zijne ontdekking — en wie zal zulks hem euvel duiden — zeer ingenomen geweest te zijn, althans toen hij kort daarop door Frederik II naar Berlijn geroepen werd om daar het praesidium der hernieuwde Akademie van wetenschappen te aanvaarden, verscheen er in de verhandelingen dier Akademie (Mem. de l'Acad. Roy. des sciènces et belles lettres de Berlin Année 1746) een stuk van zijn hand getiteld: „Les loix du Mouvement et du Repos deduites d'un principe Métaphysique". Hoewel hij nog tijdens zijn verblijf te Parijs (1740) in de Akademie van Wetenschappen aldaar met een dergelijk stuk: „Loi du repos des corps" voor den dag gekomen was maar toen een geheel andere wet als basis zijner redeneering aannam, is hij nu van meening dat de wet van de „kleinste hoeveelheid werking" ook hier van toepassing is en verwijzende naar zijne verklaringen hieromtrent vroeger gegeven, zal hij nu uit deze merkwaardige ontdekking waarheden en gevolgen afleiden van een meer verheven karakter. Men begrijpt al spoedig waar de metaphysische Mathematikus heen wil. Het bewijs van 't bestaan van God is het doel waaraan het beginsel van de kleinste hoeveelheid werking wordt dienstbaar gemaakt. Newton en andere wijsgeeren waren van dat bestaan overtuigd geworden door beschouwingen omtrent de beweging der hemellichamen of door de bewonderingswaardige organisatie van dieren en planten, Maupertuis vindt in dat alles geen bewijs, dergelijke zaken zijn ten opzichte van het verheven Wezen veel te kleine deelen van 't groote geheel om hieraan eenige waarde te hechten. Maar bestaat er een volmaakt God, welnu dan behoort tot die volmaaktheid ook de eigenschap om alle zaken met het minst mogelijk verbruik van werking te doen gepaard gaan, dat moet dus een wet wezen waarop de geheele natuur gebaseerd is en waardoor dus o. a. ook de verschijnselen van rust en beweging geschieden. Maupertuis heeft dus — eenmaal vooropgesteld wat „hoeveelheid werking" is — slechts aan te toonen dat werkelijk rust en beweging hiervan afhankelijk zijn om 't bestaan van God bewezen te hebben. Hij geeft hier ter plaatse echter een verklaring van „hoeveelheid werking" met een kleine verandering. Hij zegt: „La quantité d'action est le produit de la Masse des corps, par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent," en stelt nu als algemeen beginsel voorop: „Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible." Het onderscheid tusschen deze en vorige définitie bestaat alleen daarin, dat hier de massa als factor wordt ingevoerd; de reden waarom zulks geschiedt wordt echter verzwegen.

Nu toetst de schrijver aan dit beginsel de beweging (schok) der volkomen onveerkrachtige en volkomen veerkrachtige lichamen en geeft daarbij de eisch aan voor de rust en evenwichtstoestand. Een en ander overtuigt hem dat, daar de formulen geheel in overeenstemming zijn met de bekende mechanische wetten, het beginsel bestaat, dus ook zijn „Auteur divine.”

Hierbij voegt hij de opmerking dat dit beginsel eenvoudiger is en van vrij wat meer algemeene toepassing dan de bekende mech. beginselen o. a. het behoud van hoeveelheid beweging, het behoud der levend. kr. „Trouwens, zegt hij „deze zijn gevolgen van het hoofdbeginsel.” (dat der kleinste werking).

Om het aangehaalde beginsel in alle uitvoerigheid behandeld te zien, raadplege men een later uitgekomen geschrift van Maupertuis: „Essai de Cosmologie”. In hoofdzake is ’t een uitwerking van de aangehaalde beknoptere verhandelingen.

Ook Euler beschouwde die zaak als van ’t hoogste belang voor de toekomst altans in de verhandelingen der Berlijner Akademie (Année 1748) komen twee uitvoerige opstellen van hem voor getiteld: „Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les Actions de forces,” en „Reflexions sur quelques loix generales de la nature qui s’observent dans les effets des forces quelconques.”

Het schijnt Euler te doen te zijn om Maupertuis’ beginsel te bewijzen en daartoe slaat hij twee wegen in. Zich de vraag voorstellende onder welke voorwaarden een volkomen veerkrachtige draad onder de werking van aantrekkende middelpunten in evenwicht zijn zal, spoort hij in het eerste opstel voor verschillende gevallen die voorwaarde op langs den weg der mechanika en zegt dan dat wat bij al het behandelde een minimum zijn moet, volkomen overeenkomt met datgene wat Maupertuis in de verhandelingen der Parijsche Akademie (1740) onder de „quantité d’action” verstaat. Ter aangehaalde plaatse echter spreekt Maupertuis met nog geen woord over „hoeveelheidwerking”, eerst in zijn opstel van 1744 (zie vroeger) komt hij hiermede voor den dag. Hoe dit zij, wij zouden durven beweren dat Euler zelf onvoldaan was over de toelichtingen door hem gegeven altans in ’t tweede opstel komt hij nogmaals op de zaak terug. Hij zal echter niet „a posteriori", zoo als in 't eerste, de formule opgeven welk een minimum zijn moet bij de verschillende vraagstukken maar nu „a priori". Evenwel eerst na behoorlijk uiteengezet te hebben wat „quantité d'actions des forces" is. Kan hij het daarover met den lezer eens worden en het hem gelukken om bij elk vraagstuk „vooruit" te ontdekken wat zijne respectieve hoeveelheidwerking is dan moet dat een minimum zijn en zal verder de toepassing van de theorie der Maxima en Minima de oplossing van het vraagstuk geven. Op de vraag waarom dit nu een minimum moet zijn, antwoordt Euler: „le principe generale de la Nature exige que la quantité d'action — en hier volgt een mathem. formule voor die actie — soit un minimum". Men ziet het: Euler zou gaarne, zijn „illustre President" ter eere, het beginsel der kleinste werking zeer duidelijk den lezer voor willen stellen maar eigenlijk verlegen met de zaak verbergt hij zich achter machtspreuken als: „il faut, la nature exige" etc." Wat verder de opmerking betreft dat Euler naar aanleiding van Maupertuis' memoires der Par. Akademie van 1740 ook even als hij de wet van evenwicht voor vloeistoffen als uitgangspunt kiest, wij vonden, daar ter plaatse altans, noch 't woord „fluide" noch oplossingen van dergelijke vraagstukken. Heel veel licht over de zaak verspreiden deze twee uitvoerige opstellen niet.

Niemand vond in het beginsel van Maupertuis eenigen aanstoot en misschien ook schrikte de hooge autoriteit van den beroemden Euler de beoordeelaars af eenige bezwaren in 't midden te brengen toen in 1751 Samuel Koening [1]),

1) Montucla noemt hem professeur en mathematiques à la Haye, doch Koenig was toen professor te Franeker later „professeur" aan de Mil. school in den Haag.

de heerschende meening trotseerende met zijn gevoelen voor den dag kwam en beweerde 1°. dat de voorstelling van het beginsel niet oorspronkelijk maar reeds door Leibnitz, Malebranche, 's Gravesande, Engelhard en Wolff geheel of gedeeltelijk uitgesproken was en 2°. dat 't beginsel zelve geen steek hield of liever geen beginsel was. De verhandeling van Koenig is te vinden in de Nova Acta Eruditorum Anno MDCCLI Lipsiae, voert tot titel: „de Universali Principio aequilibrii et motus, in vi viva reperto, deque nexu inter vim vivam et actionem, utriusque minima" en eindigt dus: „Ut finem faciam, hoc addo, videri Leibnitzium multo latius patentem Actionis theoriam habuisse, quam fortasse nunc etiam suspicari possumus. Est enim ejus ad Hermanum Epistola, in quo scribit: „l'Action n'est point ce que vous pensez, la considération du tems y entre elle est comme le produit de la masse, par le tems ou du tems par la force vive J'ai rémarqué que dans les modifications des mouvements on en peut déduire plusieurs propositions de grandes conséquenses, elle pourroit servir à déterminer les courbes que décrivent les corps attirés à un ou plusieurs centres. Je voulois traiter de ces choses entre autres dans la seconde partie de ma dynamique, que j'ai supprimée, le mauvais accueil, que le préjugé a faite à la première, m'ayant dégouté.

Aan dezen gewichtigen stap van de zijde van Koenig was echter veel voorafgegaan. Dat vele pleit sterk tegen Maupertuis. Koenig namelijk om redenen van gezondheid te Pyrmont zijnde hoorde van het nieuwe beginsel door Maupertuis ontdekt. Aanstonds herinnerde hij zich reeds voor geruimen tijd een opstel over datzelfde onderwerp gemaakt te hebben, waarin hij tot geheel andere gevolgtrekkingen kwam. Bedenkende echter dat hij als lid der Berlijnsche Akademie en als vriend van Maupertuis geen te haastige stappen doen mogt, begaf hij zich naar Berlijn om met Maupertuis de zaak mondeling te bespreken. Deze, eenigzins geraakt dat men anders dorst denken dan hij, betoonde zich in dat mondgesprek lang niet vriendschappelijk, behandelde de zaak zeer vluchtig en blijkbaar met weêrzin, zoodat het Koenig beleefdheidshalve geraden voorkwam hem voor te stellen zijn geschrift niet uit te geven maar ter zijner beschikking te stellen, hem vriendschappelijk aanbevelende om à tête roposée de zaak te onderzoeken en hem waar hij faalde terecht te wijzen, niet twijfelende of hij (Koenig) zou nog van Maupertuis veel kunnen leeren. Nog was Koenig niet uit Berlijn vertrokken of Maupertuis zond hem zijn handschrift terug, met de opmerking dat hij geen tijd had om dit met zooveel renvooien en doorhalingen geschreven stuk behoorlijk te lezen, dat hij hem evenwel verzocht 't maar uit te geven, want dat zulks geenzins hunne vriendschappelijke verhouding zou veranderen. Daarop verscheen het opstel in de „Acta Eruditorum".

Het schijnt dat nù eerst die gewichtige aanhaling van Leibnitz brief Maupertuis in 't oog viel, althans hij maakte er zijn vrienden opmerkzaam op en schreef een beleefde brief aan Koenig, waarin hij hem q q. vriend om 't origineel verzocht. Koenig schreef hierop terug dat hij 't origineel niet bezat, maar wel een copy (van de hand van Henzi) van dien brief van Leibnitz; dat dit een brief was door laatstgenoemde aan Hermann geschreven en dat hij, óók door Henzi gecopiëerd, nog tal van andere brieven van Leibnitz aan verschillende geleerden bezat.

Nu vond Maupertuis het goed zich gebelgd te toonen en de zaak in de Akademie ter sprake te brengen. Koenig, door den Secretaris van dat lichaam gesommeerd om 't origineel te vertoonen, bleef nog steeds kalm en schreef (10 Dec. 1751) in hoogst beleefde en nederige termen aan Maupertuis een brief (Maupertuisiana bl. 132) waarin hij bekende dat hij met die aanhaling niet zoo zeer gemeend had een Evangelie te verkondigen, maar haar als invallende herinnering aan 't eind van zijn' verhandeling geplaatst had; dat hij ook stellig geloofde dat Maupertuis geen ideën van Leibnitz behoefde over te nemen om een groot man te zijn; dat hij verder geloofde dat dat opsporen van dien brief — waartoe hij beleefdheidshalve toch de noodige maatregelen zou nemen — een zaak was van bijgaand belang en veel liever zijne bedenkingen tegen het opstel zelve zoude vernemen, dan met hem twisten over het al of niet bestaan van een brief; dat hij verder hem verzocht die publiciteit aan zijn schrijven te geven die hem geraden voorkwam. Doch M., wellicht verbitterd over het geschrift dat hij niet kon weerleggen bleef aan dien brief van Leibnitz als 't voornaamste punt hangen, eischte het origineel en wilde van niets verders hooren voor dat hem dit vertoond was.

Kort daarop schrijft hij in een brief aan Koenig (23 Dec. 1751 Marpertuisiana bl. 140) dat de zaak niet meer een persoonlijke maar sedert lang (Oct. 1751) die der Academie geworden is: „J'ai reçu, Monsieur, la lettre que vous m'aver fait l'honneur de m'écrire du 10 de ce mois, & s'il n'étoit qaestion que de mon interêt personnel je serois plus que satisfait des choses obligeantes qu'elle contient: mais, ce que vous avez mis dans les Actes de Leipzig, attribuant à Mr. de Liebnitz des choses que d'autres Académiciens ont données comme d'eux dans nos Memoires & ailleurs, l'Academie ne pouvant manquer à s'interesser à éclaircir ce qui peut appartenir à chacun de ses Membres, & comme la question ne depend que de la production de la lettre que vous avez citée, on vous à prié d'en faire voir l'Original" en daarna: „Ceci Monsieur, n'est donc point mon affaire, je n'y suis impliqué que comme Membre de l'Academie; c'est l'affaire de la compagnie, qui assurément est en droit d'exiger de vous de produire l'original la lettre qui interesse ses

Membres, ou de juger à cet égard de votre impuissance".

Op welke wijze de Akademie zich de zaak aantrok zullen wij in korte woorden schetsen.

Aan 't hoofd van alles staat 't onderzoek van het stuk uit de Acta Eruditorum (Histoire etc. de Berlin Année 1750) [1]) geschreven en voorgelezen in de Academie door Euler. Hier heet het Principe eenvoudig dat: „de la moindre action" en niet als vroeger „de la moindre quantité d'action", onder de eerste benaming is het meer algemeen bekend en met deze zullen wij het ook voortaan bestempelen. In dit stuk komt, behalve datgene wat wij reeds weten, nog voor, dat Koenig aan M. een copij van Henzi's copij gestuurd had, dat deze Henzi voor eenigen tijd te Bern onthoofd was ter zake van oproerige handelingen, en dat Koenig te Bazel, waar Hermann, die ook al overleden was, gewoond had, nauwkeurig onderzoek liet doen in de nagelatene papieren van dezen. Verder maakt Euler gewag van heel veel over en weêr schrijven, en hoe onderzoekingen van den kant der Berlijnsche Akademie gedaan door bemoeingen van Autoriteiten, zoowel te Bazel waar Hermann gestorven, als te Bern, waar Henzi onthoofd was, in beider nagelatene papieren geen spoor was gevonden van den bewuste brief van L. aan Hermann, doch dat het eenige van een correspondentie die L. met Hermann gevoerd had bestond in 3 brieven door Jan Bernouilli in Hermanns nagelatene papieren

1) De „Histoire & Memoires de l'Academie royale des sciènces et de belles lettres de Berlin" wijzen gewoonlijk twee jaartallen op 't titelblad aan: het zittingsjaar en 't jaar van uitgave. Zij verschillen doorgaans twee jaar. Waar wij in 't vervolg spreken van „Memoires" bedoelen we die stukken die achter de „Histoire" staan, want de verslagen der Fr. en Berl. Akademie kwamen uit onder den titel: „Histoire de l'Acad", maar elk groot of klein quarto bevat een reeks memoires, soms wel enkel deze en geen zittingsverslagen.

gevonden, doch dat ook daarin met geen woord melding werd gemaakt van „moindre action" of iets wat daarna geleek.

Dat dus na lang beraad hij, de verslaggever (Euler) van gevoelen was „qu'il est assurement manifeste qui sa cause (die van Koenig), est des plus mauvaises et que ce fragment a été forgé ou pour faire tort à M. de Maupertuis, ou pour exagérer, comme par une fraude pieuse les löuanges du grand Leibnitz qui sans contredit n'ont pas besoin de ce secours."

De geheele Akademie was het ten volle met Euler eens en drukte eenstemmig als haar gevoelen uit dat ten einde het eigendomsrecht van ontdekkingen of uitvindingen harer leden tegen ergerlijke aanvallen te verzekeren zij van oordeel was dat Koenig in deze met listen en lagen was te werk gegaan en dat zijn aanhaling geen autoriteit genoeg bezat om de glorie van Maupertuis' ontdekking te verduisteren. Verder zoude zij afwachten welke stappen Koenig wenschte te doen doch tot zoolang haar oordeel opschorten. Deze deliberatie werd door alle aanwezige leden geteekend.

Koenig zelve liet het natuurlijk daarbij niet maar zond vooreerst zijn diploma als lid terug (Maupertuisiana bl. 161) en schreef daarna een „Appel au Public" waarin hij alle weldenkende hoofden opriep om met hem zijn zaak tegen de Berlijnsche Akademie te verdedigen. [1]).

---

1) Om een voorbeeld te geven hoe partijdig zich Euler in deze vertoonde halen wij uit het bovengenoemde rapport het volgende aan wanneer hij spreekt over het onderzoek door de Akademie ingesteld naar de papieren van Hermann: „On a dans le même tems zegt hij fait encore d'autres recherches à Bâle, où M. Hermann est mort & ailleurs, pour deterrer les lettres qu'il avait reçues de M. Leibnitz; & il en résulte *assez clarement* que ces lettres sont depuis longtems entre les mains de M. Koenig, & que c'est peine perduë de les chercher en d'autres endroits: ce quí est d'autant plus vraisemblable, qu'on n'a pu les trouver nulle part, & qu'il n'est pourtant pas à présumer qu'elles se soyent perduës" Later schrijft hij in een brief aan

Na als lid der Academie tegen Koenig te zijn opgetreden achtte Euler als man van wetenschap de zaak tusschen hen beiden nog niet voor afgedaan. De verhandelingen der Berl. Akademie (Année 1751) verhalen van veel werkzaamheid zijner zijds op 't zoo vruchtbare gebied van scherpe polemiek en niet minder dan vier uitvoerige opstellen getuigen hoe lief hem het denkbeeld der kleinste werking was en hoe veel eerbied hij voor de theoriën van zijn vriend Maupertuis koesterde.

Het eerste opstel handelt over de overeenkomst tusschen de wetten van beweging en rust door Maupertuis in zijne verschillende opstellen bekend gemaakt [1]). Het tweede getiteld „Sur le principe de la moindre Action" is een herhaling van 't eerste en zegt nogmaals in zoovele woorden dat de beginselen van Maupertius eigenlijk de volmaakste zijn tot nog toe op Dynamisch gebied geleverd, en dat de „illustre

---

M. de Meran (Mem de Berlin Année 1750) in een lang postcriptum o. a. 't volgende: „M. Koenig attaque aussi le jugement de l'Academie, sur ce qu'on n'y a fait aucune mention d'un billet que M. Hermann, frére du defunt, lui a écrit & qu'il a envoyé à l'Academie; quoique, dit-il, ce billet fasse voir que ce M. Hermann ne lui a jamais donné les lettres que M. de Leibnitz a autrefois écrites à son frère, comme on l'insinuë dans le Jugement. Mais quoique *cela ne fasse rien a fonds de la chose* & que M. Koenig eût pû s'approprier ces lettres à l'insçu de M. Hermann, il suffit de remarquer ici, que *le soupçon* que ces lettres sont entre les mains de M. Koenig n'est point fondé sur ce qu'elles ne se font pas trouvées à Bâle, & qu'on l'a conçu d'après d'autres indices; mais quoique ces indices ayent paru assés forts, on ne l'a donné que pour *un soupçon* & il importe *fort peu qu'il soit fondé ou non.*"

1) Euler is hierin plus royaliste qui le roi, hij wil namelijk een zeer ondergeschikte theorie van M. over de rust met het principe der kleinste werking in zoodanig verband brengen dat het eerste mut. mut. toegepast op de beweging, het laatste wordt. Een overeenkomst waaraan M. zeker nooit gedacht heeft en die hij ook niet gewenscht zal hebben, daar het blijkbaar zijn doel is het beginsel der kleinste werking alle andere voorgaanden geheel te doen verdringen.

inventeur" de eerste geweest is, die nauwkeurig heeft aangetoond dat wat de wijsgeeren der oudheid en der latere tijden (Malebranche, 's Gravesande, Leibnitz, Wolff) slechts vermoed of in duistere termen geuit hadden. Het derde opstel getiteld „Examen de la Dissertation de M. Le professeur Koenig inserée dans les actes de Leipzig pour le mois de Mars 1751" heeft ten doel Koenig totaal te vernietigen. Het is Euler" een doorn in 't oog dat Koenig openlijk gevraagd heeft om beantwoord te worden en zulk een nietig persoontje zal hij met twee woorden vertellen dat zijn mathematische vertoogen „ne valent rien." Dat Koenig in zijn geschrift op zekeren toon van gezag spreekt, hij, Euler, wil hem dat nog niet zoo euvel duiden, hij schrijft dat eerder toe aan zekere gewoonte dan dat hij gelooft dat Koenig de „Censeur" wil spelen: „ce qu'il a donné dans ce genre d'étude étant trop peu de chose, pour pouvoir lui mériter de pareils titres." Kort en goed hij zal Koenings „dissertatio" met al hare „lemmes" en „théoremes" tot nul herleiden en hem overtuigen „qu'il c'est misérablement trompé." En nu volgt een onderzoek in vrij onkiesche en grove woorden. Geen regel is er of hij levert Euler stof genoeg op om er hatelijkheden en smaadredenen voor den Auteur uit te halen. Ten laatste besluit hij het stuk met op te merken dat hij weet hoe 't komt dat Koenig eigenlijk zoo hoog geleerd is: Koenig is te veel Metaphysicus, en hij Euler, en zijne wiskunstige geestverwanten, die zich met de bespiegelingen over het bovennatuurlijke niet mogen ophouden, zijn te weinig ontwikkeld om de verhevene beschouwingen van M le Professeur te begrijpen.

Hebben we deze ontboezeming gelezen en slaan eenige bladen om van hetzelfde kwartijn waar Euler zich als zulk een Anti-Metaphysikus voordoet dan stijgt onze verbazing ten top wanneer we als titel van het vierde opstel lezen:

„Essai d'une demonstration metaphysique du Principe general de l'Equilibre par M. Euler" [1]).

Het kon niet uitblijven of door dergelijke geschriften werd de tegenpartij geenszins tot zwijgen gebracht en we zouden nog een reeks grootere en kleinere geschriften kunnen aanhalen, alle geschreven met het doel om Maupertuis en de Akademie of Koenig en zijn' aanhangers belachelijk te maken. Wij willen alleen nog gewag maken van drie kampioenen in het worstelperk, die de een op meer de ander op minder gepasten toon het hunne er toe hebben bijgedragen om den strijd van die dagen levendig te houden.

De eerste is Voltaire die tegen Maupertuis en de Akademie partij kiezende, in een bijtende satyre „Le Diatribe du docteur Akakia" hem en dat geleerde lichaam met alle kracht van zijn scherp vernuft belachelijk zocht te maken. Was er iemand minder bevoegd rechter om over Mathematische vraagstukken het woord te voeren dan was het gewis Voltaire. Het was ook minder de belangrijkheid der zaak die hem de pen deed opvatten, dan wel een persoonlijke vete tegen Mauterpuis. Deze toch had hem geweigerd zijn vriend l'Abbé Raynal in de Akademie te doen opnemen en hierover gebelgd wreekte hij zich in den „Docteur Akakia".

