ELLIPSOÏDALE EVENWICHTSVORMEN EENER WENTELENDE HOMOGENE VLOEISTOFMASSA.

S. KRÜGER, S. J.

ELLIPSOÏDALE EVENWICHTSVORMEN
EENER WENTELENDE HOMOGENE VLOEISTOFMASSA.

GEDRUKT BIJ J. J. GROEN EN ZOON TE LEIDEN.

ELLIPSOÏDALE EVENWICHTSVORMEN

EENER

wentelende homogene vloëistofmassa.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. A. C. VREEDE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN

op Donderdag 17 Dec. 1896, des namiddags te 4 uren,

DOOR

SEBASTIANUS KRÜGER, S.J.

GEBOREN TE OUDENBOSCH.

LEIDEN,
J. W. VAN LEEUWEN,
Hoogewoerd 89.
1896.

AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER DIERBARE OUDERS

Nu mijne academische studiën ten einde loopen, rest mij de aangename plicht hartelijk dank te brengen, in de eerste plaats aan U, Hooggeleerde Kluyver, niet alleen voor het gedurende vier jaren genoten onderricht, maar ook inzonderheid voor de nuttige wenken mij bij de samenstelling dezer dissertatie gegeven.

Zonder Uwe groote hulpvaardigheid zou het mij zeker niet gelukt zijn dit proefschrift ook maar eenigszins Uwer waardig te maken in den tijd, dien ik er aan kon besteden.

Hooggeleerde van Geer, Gij weet hoezeer ik het voorrecht op prijs stelde Uwe lessen bij te wonen; wees verzekerd, dat ook zoo menig blijk van belangstellende vriendschap nooit uit mijn geheugen zal worden gewischt.

Hooggeleerde Lorentz, de helderheid van Uw betoogtrant, die mij Uwe collegies zoo aangenaam maakte, en Uwe humaniteit ten opzichte van Uwe leerlingen zullen mij altijd ten voorbeeld strekken.

Mijn oprechten dank ook aan de Hooggeleerde Heeren van de Sande Bakhuyzen en Kamerlingh Onnes, en aan allen, die tot mijne academische vorming hebben bijgedragen.

INHOUD.

DERDE HOOFDSTUK.

Uitbreiding van het vraagstuk door Poincaré.

ERRATA.

Pag. 22, regel 13 v. b. staat $\dfrac{\omega^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}$,

lees $\dfrac{\omega^2}{4\pi\rho k(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Pag. 26, regel 15 v.b. staat $(e_1 - e_3)$, lees $(e_3 - e_1)$.

Pag. 42, regel 10 v. o. staat $h < 0$, lees $H < 0$.

Pag. 46, regel 9 v. b. aan de vergelijking toe te voegen . . . . (3).

Bij de becijfering op p. 63 sqq. werd gebruik gemaakt van de formule (80, 3°) bij Halphen, I, p. 447, waarin, zooals ik eerst later vond (vgl. Stelling XVI, p. 193) een vergissing voorkomt. Dientengevolge moeten de volgende correcties worden aangebracht:

Pag. 63, laatste regel en p. 64, regel 2 v. b. staat $-4\sum_1^\infty \dfrac{kq'^k}{1+q'^k}$,

lees $-2\sum_1^\infty \dfrac{kq'^k}{1+q'^k}$.

Pag. 67, in formule (5a) staat $16q'$, lees $8q'$.
Pag. 73, regel 7 v. o., staat $16ye-x$, lees $8ye-x$.

Maar formule (5b) op p. 68 blijft onveranderd, en dientengevolge ook de uitkomsten, die op p. 74 en 75 daaruit afgeleid zijn.

Pag. 106, regel 4 v. b. staat $\dfrac{-2\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$, lees $\dfrac{-2\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$.

Pag. 167, laatste regel der noot, staat tweede lid, lees eerste lid.

INLEIDING.

In 1834 ontdekte Jacobi [1]), dat behalve de afgeplatte omwentelingsellipsoïden van Maclaurin en d'Alembert [2]) ook een ongelijkassige ellipsoïde evenwichtsfiguur kan zijn bij een homogene, onsamendrukbare, met standvastige snelheid wentelende vloeistofmassa, welker deeltjes elkander aantrekken volgens de wet van Newton. „Men kan een geheel willekeurige ellips als aequator nemen," zegt hij, „en dan de derde hoofdas (de omwentelingsas, die ook hier de kleinste der assen is) en de hoeksnelheid zóó bepalen, dat de ellipsoïde evenwichtsfiguur wordt." Nadat dit verrassend[3]) theorema door Liouville [4]) en anderen bewezen was, rees een tweede punt van onderzoek, op raad van Jacobi — na een minder gelukkige poging van

[1]) Pogg. Ann., XXXIII, p. 229.

[2]) Hun arbeid en die van Clairaut, Simpson en Laplace wordt uitvoerig besproken door Todhunter, *History of the theories of attraction and the figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace. In two volumes.* London, 1873.

[3]) „Il semblerait naturel d'admettre qu'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation uniforme doit dans le cas d'équilibre offrir toujours pour surface extérieure une surface de révolution." Cauchy, Comptes Rendus, XXIX, 1849, p. 376.

[4]) Journal de l'école polytechnique, cahier XXIII, p. 289 (a°1834). — Verder Archibald Smith, Cambr. Mathem. Journal, Febr. 1838. — Clausen., *Beweis des von Jacobi gefundenen Lehrsatzes* u. s. w., Astron. Nachr., XVIII, c. 145.

Ivory [1]) — door C. O. Meyer [2]) ter hand genomen: „*twee* omwentelingsellipsoïden kunnen evenwichtsfiguren zijn, wanneer een zekere constante V, met het vierkant der hoeksnelheid evenredig, tusschen de grenzen 0 en 0,22467 begrepen is; heeft men nu ook bij gegeven hoeksnelheid *één of meer* drieassige ellipsoïden?" Het antwoord luidt, dat slechts *één* drieassige ellipsoïde voldoet, en wel alleen, terwijl $0 < V < 0{,}18711$; bij $V = 0{,}18711$ gaat de evenwichtsfiguur van Jacobi over in de minst afgeplatte der omwentelingsellipsoïden.

Tevens had Jacobi zijn leerling de oplossing der beide transcendente vergelijkingen voorgesteld, die het verband uitdrukken tusschen de excentriciteiten der hoofddoorsneden en de middelpuntvliedende kracht. „Hanc resolutionem, quae luculentam theoriae functionum ellipticarum applicationem praebuit, *alio loco* tradam", zegt Meyer in de aangehaalde verhandeling [3]); *hier* geeft hij alleen de cijfers, die bij een homogene, onsamendrukbare, *met de gemiddelde dichtheid en snelheid der Aarde* wentelende vloeistof de verhoudingen der assen zouden voorstellen; bij de drieassige ellipsoïde met halve assen *a, b* en *c* [4]) zijn deze

$$a : b : c = 19{,}57 : 1{,}018 : 1.$$

De berekening van Meyer schijnt echter niet gepubliceerd te zijn [5]); althans in 1870 schreef Richelot, hoogleeraar te Königsberg, aan Weierstrass: „So viel ich weiss, ist keine geeignete und sichere Methode bis jetzt bekannt gemacht, die Axenverhältnisse des dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoids zu

---

[1]) Philos. Transactions for 1838, P. I, p. 57. De onjuistheden bij Ivory werden wederlegd door Liouville, Journal des Mathém., IV, 1839, p. 169; later door Todhunter, Proc. Roy. Soc., XIX, p. 42.

[2]) *De aequilibrii formis ellipsoidicis*, Crelle's Journal, XXIV, 1842, p. 44.

[3]) p. 45.

[4]) p. 59.

[5]) De „vergelijkingen van Meyer", waarover Matthiessen spreekt (Zeitschrift für Mathematik und Physik, XVI, p. 303) worden later vermeld.

berechnen. Dies veranlasste mich am Anfange des Jahres 1868 .... meinem Schüler Kostka.... die Aufgabe zu stellen, eine solche Näherungsmethode zu suchen und an demjenigen Resultat namentlich zu prüfen, welches von dem ausgezeichneten Schüler Jacobi's, dessen Namen in diesen Untersuchungen rühmlichst bekannt ist, gewissermassen noch unter den Auspizien seines unsterblichen Lehrers gefunden *und später von allen Geometern als richtig angenommen war.* Ich meine die Axenverhältnisse bei der Umdrehungsgeschwindigkeit unserer Erde, die Hr. Prof. Meyer im 24. Bande des Crelleschen Journals zuerst angegeben hat, *ohne die Art der Berechnung anzuführen. Ohne letztere zu kennen*, hegte ich doch seit längerer Zeit Bedenken gegen die mir von Jacobi und Meyer darüber angedeutete Art der Berechnung und hielt die Resultate für unrichtig" [1]) — Werkelijk verschillen Kostka's uitkomsten [2]) geheel van die bij Meyer; hij geeft nl.

$$a : b : c = 52{,}4425 : 1{,}0023134 : 1.$$

Ons waren geene andere becijferingen over dit onderwerp bekend — en op grond van Richelot's schrijven moesten wij wel aannemen, dat *althans vóór 1870* de berekening niet herhaald was — toen Prof. Kluyver mij voorstelde door toepassing der p-functie te onderzoeken, of werkelijk Meyer in zijn overigens zoo voortreffelijke verhandeling verkeerde resultaten opgaf; zoo ja, of Kostka goede uitkomsten daarvoor in de plaats stelde. De berekening was zoo goed als voltooid, toen mij bleek, dat veel meer over dit probleem gecijferd was dan wij aanvankelijk vermoedden — echter is, voor zooverre ik weet, de p-functie nog nimmer daarbij gebruikt — en, wat vooral merkwaardig is, verschillenden van hen, die het vraagstuk bewerkten, hebben den arbeid hunner voorgangers niet gekend.

---

[1]) Berliner Monatsberichte, (Februar) 1870, p. 116.

[2]) p. 123.

In 1849 behandelde Roche [1]) — veel algemeener dan het door Laplace gedaan was — de evenwichtsvormen eener wentelende vloeistofmassa, welker deeltjes niet slechts elkander aantrekken volgens de wet van Newton, maar ook door een verwijderd punt worden aangetrokken. Hij vervaardigde tabellen bij de becijfering dienstig, en leidde o. a. af, dat de Maan ook een zeer uitgerekte drieassige ellipsoïde tot stabielen evenwichtsvorm zou kunnen hebben, waarvan de grootste as, naar de aarde gericht, 878 maal zoo lang zou zijn als de as der polen [2]). Maar hij paste ook zijne formules toe op het probleem der Aarde [3]), en vond dan voor de ellipsoïde van Jacobi

$$a : b : c = 53 : 1{,}0023 : 1.$$

Dit resultaat verhoogt in niet geringe mate de waarschijnlijkheid, dat Kostka later goed gewerkt heeft, te meer, daar het langs anderen weg gevonden is.

Plana, die in 1852 uit onberispelijke formules *een geheel verkeerde tabel* der excentriciteiten van de hoofddoorsneden bij gegeven waarden der middelpuntvliedende kracht afleidde [4]), zij *hier* slechts in het voorbijgaan vermeld.

Dr. Ludwig Matthiessen publiceerde in 1859: *Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts* [5]). In deze haastig geschreven verhandeling — zij

---

[1]) Mémoires de la section des sciences de l'Académie de Montpellier, I, p. 243; en *Mémoire sur les figures ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide homogène, tournant sur elle-même et soumise à l'attraction d'un point éloigné. Analyse des résultats principaux. Note sur les fonctions dont dépend la solution du problème. Table de ces deux fonctions.*

De steeds hulpvaardige directie der Leidsche bibliotheek heeft vergeefsche pogingen aangewend om mij deze laatste verhandeling te bezorgen.

[2]) Mémoires de Montpellier, l. c., p. 260.

[3]) Ib., p. 256.

[4]) Astron. Nachr., XXXVI, n⁰. 851, c. 169.

[5]) Schriften der Universität zu Kiel, VI.

moest dienst doen als *Einladungsschrift zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs Frederik's VII* — nam hij de resultaten van Meyer onveranderd over [1]); maar *reeds in 1860* schreef hij *Nachträge und Verbesserungen* [2]). Wij lezen daar: „Meyer will gefunden haben

$$a : b : c = 19{,}57 : 1{,}018 : 1,$$

wogegen die richtige Proportion lautet

$$a : b : c = 52{,}279 : 1{,}0023 : 1."$$

Dus alweder een, aan Richelot en Kostka onbekende — overigens in een zeer verspreid Duitsch tijdschrift gepubliceerde — verbetering van Meyer's uitkomsten. Later gaf Matthiessen eenigszins verschillende waarden [3])

$$a : b : c = 52{,}4346 : 1{,}0023134 : 1$$

als toepassing eener formule, die voor zeer uitgerekte ellipsoïden van Jacobi dienstig kan zijn, maar onbruikbaar is, wanneer die evenwichtsvorm tot de omwentelingsellipsoïde nadert. Ook de ellipsoïdale evenwichtsvormen der satellieten zijn door Matthiessen onderzocht [4]), voor onze Maan geeft hij bij de ellipsoïde van Jacobi 985,4 als verhouding der langste en kortste as, maar wij zullen laten zien, dat deze, van Roche's resultaat zoozeer afwijkende, uitkomst geheel verkeerd is. De voortreffelijke verhandelingen van Roche schijnt Matthiessen dan ook alleen te kennen uit een of andere recensie en uit de zeer korte uittreksels in „l'Institut" en „Comptes Rendus"; — terwijl ook Vaughan te Cincinnati bij zijne onderzoekingen: *on the Form of Satellites revolving at small distan-*

---

[1]) p. 73.
[2]) Zeitschr. Math. Phys., VI, p. 72.
[3]) Ib., XVI, 1871, p. 304.
[4]) Ib., XXV, 1880, p. 82.

ces from their Primaries [1]), Roche volstrekt niet vermeldt.

Vreemd is ook, dat Giesen [2]) en Hagen [3]) bij het zoeken van benaderingsformules voor ellipsoïden met kleine excentriciteit geen der hier opgenoemde schrijvers vermelden, maar 't maakt vooral een verrassenden indruk, wanneer G. H. Darwin, Plumian Professor in the University of Cambridge, in 1886 eene verhandeling [4]), waarin hij formules afleidt geheel overeenstemmend b. v. met die van Plana (1852), begint met de woorden: „I am not aware that any numerical values have ever been determined for the axes of the ellipsoids, which are figures of equilibrium of a rotating mass of fluid."

Inderdaad, de vraag schijnt gewettigd, of „deze vijand der hoogere analyse", zooals Matthiessen het probleem der evenwichtsvormen van een wentelende vloeistofmassa noemt [5]), niet veel eer zou ten onder gebracht zijn, als hij minder onstrategisch was aangevallen, — als niet zoo menig wiskundige de les van Arago [6]) uit het oog verloren had: „Si Poisson a été d'une fécondité extraordinaire, c'est qu'il était au courant de ce qui avait été fait avant lui;.... c'est qu'il ne s'est jamais sottement obstiné à perdre son temps et ses forces

---

[1]) Philos. Magazine. Fourth Series, XX (December 1860) p. 409.

„During the year 1853 — zegt Vaughan in het begin van zijn bijdrage — in announcing the result of my researches on this subject, I ascribed the existence of the rings to their proximity to Saturn; and, though the theory has been slow in receiving attention, etc." Hetgeen Vaughan zich beroemt in 1853 gepubliceerd te hebben, was in 1849 door Roche gezegd: Mémoires de Montpellier, I, p. 258.

[2]) *Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen.* Zeitschr. Math. Phys., XXI, 1876, p. 47.

[3]) *Zur Theorie der drei ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten* Ib., XXIV, 1879, p. 104.

[4]) Proc. Roy. Soc., XLI, p. 319.

[5]) Zeitschr. Math. Phys., VI, p. 67.

[6]) Notices biographiques, II, p. 656.

à la recherche de ce qui était déjà trouvé." Straks naast onze eigen becijfering een overzicht gevend van het meerendeel der hier geciteerde verhandelingen, zullen wij dan ook soms minder bruikbare formules ontmoeten, waar reeds lang te voren iets beters gevonden was.

Doch vooraf volge hier de afleiding der vergelijking van de ellipsoïdale evenwichtsvormen, het onderzoek der grensgevallen, enz., alles, voor zooverre het gevoegelijk kon geschieden, met behulp der p-functie, zooals dit gedeeltelijk door Prof. Kluyver in het college behandeld werd; ook zal het probleem van Jacobi en Meyer als bijzonder geval van dat der wentelende en door een verwijderd punt aangetrokken vloeistofmassa beschouwd worden.

De belangrijke onderzoekingen van Poincaré [1]), die naast de ellipsoïden een oneindig aantal reeksen van evenwichtsfiguren deed kennen, zeer nauw met de ellipsoïden samenhangend, mochten hier niet onbesproken blijven, te meer, daar hij omtrent de stabiliteit der ellipsoïden veel nieuws heeft geleerd: toen alleen de ellipsoïdale evenwichtsfiguren bekend waren, werd aan de stabiliteit zelfs van een zoo uitgerekte ellipsoïde van Jacobi, als bij de snelheid der aarde optreedt, niet getwijfeld. De toelichting der conclusies van Poincaré vorderde een tamelijk uitvoerige uiteenzetting zijner redeneering; dit kon hier met des te meer reden geschieden, omdat hij het grootste deel

---

[1]) Acta Mathematica, VII, 1885. — De ringvormige evenwichtsfiguren worden overeenkomstig den titel van dit proefschrift niet behandeld. Men zie daarover behalve de reeds aangehaalde verhandelingen van Matthiessen in Schriften der Universität zu Kiel en Zeitschr. Math. Phys., XVI, nog denzelfden auteur in het laatstgenoemde tijdschrift, X, p. 59, en in Annali de matematica, III, 1869, *de aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali*; — verder Thomson and Tait, *Treatise on natural philosophy*, new edition, 1883, § 778''; — Mad. Kowalewsky, Astron. Nachr., CXI, n°. 2643; — Poincaré, Bulletin astronomique, II, p. 109 en 405; id., Acta Mathem., VII, p. 284—289; — Tisserand, *Mécanique céleste*, II, Chap. IX—XII.

zijner resultaten afleidt uit de theorie der functiën van Lamé, die door het gebruik der notaties van Halphen [1]) niet weinig vereenvoudigd wordt. Wij hopen dus Poincaré's bewijsvoeringen hier en daar te kunnen verkorten, en zelfs iets aan zijne resultaten toe te voegen.

---

[1]) *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, II, Ch. XII, 1888.

EERSTE HOOFDSTUK.

Ellipsoïdale evenwichtsvormen ook beschouwd als bijzonder geval der figuren van Roche.

§ 1. *Afleiding der vergelijkingen van de evenwichtsvormen.*

De evenwichtsvergelijking eener vloeistof, die met eenparige snelheid om een vaste as wentelt, is [1])

$$dp = \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 r\,dr); \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

x, y, z zijn hier rechthoekige coördinaten van een punt A der vloeistof;

ρ dichtheid in dat punt;

p druk in dat punt (per eenheid van oppervlak);

X, Y, Z componenten der kracht per massa-eenheid, die op de vloeistof in A zou werken, als zij in rust was;

r afstand van A tot de as van wenteling;

ω hoeksnelheid.

Onderstellen wij, dat over het geheele oppervlak der vloeistof een constante druk wordt uitgeoefend (die ook gelijk kan zijn aan nul), dan moet langs het geheele oppervlak gelden:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 r\,dr = 0.$$

Hebben de krachten X, Y, Z een potentiaal U, zoodat

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

[1]) Clairaut, *Théorie de la figure de la terre*, 2e éd., p. 101.

en geschiedt de wenteling om de z-as, dan heeft men

$$U + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{constant. . . . . } (2)$$

Deze vergelijking vindt hare toepassing bij het onderzoek der evenwichtsfiguren van een homogene, onsamendrukbare vloeistofmassa, met dichtheid ρ, die met eenparige hoeksnelheid ω wentelt om een vaste as, die wij als z-as nemen, terwijl hare deeltjes elkander aantrekken volgens de wet van Newton. Over de vraag, welke die evenwichtsfiguren kunnen zijn, schreven Thomson en Tait [1]) in 1883: „No one seems yet to have attempted to solve the general problem of finding all the forms of equilibrium. Unless the velocity be so small, that the figure differs but little from a sphere, the problem presents difficulties of an exceedingly formidable nature."... . „During the fifteen years which have passed since the publication of our first edition we have never abandoned the problem.... Year after year, questions of the multiplicity of possible figures of equilibrium have been almost incessantly before us, and yet it is only now.... that we have succeeded in finding anything approaching to full light on the subject." Dan laten zij eenige meerendeels onbewezen stellingen volgen; het bewijs dezer stellingen zoekend heeft Poincaré de belangrijke ontdekkingen gedaan, in de Acta Mathematica medegedeeld; toch is het vraagstuk, welke de evenwichtsfiguren kunnen zijn, nog volstrekt niet algemeen opgelost. Hier zullen wij *voorloopig* slechts bewijzen, dat, wanneer ω binnen zekere grenzen begrepen is, een ellipsoïde met halve assen a, b, c en coördinaten-oorsprong in het middelpunt, wentelend om een harer hoofdassen [2]), die wij als z-as nemen,

---

[1]) *Treatise on Natural Philosophy*, § 778 en 778''.

[2]) Het bewijs, dat de omwentelingsas der vloeistof met één der hoofdassen moet samenvallen gaf Todhunter, Proc. Roy. Soc., XXI, p. 120. *Note on an erroneous extension of Jacobi's theorem* (by Dahlander, Pogg. Ann., 1866).

evenwichtsoppervlak kan zijn. Daartoe moet de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

identiek zijn met

$$U + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{constant.}$$

De potentiaal van een homogene ellipsoïde met betrekking tot een punt op haar oppervlak, terwijl k de attractie-constante voorstelt, is [1])

$$U = \pi \rho k a b c \int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\right)}{\sqrt{\left(a^2 + \lambda\right)\left(b^2 + \lambda\right)\left(c^2 + \lambda\right)}} d\lambda.$$

Een veranderlijk elliptisch argument u en een constant argument v worden nu met behulp van een voorloopig niet nader bepaalden proportionaliteitsfactor τ ingevoerd [2]):

$$\lambda = \tau^2 (pu - pv),$$

$$\begin{aligned} a^2 + \lambda &= \tau^2 (pu - e_\gamma), & a^2 &= \tau^2 (pv - e_\gamma), \\ b^2 + \lambda &= \tau^2 (pu - e_\beta), & b^2 &= \tau^2 (pv - e_\beta), \\ c^2 + \lambda &= \tau^2 (pu - e_\alpha), & c^2 &= \tau^2 (pv - e_\alpha). \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen volgt, dat u en v reëel zijn; verder dat

$$0 \leqq u \leqq v \leqq \omega$$

want $\lambda = \tau^2 (pu - pv)$ blijft altijd positief, hetgeen niet het

---

[1]) Lejeune-Dirichlet, Crelle's Journal, XXXII, p. 80.

[2]) Wij volgen de notatie van Halphen, *Traité des fonctions elliptiques;* de halve reëele periode wordt dus met de letter aangewezen, die reeds voor de hoeksnelheid gebruikt is, maar dit kan onmogelijk verwarring geven

geval zou zijn, wanneer u aangroeide van 0 tot een bedrag $v > \omega$. Dus $\wp' u$ en $\wp' v$ zijn negatief, zoodat

$$a\,b\,c = -\frac{\tau^3}{2}\,\wp' v,$$

$$\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} = -\frac{\tau^3}{2}\,\wp' u,$$

$$U = \pi\,\rho\,k\,\wp' v \int_v^0 \left[\tau^2 - \left(\frac{x^2}{\wp u - e_\gamma} + \frac{y^2}{\wp u - e_\beta} + \frac{z^2}{\wp u - e_\alpha}\right)\right] du.$$

Stel

$$\int_0^v \frac{du}{\wp u - e_\gamma} = P, \quad \int_0^v \frac{du}{\wp u - e_\beta} = Q, \quad \int_0^v \frac{du}{\wp u - e_\alpha} = R,$$

dan wordt vergelijking (2), als men het constante deel van U naar het tweede lid overbrengt,

$$2\,\pi\,\rho\,k\,\wp' v\,(x^2\,P + y^2\,Q + z^2\,R) + \omega^2\,(x^2 + y^2) = \text{constant.} \quad . \quad (3)$$

Stelt men nog $\dfrac{\omega^2}{2\,\pi\,\rho\,k} = V$ (de reeds in de inleiding vermelde constante) dan leidt de identiteit van (3) met

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tot de twee vergelijkingen

$$\frac{P\wp' v + V}{\dfrac{1}{a^2}} = \frac{Q\wp' v + V}{\dfrac{1}{b^2}} = \frac{R\wp' v}{\dfrac{1}{c^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Hieruit kan vooreerst worden afgeleid, dat de omwentelingsas de kleinste as moet wezen, of liever dat $c \leqq a, c \leqq b$. Want volgens (4) is

$$a^2 P\wp'v + a^2 V = c^2 R\wp'v,$$

$$-\wp'v\,(a^2 P - c^2 R) = a^2 V.$$

Zoodra er wenteling plaats heeft, en dus V van nul verschilt, is het tweede lid positief; ook $(-\wp'v)$ is positief, dus $a^2 P > c^2 R$. Eveneens is $b^2 Q > c^2 R$.

De eerste ongelijkheid geeft

$$\int_0^v \left(\frac{\wp v - e_\gamma}{\wp u - e_\gamma} - \frac{\wp v - e_\alpha}{\wp u - e_\alpha}\right) du > 0,$$

of

$$(e_\alpha - e_\gamma) \int_0^v \frac{\wp u - \wp v}{(\wp u - e_\gamma)\,(\wp u - e_\alpha)}\, du > 0;$$

de hier voorkomende integraal is positief, derhalve is $e_\alpha > e_\gamma$, eveneens is $e_\alpha > e_\beta$, dus $e_\alpha = e_1$. Daar nu

$$c^2 = \tau^2\,(\wp v - e_1),$$

is dus *de omwentelings-as de kleinste as*, en wanneer de evenwichtsfiguur een omwentelingsellipsoïde is, moet deze afgeplat zijn.

Dat elke afgeplatte omwentelingsellipsoïde voldoet, kan op de volgende wijze bewezen worden. Door aftrekking van tellers en noemers in onze vergelijkingen (4) wordt gevonden

$$\frac{(P - Q)\,\wp'v}{\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}} = \frac{R\wp'v}{\dfrac{1}{c^2}},$$

dus

$$0 = Rc^2(a^2 - b^2) + a^2b^2\ (P - Q),$$

of

$$0 = \int_0^v \left[\frac{(pv - e_1)(e_2 - e_3)}{pu - e_1} + \frac{(pv - e_2)\ (pv - e_3)\ (e_3 - e_2)}{(pu - e_2)(pu - e_3)}\right] du.$$

Aan deze voorwaarde kan voldaan worden, ten eerste door te stellen $e_2 = e_3$, ten tweede door aan te nemen

$$0 = \int_0^v \left[\frac{pv - e_1}{pu - e_1} - \frac{(pv - e_2)\ (pv - e_3)}{(pu - e_2)\ (pu - e_3)}\right] du. \;.\;. (5)$$

De eerste vergelijking doet zien, dat elke *afgeplatte omwentelingsellipsoïde* een evenwichtsvorm is, de tweede bepaalt de ongelijkassige ellipsoïde van Jacobi, die later zal besproken worden.

§ 2. *Omwentelingsellipsoïden.*

Wanneer $e_2 = e_3$ is, ontaardt de elliptische functie in een goniometrische. Men heeft in dat geval

$$pu = e_1 + \frac{3e_1}{2} \cot^2\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right)$$

en dientengevolge

$$P = Q = \int_0^v \frac{du}{pu - e_3} = \int_0^v \frac{du}{\frac{3e_1}{2} \operatorname{cosec}^2 u \sqrt{\frac{3e_1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{3e_1}\left(v - \frac{\sin v \sqrt{6e_1}}{\sqrt{6e_1}}\right),$$

$$R = \int_0^v \frac{du}{pu - e_1} = \frac{2}{3e_1} \int_0^v \operatorname{tg}^2 u \sqrt{\frac{3e_1}{2}}\, du =$$

$$= \frac{2}{3e_1}\left(\sqrt{\frac{2}{3e_1}} \operatorname{tg} v \sqrt{\frac{3e_1}{2}} - v\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3e_1}} \operatorname{bg\,cot} \sqrt{\frac{pv - e_1}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\frac{2}{3e_1}} \operatorname{bg\,tg} \lambda,$$

wanneer men stelt $\lambda^2 = \dfrac{a^2 - c^2}{c^2}$, zoodat

$$\sin v \sqrt{6e_1} = \sin (2 \operatorname{bg\,tg} \lambda) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \operatorname{tg} v \sqrt{\frac{3e_1}{2}} = \lambda.$$

Volgens onze vergelijking (4) is

$$V = \left(\frac{pv - e_1}{pv - e_3} R - P\right) p'v,$$

derhalve vindt men na een eenvoudige bewerking

$$V = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{bg\,tg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}.$$

De discussie dezer vergelijking [1]) leert, dat voor elke waarde van $V = \dfrac{\omega^2}{2\pi\rho k} < 0.22467$, nauwkeuriger 0.2246657 [2]), twee afgeplatte omwentelingsellipsoïden als evenwichtsvormen voorkomen, terwijl λ — alle waarden tusschen 0 en ∞ aannemend — bij één dezer vormen, *de ellipsoïde van Maclaurin*, kleiner, bij den anderen, *de ellipsoïde van d'Alembert*, grooter is dan 2,5293, welke waarde λ verkrijgt voor $V = 0.22467$, wanneer de twee ellipsoïden samenvallen; is de hoeksnelheid grooter, zoodat

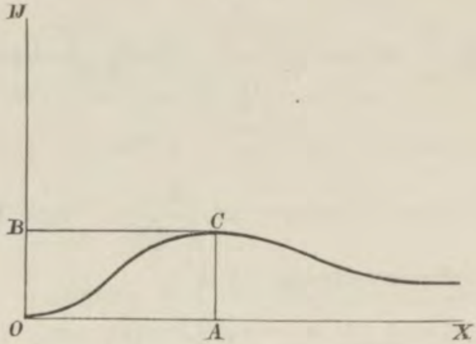
---

[1]) d'Alember *Opuscules mathématiques*, Vol. VI, 1773, *Mémoire sur la Figure de la Terre*, p. 51; — Meyer, Crelle's Journal, XXIV, p. 50; — Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, II, p. 84.

[2]) Deze waarde wordt door Matthiessen, Schriften der Universität zu Kiel, VI, p. 35, ontleend aan den Deenschen schrijver Ramus.

$V > 0{,}22467$, dan kan geen omwentelingsellipsoïde evenwichtsfiguur der vloeistofmassa[1]) zijn. De bekende graphische voorstelling (fig. 1) moge nog tot opheldering dienen. Bij $\lambda = OA = 2{,}5293$ behoort de grootste ordinaat $V = OB = AC = 0{,}22467$.

Fig. 1.



Voor $V = 0$ neemt λ hare grenswaarden aan, deze zijn

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = \infty.$$

Aan de eerste beantwoordt de *bol*, aan de tweede, zooals straks zal blijken, een *oneindig groote platte schijf*. Dit alles zal volgen uit onze vergelijkingen (4), die voor dit geval worden,

$$\tau^2 p'v \int_0^v \frac{pv - e_\gamma}{pu - e_\gamma}\, du = \tau^2\, p'v \int_0^v \frac{pv - e_\beta}{pu - e_\beta}\, du = \tau^2\, p'v \int_0^v \frac{pv - e_\alpha}{pu - e_\alpha}\, du.$$

Immers, hieraan voldoet

$$1^0.\ e_\alpha = e_\beta = e_\gamma,$$

en in dit geval zal de evenwichtsvorm een *bol* zijn volgens de vergelijkingen $a^2 = \tau^2 (pv - e_\alpha)$, enz.; maar ook voldoet

$$2^0.\ e_\alpha \neq e_\beta = e_\gamma,$$

[1]) Dit laatste werd voor het eerst aangetoond door Thomas Simpson in 1743. Zie Todhunter, *History of the theories of attraction*, etc., art. 284.

welke betrekking, omdat het hier een afgeplatte omwentelingsellipsoïde betreft, den vorm aanneemt

$$e_1 + e_2 = e_3 .$$

Echter is het dan noodzakelijk, dat men tegelijkertijd heeft

$$\mathrm{p}'v = 0, \qquad v = \omega.$$

Ook de waarde van V, die onmiddellijk uit (4) af te leiden is,

$$V = -\mathrm{p}'v \int_0^v \frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}{(\mathrm{p}u - e_2)(\mathrm{p}u - e_3)}\, du, \quad . \ . \ . \ . \ (6)$$

voert tot hetzelfde resultaat: daar de integraal positief is, zoodra $v > 0$, kan V slechts verdwijnen voor $v = \omega$.

Wij kunnen ons nu voorstellen, dat éénzelfde vloeistofmassa, terwijl de hoeksnelheid (of liever het moment van rotatie, waarover later) verandert, successievelijk de gedaante van alle mogelijke afgeplatte omwentelingsellipsoïden aanneemt; de massa blijft dan constant, en mag dus ook voor $v = \omega$ niet nul, noch ook ergens oneindig groot worden.

Hieruit blijkt de beteekenis van den proportionaliteitsfactor τ^2 in de vergelijkingen

$$a^2 = \tau^2 (\mathrm{p}v - e_\gamma), \text{ enz.,}$$

de massa toch is

$$^4/_3\, \pi \rho\, a b c = -2 \pi \rho \tau^3 \mathrm{p}'v,$$

stelt men derhalve

$$\tau^3 = -\frac{K}{\mathrm{p}'v},$$

waarin K een positieve eindige constante beteekent, dan wordt de massa gelijk aan $2 \pi \rho K$, dus onafhankelijk van v en steeds eindig.

Met behulp dezer waarde van τ vindt men in het tweede grensgeval

$$b^2 = a^2 = \frac{(\mathrm{p}v - e_3)\, K^{\frac{2}{3}}}{[\,2\,(\mathrm{p}v - e_3)\, \sqrt{\mathrm{p}v - e_1}\,]^{\frac{2}{3}}},$$

$$c^2 = \frac{(\mathrm{p}v - e_1)\, K^{\frac{2}{3}}}{[\,2\,(\mathrm{p}v - e_3)\, \sqrt{\mathrm{p}v - e_1}\,]^{\frac{2}{3}}}.$$

Nadert v tot ω, dan wordt

$$a^2 = b^2 = \infty, \qquad c^2 = 0.$$

In dit grensgeval heeft men dus te doen met de *platte*, *oneindig ver uitgestrekte schijf.*

Het *moment van rotatie*, d. w. z. het product van hoeksnelheid en traagheidsmoment, dus

$$\frac{2\,\pi\,\rho\,K\,\omega}{5}\,(a^2 + b^2),$$

of bij de afgeplatte omwentelingsellipsoïde

$$\frac{2\,\pi\,\rho\,K\,\omega\,c^2\,(1 + \lambda^2)}{5}$$

blijkt nul te zijn voor $\lambda = 0$ en oneindig groot voor $\lambda = \infty$, terwijl verder aan elke gegeven waarde van de massa en het moment van rotatie één enkele waarde van λ, dus *één enkele omwentelingsellipsoïde* beantwoordt, zooals door Laplace bewezen is [1]).

---

[1]) *Mécan. cél.*, L. III, § 21. — Zie verder Resal, *Traité élémentaire de Mécan. cél.*, p. 193; — Jullien, *Problèmes de Mécan. rationnelle*, 2ᵉ éd., II, p. 455; — K. Stier, *über die ellipsoïdischen Gleichgewichtsfiguren und die Umdrehungsgeschwindigkeit einer homogenen flüssigen Masse bei gegebener Energie*, Zeitschr. Math. Phys., XXV, p. 405.

§ 3. *Ellipsoïde van Jacobi.*

Wij zagen reeds op p. 14, dat er naast de omwentelingslichamen door $e_2 = e_3$ voorgesteld nog andere ellipsoïdale evenwichtsvormen zijn, welker vergelijking luidt

$$0 = \int_0^v \left[\frac{\mathrm{p}v - e_1}{\mathrm{p}u - e_1} - \frac{(\mathrm{p}v - e_2)\ (\mathrm{p}v - e_3)}{(\mathrm{p}u - e_2)\ (\mathrm{p}u - e_3)}\right] du, \quad . \ . \ . \ (5)$$

waarvoor achtereenvolgens kan worden geschreven

$$0 = 4 \int_0^v \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)\,[(\mathrm{p}v - e_1)(\mathrm{p}u - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{\mathrm{p}'^2 u} du =$$

$$= 4(\mathrm{p}v - e_1) \int_0^v \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)\left[(\mathrm{p}u - e_1) - \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\mathrm{p}v - e_1}\right]}{\mathrm{p}'^2 u} du =$$

$$= 4\,(\mathrm{p}v - e_1) \int_0^v \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)\ \ [\mathrm{p}u - \mathrm{p}\,(v + \omega)]}{\mathrm{p}'^2 u}\ du.$$

Hier is $\mathrm{p}u - \mathrm{p}v$ in het verloop der integratie altijd positief, de integraal kan dus slechts nul worden, als $\mathrm{p}u - \mathrm{p}\,(v + \omega)$ negatieve waarden aanneemt, dus als $\mathrm{p}v$ kleiner is dan $\mathrm{p}\,(v + \omega)$, maar voor $v \leqq \frac{\omega}{2}$ is $\mathrm{p}v \geqq \mathrm{p}\,(v + \omega)$, dus opdat aan (5) worde voldaan, *moet v grooter zijn dan* $\frac{\omega}{2}$.

De integraal, die wij zooeven bij omzetting van (5) ontmoetten, worde nu door $f(v)$ voorgesteld, wij nemen dus

$$f(v) = \int_0^v \frac{(pu - pv)\,[pu - p\,(v + \omega)]}{p'^2 u}\, du.$$

Voor $v = \dfrac{\omega}{2}$ is

$$f(v) = \int_0^v \frac{\left(pu - p\,\dfrac{\omega}{2}\right)^2}{p'^2 u}\, du > 0\,,$$

voor $v = \omega$ is $p\,(v + \omega)$ oneindig groot, dus $f(v) < 0$.

Ten anderen heeft men

$$f'(v) = -p'v \int_0^v \frac{[pu - p\,(v + \omega)] - \dfrac{(pu - pv)[p\,(v + \omega) - e_1]}{pv - e_1}}{p'^2\, u}\, du =$$

$$= \frac{-p'v\;[pv - p\,(v + \omega)]}{4\,(pv - e_1)} \int_0^v \frac{du}{(pu - e_2)\,(pu - e_3)}\,.$$

Het teeken van $pv - p\,(v + \omega)$ bepaalt dat van $f'(v)$, dientengevolge is $f'(v)$ *altijd negatief* voor $\dfrac{\omega}{2} < v \leqq \omega$.

Dus $f(v)$ wordt in het verloop tusschen $\dfrac{\omega}{2}$ en ω *éénmaal*, maar ook *niet meer dan éénmaal* gelijk aan nul. Derhalve voldoet *bij elke verhouding van* e_1, e_2, e_3 één enkel argument v aan vergelijking (5). Aan die waarde van v beantwoordt dan een ongelijkassige ellipsoïde met de assen

$$a^2 = \tau^2\,(pv - e_\gamma), \qquad b^2 = \tau^2\,(pv - e_\beta), \qquad c^2 = \tau^2\,(pv - e_1)\,;$$

dit is de ellipsoïde van Jacobi. Tevens hebben wij bewezen dat in elk stelsel van confocale ellipsoïden slechts één zoodanige evenwichtsvorm voorkomt; deze stelling zullen wij later nog als bijzonder geval eener veel algemeenere eigenschap ontmoeten.

Uit het bovenstaande kan nog worden afgeleid, dat de drieassige ellipsoïde, welke aan (5) voldoet, steeds aanzienlijk afwijkt van den bolvorm, want men heeft

$$\frac{\omega}{2} < v < \omega$$

of wel

$$\wp\frac{\omega}{2} > \wp v > e_1 ,$$

hetgeen ook kan geschreven worden in den vorm

$$e_1 + \sqrt{(e_1 - e_\beta)(e_1 - e_\gamma)} > \wp v > e_1 ,$$

of

$$\frac{e_1 - e_\beta}{\wp v - e_1} \times \frac{e_1 - e_\gamma}{\wp v - e_1} > 1,$$

met andere woorden

$$\frac{b^2 - c^2}{c^2} \times \frac{a^2 - c^2}{c^2} > 1,$$

$$a^2 b^2 > c^2 (a^2 + b^2),$$

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Dus a fortiori heeft men, als b. v. a de grootste as is,

$$\frac{1}{c^2} > \frac{2}{a^2},$$

derhalve *is de grootste as der drieassige ellipsoïde meer dan* $\sqrt{2}$ *maal zoo groot als de omwentelingsas.*

Om het bewijs te voltooien, dat bij gegeven, binnen zekere grenzen liggende hoeksnelheid één drieassige ellipsoïde behoort, zouden wij nu nog moeten aantoonen, dat aan een gegeven waarde van V één bepaalde verhouding der wortelverschillen of één bepaalde waarde van $q = e^{-\frac{\pi \omega'}{i \omega}}$ beantwoordt.

Maar juist door de invoering van het elliptisch argument zijn de vergelijkingen in een vorm gekomen, die minder geschikt is om dit bewijs te leveren.

Wij bepalen ons dus hier tot een korte samenvatting van Meyer's redeneering [1]), die door Liouville [2]), Tisserand [3]) en anderen bijna ongewijzigd wordt overgenomen.

Onze vergelijkingen (5) en (6) nemen dan een vorm aan, die ook bij de bespreking der becijferingen van Roche, Plana en Matthiessen te pas zal komen. Zij worden nl.

$$\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)(1-\lambda^2\lambda'^2u^2)}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du,$$

terwijl

$$1+\lambda^2 = \frac{b^2}{c^2}, \qquad 1+\lambda'^2 = \frac{a^2}{c^2}.$$

Door de substitutie

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad 1+\lambda^2 = \frac{1}{t}, \quad 1+\lambda'^2 = \frac{1}{s}$$

worden zij omgezet in

$$(1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (a)$$

---

[1]) Crelle's Journal, XXIV, p. 52, sqq.

[2]) Journal de Mathém., 1851, p. 246.

[3]) *Traité de Mécan. cél.*, II, p. 98; — Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, zweite Aufl., II, p. 613.

ERRATA.

Pag. 22, regel 13 v. b. staat $\dfrac{\omega^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}$,

lees $\dfrac{\omega^2}{4\pi\rho k(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Pag. 26, regel 15 v.b. staat $(e_1 - e_3)$, lees $(e_3 - e_1)$.

Pag. 42, regel 10 v. o. staat $h < 0$, lees $H < 0$.

Pag. 46, regel 9 v. b. aan de vergelijking toe te voegen . . . . (3).

Bij de becijfering op p. 63 sqq. werd gebruik gemaakt van de formule (80, 3°) bij Halphen, I, p. 447, waarin, zooals ik eerst later vond (vgl. Stelling XVI, p. 193) een vergissing voorkomt. Dientengevolge moeten de volgende correcties worden aangebracht:

Pag. 63, laatste regel en p. 64, regel 2 v. b. staat $-4\sum_1^\infty \dfrac{kq'^k}{1+q'^k}$,

lees $-2\sum_1^\infty \dfrac{kq'^k}{1+q'^k}$.

Pag. 67, in formule (5a) staat $16q'$, lees $8q'$.
Pag. 73, regel 7 v. o., staat $16ye^{-x}$, lees $8ye^{-x}$.

Maar formule (5b) op p. 68 blijft onveranderd, en dientengevolge ook de uitkomsten, die op p. 74 en 75 daaruit afgeleid zijn.

Pag. 106, regel 4 v. b. staat $\dfrac{-2\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$, lees $\dfrac{-2\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$.

Pag. 167, laatste regel der noot, staat tweede lid, lees eerste lid.

$$\frac{\omega^2}{2\,\pi\,k\,\rho} = st\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)\,(1+tx)\,\Delta}, \quad \ldots\ldots (b)$$

waarin

$$\Delta = \sqrt{(1+x)\,(1+sx)\,(1+tx)}\,.$$

Vergelijking (a) leert onmiddellijk, dat de positieve grootheden s en t niet grooter kunnen worden dan 1, alsook dat voor $s=0$, $t=1$ is, en voor $s=1$, $t=0$. Verder wordt uit (a) afgeleid, dat bij gegeven t altijd *één enkele* waarde van s behoort; dit bewijs, veel gelijkend op het onze, dat *één* argument v tusschen $\frac{\omega}{2}$ en ω voldoet, is echter minder eenvoudig; terwijl nu nog $\frac{ds}{dt}$ negatief blijkt te zijn, groeit t aan van 0 tot 1, wanneer s van 1 tot 0 afneemt, en zal het daarbij *éénmaal* geschieden, dat $t=s$ wordt. Deze gemeenschappelijke waarde door σ voorstellend, kan men dit alles ophelderen door het volgende lijstje, hetwelk tevens doet zien, dat zoodra s en t verschillen, één dier twee verhoudingen kleiner is dan σ,

$$\begin{array}{lllll} s=1, & s>\sigma, & s=\sigma, & s<\sigma, & s=0, \\ t=0, & t<\sigma, & t=\sigma, & t>\sigma, & t=1. \end{array}$$

Uit vergelijking (b) leidt men af, dat $\frac{dV}{dt}$ altijd met $s-t$ in teeken overeenstemt; terwijl nu $V=0$ wordt voor $s=1$, $t=0$, zooals straks zal blijken, groeit V aan, totdat $s=t=\sigma$, en neemt dan weder af om nogmaals nul te worden voor $s=0$, $t=1$. Voor de drieassige ellipsoïde, die tevens omwentelingsellipsoïde is, bereikt V derhalve een maximum, dat wij V' zullen noemen.

Is dus

$$\frac{\omega^2}{2\,\pi\,k\,\rho} > V',$$

dan heeft men geen drieassige ellipsoïde als evenwichtsfiguur; voor $V < V'$ voldoen twee waarden van s,

$$s' > \sigma, \quad s'' < \sigma,$$

de correspondeerende waarden van t noemen wij t' en t''. Maar de vergelijkingen (a) en (b) zijn symmetrisch t. o. v. s en t; dus wanneer $s = s'$, $t = t'$ voldoet, stelt $s = t'$, $t = s'$ de andere oplossing voor. Hieruit volgt, dat $s'' = t'$ en $t'' = s'$, zoodat ten slotte *één ellipsoïde van Jacobi* voor $V < V'$ *evenwichtsfiguur is* [1]).

V' kan als volgt berekend worden, stel $e_2 = e_3$ in de vergelijking

$$\int_0^v \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)\,[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\,(v + \omega)]}{\mathrm{p}'^2 u}\, du = 0,$$

dan gaat zij over in

$$\int_0^v \frac{\left(\cot^2 u\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}} - \cot^2 v\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}}\right)\left(\cot^2 u\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}} - \mathrm{tg}^2\, v\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}}\right)}{\cot^2 u\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}}\quad \mathrm{cosec}^4\, u\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}}}\, du = 0.$$

Stel

$$\mathrm{tg}\, v\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}} = \lambda \text{ (zooals op p. 15)}, \quad \mathrm{tg}\, u\sqrt{\frac{3\,e_1}{2}} = x,$$

dan vindt men

$$0 = \int_0^\lambda \frac{(\lambda^2 - x^2)\,(1 - \lambda^2 x^2)\, x^2}{(1 + x^2)^3}\, dx.$$

---

[1]) Wel zou men desverkiezende met Poincaré kunnen zeggen, dat twee ellipsoïden voldoen, die echter slechts in stand verschillen, zoodat de éene door draaiing om de z-as over een hoek van 90^0 uit de andere ontstaat; hierop komen wij later nog terug.

Hieruit volgt

$$\operatorname{bg} \operatorname{tg} \lambda - \frac{13 \lambda^3 + 3 \lambda}{3 \lambda^4 + 14 \lambda^2 + 3} = 0.$$

Deze vergelijking heeft slechts één positieven wortel [1]), grooter dan 1, maar die terstond blijkt kleiner dan 2,5 te zijn; de ellipsoïde van Jacobi, die tevens omwentelings-ellipsoïde is, behoort dus *tot de ellipsoïden van Maclaurin* [2]), nl. die waarvoor

$$0 < \lambda < 2{,}5293. \text{ (cf. p. 15)}$$

En wel blijkt bij nader onderzoek, dat hier $\lambda = 1{,}3946$,

$$\sigma = \frac{1}{1 + 1{,}3946^2} = 0{,}3396, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 1{,}7160.$$

In het voorbijgaan kan nog er aan herinnerd worden (zie p. 23), dat voor de *ongelijkassige* ellipsoïden altijd s of t kleiner is dan σ, zoodat $\frac{a}{c}$ of $\frac{b}{c}$ grooter wordt dan 1,7160. Op p. 21 werd bewezen, dat de grootste as der drieassige ellipsoïde meer dan $\sqrt{2}$ maal zoo groot is als de omwentelingsas; hier volgt, dat $\frac{a}{c}$ of $\frac{b}{c}$ ten minste 1,7160 bedraagt. Later zal blijken, dat de reeds in onze inleiding vermelde tabel van Plana juist daarom geheel verkeerd is, omdat hij deze scherper uitgespro-

---

[1]) Het bewijs vindt men bij Tisserand, II, p. 104.

[2]) Dus Hicks, *Report on recent progress in Hydrodynamics*, British Assoc. for the advancement of science, 1882, Southampton, p. 58, zegt ten onrechte: „for $V = 0{,}18711$ the ellipsoidal form with unequal axes coalesces into that spheroidal form which has the *less* axis of rotation." Daar de massa der omwentelingsellipsoïde door $M = {}^4/_3\, \pi \rho c^3 (1 + \lambda^2)$ wordt voorgesteld, is $c = \sqrt[3]{\frac{3M}{4 \pi \rho (1 + \lambda^2)}}$ des te kleiner, naarmate λ grooter is; dus onder de twee omwentelingsellipsoïden, die bij eenzelfde massa aan dezelfde waarde van V beantwoorden, heeft die van d'Alembert, niet die van Maclaurin, de kleinste omwentelingsas.

ken stelling aangaande de assenverhouding over het hoofd heeft gezien.

Substitueert men

$$\text{bg tg}\,\lambda = \frac{13\,\lambda^3 + 3\,\lambda}{3\,\lambda^4 + 14\,\lambda^2 + 3}$$

in de vergelijking, die voor alle omwentelingsellipsoïden geldt,

$$V = \frac{(3+\lambda^2)\ \text{bg tg}\ \lambda - 3\,\lambda}{\lambda^3},$$

dan vindt men onmiddellijk

$$V' = \frac{4\,\lambda^2}{3\,\lambda^4 + 14\,\lambda^2 + 3};$$

maar $\lambda = 1{,}3946$, dus $V' = 0{,}18711$.

Terwijl dan voor $e_2 = e_3$ de grootste waarde van V wordt bereikt, kan V slechts verdwijnen voor $e_1 = e_2$ (cf. p. 16); uit onze vergelijkingen (4) volgt na substitutie der op p. 17 voor τ^2 gevonden waarde, dat nu

$$(-\mathrm{p}'v)^{\frac{1}{3}}\int_0^v\left(\frac{\mathrm{p}v-e_1}{\mathrm{p}u-e_1}-\frac{\mathrm{p}v-e_3}{\mathrm{p}u-e_3}\right)du = (-\mathrm{p}'v)^{\frac{1}{3}}(e_1-e_3)\int_0^v\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{(\mathrm{p}u-e_1)(\mathrm{p}u-e_3)}\,du = 0$$

moet zijn. Maar zal hieraan voldaan wezen, ook al is $\mathrm{p}'v = 0$? Daarbij moet men voor oogen houden, dat de hier voorkomende integralen niet eindig blijven, daar de bovenste grens oneindig groot wordt, want wij weten dat v grooter is dan $\frac{\omega}{2}$ en de reëele periode is in dit ontaardingsgeval der elliptische functiën oneindig groot; een afzonderlijk onderzoek is dus noodzakelijk.

Stel kortheidshalve

$$\frac{i\pi}{2\,\omega'} = \sqrt{\frac{-3\,e_3}{2}} = \alpha,$$

zoodat α een positief eindig getal wordt, met behulp waarvan men heeft

$$\mathrm{p}u - e_3 = \alpha^2\coth^2\alpha u, \qquad \mathrm{p}u - e_1 = \mathrm{p}u - e_2 = \frac{\alpha^2}{\sinh^2\alpha u},$$

$$\mathfrak{p}'u = -2\alpha^3 \frac{\cosh \alpha u}{\sinh^3 \alpha u}.$$

Dus vindt men

$$(-\mathfrak{p}'v)^{\frac{1}{3}} \int_0^v \left(\frac{\mathfrak{p}v-e_1}{\mathfrak{p}u-e_1} - \frac{\mathfrak{p}v-e_3}{\mathfrak{p}u-e_3}\right) du = \left(2\alpha^3 \frac{\cosh \alpha v}{\sinh^3 \alpha v}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^v \left(\frac{\coth^2 \alpha v}{\coth^2 \alpha u} - \frac{\sinh^2 \alpha u}{\sinh^2 \alpha v}\right) du =$$

$$= \left[2\alpha^3 \frac{\cosh \alpha v}{\sinh^{`} \alpha v}\right]^{\frac{1}{3}} \left[v \coth^2 \alpha v + \frac{v}{2 \sinh^2 \alpha v} - \frac{3 \coth \alpha v}{2\alpha}\right],$$

hetgeen voor $v = \infty$ nadert tot

$$Cve^{-\frac{2\alpha v}{3}},$$

waar C en α eindig zijn, dus tot nul.

Derhalve wordt voor $V = 0$, $e_1 = e_2$ behoorlijk voldaan aan (4).

Wanneer nu $e_2 = e_\beta$, zoodat

$$b^2 = \left(\frac{K}{-\mathfrak{p}'v}\right)^{\frac{2}{3}} (\mathfrak{p}v - e_2),$$

zijn de kwadraten der halve assen

$$c^2 = b^2 = \left(\frac{K}{-\mathfrak{p}'v}\right)^{\frac{2}{3}} (\mathfrak{p}v - e_1) = \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\mathfrak{p}v - e_1}{\mathfrak{p}v - e_3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$a^2 = \left(\frac{K}{-\mathfrak{p}'v}\right)^{\frac{2}{3}} (\mathfrak{p}v - e_3) = \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\mathfrak{p}v - e_3}{\mathfrak{p}v - e_1}\right)^{\frac{2}{3}};$$

door substitutie der hierboven gegeven waarde voor

$$\mathfrak{p}v - e_1 \qquad \text{en} \qquad \mathfrak{p}v - e_3$$

blijkt dan, dat zoowel c^2 als b^2 tot nul nadert voor $v = \infty$, terwijl a^2 oneindig groot wordt, of volgens Meyer (cf. p. 23)

$$t = 1, \qquad s = 0.$$

Is $e_2 = e_\gamma$, m. a. w. $b > a$, dan blijkt op dezelfde wijze, dat voor $v = \infty$,

$$c^2 = a^2 = 0, \qquad b^2 = \infty.$$

Dus de evenwichtsvorm is nu een *oneindig lange cylinder* [1]) *met oneindig kleine cirkelvormige basis;* zoodra V van nul verschilt, is de nog zeer lange naald niet rond meer, daar nu de omwentelingsas de kleinste der assen is (vgl. p. 13); de grootere as der elliptische doorsnede wordt dan kleine as van den aequator, welks excentriciteit bij het toenemen van V steeds afneemt, totdat hij voor $V = 0{,}18711$ in een cirkel overgaat.

In 1843 werd door Liouville [2]) aan Meyer's resultaten het bewijs toegevoegd, dat er slechts een drieassige ellipsoïde mogelijk is, wanneer het moment van rotatie μ zeker bedrag te boven gaat Als M de massa der ellipsoïde voorstelt, is

$$\mu = \frac{M\,(a^2 + b^2)\,\omega}{5},$$

en daar

$$\omega^2 = 2\,\pi\,\rho\,k\,V,$$

vindt men gemakkelijk

$$\frac{50\,\mu^2}{3\,k\,M^3}\left(\frac{4\pi\,\rho}{3\,M}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{c^2}{a\,b}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2\right]^2 V =$$

$$= 2^{\frac{4}{3}}\,\frac{(2\,\mathfrak{p}v + e_1)^2}{(-\,\mathfrak{p}'v)^{\frac{1}{3}}}\int\limits_0^v \frac{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v}{(\mathfrak{p}u - e_2)\,(\mathfrak{p}u - e_3)}\,du.$$

Stellen wij met Liouville het eerste lid door $\mathfrak{y}$ voor, dan blijkt dat voor de oneindig lange naald $\mathfrak{y} = \infty$, maar in onze notatie leenen zich de vergelijkingen minder goed tot

---

[1]) In richting der x-as, of in richting der y-as uitgerekt; maar dit is éénzelfde slechts in stand verschillende figuur, vgl. p. 24, noot.

[2]) Comptes Rendus, XVI, p. 216; Additions à la Connaiss. des Temps pour 1846, p. 85; Journal de Mathém., 1851, p. 245 en 251.

het bewijs, dat $\mathfrak{q}$ bij toenemende waarde van V steeds afneemt en voor $V' = 0{,}18711$ *minimum* wordt. Het zij ons dus geoorloofd naar de aangehaalde plaatsen van Liouville te verwijzen.

Uit bovenstaande formules volgt nu onmiddellijk, dat $\mathfrak{q}'$, de bij V' passende minimum-waarde van $\mathfrak{q}$, gelijk is aan

$$4\sigma^{-\frac{2}{3}} V',$$

zoodat men vindt

$$\mathfrak{q}' = 1{,}5376. \text{ [1]}$$

Het resultaat der discussie van de ellipsoïdale evenwichtsvormen kan aldus worden samengevat, terwijl V de meermalen vermelde constante is, evenredig met het vierkant der hoeksnelheid:

$0 < V < 0{,}18711$ . . . *twee omwentelingsellipsoïden en één ongelijkassige*,

$0{,}18711 < V < 0{,}22467$ . . . *twee omwentelingsellipsoïden*,

$0{,}22467 < V$ . . . . *geen ellipsoïdale evenwichtsvormen*

Of ook, als $\mathfrak{q}$ de grootheid is, evenredig met het vierkant van het moment van rotatie (zie vorige blz.), vindt men:

$0 < \mathfrak{q} < 1{,}5376$ . . . *één omwentelingsellipsoïde, waarbij* $\lambda < 1{,}3946$,

$1{,}5376 < \mathfrak{q} < \infty$ . . . . . . *één omwentelingsellipsoïde, waarbij* $\lambda > 1{,}3946$, *en één drieassige ellipsoïde.*

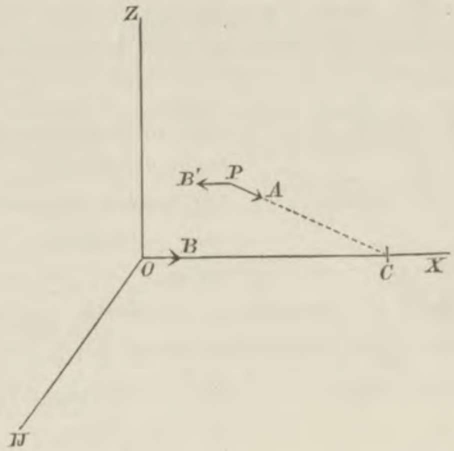
---

[1]) Tisserand, *Mécan. Cél.*, II, p. 107, geeft $4\sigma^{-\frac{2}{3}} V' = 0{,}3643$, deze foutieve waarde heeft hij gevonden door bij vergissing $4\sigma^{\frac{2}{3}} V'$ te berekenen.

§ 4. *Wentelende en door een verwijderd punt aangetrokken vloeistofmassa.*

Onderstellen wij met Roche [1]), dat een homogene vloeistofmassa met eenparige snelheid wentelt om een vaste as door haar massamiddelpunt O gebracht, die wij als z-as nemen, terwijl al hare deeltjes elkander aantrekken volgens de wet van Newton, en *daarenboven* onderworpen zijn aan een aantrekkende kracht, uitgaande van een zeer verwijderd punt C, dat in het aequatorvlak ligt (fig. 2); stel, dat ingevolge deze laatste kracht door het punt O een cirkelvormige baan wordt beschreven met C als middelpunt, en *dat de duur dezer wenteling gelijk is aan dien der wenteling van de vloeistofmassa om OZ.*

Fig. 2.



[1]) Mémoires de Montpellier, I, p. 245. — Over den invloed van de aantrekking der Aarde op den vorm der Maan handelde reeds Laplace, a priori onderstellend, dat de Maan weinig afwijkt van den bolvorm, *Mécan. cél.*, L. V, § 18, cf. L III, § 29 en 30.

Roche onderstelt, dat C om O wentelt: bij het afleiden der bewegingsvergelijking hebben wij nu eenmaal aangenomen, dat C in rust is, hetgeen tot hetzelfde resultaat voert; feitelijk draait niet alleen het uitwendig punt om de vloeistofmassa heen, maar ook deze massa om het punt C, en zooals Roche elders [1]) er bijvoegt: „le mouvement de rotation de la masse fluide s'effectue dans le même temps que le mouvement *relatif* du corps extérieur autour d'elle."

Omtrent deze onderstelling zegt Tisserand [2]): „Ce n'est pas là un problème de pure curiosité; la Lune se trouve précisément dans ce cas, et des expériences photométriques prouvent qu'il en est de même pour les satellites de Jupiter et de Saturne; il semble que l'égalité des mouvements de translation et de révolution des satellites soit une loi générale de notre système planétaire". Daarenboven wordt tegenwoordig veelal aangenomen [3]), dat bij Mercurius, wellicht ook bij Venus, de omloopstijd om de Zon gelijk is aan den duur der wenteling om de as.

De vergelijking der evenwichtsfiguur voor dit geval wordt als volgt gevonden [4]):

als coördinaatassen nemen wij behalve OZ twee assen OX en OY, die de vloeistofmassa in haar wentelende beweging om OZ volgen; als x-as werd de verbindingslijn genomen van O met C;

stel dat x, y, z de coördinaten zijn van een punt P der vloeistof; m massa der vloeistof,

---

[1]) Mémoires de Montpellier, I, p. 338 en 340.

[2]) Comptes Rendus, XCVI, p. 1172, en Mémoires de Montpellier, X, p. 504.

[3]) Newcomb—Engelmann, *Populäre Astronomie*, zweite Aufl. herausgegeben von Vogel, p. 328 en 336.

[4]) Deze afleiding ontleenen wij aan Tisserand, *Mécan. cél.*, II, p. 110; zij zal later van dienst zijn om een dwaling van Matthiessen in het licht te stellen.

M die van het aantrekkend punt C, $\frac{m}{M} = \mu$;

X, Y, Z componenten der aantrekking van de vloeistofmassa op de massaeenheid in P;

X_1, Y_1, Z_1 componenten der aantrekking $P\,A$ door het punt C uitgeoefend;

wij nemen aan, dat $O\,C = l$, *zeer groot is in vergelijking met de afmetingen der vloeistofmassa*, *zoodat de derde en hoogere machten van* $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$ en $\frac{z}{l}$, *mogen verwaarloosd worden.*

Om de gewone evenwichtsvergelijkingen te kunnen toepassen, alsof de assen vast waren, denken wij ons behalve de twee genoemde krachten nog op P werkend een kracht gelijk en tegengesteld aan die, welke de beweging van meêvoering van het punt P teweegbrengt. Maar deze beweging is samengesteld uit twee andere, de wenteling van O rondom C met versnelling

$$X_2 = \frac{k\,M}{l^2} = O\,B,$$

altijd volgens $O\,X$ gericht, en de wenteling om $O\,Z$, waaraan de centripetale versnelling beantwoordt. Dus $P\,B'$, die gelijk en tegengesteld is aan $O\,B$, en de centrifugale kracht met componenten $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, 0 moeten toegevoegd worden aan de krachten, die inderdaad op de in P geplaatste massa-eenheid werken.

De evenwichtsvergelijking voor het oppervlak der vloeistof wordt dus

$$(X + X_1 - X_2 + \omega^2 x)\,dx + (Y + Y_1 + \omega^2 y)\,dy + (Z + Z_1)\,dz = 0.$$

Stel $M\,C = b$, dan is

$$b^2 = (l - x)^2 + y^2 + z^2 = l^2\left(1 - \frac{2\,x}{l} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{l^2}\right)$$

Verder heeft men

$$X_1 = k\,M\,\frac{\partial\left(\frac{1}{b}\right)}{\partial x}, \qquad Y_1 = k\,M\,\frac{\partial\left(\frac{1}{b}\right)}{\partial y}, \qquad Z_1 = k\,M\,\frac{\partial\left(\frac{1}{b}\right)}{\partial z}.$$

Nu is

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{l}\left[1-\frac{2x}{l}+\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{l}\left[1+\frac{x}{l}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\,l^2}+\frac{3x^2}{2l^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{l}\left[1+\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2+z^2}{2l^2}\right],$$

terwijl $\left(\frac{x}{l}\right)^3$ volgens afspraak werd verwaarloosd.