Vervolgens heeft ook Frederik de Groote als beschermheer

---

1) Wij kunnen hier nog bijvoegen dat er in de Correspondentie van Daniël Bernoulli aan Euler een brief bestaat (29 April 1747) waarin onder anderen voorkomt: Herr Rampseck hat meinem Vater geschrieben, dass Sie in unterschiedenen Controversiis metaphysicis publicis stehen. Sie sollten sich nicht über dergleichen Materiën einlassen; denn von Ihnen erwartet man nichts als Sublime Sachen und es ist nicht möglich, in jenen zu excelliren." (Dr. Adolph Maijer „Geschichte des Princips der kleinsten Action" Leipzig 1877.) Werkelijk noopte alleen de voorliefde voor Metaphysische bespiegelingen Euler tot zijne uitvoerige verhandelingen over dit beginsel.

der Akademie en vriend van Maupertuis eenige brieven over de zaak in 't licht gegeven [1]).

De derde bestrijder is M. le Chevalier d'Arcy, die (Mem. de l'Acad. de Paris 1749) in een verhandeling „Reflexions sur le Principe de la moindre Action de M de Maupertuis" aantoonde dat 1^0. de naam niet goed gekozen was en 2^0. dat beginsel moest vervangen worden door een veel omvattender n. dat der Sectoren. We kunnen hieraan toevoegen dat d'Arcy Maupertuis niet gevat heeft, altans hij laat hem zaken beweren geheel vreemd aan deze kwestie. Wij zouden ook dit opstel in 't geheel niet aanhalen, ware 't niet dat dit 't eenigste is waarop Maupertuis zelve antwoordde (Mem. de Berlin 1752) en wel zooals hij zelf opmerkt, omdat „M. le Chevalier lui attaque avec tant de politesse"; tegen „le Professeur de la Haye" den vader van „la guerre indecente dégénérée en injures et en libelles" zal hij nooit de pen opvatten. Maupertuis merkt terecht in dit tegenschrift op dat dat wat den naam aangaat het hem vrij stond „Action" te noemen wat hem goeddacht, maar laat er vreemd genoeg op volgen dat die keuze op zich zelve nog zoo slecht niet was, want dat ook Leibnitz onder „Werking" het produkt van Massa, snelheid en ruimte verstond. Vreemd is dit argument omdat juist de oorzaak van den strijd grootendeels gezocht moet worden in de noodlottige aanhaling van Leibnitz woorden over „Werking" door Koenig in de „Acta Eruditorum" gedaan.

Met dezen zullen wij de rij der voor- en tegenstanders besluiten en de geschiedenis der kwestie eindigen met te ver-

---

1) Om een bewijs te geven welke afmetingen deze wetenschappelijke strijd, die langzamerhand in personaliteiten ontaarde, heeft aangenomen, herinneren wij aan de verwijdering tusschen Frederik den Groote en Voltaire, die uit het partij trekken van den een voor Maupertius en van den ander voor Koenig voortsproot.

melden dat ten slotte in de Mem. de Berlin Année 1757 de geheele correspondentie van Leibnitz met Hermann verscheen. Zij bevat 29 brieven geschreven in 't Latijn en verdeeld in 2 deelen. Het eerste bevat de drie vroeger genoemde brieven, het tweede de 26 overige, die later door bemiddeling van 't bestuur van Bazel, namens den broeder des overledene aan de Berlijnsche Akademie zijn toegezonden. Geen spoor van een in 't fransch geschreven brief met den door Koenig opgegeven datum (19 Oct. 1707) is daarbij te vinden, zoodat waarschijnlijk Koenig die aanhalingen van Leibnitz wel verzonnen zal hebben.

Eindelijk: in de Voorrede der brieven wordt vermeld dat door den dood van den Heer Koenig alle verdere polemiek heeft opgehouden te bestaan en dat dus het eind van den strijd, die de geleerde hoofden zoo langen tijd in koortsachtige spanning bracht als geëindigd mocht beschouwd worden.

Tot zooverre de geschiedenis der zaak. Vraagt men nu hoe Koenig zich achter Leibnitz kan verschuilen, wiens aanhalingen hij niet bij machte was te vertoonen, zoo geeft de verhandeling van Euler „sur le principe de la moindre action" (zie boven) wel eenig licht hieromtrent. Maupertuis en Liebnitz gingen uit van 't zelfde beginsel, namelijk dat der „Werking" maar de eerste heeft hiervan een universeele toepassing willen maken, terwijl Leibnitz alleen bij de breking van 't licht staan bleef. Leibnitz nam als beginsel aan: de Natuur werkt altijd langs den gemakkelijksten weg dus langs een zoodanigen, dat daarbij de som der moeielijkheden (difficultés) zoo klein mogelijk zij, hierbij is deze moeielijkheid evenredig aan den weg verm. met den weerstand. Maupertuis stelde voorop: de Natuur werkt met het minst mogelijk verbruik van krachten, noemde dat verbruik „Werking" en stelde het voor door massa × snelheid × weg. Beiden helderden hun nagenoeg overeenkomstig beginsel op door de breking van 't licht en beiden gingen hierbij uit van de onderstelling dat het licht zich in opt. dichtere mediën sneller voorplant dan in opt. ijlere een hypothese die zooals bekend is, Leibnitz met Descartes, tegen Firmat in, deelde. In dat geval kon Leibnitz de weerstand evenredig aan de snelheid stellen, dus wordt dan de moeielijkheid (difficulté) van Leibnitz gemeten door den weg × de snelheid. Hiermede komt dan overeen het begrip „Werking" van Maupertuis.

Liebnitz heeft het bij deze toepassing gelaten en geen verdere uitbreiding aan zijn beginsel gegeven, terwijl Maupertuis daarentegen verrukt met de voorstelling van een alles bevattende natuurwet van alle kanten toepassingen haalde of zooals Euler 't uitdrukt het beginsel van de kleinste werking tot de basis maakte der geheele mechanika.

HOOFDSTUK II.

Vroegere beschouwingen van het beginsel der kleinste werking.

Het eerste voorstel door Maupertuis met behulp van het beginsel der kleinste werking opgelost [1]) is het bekende vraagstuk van de breking van 't licht. Hij wil een verklaring geven waarom de lichtstraal van een optisch ijler medium in een optisch dichter medium overgaande de straal zoodanig gebroken wordt dat de sinussen der inval- en brekingshoeken tot elkaar in standvastige verhouding staan. Hij stelt voorop dat de weg, die door de lichtstraal wordt gevolgd, een weg is waar de hoeveelheid werking — produkt van den afgelegden weg en de snelheid — een minimum is.

Aangenomen („Or ce fait posé") dat in opt. dichtere mediën de voorplantingssnelheid grooter is dan in opt. ijlere, denken we ons een lichtstraal (fig. 1) ARB, dan geeft de door Snellius ontdekte wet in de formule door anderen daaraan gegeven, dat de gebroken lijn ARB een zoodanige is waarbij

$$\frac{\text{Sin}\angle \text{ARE}}{\text{Sin}\angle \text{BRF}} = \frac{\text{Snelheid van voortpl. in B}}{\text{Snelh. van voortpl. in A}} = \text{Constant.}$$

1) Mem. de Paris Année 1744 „Accord de differentes loix de la Nature qui avoient jusqu'ici paru imcompatibles."

Maupertuis onderstelt nu dat het punt R waar de lichtstraal een breking ondergaat voorloopig onbekend is en dus de lijn CR een veranderlijke grootheid. Volgens het beginsel der kleinste werking moet nu

$$V \times AR + W \times BR = \text{Minimum zijn}, \quad (1)$$

wanneer V en W de voortplantingsnelheden in de beide mediën voorstellen.

Nu is $AR = \sqrt{AC^2 + CR^2}$ en $BR = \sqrt{(CD - CR)^2 + BD^2}$ dus (1) wordt:

$V \times \sqrt{AC^2 + CR^2} + W \sqrt{CD^2 + CR^2 - 2\,CD \times CK + BD^2} =$ min. en daar AC, CD en BD constant zijn volgt bij differie

$$V \times \frac{CR \times dCR}{AR} - W \times \frac{DR \times dCR}{BR} = 0$$

$$\text{of } \frac{\operatorname{Sin} \angle ARE}{\operatorname{Sin} \angle BRF} = \frac{W}{V}$$

en daar voor verschillende hoeken van inval toch altijd die verhouding $\frac{W}{V}$ een zelfde blijft is.

$$\frac{\operatorname{Sin} \angle ARE}{\operatorname{Sin} \angle BRF} = \text{Constante.}$$

Is $V = W$ (het geval der reflexie) dan is de Constante $= 1$ dus

$$\operatorname{Sin} \angle ARE = \operatorname{Sin} \angle BRF$$

een waarheid ook door de wetten van Snellius bekend.

Stellen we ons op het standpunt der hedendaagsche beschouwingen dan weten we door de proeven van Faucault dat, $V < W$ zijnde, het beginsel moest opleveren

$$\frac{\operatorname{Sin} ARE}{\operatorname{Sin} BRF} = \frac{V}{W}$$

waaruit volgt dat 't Beginsel niet doorgaat. Van Maupertuis onderstelling uitgaande (zie Hoofdstuk I) dat juist $W > V$ is kan 't ons niet bevreemden dat hij er een bevestiging in vond van zijne ontdekking.

Bij terugkaatsing leverde de theorie der kleinste werking als gevolg den kortsten weg en den kleinst mogelijken tijd, bij breking daarentegen niet.

De verdere uitbreiding die M. aan zijn beginsel gaf [1]) bepaalt zich tot de beweging der lichamen en wel de botsing van veerkrachtige en van onveerkrachtige. In beide gevallen zijn de toestanden volkomen; de weeke en vloeibare lichamen beschouwt hij als agregaten of van volkomen veerkrachtige of van volkomen onveerkrachtige. Volkomen onveerkrachtige lichamen zijn, volgens hem, zij die door geen schok kunnen ineengedrukt worden en die dus bij botsing een gemeenschappelijke snelheid moeten aannemen, terwijl hij aan de volkomen veerkrachtige lichamen de eigenscnappen toekent, die hun heden ten dage nog toegeschreven worden. Hierbij doet hij opmerken dat zoowel vóór als na de botsing het verschil hunner respectieve snelheden een zelfde moet zijn. Dat verschil noemt hij „vitesse respective."

Thans heet het beginsel: „Gebeurt er eenige verandering in de Natuur, dan is de hoeveelheid werking, noodig voor die verandering, een minimum."

Hoeveelheid werking is hier het gedurig produkt van Massa, snelheid en weg.

Vooreerst de toepassing op de volkomen onveerkrachtige lichamen: Twee bollen ter massa A en B bewegen zich in een zelfde richting met eenparige snelheden a en b waarbij $a > b$. Na de botsing vervolgen beide als één lichaam hunnen weg met de gemeenschappelijke snelheid $x < a$ doch $> b$. De verandering in de Natuur gescheid is deze, dat a met $a—x$ verminderd, b met een bedrag $x—b$ vermeerderd is. Om dit te bewerkstelligen zoude men A met een eenparige snelheid $a—x$ op een onstoffelijk vlak moeten achteruitdragen, B met een eenparige snelheid $x—b$ moeten vooruitdragen. Daar

1) Mem. de Berlin 1746.

hier de doorloopen wegen evenredig zijn met de snelheden is dus de hoeveelheid werking voor die verandering noodig.

$$A\,(a-x)^2 + B\,(x-b)^2$$

en daar deze, volgens het beginsel, een minimum zijn moet is

$$A\,(a-x)^2 + B\,(x-b)^2 = \text{minimum}$$

dus na differentiatie

$$-A\,(a-x) + B\,(x-b) = o \quad \text{of } x = \frac{Aa + Ab}{A + B}$$

een uitkomst geheel in overeenstemming met de formule langs den gewonen michanischen weg verkregen.

Vervolgens het geval bij volkomen veerkrachtige lichamen: Weêr bewegen zich twee bollen ter massa A en B met eenparige snelheden a en b, $a > b$ in verschillende richtingen. Na de botsing zijn hunne respectieve snelheden α en β, zoodat de hoeveelheid werking vereischt om a in α en b in β te veranderen, op geheel dezelfde wijze als dat voor de volkomen onveerkrachtige lichamen geschied is, gegeven wordt door:

$$A\,(a-\alpha)^2 + B\,(\beta-b)^2 = \text{minimum.}$$

of na differentiatie

$$-2\,Aa\,da + 2\,A\alpha\,d\alpha + 2\,B\beta\,d\beta - 2\,Bb\,d\beta = o. \quad (2)$$

Hierbij komt echter nog een verg: en wel die der „vitesse respective" aldus gemotiveerd: „la vitesse respective des deux corps etant la seule cause qui avoit bandé leur ressort, il faut que le débandement reproduise un effet égal à celui, qui comme cause avoit produit le bandement: c'est-à-dire une vitesse respective, en sens contraire, égal à la première."

Aldus $a-b = \beta-\alpha$ of $d\alpha = d\beta$ waardoor met (2)

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A + B} \quad \text{en } \beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A + B}$$

Alweder overeenkomstig de bekende formulen.

Eindelijk als laatste toepassing beschouwen we met den schrijver een hefboom waaraan twee zware massas zich bevinden, en de vraag is nu: waar moet het steunpunt worden aangebracht opdat er evenwicht zij?

Onderstellende dat de hefboom een kleine verandering ondergaat dan beschrijven de beide massa's A en B cirkelboogjes evenredig aan beider afstand van het steunpunt. Die boogjes zullen tevens beider snelheid voorstellen en daar zij evenredig zijn met de bedoelde afstanden van het steunpunt, zal als de hefboom c lang is, en het steunpunt van A een afstand x heeft,

$Ax^2 + B\,(c-x)^2 =$ de hoeveelh. werking dus $=$ Minimum of na dlfferentiatie en oplossing van x

$$x = \frac{B \times C}{A + B} \text{ of } Ax = B\,(c-x).$$

„La Proposition fondementale de la Statique" zegt Maupertuis.

Dit nu zijn de eenige voorbeelden door den Schrijver meêgedeeld ter verduidelijking van zijn beginsel. Gaan wij na in hoeverre aan dien eisch voldaan wordt. Vooreerst is alleen in het eerste voorbeeld het begrip „ werking", als produkt van snelheid en weg, volgehouden. In de drie andere waar toevallig de weg evenredig is aan de snelheid komt nergens deze als factor voor, maar is overal de Massa vermenigvuldigd met het vierkant der snelheid. Alzoo alleen bij het eerste voorbeeld kan sprake zijn van 't beginsel der kleinste werking. Maar, gelijk wij reeds aantoonden, het beginsel streng toegepast leidt tot een bepaalde fout en dus kunnen wij door deze toepassing alleen, er niet veel geloof aan hechten.

Wat de andere voorbeelden aangaat, we missen hierin den weg, zoodat de grondvergelijking waardoor de oplossing gescheidt niet zoo zeer is een uitdrukking voor het beginsel der kleinste werking als wel een geheel nieuw theorema dat gevoegelijk dus kan worden geformuleerd:

„Bij gelijkmatige beweging is de som der produkten van massa en vierkant der verandering van de snelheden gelijk aan een constante."

Deze beschouwing levert even goed de bekende vergelijkingen als de aangehaalde. Overigens lijdt de berekening van het laatste voorbeeld aan heel wat onnauwkeurigheid.

De waarden der voorbeelden is dus niet groot: het eerste is de toepassing van het beginsel maar levert een onjuiste uitkomst, en van de andere zijn de uitkomsten goed, maar zij bevatten het beginsel niet. De groote dwaling hier, en die wij bij Euler terug zullen vinden is deze: dat als Arbeid — want dat is toch eigenlijk hunne bedoeling met werking — wordt aangezien dat wat zij niet is, namelijk het produkt van snelheid en weg, en dat zij moet bespaard worden daar, waar, althans naar de tegenwoordige opvatting, van arbeid geen sprake kan zijn. Arbeid toch wordt verricht, en dus ook gespaard, door een constant werkende kracht en deze is niet aanwezig bij gelijkvormige beweging, of bij oogenblikkelijke krachten.

Is Maupertuis te spaarzaam geweest in zijne toepassingen — het aangehaalde is nagenoeg 't eenige wat hij op mathematisch gebied er over geschreven heeft — dat verwijt kan Euler niet treffen, die oogenblikkelijk het beginsel van zijn vriend over nemende, door tal van toepassingen op verschillende mechanische vraagstukken er al aan deed wat in zijn vermogen was om het bij zijne tijdgenooten ingang te doen vinden. Onmogelijk en ook onnoodig is het, alles aan te halen wat hij er over schrijft; onmogelijk omdat zijne verhandelingen over dit onderwerp een groot gedeelte der verslagen van de Berlijnsche Akademie gedurende 7 jaren vullen, en onnoodig omdat Euler zich in zijne geschriften onophoudelijk herhaalt. In hoofdzake komt eigenlijk alles op 't volgende neêr. [1])

---

1) Memoires de Berlin Année 1748.

Zij Z (fig. 2) een willekeurig punt van een volkomen buigbaren draad Z A, zich bevindende onder de werking van krachten V, V_1, V_2 die uit vaste middelpunten C, C_1 en C_2 volgens willekeurige functien der afstanden v, v_1, v_2 op deze massa werken, dan vindt men, als Zz ons het element dier kromme voorstelt, voor de grootte der Tangentiëele kracht T op Z werkende de volgende uitdrukking

$$-\frac{Vdv + V_1\,dv_1 + V_2\,dv_2}{ds} = T \;\ldots\ldots (3)$$

Men komt aan (3) dus: laat men uit z op de verschillende richtingen der krachten V, V_1, V_2 de loodlijnen za, zb en zc neer, dan is, daar Zz samenvalt met de richting der Tangentieele kracht, de ontbondene van V, V_1, V_2 op de richting van Zz naar volgorde

$$V\cos CZT \quad V_1 \cos C_1ZT \quad V_2 \cos C_2ZT$$

$$\text{of } V \times \frac{Za}{Zz} \quad V_1 \times \frac{Zb}{Zz} \quad V_2 \frac{Zc}{Zz}$$

Noemt men Za, Zb, Zc, dv, dv_1, dv_2 (de differentialen der afstanden v v_1 v_2) Zz (het element der kromme) ds, dan is de totale tangentieele kracht waarmeê de massa in Z door C, C_1 en C_2 wordt aangetrokken — (in aanmerking genomen dat $Za = -dv$ is enz.) —

$$T = -\frac{Vdv + V_1dv_1 + V_2dv_2}{ds}$$

Voor meêr middelpunten natuurlijk meer termen in de som. Zal nu Z in evenwicht zijn dan moet $T = 0$ dus

$$Vdv + V_1dv_1 + V_2dv_2 = 0$$

$$\text{of } \int Vdv + \int V_1dv_1 \int V_2dv_2 = \text{Constante} \;\ldots\ldots (4)$$

Daar nu voor elk punt der massa ZA een verg. (4) kan gevonden worden en het in evenwicht zijn van den geheelen draad vereischt dat naar alle kanten eene gelijke werking plaats vindt zoo is het duidelijk dat (4) voorstelt *„de hoeveelheid werking der krachten* op Z. (la quantité d'action des forces). Nu is niet alleen die hoeveelheid werking gelijk aan een constante, maar moet een minimum zijn. Men zou wel is waar kunnen aanvoeren, zegt Euler, dat uit (3) voortvloeit, dat (4) evenzoo goed maximum als minimum zijn kan, maar zulks zoû ongerijmd wezen, want het laatste alleen *eischt de Natuur*. Wie aan die waarheid mogt twijfelen zal hij door een geval „tout particulier" de zaak nog duidelijker maken. Daartoe verbindt hij een stoffelijk punt Z aan drie koorden (p, q en r) verbonden aan dwarslatten (AB, CD en EF) op hunne beurt weêr door middel van elastiekjes (m, n en o) aan vaste latten (GH, IK en LM) verbonden, en zegt nu dat voor evenwicht van Z gevorderd wordt dat de totale som der lengten van de elastiekjes zoo klein mogelijk zijn moet; immers kon die nog kleiner worden dan zou het punt Z niet in rust zijn. Hij eindigt deze opheldering met te bewijzen dat de totale som der lengten en verg. (4) met elkaâr overeenkomen.

Alzoo $\int V dv + \int V_1 d_1 + \int V_2 dv_2$ is voor centrale krachten werkende op een punt Z van den draad de hoeveelheid werking en die hoeveelheid is Minimum.

Men kan nu, dit voorop gesteld, verder gaan en uit (4) den aard der kromme bepalen, dien de geheele draad moet aannemen om onder de werking der meergemelde krachten in evenwicht te zijn.

Onderstellende dat de draad homogeen van stof zij, zal het punt Z der kromme in evenwicht zijn als:

$$\int V dv + \int V_1 dv_1 + \int V_2 dv_2 = \text{Minimum is.}$$

Is nu $Zz = ds$ het element der kromme, dan wordt de totale hoeveelheid werking op den geheelen draad voorgesteld door:

$$\int ds \left[\int V dv + \int V_1 dv_1 + \int V_2 dv_2 \right] \; \ldots\ldots \; (5)$$

Daar nu voor elk punt van den draad de hoeveelheid werking een minimum is moet ook (5) een minimum zijn dus is de voorwaarde van evenwicht voor het geheel:

$\int ds\,[\int V dv + \int V_1 dv_1 + \int V_2 dv_2] = \text{Minimum} \;\ldots\ldots (6)$

In (6) moet nu de vorm der kromme gegeven zijn en om die te vinden slaan wij volgenden weg in.

Zij van Z (fig. 3) de abscis en ordinaat x en y voor C als oorsprong van een rechthoekig stelsel, x_1 en y_1 voor C_1 en x_2 en y_2 voor C_2; daarbij gebruiken wij dus drie stelsels van onderling evenwijdige Covidinaten die echter alleen in constanten verschillen, zoodat $dx = dx_1 = dx_2$, $dy = dy_1 = dy_2$ en verder als $dy = pdx$, $dp = qdx$ is, moeten in $dy_1 = pdx_1$, $dp = qdx_1$ enz. p en q dezelfde veranderlijke grootheden voorstellen.

Door deze substitutie wordt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + p^2}$. Uit $v^2 = x^2 + y^2$, $v_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ en $v_2^2 = x_2^2 + y_2^2$ volgt door $dx = dx_1 = dx_2$ en $dy = dy_1 = dy_2$

$$dv = \frac{xdx + ydy}{v},\quad dv_1 = \frac{x_1dx + y_1dy}{v_1},\quad dv_2 = \frac{x_2dx_2 + y_2dy}{v_2}$$

zoodat door substitutie dezer waarden in (6) deze verandert in:

$$\int dx \sqrt{1+p^2} \left[\int \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V_1x_1}{v_1} + \frac{V_2x_2}{v_2}\right) dx + \int \left(\frac{Vy}{v} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{V_1y_1}{v_1} + \frac{V_2y_2}{v_2}\right) \times dy\right] = \text{Minimum.}$$

Daar nu V, V_1 en V_2 willekeurige functiën der afstanden, dus functiën der coördinaten zijn en $x = x_1 + a = x_2 + b$, $y = y_1 + c = y_2 + d$ is, is

$$\sqrt{1+p^2} \left[\int \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V_1x_1}{v_1} + \frac{V_2x_2}{v_2}\right) dx + \int \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1y_1}{v_1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{V_2y_2}{v_2}\right) dy\right] \ldots. (7)$$

een functie van x, y en p.

In zijn verhandeling „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" [1]) betoogt Euler, dat, als Z een functie is van x, y en p, dus $Z = \varphi\,(xyp)$ of $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ dus $M = \frac{\partial Z}{\partial x}$ $N = \frac{\partial Z}{\partial y}$ en $P = \frac{\partial Z}{\partial p}$, de kromme waarbij $\int Zdx$ max. of minim. zijn moet, wordt voorgesteld door:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} \text{ of } Ndx = dP \;\ldots\ldots (8)$$

waarbij dx constant of x de onafh. veranderlijke is.

In ons geval is Z de vorm (7) en dus

$$(9)\left\{\begin{aligned} M &= \left(\frac{V_2}{v} + \frac{V_1 x_1}{v_1} + \frac{V_2 x_2}{v_2}\right)\sqrt{1+p^2} \\ N &= \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1 y_1}{v_1} + \frac{V_2 y_2}{v_2}\right)\sqrt{1+p^2} \\ P &= \left[\int\left(\frac{Vx}{v} + \frac{V_1 x_1}{v_1} + \frac{V_2 x_2}{v_2}\right)dx + \int\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1 y_1}{v_1} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{V_2 y_2}{v_2}\right)dy\right] \times \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \left(\int Vdv + \int V_1 dv_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int V_2 dv_2\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right.$$

1) Isoperimetrische problemen zijn die waarbij men zich de vraag voorstelt welke lijn tusschen twee bepaalde punten de eigenschap heeft om een zekere gegeven Integraal formule maximum of minimum te doen zijn. Deze soort van vraagstukken, door Johan Bernoulli in het leven geroepen door het beroemde vraagstuk der Brachystochrone, deed een afzonderlijke oplossings methode — de Isoperimetrische — ontstaan, waaraan alle wiskunstigen van naam in dien tijd hunne krachten beproefden. Onder hen nemen de Bernoullis en Euler de voornaamste plaats in; zelfs vond Daniël Bernoulli dat door deze methode Statische problemen veel gemakkelijker waren op te lossen dan door de gewone beginsel der Mechanika, en de gedachte om die Methode toe te passen ook op de *beweging* onder de werking van middelpuntskrachten, deed hem de vraag tot Euler richtte om ook dit vraagstuk eens op te lossen. Het antwoord van Euler — ruim twee jaar na de vraag gegeven — was de Methodus invinundi curvus & waarbij als aanhangsel „de Motu projectorum" was toegevoegd.

$$(9)\left\{\begin{aligned} dP &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}(Vdv + V_1dv_1 + V_2dv_2) + (\int Vdv + \\ &+ \int V_1dv_1 + \int V_2dv_2) \times \frac{dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right.$$

Bij substitutie van (9) in (8) wordt de verg. der kromme:

$$\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1y_1}{v_1} + \frac{V_2y_2}{v_2}\right)\sqrt{1+p^2}\,dx = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}(Vdv +$$
$$+ V_1dv_1 + V_2dv_2) + (\int Vdv + \int V_1dv_1 + \int V_2dv_2) \times$$
$$\times \frac{dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \;\ldots\ldots\; (10)$$

of beide leden met $\sqrt{1+p^2}$ vermd. en voor dp, qdx gesubstitueerd, verandert (10) in:

$$\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1y_1}{v_1} + \frac{V_2y_2}{v_2}\right)\sqrt{1+p^2}\,dx = p\,(Vdv + V_1dv_1 +$$
$$+ V_2dv_2) + (\int Vdv + \int V_1dv_1 + \int V_2dv_2)\frac{qdx}{1+p^2} = p \times$$
$$\left(V\,\frac{xdx + ydy}{v} + V_1\,\frac{x_1dx + y_1dy}{v_1} + V_2\,\frac{x_2dx + y_2dy}{v_2}\right) +$$
$$+ (\int Vdv + \int V_1dv_1 + \int V_2dv_2) \times \frac{qdx}{1+p^2} \quad \text{dus:}$$

$$\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1y_1}{v_1} + \frac{V_2y_2}{v_2}\right)(1+p^2) = p\left[\frac{Vx}{v} + \frac{V_1x_1}{v_1} + \frac{V_2x_2}{v_2} +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V_1y_1}{v_1} + \frac{V_2y_2}{v_2}\right)p\right] + (\int Vdv + \int V_1dv_1 +$$
$$+ \int V_2dv_2)\,\frac{q}{1+p^2} \quad \text{of}$$

$$V \times \frac{y-px}{v} + V_1 \times \frac{V_1-px_1}{v_1} + V_2 \times \frac{y_2-px_2}{v_2} = \frac{q}{1+p_2}$$
$$(\int Vdv + \int V_1dv_1 + \int V_2dv_2) \;\ldots\ldots\; (11)$$

Zoodat (11) de kromme is die de volkomen buigbare draad ZA onder de werking der centrale krachten zal aannemen.

Wat nu de oplossing hier gegeven betreft, men bespeurt dat dit eene is waarbij van het beginsel der kleinste werking „a priori" [verg. (6)] wordt gebruik gemaakt, terwijl hij er aan toevoegt dat men hierdoor veel spoediger en gemakkelijker zijn doel bereikt dan door den gewonen weg ons door de rekenende mechanika aangegeven.

Om dit te staven lost hij ditzelfde vraagstuk volgens dezen laatsten weg ook nog dus op:

Hoe de krachten ook mogen werken op elk punt M van den draad AM (fig. 4.) zij kunnen altijd teruggebracht worden tot twee richtingen MQ en MP onderling loodrecht op elkander en parallel aan de coördinaten van M. Zijn dus MQ = Qds en MP = Pds de krachten in de aangegevene richtingen werkende op het element Mm = ds. *Deze krachten zijn oneindig klein omdat ze slechts op het element ds werken.* Wij moeten ons dus voorstellen dat op het punt M de krachten P en Q werken, doch deze gesommeerd over het element ds geven de bovengenoemde Qds en Pds, altijd in de onderstelling dat voor alle punten van 't element de P en de Q gelijk blijven. Hoewel het voor de hedendaagsche beschouwing eenigszins vreemd moge klinken dat we een element laten bestaan uit een aaneenschakeling van punten en het niet beschouwen als het onbepaald kleine rechte lijntje dat twee opvolgende punten der kromme verbindt, is dit voor Euler niets vreemds die meermalen van „alle punten van het element" spreekt. In dien geest hebben we dan ook te verstaan dat op het element ds de krachten Qds en Pds werken.

Zal nu AM in rust zijn zoo moeten de krachten die het deel der lijn AM vóór M om dit punt doen draaien elkaârs werking opheffen. Om nu die werking te vinden beschouwen wij van AM een willekeurig deel AY, waarbij Y tot Coördin. φ en ψ heeft, Yy (het element) $d\omega$ heet en AY = ω is. Wij onderstellen dan dat M voorloopig vast blijve en dus x en y constant zijn.

Zij overeenkomstig QM en PM de kracht YZ op $d\omega = qd\omega$

en $Yx = pd\omega$, dan is het moment van YZ ten opzichte van M

$$q\,(MP - YX)\,d\omega = q\,(y - \psi)\,d\omega.$$

en van de kracht YX

$$p\,(CP - CX)\,d\omega = p\,(x - \varphi)\,d\omega.$$

De eene kracht zal $\angle$ AMQ trachten te vermeerderen, de andere hem te verminderen, en het moment der krachten YZ en YX die den draad om M in de richting AQ zal bewegen is:

$$(y - \psi)\,q\,d\omega - (x - \varphi)\,pd\omega$$

dus voor het geheele stuk AY zal het moment ten opzichte van M zijn de Integraal dezer formule en dus, daar bij deze beschouwing voorloopig x en y constant waren, gegeven worden door:

$$y\int qd\omega - \int \psi\, qd\omega - x\int pd\omega + \int \varphi\, pd\omega.$$

Om nu het moment voor de geheele lijn AM ten opzichte van M te vinden, naderen wij met Y het punt M dan verandert φ en ψ in x en y, $d\omega$ in ds en p en q in P en Q en dan zal het moment der krachten werkende op AM om haar om M in den zin AQ te doen draaien, gegeven worden door:

$$y\int Qds - \int yQds - x\int Pds + \int xPds \;\ldots\ldots\; (12)$$

Voor evenwicht, dus dat die momenten elkanders werking opheffen, moet (12) nul zijn, dus zal

$$y\int Qds - \int yQds - x\int Pds + \int xPds = 0$$

of haar differentiaal $dy\int Qds - dx\int Pds = 0 \;\ldots\; (13)$

den aard der kromme AM bepalen. Hierbij geven $\int Qds$ de totale som der krachten aan waardoor de draad in de richting der abscis, en $\int Pds$ die aan, waardoor zij in de richting der ordinaten bewogen wordt.

Nemen wij nu dit als basis aan om het vroeger behandelde vraagstuk (bl. 23) zonder het beginsel der kleinste werking op te lossen. Wij moeten dan de kromme bepalen die de volkomen buigbare draad AM zal aannemen wanneer hij onder de werking der centrale krachten V, V_1 en V_2 uit C,

C_1 en C_2, zich in evenwicht bevindt. De krachten werken volgens willekeurige functiën der afstanden $CM = v$, $C_1M = v_1$ en $C_2M = v_2$.

Geheel overeenkomstig aan 't voorgaande nemen wij de middelpunten tot oorsprongen van drie vaste Coördin. stelselsels aan, zoodat ook nu de formulen gelden:

$v^2 = x^2 + y^2$, $v_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $v_2^2 = x_2^2 + y_2^2$, $dx = dx_1 = dx_2$
$dy = dy_1 = dy_2 = pdx$ en $dp = qdx$, $Mm = ds = dx\sqrt{1 + p^2}$.
Ontbinden wij de krachten V volgens abscis en Ordinaat van M, dan hebben wij dat in de richting MQ en MP.

V gedecomponneerd wordt in $\frac{Vx}{v}$ en $\frac{Vy}{v}$

V_1 „ „ „ $\frac{Vx_1}{v_1}$ en $\frac{Vy_1}{v_1}$

V_2 „ „ „ $\frac{Vx_2}{v_2}$ en $\frac{Vy_2}{v_2}$

en stellende $\frac{V}{v} = U$, $\frac{V_1}{v_1} = U_1$ enz. dan werkten op $Mm = ds$ in beide richtingen respectivelijk de krachten:

$(Ux + U_1x_1 + U_2x_2)\,ds$ en $(Uy + U_1y_1 + U_2y_2)\,ds$, zoodat op het geheele koord in beide richtingen de krachten:

$\int(Ux + U_1x_1 + U_2x_2)\,ds$ en $\int(Uy + U_1y_1 + U_2y_2)\,ds$ werkzaam zijn.

Deze nu vervangen in de even voorafgaande beschouwingen bij (fig. 4) de waarden $\int Qds$ en $\int Pds$, zoodat de evenwichts voorwaarde gegeven moet worden — zie (13) — door:

$$dy\int ds\,(Ux + U_1x_1 + U_2x_2) = dx\int ds\,(Uy + U_1y_1 + U_2y_2)$$

of voor dy, pdx gesteld en gedifferentieerd:

$$dp\int ds\,(Ux + U_1x_1 + U_2x_2) + pds\,(Ux + U_1x_1 + U_2x_2) =$$
$$= ds\,(Uy + U_1y_1 + U_2y_2)$$

Na $dp = qdx$ en $ds = dx\sqrt{1 + p^2}$ gesub^d^. te hebben verandert laatste in:

$\int dx \left(\sum_1^3 Ux\right) \sqrt{1+p^2} = \sum_1^3 \frac{U(y-px)\sqrt{1+p^2}}{q}$ en wederom gedifft[d]. in:

$$0 = \sum_1^3 \left[\frac{dU(y-px)\sqrt{1+p^2}}{q} - 2\,Uxdx\sqrt{1+p^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{U(y-px)\,pdx}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{1+p^2}}{q^2}\right]$$ of na verm[g].

met $\sqrt{1+p^2}$

$$\sum_1^3 \left[\frac{dU\,(y-px)\,(1+p^2)}{q} - 2\,Uxdx(1+p^2) + U\,(y-px)\right.$$
$$\left. pdx - \frac{U(y-px)}{q^2}dq\right] = 0 \;\ldots.\; (14)$$

Om (14) te integreeren behoeven wij slechts den vorm onder Σ te integreeren, en onderstellende dat zijn Integraal ware:

$$C = Z + \frac{U(y-px)(1+p^2)}{q}$$

zoude zijn differentiaal zijn:

$$0 = dZ + \frac{dU\,(y-px)\,(1+p^2)}{q} - Uxdx\,(1+p^2) +$$
$$2U\,(y-px)\,pdx - \frac{U(y-px)\,dq\,(1+p^2)}{q^2} \;\ldots..\; (15)$$

Vergelijken wij (14) met (15) dan volgt ter bepaling van Z

$$dZ = -\,Uxdx\,(1+p^2) - U\,(y-px)\,pdx = -\,Udx\,\times$$
$$\times\,(x+py) = -\,U(xdx + pydx) = -\,U(xdx + ydy) =$$
$$= -\,Uvdv$$

en daar $Uv = V$ is, wordt $dZ = -\,Vdv$ of $Z = -\int Vdv +$ $+ \,C$ dus wordt de Integraal van (14)

$$\sum_1^3 \left[\int Vdv + \frac{U(y-px)(1+p^2)}{q}\right] = 0$$

of na verm[g]. van beide leden met $\frac{q}{1+p^2}$ en voor U hare waarde $\frac{V}{v}$ genomen,

$$\frac{q}{1+p^2}\left(\int Vdv + \int V_1 dv_1 + \int V_2 dv_2\right) = \frac{V\,(y-px)}{v} +$$
$$+ \frac{V_1\,(y_1-px_1)}{v_1} + \frac{V_2\,(y_2-px_2)}{v_2} \ldots\ldots \quad (16)$$

een verg. geheel overeenkomende met (11).

Ziedaar dan wat wij er onder te verstaan hebben wanneer Euler in de Memoires van 1751 bl. 176 zegt: „Or j'ai aussi fait voir dans le IV. Vol. de nos Memoires (1748) qui ce principe ($\int$ Muds = minimum) fournit précisément les mêmes courbes, qu'on decourne par les principes ordinaires de la Mecanique, et que par ce principe on y parvient par un chemin plus court" [1]).

Het aangehaalde is in hoofdzaak de uitbreiding die Euler aan 't beginsel van Maupertuis gegeven heeft en wij bespeuren bij hem even als bij dezen, om nu eens het produkt van snelheid en weg, dan weder het produkt van Massa en vierkant der snelheid, arbeid of werking der krachten te noemen. Overigens had Euler — dit blijkt aan 't einde van zijne verhandeling „de Motu projectorum" — behalve het reeds vermelde nog een eenigszins andere opvatting van het beginsel der kl. werking dan Maupertuis. Bij Maupertuis is het: 't meest doen met de minste kracht en bij Euler is 't meer, dat de natuurkrachten minder verrichten dan zij werkelijk verrichten kunnen; naar zijn meening komt dit door de traagheid die in de lichamen aanwezig is (Jacobi vorlesungen über Dynamik bl. 43).

Doch eindigen wij de aanhalingen van Euler met de volgende opmerking: men kan gevoegelijk twee Leonhard Eulers bij deze kwestie onderscheiden; de een die in zijn

1) Euler toont elders ook nog aan dat uit deze berekening verg. (6) verkregen kan worden; dit is dan een zoogenaamd bewijs „à posteriori." Doch met het oog op zijn voorliefde voor metaphysische bespiegelingen is hem de oplossing „à priori" van veel meer belang.

reeds genoemde verh. „Methodus inveniendi etc." en door zijn „de Motu projectorum" (2e Aanhangsel van genoemde Methode) de zaken uit een mathematisch oogpunt beschouwt en de ander die in de verhandeling van de Berlijnsche Akademie deels uit persoonlijk belang, deels uit neiging de zaken uit een metaphysisch oogpunt beschouwt. Hoe beide met elkaar in overeenstemming te brengen zijn zal wel een raadselachtig vraagstuk blijven.

Voor wij tot de verdere uitbreiding van het beginsel in kwestie overgaan, komt het ons gepast voor een enkel woord in 't midden te brengen over een ander beginsel ook afkomstig van Maupertuis en door Euler herhaaldelijk met het beginsel der kleinste werking in verband gebracht. Wij stippen het in Hoofdst. I reeds aan en komen er nu op terug. Het is het beginsel van Evenwicht, dus geformuleerd: „Soit un système de corps qui pesent, ou qui sont tirés vers des centres par des forces qui agissent chacun sur chacun, comme une puissance n de leurs distances aux centres, pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque masse, par l'intensité de la force et par la puissance n + 1 de la distance au centre de la force (qu'on peut appeler la somme des Forces de repos) fasse un Maximum ou un Minimum."

Zijn dus in F, F_1 en F_2 krachten aanwezig die met de intensiteiten $f, f_1\ f_2$ van uit deze punten op de massa's $m, m_1\ m_2$ in M, M_1 en M_2 werken, zijn verder z, z_1 en z_2 de afstanden der krachtcentra tot de lichamen, dan moet, zal het geheele stelsel in evenwicht zijn, de verg. gelden:

$$mfz^{n+1} + m_1f_1z_1^{n+1} + m_2f_2z_2^{n+1} = \text{Max. of Min.}$$

$$\text{of } mfz^n dz + m_1f_1z_1^n dz_1 + m_2f_2z_2^n dz_2 = 0.$$

Maupertuis bewijst deze form. door zich de massae te denken verbonden met het vaste punt C door middel van onstoffelijke (!) stralen, en verder onder den invloed der krachten de massae zeer kleine verplaatsingen $M\mu$ loodr. op de voerstralen CM enz. te gunnen, doch zóó, dat daarbij CM, CM_1 CM_2 niet in lengte veranderen.

Euler, die in een en ander het zwakke gedeelte opmerkte, wijzigde bovenstaande form. in zooverre, dat hij M liet aantrekken door centrale krachte in V, V_1, V_2 volgens *willekeurige* functiën der afstanden v, v_1, v_2 en kwam, met een kleine verandering, tot de volgende voorwaarde van evenwicht bij centrale krachten werkende op stoffelijke punten

$$Vdv + V_1dv_1 + V_2dv_2 = \Sigma\,(Vdv) = 0,$$

waarin V het produkt van Massa en Versnelling voorstelt. Hierbij merkt hij — hoewel zijn bewerking van 't geval veel duidelijker is dan bij Maupertuis — bescheiden op, dat hij niet anders doet dan dezen naschrijven.

Hebben wij nu eenig gewicht te hechten aan dit beginsel van Evenwicht? Met het oog op den tegenwoordigen stand der wetenschap niets hoegenaamd; doch vergeten wij niet dat het valt in den tijd waarin men het nog niet lang geleden ontdekte beginsel der virtuëele snelheden òf bijzonderen aanhang schonk, òf het door andere trachtte te vervangen. Als een poging voor het laatste moet men dit beginsel van Evenwicht beschouwen.

Een en ander zal dadelijk in het oog springen, wanneer we terugkeeren tot de herkomst van $\Sigma\,(Vdv) = 0$.

Kiezen wij daartoe een der voorbeelden door Maupertuis aangegeven.

Zijn F, F_1 en F_2 de punten van aantrekking en M, M_1 en M_2 stoffelijke punten bevestigd aan onrekbare koorden, vereenigd in het beweegbare punt C (fig. 5.) Onder de werking der krachten moge C een zeer kleine verplaatsing $C\nu$ ondergaan:

De daartoe benoodigde krachten zijn dan

$$mfz^n \frac{CP}{CM}, \ m_1f_1z_1^n \frac{CP_1}{CM_1}, \ m_2f_2z_2^n \frac{CP_2}{CM_2}$$

en voor evenwicht van 't systeem, dus dat C niet van plaats verandere, moet

$$mfz^n \frac{CP}{CM} = m_1f_1z_1^n \frac{CP_1}{CM_1} + m_2f_2z_2^n \frac{CP_2}{CM_2}$$

Beschrijven wij uit de F's. de loodr. boogjes Kν enz., dan veranderen de verhoudingen $\frac{CP}{CM}$ in $\frac{CK}{C\nu}$ en de CK's = dz stellende, verkrijgt men

$$mfz^n dz + m_1f_1z_1^n dz_1 + m_2f_2z_2^n dz_2 = 0 \text{ overeenkomstig}$$
$$\Sigma(Vdv) = 0.$$

Uit een en ander is duidelijk dat we de verplaatsing Cν te beschouwen hebben als eene waarbij de verbindtenissen (lengte der koorden) dezelfde blijven en die dus als mogelijk gedacht niet als werkelijk bestaande voorgesteld wordt. (virtueele verplaatsing) De krachten toch houden elkaâr in evenwicht en werkelijke verplaatsing geschiedt dus niet In dien geest is dus dv de proj. der virtueele verplaatsing op de richting der krachten en Σ Vdv hare virtueele arbeid. Brengen wij dus de verg Σ (Vdv) = 0 in woorden dan hebben wij:

„Voor het evenwicht van centrale krachten is het noodzakelijk, dat de totale virtueele arbeid nul zij:"

Doch — zooals gezegd is — het beginsel heeft in de verte iets van 't beginsel der virtueele snelheid, maar groote waarde moeten wij, vooral met het oog op den tegenwoordigen stand der wetenschap, er evenmin aan hechten als aan het Beginsel der virt snelheid zelve. Nog merken wij op dat er tusschen beide beginselen dit onderscheid bestaat, dat hier sprake is van centrale — met den afstand veranderlijke — krachten, terwijl het laatst genoemde over Constante krachten spreekt. Doch wellicht heeft Maupertuis, na lezing van het beginsel der virt. snelheden, hieraan eenige uitbreiding willen geven en voor op gesteld dat, zoodra centrale krachten, die functiën der afstanden zijn, een punt in evenwicht trachten te houden, zij constante krachten worden, daar de afstanden van het in evenwicht te houden punt tot de krachtsmiddelpunten onveranderd blijven.

HOOFDSTUK III.

De beschouwingen van Lagrange over het Beginsel der kleinste werking.

De verdere uitbreiding die het „Beginsel der kleinste werking onderging voert ons tot Lagrange, die, vóór hij dat „der Virtuëele snelheden" als uitgangspunt zijner ontwikkelingen koos, aan het eerstgenoemde zooveel waarde hechtte dat hij het aan het hoofd stelde eener uitvoerige verhandeling, er voor 't eerst de bekende bewegingsvergelijkingen uit afleide en verschillende mechanische vraagstukken mede oploste [1]). Niet dat hij evenals Euler dezelfde metaphysische waarheid er in verborgen vond; hij laat zich daarover nergens uit; maar zooveel is zeker, dat hij, de beschouwingen van Euler opvattende en uitbreidende, er veel zoo niet het meest heeft toe bijgedragen om het beginsel vruchtbaar te doen zijn voor de theoretische mechanika.