Men zal dan vinden

$$(X+\omega^2 x)\,dx+(Y+\omega^2 y)\,dy+Z\,dz+\frac{k\,M}{l^3}(2x\,dx-y\,dy-z\,dz)=0.$$

Maar bij de eenparige cirkelvormige beweging van het punt O is

$$k\,(m+M)=\frac{4\,\pi^2\,l^3}{T^2}=\omega^2\;l^3$$

en omdat $\frac{m}{M}=\mu$, is

$$\frac{k\,M}{l^3}=\frac{\omega^2}{1+\mu}.$$

Zóó komt dus de evenwichtsvergelijking in den vorm

$$(X+\omega^2 x)dx+(Y+\omega^2 y)\,dy+Zdz+\frac{\omega^2}{1+\mu}(2x\,dx-y\,dy-z\,dz)=0.(7)$$

Opdat de evenwichtsfiguur een ellipsoïde zij, waarvan een as naar het aantrekkend punt gericht is, moet (7) identiek zijn met

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0.$$

Wij hebben dan volgens Lejeune—Dirichlet

$$X=-2\,\pi\rho\,k\,abc\,x\int_0^\infty\frac{d\,\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\text{, enz.}$$

Stelt men nu weder zooals op p. 11

$$\lambda = \tau^2\,(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v),$$

$$a^2 + \lambda = \tau^2\,(\mathrm{p}u - e_\gamma),\ \text{enz.},$$

$$\int_0^v \frac{du}{\mathrm{p}u - e_\gamma} = P,\ \text{enz.,} \qquad \frac{\omega^2}{2\,\pi\,\rho\,k} = V,$$

dan wordt

$$X = 2\,\pi\,\rho\,k\,x\,P\,\mathrm{p}'v\,\tau^3,\ \text{enz.,}$$

waaruit volgt

$$a^2\left[P\,\mathrm{p}'v + V\left(1 + \frac{2}{1+\mu}\right)\right] = b^2\left[Q\,\mathrm{p}'v + V\left(1 - \frac{1}{1+\mu}\right)\right] = c^2\left[R\,\mathrm{p}'v - \frac{V}{1+\mu}\right],$$

of

$$a^2\left[-\mathrm{p}'v\,P - V\frac{3+\mu}{1+\mu}\right] = b^2\left[-\,\mathrm{p}'v\,Q - \frac{V\mu}{1+\mu}\right] = c^2\left[-\mathrm{p}'v\,R + \frac{V}{1+\mu}\right]. \quad (8)$$

Daar $-\,\mathrm{p}'v$, V en μ nooit negatief worden, volgt onmiddellijk

$$a^2P > c^2R, \qquad b^2Q \geq c^2R,$$

en hieruit, zooals bleek op p. 13,

$$a > c, \qquad b > c.$$

Dus *de omwentelingsas is ook hier de kleinste as der ellipsoïde*, derhalve is

$$c^2 = \tau^2\,(\mathrm{p}v - e_1), \qquad b^2 = \tau^2\,(\mathrm{p}v - e_\beta), \qquad a^2 = \tau^2\,(\mathrm{p}v - e_\gamma).$$

Men kan de vergelijkingen ook in dezen vorm brengen:

$$\mu[a^2b^2(P-Q) + Rc^2(a^2-b^2)] + c^2(a^2P - b^2Q) - 3a^2(b^2Q - c^2R) = 0, (9)$$

en

$$\frac{a^2P - b^2Q}{a^2\,(3+\mu) - b^2\mu} = \frac{V}{-\mathrm{p}'v(1+\mu)} \; \ldots\ldots \; (10)$$

Soms komen ook de twee volgende vergelijkingen te pas, identiek met (9) en (10),

$$\frac{b^2 Q - c^2 R}{\mu\, b^2 + c^2} = \frac{V}{-\mathrm{p}'v(1+\mu)} = \frac{a^2 P - c^2 R}{a^2(3+\mu)+c^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

Uit (9) volgt, dat de halve assen a en b in dit algemeen geval *niet* gelijk kunnen zijn, tenzij ook $b = c$ is, behalve in het ook hier voorkomende grensgeval der platte oneindig ver uitgestrekte schijf, wanneer $V = 0$ wordt. Ook de bol en de oneindig lange cylinder, uitgerekt in de richting van het aantrekkend punt of in de richting loodrecht daarop, zijn hier grensgevallen, want voor $V = 0$ gaan de vergelijkingen (8) over in den op p. 16 gevonden vorm

$$a^2 P\, \mathrm{p}'v = b^2 Q\, \mathrm{p}'v = c^2 R\, \mathrm{p}'v.$$

Dus *de evenwichtsfiguren kunnen hier geen omwentelings-ellipsoïden zijn* [1]).

De as, die naar het uitwendig punt gericht is, kan zoowel grootste als middelbare as wezen, „mais il est évident qu'une figure allongée perpendiculairement à la direction de la masse M ne peut convenir à l'équilibre stable du fluide, puisqu'un ellipsoïde solide, ainsi allongé, serait instable." [2])

Stelt men $\mu = \infty$, dan ziet men de vergelijkingen te voorschijn komen der vloeistofmassa slechts aan de aantrekking van hare eigen moleculen onderworpen:

---

[1]) „Ein Doppelgestirn zweier gleicher von einander beträchtlich entfernter verlängerter *Rotationsellipsoïde* mit geringen unter sich gleichen Rotations- und Revolutionsgeschwindigkeiten" kan dus niet, zooals Matthiessen meende (Schriften der Universität zu Kiel, VI, p. 54) een evenwichtsfiguur zijn. In „Nachträge und Verbesserungen" (Zeitschr. Math. Phys., VI) werd deze fout niet hersteld; maar in Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 323 geeft hij op bij $V = 0{,}00229971$: „System zweier gleicher *Jacobi'scher* Ellipsoïde mit gleicher Rotation und Revolutionsdauer: $c = 1$, $b = 1{,}0017$, $a = 1{,}0107$, $l = 4{,}169$".

[2]) Mémoires de Montpellier, I, p. 247.

(8) gaat dan over in

$$a^2 (P\, \mathrm{p}'v + V) = b^2 (Q\, \mathrm{p}'v + V) = c^2 R\, \mathrm{p}'v,$$

dus de vergelijkingen (4);

(9) geeft de vergelijking van p. 13,

$$a^2 b^2 (P = Q) + Rc^2 (a^2 - b^2) = 0;$$

(10) en (11) geven

$$V = \frac{-\mathrm{p}'v\,(a^2 P - b^2 Q)}{a^2 - b^2} = \frac{-\mathrm{p}'v\,(b^2 Q - c^2 R)}{b^2} = \frac{-\mathrm{p}'v\,(a^2 P - c^2 R)}{a^2}.$$

Om een duidelijker inzicht te geven in het probleem van Meyer en Liouville als bijzonder geval van dat van Roche, kan het nog dienstig zijn de resultaten mede te deelen, die deze voor het algemeen geval gevonden heeft.

Wanneer V beneden zekere limiet blijft, zijn er twee drieassige ellipsoïden, waarbij $a < b$ is, maar, omdat deze zeker niet stabiel zijn, zullen wij liever spreken over de vormen, waarbij $a > b$, die ook ten getale van twee ontstaan, als V maar klein genoeg is, en wel neemt de grootste waarde van V toe, naarmate μ grooter wordt, zoodat zij het kleinst is voor $\mu = 0$, d. w. z. als de massa der vloeistof uiterst klein is in vergelijking met die van het uitwendig punt. Men vindt voor

$\mu = 0$ . . . . $V \leqq 0{,}046$,
$\mu = 1$ . . . . $V \leqq 0{,}072$,
$\mu = \infty$ . . . . $V \leqq 0{,}18711$.

Neemt V af en nadert tot nul, dan naderen de twee ellipsoïden, waarvoor $a > b$ is, respectievelijk tot den bol en de oneindig lange naald, in de richting der aantrekkende massa uitgerekt; maar als V toeneemt, wordt de afplatting der éene figuur grooter, de uitrekking der tweede vermindert, totdat zij samenvallen voor de limietwaarde van V en dan ophouden te bestaan. Bij den *grensvorm* (*forme limite*, zooals wij later met Poincaré zullen zeggen) zijn de assenverhoudingen voor

$$\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c^2 = 0{,}89b^2 = 0{,}22a^2,$$
$$\mu = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c^2 = 0{,}3396b^2 = 0{,}3396a^2.$$

Is dus de bovenste grens van V bij een bepaalde waarde van μ gegeven, dan weet men aanstonds of een vloeistofmassa met gegeven dichtheid en hoeksnelheid stabiele ellipsoïdale evenwichtsvormen kan bezitten.

Welke der twee stabiele[1]) evenwichtsvormen, die aan een gegeven waarde van V beantwoorden, in werkelijkheid ontstaat, hangt af van het *moment van rotatie*. Voor elke waarde van dit moment tusschen 0 en ∞ is er nl. *één ellipsoïde*, die in de richting der aantrekkende massa uitgerekt is; bij zeer kleine snelheid en klein rotatie-moment behoort een ellipsoïde, die weinig van een bol verschilt; terwijl de ellipsoïde meer en meer van een bol gaat verschillen, blijft het moment steeds toenemen, maar de snelheid neemt af, nadat V hare maximum-waarde bereikt heeft, en is weder nul, terwijl het moment ∞ wordt, als de ellipsoïde in de oneindig lange naald overgaat.

Wat de instabiele vormen betreft, zoolang het moment van rotatie onder een bepaald bedrag blijft, bestaan zij niet; bij die limiet is er één; daarboven twee, welke, als de snelheid nul wordt en het moment ∞, resp. overgaan in de oneindig groote schijf, en de oneindig lange naald, uitgerekt in de richting der y-as.

Dus aan elke waarde van het moment beantwoordt òf wel éène oplossing, of drie; maar in het laatste geval zijn er twee instabiel, zoodat er geen twijfel is over den vorm, dien de vloeistof zal aannemen, als zij ten minste ellipsoïdaal blijft. Wij komen later hierop terug.

---

[1]) Wij bedoelen hier steeds *stabiel* in onderstelling dat de vloeistof ellipsoïdaal moet blijven.

Wat wordt er nu van dit alles ingeval $\mu = \infty$ is? Vergelijking (9) wordt dan, zooals wij zagen,

$$a^2 b^2 (P - Q) + R c^2 (a^2 - b^2) = 0.$$

Deze vergelijking bevat den factor $a - b$ of $e_2 - e_3$, die gelijk aan nul gesteld in verbinding met

$$V = \frac{-\wp' v (a^2 P - c^2 R)}{a^2}$$

twee omwentelingsellipsoïden geeft; na deeling door $e_2 - e_3$ blijft over

$$\int_0^v \frac{(\wp u - \wp v) [\wp u - \wp (v + \omega)]}{\wp'^2 u} du = 0 \text{ (vgl. p. 19)},$$

hetwelk met één der drie vergelijkingen voor V (p. 36) verbonden, twee drieassige ellipsoïden geeft; maar zooals Roche zegt [1]: „il faut remarquer que l'axe a de nos ellipsoïdes, assujetti primitivement à être dirigé vers la masse M *peut maintenant être placé dans une direction quelconque*, *puisque M n'existe plus;* la direction des axes de l'ellipsoïde est maintenant indifférente pour son équilibre. Ainsi ces deux ellipsoïdes n'en font qu'un; c'est celui de Jacobi." De tak der stabiele oplossingen geeft nu voor $V < 0.18711$ de ellipsoïden van Jacobi en de omwentelingsellipsoïden, waarbij $\lambda < 1,3946$; de andere tak geeft de omwentelingsellipsoïden, waarbij $1,3946 < \lambda < \infty$, en een drieassige ellipsoïde, slechts in stand verschillend van die van Jacobi, dus die niet als een nieuwe evenwichtsfiguur te beschouwen is. De stabiele vorm is een omwentelingsellipsoïde voor kleine waarden van het rotatie-moment; de snelheid neemt toe met dat moment, totdat $V = 0,18711$ en $\mathfrak{q} = 1,5376$ (zie p. 29). Daarna wordt de ongelijkassige ellipsoïde stabiele evenwichtsvorm, terwijl het moment blijft toenemen en de

[1]) p. 252.

snelheid vermindert. Voor $\eta > 1{,}5376$ heeft men ook twee instabiele vormen, de éene wordt drieassig, identiek met den stabielen vorm, die aan hetzelfde moment van rotatie beantwoordt, de andere is de omwentelingsellipsoïde, waarbij $1{,}3946 < \lambda < \infty$.

§ 5. *Niet wentelende vloeistofmassa door een verwijderd punt aangetrokken.*

'tIs hier wel de meest geschikte plaats om iets te zeggen over een ander probleem door Roche behandeld[1]), nl. het onderzoek der ellipsoïdale evenwichtsvormen, van een *niet wentelende* vloeistofmassa, welker deeltjes elkander aantrekken volgens de wet van Newton, en ook worden aangetrokken door een zoozeer verwijderd punt, dat in vergelijking met de derde macht van den afstand die der afmetingen van de vloeistofmassa mag verwaarloosd worden. Door een discussie[2]) zeer veel gelijkend op die van p. 32 vindt men als evenwichtsvergelijking van het oppervlak der vloeistof

$$U + \frac{kM}{2l^3}(2x^2 - y^2 - z^2) = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

U is de potentiaal der krachten door de vloeistofdeeltjes op elkander uitgeoefend,

M massa van het verwijderd punt,

k attractie-constante,

x, y, z (vgl. fig. 2, p. 30) zijn de coördinaten van een punt der vloeistofmassa, de x-as is naar het aantrekkend punt gericht, de oorsprong ligt in het massamiddelpunt der vloeistof,

l afstand van dat massamiddelpunt tot het punt met massa M.

Men mag verwachten, dat wanneer de vloeistof een ellip-

---

[1]) Mémoires de Montpellier, II, p. 21.

[2]) vgl. Roche, l. c., p. 23.

soïde tot evenwichtsvorm heeft, een as naar het aantrekkend punt gericht is; dan moet (12) identiek zijn met

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Voeren wij weder onze vroegere notatie in,

$$U=\pi\rho k\,\wp'v\int_v^0\left(\tau^2-\frac{x^2}{\wp u-e_\gamma}-\frac{y^2}{\wp u-e_\beta}-\frac{z^2}{\wp u-e_\alpha}\right)du,$$

$$\int_0^v\frac{du}{\wp u-e_\gamma}=P,\ \text{enz.}$$

Het constante deel van U naar het tweede lid van (12) overbrengend, vindt men

$$\frac{2\pi\rho\,\wp'v\,P+\dfrac{2M}{l^3}}{\dfrac{1}{a^2}}=\frac{2\pi\rho\,\wp'v\,Q-\dfrac{M}{l^3}}{\dfrac{1}{b^2}}=\frac{2\pi\rho\,\wp'v\,R-\dfrac{M}{l^3}}{\dfrac{1}{c^2}}$$

of als

$$\frac{M}{2\pi\rho\,l^3}=\varepsilon,$$

$$\frac{P\wp'v+2\varepsilon}{\dfrac{1}{a^2}}=\frac{Q\wp'v-\varepsilon}{\dfrac{1}{b^2}}=\frac{R\wp'v-\varepsilon}{\dfrac{1}{c^2}}\ldots\ldots\quad(13)$$

Terwijl $\wp'v$ negatief is, volgt hieruit

$$a>b,\qquad a>c,\qquad a^2=\tau^2(\wp v-e_3),$$

dus *de as naar het aantrekkend punt gericht is de langste as.*[1])

---

[1]) Wordt $M=0$ of $l=\infty$, dus de vloeistofmassa geheel vrij, dan vervalt het bewijs, dat de langste as met de x-as zou samenvallen, en vinden wij de vroegere grensgevallen terug: den bol, de oneindig groote schijf, en de oneindig lange naald.

Ook volgt uit (13)

$$\frac{-\,\mathfrak{p}'v\int\limits_0^v\frac{du}{\mathfrak{p}u-e_2}+\varepsilon}{\tau^2\,(\mathfrak{p}v-e_2)} = \frac{-\,\mathfrak{p}'v\int\limits_0^v\frac{du}{\mathfrak{p}u-e_1}+\varepsilon}{\tau^2\,(\mathfrak{p}v-e^1)},$$

of

$$\varepsilon\,(e_1-e_2) = -\,\mathfrak{p}'v\,(e_2-e_1)\int\limits_0^v\frac{(\mathfrak{p}u-\mathfrak{p}v)}{(\mathfrak{p}u-e_\alpha)\,(\mathfrak{p}u-e_\beta)}\,du,$$

ε is positief, eveneens $(-\,\mathfrak{p}'v)$ en de integraal; dus de twee leden der vergelijking zouden in teeken verschillen, zoo niet $e_1 = e_2$ was.

Wanneer er dus ellipsoïdale evenwichtsvormen zijn, moeten het *omwentelingsellipsoïden* wezen, uitgerekt in de richting van het aantrekkend punt.

Verder kan nog uit (13) worden afgeleid

$$-\,\mathfrak{p}'v\,(a^2P - b^2Q) = (2a^2+b^2)\,\varepsilon;$$

stelt men

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = h^2, \qquad -\mathfrak{p}'v = \frac{2\,a^3\,(1-h^2)}{\tau^3},$$

dan gaat die vergelijking over in

$$\frac{(3-h^2)\,\tau^3\varepsilon}{2\,a^3\,(1-h^2)} + (1-h^2)\,Q - P = 0;$$

nu is in dit geval

$$P = \int\limits_0^v\frac{du}{\mathfrak{p}u-e_3} = \frac{2}{3\,e_3}\int\limits_0^v \mathrm{tg}^2\,iu\,\sqrt{\frac{-3\,e_3}{2}}\;du =$$

$$= \frac{-\tau^3}{a^3\,h^3}\left(h + \tfrac{1}{2}\log\,\frac{1-h}{1+h}\right),$$

$$Q = R = \int_0^v \frac{du}{pu - e_1} = \frac{2}{3e_3} \int_0^v \sin^2 iu \sqrt{\frac{-3e_3}{2}}\, du =$$

$$= \frac{\tau^3}{2a^3h^3}\left(\frac{h}{1-h^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-h}{1+h}\right);$$

men komt dan gemakkelijk tot de vergelijking

$$\frac{\varepsilon h^3}{1-h^2} + \frac{3h}{3-h^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1-h}{1+h} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Als men het eerste lid dezer vergelijking, door Roche op andere wijze afgeleid, H noemt, bevindt men, dat tusschen de uiterste waarden $h = 0$ en $h = 1$, $\frac{dH}{dh}$ tweemaal of geen enkele maal nul wordt. Men ziet, dat

$$H = 0 \text{ voor } h = 0, \qquad H = \infty \text{ voor } h = 1;$$

$$\frac{dH}{dh} = 0 \text{ voor } h = 0, \frac{dH}{dh} > 0 \text{ voor } h \text{ zeer klein}, \quad \frac{dH}{dh} = \infty \text{ voor } h = 1.$$

Opdat men een oplossing vinde, moet er een waarde van h wezen, waarvoor

$$\frac{dH}{dh} = 0, \qquad h < 0.$$

Dit wordt wellicht het duidelijkst door de volgende schematische figuren, waar h als abscis, H als ordinaat genomen werd.

In de eerste figuur wordt $\frac{d\,H}{d\,h}$ niet nul tusschen $h = 0$ en $h = 1$; in fig. 3 b zijn er tusschen die grenzen twee waarden van h, waarvoor $\frac{d\,H}{d\,h}$ verdwijnt, maar, aan de grootste dezer waarden beantwoordt een *positieve* waarde van H; in de derde figuur eindelijk wordt $\frac{d\,H}{d\,h}$ tweemaal nul tusschen $h = 0$ en $h = 1$, aan den grootsten wortel beantwoordt nu een *negatieve* waarde

Fig. 3 a.

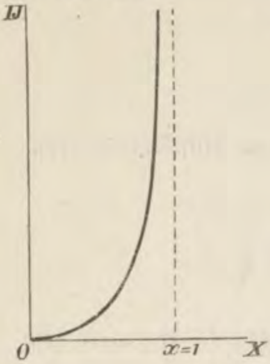


Fig. 3 b.

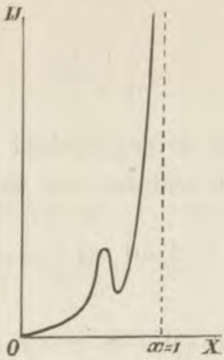
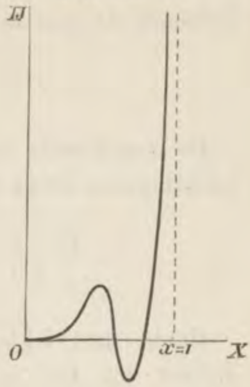


Fig. 3 c.



van H. Alleen in dit laatste geval geeft vergelijking (14) twee oplossingen; zij vallen samen, als de as der abscissen door de kromme lijn wordt geraakt. In dit overgangsgeval is, zooals Roche becijfert [1]),

$$\varepsilon = 0{,}00067.$$

Deze waarde noemen wij ε'.

Is $\varepsilon > \varepsilon'$, dan ligt de geheele kromme boven de x-as, daar nu bij eenzelfde waarde van h een grootere H behoort, zooals uit (14) volgt; is echter $\varepsilon < \varepsilon'$, dan ligt de kromme lager, en wordt dus de x-as tweemaal gesneden.

Terwijl bij de ellipsoïde, die aan de grens ε' beantwoordt, de as, naar de aantrekkende massa gericht, omtrent 27 maal zoo lang is als de aequator-as, is van de twee ellipsoïden, die voldoen voor $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, de éene meer, de andere minder uitgerekt. Naarmate ε afneemt, wordt de éene meer en meer uitgerekt, de andere nadert tot den bolvorm.

Het bestaan der twee ellipsoïdale evenwichtsvormen en hunne uitrekking hangen dus af van $\varepsilon = \dfrac{M}{2\pi\rho l^3}$. Wordt de aan-

[1]) l. c., p. 30.

trekkende massa M bolvormig ondersteld, met straal R en dichtheid D, dan is

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{D}{\rho} \frac{R^3}{l^3}.$$

De voorwaarde voor de mogelijkheid van ellipsoïdale evenwichtsfiguren komt dus omtrent neer op

$$\frac{D}{\rho} \left(\frac{R}{l}\right)^3 < 0{,}001, \text{ of } \frac{l}{R} > 10 \sqrt[3]{\frac{D}{\rho}}.$$

Maakt men l kleiner, d. w. z. brengt men de vloeistofmassa dichter bij het aantrekkend punt, dan zal de ellipsoïdale vorm des te spoediger onmogelijk zijn, naarmate de dichtheid ρ der vloeistofmassa kleiner is. Roche geeft hiervan het volgende voorbeeld [1]): „pour un fluide de densité égale à celle de l'air et attiré par le soleil, l'équilibre serait impossible sous la forme ellipsoïdale, si sa distance au soleil ne surpassait pas celle de la planète de Mercure. On voit par cet exemple que le problème que nous avons traité se rattache à la théorie des comètes et peut y trouver quelques applications." Tot opheldering van dit laatste ontleenen wij nog eenige woorden aan het verslag van Tisserand [2]) over den wetenschappelijken arbeid van Roche: „Si l'on conçoit une comète tombant en ligne droite sur le Soleil, sa figure, d'abord sphérique, deviendra ellipsoïdale, s'allongera de plus en plus vers le centre d'attraction, et il pourra arriver que la figure ellipsoïdale cesse d'exister et que la masse de la comète se divise en plusieurs fragments, tombant chacun de leur côté vers le Soleil."

---

[1]) Comptes Rendus, XXXI, p. 515.

[2]) Comptes Rendus, XCVI, p. 1173.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Toepassingen en becijferingen.

§ 1. *Omwentelingsellipsoïden.*

De formules van het eerste hoofdstuk kunnen worden toegepast, hetzij om bij gegeven V de assenverhoudingen te bepalen der ellipsoïdale evenwichtsvormen, hetzij om de hoeksnelheid of liever de constante V en een der assenverhoudingen te berekenen, wanneer de andere assenverhouding gegeven is.

Over de omwentelingsellipsoïden kunnen wij kort zijn: de geheele oplossing ligt dan opgesloten in de vergelijking, die wij reeds op p. 15 ontmoetten,

$$V = \frac{(3+\lambda^2)\,\mathrm{bg\,tg}\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

terwijl $\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$. 't Behoeft geen betoog, dat hieruit bij gegeven λ aanstonds V wordt gevonden, terwijl ook, als V bekend is, de waarde van λ kan worden bepaald, derhalve ook $\frac{a}{c} = \sqrt{1+\lambda^2}$, en wel het gemakkelijkst als V zeer klein, dus λ of wel zeer klein, of zeer groot is; dit geval doet zich nu juist voor bij de toepassing, die wij voornamelijk op het oog hebben, nl. bij een vloeistofmassa, die met de gemiddelde dichtheid en snelheid der Aarde zou wentelen.

Door de bekende reeksontwikkelingen voor bg tg λ vindt men voor $\lambda < 1$,

$$V = \frac{4}{3 \times 5}\lambda^2 - \frac{2 \times 4}{5 \times 7}\lambda^4 + \frac{3 \times 4}{7 \times 9}\lambda^6 - \text{enz.},$$

of

$$V = 4 \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n\lambda^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

of in den vorm eener hypergeometrische reeks

$$V = \frac{4}{15}\lambda^2 F\left(2 . \frac{3}{2} . \frac{7}{2} . -\lambda^2\right),$$

terwijl voor $\lambda > 1$ gevonden wordt

$$\frac{2V}{\pi} = \frac{1}{\lambda} - \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^3} - \frac{8}{\pi} \sum_2^\infty \frac{(-1)^n n}{(2n-3)(2n-1)\lambda^{2n}}$$

Bij kleine V kan (2) volgens een opmerking van Kostka [1]) vervangen worden door

$$\frac{15}{4}V = \frac{\lambda^2}{1 + \frac{6}{7}\lambda^2} - \frac{1}{49}\lambda^6 - \left(\frac{20}{33} - \frac{216}{343}\right)\lambda^8 + \left(\frac{75}{143} - \frac{1296}{2401}\right)\lambda^{10},$$

of

$$\frac{\lambda^2}{1 + \frac{6}{7}\lambda^2} - \frac{15\,V}{4} = \frac{\lambda^6}{49} - 0{,}0237\,\lambda^8 + 0{,}015\,\lambda^{10},$$

zoodat men bij eerste benadering vindt

$$\lambda^2 = \frac{\frac{15\,V}{4}}{1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{15\,V}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

---

[1]) Berliner Monatsberichte, 1870, p. 117.

Kostka gaat dan voort:

„Setzt man dies in die rechte Seite der vorigen Gleichung ein, so erhält man noch genauer:

$$\lambda^2 = \frac{\frac{15}{4}V + \frac{1}{49}\left(\frac{15\,V}{4}\right)^3 + 0{,}0289\left(\frac{15\,V}{4}\right)^4 + 0{,}057\left(\frac{15\,V}{4}\right)^5}{1 - \frac{6}{7}\left[\frac{15\,V}{4} + \frac{1}{49}\left(\frac{15\,V}{4}\right)^3 + 0{,}0289\left(\frac{15\,V}{4}\right)^4 + 0{,}057\left(\frac{15\,V}{4}\right)^5\right]} \quad (2b)$$

Diese Formel liefert noch für $V = 0{,}009$ den Werth von λ^2 bis zur 7. Dezimale richtig; denn hierfür ist

$$\lambda^{10} = \left(\frac{15\,V}{4}\right)^5 < 0{,}000\,000\,05."$$

Wij kunnen niet nalaten hieraan toe te voegen, dat de formule (2b) dan alleen een „nog nauwkeuriger" resultaat oplevert dan (2a), als V in een groot aantal decimalen bekend is; zelfs als V niet veel kleiner is dan 0,009, zouden behalve de twee nullen achter het decimaalteeken nog resp. minstens 4, 6 en 7 decimalen zeker moeten zijn, opdat men

$$\frac{1}{49}\left(\frac{15\,V}{4}\right)^3, \qquad 0{,}0289\left(\frac{15\,V}{4}\right)^4, \qquad 0{,}057\left(\frac{15\,V}{4}\right)^5$$

bij $\frac{15}{4}V$ kunne optellen; en terwijl bij menige toepassing V veel kleiner is dan 0,009, zou daar het aantal bekende decimalen nog veel grooter moeten zijn, hetgeen veelal niet het geval is.

Opmerkelijk is, dat Matthiessen [1]), die de verhandeling van Kostka kende, minder nauwkeurige benaderingsformules geeft ter bepaling der kleine waarde van λ, nl. de twee volgende

$$V = \frac{4}{15}\lambda^2, \qquad V = \frac{4}{5}\lambda^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\lambda^2\right),$$

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 293.

immers bij deze laatste formule is nog $\frac{4}{21}\lambda^6$ verwaarloosd, terwijl Kostka zelfs bij (2a) slechts $\frac{1}{49}\lambda^6$ wegliet.

De formule (3) voor zeer groote waarde van λ kan ook geschreven worden

$$\frac{2V}{\pi}=\left(1-\frac{16V}{\pi^2}\right)\frac{1}{\lambda}-\left(\frac{64}{\pi^2}-3\right)\frac{1}{\lambda^3}+\frac{56}{3\pi}\cdot\frac{1}{\lambda^4}-\frac{128}{3\pi^2}\cdot\frac{1}{\lambda^5}\text{ enz.,}$$

waaruit bij verwaarloozing der vierde macht van $\frac{1}{\lambda}$ wordt afgeleid

$$\lambda=\frac{\pi}{2V}-\frac{8}{\pi}-3{,}485\,\frac{2V}{\pi},$$

zoodat men verder komt tot

$$\frac{a}{c}=\lambda+\frac{1}{2\lambda}=\frac{\pi}{2V}-\frac{8}{\pi}-2{,}985\,\frac{2V}{\pi}.\text{[1]}$$

Matthiessen geeft voor de „ellipsoïde van Laplace", zooals hij ten onrechte die van d'Alembert noemt, de vrij wat minder nauwkeurige formule

$$\frac{a}{c}=\frac{\pi}{2V},$$

waarbij dus $\frac{8}{\pi}=2{,}5465$ is verwaarloosd. Doch uit zijne formule

$$V=\frac{\pi}{2\lambda}-\frac{4}{\lambda^2},$$

welke aanstonds uit (1) volgt, had hij ook kunnen afleiden

$$\frac{a}{c}=\frac{\pi}{2V}-\frac{8}{\pi}.$$

[1] Kostka begaat hier een kleine fout, hij geeft nl.

$$\frac{a}{c}=\frac{\pi}{2V}-\frac{8}{\pi}-2{,}485\,\frac{2V}{\pi}.$$

Maar zijn de formules van Matthiessen minder goed dan die van zijn voorganger Kostka, ook deze laatste had zich eenige moeite kunnen besparen, zoo hij de verhandeling van Plana gekend had, die reeds in 1852 uit een vergelijking, die met (2) op p. 46 overeenkomt, door omkeering van reeksen vond [1])

$$\frac{\lambda^2}{2} = \frac{15}{8}V + \frac{12}{7}\left(\frac{15}{8}V\right)^2 + \frac{148}{49}\left(\frac{15}{8}V\right)^3 + \frac{21673}{11319}\left(\frac{15}{8}V\right)^4 + \ldots\ldots;$$

deze formule nu leent zich gemakkelijker dan (2b) om bij gegeven waarde van V de assenverhouding te bepalen. Ook had Kostka wel met een enkel woord mogen vermelden, dat zijne benaderingsformule voor λ bij zeer afgeplatte omwentelingsellipsoïden, nl.

$$\lambda = \frac{\pi}{2V} - \frac{8}{\pi} - \frac{2V}{\pi}\left(\frac{64}{\pi^2} - 3\right) + \ldots.,$$

reeds door Laplace is afgeleid [2]).

Volledigheidshalve dient nog te worden opgemerkt, dat wanneer V niet veel zou verschillen van $\pi - 3 = 0.14159$ (de waarde, die zij voor $\lambda = 1$ aanneemt) bij de berekening van λ voor de ellipsoïde van Maclaurin, het opsporen eener waarde, die ongeveer voldoet, en daarna toepassing der reeks van Lagrange of Bürmann allicht te verkiezen zou zijn boven de straks gevolgde methode der ontwikkeling van bg tg λ.

Alvorens de formules toe te passen op de vloeistofmassa met de snelheid der Aarde wentelend, zullen wij in het kort aangeven, hoe men in dit geval de waarde van V, die wij met V_a zullen aanduiden, uit experimenteele gegevens heeft bepaald [3]).

De zwaartekracht aan den aequator wordt door g_0, de

[1]) Astron. Nachr., XXXVI, c. 154.

[2]) *Mécan. cél.*, L. III, § 20.