Euler had in het Appendix — de Motu projectorum — op zijn: „Methodus inveniendi curvas etc." het ons bekende beginsel vermeld en toegelicht, Lagrange breidt dat beginsel in zuiver wiskunstigen geest volgens de isoperimetrische methode uit en stelt voorop:

1) Memoires de Turin Tome II p. 196.

„Wanneer eenige stoffelijke punten, die op elkander op de een of andere wijze werken, zich bovendien bewegen onder den invloed van centrale krachten uitgedrukt in functiën der afstanden van de stoffe- lijke punten tot de vaste middelpunten, dan geldt voor hunne beweging immer:

$$M \int u ds + M_1 \int u_1 ds + \text{enz.} = \text{Maximum of Minimum} \quad (17)$$

en door deze formule wordt de beweging der punten bepaald." Hierbij zijn u, u_1 enz. de snelheden waarmede de verschillende massae M hunne elementen ds doorloopen in den tijd dt.[1])

Hij geeft van dit „Principe General" geen bewijs, neemt het eenvoudig aan als een waarheid waaraan lichamen onder de voorwaarden als boven, voldoen, en zal hieruit de beweging der punten bepalen, of m. a. w. ook aan deze beweging het principe der kleinste werking ten grondslag leggen, doch zonder zich bij zijne toepassing daarover uit te laten, in welke gevallen het nu wel waarschijnlijk is dat (17) een max. of minim. is. Dit vooropstellen van een Beginsel zonder bewijs is volgens een methode door Lagrange soms toegepast, waarbij hij de ontwikkelingen en uitkomsten als bewijs van de juistheid der stelling aanneemt.

Wat den minimaaltoestand van (17) betreft, wij weten volgens het voorgaande, dat Euler hierin niet 't minst bezwaar zag, en eenvoudig beweerde dat elke gezonde metaphysika een minimum verlangde, behoudens enkele uitzonderingen.

Doch Lagrange niet. Het woord „moindre action" komt in de toepassingen van (17) volstrekt niet voor, en als we geen aanwijzingen hadden iu de „Mecanique analyti-

---

1) Euler was dit beginsel alleen bekend voor vaste middelpunten; voor onderlinge aantrekking, dus voor bewegelijke middelpunten er bij, kwam hem het vraagstuk te ingewikkeld voor, doch twijfelde hij niet dat ook daar 't beginsel van kracht was. Lagrange neemt behalve vaste middelpunten ook de onderl. aantrekking der stoffelijke punten op; in dien zin moet 't woord „uitbreiding" verstaan worden.

que," van hem zelven dat hij hiermede een toepassing bedoelde van het beginsel in kwestie, we zouden niet weten wat de schrijver met (17) voor had.

Het eerste vraagstuk dat hij door (17) oplost is het volgende:

De beweging te bepalen van een Massa M [1]) door zooveel vaste middelpunt aangetrokken als men maar wil met krachten P, Q, R enz. uitgedrukt in fnnctiën der afstanden p, q, r.

Daar er hier maar één massa is moet de beweging bepaald worden door

$$M \int uds = \text{Max. of minimum}$$

dat is: door middel hiervan moet x, y en z (de Coördin van M) in t uitgedrukt worden.

De oplossing van dit vraagstuk verdient echter eenige voorafgaande beschouwingen.

Lagrange laat onder den titel: „Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies" (Mem. de Turin tome II p. 173) een verhandeling voorafgaan over de isoperimetrische methode, waarin dus ook hij een onderzoek instelt naar integraalformulen die bij sommige krommen een max. bij andere een minim. zijn in vergelijking met alle andere krommen tusschen bepaalde punten. „Comme cette methode, zegt hij, exige que les mêmes quantités varient de deux manières differentes, pour ne pas cenfondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle caracteristique δ. Ainsi δZ exprimera une difference de Z qui ne sera pas le même que la dZ, mais qui sera cependant formée par les mêmes règles; de sorte qu'aiant une équation quelconque $dZ = m\delta x$, on pourra avoir également $\delta Z = m\delta x$ et ainsi des autres."

Hieruit leidt hij af dat, daar deze δ gevormd is naar dezelfde regelen als de differentiaal d, indien voor zekere kromme

1) Hier en elders wordt met Massa „stoffelijk punt" bedoeld,

$\int Z$ een max. of min. zijn moet $\partial \int Z = 0$ is, „ou ce qui en est équivalent $\int \partial Z = 0$." Verder: „on comprend aisément que $\partial dx = d\partial x$, en $\partial d^2x = d^2\partial x$.

Een gewichtige stap voorwaarts op den weg der Analyse — door Daniel Bernoulli vermoed maar nooit behandeld — wordt hier door Lagrange in de toepassing der variatie rekening op bovengenoemd mechanisch vraagstuk gedaan, een toepassing waardoor de behandeling een ruimer veld in 't algemeen geopend werd en waaraan de wetenschap de beginselen van Hamilton is verschuldigd.

Uit dit een en ander is 't duidelijk, dat hij overtuigd is, dat het punt onder alle krommen, die zal volgen, waarbij $M \int uds$ een max. of min. is. Dit nu heeft de grootste overeenkomst met te zeggen: het punt zal zich zóó bewegen dat daarbij de grootste of kleinste werking zal plaats vinden, wanneer maar aan $M \int uds$ den naam werking wordt gegeven. Doch Lagrange, zooals gezegd is, laat zich volgens zijn gewone strenge methode van behandeling althans hier ter plaatse, niet over dit metaphysisch beginsel uit. Voor hem is het minder hoofdzaak dat $\int Muds$ max. of min. is dan wel dat $\partial \int Muds = 0$

Keeren we nu tot de oplossing terug.

Alzoo $\int Muds = M \int uds =$ max. of min.

dus $\partial \int M\, uds = M \partial \int uds = 0$ of $\partial \int uds = \int \partial (uds) =$
$= \int (\partial u \times ds + u\partial ds) = \int (\partial u \times ds + ud\partial s) = 0$ .... (18)

Hierbij gebruik makende van het principe der levendige kracht met de uitbreiding door Daniel Bernouilli hieraan ge-

---

1) Het is uit de 3e editie der Mecanique Analytique duidelijk dat Lagrange later op andere voor hem juistere wijze (door het principe der virtueele snelheid) tot de bew. verg. gekomen, aan ons principe lang niet meer dat gewicht hechtte wat hij in 1760 er nog aan toekende, maar het enkel beschouwde als een resultaat van rekening gebouwd op de Dynamische Hoofdvergn.

geven [1]), dus in aanmerking nemende, dat het verschil der levendige kracht voor twee verschillende oogenblikken gelijk is aan de totale arbeid hierbij door de krachten P, Q, R enz. verricht, verkrijgt men de verg.

$$\frac{u^2}{z} + c - \int (Pdp + Qdq + Rdr + \text{enz.}) \text{ of } u\partial u =$$
$$- \partial \int (Pdp + Qdq + Rdr + \text{enz.}) = - \int (\partial P \times dp +$$
$$+ Pd\partial p + \partial Q \times dq + Q \times d\partial q + \partial R \times dr + Rd\partial r + \text{enz.})$$

of met partiëele Integratie der termen $Pd\partial p$ enz.

$$u\partial u = - \int (\partial P \times dp + \partial Q \times dq + \partial R \times dr + \ldots) -$$
$$- (P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots) \Big|_{gr}^{gr} + \int (dP \times \partial p + dQ \times$$
$$\times \partial q + dR \times \partial r + \ldots) = \int (dP \times \partial p - \partial P \times dp + dQ \times$$
$$\times \partial q - \partial Q \times dq + dR \times \partial r - \partial R \times dr + \ldots) - (P\partial p + Q\partial q +$$
$$+ R\partial r + \ldots) \Big|_{gr}^{gr} \ldots (19)$$

Is nu $P = F(p)$, $Q = \Phi(q)$, $R = \Psi(r)$ dus.

$$\frac{dP}{dp} = F'(p), \frac{dQ}{dq} = \Phi'(q), \frac{dR}{dr} = \Psi'(r)$$
$$\frac{\partial P}{\partial p} = F'(p), \frac{\partial Q}{\partial q} = \Phi'(q), \frac{\partial R}{\partial r} = \Psi'(r)$$

of $\frac{dP}{dp} = \frac{\partial P}{\partial p}$ enz. dus $dP \times \partial p = \partial P \times dp$, $dQ \times \partial q = \partial Q \times$ $\times dq$, $dR \times \partial r = \partial R \times dr$ enz. dan wordt, voorloopig onderstellende dat alleen bij 't begin der beweging gevarieerde en niet gevarieerde banen samenvielen, dus hiervoor $\partial p = \partial q = \partial r = 0$ is, de verg. (19) eenvoudig:

$$u\partial u = -(P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots)$$
$$\text{of } \partial u = - \frac{P}{u}\partial p - \frac{Q}{u}\partial q - \frac{R}{u}\partial r \text{ en}$$

---

1) Woordelijk zegt Bernouilli: (Mem. de Berlin 1748 bl. 363) „de sorte que la somme des forces vives acquises dépend encore uniquement de la distance initiëlle et de la distance finale des corps, ou des centres de gravitation mobiles, tout comme pour les centres de gravitation immobiles.''

$$\partial u \times ds = -P \times \frac{ds}{u} \times \partial p - Q \times \frac{ds}{u} \times \partial q - R \times \frac{ds}{u} \times \partial q - \ldots$$

$$= - Pdt \times \partial p - Qdt \times \partial q - Rdt \times \partial r - \ldots \quad (20)$$

daar $udt = ds$ dus $\frac{ds}{u} = dt$.

Door substitutie van (20) in (18) verkrijgen we:

$$\int (u \times \partial ds - Pdt \times \partial p - Qdt \times \partial q - Rdt \times \partial r - \ldots) = 0 \ (21).$$

Om nu tot de voorwaarden te komen waarbij we x, y en z (de coördin van M) in t kunnen uitdrukken m. a. w. de beweging van M op elk oogenblik te bepalen, moeten x, y en z in (21) worden ingevoerd. Daar hierin echter niet anders dan variatiën der afstanden gebruikt worden, kunnen we x, y en z niet anders invoeren dan door ∂x, ∂y en ∂z.

Hiertoe dient ons $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ of

$$\partial ds = \frac{dx \times \partial dx + dy \times \partial dy + dz \times \partial dz}{ds} =$$

$$= \frac{dx \times d\partial x + dy \times d\partial y + dz \times d\partial z}{ds} \text{ of}$$

$$u\partial ds = \frac{udx}{ds} \times d\partial x + \frac{udy}{ds} \times d\partial y + \frac{udz}{ds} \times d\partial z \ \ldots (22)$$

Om verder de Coördin. der vaste middelpunten niet in te voeren stellen we $p = f(xyz)$, $q = \varphi(xyz)$, $r = \psi(xyz)$ of

$$\left.\begin{aligned} \partial p &= L\partial x + l\partial y + \lambda\partial z \\ \partial q &= M\partial x + m\partial y + \mu\partial z \\ \partial r &= N\partial x + n\partial y + \nu\partial z \end{aligned}\right\} \ldots (23)$$

waarin L, l, λ enz. de bekende differentiaal quotiënten van f, φ en ψ zijn ten opzichte van x, y en z.

Worden nu (23) respectivelijk met P, Q en R vermenig[d]. deze verg. opgesteld en kortheidshalve.

$$PL + QM + RN = \Pi$$

$$Pl + Qm + Rn = \pi$$

$$P\lambda + Q\mu + R\nu = \chi$$

gesteld, dan is $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots = \Pi\partial x + \pi\partial y + \chi\partial z$ (24)

Substitueerende (24) en (22) in (21) dan verkrijgt men:

$$\int \left(\frac{udx}{ds} \times d\delta x + \frac{udy}{ds} \times d\delta y + \frac{udz}{ds} \times d\delta z - \Pi\delta x \times dt - \right.$$
$$\left. - \pi\delta y \times dt - \chi\delta z \times dt\right) = 0$$

of bij partiëele Integratie der drie eerste termen:

$$\left(\frac{udx}{ds} \times \delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds} \times \delta z\right)\Big|_{gr}^{gr} - \left[\int \left(d\,\frac{udx}{ds} + \Pi dt\right)\right.$$
$$\left. \times\ \delta x + \left(d\,\frac{udy}{ds} + \pi dt\right)\delta y + \left(d\,\frac{udz}{ds} + \chi dt\right)\delta z\right] = 0 \ldots . (25)$$

In de onderstelling nu, dat we de beweging eenigzins beperken en stellen: „een punt beweegt zich van een bepaald punt naar een ander onder de werking van aantrekkende krachten" enz., dus dat bij begin en einde gevarieerde en niet gevarieerde baan samenvallen, dan heeft de geintegreerde uitdrukking betrekking op begin en eindtoestand der beweging, voor welke de variatiën der coördinaten nul zijn. Hierdoor wordt (25):

$$\int \left(d\,\frac{udx}{ds} + \Pi dt\right)\delta x + \int \left(d\,\frac{udy}{ds} + \pi dt\right)\delta y +$$
$$+ \int \left(d\,\frac{udz}{ds} + \chi dt\right)\delta z = 0 \ . \ \ldots (26)$$

Daar in (26) geen der coördin. variatiën een bepaalde waarde heeft, moet afzonderlijk:

$$\left.\begin{array}{c} d\,\frac{udx}{ds} + \Pi dt = 0,\ d\,\frac{udy}{ds} + \pi dt = 0 \\ d\,\frac{udz}{ds} + \chi dt = 0 \end{array}\right\} (27)$$

zijn, en deze zijn de voorwaarden waardoor x, y en z in t kunnen worden uitgedrukt, dus de beweging van M bepaald wordt. Men ziet hieruit hoe door (18), d. i. het Beginsel der kleinste werking, een dynamisch vraagstuk opgelost kan worden.

In den vorm (27) vinden wij de verg. bij Lagrange, doch 't komt ons niet ongepast voor ze ter verduidelijking te schrijven in een vorm meer overeenkomstig met de hedendaags gebruikte.

Nemen we daartoe bijv. 3 vaste middelpunten aan; één als oorsprong van coördinaten en de andere bepaald door $a_2\, b_2 c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$, dan is dus:

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ of } \partial p = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{p}$$

$$q^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 \text{ of}$$

$$\partial q = \frac{(x - a_2)\,\partial x + (y - b_2)\,\partial y + (z - c_2)\,\partial z}{q}$$

$$\partial r = \frac{(x - a_3)\,\partial x + (y - b_3)\,\partial y + (z - c_3)\,\partial z.}{r}$$

$$L = \frac{x}{p} = \cos\alpha_1,\ l = \frac{y}{p} = \cos\beta_1,\ \lambda = \frac{z}{p} = \cos\gamma_1$$

$$M = \frac{x-a_2}{q} = \cos\alpha_2,\ m = \frac{y-b_2}{q} = \cos\beta_2,\ \mu = \frac{z-c_2}{q} = \cos\gamma_2$$

$$N = \frac{x-a_3}{r} = \cos\alpha_3,\ n = \frac{y-b_3}{r} = \cos\beta_3,\ \nu = \frac{z-c_3}{r} = \cos\gamma_3$$

$$\text{of } \Pi = P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3$$

$$\pi = P\cos\beta_1 + P\cos\beta_2 + P\cos\beta_3$$

$$\chi = P\cos\gamma_1 + P\cos\gamma_2 + P\cos\gamma_3$$

Zoodat Π, π en χ de componenten zijn der aantrekkende krachten evenwijdig aan de coördinaatassen. Noemen wij deze meer overeenkomstig het hedendaagsch gebruik X, Y en Z dan veranderen (27) na substitutie van $\frac{1}{dt}$ voor $\frac{u}{ds}$ en deeling door dt in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

De coefficienten der massa, reeds weggelaten bij de formule der levendige kracht, doen ons ook hier deze ontbreken.

Zijn dus de functiën van p q enz. gegeven, waardoor P, Q en R uitgedrukt worden, dan zijn ook X, Y en Z gegeven en het probleem tot Inregratie gebracht.

Is M gedwongen in zijn beweging op een oppervlak gegeven door $Z = f(xy)$ te blijven — komt er dus een conditie bij — dan moet dit in (26) worden ingevoerd. De verg. (27) veranderen hierdoor eenigszins van gedaante. Immers uit $Z = f(xy)$ of $\partial z = p\partial x + q\partial y$ met de bepaling dat de coeff. van ∂y en ∂y nul moeten worden, verkrijgt men in plaats van (27):

$$\left.\begin{aligned} d\,\frac{udx}{ds} + \Pi dt + \left[d\,\frac{udz}{ds} + \chi dt\right] p = 0 \\ d\,\frac{udy}{ds} + \pi dt + \left[d\,\frac{udz}{ds} + \chi dt\right] q = 0 \end{aligned}\right\} (28)$$

Hierbij gevoegd $dz = pdx + qdy$ lossen het bewegingsprobleem op. We zullen ook deze in meer bekenden vorm schrijven.

Zooals bekend is heeft Lagrange de bew. verg. van een stel stoffelijke punten onder uitwendige krachten, onderlinge aantrekkingen en aan voorwaarden gebonden, later door invoering der onbepaalde vermenigvuldigers in een geheel anderen vorm gegeven als oogenschijnlijk (28) vertoonen, doch het is niet moeielijk in te zien, dat in 't wezen der zaak beide niet verschillen. We zullen daartoe de latere vormen tot (28) herleiden.

In dat geval dan zijn voor M, uit het oogpunt van eenvoudige optelling der versnellingen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Pi + \lambda\,\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \pi + \lambda\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \chi + \lambda\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

waarin Π, π en χ de componenten der aantrekkende versnellingen parallel aan de assen zijn, en $F(xyz) = 0$ de verg. van het oppervlak, waarop M blijven moet.

We hebben dus na vermenigg. met dt en stellende $\frac{1}{dt} = \frac{u}{ds}$

$$d\frac{udx}{ds} + \Pi dt + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}dt = 0$$

$$d\frac{udy}{ds} + \pi dt + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}dt = 0$$

$$d\frac{udz}{ds} + \chi dt + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}dt = 0$$

Uit de laatste volgt

$$\lambda = -\frac{d\frac{udz}{ds} + \chi dt}{\frac{\partial F}{\partial z}dt}$$

en deze waarde invoerende in de beide eerste, verkrijgen we:

$$\left.\begin{aligned} d\frac{udx}{ds} + \Pi dt - \frac{d\frac{udz}{ds} + \chi dt}{\frac{\partial F}{\partial z}} \times \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ d\frac{udy}{ds} + \pi dt - \frac{d\frac{udz}{ds} + \chi dt}{\frac{\partial F}{dz}} \times \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} (29)$$

Is $F(xyz) = 0$ in den expliciten vorm $z = f(xy)$ gegeven

dan is $\frac{\partial f}{\partial x} = p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

waardoor (29) in (28) overgaan.

Doch een andere opmerking valt hierbij te maken.

Lagrange leidde deze verg. met bewegingsbeperkingen af uit een beginsel aangenomen voor bewegingen zonder die beperkingen. Het valt nu niet zoo dadelijk in te zien, dat ook daar nog het Beginsel der kleinste werking van kracht is. Immers de kromme die M onder (18) zal volgen moet de eigenschap bezitten dat van alle krommen deze verg. max. of min. zij, en nu kan 't zeer goed voorkomen dat de be-

bepaald kromme, waarlangs M gedwongen is zich te bewegen, juist deze is, waar (18) noch max. noch min. is. Zonder meer mogen we dus geen substitutiën doen in verg. die afgeleid zijn voor ongedwongen beweging, of voor bewegingen waar die beperkingen vooraf niet zijn aangenomen.

Lagrange wijst er op dat de algemeenheid van voorgaande oplossing niet wordt te kort gedaan door de onderstelling dat de krachten P, Q en R slechts functiën respectivelijk van p, q en r zijn, maar dat het vraagstuk opgelost blijft ook voor alle mogelijke versnellende middelpuntskrachten. Het eenigste toch waarbij het te pas kwam om over de wijze, waarop de krachten werken, te spreken was om de uitdrukking:

$$\int (\delta P \times \delta p - \delta P \times dp + \delta Q \times \delta q - \delta Q \times dq + dR \times \delta r - \\ - \delta R \times dr)$$

te verdrijven. Dit nu kan geschieden door eenvoudig P, Q en R zoodanig te nemen, dat de uitdrukking onder $\int$ nul zij.

Zijn dus, om nog algemeener te zijn, P, Q en R zoowel functiën van p als van q en r, zoodat

$$dP = Adp + Bdq + Cdr,\ dQ = Ddp + Edq + Tdr$$

en $dR = Gdp + Hdq + Idr,\ \delta P = A\delta p + B\delta q + C\delta r$ en

$$\delta Q = D\delta p + E\delta q + F\delta r,\ \delta R = G\delta p + H\delta q + I\delta r$$

dan wordt bovenstaande uitdrukking nul als

$$B - D = C - G = F - H = 0 \text{ of } \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial p},\ \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial p},\ \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial q}$$

of de uitdrukking $Pdp + Qdq + Rdr$ moet een volledige differentiaal zijn. Zijn dus de krachten zóó, dat

$$Pdp + Qdq + Rdr = dF(pqr)$$

is, dan kan het probleem volgens het voorgaande opgelost worden.

Ofschoon dit niet door Lagrange wordt aangegeven, is 't toch duidelijk dat alsdan

$$P = \frac{\partial F}{\partial p},\quad Q = \frac{\partial F}{\partial q},\quad R = \frac{\partial F}{\partial r}$$

of de krachten moeten de part. dif. quotienten zijn eener functie van p q en r, later door Hamilton met den naam van „Krachtfunctie'' bestempeld, en die voor deze oplossingsmethode alleen de coördin. mag bevatten en niets anders.

HOOFDSTUK IV.

Het Beginsel der kleinste werking naar de opvatting van Jacobi.

Met Lagrange, in de Memoires de Turin, begon zooals wij zagen de zuiver analytische behandeling van het Beginsel der kleinste werking. Geen mystiek vindt men in zijne beschouwingen; ze zijn niets anders dan mathematische formulen. De waarheid zijner beginselen wordt bevestigd door de juiste resultaten, ook weer door louter algebraische bewerkingen verkregen. Van zijne grondwaarheden dogma's te maken laat hij aan den lezer over. Zij die na hem zijn gekomen hebben hem, wat de analytische behandeling betreft, grootendeels gevolgd echter met die wijzigingen, die door den loop der tijden de ontwikkeling der wetenschap meêbragt.