[3]) Wij volgen hier Tisserand, *Mécan. cél.*, II, p. 90; zie ook Roche, Mémoires de Montpellier, I, p. 256.

aequatorstraal door b, de verhouding der middelpuntvliedende kracht tot de zwaartekracht door φ voorgesteld; verder zij l de lengte van den enkelvoudigen secondeslinger aan den evenaar, ω_a de hoeksnelheid bij de wenteling der aarde om hare as, T_a de duur dier wenteling, terwijl de seconde van den middelbaren tijd als tijdseenheid genomen is (zoodat $T_a = 86164$), dan is

$$\varphi = \frac{\omega_a{}^2 b}{g_0} = \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 \frac{b}{\pi^2 l} = \frac{4\,b}{T_a{}^2\, l}.$$

Verder is, zooals Tisserand bewijst [1]),

$$\lambda^2 = \frac{5}{2}\varphi + \frac{45}{48}\varphi^2 + \ldots\ldots$$

Den Meter als lengte-eenheid nemend ontleent hij aan Clarke en Faye de waarden [2])

$$b = 6\,378\,253, \qquad l = 0{,}991\,006,$$

waaruit hij dan afleidt met behulp van (2) op p. 46

$$\varphi = \frac{1}{288{,}38} = 0{,}003\,468, \qquad \lambda^2 = 0{,}008\,688,$$

$$V_a = 0{,}002\,300.$$

In verband met deze waarde van V_a volgt uit de grootste waarde, die V mag bereiken, nl. 0,22467 (zie p. 29), dat een vloeistofmassa met de gemiddelde dichtheid der Aarde niet als een ellipsoïde in evenwicht zou kunnen zijn, wanneer zij om hare as wentelde in minder dan 2 u. 25 min., terwijl slechts bij een omwentelingstijd, die 2 u. 39 min. te boven gaat, een ongelijkassige ellipsoïde haar evenwichtsvorm kan wezen [3]).

---

[1]) p. 89.

[2]) Van zeer bevoegde zijde is mij verzekerd, dat deze cijfers nog steeds alleszins vertrouwbaar zijn.

[3]) Vgl. Laplace, L. III, § 20; — Tisserand, II, p. 93; — zie ook de tabel bij Thomson and Tait, § 772.

Wordt de dichtheid der Aarde door ρ_a, haar omwentelingstijd weder door T_a aangeduid, dan is bij een homogene vloeistofmassa met dichtheid ρ_b en omwentelingstijd T_b

$$V_b = 0{,}002\,300 \left(\frac{T_a}{T_b}\right)^2 \frac{\rho_a}{\rho_b}.$$

Hieruit leidt Tisserand [1]) af, dat bij een homogene vloeistofmassa met de omwentelingssnelheid en gemiddelde dichtheid van de volgende hemellichamen $\frac{1}{2} V$ de waarden verkrijgt in onderstaande tabel aangegeven.

de Zon	0,000 007 14
Mercurius	0,000 97
Venus	0,001 50
Mars.	0,001 53
Jupiter	0,027 59
Saturnus	0,049 15

Uit dit laatste resultaat volgt, dat als de planeet Saturnus homogeen was en de hoeksnelheid in reden van 1 tot $\sqrt{2}$ werd vergroot, alleen omwentelingsellipsoïden mogelijk zouden zijn, terwijl bij tweemaal grootere hoeksnelheid geen ellipsoïdale evenwichtsvorm zou kunnen voorkomen.

De waarden van $\frac{1}{2} V$ door Tisserand voor Mercurius en Venus gevonden zijn afgeleid in de onderstelling, dat deze planeten om hare assen wentelen resp. in 24 u. 1 min. en 23 u. 21 min.; maar wanneer volgens de thans veelal gevolgde meening (vgl. p. 31) de duur harer wenteling om de as gelijk is aan den omloopstijd om de zon, dus resp. 88 en 224,7 dagen bedraagt, wordt V hier uiterst klein; men zou dan nl. vinden bij

Mercurius	$V = 0{,}000\,000\,25$,
Venus	$V = 0{,}000\,000\,056$,

---

[1]) p. 94.

zoodat, als deze planeten homogeen waren, hare afplatting uiterst gering zou zijn.

Na deze uitweiding moge hier nog een overzicht volgen der resultaten voor de assenverhouding $a:c$ bij de omwentelingsellipsoïden, die met V_a overeenkomen; de ellipsoïde van Maclaurin is hier door (α), die van d'Alembert door (β) aangewezen:

		$a:c$	
	V_a	(α)	(β)
Laplace	0,002 299 71+	1,004 334 41	680,49
Meyer	0,002 997 2	1,004 334 41	680, ...
Roche	0,002 3	1,004 3	680
Plana	2 : 867	. . . . .	678,390
Kostka	0,002 299 7	1,004 334 67	680,4939
Matthiessen	0,002 299 71	1,004 334 41	680,49
Tisserand	0,002 300	. . . . .	681 omtrent.

Men ziet, dat Tisserand veel spaarzamer is in het opgeven van decimalen dan Laplace; deze laatste geeft[1]) als „resultaat der waarnemingen" voor een grootheid, die met $\frac{3}{2}\,V_a$ overeenkomt,

$$0{,}003\,449\,57\,,$$

waaruit volgt

$$0{,}002\,299\,71 < V_a < 0{,}002\,299\,717,$$

hetgeen wij in de tabel kortheidshalve door 0,002 299 71+ hebben voorgesteld.

De waarde van V_a volgens Meyer [2]), nl. 0,002 997 2, verschilt aanmerkelijk van die bij Laplace en anderen, maar terwijl hij voor de ellipsoïde van Maclaurin, die met V_a overeenkomt, volmaakt dezelfde assenverhouding vindt als Laplace, en ook zijn resultaat voor de ellipsoïde van d'Alem-

---

[1]) *Mécan. cél.*, L. III, § 20.

[2]) Crelle's Journal, XXIV, p. 59.

bert niet merkbaar van dat der straks vermelde geleerden verschilt, is het duidelijk, dat wij hier met een drukfout te doen hebben en dat de zoozeer afwijkende resultaten voor de drieassige ellipsoïde niet hieraan mogen worden toegeschreven, dat hij van een andere waarde van V_a zou uitgegaan zijn. Trouwens

$$a : b : c = 19{,}57 : 1{,}018 : 1$$

zou ook bij $V_a = 0{,}002\,997\,2$ niet passen.

Plana onderstelt

$$V_a = \frac{2}{3} \times \frac{1}{289} = 0{,}002\,306\,8,$$

voor de ellipsoïde van Maclaurin leidt hij hieruit af

$$\lambda^2 = \frac{2}{229{,}433} = 0{,}008\,717.$$

Matthiessen geeft, zooals men ziet, juist dezelfde resultaten als Laplace; hoe hij daartoe gekomen is, heb ik althans bij de ellipsoïde (α) niet kunnen nagaan; wel zegt hij, dat de formule

$$V_a = \frac{4}{5}\lambda^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\lambda^2\right)$$

de waarde 1,004 334 41 voor $a : c$ oplevert, doch feitelijk geeft zij 1,004 344 9 en de volgende decimaal is onzeker.

Omtrent de resultaten van Kostka is nog op te merken, dat bij $V_a = 0{,}002\,299\,7$ de formule (2b) niets meer leert dan (2a); om $\frac{1}{49}\left(\frac{15\,V}{4}\right)^3$, d. w. z. 0,000 000 013, bij $\frac{15\,V}{4}$ te kunnen optellen, zou men V_a in een grooter aantal decimalen moeten kennen; hetzelfde geldt a fortiori voor $0{,}0289\left(\frac{15\,V}{4}\right)^4$, dat met negen nullen, en $0{,}057\left(\frac{15\,V}{4}\right)^5$, dat met elf nullen begint. Houdt men er verder rekening mede, dat $V_a = 0,002\,299\,7$ volstrekt niet beteekent $V_a = 0,002\,299\,700\ldots$, maar

$$0,002\,299\,65 < V < 0,002\,299\,75,$$

zoo blijkt, dat de formule (2a) niets anders leert dan

$$0,008\,688\,1 < \lambda^2 < 0,008\,688\,3,$$

zoodat de laatste decimalen in Kostka's resultaat 0,008 688 144 geen waarde hebben. Ook bij de ellipsoïde (β) geeft hij meer decimalen op dan hij kan verantwoorden; immers uit zijne waarde van V_a volgt slechts

$$683,029 < \frac{\pi}{2\,V_a} < 683,059,$$

$$680,479 < \frac{a}{c} < 680,509.$$

In het vervolg van dit hoofdstuk zullen wij weder dezelfde fout bij Kostka aantreffen: schijnbare nauwkeurigheid, slechts verkregen door het gebruiken en opgeven van geheel onzekere decimalen. 't Zij geoorloofd tot rechtvaardiging onzer eigen resultaten een paar hoogst eenvoudige regels in herinnering te brengen, die maar al te dikwijls vergeten zijn door hen, die vroeger hetzelfde probleem behandelden.

„Men moet vermijden vele decimalen aan te geven, waarvan men toch niet zeker is. Kent men b. v. de lengte eener lijn nauwkeurig tot in centimeters, dan zou het neerschrijven van een cijfer, dat honderdsten van millimeters voorstelt niet slechts noodeloos omslachtig zijn, maar bovendien een schijn van nauwkeurigheid geven, die misleiden kan ....

Worden uit getallen, die zelf niet nauwkeurig bekend zijn door berekening andere afgeleid, dan is ook daarin geene volkomen juistheid te verwachten." [1])

[1]) Lorentz, Beginselen der Natuurk., tweede Druk, § 8.

Wij nemen dan als grondslag der berekening van V bij de ellipsoïde (α) niet met Laplace

$$\lambda^2 = 0{,}008\,687\,67,$$

noch ook met Kostka

$$\lambda^2 = 0{,}008\,688\,144,$$

maar met Tisserand

$$\lambda^2 = 0{,}008\,688,$$

waaruit volgt, dat de assenverhouding bij de ellipsoïde (α) is

$$\frac{a}{c} = 1{,}004\,335.$$

In verband met het feit, dat de aarde niet homogeen is, doch hare dichtheid van het oppervlak tot het middelpunt toeneemt, is in werkelijkheid $a:c$ kleiner[1]); uit de waarden door Clarke gevonden

$$a = 6\,378\,253\,M. \pm 75\,M., \qquad c = 6\,356\,521\,M. \pm 111\,M.$$

volgt

$$\frac{a}{c} = 1{,}0034.$$

Verder volgt uit $V_a = 0{,}002\,300$, met andere woorden uit

$$0{,}002\,299\,5 < V_a < 0{,}002\,300\,5,$$

dat men bij de ellipsoïde (β) heeft

$$680{,}256 < \frac{a}{c} < 680{,}553,$$

zoodat wij niet juist mogen schrijven

$$\frac{a}{c} = 680,$$

[1]) Vgl. Roche, Mémoires de Montpellier, I, p. 336 en 346.

maar dit resultaat beter weergeven door

$$\frac{a}{c} = 680,40 \pm 0,15$$

of liever nog aldus

$$\frac{a}{c} = \text{ruim } 680.$$

§ 2. *Ellipsoïde van Jacobi. — Toepassing der* $\wp$*-functie en methode van Kostka.*

Om de assenverhoudingen te berekenen der ellipsoïde van Jacobi, die met een gegeven waarde der meermalen besproken constante V overeenkomt, of ook om b. v. „wanneer een geheel willekeurige ellips als aequator genomen is, de omwentelingsas en de hoeksnelheid zóó te bepalen, dat de ellipsoïde evenwichtsfiguur wordt,” [1]) is het noodig de vergelijkingen (4) van het eerste hoofdstuk

$$\frac{P\,\wp'v + V}{\dfrac{1}{\tau^2\,(\wp v - e_\gamma)}} = \frac{Q\,\wp'v + V}{\dfrac{1}{\tau^2\,(\wp v - e_\beta)}} = \frac{R\,\wp'v}{\dfrac{1}{\tau^2\,(\wp v - e_1)}}$$

te transformeeren.

Deze breuken kortheidshalve voorstellend door $\varkappa$, vindt men door optelling der tellers en noemers

$$\varkappa = \frac{2\,V + \wp'v \displaystyle\int_0^v \sum \frac{1}{\wp u - e_\alpha}\,du}{\dfrac{1}{\tau^2} \displaystyle\sum \frac{1}{\wp v - e_\alpha}} = \frac{(V - 1)\,\tau^2}{\dfrac{\wp''v}{\wp'^2 v}}.$$

---

[1]) Jacobi, Pogg. Ann., XXXIII, p. 231.

Immers volgens een bekende stelling [1]) is

$$\sum \frac{1}{pu - e_\alpha} = \frac{2\,p''u}{p'^2 u},$$

en

$$\int_0^v \sum \frac{1}{pu - e_\alpha} du = \int_0^v \frac{2\,p''u}{p'^2 u} du = \left| -\frac{2}{p'u} \right|_0^v = -\frac{2}{p'v}.$$

Dus een der vergelijkingen bij de berekening dienstig is

$$\frac{p'v \displaystyle\int_0^v \frac{du}{pu - e_1}}{\dfrac{1}{\tau^2\,(pv - e_1)}} = \varkappa = \frac{(V-1)\,\tau^2}{\dfrac{p''v}{p'^2 v}}.$$

Teller en noemer der eerste breuk vermenigvuldigend met $(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3)$ vinden we

$$\frac{\displaystyle\int_0^v [p\,(u+\omega) - e_1]\,du}{p\,(v+\omega) - e_1} = \frac{\left|\zeta\,(u+\omega) + e_1 v\right|_v^0}{p\,(v+\omega) - e_1} =$$

$$= \frac{\eta - \zeta\,(v+\omega) - e_1 v}{p\,(v+\omega) - e_1} = \frac{(V-1)\,p'v}{p''v}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Een tweede vergelijking, waarin geen ζ-functie voorkomt, wordt gevonden door optelling der drie breuken, die zooeven door $\varkappa$ werden voorgesteld; men vindt nl.

---

[1]) Wanneer de wortels der vergelijking $f(x) = 0$ met a_i worden aangeduid, is

$$\sum_1^n \frac{1}{x - a_i} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$3\varkappa = \tau^2 V(\mathrm{p}v - e_2 + \mathrm{p}v - e_3) + \tau^2 \mathrm{p}'v \int_0^v \sum \frac{\mathrm{p}v - e_\alpha}{\mathrm{p}u - e_\alpha} du;$$

maar men heeft [1])

$$\sum \frac{\mathrm{p}v - e_\alpha}{\mathrm{p}u - e_\alpha} = (\mathrm{p}v - \mathrm{p}u) \frac{2\mathrm{p}''u}{\mathrm{p}'^2u} + 3,$$

en door gedeeltelijke integratie wordt

$$\int_0^v \left[\frac{2(\mathrm{p}v - \mathrm{p}u)\mathrm{p}''u}{\mathrm{p}'^2u} + 3\right] du = \left| 3u - \frac{2(\mathrm{p}v - \mathrm{p}u)}{\mathrm{p}'u} \right|_0^v - \int_0^v \frac{2\mathrm{p}'u}{\mathrm{p}'u} du =$$

$$= \left| u - \frac{2(\mathrm{p}v - \mathrm{p}u)}{\mathrm{p}'u} \right|_0^v = v,$$

dientengevolge is eindelijk

$$3\varkappa = \tau^2 [V(2\mathrm{p}v + e_1) + v\,\mathrm{p}'v] = \frac{3\tau^2 \mathrm{p}'^2v}{\mathrm{p}''v}(V-1)$$

of

$$V[(2\mathrm{p}v + e_1)\mathrm{p}''v - 3\mathrm{p}'^2v] + 3\mathrm{p}'^2v + v\,\mathrm{p}'v\,\mathrm{p}''v = 0. \;.\;.\; (5)$$

Terwijl (4) en (5) aan onze becijferingen over de drieassige ellipsoïde ten grondslag strekken, gaat Kostka uit van de volgende vergelijkingen

$$0 = u\left[2k'^2 - (1 + k'^2)\frac{E}{K} - k^2 \frac{E}{K}\left(\frac{c^2 u}{\Delta^2 u} - c^2 u\right)\right] -$$

$$-k'^2 Zu - Z(u + K) - k^2\left(\frac{c^2 u}{\Delta^2 u} - c^2 u\right) R(u + K), \;.\;.\;.\; (4')$$

---

[1]) Want

$$\sum_1^n \frac{c - a_i}{x - a_i} = n + (c - x) \sum_1^n \frac{1}{x - a_i}.$$

waarin

$$\frac{2K}{\pi} Zu = \frac{\vartheta' x}{\vartheta x}, \qquad \frac{2K}{\pi} Z(u+K) = \frac{\vartheta'_3 x}{\vartheta_3 x},$$

$$\frac{2K}{\pi} R(u+K) = \frac{\vartheta'_2 x}{\vartheta_2 x}, \qquad x = \frac{\pi u}{K},$$

en

$$\frac{V}{2}\left[\frac{1}{c^2 u} + \frac{1}{\Delta^2 u} + \Delta^2 u + \frac{\Delta^2 u}{c^2 u} - 4\right] + 3 = u\frac{cu\,\Delta u}{su}\left[1 + \frac{1}{c^2 u} + \frac{1}{\Delta^2 u}\right]. \quad (5')$$

Wil men deze vergelijkingen in de $\wp$-functie overbrengen, dan moet gesteld worden

$$u = v\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad K = \omega\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

$$s^2\,(v\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{e_1 - e_3}{\wp v - e_3}, \qquad c^2\,(v\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\wp v - e_1}{\wp v - e_3},$$

$$\Delta^2\,(v\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\wp v - e_2}{\wp v - e_3}, \qquad E = \frac{e_1\omega + \eta}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$Z(v\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\zeta\,(v + \omega') - \eta' - \dfrac{\eta v}{\omega}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$Z[(v+\omega)\sqrt{e_1 - e_3}] = \frac{\zeta\,(v + \omega'') - \eta'' - \dfrac{\eta v}{\omega}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$R[(v+\omega)\sqrt{e_1 - e_3}] = \frac{\zeta\,(v + \omega) - \eta - \dfrac{\eta v}{\omega}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

en (4′) komt na een eenvoudige omwerking en herhaalde toepassing der formule

$$\zeta(v+\omega_\alpha)-\eta_\alpha=\zeta v+\frac{p'v}{2(pv-e_\alpha)}$$

in den vorm

$$\frac{1}{e_1-e_3}\left[\frac{(e_2-e_3)^2(pv-e_1)}{(pv-e_2)\,(pv-e_3)}+3\,e_1\right]\left[\zeta(v+\omega)+e_1v-\eta\right]=$$

$$=2v(e_1-e_2)-\frac{1}{2}p'v\left[\frac{e_1-e_2}{(e_1-e_3)(pv-e_3)}+\frac{1}{pv-e_2}-\frac{3\,e_1}{(e_1-e_3)(pv-e_1)}\right],$$

hetgeen na vermenigvuldiging met p'^2v en herleiding overgaat in

$$\frac{2\left[\zeta(v+\omega)+e_1v-\eta\right](pv-e_1)}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}=$$

$$=\frac{(v\,p'v+2\,pv+e_1)\,p'v}{3e_1\,p^2v+4\,(e_1{}^2-e_2\,e_3)\,pv-e_1{}^3+7e_1\,e_2\,e_3}.$$

Wanneer men nu uit onze vergelijking (4) door middel van (5) de constante V elimineert, zoodat men verkrijgt

$$\frac{\zeta(v+\omega)+e_1\,v-\eta}{p(v+\omega)-e_1}=\frac{(v\,p'v+2\,pv+e_1)\,p'v}{(2\,pv+e_1)\,p''v-3\,p'^2v},$$

en de noemers van beide leden omzet door middel van de bekende formules

$$p(v+\omega)-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv-e_1},$$

$$p''v=6\,p^2v-\tfrac{1}{2}g_2,\qquad p'^2v=4\,p^3v-g_2\,pv-g_3,$$

$$g_2=4\,(e_1{}^2-e_2\,e_3),\qquad g_3=4\,e_1\,e_2\,e_3,$$

komt men juist tot de zooeven gevonden transformatie der vergelijking (4′) van Kostka.

Wat diens tweede vergelijking betreft, zij geeft na de straks vermelde substitutie

$$\frac{V}{2}\left[\frac{\wp v-e_3}{\wp v-e_1}+\frac{\wp v-e_3}{\wp v-e_2}+\frac{\wp v-e_2}{\wp v-e_3}+\frac{\wp v-e_2}{\wp v-e_1}-4\right]+3=$$

$$=v\sqrt{e_1-e_3}\left[1+\frac{\wp v-e_3}{\wp v-e_1}+\frac{\wp v-e_3}{\wp v-e_2}\right]\sqrt{\frac{(\wp v-e_1)(\wp v-e_2)}{(\wp v-e_3)(e_1-e_3)}},$$

hetgeen door middel van

$$\sum\frac{1}{\wp v-e_\alpha}=\frac{2\,\wp'' v}{\wp'^2 v}$$

tot onze vergelijking (5) wordt teruggebracht.

Zoo blijkt, dat onze vergelijkingen in het wezen der zaak niet verschillen van die bij Kostka, maar, afgezien van de kortere afleiding, hebben zij een geschikter vorm voor de ontwikkeling. Deze zal wel het best geschieden met behulp van de formules (31), (32), (77) en (79,1°) of 80,1°) bij Halphen, I, pp. 425, 426 en 445—447, die echter naar opklimmende machten van $q=e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}$ gerangschikt zijn, zoodat zij practisch alleen tot de becijfering kunnen dienen als q zoo klein is, dat de hoogere machten van q verwaarloosd mogen worden, m. a. w. als e_2 niet veel verschilt van e_3, dus als V slechts weinig kleiner is dan 0,18711. Daar echter bij de toepassingen, die het meest voor de hand liggen, met name bij de vloeistofmassa, die met de snelheid der Aarde zou wentelen, V zeer klein is, zoodat e_2 tot e_1 en q tot 1 nadert, zullen wij liever de ontwikkeling verrichten naar opklimmende machten van $q'=e^{\frac{\pi\omega}{i\omega'}}$. Daartoe moeten de formules van Halphen (die gelden als de draaiing van ω naar ω' positief is, dus tegen de wijzers van het uurwerk in, m. a. w. als arg. $\omega' >$ arg. ω) omgezet worden, zooals het volgende lijstje, door fig. 4 opgehelderd, aangeeft.

De grootheden boven, betrekking hebbende op fig. 4a, gaan over in die op den tweeden regel behoorend bij fig. 4b.

ω	η	ω'	η'	e_1	e_2	e_3	q	q'
$-\omega'$	$-\eta'$	ω	η	e_3	e_2	e_1	q'	q

Fig. 4a.

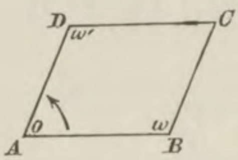
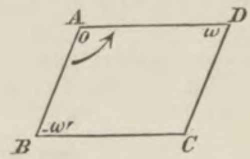


Fig. 4b.



Dus de functiën, die in onze vergelijkingen (4) en (5) voorkomen, worden ontwikkeld als volgt; ten eerste is [1])

$$\eta - \zeta(v+\omega) = -\frac{\eta' v}{\omega'} - \frac{2\pi}{\omega'} \sum_1^\infty \frac{q'^k}{1-q'^{2k}} \sin\frac{kv\pi}{\omega'},$$

en daar men heeft [2])

$$\eta'\omega' + e_1\,\omega'^2 = -2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{kq'^k}{1-q'^{2k}},$$

volgt

$$\eta-\zeta(v+\omega)-e_1 v = 2v\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2 \sum_1^\infty \frac{kq'^k}{1-q'^{2k}} - 2\,\frac{\pi}{\omega'} \sum_1^\infty \frac{q'^k}{1-q'^{2k}} \sin\frac{kv\pi}{\omega'},$$

waaruit door differentiatie verkregen wordt

$$\mathrm{p}(v+\omega)-e_1 = 2\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2 \sum_1^\infty \frac{kq'^k}{1-q'^{2k}} - 2\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2 \sum_1^\infty \frac{kq'^k}{1-q'^{2k}} \cos\frac{kv\pi}{\omega'}.$$

---

[1]) Door omzetting van Halphen, I, p. 426, (34, 1°).

[2]) p. 446, (79, 3°).

Verder heeft men [1])

$$\mathrm{p}v+\frac{\eta'}{\omega'}=\frac{\pi^2}{4\,\omega'^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{v\,\pi}{2\,\omega'}}-\frac{2\,\pi^2}{\omega'^2}\sum_1^\infty\frac{k\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}}\cos\frac{k\,v\,\pi}{\omega'},$$

$$\mathrm{p}'v=\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^3\left[\frac{-\cos\dfrac{v\,\pi}{2\,\omega'}}{4\sin^3\dfrac{v\,\pi}{2\,\omega'}}+2\sum_1^\infty\frac{k^2\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}}\sin\frac{k\,v\,\pi}{\omega'}\right],$$

en nog eens differentieerend

$$\mathrm{p}''v=\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^4\left[\frac{3}{8\sin^4\dfrac{v\,\pi}{2\,\omega'}}-\frac{1}{4\sin^2\dfrac{v\,\pi}{2\,\omega'}}+2\sum_1^\infty\frac{k^3\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}}\cos\frac{k\,v\,\pi}{\omega'}\right].$$

Nog volgt uit de ontwikkeling voor $\mathrm{p}v+\frac{\eta'}{\omega'}$, met behulp van [2])

$$\frac{4}{\pi^2}\,\eta'\omega'=\frac{1}{3}-8\sum_1^\infty\frac{k\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}}.$$

en van [3])

$$e_1=\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2\left[-\frac{1}{12}-4\sum_1^\infty\frac{k\,q'^k}{1+q'^k}\right],$$

---

[1]) p. 426, (32, 1°).
[2]) p. 445, (77).
[3]) p. 447, (80, 3°).

dat

$$2\,\mathrm{p}v + e_1 = \left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2 \left[-\frac{1}{4} - 4\sum_1^\infty \frac{k\,q'^k}{1+q'^k} + 4\sum_1^\infty \frac{k\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sin^2\frac{v\,\pi}{2\,\omega'}} - 4\sum_1^\infty \frac{k\,q'^{2k}}{1-q'^{2k}} \cos\frac{k\,v\,\pi}{\omega'}\right].$$

Omdat ω reëel is en ω' imaginair, zijn al deze ontwikkelingen geldig, daar voldaan is aan de voorwaarde [1])

$$-\,\omega < v < \omega.$$

Wij hebben nu volgens bekende formules

$$\sin\frac{kv\pi}{2\omega'} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ikv\pi}{2\omega'}} - e^{-\frac{ikv\pi}{2\omega'}}\right),\ \cos\frac{kv\pi}{2\omega'} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{ikv\pi}{2\omega'}} + e^{-\frac{ikv\pi}{2\omega'}}\right),$$

of wanneer kortheidshalve $e^{-\frac{iv\pi}{\omega'}}$ door t wordt voorgesteld,

$$\sin\frac{kv\pi}{2\omega'} = \frac{i}{2}\left(t^{\frac{k}{2}} - t^{-\frac{k}{2}}\right),\quad \cos\frac{kv\pi}{2\omega'} = \frac{1}{2}\left(t^{\frac{k}{2}} + t^{-\frac{k}{2}}\right),$$

zoodat b. v.

$$\frac{1}{\sin^2\frac{v\pi}{2\omega'}} = -\frac{4\,t}{(1-t)^2} = -\,4t\,(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \,.\,.\,.\,.).$$

Nu ligt het voor de hand te vragen van welke orde t en vooral $\frac{q'}{t}$ is, wanneer wij q' zeer klein onderstellen. Daartoe

---

[1]) Vgl. Halphen, I, p. 426.

moeten wij ons herinneren, dat volgens p. 19 en 20 bij de ellipsoïde van Jacobi altijd geldt

$$\frac{\omega}{2} < v < \omega,$$

of wel

$$2v > \omega > v > \omega - v > 0 > \omega - 2v,$$

dus ook

$$e^{-\infty} < e^{-\frac{2iv\pi}{\omega'}} < e^{-\frac{i\omega\pi}{\omega'}} < e^{-\frac{iv\pi}{\omega'}} < e^{-\frac{i(\omega-v)\pi}{\omega'}} < 1 < e^{-\frac{i(\omega-2v)\pi}{\omega'}}$$

met andere woorden

$$0 < t^2 < q' < t < \frac{q'}{t} < 1 < \frac{q'}{t^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Ofschoon $\frac{q'}{t}$ grooter blijkt te zijn dan q', zal toch volgens een opmerking van Kostka, terwijl V verdwijnt voor $e_1 = e_2$, alsdan met q' ook $\frac{q'}{t}$ tot nul naderen. Wij kunnen dit afleiden uit de verhouding der middelbare en kleinste as bij de ellipsoïde van Jacobi, waarvoor na omzetting der formules van Halphen [1]) geschreven kan worden

$$\sqrt{\frac{\mathrm{p}v - e_2}{\mathrm{p}v - e_1}} = \frac{\dfrac{1}{\sin\dfrac{v\pi}{2\omega'}} - 4\sum_1^\infty \dfrac{q'^{\,2k-1}}{1+q'^{\,2k-1}} \sin\dfrac{(2k-1)\,v\pi}{2\omega'}}{\dfrac{1}{\sin\dfrac{v\pi}{2\omega'}} + 4\sum_1^\infty \dfrac{q'^{\,2k-1}}{1-q'^{\,2k-1}} \sin\dfrac{(2k-1)\,v\pi}{2\omega'}}$$

---

[1]) I, p. 431, (43, 9° en 7°).

of

$$\sqrt{\frac{pv-e_2}{pv-e_1}}=\frac{1+\frac{4q'(1-2t+t^2)}{4t}+\ldots}{1-\frac{4q'(1-2t+t^2)}{4t}-\ldots},$$

en wanneer wij zoo dicht bij het ontaardingsgeval zijn, dat ook de eerste macht van q' mag verwaarloosd worden,

$$\sqrt{\frac{pv-e_2}{pv-e_1}}=\frac{1+\frac{q'}{t}}{1-\frac{q'}{t}};$$

maar het eerste lid nadert tot 1 voor $V=0$, dus voor $V=0$, $e_1=e_2$, is ook

$$\text{Lim}\,\frac{q'}{t}=0,$$

terwijl voor kleine waarden van V, als de hoofddoorsnede door de twee kleinste assen nog niet veel van een cirkel verschilt (vgl. p. 28), $\frac{q'}{t}$ blijkbaar zeer klein is.

Onderstellen wij nu eens met Kostka V zoo klein, dat $\frac{q'}{t}<0{,}005$ is, — zooals spoedig zal blijken, is deze breuk bij de toepassing op de Aarde nog veel kleiner — daar $q'>t^2$, is $\left(\frac{q'}{t}\right)^2>q'$, dus $q'<0{,}000\,025$; verder is dan $\frac{q'^2}{t}=\frac{q'}{t}\times q'<0{,}000\,000\,125$. Nu stelt Kostka voor grootheden kleiner dan $\frac{q'^2}{t}$ te verwaarloozen, zulke grootheden zijn

q'^2, daar $t<1$ is;

$$\frac{q'^3}{t^2} = \frac{q'^2}{t} \times \frac{q'}{t}, \text{ en a fortiori } \frac{q'^3}{t};$$

$$q't = \frac{q'^2}{t} \times \frac{t^2}{q'}, \text{ want } t^2 < q';$$

$$t^3 = \frac{q'^2}{t} \times \frac{t^4}{q'^2};$$

de hoogere machten van $\frac{q'}{t}$ zullen wij echter voorloopig niet verwaarloozen.

Door toepassing dezer verwaarloozingen geeft de ontwikkeling van (4) en (5) de twee volgende vergelijkingen, waar $\frac{i v \pi}{\omega'}$ door x is voorgesteld, zoodat $t = e^{-x}$ is,

$$\frac{x\,t\,(2 + 4\,q') - \left[1 + \frac{q'}{t} + \left(\frac{q'}{t}\right)^2 + \left(\frac{q'}{t}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots - t^2\right]}{2\,t - \left[1 + 2\,\frac{q'}{t} + 3\left(\frac{q'}{t}\right)^2 + 4\left(\frac{q'}{t}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t^2\right]} =$$

$$= (1 - V)\,\frac{1 + 4\,t + 9\,t^2 - \left(\frac{q'}{t}\right)^2}{1 + 8\,t + 27\,t^2 - \left(\frac{q'}{t}\right)^2}, \quad \ldots (4a)$$

$$\frac{V}{4}\left[1 + 16\,q' + 4\,t + 11\,t^2 + \left(\frac{q'}{t}\right)^2 + 40\,\frac{q'^2}{t}\right] + 3t + 24t^2 - 6\,\frac{q'^2}{t} =$$

$$= x\,t\left(1 + 12\,t + 68\,t^2 - 4\,\frac{q'^2}{t}\right). \quad \ldots\ldots (5a)$$

Men zal opmerken, dat eenige grootheden, die volgens afspraak verwaarloosd moesten worden, hier behouden bleven, wanneer zij met x te vermenigvuldigen zijn; de reden hiervan is, dat naarmate V kleiner wordt, $x = \frac{i v \pi}{\omega'}$ steeds grootere waarden aanneemt om ten slotte oneindig groot te zijn, als de reëele periode oneindig groot is, m. a. w. als V gelijk wordt aan nul.

Op het eerste gezicht verschillen (4a) en (5a) nog al aanmerkelijk van de overeenkomstige vergelijkingen bij Kostka (ook afgezien hiervan, dat hij uit één vergelijking V heeft geëlimineerd) die in onze notatie luiden:

$$2(x-3)\,t = \frac{\frac{q'}{t} - 10\,q' - 24\,t^2}{1 + 4\frac{q'}{t} + \left(\frac{q'}{t}\right)^2 + 2\,t + 2\,q' - 4\,t^2 + 4\,\frac{q'^2}{t}},$$

$$(x-3)\,t = \frac{\frac{V}{4}\left[1 + \left(\frac{q'}{t}\right)^2 - 4\,t + 8\,q' + 9\,t^2 + 24\frac{q'^2}{t}\right] - 12t^2 - 6\frac{q'^2}{t}}{1 + 4\,t + 2\,t^2 - 12\,\frac{q'^2}{t} - \left(\frac{q'}{t}\right)^4}.$$

Passen wij nu echter een verdere verwaarloozing toe, die, als men de gegeven grootheid (V of een der assenverhoudingen) in een zeer groot aantal decimalen kent, noodzakelijk is om een eerste benaderingswaarde der onbekenden te vinden; is de gegeven grootheid echter minder nauwkeurig bekend, dan zal juist die verwaarloozing de vergelijkingen opleveren, die alleen tot becijfering der onbekenden kunnen dienen.

Wij laten nl. alles weg, wat kleiner is dan t en $\left(\frac{q'}{t}\right)^2$, dus q' en t^2 en $\frac{q'^2}{t}$; als wij nu tevens voor oogen houden, dat V zeer klein is, gaat (5a) over in

$$(x-3)\,t = \frac{V}{4},$$

of, als men bedenkt, dat $t = e^{-x}$, en $x - 3 = z$ stelt,

$$ze^{-z} = \frac{V}{4}\,e^3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(5b)}$$

terwijl voor (4a) na een eenvoudige bewerking en substitutie der zoo even gevonden benaderde waarde van $(x-3)\,t$ kan worden geschreven

$$\frac{q'}{t}=\frac{V}{2\,(1-2\,V)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4b)$$

waaruit blijkt, dat $\frac{q'}{t}$ omtrent even groot is als $\frac{V}{2}$.

Passen wij *dezelfde verwaarloozing* toe bij de twee vergelijkingen van Kostka, dan geven zij eveneens

$$\frac{q'}{t}=\frac{V}{2\,(1-2\,V)}, \qquad (x-3)\,e^{-(x-3)}=\frac{V}{4}\,e^3\,;$$

maar dan is niet, zooals Kostka zelf zegt, „alles verwaarloosd behalve $\frac{q'}{t}$", immers hij behoudt t, die volgens (6) kleiner is dan $\frac{q'}{t}$ en zelfs $V\,\frac{q'}{t}$, die van dezelfde orde is als $\left(\frac{q'}{t}\right)^2$.

De formule voor de verhouding der middelbare en kleinste as zagen wij reeds op p. 65; verwaarloost men zooals op p. 67 q'^2, t^3 enz., dan geeft zij

$$\sqrt{\frac{pv-e_2}{pv-e_1}}=\frac{1+t+t^2+\frac{q'}{t}-q'-\frac{q'^2}{t}}{1+t+t^2-\frac{q'}{t}+q'-\frac{q'^2}{t}}$$

of wanneer wij kortheidshalve aannemen, dat $a > b$ is,

$$\frac{b}{c}=1+2\frac{q'}{t}+2\left(\frac{q'}{t}\right)^2+2\left(\frac{q'}{t}\right)^3+2\left(\frac{q'}{t}\right)^4\ldots-4q'-8\frac{q'^2}{t}, \; . \; . \; . \; . \; . \; (7a)$$

waarvoor men desverkiezende ook zou kunnen schrijven

$$\frac{b}{c}=\frac{2}{1-\frac{q'}{t}}-\left(1+4q'+8\frac{q'^2}{t}\right).$$

Door verdere verwaarloozing zooals op p. 68 geschied is, gaat (7a) over in

$$\frac{b}{c} = 1 + 2\,\frac{q'}{t} + 2\left(\frac{q'}{t}\right)^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7b)$$

waaruit een eerste benaderde waarde van $\frac{q'}{t}$ kan worden bepaald, als $b:c$ de gegeven grootheid is. Ook leert (7b) in verband met (4b), dat voor kleine waarden van V het quotiënt der middelbare en kleinste as slechts zeer weinig grooter zal wezen dan $1 + V$, zoodat het resultaat van Meyer

$$b : c = 1{,}018 : 1$$

zeker niet past bij een zoo kleine waarde van V als 0,002 3.

Voor de verhouding der grootste en kleinste as wordt door omzetting der formules van Halphen [1]) gevonden

$$\sqrt{\frac{\wp v - e_3}{\wp v - e_1}} = \frac{\cot\dfrac{v\pi}{2\omega'} - 4\displaystyle\sum_1^\infty \frac{q'^{\,2k}}{1+q'^{\,2k}} \sin\frac{k v \pi}{\omega'}}{\dfrac{1}{\sin\dfrac{v\pi}{2\omega'}} + 4\displaystyle\sum_1^\infty \frac{q'^{\,2k-1}}{1+q'^{\,2k-1}} \sin\frac{(2k-1)v\pi}{2\omega'}}, \quad (8)$$

hetgeen door toepassing der zooeven gebruikte benadering overgaat in

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left[1 + \frac{q'}{t} + \left(\frac{q'}{t}\right)^2 + \left(\frac{q'}{t}\right)^3 + \left(\frac{q'}{t}\right)^4 + \ldots - q' + t\right]. \quad (8a)$$

Is de verhouding der langste en kortste as gegeven, en blijkt zij zoo groot te zijn, dat $\frac{q'}{t}$ zeker niet veel van nul verschilt, dan kan men bij eerste benadering voor (8a) schrijven

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b)$$

---

[1]) I, p. 431, (43, 1° en 7°).

en vervolgens uit (5b) de betrekking afleiden

$$V = 2\frac{c^2}{a^2}\left[\log\frac{2a}{c} - \frac{3}{2}\right],$$

die, zooals wij later zullen zien, meermalen langs anderen weg gevonden is.

Wij stellen ons nu meer bepaaldelijk het geval voor, dat V de gegeven grootheid is; terwijl dan (4b) terstond een benaderde waarde van $\frac{q'}{t}$ oplevert, wordt $x = z + 3$ gevonden door oplossing der transcendente vergelijking

$$z e^{-z} = \frac{V}{4} e^3,$$

welker tweede lid kleiner is dan e^{-1}, zoolang men heeft

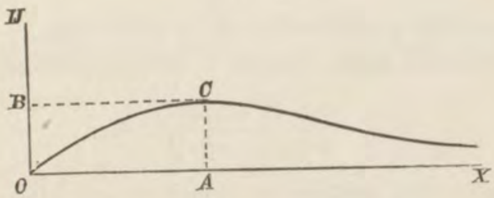
$$V < 0{,}073\,26.$$

Wanneer nu in

$$z e^{-z} = u$$

het tweede lid kleiner is dan e^{-1}, heeft deze vergelijking twee reëele positieve wortels, waarvan de eene kleiner, de andere grooter dan de eenheid is. Dit wordt aanschouwelijk voorgesteld door fig. 5 aan Schlömilch [1]) ontleend, waar bij de abscis $OA = 1$ de grootste ordinaat $u = AC = \frac{1}{e}$ behoort.

Fig. 5.



[1]) *Compendium der höheren Analysis*, II, dritte Aufl., p. 109.

Hier moeten wij den wortel nemen, die grooter dan 1 is, want, zooals reeds werd opgemerkt (p. 68),

$$\text{Lim } x = \infty \qquad \text{voor } V = 0.$$

Eene tabel der machten van e, zooals zij b. v. in de logarithmentafel van Köhler voorkomt, leert spoedig een waarde z_0 kennen, die minder dan 0,005 van den gevraagden wortel verschilt. Schrijft men nu

$$z - ue^z - z_0 + ue^{z_0} = ue^{z_0} - z_0$$

in den vorm

$$\varphi(z) = h,$$

dan is

$$z = z_0 \text{ voor } h = 0,$$

en men heeft een ontwikkeling van den vorm

$$z = z_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots\ldots,$$

waarin de coëfficiënt

$$A_n = \frac{1}{n!\,\varphi'(z_0)^n}\left[-A_1 \frac{d^n}{dz^n}\varphi(z) - A_2 \frac{d^n}{dz^n}\varphi(z)^2 - \ldots - \right.$$
$$\left. - A_{n-1} \frac{d^n}{dz^n}\varphi(z)^{n-1}\right]_{z=z_0}.$$

Hier is

$$\varphi(z) = z - ue^z - z_0 + ue^{z_0}, \quad \varphi(z_0) = 0,$$
$$\varphi'(z) = 1 - ue^z, \quad \varphi'(z_0) = 1 - ue^{z_0},$$
$$\varphi''(z) = \varphi'''(z) = \ldots = -ue^z, \quad \varphi''(z_0) = \varphi'''(z_0) = \ldots = -ue^{z_0},$$

zoodat

$$A_1 = \frac{1}{1 - ue^{z_0}}, \qquad A_2 = \frac{ue^{z_0}}{2!\,(1 - ue^{z_0})^3},$$

$$A_3 = \frac{ue^{z_0}(1 + 2ue^{z_0})}{3!\,(1 - ue^{z_0})^5}, \text{ enz.}$$

Als z_0 met zorg gekozen is, wordt h zeer klein, en in de onderstelling, dat $\frac{q'}{t} < 0{,}005$ is (p. 66), kan men uit (4b) en

(5b) afleiden, dat de absolute waarde der negatieve grootheid $1 - ue^{z_0}$ ten minste 3,50 bedraagt; de ontwikkeling van z convergeert dan ook zoo snel, dat men veelal $A_4\, h^4$ reeds achterwege kan laten.

Van de twee grootheden die tot berekening der assenverhoudingen noodig zijn, nl. x en $\frac{q'}{t}$, welke laatste wij hier kortheidshalve met y zullen aanwijzen, kennen wij nu de benaderde waarden x' en y', die aan (4b) en (5b) voldoen. De correctiën ξ en η, die men moet aanbrengen, opdat door

$$x = x' + \xi, \qquad\qquad y = y' + \eta$$

aan (4a) en (5a) voldaan worde, kan men b. v. vinden door in deze laatste vergelijkingen, die wij $f_1\,(x\,y)$, $f_2\,(x\,y)$ zullen noemen, de waarden x' en y' te substitueeren; men schrijve daarbij die vergelijkingen in zulk een gedaante, dat één lid geheel bekend is:

$$f_1\,(x\,y) = \frac{[1+y+y^2+y^3+\ldots-e^{-2x}-xe^{-x}(2+4ye^{-x})](1+8e^{-x}+27e^{-2x}+y^2)}{(1+4e^{-x}+9e^{-2x}-y^2)\,(1+2y+3y^2+4y^3+\ldots-2e^{-x}+e^{-2x})} =$$

$$= 1 - V,$$

$$f_2\,(x\,y) = \frac{xe^{-x}(1+12e^{-x}+68e^{-2x}-4y^2e^{-x})-3e^{-x}-24e^{-2x}+6y^2e^{-x}}{1+16\,ye^{-x}+4e^{-x}+11\,e^{-2x}+40\,y^2e^{-x}+y^2} =$$

$$= \frac{V}{4};$$

dan worden de correctiën in de onderstelling, dat hare tweede machten verwaarloosd mogen worden, door de volgende vergelijkingen bepaald

$$f_1\,(x\,y) - f_1\,(x'\,y') = C_1 = \xi \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{x'\,y'} + \eta \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{x'\,y'},$$

$$f_2\,(x\,y) - f_2\,(x'\,y') = C_2 = \xi \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{x'\,y'} + \eta \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{x'\,y'}.$$

In determinantvorm opgelost geven zij

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ C_2 & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}, \qquad \eta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & C_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Mochten ξ en η zoo groot wezen, dat verwaarloozing harer tweede machten ongeoorloofd is, dan zou men dezelfde bewerking nog eens moeten herhalen om nieuwe correctiën ξ_2, η_2 te vinden.

Deze becijferingen zijn zeer langdradig, maar ze zijn ook geheel overbodig, wanneer V niet zeer nauwkeurig bekend is, b. v. als gegeven is $V_a = 0{,}002\,300$ (vgl. p. 50). Men leidt dan af uit (4b) en (5b)

$$0{,}001\,155\,06 < \frac{q'}{t} < 0{,}001\,155\,57,$$
$$9{,}302\,27 > x > 9{,}301\,75,$$
$$0{,}000\,091\,22 < t < 0{,}000\,091\,26;$$

$\frac{q'}{t}$ is dus in de zesde decimaal niet geheel zeker, in de zevende onzeker; welnu q' is slechts een weinig grooter dan 10^{-7}, en kan dus niet bij $\frac{q'}{t}$ worden opgeteld. Wij moeten dus hier wel q', a fortiori de kleinere grootheden t^2 en $\frac{q'^2}{t}$ verwaarloozen, en ook $\left(\frac{q'}{t}\right)^3$, die met acht nullen begint; derhalve wordt al wat kleiner is dan t en $\left(\frac{q'}{t}\right)^2$ buiten rekening gelaten (vgl. p. 68), m. a. w. wij moeten ons vergenoegen met de waarden zooeven uit (4b) en (5b) gevonden. Gesubstitueerd in de vergelijkingen voor de assenverhoudingen geven zij

$$1{,}002\,312\,8 < \frac{b}{c} < 1{,}002\,313\,8,$$

$$52{,}417\,12 > \frac{a}{c} > 52{,}403\,56,$$

dus

$$\frac{a}{c} = 52{,}41 \text{ omtrent,} \qquad \frac{b}{c} = 1{,}002\,313 \text{ ongeveer.}$$

Men ziet, dat $\frac{b}{c}$ slechts zeer weinig verschilt van $1 + V$.

Maar, zoo zal men vragen, hoe is Kostka gekomen tot zijn schijnbaar nauwkeuriger resultaat

$$a : b : c = 52{,}442\,5 : 1{,}002\,313\,4 : 1\,?$$

Daartoe behoeft men slechts op te merken, dat hij uit de vergelijking

$$\frac{q'}{t} = \frac{V}{2\,(1-2\,V)},$$

terwijl $V = 0{,}002\,299\,7$, voor $\frac{q'}{t}$ vindt

$$0{,}001\,155\,163,$$

dit nu is het resultaat der deeling

$$\frac{0{,}002\,299\,700}{2\,(1 - 2 \times 0{,}002\,299\,7)};$$

op deze manier zou men even goed 20 decimalen kunnen neerschrijven, maar welke waarde is daaraan te hechten?

Berekent men $\frac{q'}{t}$ uit dezelfde formule, maar zóó, dat men door $V = 0{,}002\,299\,7$ verstaat

$$0{,}002\,299\,65 < V < 0{,}002\,299\,75,$$

dan volgt

$$0{,}001\,155\,137 < \frac{q'}{t} < 0{,}001\,155\,188,$$

derhalve is de achtste decimaal onzeker, en kan wellicht nog q' maar niet meer t^2 of $\frac{q'^2}{t}$, noch ook $\left(\frac{q'}{t}\right)^3$ enz. bij $\frac{q'}{t}$ gevoegd worden, zoodat men m. a. w. deze grootheden moet verwaarloozen.

Bedenkt men nog, dat Kostka bij zijn verdere becijferingen van de straks vermelde uitkomst 0,001 155 163 en van een eveneens te scherp bepaalde waarde van x, nl. 9,302 164, is uitgegaan, dan mag men veilig besluiten, dat althans aan de laatste decimalen zijner resultaten voor de assenverhoudingen geen beteekenis kan worden toegekend.

Tot verdere toepassing onzer benaderingsformules en tot bevestiging van het resultaat, dat bij $V_a = 0{,}002\,300$ een geheel andere waarde van $a : c$ behoort dan die welke Meyer aangeeft (nl. 19,57), beproefde ik nog te berekenen, welke waarde van V en welke verhouding der middelbare en kleinste as in werkelijkheid overeenstemt met

$$a : c = 19{,}57 : 1.$$

Een eerste benadering leerde

$$V = 0{,}011, \qquad \frac{b}{c} = 1{,}012;$$

wel blijkt nu, dat $\frac{q'}{t}$ hier een weinig grooter is dan 0,005 (vgl. p. 66), maar in verband met onze methode van verwaarloozing en de nog zeer kleine waarde van V mogen wij toch gerust de conclusie trekken, 1⁰ dat $\frac{a}{c} = 19{,}57$ behoort bij een waarde van V, die circa vijfmaal grooter is dan V_a;

2⁰ dat de verhouding der middelbare en kleinste as volgens Meyer, nl. 1,018, ook niet overeenkomt met $\frac{a}{c} = 19{,}57$, maar bij een nog grootere waarde van V past, daar V met $\frac{b}{c}$ aangroeit (vgl. ook p. 70).

Worden de ellipsoïden van Maclaurin, d'Alembert en Jacobi resp. met (α), (β), (γ) aangeduid, dan vonden wij bij $V_a = 0{,}002\,300$:

(α). . . . . $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 1{,}004\,335$,

(β). . . . . $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 680$ ruim,

(γ). . . . . $\frac{a}{c} = 52{,}41$ ongeveer, $\frac{b}{c} = 1{,}002\,313$ ongeveer.

Uit de waarden dezer assenverhoudingen, zooals zij door Kostka en Matthiessen berekend waren, heeft Stier [1]) met behulp van de formules voor het rotatie-moment afgeleid, dat de oorspronkelijke omwentelingsduur der bolvormig gedachte Aarde resp. 18′ 34,2″ en 14′ 40,29″ — wij zullen liever zeggen $18\frac{1}{2}$ en $14\frac{2}{3}$ minuut — had moeten zijn, opdat zij een ellipsoïde van Laplace (zooals hij die van d'Alembert noemt) of een ongelijkassige ellipsoïde met omwentelingsduur van 24 uren als evenwichtsvorm zou hebben aangenomen (die althans in het eerste geval instabiel zou geweest zijn). Hij mag dus wel besluiten: „Hätte die Erde in die Laplace'sche oder in die Jacobi'sche Gleichgewichtsfigur übergehen sollen, so hätten ungeheure kosmische Kräfte auf sie im Urzustande wirken müssen."

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XXV, p. 409.

§ 3. *Becijferingen van Plana, Darwin en Matthiessen over de ellipsoïde van Jacobi.*

Wij hebben in de vorige paragraaf de formules besproken, die bij kleine waarden van V ter berekening dienstig zijn, en om niet in herhalingen te vervallen, slechts in het voorbijgaan vermeld, dat wanneer V zeer weinig verschilt van 0,18711, soortgelijke ontwikkelingen naar de opklimmende machten van q kunnen geschieden. Doch wat te doen, wanneer V tusschen die uiterste waarden in ligt? Deze vraag werd reeds in 1852 beantwoord door Plana[1]). Hij heeft nl. aan de vergelijkingen, waardoor de ellipsoïde van Jacobi bepaald wordt, door eenvoudige omzettingen zulk een vorm gegeven, dat de becijferingen volbracht kunnen worden met behulp der tabellen van Legendre[2]) voor de elliptische integralen van de eerste en tweede soort; en wel kan dit juist het best geschieden, wanneer de modulus dier integralen niet al te weinig van 0° of 90° verschilt, m. a. w. als de ongelijkassige ellipsoïde niet zeer dicht bij een der grensgevallen ligt, en dus ook V zoozeer verwijderd is van hare grenswaarden, dat de oplossing door middel van de ontwikkelingen naar de opklimmende machten van q of q' langdradig zou worden.

Wij kunnen de vergelijkingen van Plana terugvinden uit die van p. 14

$$Rc^2 (a^2 - b^2) + a^2 b^2 (P - Q) = 0.$$

---

[1]) Astron. Nachr., XXXVI. c. 166.

[2]) *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, II, table IX; — ook in het oudere werk *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, III, table IX.

of wat op hetzelfde neerkomt (vgl. p. 22)

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2 x^2)}{(1+\lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = 0,$$

en uit (4) van dit hoofdstuk (p. 57) of

$$(\mathrm{p}v - e_1)R = (V-1)\frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}''v}.$$

Om tot de schrijfwijze van Plana over te gaan (terwijl wij gemakshalve aannemen, dat $a > b > c$ is) moet gesteld worden

$$\lambda' = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{e_1-e_3}{\mathrm{p}v-e_1}} = \mathrm{tg}\,\psi',$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{e_1-e_2}{\mathrm{p}v-e_1}} = \mathrm{tg}\,\psi'\cos\vartheta' = \mathrm{tg}\,\gamma,$$

zoodat de beteekenis van ϑ' blijkt uit de vergelijkingen

$$\cos\vartheta' = \sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}, \qquad \sin\vartheta' = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}};$$

verder stelle men

$$\frac{e_1 v + \zeta(v+\omega') - \eta'}{\sqrt{e_1-e_3}} = \int_0^{\psi'} \sqrt{1-\sin^2\vartheta'\sin^2\psi}\,d\psi = E,$$

$$v\sqrt{e_1-e_3} = \int_0^{\psi'} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta'\sin^2\psi}} = F,$$

en eindelijk nog kortheidshalve

$$\sin\psi'\sin\vartheta' = \mathrm{tg}\,\mu, \qquad \mathrm{tg}\,\mu\cos\gamma = \mathrm{tg}\,\beta,$$

$$\sqrt{1-\sin^2\vartheta'\sin^2\psi'} = \Delta,$$

zoodat men heeft

$$\frac{\mathfrak{p}'v}{(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\cos\psi'\,\Delta}{\sin^3\psi'},$$

$$(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} P = (e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} \int_0^v \frac{du}{\mathfrak{p}u - e_3} = \frac{F-E}{\sin^2\vartheta'},$$

$$(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} Q = (e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} \int_0^v \frac{du}{\mathfrak{p}u - e_2} =$$

$$= \frac{E\sec^2\vartheta' - F}{\sin^2\vartheta'} - \frac{\sin\psi'\cos\psi'}{\cos^2\vartheta'\,\Delta},$$

$$(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} R = (e_1-e_3)^{\frac{3}{2}} \int_0^v \frac{du}{\mathfrak{p}u - e_1} = -\sec^2\vartheta'(E - \mathrm{tg}\,\psi'\Delta);$$

wij vinden dan de beide vergelijkingen van Plana

$$E - \left[\frac{2\,(F-E)}{\mathrm{tg}^2\,\vartheta'} + \frac{\sin\psi'\cos\gamma}{\cos^2\mu}\right]\cos^2\beta = 0\,, \ldots . \tag{9}$$

$$V = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma}\left[E\left(\frac{4}{\sin\psi'\cos\gamma} - \frac{2\sin\psi'}{\cos\gamma} + \frac{2\cos\gamma}{\sin\psi'}\right) - 4 - 2\left(\frac{\cos\psi'}{\cos\gamma}\right)^2\right], \tag{10}$$

terwijl V dezelfde beteekenis behield als vroeger.

De vergelijking (9) kan dienen om bij gegeven ψ', dus bij gegeven verhouding der grootste en kleinste as, de waarde van ϑ', m. a. w. de verhouding der grootste en middelbare as te bepalen; men kan nl. met behulp der tabel van Legendre twee waarden van ϑ' vinden, waarvan de eene minder dan een halven graad van de verlangde waarde verschilt, en daarna nog correctie aanbrengen (vgl. Plana, c. 170). Is V de gegeven grootheid, dan zou men de waarden van ϑ' en ψ' moeten zoeken, die zoowel (9) als (10) bevredigen; de vroeger besproken benaderingsformules kunnen hierbij nog van dienst zijn, wanneer V tamelijk klein is; maar is dit niet het geval, dan zou het zeer lastig zijn ϑ' en ψ' te bepalen, zoo men niet over eene tabel met overeenkomstige waarden van V, ϑ' en ψ' beschikte. Plana heeft zulk eene tabel vervaardigd, maar, zooals wij vroeger reeds hebben opgemerkt, de resultaten zijn geenszins vertrouwbaar; toch laten wij hier die cijfers volgen om beter te kunnen verklaren, waarin hij gedwaald heeft.

ϑ'	ψ'	$a:c$	$b:c$	$\frac{3}{2}V$
10°	45° 50′	1,435 24	1,424 05	0,205 91
20°	49°	1,524 25	1,472 61	0,225 875
30°	53°	1,661 64	1,523 40	0,260 562
40°	57°	1,836 08	1,546 43	0,272 35
50°	61° 30′	2,095 74	1,549 76	0,280 143
52° 30′	62°	2,130 05	1,520 15	0,276 12
55°	63°	2,202 69	1,505 73	0,275 43
60°	64°	2,281 17	1,432 10	0,263 034
70°	66°	2,458 60	1,261 00	0,220 114
80°	69°	2,790 44	1,097 56	0,104 2

Ingeval ϑ' kleiner is dan 10° of grooter dan 80°, moet, zooals Plana zegt, de berekening met grootere nauwkeurigheid geschieden. Hij geeft hier slechts eenige resultaten bij eerste benadering verkregen:

ϑ'	ψ'	$a:c$	$b:c$	$\frac{3}{2}V$
3°	45° 3′	1,415 45	1,414 48	0,211 59
5°	45° 10′	1,418 36	1,415 64	0,221 28
7°	45° 30′	1,426 72	1,421 26	0,215 45
87°	79°	5,240 86	1,035 61	0,215 24

Men ziet, dat deze tabel geheel in strijd is met de stellingen door Liouville, Meyer en Roche reeds vóór Plana bewezen: terwijl wij de ellipsoïden van Jacobi doorloopen van de omwentelingsfiguur af tot aan de oneindig lange naald, m. a. w. terwijl de modulus ϑ' van 0° tot 90° toeneemt, moet de hoeksnelheid en de verhouding der middelbare en kleinste as voortdurend afnemen; hier echter wordt $b:c$ en tevens $a:c$ aanvankelijk grooter (tot aan de strepen in het midden der eerste tabel, die ook door Plana zijn aangebracht), terwijl V de grilligste veranderingen vertoont, en b. v. voor $\vartheta' = 87^\circ$, dus een zeer uitgerekte ellipsoïde, omtrent even groot is als voor $\vartheta' = 3^\circ$, dus voor een evenwichtsfiguur, die weinig van een omwentelingsellipsoïde verschilt, maar voor $\vartheta' = 80^\circ$ zou V plotseling zeer klein geworden zijn. Dit laatste is ook door Todhunter opgemerkt [1]); hij zegt nl. de tabel van Plana besprekend: „The entry ·104 2 in the last column looks suspiciously small; but he gives it in two places." Inderdaad geeft Plana die waarde in c. 151 en c. 169, maar desniettemin bleek mij, dat substitutie van $\vartheta' = 80^\circ$, $\psi' = 69^\circ$ in (10) niet 0,104 2, maar 0,150 71 voor $\frac{3}{2}$ V oplevert. Het bevreemdt mij, dat Todhunter niet te gelijker tijd heeft opgemerkt, hetgeen wij zoo even reeds aanstipten, dat 0,215 24 veel te groot is als waarde van $\frac{3}{2}$ V bij $\vartheta' = 87^\circ$; ik bevond, dat bij de hier opgegeven waarden van de amplitudo ψ' en den modulus ϑ' uit (10) een resultaat volgt voor $\frac{3}{2}$ V, dat bijna driemaal kleiner is, nl. 0,076 8. Wij hebben nog een paar cijfers uit de laatste kolom onderzocht, en bevonden, dat zij ongeveer juist zijn, *wanneer men aanneemt, dat de waarden van* ϑ' *en* ψ' *in de tabel vermeld bij elkander passen;* voor

---

[1]) *History of the theories of attraction*, II, p. 444.

$\vartheta' = 70°$, $\psi' = 66°$ vond ik nl. $\frac{3}{2} V = 0{,}220\,12$, dus in overeenstemming met Plana, terwijl substitutie van $\vartheta' = 20°$, $\psi' = 49°$ in de vergelijking (10) 0,235 81 opleverde, hetgeen niet veel verschilt van Plana's resultaat.

Maar zijn de waarden van amplitudo en modulus in de tabel bij elkander passend? Hierop moeten wij vooreerst antwoorden, dat de laatstvermelde waarde van ψ', nl. 49°, geheel onmogelijk is, daar de kleinste waarde van ψ' niet zooals Plana schijnt te meenen 45° maar 54° 21′ 27″ bedraagt. Want wij zeiden reeds, dat (9) aequivalent is met de vergelijking

$$\int_0^1 \frac{x^2\,(1-x^2)\,(1-\lambda^2\,\lambda'^2 x^2)}{(1+\lambda^2\,x^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2\,x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = 0,$$

en terwijl Plana te recht opmerkt, dat alleen voor $\lambda^2\,\lambda'^2 > 1$ hieraan voldaan kan worden, meent hij ten onrechte, dat deze noodzakelijke voorwaarde voldoende zou wezen. Toch was reeds o. a. door Liouville [1]) in 1839 bewezen, dat de kleinste waarde p van $\lambda\lambda'$ die is, welke voor $\lambda = \lambda'$ wordt gevonden, dus voor de ellipsoïde van Jacobi, die tevens tot de reeks der omwentelingsellipsoïden behoort; p is nu de wortel der vergelijking (cf. p. 25)

$$\mathrm{bg\,tg}\,\sqrt{p} = \frac{3\sqrt{p} + 13p\sqrt{p}}{3 + 14p + 3p^2}$$

en deze wortel is, zooals Liouville zegt, niet veel verschillend van 2.

Wij vonden nl. op p. 25, dat $\sqrt{p} = 1{,}394\,6$ is, dus $p = 1{,}954\,9$; welnu, wanneer dit het minimum is van $\lambda\lambda'$, moet $\lambda^2\,\lambda'^2 > 3{,}821\,6$ wezen, en is het dus niet genoeg, dat men heeft $\lambda^2\,\lambda'^2 > 1$, zooals Plana meende. Hieruit volgt ook, dat λ', die volgens onze onderstelling op p. 79 bij de ongelijkassige ellipsoïde grooter is dan λ, ten minste 1,394 6 bedraagt;

[1]) Journal des Mathém., IV, p. 171.

derhalve is

$$\lambda' = \operatorname{tg}\psi' \geqq 1{,}394\,6, \qquad \psi' \geqq 54°\,21'\,27'',$$

zoodat de waarden van ψ' door Plana opgegeven als behoorend bij $\vartheta' < 40°$ alle onmogelijk zijn. Wat de overige waarden van ψ' in de tabel betreft, hebben wij nog onderzocht, of $\psi' = 57°$ bij $\vartheta' = 40°$ past, m. a. w. of deze waarden aan (9) voldoen. Nu bleek echter, dat bij $\psi' = 57°$ een waarde van ϑ' behoort, die tusschen 34° en 35° ligt; want voor $\psi' = 57°$, $\vartheta' = 34°$ is het eerste lid van (9) positief, maar voor $\psi' = 57°$ en $\vartheta' = 35°$ is het negatief; en dit laatste is ook altijd het geval, wanneer men hetzij $\vartheta' = 39°$, $\vartheta' = 40°$ of $\vartheta' = 41°$ bij diezelfde waarde der amplitudo in (9) substitueert. Hoewel ik nu gaarne wil bekennen, dat ik bij de andere waarden van ϑ' en ψ' door Plana opgegeven de lange becijferingen niet heb herhaald, zoo durf ik toch gerust besluiten, dat de Turijnsche geleerde, van een valsche onderstelling omtrent de kleinste waarde van ψ' uitgaande, ten gevolge van een groot aantal onverklaarbare rekenfouten eene tabel heeft samengesteld, die niet het minste vertrouwen verdient.

Opmerkelijk is, dat de recensent, die in „Fortschritte der Physik" [1]) Plana's tabel overnam, geen enkele fout heeft bespeurd, doch als een wetenswaardig resultaat vermeldt, dat V aanvankelijk met de excentriciteit van den aequator toeneemt om te gaan verminderen, wanneer ϑ' grooter is dan 52° 30′; dat Todhunter, die in zijn *History of the theories of attraction* niet minder dan 40 bladzijden aan de bespreking van Plana's geschriften wijdt en hem geen scherpe opmerkingen bespaart, aan deze tabel slechts toevoegt [2]): „These numbers rest on Plana's authority", en daarna alleen over het cijfer 0,104 2 een kleine opmerking maakt, die wij reeds hebben medegedeeld. Matthiessen spreekt van „eine Tafel

---

[1]) 1853, p. 55.

[2]) II, p. 444.

total falscher Coordinaten λ und λ', indem nach ihr beide gleichzeitig zu wachsen scheinen," [1]) een bezwaar, dat slechts voor een deel der tabel geldt.

Een meer vertrouwbare tabel is vervaardigd door G. H. Darwin[2]). Zooals wij reeds in de inleiding opmerkten, was hij van den arbeid zijner voorgangers Roche, Plana, Matthiessen en Kostka geheel onkundig; en hoewel hij in zijne literatuuropgave[3]) Meyer citeert, schijnt hij toch ook diens resultaten voor de ellipsoïde met de snelheid der Aarde wentelend, niet te kennen; dit meen ik althans te moeten opmaken uit zijne woorden: „I am not aware that *any* numerical values have *ever* been determined for the axes of the ellipsoids, which are figures of equilibrium of a rotating mass of fluid." Darwin meende dan ook iets geheel nieuws te verrichten, toen hij het vraagstuk behandelde „from the point of view necessary for reducing the formulæ to a condition for computation"; en toch was, zooals wij op de vorige bladzijden zagen, hetzelfde o. a. door Plana gedaan.