Zoo stelt deze zich tegenwoordig het grondvraagstuk aldus:

„Er zij een stelsel stoffelijke punten elkaar wederkeerig afstootende en aantrekkende, terwijl er bovendien nog voorwaarden zijn, waaraan die punten bij hunne bewegingen moeten voldoen; vrage hoe zullen die punten zich bewegen?" Zonder nu een theorema of math. formule voor op te stellen en de juistheid daarvan à posteriori te bewijzen, tracht men tegenwoordig dit vraagstuk door alle mogelijke middelen, die de Analyse aan de hand geeft, op te lossen en de uitkomsten, door rekening hierbij verkregen, worden „Beginselen" genoemd.

Het bovenstaande vraagstuk bevat in zijne oplossing de geheele Mechanika; Statika en Dynamika. Immers het eerste een bizonder geval van 't laatste zijnde zal de beschouwing van het evenwicht der punten als een bizonder geval in de oplossing van de beweging der punten begrepen zijn. Doch men zoude tot geen oplossing kunnen komen, ware 't niet dat hierbij werd aangenomen, dat de voorwaarden of bewegingsbeperkingen, zoodra ze in verg. gebracht kunnen worden, door krachten te vervangen zijn. In de oplossing van dit vraagstuk of in vereenvoudigingen hiervan, liggen de tegenwoordige „Beginselen" besloten en wel verre van ze dus als machtspreuken voorop te stellen, zijn die van den tegenwoordigen tijd bewezen waarheden.

Zooals bekend is heeft L. Poinsot in zijne beroemde verhandeling: „Theorie generale de l'equilibre et du mouvement des systèmes" [1]) dit vraagstuk op de hem eigen duidelijke en strenge wijze opgelost. Hij komt hierbij tot de verg.:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \ldots \lambda_p \frac{\partial L_p}{\partial x_1} \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y^1} + \ldots \lambda_p \frac{\partial L_p}{\partial y_1} \\ m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_2} + \ldots \lambda_p \frac{\partial L_p}{\partial z_1} \end{aligned}\right\} (30)$$

en zoo voor alle n punten 3 dergelijke, waarbij L het functie-teeken is voor

$$\left.\begin{aligned} L_1 (x_1\, y_1\, z_1\;\; x_2\, y_2\, z_2 \ldots\ldots x_n\, y_n\, z_n\, t) &= 0 \\ L_2 (x_1\, y_1\, z_1\;\; x_2\, y_2\, z_2 \ldots\ldots x_n\, y_n\, z_n\, t) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ L_p (x_1\, y_1\, z_1\;\; x_2\, y_2\, z_2 \ldots\ldots x_n\, y_n\, z_n\, t) &= 0 \end{aligned}\right\} (31)$$

of de p voorwaarden of bewegingsbeperkingen, waaraan

1) Deze verhandeling is te vinden in de bijgevoegde Memoires des „Elements de Statique 11e edition."

de punten bij hun beweging gedwongen zijn te voldoen; X_1 Y_1 Z_1 zijn de componenten van de totale aantrekkende (afstootende) of op andere manier uitwendig aangebrachte kracht, afkomstig van al de n—1 overige punten en werkzaam op één punt, terwijl $p < 3n$. is.

Hoewel mechanisch (30) en (31) het probleem volkomen oplossen, is de Analyse nog lang zoo ver niet om alle x, y en z in t en de noodige 6 n constanten uit te drukken, en alleen voor speciale gevallen, wordt het integreeren van (30) een stap nader gebracht. Doch ook dan is de oplossing nog aan groote moeielijkheden onderworpen.

De verg. (31) kunnen zoo als bekend is verschillende beteekenissen hebben: zij kunnen vooreerst uitdrukken, dat sommige der punten in rust blijven, zoodat de beweging dan is die van een stel stoffelijke punten om vaste middelpunten; in dit geval veranderen sommige van (31) in:

$$(x_\mu - x_\nu)_2 + (y_\mu - y_\nu)_2 + (z_\mu - z_\nu)_2 = \text{constant};$$

of dat sommige op al of niet beweegbare oppervlakken moeten blijven; dan worden sommige van (31)

$$L_k\,(x_k\, y_k\, z_k\, t) = 0 \quad \text{of} \quad L_k\,(x_k\, y_k\, z_k) = 0;$$

of dat enkele punten een beweging bezitten geheel onafhankelijk van de overige punten, hoewel zij toch aantrekkend of afstootend blijven werken op deze. In dit laatste geval heeft er dus actie plaats zonder reactie welke schijnbare tegenstrijdigheid volgens Poinsot wordt opgeheven door aan te nemen, dat deze zich onafhankelijk bewegende punten als beweegbare middelpunten worden aangezien met oneindig groote massa in vergelijking der overige.

Komen van deze voor, zoo vindt men onder (31) verg. van den vorm:

$$x_\lambda = f(t), \quad y_\lambda = \varphi(t), \quad z_\lambda = \psi(t).$$

Gaan we nu tot vereenvoudigingen van bovenstaand vraagstuk over.

Vooreerst onderstellen we, dat wij met een stelsel te doen hebben, waar alleen van aantrekkingen (afstootingen) sprake is, en waar geen der punten zich bovendien behoeven te bewegen op al of niet beweegbare oppervlakken. Wij hebben dus een stelsel, waarin vaste middelpunten kunnen voorkomen, of middelpunten, die met de overige punten bewegingen, van deze laatste afhankelijk, kunnen uitvoeren; ja zelfs kunnen er middelpunten in gevonden worden met eigen beweging.

In al deze gevallen kunnen (30) gebracht worden tot 3n verg. van den vorm:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_1} \quad m \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_1} \quad (32)$$

Stippen we even aan hoe men gewoonlijk tot (32) komt. Veronderstellende, dat alleen aantrekkingen de bewegingen van het stelsel punten bepalen, worden de bew. verg. voor één punt $(m_1\, x_1\, y_1\, z_1)$

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y \quad m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z$$

en zoo 3n verg.

Beschouwen we nu twee der punten p_1 en p_2, waar tusschen de wederkeerige kracht R_1 werkt, en make de verbindingslijn r beider punten, de hoeken α, β en γ met de coördin. assen, dan werken op p_1 de krachten:

$$R_1 \cos\alpha, \quad R_1 \cos\beta, \quad R_1 \cos\gamma$$

componentswijze geschreven, en op p_2 evenzoo

$$R_1 \cos\alpha, \; - R_1 \cos\beta, \; - R_1 \cos\gamma.$$

Maar zooals Lagrange aangetoond heeft volgt uit

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2}{r} = \cos\alpha, \; \frac{\partial r}{\partial x_2} = - \frac{x_1 - x_2}{r} = - \cos\alpha$$

$$\frac{\partial r}{\partial y_1} = \frac{y_1 - y_2}{r} = \cos\beta \text{ enz.}$$

Zoodat op p_1 b. v. de krachten $R\frac{\partial r}{\partial x_1}$, $R\frac{\partial r}{\partial y_1}$, $R\frac{\partial r}{\partial z_1}$ werken.

Dit alleen met betrekking tot p_2.

Onderstellen we nu, dat de aantrekkende kracht tusschen p_1 en p_2 is functie van den afstand beider, en voeren we dan een functie u_1 van $x_1\, y_1\, z_1\; x_2\, y_2\, z_2$ in, zoodanig dat

$$\frac{du_1}{dr} = R_1 \text{ dus } u_1 = \int R_1\, dr$$

dan is $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1}{dr} \times \frac{\partial r}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{du_1}{dr} \times \frac{\partial r}{\partial y_1}$, $\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{du_1}{dr} \times \frac{\partial r}{\partial z_1}$

$$\text{dus } \frac{\partial u_1}{dx_1} = R_1 \cos\alpha_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = R_1 \cos\beta_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = R_1 \cos\gamma_1$$

Deze nu zijn de gedeeltelijke krachtscomponenten van één punt, langs de assen. Verbinden wij nu p_1 met alle andere punten zoo krijgen wij overeenkomstige

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = R_2 \cos\alpha_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = R_2 \cos\beta_2,\ \frac{\partial u_3}{\partial z_3} = R_3 \cos\gamma_3 \text{ enz.}$$

Aldus zullen de totale krachts componenten op p_1, langs de assen, voorgesteld door $X_1\; Y_1\; Z_1$, gegeven worden door

$$\frac{\partial(u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial(u_1 + u_2 + \dots u_n)}{\partial y_1}, \frac{\partial(u_1 + u_2 + \dots u_n)}{\partial z_2}$$

Deze u_1 zijn functien der cördin. der paarswijze verbondene punten.

Voeren we nu een functie U in van alle coördin, door *alle* u_1 op te tellen, waarin dus ook voorkomen de functiën u tusschen p_3 en p_4 b. v., dan zullen we

$$\frac{\partial(u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n)}{\partial x_1}$$

mogen vervangen door $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, want alle functiën u, die niet de coördin. van p_1 bevatten, zooals bijv. de u van p_3 en p_4, leveren toch, bij part. dif. naar x_1, nul.

Op dergelijke manier komen we tot $m_1 \frac{d^2u_1}{dt_2} = \frac{\partial U}{\partial x_1}$ enz.

De grootheid U heet naar Hamilton *krachtfunctie.*

Evenwel door deze vormverandering, is het vraagstuk niet opgelost. Alleen door de vereenvoudiging voort te zetten komen we de integratie van (32) een stap nader en daardoor met een tot de Beginselen der tegenwoordige mechanika. Als van zelf volgt hieruit dus, dat „Beginsel", in de tegenwoordige beteekenis eenvoudig is weêr te geven door Integraal van de differentiaal vergelijkingen der beweging en zal dus elke Integraal van (32) of samenstellingen van Integralen van deze een Beginsel opleveren.

Gaan we nu met vereenvoudigen voort en onderstellen we, dat wij met een stelsel punten te doen hebben, die alleen zich door *onderlinge* aantrekking bewegen — bijv. ons planetenstelsel — dan zijn weer (32) de dif. verg. der beweging, echter is hier U een functie, uitsluitend de coördinaten der punten bevattende.

De $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ stellen dus weer zooals boven de Comp. X der krachten voor op één punt werkende, zoodat weer de dif. verg. zijn — 3n in getal —:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 \quad m_1 \frac{d^2y_1}{d^2t} = Y_1 \quad m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 \ldots \quad (32)$$

waartoe alweder (30) voeren, wanneer (31) niet bestaan.

Hoewel nu bij bekende aantrekking — bijv. volgens de wet van Newton — de krachtfunctie bekend wordt $\left(\Sigma \frac{Mm}{r}\right)$, en dus (32) op 't integreeren na, de beweging volkomen bepalen, is juist dat integreeren het groote struikelblok.

De vormen (32), door Lagrange gegeven, en dus de dif. verg. der beweging voorstellende in de part. dif. quotienten eener enkele functie, kunnen op geen *algemeene* wijze geïntegreerd worden en verder dan zeven *algemeene* Integralen kan men het niet brengen.

Om nu tot de zeven algemeene Integralen te komen, en dus ook tot de Beginselen der Mechanika, worden (32) op bekende wijze behandeld. Wij komen dan tot het Beginsel 1⁰ van het behoud der levendige kracht (één Integraal) 2⁰ van het behoud der beweging van het Massa-middelpunt (drie Integralen) 3⁰. dat der Sektoren (drie Integralen).

Met deze drie Beginselen waarbij soms nog een vierde te voegen is — namelijk dat van den laatsten Multiplicator, ook een resultaat van min of meer samengestelde berekening — worden de bewegingsproblemen opgelost.

Hoe moeten wij nu uit dit oogpunt het Beginsel in kwestie beschouwen?

Beginnen wij daartoe met de behandeling van Jacobi. Volgens hem moet het beginsel der kleinste werking dus worden uitgesproken.

„Hebben wij een stelsel punten, dat zich onder de werking van onderlinge aantrekkingen of andere voorwaarden, zoo beweegt, dat daarbij het beginsel der levendige kracht geldt, dan zal het stelsel onder die omstandigheden zekere baan afleggen. Nemen wij nu op de baan van één der punten twee bepaalde plaatsen, dan kunnen wij tusschen die twee plaatsen, behalve de werkelijke baan, oneindig veel gevarieerde banen denken. Nu zal het stelsel zich zoo bewegen, dat voor de werkelijke banen der verschillende punten

$$\int \sqrt{2(U+h)\Sigma m ds^2} = \text{Minimum} \;\ldots\ldots\; (33)$$

is, en dus

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)\Sigma m ds^2} = 0.\text{''} \;\ldots\ldots\; (34)$$

De grootheid $2(U+h)$ wordt hierbij in gevoerd door middel van het Beginsel der levendige kracht.

De verg.

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)\Sigma m ds_2} = 0$$

levert bij uitwerking de bew. verg der punten, die nu nog geïntegreerd moeten worden om het vraagstuk opgelost te hebben. Dit alles is dus door middel van het Beginsel der kleinste werking geschied.

Om een en ander te bewijzen elimineert Jacobi uit $\int \Sigma mvds$ de grootheid v, die den tijd bevat, door middel van het beginsel der levendige kracht en reduceert alles op ruimte elementen. Hierdoor wordt dus bewezen, dat ons beginsel geheel afhankelijk is van dat der levendige kracht. Hebben wij nu aangetoond dat in dat geval.

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)\Sigma mds^2} = 0 \quad \ldots . \; (34)$$

de dyn. dif. verg. bevat, dan blijft, zooals gezegd, is nog het integreeren dezer laatste over, waaruit alweder dadelijk volgt dat het op den naam „Beginsel", in de tegenwoordige beteekenis des woords, geen aanspraak mag maken. Bovendien kunnen wij langs den gewonen weg vrij wat gemakkelijker tot de dyn. dif verg. komen dan door dit beginsel.

Om nu uit (34) deze verg. te verkrijgt handelt Jacobi aldus: $\int \Sigma mvds$ moet een Minimum zijn volgens de vroegere uitdrukking. De Eliminatie van v geschiedt door voor v, $\frac{ds}{dt}$ te stellen, waardoor

$$\int \Sigma mvds = \int \Sigma \frac{mds^2}{dt}.$$

Maar volgens het beginsel der levendige kracht is:

$$\tfrac{1}{2}\, \Sigma mv^2 = U + h \; \ldots \; (35)$$

$$\text{dus } \Sigma \frac{mds^2}{dt^2} = 2\,(U+h)$$

$$\text{of } \frac{1}{dt} = \sqrt{\frac{2\,(U+h)}{\Sigma\, mds^2}}$$

waaruit $\int \Sigma\, mvds = \int \sqrt{2(U+h)\Sigma mds^2}$.

Denken we ons nu — om de herleiding op ruimte elementen volledig te maken — alle coördin. der punten in één b. v. x_1 der coördinaten uitgedrukt [1]), dan verandert

Σmds^2 in $\Sigma m \left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 dx_1{}^2$ waaruit

$$\int \Sigma mvds = \int \sqrt{2(U+h)\Sigma m\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2} dx_1$$

Nu moet naar het zooeven opgestelde beginsel

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)\Sigma m\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2} dx_1 = 0 \;.\;.. \;(36)$$

en in deze verg. de dyn. dif verg. voor de beweging der punten, waarbij het beginsel der levendige kracht geldt, begrepen zijn.

Daar $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ is wordt (36).

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m \left\{\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2\right\}} dx_1 = 0$$

of, daar x_1 de onafh. verand. is, $\frac{dx}{dx_1} = x'$ enz. gesteld,

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m \{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\}} dx_1 = 0 \;(37)$$

kortheidshalve $\quad 2(U+h) = A.$

$\Sigma m \{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\} = B$ en $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = P$

stellende, verandert (37) in

$$\delta \int Pdx_1 = 0. \;\ldots\; (38)$$

Nemen we nu aan, dat deze x_1 voor gevarieerde en niet gevarieerde baan dezelfde is, dan is $\delta x_1 = 0$ en dus na de regelen der variatie rekening — waarover later uitvoeriger in Hoofdst. V —

$$\delta \int Pdx_1 = \int \delta P \times dx_1 = 0.$$

Nu is $\int \delta P \times dx_1 = \int \Sigma \left\{\frac{\partial P}{\partial x}\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z + \right.$

$$\left. + \frac{\partial P}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial P}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial P}{\partial z'}\delta z'\right\} dx_1 \;\ldots..\; (39)$$

---

1) Zulks geschiedt dus: denken we ons alle coördin. in t uitgedrukt, dan elimineeren we tusschen elke twee den tijd; hierna kunnen alle coördin. door één worden uitgedrukt, die dan als onafh. verand. dienst doet.

Maar $\int \frac{\partial P}{\partial x'} \delta x' \times dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x'} \delta \frac{dx}{dx_1} \times dx_1 =$

$$= \int \frac{\partial P}{\partial x'} \times \frac{d\delta x}{dx_1} \times dx_1 = \frac{\partial P}{\partial x'} \times \delta x \Big|_{gr}^{gr} - \int \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'}}{dx_1} \delta x \, dx_1$$

na partiëele integratie.

Daar voor gevarieerde en niet gevarieerde baan de grenzen samenvallen, is dus de geïntegreerde term nul.

Dus $\int \frac{\partial P}{\partial x'} \delta x' \times dx_1 = \int \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'}}{dx_1} \delta x \, dx_1 \ \ldots \ (40)$

Evenzoo voor y en z.

Verg. (40) in (39) gesubstitueerd levert:

$$\delta \int P dx_1 = \int \Sigma \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'}}{dx_1} \right) \delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx_1} \right) \delta y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial z'}}{dx_1} \right) \delta z \right\} dx_1 \ \ldots\ldots \ (41)$$

Maar $P = \sqrt{AB}$ $A = 2(U + h)$ $B = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ dus

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \times \frac{\partial A}{\partial x} = \sqrt{\frac{B}{A}} \times \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{B}} \times \frac{\partial B}{\partial x'} = \sqrt{\frac{A}{B}} \times m x'$$

dus $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\left(m \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{dx}{dx'}\right)}{dx_1} \ldots (42)$

Maar $\sqrt{\frac{A}{B}} dx_1 = dt$, zoodat (42) verandert in

$$\sqrt{\frac{B}{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial u} - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \ \ldots . \ (43)$$

Dergelijke formulen gelden voor y en z.

Verg. (43) in (41) geeft in verband met (38)

$$\Sigma \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial u} - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\,\frac{duZ}{dt^2}\right)\delta z \right\} = 0 \;\ldots.\; (44)$$

Daar nu geen der $\delta x, \delta y, \partial z$ nul zijn — verg. (44) is bovendien een gevolg van het beginsel van d'Alembest —, zoo is

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial u},\quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},\quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

en zoo 3n verg., die de beweging van het stelsel bepalen, wel te verstaan, na integratie. Dit moest worden aangetoond.

Nu stelt (34) de beweging voor van het stelsel tusschen de twee bepaalde grenzen, doch, doordat na de noodige herleidingen geen integralen, maar steeds nog dif verg. verkregen worden, blijkt daaruit — zooals wij reeds opmerkten — dat het Beginsel der kleinste werking niets anders is dan een beknopte voorstelling eener begrensde beweging.

Bovendien, (34) is nog niet eens het eigenlijke beginsel; zij leert niets anders dan dat de variatie van

$\int \Sigma\, mvds \;\ldots.\; (45)$ nul is.

Doch geheel iets anders is 't of de uitdrukking (33) een Minimum is. Tot dusverre spreekt de *rekening* van geen Minimum, en men is even gerechtigd een Maximum als een Constante aan te nemen. Bij een beweging dus onder in- of- uitwendige krachten, waarbij het Beginsel der levendige kracht geldt, is de uitdrukking $\int \Sigma\, mvds$ max. min of Constant. Een Beginsel in de hedendaagsche beteekenis van 't woord valt hierin niet te zoeken.

Door de wijze waarop de grenzen der beweging zijn ingevoerd, is 't duidelijk, dat deze weinig tot de zaak afdoen, daar ze bij de variatierekening toch verdwijnen. Jacobi (Vorl. über Dynamik) merkt dan ook op, dat men liever spreken moest van het beginsel, waarbij de eerste variatie van bovengenoemde uitdrukking ($\int \Sigma$ mvds) verdwijnt, dan van het beginsel der kleinste werking.

Doch met betrekking tot de uitdrukking

$$\int \Sigma \, mvds = \text{Max. min. of constant} \;\ldots\; (46)$$

herinneren wij hierbij aan Euler, die geloofde dat uit een metaphysisch oogpunt men alleen een minimum moest kiezen; en aan Lagrange, die uit een louter analytisch oogpunt Maximum of Minimum koos [1]).

Verder is het uit een historisch oogpunt niet onbelangrijk hier mede te deelen, dat Serret meent, dat $\int \Sigma$ mvds een minimum is en geen maximum. Daar echter de geheele berekening toch afhankelijk is van $\delta \int \Sigma \, mvds = 0$ doet de maximaal of minimaal toestand er weinig toe. Evenwel, volledigheidshalve zij hier vermeld, dat genoemde schrijver deze vraag behandeld heeft in de Compte Rendu 1875 p. 697.

Hamilton nu, de bekende Iersche Wiskundige, heeft een anderen weg ingeslagen, en is daardoor gekomen tot de ontdekking, dat even als de differentiaal verg. der beweging als part. dif. quotienten eener enkele functie — krachtfunctie genaamd — zijn voor te stellen (Lagrange), zoo ook de Integraal. verg. der beweging voorgesteld kunnen worden als de part. dif. quotienten eener enkele functie, door hem *Charakteristieke* functie genaamd, en dat deze laatste gevonden wordt door de oplossing eener niet-lineaire part. dif. verg. der 2e orde. [2])

---

1) Serret zegt: (Comtes rendus) „Aussi l'illustre auteur de la mecanique analytique jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s' agit meritait à raison de son importance de faire l'objet d'un nouveau principe de dynamique, qu'il appella „de la Moindre action", sans se dissimuler la défection de cette denomination renouvelée de Maupertuis (voyez Mecan. Analyt. 3e édit. tom. I p. 229 en 281)".

2) Sir. W. R. Hamilton „On a general method in dynamics" Phil. Transac. 1834—1835.

Daardoor is het integreeren der dif. verg. der beweging overbodig, maar daarom toch de bestaande moeielijkheid niet geheel opgeheven, want het bepalen der Charakt. functie door die part. dif. verg. behoort tot de moeielijkste onderzoekingen der Wiskunde. Er is echter dit bij gewonnen, dat de dif. en integr. verg. der beweging op dezelfde manier worden voorgesteld n. door part. dif. quotienten van functiën [1]).

We zullen in het volgende aantoonen, hoe het gewijzigd Beginsel der kleinste werking die Charakteristieke functie doet vinden. De naam Beginsel is dus voor die wijziging ten volle van toepassing.

Voor we echter hiertoe overgaan, een enkel woord over de bewegings verg. in den 2den vorm van Lagrange.

Bekend is het, dat Lagrange de bew. verg. der Dynamika in twee vormen gegeven heeft, daarbij de zaak zoo algemeen mogelijk opvattende n. dat er bewegings voorwaarden bestaan.

De eerste vorm hebben wij reeds aangegeven onder (30)

De tweede, die het groote voordeel aanbiedt van tevens de voorwaarden in zich op te nemen en toch nog beknopter te zijn dan (30), laat zich uit deze afleiden [2]).

Die tweede vorm is:

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad \ldots. \; (47)$$

en zoo μ vergelijkingen, wanneer namelijk $s = 1 \;\ldots\ldots\; \mu$ genomen wordt. [3])

1) Hamilton zelf heeft alleen aangetoond, dat op zulk een manier de Integralen der dif. verg. voorgesteld kunnen worden; voor de oplossing der bewuste part. dif. verg. heeft hij niet veel gedaan. Hieraan heeft C. G. I. Jacobi het eerst en voornamelijk zijne krachten geweid (Vorl über Dynamik).

2) Mecanique analytique van Lagrange. Zij komen al in de eerste uitgave voor.

3) Zie het Handboek van Dr. W. Schell. „Theorie der Bewegung und der Kräfte" bl. 914.

Hierbij moet het volgende opgemerkt worden:

$T = \frac{1}{2} \Sigma m (x'^2_s + y'^2_s + z'^2_s)$ = de halve levendige kracht van 't systeem, $x'_s = \frac{dx_s}{dt}$. U is de krachtfunctie, die hier — en dit is een uitbreiding van 't voorgaande — ook t bevatten kan.

De grootheid $q'_s = \frac{dq_s}{dt}$ en de verschillende q_s zijn dús op te vatten:

De voorwaardens verg. (31) bevatten de 3n coördin. der punten $x_s\, y_s\, z_s$ en zijn p. in aantal. Door deze p verg kan men alle 3n coördin. in 3n — p ven deze of in functiën hiervan uitdrukken. Stel nu $3n - p = \mu$ en vervang de $x_s\, y_s$ en z_s door functiën van μ nieuwe veranderlijken $q_1\, q_2 \ldots q_\mu$ dus

$$x_s = f(q_1\, q_2 \ldots q_\mu),\quad y_s = \varphi\, (q_1\, q_2 \ldots q_\mu)$$
$$z_s = \psi\, (q_1\, q_2 \ldots q_\mu)$$

maar zoodanig dat de verg. (31) veranderen in:

$$L_1(q_1\, q_2 \ldots q_\mu) = 0\; L_2(q_1\, q_2 \ldots q_\mu) = 0$$
$$L_p(q_1\, q_2 \ldots q_\mu) = 0\; (31^a)$$

die *identiek* nul zijn, m. a. w. zoodanig dat de voorwaarden geheel uit het probleem verdwijnen. De q_s van (47) is *één* uit de $q_1 \ldots q_\mu$.

Een bekend voorbeeld van dergelijke substitutie is bij 3 coördin. x, y, z verbonden door de voorwaarde

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

dat men x vervangt door $a\cos q_1$, y door $b\sin q_1 \cos q_2$, z door $c\sin q_1 \sin q_2$. Hier is $3n = 3$ $p = 1$ en er zijn zooveel q_s of liever functiën van q_s ingevoerd als 't aantal $3 - 1 = 2$ bedraagt; μ is dus 2. De voorwaarde verdwijnt daardoor geheel want bij substitutie der aangegeven functiën voor x, y, z in deze verkrijgt men de indentiteit $1 = 1$. Bij (31^a) wordt die identiteit $0 = 0$.

HOOFDSTUK V.

Beginsel en bewegingsvergelijkingen van Hamilton.

Gaan we nu over tot het Beginsel van Hamilton. In het voorgaande zijn uit het Beginsel der kl. werking.

$$\delta \int \Sigma \, mvds = 0 \; \ldots \; (42)$$

de bew. verg. afgeleid. Schrijven wij nu in (42) voor ds vdt en voor $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ de grootheid T dan verandert (42) in:

$$\delta \int Tdt = 0 \; \ldots \; (42)$$

we kwamen dan (bl. 55 tot 58) tot de dif. verg. der beweging.

Hamilton nu is uitgegaan van

$$\delta \int (T + U) \, dt = 0 \; \ldots \; (48)$$

en komt hierdoor langs veel korteren weg tot hetzelfde doel.

Hij handelt hierbij even als Lagrange, namelijk zijn goede resultaten en toepassingen van het beginsel bevestigen zijn juistheid. Wij zullen echter in het volgende beproeven langs meer geleidelijken weg tot (48) te komen.

Zij a (fig. 6) de plaats van een stoffelijk punt (m x y z) van een willekeurig stelsel en PQ de kromme die het punt (m xyz) bij de beweging van het stelsel beschrijft. Zij voorts $T_1 = \frac{1}{2} m\varphi^2$ de levendige kracht van dat punt op een bepaald oogenblik en U de krachtfunctie, die zooals bekend is, gedifferentieerd naar de coördin. van dat punt, op elk oogenblik de grootte van de kracht aangeeft werkende in de richting der assen. Zij voorts $P_1 Q_1$ de geheel willekeurig gevarieerde baan van (m xyz), en wanneer a en b in PQ twee op elkaâr volgende plaatsen van het punt voorstellen, dan mogen a_1 en b_1 de overeenkomstige punten in de gevarieerde baan zijn. Hierbij nemen we nog niet aan dat die overeenkomstige plaatsen ook op dezelfde tijdstippen worden ingenomen.

Zijn in a de coördin. xyz dan zijn die van a_1, $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$; zijn voorts de comp. van de snelheid φ in a, u, v en w, dan mogen die in a_1 door $u + \partial u$, $v + \partial v$, $w + \partial w$ worden voorgesteld; eindelijk: noemen we nog p, q en r de componenten der versnelling voor het element ab, en zij — de oude naam „werking" in de beteekenis van bloot stelkunstig produkt behoudende — voor (m xyz) de werking in het element ds of ab voorgesteld door W_1.

Nu hebben wij $W_1 = m\varphi ds = 2T_1\, dt$;
doch welbekend is

$$mvds = m\,\frac{ds^2}{dt} = m\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} =$$

$$m\left(\frac{dx}{dt}\,dx + \frac{dy}{dt} \times dy + \frac{dz}{dt}\,dz\right) = m\,(udx + vdy + wdz)$$

zoodat dus de werking voor ds wordt voorgesteld door

$$2T_1 dt = m\,(udx + vdy + wdz) \;\ldots\; (48^a)$$

Om nu het verschil der werking van (m xyz) in ab en in $a_1\, b_1$ te zoeken, berekenen we eerst de werking in $a_1\, b_1$ en verminderen die vervolgens met dezelfde grootheid in ab. Volgens (48^a) wordt nu de werking in $a_1\, b_1$ voorgesteld door:
$m\,[(u + \partial u)\;(dx + \partial dx) + (v + \partial v)\;(dy + \partial dy) + (z + \partial z)$ $(dz + \partial dz)] = m\,(udx + vdy + wdz + u\partial dx + v\partial dy + w\partial dz +$ $+ \partial u \times dx + \partial v \times dy + \partial w \times dz + \partial u \times \partial dx + \partial v \times \partial dy +$ $+ \partial w \times \partial dz)$.

Verwaarloozen we nu om bekende redenen $\partial u \times \partial dx +$ $+ \partial v \times \partial dy + \partial w \times \partial dz$ en verminderen 't voorgaande met $m\,(udx + vdy + wdz)$
dan krijgen we:

Verschil der werking in ab en $a_1 b_1 =$
$m\,[(dx \times \partial u + dy \times \partial v + dz \times \partial w) + (u\partial dx + v\partial dy + w\partial dz)]$.

Nu is $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$ dus:

$$dx \times \partial u + dy \times \partial v + dz \times \partial w = (u\partial u + v\partial v + w\partial w)\,dt =$$

$$= \partial\,\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \times dt = \partial\,\frac{\varphi^2}{2} \times dt =$$

$$\partial\left(\frac{1}{m} \times T_1\right) \times dt = \frac{1}{m}\,\partial T_1 \times dt$$

verder is $\partial dx = d\partial x$.

Noemen we nu de projectie van de variatie der coördin. in b op de assen

$$\partial x_b \; \partial y_b \; \partial z_b$$

en die in a

$$\partial x_a \; \partial y_a \; \partial z_a$$

dan is dus

$$d\partial x = \partial x_b - \partial x_a,\; d\partial y = \partial y_b - \partial y_a \text{ enz.}$$

dus:

$$u\partial dx = ud\partial x = u\,(\partial x_b - \partial x_a)$$
$$v\partial dy = v\,(\partial y_b - \partial y_a)$$
$$w\partial dz = w\,(\partial z_b - \partial z_a).$$

Onderscheiden we nu de snelheid in a en in b — componentswijze geschreven — door u_b en u_a, v_b en v_a, w_b en w_a dan is — gebruik makende van een bekende kunstgreep —

$$u\partial dx = u_a\partial dx = u_a d\partial x = u_a\,(\partial x_b - \partial x_a) =$$
$$u_b\partial x_b - u_b\partial x_b + u_a\partial x_b - u_a\partial x_a = u_b\partial x_b - u_a\partial x_a -$$
$$-\,(u_b - u_a)\,\partial x_b.$$

Evenzoo:

$$v\partial dy = v_b\partial y_b - v_a\partial y_a - (v_b - v_a)\,\partial y_b$$
$$w\partial dz = w_b\partial z_b - w_a\partial z_a - (w_b - w_a)\,\partial z_b.$$

Maar $u_b - u_a$ is de toename van snelheid gedurende dt voor het element ds, en daar de component der versnelling p is wordt dus

$$u_b - u_a = pdt.$$

Evenzoo

$$v_b - v_a = q\,dt$$
$$w_b - w_a = r\,dt$$

zoodat dus:

$$u\partial dx = u_b\partial x_b - u_a\partial x_a - p\partial x_b\,dt$$
$$v\partial dy = v_b\partial y_b - v_a\partial y_a - q\partial y_b\,dt$$
$$w\partial dz = w_b\partial z_b - w_a\partial z_a - r\partial z_b\,dt$$

waaruit dus het gezochte verschil der werking voor de elementen a_1 b_1 en ab voor het punt (m x y z) is

$$\partial\, W_1 = m\left[\frac{1}{m}\,\partial T_1 \times dt + u_b\partial x_b + v_b\partial y_b + w_b\partial z_b - (u_a\partial x_a + v_a\partial y_a + w_a\partial z_a) - (p\partial x_b dt + q\partial y_b dt + r\partial z_b dt)\right].$$

Voor de beide geheele banen wordt dus, wat (m x y z) betreft, het verschil in werking gegeven door de

$$\int_P^Q$$

van het voorgaande, wat volgens bekende beschouwing geschreven wordt:

$$m\,(u\partial x + v\partial y + w\partial z)\Big|_P^Q - m\int_P^Q (p\partial x + q\partial y + r\partial z)\,dt + \\ + \int_P^Q \partial T_1 \times dt.$$ [1])

Noemen we nu W de werking van het geheele stelsel gedurende zijn beweging van de grens P tot de grens Q, dan zal het verschil in werking ∂W, wanneer het stelsel de baan P_1 Q_1 doorloopt, gevonden worden door de even voorgaande formule te sommeeren, en dus:

$$\partial W = \Sigma\, m\,(u\partial x + v\partial y + w\partial z)\Big|_P^Q - \Sigma\, m\int_P^Q (pdx + qdy +$$

1) Een en ander hebben we meestal kortweg in vorige hoofdstukken dus uitgedrukt:

$$\int_{gr}^{gr} u\partial dx = \int_{gr}^{gr} ud\partial x = u\partial x\Big|_{gr}^{gr} - \int_{gr}^{gr} \partial x \times \frac{du}{dt}\,dt \text{ enz.}$$

$$+ \text{rdz}) \,\text{dt} + \Sigma \int_P^Q \partial T_1 \times \text{dt}$$

$$\text{en voor } T = \tfrac{1}{2} \, \Sigma \, \text{mv}^2$$

wordt

$$\Sigma \int_P^Q \partial T_1 \times \text{dt} = \int_P^Q \partial T \times \text{dt}$$

zoodat dus:

$$\partial W = \Sigma \, \text{m} \, (\text{u}\partial x + \text{v}\partial y + \text{w}\partial z) \Big|_P^Q - \Sigma \, \text{m} \int_P^Q (\text{p}\partial x + \text{q}\partial y +$$

$$+ \text{r}\partial z) \,\text{dt} + \int_P^Q \partial T \times \text{dt} \,\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Uit het beginsel van d'Alembert volgt:

$$\Sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \text{mp} \right) \partial x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \text{mq} \right) \partial y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \text{mr} \right) \partial z \right] = 0 \text{ of}$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} \partial x + \frac{\partial U}{\partial y} \partial y + \frac{\partial U}{\partial z} \partial z \right) = \Sigma \, \text{m} \, (\text{p}\partial x + \text{q}\partial y + \text{r}\partial z)$$

en onderstellen we nu dat U, t niet bevat dan is:

$$\Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} \partial x + \frac{\partial U}{\partial y} \partial y + \frac{\partial U}{\partial z} \partial z \right) = \partial U$$

en dus

$$\Sigma \, \text{m} \, (\text{p}\partial x + \text{q}\partial y + \text{r}\partial z) = \partial U.$$

Onderstellen we nu ook dat voor (A) U, t niet bevat, dan krijgen we:

$$\partial W = \Sigma \text{m} \, (\text{u}\partial x + \text{v}\partial y + \text{w}\partial z) \Big|_P^Q - \int_P^Q \partial U \times \text{dt} + \int_P^Q \partial T \times \text{dt}$$

Nemen we nu als beperking aan, dat P in P_1 en Q in Q_1 samenvallen, dat dus de werkelijke en de gevarieerde baan een zelfde begin en einde hebben, dan wordt dus de variatie aan de grenzen nul, waaruit:

$$\partial W = - \int_P^Q \partial U \times \text{dt} + \int_P^Q \partial T \times \text{dt}.$$

Nemen we nu bovendien nog aan, dat het beginsel van de levendige kracht, in den vorm daaraan door Jacobi gegeven, voor beide bewegingen geldt, en dat behalve dit, de constante, die 't verschil is tusschen T en U, voor werkelijke en gevariëerde baan dezelfde is, dan is dus met al die beperkingen:

$$\partial T = \partial U$$

en wordt

$$\partial W = \partial \int \Sigma mvds = \partial \int Tdt = 0$$

of het beginsel der kleinste werking.

Keeren we tot (A) terug en nemen we daarbij aan, dat wel de grenzen in gevariëerde en niet gevariëerde baan samenvallen, maar dat U, t kon bevatten.

We hebben dan vooreerst:

$$\partial W = -\Sigma m \int_P^Q (p\partial x + q\partial y + r\partial z)dt + \int_P^Q \partial T \times dt \ \ldots \ (B)$$

Daar hier U, t bevatten kan, gaat het beginsel der levendige kracht niet meer door; ook kunnen we

$$\Sigma m (p\partial x + q\partial y + r\partial z)$$

niet meer door ∂U vervangen, doch wel door

$$\partial U - \frac{\partial U}{\partial t} \partial t$$

zoodat nu

$$\partial W = -\int_P^Q \left(\partial U - \frac{\partial U}{\partial t} \partial t\right) dt + \int_P^Q \partial T \times dt \ \ldots . \ (C)$$

Nu is wel bekend

$$W = 2 \int Tdt$$

zoodat

$$\begin{aligned}\partial W &= 2 \int \partial (T \times dt) = 2 \int (\partial T \times dt + T \times \partial dt) \\ &= 2 \int \partial T \times dt + 2 \int T \times d\partial t.\end{aligned}$$

Waaruit dus in verband met (C)

$$2 \int \partial T \times dt + 2 \int T \times d\partial t = -\int_P^Q \left(\partial U - \frac{\partial U}{\partial t} \partial t\right) dt +$$

$$+ \int_P^Q \partial T \times dt$$

of

$$\int \partial T \times dt + 2 \int T \times d\partial t + \int_P^Q \left(\partial U - \frac{\partial U}{\partial t} \partial t \right) dt = 0 \ \ldots (D)$$

Nemen we nu ten laatste hierbij aan, dat in de gevarieerde en niet gevarieerde baan de overeenkomstige punten a en a_1, b en b_1 op een zelfde oogenblik worden ingenomen, dat is dus, dat het stelsel denzelfden tijd noodig heeft om de werkelijke baan en de gevarieerde baan te doorloopen, dan wordt hierdoor

$$\partial t = 0$$

en dus (D)

$$\partial \int (T + U)\, dt = 0$$

of het beginsel van Hamilton.

Het is uit het voorgaande wel duidelijk waarom altijd vermeld moet worden, dat het beginsel der kleinste werking niet zonder dat der levendige kracht geldt, terwijl dit bij 't beginsel van Hamilton niet noodig is.

Wij merkten (bl. 63) reeds op, dat men door (48) veel gemakkelijker tot de bewegings vergelijkingen komt dan door (42). Doch dit is niet het eenige voordeel. Vergelijking (48) is ook het uitgangspunt tot het opsporen der Charakteristieke functie, dus tot het Integreeren der dif. vergelijkingen.

In (48) kan, zooals reeds gezegd is, in U ook t voorkomen, wat in (42) niet mag verondersteld worden. Verg. (48) is dus een uitbreiding van (42).

Wat het voordeel aangaat om door (48) op gemakkelijker wijze tot de bewegings vergelijkingen te kunnen komen is m. a. w. de gemakkelijke oplossing van het vraagstuk:

„Wanneer de coördin. van begin- en eindtoestand van een zich bewegend stelsel punten gegeven is op twee bepaalde oogenblikken t_0 en t, dan bepaalt

$$\partial \int (T + U)\, dt = 0$$

de geheele beweging."

Om dit aan te toonen voeren we volgens de regelen der variatierekening, in 't voorgaande kortelijk aangetoond, de bewerking aldus uit

$$\partial \int (T + U)\,dt = \int \partial\,(Tdt) + \int \partial\,(Udt) =$$
$$\int \partial T \times dt + \int \partial U \times dt = \int \partial\,\Sigma \tfrac{1}{2} m_s (x'^2_s + y'^2_s + z'^2_s)\,dt +$$
$$\int \partial U \times dt = \int \Sigma m_s \times (x'_s \partial x'_s + y'_s \partial y'_s + z'_s \partial z'_s)\,dt$$
$$+ \int \partial\,U \times dt$$
$$= \int \Sigma\, m_s \times \left(x'_s \frac{d\partial x_s}{dt} + y'_s \frac{d\partial y_s}{dt} + z'_s \frac{d\partial z_s}{dt}\right) dt +$$
$$\int \partial U \times dt$$
$$= \Sigma\, m_s (x'_s \partial x_s + y'_s \partial y_s + z'_s \partial z_s)\Big|_{t_0}^{t_1}$$
$$- \int \Sigma m_s (x''_s \partial x_s + y''_s \partial y_s + z''_s \partial z_s)\,dt + \int \partial U \times dt.$$

Hierbij is $\partial dt = d\partial t = 0$ en de laatste herleiding geschiedt door partiëele Integratie.

Verder is

$$x'_s = \frac{dx_s}{dt} \text{ en } x''_s = \frac{dx_s}{dt^2} \text{ enz.}$$

Volgens (48) is dus:

$$\Sigma\, m_s (x'_s \partial x_s + y'_s \partial y_s + z'_s \partial z_s)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int \Sigma m_s (x''_s \partial x_s + y'' \partial y_s +$$
$$+ z'' \partial z_s)\,dt + \int \partial U \times dt = 0 \;\ldots\; (48^a)$$

of daar aan de gelijke grenzen de variatiën nul zijn, verandert (48^a) in:

$$\int \left[\Sigma\, m_s \left(\frac{d^2x_s}{dt^2}\,\partial x_s + \frac{d^2y_s}{dt^2}\,\partial y_s + \frac{d^2z_s}{dt^2}\,\partial z_s\right) - \partial U\right] dt = 0$$

$$\text{of} \quad \Sigma\, m_s \left(\frac{d^2x_s}{dt^2}\,\partial x_s + \frac{d^2y_s}{dt^2}\,\partial y_s + \frac{d^2z_s}{dt^2}\,\partial z_s\right) = \partial U \;\ldots\; (49)$$

het bekende symbool der Bewegings vergelijkingen.

Zooals men ziet gaat de afleiding uit dezen vorm, vrij wat gemakkelijker dan een dergelijke herleiding uit het Beginsel der kleinste werking (bl. 55—58).

Verg. (48) is ook een symbool voor de bew. verg. in den vorm (47) [1]) doch is die herleiding omslachtiger (zie Schell bl. 910). Hierbij maken wij echter daarop opmerkzaam dat bij verandering der $x_s\, y_s\, z_s$ in de reeds vermelde q, de q_s aan begin en einde der gevarieerde en niet gevarieerde baan ook gelijk zijn dus $\partial q_s = 0$ is, een omstandigheid die voor 't vervolg wel dient in 't oog gehouden te worden.

Bij de herleiding van (49) uit (48) speelt dit een voorname rol, dat de coördin. der punten in x y en z zijn uitgedrukt en dat, zooals we reeds herhaaldelijk opmerkten, de begin- en eindtoestand der gevarieerde en niet gevarieerde baan dezelfde zijn, welk begin en einde we ons dus gegeven kunnen denken. Hierdoor verdwijnt de veelterm vrij van het Integraal teeken.

Is nu echter bij eenig vraagstuk de vraag algemeener gesteld, en zijn niet begin- en eindtoestand beider banen gelijk, be maar zijn andere voorwaarden gegeven, waaraan bij het begin- en einde der beweging het stelsel moet voldoen, dan nemen de herleidingen uit (48) een geheel andere gedaante aan.

Wij komen dan tot de Charakteristieke functie, het tweede en groote voordeel dat (48) ons oplevert. Hierbij spelen (47) een aller belangrijkste rol.

Voor wij echter hiertoe overgaan, zal 't noodig zijn de bew. verg. nog een derden vorm te geven, door Hamilton in de wetenschap ingevoerd, en bij zijn theorie van groot gewicht.

Wetende dat de 3n coördin. $x_s\, y_s\, z_s$ vervangen zijn door functiën van $q_1 \ldots q_\mu$, is:

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots \frac{\partial x}{\partial q_\mu} q'_\mu \ldots (50)$$

---

1) Daar (47) uit (48) kunnen afgeleid worden bewijst dit weer wat van U daar ter plaatse gezegd is, n. dat U is een functie der coördin. en t.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = y' = \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \ldots \frac{\partial y}{\partial q_\mu} q'_\mu \\ \frac{dz}{dt} = z' = \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \ldots \frac{\partial z}{\partial q_\mu} q'_\mu\end{aligned}\right\} \ldots (50)$$

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt} \text{ enz.}$$

Daardoor wordt $T = \frac{1}{2} \Sigma m_s (x'^2_s + y'^2_s + z'^2_s)$ een functie van alle $q_1 \ldots q_\mu$ en alle $q'_1 \ldots q'_\mu$, maar ten opzichte van deze laatsten een homogeene functie.