Darwin geeft drie vergelijkingen, waarvan echter slechts twee onafhankelijk zijn; de derde heeft hij er aan toegevoegd, omdat zij soms bij de berekening gemakkelijker of tot contrôle dienstig is. Zijn eerste vergelijking is identiek met (9) op p. 80 en ook op dezelfde wijze gevonden; de tweede en derde worden verkregen door substitutie der waarden van $p'v$, P, Q en R op p. 80 vermeld, in de vergelijkingen, die onmid-

---

1) Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 303.

2) Proc. Roy. Soc., XLI, p. 319.

3) Deze heeft hij grootendeels ontleend aan Hicks, *Report on recent progress in Hydrodynamics*, British Assoc. for the advancement of science, 1882, Southampton, p. 57; Roche, Plana, Matthiessen en Kostka worden ook door Hicks niet genoemd, en men kan moeilijk aannemen, dat Plana en Matthiessen de vermelding onwaardig gekeurd werden, omdat zoo menige fout hun arbeid ontsiert; want Ivory wordt door Hicks en Darwin aangehaald, niet de verhandelingen van Liouville en Todhunter, waarin zijne dwalingen wederlegd zijn.

dellijk volgen uit (4) in het eerste hoofdstuk (vgl. ook p. 36)

$$V = \frac{-p'v\ (a^2P - c^2R)}{a^2} = \frac{-p'v\ (a^2P - b^2Q)}{a^2 - b^2}.$$

Men vindt dan nl. in de hierboven aangenomen schrijfwijze van Plana

$$\frac{V}{2} = [(F - E)\cot^2\mu + E\cot^2\gamma]\,\Delta\cot\psi' - \Delta^2\cot^2\gamma, \ldots (11)$$

$$\frac{V}{2} = [(F-E)(1+\Delta^2) - E\,\mathrm{tg}^2\vartheta'\Delta^2]\Delta\cot\psi'\cot^4\mu + \Delta^2\cot^2\mu\cot^2\gamma.$$

Voor het geval, dat de modulus ϑ' zeer klein is, of bijna gelijk aan 90°, heeft Darwin door middel van de bekende formules uit de theorie der elliptische integralen [1])

$$\int_0^{\psi'} \frac{d\psi}{\Delta^3} = \frac{E}{\cos^2\vartheta'} - \frac{\mathrm{tg}^2\vartheta'\sin\psi'\cos\psi'}{\Delta},$$

$$\int_0^{\psi'} \frac{\mathrm{tg}^2\psi}{\Delta}\,d\psi = \frac{\Delta\,\mathrm{tg}\,\psi' - E}{\cos^2\vartheta'}$$

de vergelijkingen (9) en (11) in de volgende gedaante gebracht:

$$\Delta^2\int_0^{\psi'} \frac{\sin^4\psi}{\Delta^3}\,d\psi = \sin^2\psi'\cos^2\psi'\int_0^{\psi'} \frac{\mathrm{tg}^2\psi}{\Delta}\,d\psi, \ldots\ldots (9')$$

$$V = \frac{2\,\Delta\cos\psi'}{\sin^3\psi'}\left[\int_0^{\psi'} \frac{\sin^2\psi}{\Delta}\,d\psi - \cos^2\psi'\int_0^{\psi'} \frac{\mathrm{tg}^2\psi}{\Delta}\,d\psi\right] \ldots\ldots (11')$$

Bij de ontwikkeling dezer formules gebruikt hij de integralen

$$\int \sin^n\psi\,d\psi = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}\psi\cos\psi + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}\psi\,d\psi,$$

---

[1]) Zie b. v. Durège, *Theorie der elliptischen Functionen*, zweite Aufl., p. 71 en 72. In het hier volgende wordt, zooals men begrijpt, met Δ onder het integraalteeken bedoeld $\sqrt{1 - \sin^2\vartheta'\sin^2\psi}$.

$$\int \frac{\sin^n \psi}{\cos^2 \psi} d\psi = \frac{\sin^{n-1} \psi}{\cos \psi} - (n-1) \int \sin^{n-2} \psi \, d\psi,$$

$$\int \frac{\sin^{n+1} \psi}{\cos^n \psi} d\psi = \frac{1}{n-1} \sin \psi \ \mathrm{tg}^{n-1} \psi - \frac{n}{n-1} \int \frac{\sin^{n-1} \psi}{\cos^{n-2} \psi} d\psi,$$

terwijl in het bijzonder geval, dat $n = 1$ is, deze laatste vergelijking overgaat in

$$\int \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} d\psi = -\sin \psi + \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right);$$

verder wordt

$$\Delta = (1 - \sin^2 \vartheta' \sin^2 \psi')^{\frac{1}{2}} = \cos \psi' (1 + \cos^2 \vartheta' \, \mathrm{tg}^2 \psi')^{\frac{1}{2}}$$

volgens de binomiaalformule ontwikkeld, en wel zoo, dat, ingeval de modulus ϑ' klein is, de vierde macht van $\sin \vartheta'$, ingeval de modulus tot 90° nadert, de vierde macht van $\cos \vartheta'$ wordt verwaarloosd.

Op deze wijze vindt Darwin voor de kleine waarden van ϑ', overeenkomend met waarden der amplitudo, die niet meer dan één graad van haar minimum 54° 21′ 27″ (vgl. p. 83) verschillen, de volgende formules, die $\sin \vartheta'$ en V bepalen,

$$\sin^2 \vartheta' = 10^{0{,}926\,652\,8} \sin (\psi' - 54° \, 21' \, 27'') \ldots\ldots (12)$$

$$V = \frac{1}{\mathrm{tg}^3 \psi'} [(3 + \mathrm{tg}^2 \psi') \psi' - 3 \, \mathrm{tg} \, \psi'] +$$

$$+ \frac{\sin^2 \vartheta'}{\mathrm{tg}^3 \psi'} \left[\left(\frac{7}{4} \sin^2 \psi' - \frac{15}{8} \right) \mathrm{tg} \psi' + \left(\frac{15}{8} - \frac{9}{8} \mathrm{tg}^2 \psi' + \sin^2 \psi' \, \mathrm{tg}^2 \psi' \right) \right]; (13)$$

wanneer de modulus niet veel van 90° verschilt, wordt de vergelijking tusschen ϑ' en ψ', als wij nog kortheidshalve met Darwin $\log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi'}{2} \right)$ door Λ aanwijzen[1]),

---

[1]) Het is wel bijna overbodig te zeggen, dat hier zooals in geheel dit proefschrift door „log" de natuurlijke logarithmus wordt aangeduid.

$$\sec^2\psi' + \cos^2\vartheta'\left(\frac{15}{8} + \frac{27}{8}\operatorname{tg}^2\psi' + \frac{5}{3}\operatorname{tg}^4\psi' + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\psi'\right) -$$

$$-\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left[1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\psi' + \cos^2\vartheta'\left(\frac{15}{8} + \frac{11}{4}\operatorname{tg}^2\psi' + \operatorname{tg}^4\psi'\right)\right] = 0, \quad (14)$$

terwijl V nu bepaald is door

$$V = \frac{\sin^2\psi'}{\operatorname{tg}^3\psi'}\left[\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left(\frac{3}{2} + \operatorname{tg}^2\psi'\right) - \frac{3}{2}\sec^2\psi' +\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\vartheta'}{2}\left\{\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left(\frac{7}{8} + 2\operatorname{tg}^2\psi' + \operatorname{tg}^4\psi'\right) - \frac{7}{8} - \frac{21}{8}\operatorname{tg}^2\psi' - \frac{7}{4}\operatorname{tg}^4\psi'\right\}\right]. \quad (15)$$

Met behulp van deze formules heeft Darwin eene tabel vervaardigd, die men op p. 332 in de aangehaalde verhandeling kan vinden; behalve de waarden van ψ', ϑ' en $\frac{1}{2}V$ hebben wij om een reden, die later duidelijk zal worden, ook de cijfers voor $\frac{a}{\mathrm{a}}$, d. w. z. $\frac{a}{(abc)^{\frac{1}{3}}}$, overgenomen, alsook die voor ν en ε, grootheden, die resp. met het rotatie-moment μ, en de kinetische energie T der wentelende beweging in verband staan, en wel zoo, dat men heeft

$$\mu = \left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{3}{2}}(abc)^{\frac{5}{3}}\,\nu = M^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{a}^{\frac{1}{2}}\,\nu,$$

$$T = \left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{2}(abc)^{\frac{5}{3}}\,\varepsilon = \frac{M^2}{\mathrm{a}}\,\varepsilon,$$

waar M de massa der ellipsoïde voorstelt, en a evenals straks $(abc)^{\frac{1}{3}}$ beteekent. Wij achtten het overbodig ook de cijfers voor $\frac{b}{\mathrm{a}}$ en $\frac{c}{\mathrm{a}}$ over te nemen, daar men bij elke gegeven waarde van de amplitudo en den modulus zonder eenige moeite de assen en dus ook zoo noodig hare verhoudingen tot de grootheid a kan bepalen.

ψ'	ϑ'	$\frac{1}{2}V$	$\frac{a}{\text{a}}$	ν	ε
54° 21′ 27″	0° 0′	˙093 56	1,197 2	˙303 75	˙080 46
55°	$17\frac{3}{4}$°	˙094	1,216	˙304	—
57°	$34\frac{3}{4}$°	˙093	1,279	˙306	—
60°	49° 7′	˙090 60	1,383 1	˙313 4	˙081 7
65°	64° 19′	˙082 95	1,600 7	˙340 7	˙085 0
70°	74° 12′	˙070 47	1,899	˙392 0	˙090 1
75°	81° 4′	˙053 6	2,346	˙480 9	˙096 4
80°	86°	˙033 4	3,136	˙644	˙101 9
85°	$88\frac{5}{6}$°	˙013	5,04	1,016	˙101
90°	90°	˙000	∞	∞	˙000

In hoeverre de benaderingsformules voor zeer kleine en zeer groote waarden van den modulus bij het opmaken dezer tabel dienst deden, blijkt uit de volgende woorden van Darwin[1]) : „The solutions for $\psi' = 55°$ and $57°$ could not be found very exactly from the elliptic integrals with logarithms of only seven figures, but the solutions were confirmed by the approximate formulæ (12) and (13). The solution for $\psi' = 80°$ was confirmed by the approximate formulæ (14) and (15), and that for $\psi' = 85°$ was only computed therefrom, since when $\psi' = 80°$ the approximate formula gave nearly identical results with the exact one."

De waarde van $\frac{1}{2}$ V, die bij $\psi' = 55°$, $\vartheta' = 17\frac{3}{4}°$ wordt opgegeven, zou wellicht iemand in den waan kunnen brengen dat V niet juist voor de omwentelingsellipsoïde haar maximum bereikt. Maar in werkelijkheid past 0,187 06 als waarde van V

---

[1]) p. 333.

bij $\psi' = 55°$, $\vartheta = 17\frac{3}{4}°$, zoodat Darwin beter gedaan had door 0,0935 als waarde van $\frac{1}{2}V$ te vermelden.

Wanneer de amplitudo 57° bedraagt, leert de vergelijking (9), zooals wij reeds op p. 84 zagen, dat de modulus ϑ' tusschen 34° en 35° ligt; in die omstandigheden is de verwaarloozing van $\sin^4 \vartheta'$, die bij de afleiding van (12) geschiedde, zeker niet geoorloofd, en 't zal dan ook niemand bevreemden, dat (12) een aanmerkelijk afwijkende waarde voor ϑ', nl. 38° 36′ 36″ geeft, maar hieruit volgt tevens, dat de bevestiging der resultaten door (12) en (13), waarover Darwin spreekt, in dit geval van geen beteekenis kan wezen.

In Darwin's afleiding der formule (15) tot bepaling van V bij groote waarden van den modulus is een fout ingeslopen. De vorm, die in (11′) onder het integraalteeken staat,

$$\frac{\sin^2 \psi}{\Delta} = \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi}(1 + \cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^2 \psi)^{-\frac{1}{2}}$$

wordt namelijk, als men de vierde macht van $\cos \vartheta'$ buiten rekening laat,

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^2 \psi\right),$$

niet, zooals Darwin zegt [1]),

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - \frac{\cos^2 \vartheta'}{2}\left(\frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} + \frac{\sin^4 \psi}{\cos^3 \psi}\right),$$

want voor dit laatste kan ook worden geschreven

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2 \vartheta' \sec^2 \psi\right).$$

---

[1]) p. 327.

Dientengevolge moet (15) vervangen worden door

$$V=\frac{\sin 2\psi'}{\operatorname{tg}^3\psi'}\left[\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left(\frac{3}{2}+\operatorname{tg}^2\psi'\right)-\frac{3}{2}\sec^2\psi'+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\vartheta'}{2}\left\{\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left(\frac{15}{8}+3\operatorname{tg}^2\psi'+\operatorname{tg}^4\psi'\right)-\frac{15}{8}-\frac{29}{8}\operatorname{tg}^2\psi'-\frac{7}{4}\operatorname{tg}^4\psi'\right\}\right].\ (15')$$

Deze verbetering der formule brengt echter slechts een zeer geringe wijziging in de waarde van V, zooals straks nog nader zal blijken; reeds bij een amplitudo van 85°, dus als $\sec\psi'$, m. a. w. de verhouding der langste en kortste as, nog maar 11,474 bedraagt, is het resultaat voor V volgens (15′) slechts 6×10^{-6} grooter dan dat volgens (15), en bij meer uitgerekte ellipsoïden is de correctie nog kleiner. In het voorbijgaan zij hier opgemerkt, dat bij $\psi' = 85°$, $\vartheta' = 88\frac{5}{6}°$ de waarde 0,025 07 van V behoort, dus voor $\frac{1}{2}V$ schrijve men liever 0,012 5 dan 0,013, zooals Darwin in zijne tabel doet[1]), maar zeker niet 0,013 1, hetgeen hij op p. 335 aangeeft.

Intusschen kan tegen onze formule (15′) evenals tegen (14) en (15) nog een ernstig bezwaar worden ingebracht. 't Is te begrijpen — zoo zal men zeggen — dat bij de afleiding van formules voor de evenwichtsvormen, die zeer weinig van de omwentelingsellipsoïde verschillen, dus waar ϑ' zeer klein is, de term met $\sin^4\vartheta'$ mocht worden weggelaten, daar de coëfficiënt van $\sin^4\vartheta'$ niet bijzonder groot is, immers hij bevat slechts ψ' en goniometrische betrekkingen van ψ', dus van een hoek, die niet veel verschilt van 54° 21′ 27″. Bij zeer uitgerekte ellipsoïden echter is het geheel anders gesteld; zeker, de hoogere machten van $\cos\vartheta'$ worden nu

[1]) Is echter 0,013 als resultaat voor $\frac{1}{2}V$ niet bepaald verkeerd te noemen, wel is dit het geval met het cijfer, dat Lamb, *Hydrodynamics*, p. 587, de tabel van Darwin overnemend mededeelt, nl. $V = 0,026$.

zeer klein, maar tevens worden hare coëfficiënten bijzonder groot: $\cos^2 \vartheta'$ b. v. wordt reeds met $\mathrm{tg}^4\, \psi'$ en zelfs met $\Lambda\ \mathrm{tg}^4\, \psi'$ vermenigvuldigd, en terwijl ψ' tot 90° nadert, worden de hoogere machten van $\mathrm{tg}\, \psi'$ zeer groot en ook Λ, nl. $\log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi'}{2}\right)$; zoo is te verwachten dat $\cos^4 \vartheta'$ met $\mathrm{tg}^6\, \psi'$ te vermenigvuldigen zou zijn, mag nu zulk een product verwaarloosd worden?

Darwin geeft volstrekt geen verklaring omtrent dit punt, hij bepaalt er zich toe te zeggen, „that $\cos \vartheta'$ is small". Een nader onderzoek scheen des te meer gewenscht, omdat inderdaad blijkt, als bij de afleiding van (14) en (15′) de ontwikkelingen verder worden voortgezet, dat $\mathrm{tg}^6\, \psi'$ in den coëfficiënt van $\cos^4 \vartheta'$ voorkomt. Laat men niet de vierde maar slechts de zesde en hoogere machten van $\cos \vartheta'$ weg, dan moet aan het eerste lid van (14) worden toegevoegd

$$\cos^4 \vartheta' \left[\frac{175}{64} + \frac{65}{16}\,\mathrm{tg}^2\, \psi' + \frac{145}{48}\,\mathrm{tg}^4\, \psi' + \frac{11}{48}\,\mathrm{tg}^6\, \psi' - \right.$$

$$\left. - \frac{\Lambda}{\sin \psi'}\left(\frac{175}{64} + \frac{145}{32}\,\mathrm{tg}^2\, \psi' + \frac{15}{8}\,\mathrm{tg}^4\, \psi'\right)\right],$$

terwijl het tweede lid van (15′) vermeerderd wordt met

$$\frac{\sin 2\psi'}{\mathrm{tg}^3\, \psi'} \cdot \frac{\cos^4 \vartheta'}{64} \left[\frac{\Lambda}{\sin \psi'}\left(75\ \mathrm{tg}^2\, \psi' + 12\ \mathrm{tg}^4\, \psi' - 8\ \mathrm{tg}^6\, \psi'\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{105}{2} + \frac{185}{2}\,\mathrm{tg}^2\, \psi' + 30\ \mathrm{tg}^4\, \psi' - 10\ \mathrm{tg}^6\, \psi'\right)\right].$$

Wij zullen dan onderzoeken met behulp van de benaderingsformules (4b), (5b) en (8b) (p. 68—70) en van de betrekking op p. 70 voor kleine waarden van V afgeleid

$$\mathrm{Lim}\,\frac{b}{c} = 1 + V,$$

van welke orde de grootheden zijn, die bij verwaarloozing der hoogere machten van cos ϑ' worden weggelaten; daar Darwin op p. 335 voorstelt bij zeer uitgerekte ellipsoïden ook den term, die $\cos^2 \vartheta'$ bevat, te verwaarloozen, dient ook $\cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^4 \psi'$ enz. onderzocht te worden. Wanneer wij „bij benadering gelijk" aanduiden door het teeken (=) en overigens weder onze vroegere notatie gebruiken, wordt achtereenvolgens gevonden

$$\Lambda = \log \frac{1 + \sin \psi'}{\cos \psi'} \; (=) \; \log \frac{2a}{c} = \frac{x}{2},$$

$$\sec^2 \psi' = \frac{a^2}{c^2} (=) \frac{1}{4} e^x, \qquad \operatorname{tg}^2 \psi' (=) \frac{1}{4} e^x,$$

$$\cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^2 \psi' = \frac{b^2 - c^2}{c^2} = \frac{b - c}{c} \cdot \frac{b + c}{c} (=) 2\, V (=) 4 \frac{q'}{t},$$

$$\cos^2 \vartheta' (=) 8\, V e^{-x},$$

$$\cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^4 \psi' (=) \frac{1}{2} V e^x (=) 2 (x - 3),$$

$$\cos^4 \vartheta' \operatorname{tg}^6 \psi' = \cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^2 \psi' \times \cos^2 \vartheta' \operatorname{tg}^4 \psi' (=)$$

$$(=) 4\, V (x - 3) (=) 8 \frac{q'}{t} (x - 3),$$

$$\frac{\sin 2 \psi'}{\operatorname{tg}^3 \psi'} = \frac{2 \cos^4 \psi'}{\sin^2 \psi'} (=) \frac{2}{\sec^4 \psi'} (=) 32\, e^{-2x}.$$

Men leidt hieruit gemakkelijk af, dat het weglaten van den geheelen term met $\cos^4 \vartheta'$ in formule (14) slechts een uiterst geringe onnauwkeurigheid veroorzaakt; in (15') zou door de verwaarloozing van het voornaamste bestanddeel van dien term, nl.

$$\frac{1}{64} \cos^4 \vartheta' \sin 2 \psi' \operatorname{tg}^3 \psi' \left(10 - \frac{8 \Lambda}{\sin \psi'}\right),$$

iets buiten rekening gelaten worden, wat van dezelfde orde is als

$$4\,\frac{q'^2}{t}\,(5 - 4\,x)\,;$$

dit is nu wel zeer klein, maar toch moet men besluiten, dat die verwaarloozing ongeoorloofd zou zijn, indien men V door middel van (15′) in een groot aantal decimalen wilde berekenen, hetgeen alleen mogelijk is, zooals wij vroeger zagen, wanneer de gegeven grootheid zeer nauwkeurig bekend is.

Men kan nu ook gemakkelijk inzien, dat de correctie, die wij hebben aangebracht door (15′) in plaats van (15) te stellen, nl.

$$\frac{\sin 2\,\psi'}{\mathrm{tg}^3\,\psi'}\cos^2\vartheta'\sec^2\psi'\left(\frac{\Lambda}{\sin\psi'} - 1\right)(=)\;16\,q't\,(2x - 1),$$

slechts van zeer geringen invloed op het resultaat kon wezen; zelfs zou men ten koste van een zeer kleine onnauwkeurigheid (15′) aanmerkelijk kunnen vereenvoudigen door in den coëfficiënt van $\cos^2\vartheta'$ alleen de vierde macht van $\mathrm{tg}\,\psi'$ te behouden; de formule gaat dan over in

$$V = \frac{\sin 2\,\psi'}{\mathrm{tg}^3\,\psi'}\left[\frac{\Lambda}{\sin\psi'}\left(\frac{3}{2} + \mathrm{tg}^2\,\psi'\right) - \frac{3}{2}\sec^2\psi'\right] + \\ + \cos^2\vartheta'\sin^2\psi'\left(\frac{\Lambda}{\sin\psi'} - \frac{7}{4}\right).$$

Wil men echter om bij zeer uitgerekte ellipsoïden een benaderde waarde van V te vinden „alles weglaten wat kleiner is dan t", zooals wij op p. 68 deden, dan behoude men slechts de hoogere machten van $\mathrm{tg}\,\psi'$, die niet met eenige macht van $\cos\vartheta'$ vermenigvuldigd zijn, zooals Darwin op p. 335 voorstelt, zoodat men vindt

$$V = 2\cos^2\psi'\left[\frac{\Lambda}{\sin\psi'} - \frac{3}{2}\right](=)\;2\,\frac{c^2}{a^2}\left[\log\frac{2a}{c} - \frac{3}{2}\right], \quad . \; . \; . \quad (16)$$

de formule, die op p. 71 werd afgeleid.

Darwin geeft de formule (16) op p. 336, doch stelt op de vorige bladzijde een andere er voor in de plaats, die minder goed is, omdat $\cos\psi'$, die juist gelijk is aan $c:a$, aldaar bij benadering gelijk wordt genomen aan $\left(\frac{\mathrm{a}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$, hetgeen hierop neerkomt, dat het verschil tusschen de middelbare en kleinste as wordt verwaarloosd. Hij vindt dan

$$V = 3\left(\frac{\mathrm{a}}{a}\right)^3 \left[\log\frac{a}{\mathrm{a}} - C\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16')$$

„writing $1 - \frac{2}{3}\log 2 = C$, so that $C = 0{,}357\,3$". Men ziet, dat deze cijfers geheel verkeerd zijn; feitelijk is $C = 0{,}537\,90$.

Tot contrôle der benaderingsformule (16′) substitueert Darwin de waarde in zijne tabel voorkomend

$$\frac{a}{\mathrm{a}} = 5{,}042$$

en vindt dan

$$V = 2 \times 0{,}012\,64;$$

hierbij is de juiste waarde van C gebruikt, anders zou hij gevonden hebben

$$V = 2 \times 0{,}014\,75.$$

Des te vreemder is, dat op de volgende bladzijde bij een toepassing, waarop wij aanstonds terugkomen, weder gezegd wordt:

$$1 + C = 1{,}357\,3.$$

Over het zooeven vermelde resultaat $\frac{1}{2}\,V = 0{,}012\,64$ zegt Darwin: „the full value in the preceding tables was 0,013 1; thus even with so short an ellipsoid as this, the results agree within 4 per cent." Wij hebben reeds opgemerkt (p. 91), dat 0,013 1 veranderd moet worden in 0,012 54, zoodat het resultaat uit (16′) voortvloeiend nog niet 1 % te groot is.

Substitueert men $\cos 85°$ voor $c:a$ in (16), dan volgt

$$\frac{1}{2}\,V = 0{,}012\,41,$$

hetgeen *kleiner* is (ruim 1 %) dan de waarde door (15′) opgeleverd, en dit was ook te verwachten, daar bij den overgang van (15′) tot (16) positieve grootheden verwaarloosd zijn. Dat het resultaat van (16′) bijna 2 % grooter is dan dat van (16), is te wijten aan de minder nauwkeurige onderstelling (vgl. p. 94)

$$\cos \psi' = \left(\frac{\mathrm{a}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Tot verdere contrôle der formules van Darwin en tevens van de waarden, die wij vroeger voor de assenverhoudingen bij de Aarde vonden, werd nog in (16) en in (15′) gesubstitueerd

$$\frac{a}{c} = 52{,}41, \qquad \frac{b}{c} = 1{,}002\,313,$$

hetgeen omtrent overeenkwam met $V_a = 0{,}002\,300$. Dan is

$$\psi' = 88^\circ\, 54'\, 24'', \qquad \vartheta' = 89^\circ\, 55'\, 32'',$$

zoodat resp. uit (16) en uit de nauwkeuriger formule (15′) volgt

$$V_a = 0{,}002\,295, \qquad V_a = 0{,}002\,302.$$

Als het meest belangrijke resultaat zijner tabel schijnt Darwin te beschouwen, dat ε, en dus ingevolge de vergelijking

$$T = M^2\, \mathrm{a}^{-1}\, \varepsilon,$$

de kinetische energie T een maximum heeft, want M en a zijn bij een bepaalde vloeistofmassa constant. Volgens Darwin bereikt ε hare grootste waarde, „when a : a is about 3, or when the length of the ellipsoid is about five times its diameter;" [1]) uit de tabel volgt echter slechts, dat ε een maximum heeft voor

$$2{,}346 < \frac{\mathrm{a}}{a} < 5{,}04,$$

[1]) p. 334.

of, terwijl ψ' tusschen 75° en 85° ligt, en sec ψ' gelijk is aan het quotiënt der langste en kortste as, voor

$$3{,}86 < \frac{a}{c} < 11{,}47;$$

wel moet in verband met de gewijzigde waarde van V voor $\psi' = 85°$ (p. 91) ook die van ε in de tabel verbeterd worden, want uit de beteekenis op p. 88 aan ν en ε gegeven leidt men gemakkelijk af [1])

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{3\,V}{2}} = \frac{3}{10}\cdot\frac{V}{2}\left(\frac{\sec\psi'}{\Delta}\right)^{\frac{2}{3}}(1+\Delta^2),$$

waaruit volgt

$$\varepsilon = 0{,}096$$

in plaats van

$$\varepsilon = 0{,}101$$

zooals Darwin vond, maar dit verandert niets aan de conclusie, die hierboven uit de tabel werd afgeleid.

De uitdrukking voor ε, die wij zooeven ontmoetten,

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{3\,V}{2}},$$

doet zien, dat ε en dus ook de kinetische energie het product is van twee factoren, waarvan de eene, rechtstreeks evenredig met het rotatie-moment, steeds toeneemt, wanneer men de evenwichtsvormen van Jacobi doorloopt van de omwentelingsellipsoïde af tot aan de oneindig lange naald, terwijl de andere daarbij gestadig kleiner wordt. Hieruit wil Darwin bewijzen, dat de kinetische energie een maximum moet bereiken: „the kinetic energy is the product of two factors,

---

[1]) Bij Darwin, p. 336, staat ten gevolge van een drukfout

$$\varepsilon = \frac{3^{\frac{1}{2}}\nu}{2}\left(\frac{V}{2}\right).$$

one of which always increases, and the other of which always diminishes; thus it is obvious that is must have a maximum." Om het ongegronde dezer redeneering te doen inzien, stellen wij door $\varphi(x)$ en $\chi(x)$ twee functiën voor, waarvan de eerste steeds toeneemt, de andere gedurig afneemt; schrijft men nu

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\chi(x) = \psi(x)\,\chi(x),$$

dan wordt $\psi(x)$ altijd grooter, $\chi(x)$ altijd kleiner; is het derhalve „obvious", dat het product van twee dergelijke functiën een maximum heeft, zoo komt men tot het ongerijmde besluit, dat elke functie $\varphi(x)$, die *steeds toeneemt*, toch een maximum zou bezitten.

Bij zijn tweede bewijs, dat ε een grootste waarde bereikt, is Darwin niet gelukkiger; in de onderstelling, dat men hier evenveel mag verwaarloozen als bij de afleiding van (16′) geschiedde (cf. p. 94), en dus ook de middelbare as gelijk mag stellen aan de omwentelingsas, vindt hij

$$\varepsilon = \frac{9}{20}\frac{\mathrm{a}}{a}\left[1 + \frac{\mathrm{a}^3}{a^3}\right]\left[\log\frac{a}{\mathrm{a}} - C\right];$$

dan gaat hij voort: „now the function

$$\frac{\mathrm{a}}{a}\left(\log\frac{a}{\mathrm{a}} - C\right)$$

has a maximum, when

$$\log\frac{a}{\mathrm{a}} = 1 + C = 1{,}357\,3,$$

that is when

$$\frac{\mathrm{a}}{a} = 1{,}696.$$

On comparison with our tables it is obvious that the approximation is bad, and that the true solution for a maximum is considerably different from the above. Nevertheless this investigation shows that there is actually a maximum of kinetic energy."

Doch vooreerst is het de vraag of

$$\frac{a}{\alpha}\left[1+\frac{a^3}{\alpha^3}\right]\left[\log\frac{\alpha}{a}-C\right]$$

een maximum heeft, hetgeen wij straks zullen onderzoeken, niet of er een maximum voorkomt bij

$$\frac{a}{\alpha}\left[\log\frac{\alpha}{a}-C\right];$$

werkelijk heeft deze laatste functie een grootste waarde voor

$$\log\frac{\alpha}{a}=1+C,$$

maar zooals wij op p. 95 zagen, is

$$1+C=1{,}537\,90=\log 4{,}654\,8;$$

vervolgens, al zou ook $1+C$ gelijk wezen aan 1,357 3, dan nog zou men niet hebben

$$\frac{\alpha}{a}=1{,}696,$$

— dit is vermoedelijk bedoeld, want $\frac{a}{\alpha}$ is altijd < 1 — maar

$$\frac{\alpha}{a}=3{,}886.$$

Darwin mag dus niet besluiten, „that the approximation is bad", althans zoo hij daarmede wil zeggen, dat de benaderingsformules van p. 335, zooals (16′), blijken niet goed te wezen; maar evenmin is de conclusie gewettigd: „this investigation shows that there is actually a maximum of kinetic energy".

Dit bewijs had hij op de volgende wijze kunnen geven:

$$f\left(\frac{a}{\alpha}\right)=\frac{a}{\alpha}\left[1+\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3\right]\left[\log\frac{\alpha}{a}-C\right]$$

heeft een maximum, wanneer men — kortheidshalve $\frac{\mathrm{a}}{a}$ door y voorstellend — te gelijker tijd heeft

$$f'(y) = (1 + 4y^3)\left(\log\frac{1}{y} - C\right) - (1 + y^3) = 0,$$

$$f''(y) = -\left(\frac{1}{y} + 7y^2\right) + 12y^2\left(\log\frac{1}{y} - C\right) < 0;$$

daar y een positieve echte breuk is, wordt

$$f'(y) < 0 \text{ voor } \left(\log\frac{1}{y} - C\right) = 0, \text{ dus voor } \frac{1}{y} = 1{,}712\,41,$$

$$f'(y) > 0 \text{ voor } \left(\log\frac{1}{y} - C\right) = 1, \text{ dus voor } \frac{1}{y} = 4{,}654\,81,$$

terwijl $f''(y)$ altijd negatief is voor

$$0 < \left(\log\frac{1}{y} - C\right) < 1.$$

Bij nader onderzoek blijkt spoedig, dat $f'(y)$ verdwijnt, wanneer $\frac{1}{y}$ ruim 4,51 bedraagt; dus de kinetische energie bereikt een grootste waarde, wanneer het quotiënt van a en a ruim 4,51 is; dit is niet in strijd met de tabel van p. 89, zooals uit onze opmerking op p. 96 volgt. Volgens de onderstelling van Darwin bij de afleiding der benaderingsformule voor de kinetische energie, dat nl. het verschil tusschen de middelbare en kleinste as mocht verwaarloosd worden, is

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{\mathrm{a}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

dus hij had moeten besluiten, dat de kinetische energie een maximum heeft, niet wanneer de lengte der ellipsoïde vijfmaal zoo groot is als hare middellijn, maar wanneer het quotiënt der langste en kortste as 9,58 bedraagt. Ten slotte, allicht kon men het bedenkelijk achten, dat Darwin van de onderstelling uitgaande $a : \mathrm{a} \,(=)\, 3$, waaruit volgens zijn eigen tabel kan worden afgeleid $b \,(=)\, 1{,}09\, c$, een formule ging toepassen, waarbij $b = c$ wordt gedacht; is, zooals nu blijkt, $a : \mathrm{a}$ omtrent $4\frac{1}{2}$, zoodat $b \,(=)\, 1{,}04\, c$, dan is die verwaarloozing in elk geval beter gerechtvaardigd.