Nu is volgens een stelling van Euler over homog. functiën:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_\mu} q'_\mu$$

of, gemakshalve voor een willekeurige $\frac{\partial T}{\partial q'_s}$, p_s stellende,

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + \ldots\ldots p_\mu q'_\mu = \Sigma p_s q'_s \ldots (51)$$

Schrijven we (51)

$$T = \Sigma p_s q'_s - T$$

en differentieeren deze vergelijking totaal, dan is — daar T een functie is van $q_1 \ldots q_\mu$ en $q'_1 \ldots q'_\mu$ —

$$dT = d\Sigma\, p_s q'_s - dT = \Sigma q'_s \times d \frac{\partial T}{\partial q'_s} + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} \times dq'_s$$

$$- \left(\Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_s} dq's + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s \right)$$

of

$$dT = \Sigma q'_s \times d \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s = \Sigma q'_s \times dp_s$$

$$- \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s \ldots (52)$$ [1]

Denken we ons nu dat T, die alleen functie is van $q_1 \ldots q_\mu$ en $q'_1 \ldots q'_\mu$, op de volgende manier een functie wordt van $q_1 \ldots q_\mu$ en $p_1 \ldots p_\mu$.

---

1) Duidelijkheidshalve hebben we de willekeurige p, q en q_1, waarvan straks sprake, was voorgesteld door p_s q_s en q'_s.

T is homogeene functie van q'_s en de q_s komen in de coëffn. dezer q'_s voor; wanneer we dus

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s$$

stellen, dan wordt p_s een homogeene functie van den 1sten gr. ten opzichte der q'_s, en de q_s spelen eenvoudig de rol van coëfficienten. Wij krijgen dus van

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1 \text{ tot } \frac{\partial T}{\partial q'_\mu} = p_\mu,$$

μ vergelijkingen voor de p_s, die lineair zijn ten opzichte der verschillende q'_s, en q_s als coëffn. bezitten. We kunnen ons dus denken dat we al die q'_s oplossen in functiën van p_s en q_s zoodat dus:

$$q'_1 = f_1 (p_1 \ldots p_\mu \, q_1 \ldots q_\mu) \quad q'_2 = f_2 (p_1 \ldots p_\mu \, q_1 \ldots q_\mu)$$
$$q'_\mu = f_\mu (p_1 \ldots p_\mu \, q_1 \ldots q_\mu) \ldots . \quad (52^a).$$

Deze functiën zijn ook lineair, maar ten opzichte van p_s, en alweder spelen de q_s de rol van coeffiënten; 't spreekt van zelf dat in een of meerdere f_s een of meerdere p_s kunnen ontbreken.

Vervangen we nu in T, de q'_s door bovengenoemde functiën der p_s, in q_s, dan wordt dus

$$T = f \; (q_1 \ldots q_\mu \; p_1 \ldots p_\mu)$$

Het spreekt van zelf dat de gedaante van T als functie $q_1 \ldots q_\mu \; q'_1 \ldots q'_\mu$ een andere is als die van T functie van $q_1 \ldots q_\mu \; p_1 \ldots p_\mu$.

Nemen we nu ook in de veronderstelling dat

$$T = f (q_1 \ldots q_\mu \; p_1 \ldots p_\mu)$$

de totale differentiaal van T, dan is:

$$dT = \Sigma \frac{\partial T}{\partial p_s} dp_s + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s \ldots . \quad (53)$$

alweêr p_s en q_s gebruikende voor een der willekeurige p en q.

Vergelijken we nu (52) en (53), dan is, om de Identiteit der verg.

$$\frac{\partial T}{\partial p_s} = q'_s \text{ en } \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial T}{\partial q_s} \quad \ldots (54)$$

De laatste van (54) stelt schijnbaar een onmogelijkheid voor, doch dit schijnbaar ongerijmde vervalt, wanneer we bedenken, dat in het linker lid de functie T een geheel anderen vorm heeft dan de functie T van 't rechter lid Daarom wordt gewoonlijk [1]) een der twee tusschen haakjes geschreven om op dit onderscheid opmerkzaam te maken.

Aldus verandert (54) in:

$$\frac{\partial T}{\partial p_s} = q'_s \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s} \quad \ldots (54)$$

Overwegende, dat U een krachtfunctie is *alleen* afhankelijk van de coördinaten en den tijd, en dus een functie van $x_1\, y_1\, z_1 \ldots x_n\, y_n\, z_n$ en t, en niet van $x'\, y'\, z'$ enz., dan zal, als voor $x_s\, y_s$ en z_s de besproken functiën van $q_1 \ldots q_\mu$ ingevoerd worden, U alleen functie zijn van $q_1 \ldots q_\mu$ en t en niet van q'_s.

U bevat dus ook geen p_s en dus

$$\frac{\partial U}{\partial p_s} = 0.$$

De vergelijking $\frac{\partial T}{\partial p_s} = q'_s$ van (54) kan dus ook geschreven worden als

$$\frac{\partial\,(T-U)}{\partial p_s} = q'_s \quad \ldots . (54^a)$$

Voeren we nu de laatste van (54) in (47) in, dan veranderen deze, door de bekende notatie $p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$, in

$$\frac{dp_s}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad \ldots (55) \quad s = 1 \ldots \mu$$

Daar wij nu, na deze herleiding, met geen andere T te maken hebben dan als functie der p_s en q_s, kunnen wij uit

1) Jacobi Vorlesungen uber Dynamik bl. 69.

(55) de haakjes wel weglaten, mits dat we steeds blijven denken aan *T functie van* $q_1 \dots q_\mu\ p_1 \dots p_\mu$.

Dus wordt (55)

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial q_s} \quad s = 1 \dots \mu$$

en deze verbonden met (54^a) vormen den Hamiltonschen vorm der dif. verg. der beweging, wanneer men $T-U = H$ stelt, en dus de verg. schrijft:

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = q'_s \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$H = T - U \quad s = 1 \dots \mu \dots (56).$$ [1])

De verg. (56) hebben deze overeenkomst met de dif. verg. der bew. in den vorm door Lagrange gegeven, namelijk:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

dat ook zij de beweging voorstellen als part. dif. quotienten eener enkele functie naar Coördinaten, maar tevens daarbij de voorwaardens verg. in zich besluiten.

Om die overeenkomst aan te wijzen, herinneren wij dat de functie H, [2]) als gelijk zijnde aan T—U, enkel p_s, q_s en t bevat, want de hier gebezigde T is functie van p_s en q_s, en U bevat alleen q_s en t, zoodat dus $\frac{\partial H}{\partial q_s}$ een part. dif. quot. is eener functie ten opzichte van daar in voorkomende coördin. (de q_s toch treden in de plaats der x_s). Echter H bevat meer dan U bij Lagrange; H bevat ook p_s en t. Letten we daarop, dat de p_s functiën zijn der q'_s, dan zijn $\frac{dp_s}{dt}$ functiën van

---

1) Jacobi schrijft ook $\frac{\partial T}{\partial p_s}$ tusschen haakjes; ik meen dat zulks na het voorafgaande overbodig is.

2) Jacobi noemt (bl. 70 der Vorl.) deze H de charakteristieke functie, ofschoon hij (bl. 3 idem) daaronder iets anders verstaat.

q''_s, en wetende waarvoor de q_s in de plaats komen, moeten wij $\frac{dp_s}{dt}$ als versnellingen aanzien. Hierin komen dus

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

met elkaâr overeen.

Het valt na dit niet moeielijk te begrijpen dat dan:

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = q'_s \text{ dus } \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

verg. voorstellen, die de snelheden als part. dif. quotienten derzelfde functie voorstellen, en dus daardoor de poging, om beweging in den vorm van part. dif. quotienten eener enkele functie voor te stellen, zeer wordt uitgebreid.

Wij zullen straks zien, dat de uitbreiding nog verder mogelijk is en ook de Integralen der bew. verg. (56) als part. dif. quotienten eener enkele functie (charakteristieke functie) voorgesteld worden.

Dat

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

volkomen overeenstemmen met

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

valt nog meer in 't oog door de opmerking, dat

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ enz.}$$

de dif. verg. der beweging zijn voor 't geval dat geen beperkende voorwaardens verg. gegeven zijn. Maar in dat geval vervalt ook de verandering der $x_s\, y_s\, z_s$ in q_s of liever de q_s zijn gelijk aan de $x_s\, y_s\, z_s$.

Dit wetende, en de vergelijkingen

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

onderzoekende, wordt, daar

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},\ q_s = x_s,\ q'_s = x'_s \text{ en}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_s\,(x'_s{}^2 + + y'_s{}^2 + z'_s{}^2),$$

de grootheid $\quad p_s = m_s\,x'_s$ of $x'_s = \dfrac{p_s}{m_s}$.

Wij hebben dan 't volgende:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{d\,m_s x'_s}{dt} = m_s\,\frac{d^2x_s}{dt^2}$$

$$H = T - U \text{ en } \frac{\partial H}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial x_s} - \frac{\partial U}{\partial x_s}$$

maar T is *nu* homogeene functie van $x'_s\,y'_s\,z'_s$ dus

$$\frac{\partial T}{\partial x_s} = 0$$

zoodat $\dfrac{\partial H}{\partial q_s}$ *nu* wordt $-\dfrac{\partial U}{\partial x_s}$

dus $\quad -\dfrac{\partial H}{\partial q_s} = \dfrac{\partial U}{\partial x_s}$

waaruit $\quad \dfrac{dp_s}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_s}$ verandert in

$$m_s\,\frac{d^2x_s}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_s}.$$

De eerste van (56), namelijk $\dfrac{\partial H}{\partial p_s} = q'_s = \dfrac{dq_s}{dt}$, wordt nu, bij $q_s = x_s$, $H = T - U$ enz.

$$\frac{\partial T}{\partial p_s} - \frac{\partial U}{\partial p_s} = \frac{dx_s}{dt}$$

Maar $\quad T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_s \times (x'_s{}^2 + y'_s{}^2 + z'_s{}^2) =$

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m_s\left(\frac{p_s{}^2}{m_s{}^2} + y'_s{}^2 + z'_s{}^2\right)$$

en U bevat geen x′, dus ook geen p_s, dus

$$\frac{\partial U}{p\partial_s} = 0,$$

en daar $\frac{\partial T}{\partial p_s} = \frac{p_s}{m_s}$ (want onder Σ komt maar één p_s voor)

wordt dus $$\frac{\partial H}{\partial p_s} = q'_s \text{ eenvoudig}$$

$$\frac{p_s}{m_s} = \frac{dx_s}{dt}$$

d. i. bij $p_s = m_s x'_s$

$$x'_s = \frac{dx_s}{dt}$$

dus een identiteit.

Een dergelijk onderzoek stelle men met y'_s en z'_s in.

De overgang van de Hamiltonsche dif. verg. der bew. met bewegingsvoorwaarden tot de Lagrangasche dif. verg. der bew. zonder deze, is dus hiermeê aangetoond.

Verder kunnen wij uit (56) even goed m. m. het Beginsel der levendige kracht verkrijgen, als zulks uit de verg. van Lagrange

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ enz. geschiedt.}$$

Om dit aan te toonen, schrijven we dat Beginsel in den vorm door Jacobi er aan gegeven, en wel

$$T = U + \text{const.}$$

Bevat nu echter U ook t — zooals hier — dan wordt dit

$$T = U - \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt + \text{Const.}$$

of na differentiatie

$$\frac{d\,(T - U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \text{ of}$$

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots (57)$$

Verg. (57) is een uitbreiding van het Beginsel der levendige kracht in den vorm van Hamilton.

Daar het bij deze afleiding er weinig toe doet, in welke veranderlijken, T is uitgedrukt, denken we ons T een functie der p_s en q_s. Nu weten we dat H is een functie van p_s q_s en t en dus:

$$dH = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_s} dp_s + \Sigma \frac{\partial H}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial H}{\partial t} dt \text{ of}$$

$$\frac{dH}{dt} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \Sigma \frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \ldots. \quad (58)$$

Nemen we nu de verg. (56) aldus geschreven:

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{dq_s}{dt}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad s = 1 \ldots \mu$$

en vermenigvuldigen we respectivelijk de eerste en tweede leden van elk tweetal met elkaar, dan krijgen we μ verg.

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \times \frac{dq_s}{dt} \text{ of}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s} \times \frac{dq_s}{dt} = 0 \quad s = 1 \ldots \mu$$

en deze μ verg. opgeteld geven, daarbij (58) vergelijkende:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Maar $H = T - U$ zijnde en T geen t bevàttende, is

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t}$$

daar U wel t bevatten kan; m. a. w.

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

overeenkomende met (57).

Gaan wij nu, na dit onderzoek over de bewegings vergelijkingen van Hamilton, over tot het tweede reeds genoemde voordeel (bl. 69), uit (48) te verkrijgen, namelijk het opsporen der Charakteristieke functie.

Op bl. 68 en 69 is vermeld hoe bij gelijke begin- en eindtoestand ($x_s\, y_s\, z_s$) en bij $\delta t = 0$.

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0 \quad \ldots. \quad (48)$$

is.

Zijn nu niet begin- en eindcoördinaten van gevarieerde en niet gevarieerde baan dezelfde, maar in plaats daarvan voorwaarden [1]) gegeven, waaraan bij begin en einde der beweging het stelsel voldoen moet — wordt dus de zaak algemeener opgevat — dan wordt (48) geheel anders. Toch nog blijven we veronderstellen dat $\partial t = 0$.

Keeren wij om te onderzoeken wat in die onderstellingen, waarvan reeds op bl. 71 sprake was, van (48) wordt tot (A) bl. 67 terug. Daar was

$$\partial W = \Sigma m\,(u\partial x + v\partial y + w\partial z)\Big|_P^Q - \Sigma m \int_P^Q (p\partial x + q\partial y + r\partial z)\,dt + \int_P^Q \partial T \times dt \;\ldots\ldots\; (A)$$

en daar $\partial t = 0$ is, wordt

$$\partial W = 2 \int_P^Q \partial T \times dt.$$

en

$$\Sigma m \int_P^Q (p\partial x + q\partial y + r\partial z)\,dt = \int_P^Q \partial U \times dt;$$

dit laatste zooals wij weten omdat, ofschoon U t bevat, $\partial t = 0$ is. Wij krijgen dus in plaats van (48)

$$\int_P^Q \partial\,(U + T)\,dt = \Sigma m\,(u\partial x + v\partial y + w\partial z)\Big|_P^Q$$

Om nu de vervorming van de u, v, w, x, y, z enz. in de besproken q_s gemakkelijker te maken, nemen we de uitdrukking

$$\partial \int (T + U)\,dt$$

op zich zelf, en voeren de variatie eenvoudig uit. De uitkomst, die dan bij herleiding verkregen wordt zal precies dezelfde moeten zijn als wanneer we in

$$\Sigma m\,(u\partial x + v\partial y + w\partial z)\Big|_P^Q$$

de bekende verandering der coördin. $x_s\, y_s\, z_s$ in q_s uitvoeren.

---

1) Deze voorwaarden niet te verwarren met de in q_s getransformeerde (31), die ook bestaan blijven.

Stellen wij daartoe — het gebruik volgende — kortheidshalve

$$T + U = \varphi$$

en herinneren nogmaals dat T is functie van $t\ q_1 \ldots q_\mu\ q'_1 \ldots q'_\mu$, U daarentegen alleen functie van $t\ q_1 \ldots q_\mu$, niet van q'_s; dan is dus φ een functie van $t\ q_1 \ldots q_\mu\ q'_1 \ldots q'_\mu$.

Wij hebben dan, daar $\partial t = 0$,

$$\partial \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t} \partial\varphi \times dt = \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q_s} \partial q_s \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} \partial q'_s \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q_s} \partial q_s \right\} dt + \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} \times \partial \frac{dq_s}{dt} \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q_s} \partial q_s \right\} dt + \int_{t_0}^{t} \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} \times \frac{d\partial q_s}{dt} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left\{ \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q_s} \partial q_s \right\} dt + \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} \partial q_s \Big|_{gr = t_0}^{gr = t}$$

$$- \int_{t_0}^{t} \Sigma \frac{d \dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_s}}{dt} \times \partial q_s dt \quad s = 1 \ldots \mu$$

dit laatste door part. integratie.

Verder herleidende, wordt:

$$\partial \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} \partial q_s - \Sigma \frac{\partial\varphi_0}{\partial q'_s} \partial q^0_s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s} - \frac{d \dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_s}}{dt} \right) \partial q_s dt \quad \ldots\ldots (58)$$

Daar nu in U q'_s niet voorkomt, is

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q'_s} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q'^s} = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$$

en vergelijken we na den vorm onder het $\int$ teeken van (58) met (47) dan wordt (58)

$$\delta \int \varphi dt = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} \delta q_s - \Sigma \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial q'_s} \delta q^\circ_s \; \ldots\ldots \; (59)$$

Men ziet dus, nergens vallen hier δq_s of δq°_s weg.

Laat men in (58) den vorm onder het $\int$ teeken nul worden, waardoor we (59) krijgen, dan hebben we onder deze verg. (59) het gewijzigde Hamiltonsche beginsel (48) te verstaan, voor het geval dat aan begin en einde der beweging zekere extra voorwaarden gegeven zijn en geen coördinaten.

Beschouwen wij den vorm

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} - \frac{d \dfrac{\partial \varphi}{\partial q'_s}}{dt} \right),$$

in (58) krachtens de bew. verg. van Lagrange (2e vorm) gelijk nul gesteld, voor een oogenblik afgescheiden van deze laatste beteekenis, en zien we

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} - \frac{d \dfrac{\partial \varphi}{\partial q'_s}}{dt} \Bigg) = 0 \; \ldots . \; (59^a)$$

$$s = 1 \ldots . \mu .$$

voorloopig aan als zoovele conditiën die, in part. dif. verg., zekere betrekkingen tusschen de q_s en q'_s vormen. Maar q_s en q'_s maken samen $2\,\mu$ veranderlijken uit; dus kunnen we ons — hoe gecompliceerd de analyse ook wezen moge — denken dat $q_1 \ldots q_\mu$ uit deze vergelijkingen opgelost zijn in functiën van t en 2μ constanten, geheel naar den eisch van eene oplossing (Lösung) eener part. dif. verg., die evenveel constanten moet bevatten als onderling onafhankelijke veranderlijken in de verg. voorkomen.

Denken we ons dus uit (59^a) het volgende resultaat

$$q_1 = \psi_1 \, (t\, c_1 \ldots . c_{2\mu}) \ldots\ldots q_\mu = \psi_\mu \, (t\, c_1 \ldots . c_{2\mu})$$

$$q'_1 = \chi_1 \, (t\, c_1 \ldots . c_{2\mu}) \ldots\ldots q'_\mu = \chi_\mu \, (t\, c_1 \ldots . c_{2\mu})$$

m. a. w. de integratie van het Mechanisch vraagstuk volbracht.

Daar nu de $p_1 \dots p_\mu$ functiën kunnen gemaakt worden van q_s en q'_s zijn ook

$$p_1 = \omega_1 (t\, c_1 \dots c_{2\mu}) \dots\dots p_\mu = \omega_\mu (t\, c_1 \dots c_{2\mu}).$$

Nu is men gewoon om daar waar 't probleem reeds geïntegreerd is, begin coördinaten en begin snelheden te nemen voor de constanten; overigens kunnen we voor de constanten nemen wat we verkiezen.

Onder dien verstande verkrijgen wij:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \psi_1 (t\, q_1^\circ \dots q_\mu^\circ\ p_1^\circ \dots p_\mu^\circ) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_\mu = \psi_\mu (t\, q_1^\circ \dots q_\mu^\circ\ p_1^\circ \dots p_\mu^\circ) \end{array}\right\} \dots\dots (61)$$

waaruit:

$$\left.\begin{array}{l} p_1^\circ = \Phi_1 (t\, q_1 \dots q_\mu\, q_1^\circ \dots q_\mu^\circ) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_\mu^\circ = \Phi_\mu (t\, q_1 \dots q_\mu\, q_1^\circ \dots q_\mu^\circ) \end{array}\right\} \dots (62.)$$

Stellen we nu

$$V = \int \varphi dt = \int (T + U)\, dt$$

dan is dus V een functie van $t\, q_1 \dots q_\mu\ q'_1 \dots q'_\mu$, dus, door dif. naar t van (61), te maken tot een functie van $t\, q_1 \dots q_\mu\, q_1^\circ \dots q_\mu^\circ\ p_1^\circ \dots p_\mu^\circ$ en door (62) tot een functie van $t\, q_1 \dots q_\mu\ q_1^\circ \dots q_\mu^\circ$.

Alzoo dus

$V =$ functie van $t\, q_1 \dots q_\mu\ q_1^\circ \dots q_\mu^\circ \dots (62^a)$

Dit alles in de onderstelling dat door (47) de q_s in functiën van t en 2μ constanten zijn uitgedrukt of: dat het vraagstuk is opgelost. Haasten wij ons er bij te voegen dat *hierbij* wel degelijk van gegeven begin coördinaten kon sprake zijn en het pas gezegde, met het bovenstaande, waar geen coördinaten maar conditiën gegeven zijn om tot (59) te geraken, niet het minst te maken heeft. Verg. 62^a dus staat geheel op zich zelf.

Variëeren we (62^a) dan verkrijgen we:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_\mu} \delta q_\mu + \frac{\partial V}{\partial q_1^\circ} \delta q_1^\circ \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu^\circ} \delta q_\mu^\circ \dots (63)$$

De variatiën der q_s en q°_s zijn dús op te vatten dat zoowel bij gevariëerde als niet gevariëerde baan het vraagstuk als opgelost beschouwd wordt en wij dus twee uitdrukkingen voor V verkrijgen van den vorm

$$V = f(t\, q_1 \ldots q_\mu\; q_1^\circ \ldots q_\mu^\circ)$$

$$V_1 = f_1(t + \partial t\; q_1 + \partial q_1 \ldots q_\mu + \partial q_\mu\; q_1^\circ + \partial q_1^\circ \ldots q^\circ_\mu + \partial q^\circ_\mu)$$

waaruit dus, in de onderstelling dat $\partial t = 0$ is

$$V_1 - V = \partial V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\partial q_2 + \ldots \frac{\partial V}{\partial q_1^\circ}\partial q_1^\circ \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu^\circ}\partial q_\mu^\circ$$

Keeren we nu tot (59) terug:

Daar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q'_s} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q'_s} = \frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s$$

kunnen we (59) dus schrijven (hierbij weer $\int \varphi dt = V$ stellende maar dan V als functie van andere grootheden dan boven bl. 83)

$$\partial V = p_1 \partial q_1 + p_2 \partial q_2 + p_3 \partial q_3 + \ldots p_\mu \partial q_\mu -$$
$$(p^\circ_1 \partial q^\circ_1 \ldots\ldots p^\circ_\mu \partial q^\circ_\mu) \ldots\ldots (60)$$

Vergelijken we (60) en (63) dan zijn de eerste leden gelijk dus ook de tweede, en daar bovendien zoowel voor (60) als voor (63) gevarieerde en niet gevarieerde banen bij begin en einde verschillen en wij veronderstellen dat bij (60) en (63) gevariëerde en niet gevariëerde banen dezelfde twee zijn, zijn de ∂q_s en ∂q°_s in (60) en (63) gelijk. Uit de gelijkstelling der tweede leden moet dus volgen.