Na deze lange discussie der becijferingen van Plana en Darwin zal men ons veroorloven over die van Matthiessen [1]) korter te zijn. Hij was, voor zooverre ik weet, de eerste, die de fouten in de resultaten van Meyer heeft aangewezen. Deze laatste heeft volgens Matthiessen zijne berekening verricht en wel „wie es scheint, auf sehr mühsamem Wege" met behulp van de vergelijkingen [2])

$$V = \frac{2\,\Delta\,\psi' \cos\psi'}{\sin^3\psi'}\left[\int_0^{\psi'} \frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\, d\psi - \cos^2\psi' \int_0^{\psi'} \frac{\mathrm{tg}^2\,\psi}{\Delta\,\psi}\, d\psi\right],$$

$$0 = \int_0^{\psi'} \frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\, d\psi - \int_0^{\psi'} \frac{\sin^2\psi}{\Delta^3\psi}\, d\psi + \frac{k^2 \sin^2\psi' \cos^2\psi'}{\Delta^2\psi'} \int_0^{\psi'} \frac{\mathrm{tg}^2\,\psi}{\Delta\,\psi}\, d\psi.$$

[1]) Zeitschr. Math. Phys., VI, p. 72 en XVI, p. 303; vgl. XXV, p. 80 en 81.

[2]) Ofschoon deze vergelijkingen gemakkelijk uit die in Crelle's Journal, XXIV, p. 52, worden afgeleid — zij zijn, zooals men ziet, identiek met (9') en (11') op p. 86 — weet ik toch niet, waar Meyer ze juist in dezen vorm heeft geschreven. Matthiessen citeert behalve Crelle's Journal ook „Programm von Königsberg (1869)", maar door de welwillende tusschenkomst van den Leidschen bibliothecaris Dr. du Rieu werd van de directie der Berlijnsche bibliotheek de verzekering ontvangen, dat deze aanhaling niet juist is; ook nasporingen rechtstreeks te Königsberg gedaan bleven vruchteloos.

Maar de oplossing door middel van elliptische integralen is volgens Matthiessen wel „elegant und der Schwierigkeit des Problems entsprechend, erschwert aber die numerische Berechnung concreter Fälle ungemein und lässt die interessantesten Punkte des Problems im Dunkel." Daarom zal hij liever de elliptische integralen door reeksontwikkeling tot algebraïsche terugbrengen; wij hebben gezien, dat dit met vrucht kan geschieden, wanneer V *zeer klein* is of in de *onmiddellijke* nabijheid van haar grootste waarde ligt, maar Matthiessen maakt in veel ruimere mate van deze methode gebruik.

„Da nämlich innerhalb sehr weiter Grenzen $\lambda < 1$ und λ' beträchtlich gross wird, während V abnimmt, so können wir die Berechnung vorläufig auf diese Grenzen beschränken, um die Ideen von den Gestaltungen dieser Gleichgewichtsfiguren zu fixiren. Wir berücksichtigen in dieser Voraussetzung nur die Grössen von der Ordnung λ^2, $\frac{1}{\lambda'^2}$, λ^4 und $\lambda^2 : \lambda'^2$, indem sich herausstellt, dass das Product $\lambda^2 \lambda'^2$ sich innerhalb sehr weiter Grenzen wenig ändert. Beispielsweise ist für

$V = 0{,}187\,11$	$\min(\lambda^2 \lambda'^2) = 3{,}782\,7$
$V = 0{,}031\,0$	$\lambda^2 \lambda'^2 = 6{,}990\,0$
$V_a = 0{,}002\,3$	$\lambda^2 \lambda'^2 = 12{,}735\,8$
$V = 0{,}000\,0$	$\mathrm{Lim}(\lambda^2 \lambda'^2) = 4 \log \lambda'.$"

Wanneer in de vergelijkingen, die volgens het eerste hoofdstuk de ellipsoïde van Jacobi bepalen

$$\int_0^v \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)\,[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\,(v + \omega)]}{\mathrm{p}'^2 u}\, du = 0,$$

$$V = -\,\mathrm{p}'v \int_0^v \frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}{(\mathrm{p}u - e_2)\,(\mathrm{p}u - e_3)}\, du,$$

$\frac{pv - e_1}{pu - e_1}$ gelijk wordt gesteld aan x^2, komen zij in den vorm

$$\int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)(1 - \lambda^2 \lambda'^2 x^2)}{(1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 0,$$

$$V = 2(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{x^2 (1 - x^2)}{(1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

waarvoor men ook blijkens de vorige betrekking mag schrijven

$$V = 2\lambda^2 \frac{(1 + \lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \frac{x^2 (1 - x^2)(1 + \lambda'^2 x^2)}{(1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

zooals Matthiessen gedaan heeft.

Van deze twee vergelijkingen uitgaande stelt hij

$$(1 + \lambda^2 x^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} \lambda^2 x^2 + \frac{15}{8} \lambda^4 x^4,$$

en verder

$$(1 + \lambda'^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda' \left(1 + \frac{1}{2\lambda'^2}\right),$$

$$\log \left[\lambda' + (1 + \lambda'^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \log 2\lambda' + \frac{1}{4\lambda'^2};$$

hij vindt dan

$$\lambda^2 \lambda'^2 = \frac{4 \log 2\lambda' - 6 + \frac{7}{\lambda'^2}}{1 - 2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{53}{16}\lambda^4 + 4\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}}, \quad \ldots\ldots(17)$$

„woraus sich ohne Mühe das zu einem gegebenen λ' zugehörige λ berechnen lässt"; uit de tweede vergelijking verkrijgt hij op dezelfde wijze

$$V = \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2\lambda'^2} + \frac{37}{16}\lambda^4 + \frac{5\lambda^2}{2\lambda'^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Hoewel Matthiessen zich slechts „voorloopig zou bepalen" tot $\lambda < 1$, zegt hij later niets over de methode die men volgen moet, wanneer λ, die tot 1,3946 kan aangroeien, grooter dan 1 wordt; in dit geval immers zijn de formules (17) en (18) geheel onbruikbaar. Wij kunnen dus niet met zekerheid nagaan, hoe de resultaten gevonden zijn, die in Matthiessen's tabel[1]) waarvan wij hier een gedeelte laten volgen, voor $\lambda > 1$ worden medegedeeld.

λ'	λ^2	$\lambda^2\,\lambda'^2$	V
1,394 6	1,945 0	3,782 7	0,187 1
1,538 9	1,601 4	3,792 8	0,183 2
1,581 2	1,520 9	3,802 5	0,181 0
2,095 0	0,912 0	4,000 0	0,132 0
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	0,12
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	0,11
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	0,10
4,472 1	0,217 8	4,357 0	0,085 6
5,477 2	0,170 4	5,110 9	0,068 9

In den eersten regel dezer tabel komen een paar fouten voor: wanneer λ' hare kleinste waarde 1,394 6 bereikt, is $\lambda = \lambda'$, en dus $\lambda^2 = 1{,}954\,9$, zoodat $\lambda^2\,\lambda'^2 = 3{,}821\,6$ is, en dit laatste product kan nooit kleiner worden (vgl. p. 83). Hieruit volgt, dat ook de cijfers in den tweeden en derden regel der tabel niet vertrouwbaar zijn; vermoedelijk heeft

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 308.

Matthiessen ook hier de elliptische integralen door reeksontwikkeling in algebraïsche omgezet, maar wij zagen reeds bij de bespreking der uitkomsten van Darwin, dat deze methode slechts gebruikt kan worden, als V in de *onmiddellijke* nabijheid van 0,187 11 ligt, en zelfs voor $\frac{1}{2} V = 0{,}093$ of $\psi' = 57°$ een verkeerd resultaat oplevert (p. 90); a fortiori is dit het geval, wanneer $V = 0{,}183\,2$ of $V = 0{,}181\,0$ is, en door vergelijking met de tabel van Darwin ziet men dan ook terstond, dat b. v. in dit laatste geval λ' grooter moet zijn dan tg 60° of 1,732 05, zoodat de waarde door Matthiessen opgegeven veel te klein is.

Is hij gelukkiger, wanneer hij voor kleine waarden van V, maar „innerhalb sehr weiter Grenzen" het gebruik van elliptische integralen wil ontwijken door middel van de formules (17) en (18)? Wanneer men de afleiding dezer formules nagaat, krijgt men o. a. te doen met

$$\frac{1}{2\lambda'^2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+\lambda'^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{3}{4\lambda'^2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+\lambda'^2 x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

deze integralen nu schijnt Matthiessen, zooals hij ook op een andere plaats [1]) voorstelt, „als zeer kleine grootheden van de eerste orde" verwaarloosd te hebben. Doch ten onrechte, want dientengevolge is b. v. $\frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$ en $\lambda^2 \log 2\lambda'$ weggevallen, hetgeen ongeoorloofd is, wanneer men λ^2 en $\frac{1}{\lambda'^2}$, ja zelfs λ^4 en $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$ behoudt. Brengt men de zooeven genoemde integralen in rekening, dan zal men bevinden, dat in het tweede lid

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XXV, p. 81.

van (17) de coëfficiënt van $\log 2\lambda'$ moet worden

$$4 + \frac{6}{\lambda'^2} + 6\lambda^2 + \frac{33\lambda^2}{2\lambda'^2},$$

terwijl in het tweede lid van (18) nog

$$-\frac{2\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$$

in den coëfficiënt van $\frac{1}{2}\lambda^2$ moest voorkomen.

Maar is, ook afgezien van deze groote onnauwkeurigheid, de methode van Matthiessen aanbevelenswaardig? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, zullen wij de beteekenis nagaan der verwaarloozing door hem voorgesteld (zie p. 102) en daarbij weder onze vroegere notatie gebruiken. Men vindt dan gemakkelijk

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} (=) 2V (=) 4\frac{q'}{t},$$

$$\lambda^4 (=) 16\left(\frac{q'}{t}\right)^2, \qquad \frac{1}{\lambda'^2} (=) 4t, \qquad \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = 16q';$$

door b. v. λ^6, $\frac{1}{\lambda'^4}$, $\frac{\lambda^4}{\lambda'^2}$, weg te laten, verwaarloost men dus grootheden, die resp. ten minste van dezelfde orde als $\left(\frac{q'}{t}\right)^3$, t^2, $\frac{q'^2}{t}$, derhalve alle veel grooter dan q'^2 zijn, en wij kunnen nu gerust den lezer laten beslissen, of b.v. wanneer zooals in de tabel $\lambda^2 = 0{,}1704$ of $\lambda^2 = 0{,}2178$ zou wezen, of wanneer λ nog meer tot 1 nadert, zulk een methode meer dan bij allereerste benadering λ' en V doet kennen, en welke waarde dus moet worden toegekend aan de vier decimalen door Matthiessen opgegeven.

De formules (17) en (18) zijn derhalve, ook na de verbetering, die hierboven werd aangebracht, niet „innerhalb sehr weiter

Grenzen", maar slechts voor zeer uitgerekte ellipsoïden te gebruiken, m. a. w. juist voor die evenwichtsvormen, waarbij $\lambda^2 \lambda'^2$ zeer snel verandert, want b. v. voor een zoo kleine waarde van V als bij de Aarde voorkomt, is dit product volgens Matthiessen 12,735 8 (of liever, zooals ik uit *zijne* waarden der assenverhoudingen voor V_a bereken, 12,730 9) en voor $V = 0$ is het logarithmisch oneindig groot; maar voor de waarden van V, waarbij $\lambda^2 \lambda'^2$ betrekkelijk langzaam afneemt, kunnen (17) en (18) niet dienstig zijn. Had iemand intusschen (17) willen benuttigen om voor zeer uitgerekte ellipsoïden λ te berekenen, die bij gegeven λ' past, dan zou hij, zooals men ziet, telkenmale een derdemachtsvergelijking moeten oplossen; de uitdrukking „ohne Mühe" bij Matthiessen is dus niet geheel gerechtvaardigd.

Voor „zeer kleine omwentelingssnelheden", zoo zegt Matthiessen — wij moeten er nu bijvoegen, voor zoo kleine waarden van V, dat men niet alleen $\frac{1}{\lambda'^2}$ maar ook $\frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$ mag verwaarloozen — kan uit (17) en (18) worden afgeleid, dat

$$\text{Lim}\ (\lambda^2 \lambda'^2) = 4 \log \lambda',$$

en verder dat men voor V de vergelijkingen heeft

$$V = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{2 \log 2\lambda' - 3}{\lambda'^2} \ (=)\ \frac{\log \frac{1}{5}\lambda'^2}{\lambda'^2}, \quad \ldots \quad (19)$$

of ook dat het quotiënt der middelbare en kleinste as meer en meer tot $1 + V$ nadert. Heeft Matthiessen wellicht deze stellingen op het oog gehad, toen hij zeide: „die Lösung mittels elliptischer Integrale .... lässt die interessantesten Punkte des Problems im Dunkel"? Zoo ja, dan heeft hij zich vergist, want deze formules worden zeer gemakkelijk uit de aan Matthiessen bekende resultaten van Kostka gevonden (vgl. ook p. 70).

Intusschen is er nog één toepassing, die wel geen schrijver vóór of na Matthiessen zal gemaakt hebben. Deze zegt nl.: „aus (19) folgt noch wegen $M = \frac{4}{3} a\, b\, c\, \pi\, \rho$ nahezu

$$T^2 : T_1^2 = \omega_1^2 : \omega^2 = a^3 : a_1^3,$$

d. h. die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich bei constantem Volumen und Dichte bei geringer Winkelgeschwindigkeit innerhalb mässig weiter Grenzen wie die Cuben der grossen Axen (Keppler'sches Gesetz)." Dus de tweede machten der omloopstijden van vloeistofmassa's, die bij wenteling om haar eigen as, terwijl zij geheel vrij zijn van elken uitwendigen invloed, een drieassige ellipsoïde tot evenwichtsvorm hebben, zouden onder bepaalde omstandigheden evenredig zijn met de derde machten der grootste assen van die ellipsoïdale evenwichtsfiguren. Men zal allicht toestemmen, dat de analogie met de derde wet van Keppler ver te zoeken is.

Maar hoe zou deze stelling uit (19) volgen? Vervangt men λ' door $a : c$, hetgeen bij zeer uitgerekte ellipsoïden zeker geoorloofd is, dan heeft men

$$V\, a^3 = a\, c^2 \left[2 \log \frac{2\,a}{c} - 3\right],$$

$$V_1 a_1^3 = a_1 c_1^2 \left[2 \log \frac{2\,a_1}{c_1} - 3\right];$$

stelt men nog $b = c$, zoodat $M = \frac{4}{3} a\, c^2 \pi\, \rho$, dan volgt uit de onderstelling omtrent standvastig volumen en dichtheid

$$\omega^2\, a^3 : \omega_1^2\, a_1^3\ (=)\ \log \frac{1}{5} \left(\frac{a}{c}\right)^2 : \log \frac{1}{5} \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^2,$$

dus de evenredigheid, waarover Matthiessen spreekt, is slechts juist, voor zooverre

$$\log \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \log \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^2.$$

Gelukkigerwijze moet aan de derde wet van Keppler een grootere zekerheid worden toegekend dan aan deze „wét van Matthiessen".

Reeds in 1860 had Matthiessen uit de formule (19) afgeleid[1]), dat met $V_a = 0{,}002\,299\,71$ de assenverhoudingen overeenkomen

$$a : b : c = 52{,}279 : 1{,}002\,3 : 1,$$

terwijl de resultaten van Meyer voor V_a, nl.

$$a : b : c = 19{,}57 : 1{,}018 : 1,$$

ook niet bij elkander passen, maar de volgende waarden aan (19) zouden voldoen:

$$a : b : c = 19{,}57 : 1{,}012 : 1 \; \ldots\ldots\ldots \; V = 0{,}011\,5,$$
$$a : b : c = 15{,}6 \;\; : 1{,}018 : 1 \; \ldots\ldots\ldots \; V = 0{,}016\,3.$$

Het resultaat voor $b : c$, dat Matthiessen als bij V_a passend aangeeft, is onberispelijk, maar voor de verhouding der grootste en kleinste as vind ik uit (19)

$$52{,}358\,45 < \frac{a}{c} < 52{,}358\,59;$$

dat deze uitkomst eenigermate verschilt van die, welke wij vroeger voor $a : c$ bij V_a vonden, is alleen hieraan toe te schrijven, dat toen een nauwkeuriger formule dan (19) werd gebruikt (vgl. p 70 en 75).

Hoe Matthiessen uit (19) afleidde, dat $V = 0{,}016\,3$ is, wanneer men heeft

$$b : c = 1{,}018 : 1,$$

is niet duidelijk ; want volgens die vergelijking wordt

$$V = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2\,c^2} = \frac{1{,}018^2 - 1}{2},$$

[1]) Zeitschr. Math. Phys., VI, p. 72.

derhalve is

$$\frac{0{,}035\,3}{2} < V < \frac{0{,}037\,3}{2};$$

overigens begrijpt men, dat terwijl V reeds zooveel van nul verschilt, (19) slechts benaderde resultaten kan opleveren, zoodat althans de vierde decimaal van onwaarde is.

Ook $\frac{a}{c} = 15{,}6$ past niet bij $\frac{b}{c} = 1{,}018$, maar uit (19) zou volgen

$$14{,}0 < \frac{a}{c} < 14{,}6.$$

De uitkomsten van Matthiessen voor $\frac{b}{c}$ en V bij $\frac{a}{c} = 19{,}57$ stemmen goed overeen met die, welke wij op p. 76 bij eerste benadering afleidden. Zooals reeds in de inleiding vermeld werd, gaf Matthiessen in de straks besproken verhandeling[1]) voor de assenverhoudingen bij V_a passend een resultaat, dat een weinig afwijkt van het bovenstaande, nl.

$$a : b : c = 52{,}434\,6 : 1{,}002\,313\,4 : 1;$$

de zoo scherp bepaalde verhouding der middelbare en kleinste as, geheel overeenstemmend met die welke intusschen door Kostka gevonden was, kan natuurlijk niet uit (19) verkregen zijn; allicht is zij evenals de andere assenverhouding door combinatie van (17) en (18) afgeleid.

Wij kunnen dus besluiten, dat de formules door Matthiessen voor zeer kleine waarden van V afgeleid, aequivalent zijn met die, welke men langs verschillende andere wegen als eerste benaderingsvergelijkingen vindt; de formules echter, die hij ook voor grootere waarden van V voorstelt, zijn zeer onnauwkeurig, worden spoedig onvertrouwbaar en zijn daarenboven bewerkelijk, omdat telkenmale een derdemachtsvergelijking

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 304.

moet worden opgelost; ook laat Matthiessen voor een groot deel van het verloop van V het vraagstuk geheel onbeantwoord. Wij moeten dus terugkeeren tot de door Matthiessen versmade methode, die, zooals wij op p. 78 zagen, voor elke waarde van V van de kleinste af tot de grootste een middel tot oplossing aan de hand doet. Voor zeer kleine omwentelingssnelheden bleken de reeksen van Halphen wel het meest geschikt te zijn om benaderingsformules te vinden; echter kan men desverkiezende ook met Darwin de elliptische integralen in algebraïsche ontwikkelen, maar altijd dient men zich rekenschap te geven van de orde der grootheden, die bij bepaalde gegevens verwaarloosd kunnen of moeten worden; daardoor wordt tevens het becijferen van geheel onzekere decimalen vermeden.

§ 4. *Evenwichtsvormen der satellieten.*

In het eerste hoofdstuk bespraken wij de ellipsoïdale evenwichtsvormen, die bij de satellieten kunnen voorkomen, wanneer deze vloeibaar en homogeen ondersteld worden en om hunne as wentelen in denzelfden tijd, waarin zij hunne baan om de planeet doorloopen. Stelt men de verhouding der massa's van den wachter en de planeet door μ voor, terwijl

$$P = \int_0^v \frac{du}{pu - e_\gamma}, \text{ enz.}$$

dan waren de vergelijkingen dier evenwichtsfiguren in de bepaalde onderstelling, dat de afmetingen der vloeistofmassa zeer klein zijn in vergelijking met den afstand tusschen deze massa en de planeet (vgl. p. 32, 34 en 35)

$$\mu[a^2b^2(P-Q)+Rc^2(a^2-b^2)]+c^2(a^2P-b^2Q)-3a^2(b^2Q-c^2R)=0,$$

$$\frac{a^2P - b^2Q}{a^2(3+\mu) - b^2\mu} = \frac{V}{-p'v(1+\mu)};$$

men kon ze ook vervangen door de twee volgende betrekkingen

$$\frac{b^2 Q - c^2 R}{b^2 \mu + c^2} = \frac{V}{-\mathfrak{p}'v\,(1+\mu)},$$

$$\frac{a^2 P - c^2 R}{a^2\,(3+\mu) + c^2} = \frac{V}{-\mathfrak{p}'v\,(1+\mu)}.$$

Bij elke gegeven waarde van μ en V kan men die der assenverhoudingen berekenen met behulp der tabellen van Roche [1]), die volgens Tisserand [2]) niets te wenschen overlaten; hoe die berekening kan geschieden, en hoe Roche de tabellen zelve kon vervaardigen, zal men beter begrijpen, wanneer wij bovenstaande vergelijkingen tot de oorspronkelijke notatie van Roche [3]) terugbrengen door te stellen

$$\frac{c^2}{a^2} = s, \qquad \frac{c^2}{b^2} = t, \qquad \frac{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v}{\mathfrak{p}v - e_1} = x;$$

men vindt dan

$$[\,(3 - 3\,t - st + s^2)\,t + \mu\,(t - s)\,(1 - t - s)\,] \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} +$$

$$+ [\,st\,(s - 4\,t + 3) - \mu\,st\,(t - s)\,] \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{V}{1+\mu} = \frac{st\,(t-s)}{(3+\mu)\,t - \mu\,s} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)\,(1+tx)\,\Delta}, \ldots\ldots (21)$$

$$\frac{V}{1+\mu} = \frac{(1-t)\,t}{t+\mu} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)\,(1+tx)\,\Delta}, \ldots\ldots (22)$$

---

1) *Mémoire sur les figures ellipsoïdales*, etc. (zie hierboven, p. 4).
2) Comptes Rendus, XCVI, p. 1173.
3) Mémoires de Montpellier, I, p. 246.

$$\frac{V}{1+\mu} = \frac{(1-s)\,s}{s+3+\mu}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)\,(1+sx)\,\Delta}, \ldots\ldots (23)$$

waarin

$$\Delta = \sqrt{(1+x)\,(1+sx)\,(1+tx)}.$$

De waarde der beide integralen in (20) voorkomend, die bij optelling de integraal in formule (21) opleveren, wordt voor het geheele verloop van s en t tusschen 0 en 1 in de tabellen van Roche aangegeven; hij heeft ze kunnen becijferen met behulp der tafels van Legendre, hoewel hij zich in de „Mémoires de Montpellier" verder niet hierover uitlaat. Inderdaad is in de notatie van Roche

$$-P\,\mathrm{p}'v = \int_0^\infty \frac{s\,dx}{(1+sx)\,\Delta}, \qquad -Q\,\mathrm{p}'v = \int_0^\infty \frac{t\,dx}{(1+tx)\,\Delta},$$

$$-R\,\mathrm{p}'v = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\,\Delta},$$

zoodat men heeft

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} = \mathrm{p}'v\left[\frac{1}{t-s}\left(\frac{P}{1-s} - \frac{Q}{1-t}\right) + \frac{R}{(1-t)(1-s)}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = -\mathrm{p}'v\left[\frac{1}{t-s}\left\{\frac{P}{s\,(1-s)} - \frac{Q}{t\,(1-t)}\right\} + \frac{R}{(1-t)(1-s)}\right];$$

$P\,\mathrm{p}'v$ enz. hebben wij nu reeds op p. 80 in de elliptische integralen van de eerste en tweede soort en in goniometrische functiën van de amplitudo en den modulus uitgedrukt, terwijl ook s en t zeer eenvoudige functiën van de amplitudo en den modulus zijn, zoodat de waarden der integralen van Roche gemakkelijk uit de tafels van Legendre te vinden zijn.

Bij elke waarde van μ zijn de uiterste grenzen der stabiele evenwichtsvormen, zooals wij vroeger zagen (p. 36), de bol en de oneindig lange naald in de richting der aantrekkende massa uitgerekt; wordt de x-as weder in deze richting gekozen, dan zijn de ellipsoïden, waarbij $a > b$ of $s < t$ is, stabiel; hare grensgevallen kunnen ook door $s = 1$, $t = 1$ en $s = 0$, $t = 1$ worden aangeduid. De instabiele vormen verloopen tusschen de oneindig platte schijf: $s = 0$, $t = 0$ in de schrijfwijze van Roche, en de naald uitgerekt in de richting der y-as: $s = 1$, $t = 0$. Is nu een willekeurige waarde van μ gegeven, dan kan men, zooals Roche[1]) zegt, de bij elkander passende waarden van s en t, die aan (20) voldoen, bij benadering vinden door een graphische constructie. Daartoe dient men vooreerst met behulp der tabellen van Roche een lijst te maken der waarden, die het eerste lid van (20) aanneemt, wanneer s en t tusschen 0 en 1 veranderen, telkens b. v. met $\frac{1}{10}$ opklimmende; daarna vindt men door interpolatie eenige bij elkander passende waarden van s en t, d. w. z. die het eerste lid van (20) gelijk aan nul maken. Men heeft nu even zoovele punten der kromme C, die door vergelijking (20) wordt voorgesteld, wanneer s en t als coördinaten genomen worden; overeenkomstig hetgeen zooeven gezegd is, bestaat deze kromme uit twee takken, waarvan de éénе van het punt $s = 1$, $t = 1$ naar $s = 0$, $t = 1$ loopt, terwijl de andere, die volgens (21) geheel tusschen de rechte lijn $t = \frac{\mu s}{\mu + 3}$ en de s-as ligt, uit den oorsprong naar $s = 1$, $t = 0$ gaat. Stelt men zich voor, dat in (21) t als functie van s is uitgedrukt door middel van (20), dan kan men V als functie van s alleen beschouwen; de betrekking tusschen deze twee veranderlijken kan nu in een tweede figuur aanschouwelijk gemaakt worden door middel van een kromme C', waarvan men zooveel punten kan vinden als men wil door s aan te nemen en met behulp

[1]) Mémoires de Montpellier, I, p. 249.

der kromme C en der reeds geconstrueerde tafel de overeenkomstige waarde van V te berekenen; men ziet nu tevens, welke de grootste waarde van V is, zoowel bij de stabiele als bij de instabiele vormen. Bij elke waarde van V, die beneden het maximum dezer grootheid voor de stabiele figuren ligt, bepaalt de kromme C' bij twee zoodanige evenwichtsvormen de waarde van s; aan elk dezer beantwoordt een ordinaat t op den tak der kromme C, waarvoor $s < t$ is; zoo vindt men dus twee paar waarden s en t, die bij benadering de twee stabiele ellipsoïdale evenwichtsvormen bepalen, welke aan (20) en (21) voldoen. Men kan nu, zoo zegt Roche, gemakkelijk meer benaderde waarden vinden, „maar de graphische oplossing is in den regel voldoende."

De methode, die hier geschetst werd, zou voor willekeurige waarden van μ nog al bewerkelijk zijn; voor het bijzonder geval $\mu = \infty$, wanneer (21) overgaat in de vergelijking (b) van p. 23, splitst zich de formule (20) in

$$s = t, \qquad (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0,$$

resp. de vergelijking der omwentelingsellipsoïden en die der evenwichtsvormen van Jacobi (vgl. p. 22); de eerste wordt graphisch voorgesteld door de rechte lijn uit het punt $s = 1$, $t = 1$ naar den oorsprong getrokken; het verloop der tweede lijn, die van het punt $s = t = 0{,}339\,6$ uitgaat naar $s = 0$, $t = 1$ en ook naar $s = 1$, $t = 0$ (vgl. p. 24 en 25), zou men met behulp der tabellen van Roche zonder veel moeite kunnen aangeven.

Ook wanneer de wachter uiterst klein is in vergelijking met de planeet, zoodat men $\mu = 0$ mag stellen, worden (20) en (21) betrekkelijk eenvoudig. De instabiele vormen bestaan nu eigenlijk niet meer, zegt Roche, want men bevindt dat daarbij altijd $b = \infty$ is; inderdaad volgt uit hetgeen wij boven zagen, dat de tak der instabiele oplossingen nu met de s-as samenvalt, dus

$$t = 0, \qquad b = \infty.$$

Maar voor *elke* waarde van μ wordt de becijfering zeer eenvoudig, wanneer V zeer weinig van nul verschilt; dit geval komt, zooals straks zal blijken, o. a. bij onze Maan en bij de vier meest verwijderde wachters van Jupiter voor. Wij zullen alleen over de stabiele vormen spreken, die nu (vgl. p. 36 en 114) hetzij tot $s = 1$, $t = 1$ of tot $s = 0$, $t = 1$ naderen.

In het eerste grensgeval, wanneer s en t beide weinig verschillen van de eenheid, stelt Roche voor de tweede macht van V alsook van

$$1 - s = \sigma, \qquad 1 - t = \tau$$

te verwaarloozen; daar de bekende term, nl. $\frac{V}{1+\mu}$, en de coëfficiënten van alle integralen in de formules (20)—(23) nu van eerste orde zijn, kan men, zoo zegt hij, in de integralen $s = 1$, $t = 1$ stellen. De laatste dezer vier formules geeft dan

$$\frac{V}{1+\mu} = \frac{\sigma}{4+\mu} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{7}{2}}},$$

waaruit aanstonds volgt

$$\sigma = \frac{15}{4} \cdot \frac{4+\mu}{1+\mu} V,$$

terwijl (22) overgaat in

$$\tau = \frac{15}{4} V,$$

en de vergelijkingen uit (20) en (21) volgend

$$4\tau - \sigma + \mu(\tau - \sigma) = 0, \qquad \frac{15}{4} \cdot \frac{V}{1+\mu} = \frac{\sigma - \tau}{3},$$

behoorlijk identiek zijn met de twee voorgaande.

Terwijl men bij benadering heeft

$$\frac{a}{c} = 1 + \frac{1}{2}\sigma, \qquad \frac{b}{c} = 1 + \frac{1}{2}\tau,$$

kan men door middel van het bovenstaande de assenverhoudingen en de afplattingen $\frac{a-c}{c}$, $\frac{b-c}{c}$ in V en μ uitdrukken. De afplatting der yz-doorsnede blijkt dan gelijk te zijn aan $\frac{15}{8}V$, dus onafhankelijk van μ, maar de afplatting der doorsnede in het xz-vlak, dus door de omwentelingsas en het aantrekkend punt gebracht, is alleen voor $\mu = \infty$ gelijk aan $\frac{15}{8}V$, doch neemt toe, wanneer μ kleiner wordt, om ten slotte viermaal zoo groot te worden, als de massa M der planeet oneindig groot wordt in vergelijking met die van den satelliet.

Daar op p. 12 $\frac{\omega^2}{2\pi\rho k}$ gelijk gesteld werd aan V, en volgens p. 33 de betrekking geldt

$$\frac{kM}{l^3} = \frac{\omega^2}{1+\mu},$$

waarin l den afstand der middelpunten van de planeet en haar wachter voorstelt, vinden we

$$V = \frac{(1+\mu)M}{2\pi\rho\, l^3},$$

of als de straal der planeet R en haar gemiddelde dichtheid δ wordt genoemd

$$V = \frac{2}{3}(1+\mu)\frac{R^3}{l^3}\cdot\frac{\delta}{\rho} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

Als men a priori mag onderstellen, dat de satelliet zeer weinig van den bolvorm afwijkt en zijn straal r noemt, heeft men

$$\frac{r^3}{R^3} = \mu \frac{\delta}{\rho},$$

en derhalve

$$V = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{r^3}{l^3} \quad \dots\dots\dots \quad (25)$$

Bij de Maan is volgens het *Annuaire du Bureau des Longitudes*

$$\mu = 0{,}012\,552\,2, \qquad \frac{l}{R} = 60{,}274\,5, \qquad \frac{\rho}{\delta} = 0{,}615,$$

zoodat men uit (24) kan afleiden

$$0{,}000\,005\,007\,64 < V < 0{,}000\,005\,016\,60,$$

en met behulp der formules van de vorige bladzijde voor de afplattingen gevonden wordt

$$0{,}000\,037\,21 < \frac{a - c}{c} < 0{,}000\,037\,27,$$

$$0{,}000\,009\,389 < \frac{b - c}{c} < 0{,}000\,009\,406.$$

De resultaten van Roche zijn eenigermate verschillend, omdat hij uit de experimenteele gegevens had afgeleid $V = 0{,}000\,005\,08$. Tisserand [1]) stelt bij de toepassing op de Maan $\mu = 0$, zoodat zijn uitkomst voor de verhouding der grootste en kleinste as noodzakelijkerwijze minder nauwkeurig moet wezen, hij vindt daarvoor 1,000 037 5; de verhouding der middelbare en kleinste

---

[1]) *Mécan. cél.*, II, p. 114.

as is, zooals reeds werd opgemerkt, onafhankelijk van μ en daarvoor verkrijgt hij dan ook 1,000 009 4, hoewel eenigermate langs anderen weg.