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s \text{ en } \frac{\partial V}{\partial q^\circ_s} = - p^\circ_s \;\ldots\; (64)$$

Nu volgt uit

$$\int \varphi dt = V \text{ dat}$$

$$\frac{dV}{dt} = \varphi,$$

maar V bevat t, q_s en q°_s en dus explicit en implicit t — dit laatste door q_s — zoodat

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \text{ [1]) of}$$

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \text{ of}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} - \varphi = 0 \ \ldots. \ (65)$$

Nu is

$$\varphi = T + U$$

en dus ook een functie van $t\, q_1 \ldots q_\mu \; q'_1 \ldots q'_\mu$ maar wij kunnen de q'_s (zie vroeger) in p_s en q_s uitdrukken, en dan weer volgens (64) de p_s in $\frac{\partial V}{\partial q_s}$ zoodat de tweede term van 't eerste lid uit (65) een functie is van

$$t\, q_1 \ldots q_\mu \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}.$$

Noemen wij deze functie ψ dan verandert (65) in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t\, q_1 \ldots q_\mu \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0 \ldots (66).$$

Verg. (66) is nu de lineaire part. dif. verg., waarvan, reeds vroeger sprake is geweest, en die we nu door een wijziging (algemeener maken) van het Hamiltonsche beginsel in verband met de onderstelling dat het mechanisch vraagstuk door integrâtie reeds gevonden was, verkregen hebben.

Deze V is de charakteristieke functie [2]).

Aan (66) voldoet

$$V = \int \varphi dt$$

een functie van $t\, q_1 \ldots q_\mu \; q^\circ_1 \ldots q^\circ_\mu$, terwijl in (66), μ van elkaâr onafhankelijke veranderlijken $q_1 \ldots q_\mu$ voorkomen. V is dus een oplossing (Lösung) van (66). Maar — en dit is

---

1) De $q^o{}_s$ zijn Constanten.

2) Jacobi blijft zich in deze niet gelijk: blijkens de inleiding zijner Vorlesungen zou V de charakteristieke functie zijn, terwijl hij later daaronder H verstaat en V de „Principal" functie van Hamilton noemt.

vooral van gewicht — we zijn niet tot (66) kunnen komen, dan door te onderstellen, dat het vraagstuk geïntegreerd was d. i. dat alle q_s in t en de noodige constanten waren uitgedrukt. Op die veronderstelling berust de geheele bewerking om tot (66) te komen. We kunnen dus zeggen: de niet lineaire part. dif. verg. is afhankelijk, van het opgeloste vraagstuk.

Is nu ook de oplossing van het mechanisch vraagstuk afhankelijk van de oplossing van (66)?

Voor we op deze vraag antwoorden zullen wij aan (66) een anderen vorm geven meer in overeenkomst met de dif. verg. der beweging in den Hamiltonschen vorm; de verg. (66) behoort meer bij den 2[en] vorm van Lagranges bew. verg.

Schrijven we weêr voor φ

$$T + U$$

dan is volgens (64)

$$\Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \Sigma\, p_s q_s'$$

en daar

$$\Sigma\, p_s q'_s = 2T \text{ is volgens (51),}$$

wordt (65)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 2T - (T + U) = \frac{\partial V}{\partial t} + T - U$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0 \text{ ..... (67)}$$

hierbij niet te vergeten dat T dan in $q_1 \cdot\cdot q_\mu\ p_1 \cdot\cdot p_\mu$ moet uitgedrukt worden wat echter, daar T in $\varphi = T + U$ functie is van q_s en q'_s, door middel van (52[a]) altijd mogelijk is.

De verg.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0 \text{ ... (67)}$$

nu is de niet lin. part. dif. verg. van Hamilton behoorende bij zijn bew. verg. en V is de charakteristieke functie.

Beantwoorden wij nu de vorige vraag. Is van de oplossing van (67) de oplossing van het Mechanische vraagstuk afhankelijk? We zullen dit in bevestigenden zin beantwoord vinden door het volgende:

Is van (67) V als functie van t $q_1 \ldots q_\mu$ $q^\circ_1 \ldots q^\circ_\mu$ gevonden dan zijn:

$$\frac{\partial V}{\partial q^\circ_s} = - p^\circ_s \text{ en } \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s \quad s = 1 \ldots\ldots \mu \quad (68)$$

vormen, die voldoen aan

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = q'_s \text{ en } \frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s} \quad H = T - U \ldots (56)$$

$$s = 1 \ldots\ldots \mu.$$

en daar (56) de dif. verg. der bew. zijn, zijn (68) hare Integraal vergelijkingen en wel dus:

$$\frac{\partial V}{\partial q^\circ_s} = - p^\circ_s$$

zijn de Eind-Integralen

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$$

zijn de eerste Integralen.

Wij hebben dus:

„Wanneer van (67) een oplossing (Lösung) V gevonden is, dan vormen de partiëele dif. quotien ten dezer functie V, naar de daarin voorkomende constanten q°_1 tot q°_μ de slot-Integralen, en de part. dif. quotienten dezer zelfde functie V, naar de daarin voorkomende onafhankelijke veranderlijken q_1 tot q_μ de 1e Integralen of de snelheden, waardoor dus het geheele vraagstuk opgelost is."

Wij zullen een en ander aantoonen, door uit (68) met differentiatie (56) af te leiden, dan zien we dat (68) aan (56) voldoen.

De verg. (68) hebben dit voordeel dat ze de Integralen in juist denzelfden vorm geven als de Lagrangensche dif. verg., namelijk als part. dif. quotienten van een en dezelfde functie; — hier V en daar U — maar ze hebben boven deze den voorrang, dat ook de snelheden part. dif. quot. van *dezelfde* functie V zijn als de Slot-Integralen part. dif. quot. van die functie zijn. Zij zijn dus, wat den vorm betreft, volkomen overeenkomstig aan zijne (Hamiltons) dif. verg. (56).

Op die overeenkomst maken de vormen van Lagrange geen aanspraak.

Wat nu de afleiding van (56) uit (68) aangaat, de eersten

$$\frac{\partial V}{\partial q^\circ_s} = - p^\circ_s$$

leveren het laatste woord van het vraagstuk, alle p°_s uitgedrukt in q_s, t en $q^\circ_1 \dots q^\circ_\mu$ of omgekeerd, alle q_s in t en 2μ constanten $q^\circ_1 \dots q^\circ_\mu$ $p^\circ_1 \dots p^\circ_\mu$, overeenkomende met alle $x_s\, y_s\, z_s$ in functie van t en 2 Constanten. De tweeden

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$$

leveren de 1e Integralen van de dif. verg., alle p_s of q'_s in t $q_1 \dots q_\mu$ met μ Const. $q^\circ_1 \dots q^\circ_\mu$, want V is functie van t $q_1 \dots q_\mu$ $q^\circ_1 \dots q^\circ_\mu$; geheel overeenkomende met $x'_s\, y'_s\, z'_s$ als functiën van t en 1 Const.

Daar nu de laatsten van (56) overeenkomen met versnellingen (p_s toch zijn functiën van q'_s) zullen we deze uit

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$$

(verg. der snelheden) afleiden en de eersten van (56) uit de eersten van (68)

Alzoo vooreerst: de dif. verg.

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{dq_s}{dt} \dots (56^a)$$

uit

$$\frac{\partial V}{\partial q^\circ_s} = - p^\circ_s \dots (68^a)$$

de slot Integralen. $s = 1 \dots \mu.$

Wij weten dat V d. i. een functie van $t\, q_1 \ldots q_\mu\, q^\circ_1 \ldots q^\circ_\mu$ aan (67) voldoet, en dat H is een functie van $t\, q_1 \ldots q_\mu$ $p_1 \ldots p_\mu$, maar dat [zie de eersten van (64)]

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$$

en dus p_s alleen de constanten $q^\circ_1 \ldots q^\circ_\mu$ bevat (door V).

Substitueeren wij nu in (67) de V en voeren wij de aangeduide partiëele differentiatiën uit, dan moet (67) d. i.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

een verg. worden waarbij het eerste lid een functie wordt der grootheden $t\, q_1 \ldots q_\mu\; q^\circ_1 \ldots q^\circ_\mu$, die identiek is met het tweede lid, dus nul, zoodat er na bovengenoemde substitutie uit (67) eigenlijk te lezen is

$$0 = 0.$$

Van zelf spreekt, 't dus dat wanneer we in dien zin (67) naar een der daarin voorkomende grootheden partiëel of totaal differentieeren, we een dif. quotient krijgen dat ook nul is.

Differentieeren we nu (68ª) totaal naar t, dan krijgen we, duidelijkheidshalve alle verg. opschrijvende,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_1 \partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_1 \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} \cdots \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_1 \partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt} = 0 \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_2 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_2 \partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_2 \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} \cdots \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_2 \partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_\mu \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_\mu \partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_\mu \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} \cdots \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\circ_\mu \partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt} = 0
\end{array}\right\} (69)$$

We zouden nu de in $\frac{dq_s}{dt}$ lineaire verg. (69) naar deze $\frac{dq_s}{dt}$ moeten oplossen en zien of deze waarden werkelijk gelijk waren aan

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}$$

dan was daarmede het eerste bewijs geleverd; doch die oplossing is zeer lastig en gemakkelijker doet men met aan te wijzen dat $\frac{\partial H}{\partial p_s}$ de $\frac{dq_s}{dt}$ van (69) kunnen vervangen en de verg. (69) dan toch dezelfde blijven [1]).

Differentieert men daartoe (67) achtereenvolgens naar $q^\circ_1 \dots q^\circ_\mu$, dan wordt, wetende dat H is een functie van $t\; q_1 \dots q^\circ_\mu\; p_1 \dots p_\mu$ en de verschillende p_s alleen en niet de q_s de constanten bevatten (zie de eersten van 64):

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q^\circ_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q^\circ_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q^\circ_1} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q^\circ_1} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q^\circ_\mu} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial p_1}{\partial q^\circ_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q^\circ_\mu} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q^\circ_\mu} = 0
\end{array}\right\} (70)$$

maar

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$$

dus

$$\frac{\partial p_s}{\partial q^\circ_3} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q^\circ_3}$$

en dit in (70) gesteld, komen (69) en (70) volkomen met elkaâr overeen, behalve dat de $\frac{dq_s}{dt}$ van (69) door de $\frac{\partial H}{\partial p_s}$ van (70) vervangen zijn.

We besluiten dus:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \dots \; (56^a)$$

Het eerste gedeelte van 't bewijs n. dat de Slot Integralen (68^a) voldoen aan de dif. verg. (56^a) is dus bewezen. Ons blijft nu nog over aan te toonen dat ook de eerste Integralen

---

1) Jacobi Vorl. bl. 158 en bl. 160 sqq. waar 't bewijs van (56a) nog uitvoeriger vermeld staat.

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s \ldots (68^b)$$

voldoen aan de dif. verg^n.

$$\frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s} \ldots. (56^b)$$

wij zien dan daaruit dat 56^a en 56^b de oplossing van het mechanisch vraagstuk voorstellen.

Wij zullen dit tweede gedeelte op dezelfde wijze behandelen, namelijk.

$$\frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s} \ldots. (56^b)$$

door differentiatie uit

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s \, (68^b) \quad s = 1 \ldots \mu$$

afleiden.

Differentieeren we deze laatsten (68^b) totaal naar t, dan krijgen we:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_\mu} \frac{dq_\mu}{dt} \quad (71)$$

maar uit

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1$$

volgt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_s}$$

uit

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2 \text{ volgt } \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_s} \text{ enz.}$$

en daar reeds bewezen is dat

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

is, kunnen we (71) ook dús schrijven:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots\ldots \frac{\partial p_\mu}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad (72)$$

Maar (67) partieel naar q_s gedifferentieerd geeft:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_s} + \ldots\ldots \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (73)$$

en (73) van (72) afgetrokken geeft.

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \ldots\ldots (56^b).$$

wat we bewijzen moesten.

Nemen we dus ten slotte een overzicht van de laatste redeneeringen en herleidingen, dan zien we, dat op de vraag of van de oplossing der partieele differentiaal vergelijking (67), de oplossing van de differentiaal vergelijkingen der beweging afhankelijk is, in volkomen bevestigenden zin beantwoord moet worden, want een oplossing (Lösung) dier vergelijking geeft door partieele differentiatie tevens de Integralen der dynamische differentiaal vergelijkingen.

De oplossing dezer laatsten is dus overbodig; en het vraagstuk, dat dus theoretisch volkomen opgelost is, zou, wat de behandeling betreft, niets te wenschen overlaten, indien niet de oplossing eener part. dif. verg. als (67), tot de lastigste onderzoekingen der Analyse behoorde. Wie zich daarvan overtuigen wil, raadplege het reeds meermalen aangehaalde werk von Jacobi „Vorlesungen uber Dynamik.'' Daarin wordt grootendeels het integreeren van differentiaal vergelijkingen behandeld en de integratie der verg. (67) is het einde.

Wij besluiten met te herhalen, dat, zooals uit het begin van dit Hoofdstuk blijkt, de beweging van een stel stoffelijke punten zoo algemeen mogelijk opgevat het onderzoek naar het verschil in werking in de gevariëerde en niet gevariëerde baan, een vergelijking oplevert, die door zekere beperkingen beide beginselen bevat, zoowel het Beginsel der kleinste werking als het Beginsel van Hamilton, maar dat uit de beperkingen daar vermeld, ten duidelijkste blijkt, dat dit laatste veel algemeener is dan het eerste; dat dit laatste veel spoediger de dif. verg. der beweging oplevert dan het eerste, maar vooral, dat het beginsel van Hamilton een methode van integreeren der dif. verg. in zich bevat, welke het eerste volstrekt niet bezit.

LITTERATUUR.

Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris Années 1740, 1744, 1749.
" " " " " " " Belin Années 1746, 1748, 1750, 1751, 1752, 1753, 1757.

Nova Acta Eruditorum A°. 1751, f°. 125 en 162.

J. F. Montucla. Hist. des Mathem. achevée par J. de Lalande Tome III. Principe de la moindre Action.

Maupertuisiana. Hamburg 1753.

Versuch einer Cosmologie von Maupertuis aus dem Französischem 1751.

Transactions of the royal Irish Academy 1828, 1830, 1832 theory of systems of rays, bij W. R. Hamilton.

Memoires de Turin (1760—1761).

Sir W. R. Hamilton. „On a general method in Dynamics" Philosoph. Transac. (1834—1835).

Mecanique analytique van Lagrange.

C. G. I. Jacobi. Vorlesungen uber Dynamik. 1866.

Dr. E. Dühring. Kritische Geschichte der algem. Princ. der Meckanik.

Cayley. Report on the recent progress of Theor. Dynamics- (Report of the British Assoc. for the advanc. of Science 1857.)

Serret. Memoire sur le Principe de la moindre action. Compte rendu des Séances 1875.

Dr. A. Mayer. Geschichte des Princips der kleinsten Action 1877.

W. H. Nieuwenhuis. Over het Beginsel der vert. snelheden 1878.

G. Kirchhof. Vorl. uber Mathematishe Physik und Mechanik. 1877. 2e Aufl.

LITTERATUR

Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris Années 1740, 1744, 1746.
" " " " " " " " Berlin Années 1746, 1748, 1750, 1751, 1752, 1753, 1757.
Nova Acta Eruditorum An. 1751, p. 125 on 162.
J. F. Montucla Hist. des Mathém. achevée par J. de Lalande Tome III. Principe de la moindre Action.
Maupertuisiana, Hamburg 1753.
Versuch einer Chronologie von Maupertuis von einem Uebersetzer 1751.
Transactions of the Royal Irish Academy 1828, 1830, 1832 theory of systems of rays, by W. R. Hamilton.
Mémoires de Turin (1760–1761).
Sir W. R. Hamilton, „On a general method in dynamics" Philosoph. Transac. (1834–1835).
Mécanique analytique von Lagrange.
C. G. J. Jacobi Vorlesungen über Dynamik 1866.
Dr. E. Dühring Kritische Geschichte der allgem. Princ. der Mechanik.
Cayley, Report on the recent progress of theoret. Dynamics (Report of the British Assoc. for the advanc. of Science 1857).
Bertrand, Mémoire sur le Principe de la moindre action. Compte rendu des Sciences 1876.
Dr. A. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action 1877.
W. R. Rowanowski, Über das Princip der mos. smallesten 1878.
G. Kirchhoff Vorl. über Mathematische Physik und Mechanik. 1877, 2e Aufl.

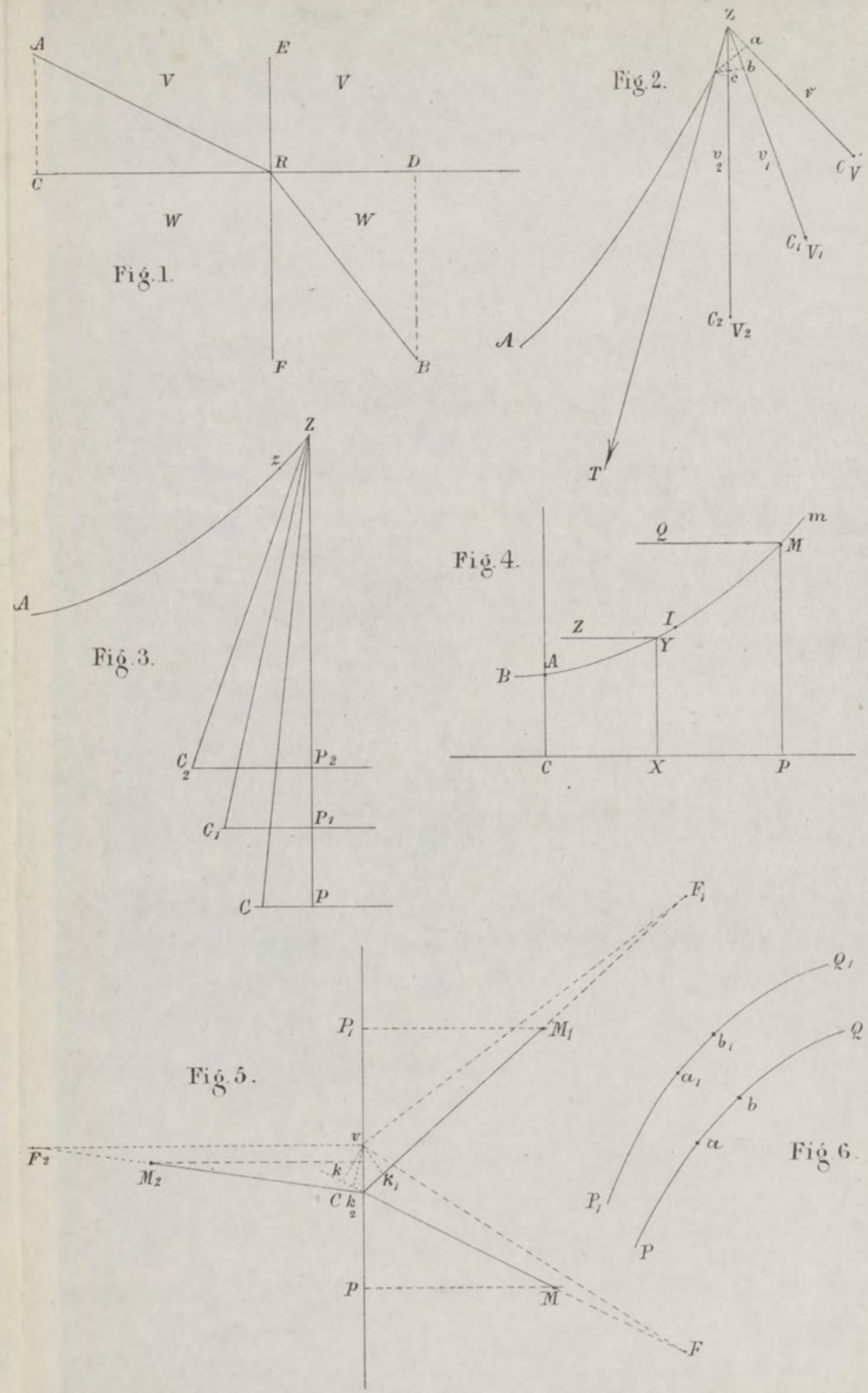

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

STELLINGEN.

I.

Het beginsel der kleinste werking en het beginsel van Hamilton zijn bijzondere gevallen van de formule:

$$\delta W = \Sigma\, m\, (u\delta x + v\delta y + w\delta z)\Big|_P^Q -$$

$$- \Sigma\, m \int_P^Q (p\delta x + q\delta y + r\delta z)\, dt + \int_P^Q \delta T \times dt.$$

II.

Het beginsel der kleinste werking behoudt ten onrechte zijn plaats in de leerboeken der analytische Mechanika door te vermelden, dat het daarin eigenlijk geen plaats verdiende. Het ware beter er in het geheel niet van te spreken en het te vervangen door het beginsel van Hamilton.

III.

De analytisch mechanische beschouwingen van Hamilton en Jacobi hebben voorloopig alleen theoretische waarde.

IV.

De benaming „Exacte Wetenschap" wordt ten onrechte aan de wiskunde gegeven; het ware beter de woorden „Logische Wetenschap" te gebruiken.

V.

Bij het onderwijs in de wiskunde is de heuristische methode niet te verkiezen boven de dogmatische.

VI.

De richting van sommige wiskundigen om de theorie der wiskunde onafhankelijk te maken van de theorie der evenwijdige lijnen verdient afkeuring.

VII.

De methode van Hesse om de analytische meetkunde zonder voorstellingen door figuren te behandelen verdient afkeuring.

VIII.

Ten onrechte beweert Schlegel (System der Raumelehre. Vorrede S. XI) „Dem ungenuegenden Zustande der Elemente vorzueglich, verdankt es die Mathematik ueberhaupt, dass sie selbst dem gebildeten Publicum gegenueber, die Rolle einer modernen „schwarzen Kunst" spielt.

IX.

Het begrip „gelijkheid van tijd" moet niet bij de verklaring der eenparige beweging vooropgesteld worden; het is logisch uit de eenparige beweging het begrip „gelijkheid van tijd" af te leiden.

X.

Ten onrechte beweert Tolver Preston (Nature Vol. 17. p. 202), dat zich bij de diffusie van twee gassen verschijnselen zouden voordoen, die in strijd zijn met de tweede wet der mechanische warmte-theorie.

XI.

De waarde door Pictet uit zijne proeven afgeleid voor de dichtheid der vloeibare zuurstof, verdient weinig vertrouwen.

XII.

De bedenking van Loschmidt tegen de stelling, dat het heelal tot een eindtoestand nadert is ongegrond. Evenwel is:

XIII.

Openbaarmaking van den strijd over deze zaak in werken van populairen aard af te keuren.

XIV.

Onder de middelen der „natural selection" in de theorie van Darwin behooren ook opgenomen te worden initiale snelheid en afstand der aarde van de zon.