Door middel van (25) kunnen ook de assenverhoudingen der vier verst afliggende manen van Jupiter bepaald worden; men heeft nl., den Kilometer als lengte-eenheid nemend, zoodat $2\,R = 141\,300$,

	$l : R$	$2\,r$ [1]	μ
I	5,933	4 070	0,000 016 88
II	9,439	3 430	0,000 023 23
III	15,057	5 790	0,000 088 44
IV	26,486	4 830	0,000 042 47

en vindt daaruit bij benadering

	V	$a : c$	$b : c$
I	0,004 52	1,033 90	1,008 47
II	0,000 49	1,003 66	1,000 92
III	0,000 15	1,001 14	1,000 28
IV	0,000 03	1,000 25	1,000 06

Geen wonder, dat Roche, die de afmetingen der manen niet kennend, hare dichtheid gelijk stelde aan die van Jupiter, geheel andere resultaten voor de assenverhoudingen vond; want uit bovenstaande gegevens kan men ook gemakkelijk

---

[1]) Newcomb-Engelmann, *Populäre Astronomie*, zweite Aufl. herausgegeben von Vogel, p. 703.

vinden, dat $\rho : \delta$, d. w. z. de dichtheid van den satelliet gedeeld door die der planeet, resp. is

I	II	III	IV
0,706 35	1,624 0	1,256 1	1,063 4

alleen bij den vierden satelliet, waar $\rho : \delta$ niet veel van 1 verschilt, en de afplattingen zeer klein zijn, stemmen zijne resultaten met de onze overeen. Ook Matthiessen[1]) heeft uit minder vertrouwbare experimenteele gegevens andere uitkomsten voor $\rho : \delta$ en voor de assenverhoudingen verkregen.

In het tweede grensgeval, waar s zeer klein is en t tot 1 nadert, zullen wij $1 - t$ weder τ noemen, en om dezelfde reden als straks in de integralen $t = 1$ stellen; (23) gaat dan over in

$$V\frac{3+\mu}{1+\mu} = s\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^2\,(1+sx)^{\frac{3}{2}}};$$

de integraal, die wij door I zullen voorstellen, wordt voor kleine waarden van s logarithmisch oneindig; om op de gemakkelijkste manier een benaderingswaarde te vinden, kan men ze op deze wijze splitsen:

$$I = \int_0^{s^{-\frac{1}{2}}} \frac{x\,dx}{(1+x)^2\,(1+sx)^{\frac{3}{2}}} + \int_{s^{-\frac{1}{2}}}^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^2\,(1+sx)^{\frac{3}{2}}};$$

wanneer men nu in de tweede integraal substitueert

$$1 + x = \frac{1}{y\,s^{\frac{1}{2}}},$$

en verder bedenkt, dat s van eerste orde is, vindt men ach-

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XXV, p. 79.

tereenvolgens, de termen van hoogere orde verwaarloozend,

$$I = \int_0^{s^{-\frac{1}{2}}} \frac{x\,dx}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{2}}\,dy}{(y+s^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} = \left| \log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right|_0^{s^{-\frac{1}{2}}} -$$

$$- \left| \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{(y+s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \right|_0^1 + \left| \log\left\{ y + \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}} + \sqrt{y\,(y+s^{\frac{1}{2}})} \right\} \right|_0^1 =$$

$$= \log s^{-\frac{1}{2}} - 1 - 2 + \log 4s^{-\frac{1}{2}} = \log \frac{4}{s} - 3;$$

dus uit (23) volgt

$$s \log\left(\frac{4}{s} - 3\right) = V \frac{3+\mu}{1+\mu};$$

de formule (22) geeft in dit grensgeval

$$V = \tau \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3 (1+sx)^{\frac{1}{2}}},$$

hierin kan men onmiddelijk $s = 0$ stellen en vindt dan

$$\tau = 2V;$$

deze laatste vergelijking doet zien, dat de verhouding der middelbare en kleinste as gelijk mag genomen worden aan $1 + V$, en weder onafhankelijk is van μ.

Stelt men $\mu = \infty$, d. w. z. keert men terug tot het bijzonder geval eener geheel vrije vloeistofmassa, dan wordt uit de eerste vergelijking aanstonds gevonden

$$2 \frac{a^2}{c^2} \left(\log \frac{2a}{c} - \frac{3}{2} \right) = V,$$

hetgeen op p. 71 langs anderen weg werd verkregen. Uit deze vergelijking heeft Roche voor de drieassige ellipsoïde met de snelheid en gemiddelde dichtheid der Aarde wentelend, de assenverhoudingen afgeleid, die wij reeds in de inleiding mededeelden,

$$a : b : c = 53 : 1{,}002\,3 : 1.$$

Bij de zeer uitgerekte ellipsoïde, die evenwichtsfiguur der Maan zou kunnen zijn, is

$$1{,}000\,005\,008 < \frac{b}{c} < 1{,}000\,005\,017,$$

terwijl de verhouding der langste en kortste as door middel van

$$0{,}000\,014\,899 < s\left(\log\frac{4}{s} - 3\right) < 0{,}000\,014\,925$$

wordt bepaald, men vindt hieruit

$$897 > \frac{a}{c} > 896.$$

Roche had uit zijne waarde van V (p. 114) afgeleid

$$s\left(\log\frac{4}{s} - 3\right) = 0{,}000\,015\,1,$$

en besluit dan, dat bij de tweede standvastige evenwichtsfiguur der Maan de as naar de Aarde gericht 878 maal zoo lang is als de as der polen; ditmaal geeft hij bij uitzondering een minder nauwkeurige uitkomst, in werkelijkheid volgt uit die vergelijking

$$a = 890\ c.$$

Deze assenverhouding is ook door Matthiessen in de straks aangehaalde verhandeling [1]) berekend, en wel vindt hij

$$a = 985{,}4\ c;$$

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XXV, p. 82.

een zoo groote afwijking wordt niet verklaard, doordat hij $\mu = 0$ stelt, want men kan gemakkelijk nagaan, dat zijne vergelijking

$$\frac{4 \log 2 \lambda' - 6}{\lambda'^2} = \frac{2 \log \lambda'^2 - 3,228}{\lambda'^2} = 6\ V = 0,000\,03$$

op zeer weinig na met de onze en die van Roche overeenstemt. Het kan dus van belang wezen de afleiding der uitkomst van Matthiessen hier mede te deelen.

„Um die transcendente Gleichung aufzulösen benütze man die *regula falsorum* und setze zunächst

$$\lambda'^2 = 100\,000 = \alpha_1\,;$$

man findet den Fehler der Gleichung

$$\varphi_1 = \frac{2 \log \lambda'^2 - 3,228}{\lambda'^2} - 0,000\,03 = 0,000\,168\,0.$$

Sodann setze man

$$\lambda'^2 = 1\,000\,000 = \alpha_2\,;$$

der zweite Fehler der Gleichung ist alsdann

$$\varphi_2 = -0,000\,005\,6.$$

Der erste Näherungswerth von λ'^2 ist alsdann

$$\lambda'^2 = \frac{\alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} = 970\,970,$$

woraus sich das Axenverhältniss ergiebt, nämlich

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1 + \lambda'^2} = 985,4."$$

Na een zoo ruwe toepassing der *regula falsorum* — bij de substitutie der waarde α_1 was de fout 5,6 maal grooter dan het tweede lid — had Matthiessen zijn resultaat wel eens op de proef mogen stellen door het in de vergelijking te substitueeren; hij zou dan voor het eerste lid gevonden hebben 0,000 025, hetgeen toch al te veel verschilt van 0,000 03. Door eenige opvolgende benaderingen blijkt echter, dat λ' tusschen 893 en 894 ligt:

$$\text{voor } \lambda' = 893 \text{ is } \frac{4 \log 2\lambda' - 6}{\lambda'^2} = 0{,}000\,030\,04,$$

$$\text{voor } \lambda' = 894 \text{ is } \frac{4 \log 2\lambda' - 6}{\lambda'^2} = 0{,}000\,029\,97;$$

nu zou men met vrucht de *regula falsorum* kunnen toepassen; dan komt er

$$a = 893{,}6\ c.$$

Bij de vier wachters van Jupiter vond ik de volgende benaderingswaarden voor de verhouding der langste as tot de omwentelingsas bij den evenwichtsvorm, die zeer uitgerekt is in de richting der planeet,

I	II	III	IV
17,4	68,3	134	312

het quotiënt der middelbare en kleinste as bedraagt weder $1 + V$.

Bij de eerste maan van Saturnus bevond Roche, hare dichtheid weder gelijk stellend aan die der planeet, terwijl hij voor de verhouding van den afstand l der middelpunten van deze twee lichamen tot den straal R der planeet 3,35 aannam, dat $V = 0{,}017\,73$ zou wezen; voor een waarde van V, die zooveel van nul verschilt, mochten de benaderingsformules der vorige bladzijden niet gebezigd worden, maar werden de assenverhoudingen der stabiele ellipsoïde, die het minst van den bol afwijkt, met behulp der tabellen van Roche becijferd, nl.

$$a = 1{,}152\ c, \qquad b = 1{,}027\,6\ c.$$

Daar volgens nieuwere opgaven $l = 3{,}10\,R$ is, volgt uit (24), wanneer $\delta = \rho$ wordt genomen, terwijl $\mu = 0{,}000\,000\,09$ veilig gelijk aan nul mag worden gesteld, dat V een weinig grooter is dan 0,022, zoodat ook de assenverhoudingen nog meer van de eenheid zullen verschillen.

Wanneer μ tot nul nadert, dus voor een zeer kleinen satelliet, kan V hoogstens gelijk worden aan 0,046 (vgl. p. 36). Uit (24) leidt men nu gemakkelijk af, dat zulk een maan *van een dichtheid gelijk aan die der planeet*, geen ellipsoïdalen evenwichtsvorm kan hebben, tenzij men heeft

$$l \geqq 2{,}44\,R.$$

Bij de vijfde maan van Jupiter is $l = 2{,}55\,R$, terwijl bij Phobos, den naastbijliggenden wachter van Mars, de verhouding van l en R 2,77 bedraagt. Kort na de ontdekking van dezen wachter meende men echter, dat hier $l = 2{,}1\,R$ was; Roche [1]) verhaalt met eenige zelfvoldoening, dat hij dit aanstonds voor onmogelijk heeft verklaard: „j'annonçai immédiatement que cela ne pouvait être, et en effet les observations plus récentes donnent pour cette distance 2,77, nombre supérieur, comme il le fallait, à la limite théorique 2,44 telle que je l'avais établie." Intusschen had die voorspelling van Roche ook zeer goed kunnen falen; want welke reden had hij om te onderstellen, dat bij dezen satelliet de dichtheid gelijk zou wezen aan die der planeet of kleiner? wanneer b. v. $\rho : \delta$ bij Phobos zooals bij de tweede maan van Jupiter gelijk was aan 1,624 (p. 120), zou zijn afstand tot Mars 2,1 maal de straal dier planeet kunnen zijn.

Vaughan, die in 1859, dus tien jaar na Roche schreef, maar diens arbeid niet kende, berekent [2]) dat de kleinste

[1]) Analyse sommaire des travaux scientifiques de M. Roche, p. 2, opgenomen in de brochure *Édouard Roche, sa vie et ses travaux.*

[2]) Philos. Magazine, Fourth Series, XX, p. 418.

afstand, waarop een satelliet in stand zou kunnen blijven, bij benadering

$$2{,}489\, R \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

bedraagt; voor de grootste waarde van V vindt men uit zijne cijfers 0,043 3, de excentriciteit der doorsnede door de langste en kortste as zou tusschen 0,87 en 0,88 liggen, waaruit volgt

$$0{,}243\,1 > \frac{c^2}{a^2} > 0{,}225\,6,$$

terwijl Roche vond $c^2 = 0{,}22\, a^2$ (p. 37). Deze resultaten kunnen zeker gelden als een bevestiging van die, welke door Roche verkregen waren, te meer omdat Vaughan zelf later bekende, dat het cijfer 2,489 een weinig kleiner moet worden; hij heeft nl. bij de afleiding daarvan ondersteld [1]), dat de middelbare en kleinste as gelijk zijn (terwijl in werkelijkheid $c^2 = 0{,}89 b^2$ is, p. 37) dientengevolge werd de uitkomst voor $l : R$ te groot: „from more exact calculations, which are not yet in a condition to be published, it appears that some reduction must be made in the value I first assigned to the smallest orbit in which a homogeneous satellite could be preserved.” [2]) Wij hebben hier opzettelijk gewezen op de overeenstemming der resultaten door Roche en Vaughan onafhankelijk van elkander gevonden, om reeds a priori te kunnen besluiten, dat de geheel verschillende uitkomst door Matthiessen verkregen waarschijnlijk onjuist is. Een der gevolgtrekkingen van Vaughan uit zijn formule voor de kleinste afmeting der baan van een satelliet kunnen wij niet aanvaarden; hij zegt nl.: „it appears to be independent of the actual size of the satellite”; maar wanneer de satelliet grooter werd en toch zijne massa klein bleef, zou ρ afnemen en derhalve volgens (24) l aangroeien;

---

[1]) l. c., p. 414.

[2]) Philos. Magazine, Fourth Series, XXI, p. 269.

wanneer echter bij toenemend volumen de dichtheid der massa niet veranderde, zou μ en dus ook het maximum van V en derhalve $l:R$ een andere waarde krijgen.

In 1876 besprak Giesen[1]) de gedaante van een homogenen, vloeibaren satelliet als toepassing zijner benaderingsformule voor de potentiaal van een homogene ellipsoïde, *waarvan beide excentriciteiten zeer klein zijn*, zoodat men, terwijl

$$a^2 - c^2 = e^2, \qquad b^2 - c^2 = \varepsilon^2$$

wordt gesteld, slechts met de tweede macht van e en ε behoeft rekening te houden. Deze onderstelling komt omtrent op hetzelfde neer als die van Roche, waar hij de tweede macht van σ en τ, d. w. z. van $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$ en $\frac{b^2 - c^2}{b^2}$ verwaarloost (vgl. p. 112), de resultaten van Giesen voor de Maan

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{35\,300} = 0{,}000\,028\,3, \qquad \frac{a-c}{a} = \frac{1}{26\,500} = 0{,}000\,037\,7$$

zijn dan ook, zooals men gemakkelijk kan nagaan, niet veel verschillend van die, welke hierboven (p. 118) verkregen zijn. Maar terwijl de becijfering van Giesen niet eenvoudiger is dan die van Roche, heeft zij het nadeel van veel minder algemeen te zijn; de tweede evenwichtsfiguur, waarbij één excentriciteit zeer klein, maar de andere zeer groot is, wordt hier volstrekt niet behandeld.

Ook Matthiessen heeft in 1880, dus dertig jaar later dan Roche, een minder algemeen en minder vertrouwbaar onderzoek over de evenwichtsvormen der satellieten geleverd[2]).

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys., XXI, p. 49.
[2]) Ib., XXV, p. 72.

Opdat die evenwichtsvorm een ellipsoïde zij, moet volgens hem

$$\frac{x\,dx}{1+\lambda'^2} + \frac{y\,dy}{1+\lambda^2} + z\,dz = 0$$

identiek wezen met

$$[X + X_1 + \omega^2 (l + x)]\,dx + (Y + Y_1 + \omega^2 y)\,dy + (Z + Z_1)\,dz = 0,$$

waar X, Y en Z de componenten der aantrekking van den satelliet op de massa-eenheid in een punt van zijn oppervlak voorstellen; verder zijn volgens hem de componenten der aantrekking van de planeet op diezelfde massa-eenheid gelijk te stellen aan

$$X_1 = \frac{k\,M}{l^3}(2\,x - l), \qquad Y_1 = -\frac{k\,M}{l^3}\,y, \qquad Z_1 = -\frac{k\,M}{l^3}\,z,$$

zoodat voor de vergelijking van Matthiessen ook geschreven kan worden

$$(X + \omega^2 x)\,dx + (Y + \omega^2 y)\,dy + Z\,dz + \frac{k\,M}{l^3}(2\,x\,dx - y\,dy - z\,dz) +$$
$$+ l\left(\omega^2 - \frac{k\,M}{l^3}\right)dx = 0,$$

hetgeen identiek is met de vergelijking, die wij op p. 33 volgens Tisserand hebben afgeleid, onder de bepaalde voorwaarde, dat men heeft

$$\omega^2 = \frac{k\,M}{l^3}$$

daaruit volgt (vgl. p. 33) dat Matthiessen van den beginne af aan $\mu = 0$ heeft gesteld.

De vergelijkingen, die hij verder verkrijgt, blijken dan ook geheel overeen te stemmen met die van Roche, wanneer men aan de grootheid μ, die alle mogelijke positieve getallen kan voorstellen, de geheel bijzondere waarde $\mu = 0$ toekent; in dit bepaalde geval vindt men b. v. uit (24) de vergelijking van Matthiessen

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 \delta}{l^3 \rho},$$

terwijl zijne formules·

$$\frac{V}{\lambda^2} = 2(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} du, \ldots (22')$$

$$\frac{4+3\lambda'^2}{\lambda'^2} \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} du = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}} du, \ (20')$$

door de substitutie (vgl. p. 22)

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \qquad 1+\lambda^2 = \frac{1}{t}, \qquad 1+\lambda'^2 = \frac{1}{s}$$

resp. overgaan in

$$V = (1-t) \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)(1+tx)\,\Delta},$$

$$(3 - 3t - st + s^2) \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} + s(s - 4t + 3) \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0,$$

dus de vergelijkingen (22) en (20) voor het bijzonder geval, dat $\mu = 0$ is; daarom hebben wij deze formules reeds (22′) en (20′) genoemd. Matthiessen stelt zich ten doel de evenwichtsfiguren onzer Maan en der (vier) wachters van Jupiter te bepalen; bij deze laatste is μ zeer klein (vgl. p. 119) en ofschoon bij onze Maan μ ruim $\frac{1}{80}$ bedraagt, dus aanmerkelijk van nul verschilt, worden toch ook hier de resultaten voor de assenverhoudingen der ellipsoïden slechts in geringe mate gewijzigd, wanneer men $\mu = 0$ stelt; maar uit een theoretisch oogpunt beschouwd is zulk een bewerking onjuist, en heeft het onderzoek van Matthiessen, die aanstonds een vergelijking neerschrijft, waarin *stilzwijgend* $\mu = 0$ wordt gesteld, zonder eenige aanwijzing te geven over de methode, die bij willekeurige verhoudingen der massa's van de planeet en haar wachter gevolgd moet worden, slechts zeer weinig waarde in vergelijking met den arbeid van Roche, wiens formules men bij elke waarde van μ kan toepassen, zoodat b. v. voor het grensgeval $\mu = \infty$, zooals wij vroeger zagen, de gewone vergelijkingen der geheel vrije vloeistofmassa daaruit voortvloeien.

Voor (20′) kan men ook schrijven

$$\int_0^1 \left[\frac{4 + 3\lambda'^2}{\lambda'^2(1+\lambda^2 u^2)} - \frac{1}{\lambda^2(1+\lambda'^2 u^2)}\right] \frac{u^2\,(1 - u^2)}{(1+\lambda^2 u^2)(1+\lambda'^2 u^2)}\, du = 0,$$

en opdat hieraan voldaan worde, moet voor een waarde van u tusschen 0 en 1 de betrekking gelden

$$\frac{4 + 3\lambda'^2}{\lambda'^2\,(1 + \lambda^2\, u^2)} = \frac{1}{\lambda^2\,(1 + \lambda'^2\, u^2)},$$

m. a. w., zegt Matthiessen, slechts die waarden van λ^2 en λ'^2 kunnen bij elkander passen, waarvoor het tweede lid der vergelijking

$$u^2 = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2\,(4 + 3\lambda'^2)}{\lambda^2\,\lambda'^2\,(4 + 2\lambda'^2)}$$

tusschen 0 en 1 ligt. Hij gaat dan voort: „daraus folgen die Bedingungen

$$\lambda'^2\,(1 - 3\lambda^2) > 4\lambda^2, \qquad\qquad + 1 > \frac{\lambda'^2 - \lambda^2\,(4 + 3\lambda'^2)}{\lambda^2\,\lambda'^2\,(4 + 2\lambda'^2)} > 0$$

und es muss λ^2 jedenfalls kleiner als $\frac{1}{3}$, also ein echter Bruch sein." [1]) Men kan zich gemakkelijk overtuigen, dat in deze woorden van Matthiessen een kleine rekenfout voorkomt; niet de door hem aangegeven breuk, maar

$$\frac{\lambda'^2 - \lambda^2 (4 + 3\lambda'^2)}{3\lambda^2 \lambda'^2 (1 + \lambda'^2)}$$

moet tusschen 0 en 1 liggen; vervolgens, dat $\lambda'^2 (1 - 3\lambda^2)$ grooter moet wezen dan $4\lambda^2$, is geen nieuwe voorwaarde, maar ligt in het vorige opgesloten. Ten slotte, zooals $\lambda^2 \lambda'^2 > 1$ *noodzakelijk* was, maar *niet voldoende* (vgl. p. 83), opdat de vergelijking

$$\int_0^1 \frac{u^2 (1 - u^2)(1 - \lambda^2 \lambda'^2 u^2)}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}} du = 0$$

blijve gelden, zoo is het ook zeer goed mogelijk, dat waarden van λ^2 en λ'^2, waarvoor aan de boven vermelde ongelijkheid voldaan wordt, toch een ellipsoïde bepalen, die volstrekt niet als evenwichtsvorm van een satelliet met zeer kleine massa kan voorkomen.

Het is van belang, zoo vervolgt Matthiessen, de grootste waarde van V (hij bedoelt weder stilzwijgend, zooals men begrijpen zal, het maximum van V, ingeval $\mu = 0$ is) althans bij benadering te bepalen. Wel had Vaughan hiervoor gevonden 0,043 3 (vgl. p. 126) „die Bestimmung von Vaughan ist aber jedenfalls ungenau und, wie weiter unten gezeigt werden wird, fast auf das Dreifache zu erhöhen. Vaughan setzt aber der Einfachheit der Rechnung zu Gunsten voraus, dass das Ellipsoid ein nahezu oblonges Rotationsellipsoid sei, und

[1]) p. 76.

findet zu jenem Maximalwerthe von V den zugehörigen Werth $\lambda'^2 = 4$, was nahezu richtig ist."

Hoewel Matthiessen ook de tweede verhandeling van Vaughan (Philos. Magazine, 1861) aanhaalt, schijnt het hem ontgaan te zijn, dat overeenkomstig de woorden, die wij daaruit overnamen (p. 126), de waarde 0,043 3 *een weinig* grooter moet worden, en dus zeker in de nabijheid komt van het door Roche berekende maximum van V voor zeer kleine satellieten, nl. 0,046.[1]) Verder bereikt V volgens Vaughan haar grootste waarde, wanneer de excentriciteit der xz-doorsnede tusschen 0,87 en 0,88 ligt (p. 121); hieruit leidt men gemakkelijk af

$$\frac{0{,}756\,9}{0{,}243\,1} < \lambda'^2 < \frac{0{,}774\,4}{0{,}225\,6},$$

zoodat bij de ellipsoïde, die evenwichtsvorm is voor de grootste waarde van V, volgens Vaughan λ'^2 niet gelijk wordt aan 4, maar kleiner dan $3\frac{1}{2}$, zooals ook Roche vond $3\frac{5}{11}$. Matthiessen

---

[1]) Deze uitkomst van Roche schijnt aan Matthiessen onbekend gebleven te zijn. Hij verwijst naar de literatuuropgave in zijn eigen verhandelingen uit de jaren 1859 en 1871 in Schriften der Universität zu Kiel, VI en Zeitschr. Math. Phys., XVI, maar hoewel eerstgenoemde bijdrage volgens Lamb, *Hydrodynamics*, p. 588 „a very complete list of previous writings on the subject" bevat, worden noch in deze lijst, noch in die uit 1870 de Mémoires de Montpellier geciteerd, waar (I, p. 251), 0,046 als maximum-waarde van V bij zeer kleine satellieten werd aangegeven, wel korte uittreksels in l'Institut, 1849, p. 187 en 193, doch in denzelfden jaargang van dit tijdschrift op p. 204 schijnt Matthiessen het zittingsverslag der Academie van Montpellier (11 Juni 1849) over het hoofd gezien te hebben, waar door Roche als grootste waarde van $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{r'^3}{l^3}$, dus van $\frac{3}{2}$ V volgens (25) op p. 118, werd medegedeeld

$$0{,}069, \;\ldots\ldots\; \text{wanneer } \frac{1}{\mu} \text{ zeer groot is},$$

$$0{,}108, \;\ldots\ldots\; \text{wanneer } \frac{1}{\mu} = 1,$$

$$0{,}281, \;\ldots\ldots\; \text{wanneer } \frac{1}{\mu} \text{ tot nul nadert.}$$

geeft als zijn eigen resultaat [1]) „nahezu $V = 0{,}108\,6$ und $\lambda'^2 = 4{,}0$", hij is echter zoo bescheiden er bij te voegen: „diese Werthe bedürfen jedoch noch immer einer genaueren Bestimmung". Na verzekerd te hebben, dat de becijfering hier „unendlich schwieriger" is dan in andere gevallen, deelt hij het volgende mede over zijne methode van berekening, veel gelijkend op die, welke hij bij de ellipsoïde van Jacobi volgde (p. 102): „Ich habe mich darauf beschränkt unter der Voraussetzung, dass λ'^2 die Einheit ziemlich übertrifft, λ^2 dagegen unter dem Werthe $\frac{1}{3}$ bleibt, die Integrale in Reihen entwickelt und daraus simultane Werthe von λ^2, λ'^2 und V berechnet." Deze methode past hij toe op (22′) en op de volgende vergelijking, die na gedeeltelijke integratie van het tweede lid van (20′) verkregen werd,

$$\int_0^1 \frac{1-(3+3\,\lambda^2\,\lambda'^2+4\,\lambda^2)\,u^2+(3\,\lambda^2\,\lambda'^2+2\,\lambda^2)\,u^4}{(1+\lambda^2\,u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2\,u^2)^{\frac{1}{2}}}\,du = 0;$$

bij de ontwikkeling brengt hij nog grootheden in rekening, die van dezelfde orde zijn als λ^4 en $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$, en vindt dan

$$V = \frac{\lambda^2}{2}\left[1-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2\lambda'^2}+\frac{13}{16}\lambda^4+2\,\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}\right], \ldots . (22'')$$

$$3\,\lambda^2\,\lambda'^2 = \frac{2\log(\lambda'^2)-3{,}228+\frac{7}{\lambda'^2}}{1-\frac{9}{4}\lambda^2-\frac{1}{\lambda'^2}+\frac{69}{16}\lambda^4+\frac{3}{8}\cdot\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}} \ldots . (20'')$$

„Hieraus ergeben sich in Vereinigung mit den oben für die

---

[1]) p. 83.

Jupiterstrabanten berechneten Näherungswerthen [1]) folgende simultane Werthe von λ^2, λ'^2 und V:

λ^2	λ'^2	V
0,000 06	100 000	0,000 03
0,000 26	22 000	0,000 13
0,000 96	5 000	0,000 48
0,004 60	720	0,002 30
0,007 16	450	0,003 58
0,096	10	0,048
0,107 8	8	0,054
0,144	6	0,072
0,235	4	0,108 6

Durch die letzte Werthereihe wird die Bedingungsgleichung [2]) noch eben erfüllt und wir sind somit den gesuchten Werthen sehr nahe. Das Maximum von V stimmt mit dem für die Ringe geltenden [3]) nahezu überein, ist aber weit grösser als das von Vaughan angenommene, was wir auch schon aus den oben angeführten Gründen nicht für genau halten dürfen."

De vijf eerste rijen dezer tabel zijn verkregen uit de benaderingsformules, die voor zeer kleine waarden van V uit (20″) en (22″) volgen,

[1]) Voor de wachters, die wij met I, II, III, IV aanduidden, vindt men deze cijfers resp. in de vijfde, derde, tweede en eerste rij der tabel; het verschil met onze resultaten op p. 119 en 124, dat vooral bij I nog al aanzienlijk is, komt voort uit de minder vertrouwbare experimenteele gegevens, waarvan Matthiessen zich bediende.

[2]) Hij bedoelt de ongelijkheid, waaraan volgens p. 130 voldaan moet zijn.

[3]) „Für die ringförmigen Satelliten bestimmte Laplace den Maximalwerth von V zu 0,108 605 und λ'^2 gleich 5,73." Matthiessen, p. 83.

$$V = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{2 \log \lambda'^2 - 3{,}228}{6\lambda'^2};$$

deze nu verschillen niet merkbaar — altijd in de bijzondere onderstelling, dat $\mu = 0$ of zeer klein is — van de vergelijkingen, die op 121 gevonden zijn,

$$\tau = 2V, \qquad s \log\left(\frac{4}{s} - 3\right) = V\frac{3+\mu}{1+\mu}.$$

Maar van meer belang is de vraag, of de cijfers der vier laatste rijen in orde zijn: hier immers wordt telkenmale een waarde van V opgegeven, die volgens Roche (en Vaughan) te groot is. Toch zullen die cijfers wel *ongeveer* aan (20″) en (22″) voldoen; althans wanneer ik $\lambda'^2 = 4$, $\lambda^2 = 0{,}235$ in (20″) substitueer, wordt het eerste lid gelijk aan 2,82 en het tweede geeft 2,69, terwijl (22″) bij diezelfde substitutie 0,108 1 als waarde van V oplevert, en Matthiessen 0,108 6 schijnt gevonden te hebben. Maar een andere vraag is, of de vergelijkingen (20″) en (22″) zelve goed zijn afgeleid; wanneer men deze bewerking verricht, terwijl volgens de methode door Matthiessen zelf aangegeven $(1+\lambda^2 u^2)^{-\frac{3}{2}}$ naar het binomium ontwikkeld wordt, en in de waarde der bekende integralen

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \int_0^1 \frac{u^2\, du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \int_0^1 \frac{u^4\, du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

wordt gesubstitueerd

$$(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda' + \frac{1}{2\lambda'} \ldots, \qquad \log\left[\lambda' + (1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \log 2\lambda' + \frac{1}{4\lambda'^2} \ldots,$$

bevindt men spoedig, dat Matthiessen zich aan een groote onnauwkeurigheid heeft schuldig gemaakt. Immers hij zou grootheden van de orde λ^4 en $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$ in rekening brengen en nu blijkt, dat hij b. v. $\lambda^2 \log 2\lambda'$ en $\frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^2}$ heeft verwaarloosd (vgl. p. 105), zoodat in beide vergelijkingen (20″) en (22″) termen zijn weggevallen, die, zoodra de omwentelingsnelheid niet uiterst klein is, veel gewicht in de schaal leggen, al beletten zij niet, dat voor *zeer groote* waarden van λ'^2 uit (20″) en (22″) de juiste benaderingsvergelijkingen volgen, die straks vermeld zijn. Deze termen in rekening brengend vind ik in plaats van (20″)

$$\log 2\lambda'\left(4 + \frac{6}{\lambda'^2}\right) - 6 - \frac{2}{\lambda'^2} - \lambda^2\left[3\lambda'^2 + \frac{21}{2} + \frac{51}{4\lambda'^2} - \right.$$

$$\left. - \log 2\lambda'\left(6 + \frac{31}{2\lambda'^2}\right)\right] + \lambda^4\left(\frac{27}{8} + \frac{9}{2}\lambda'^2\right) = 0,$$

zoodat bij gegeven λ' een vierkantsvergelijking de waarde van λ bepaalt, terwijl de formule van Matthiessen de oplossing van een derdemachtsvergelijking vereischt; (22″) behoort veranderd te worden in

$$V = \frac{\lambda^2}{2}\left[1 + \frac{5}{2\lambda'^2} - \lambda^2 + 2\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} - \frac{3}{4}\lambda^4 - \frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^2}(2 + \lambda^2)\right].$$

Stelt men nu $\lambda'^2 = 4$, dan volgt $\lambda^2 = 0{,}118$ en $V = 0{,}043\,9$, dus behoorlijk kleiner dan het door Roche becijferde maximum van V; zou men nog b. v. $\lambda'^2 = 10$ nemen, dan vindt men $\lambda^2 = 0{,}10$ en $V = 0{,}039$. Overigens kunnen deze uitkomsten slechts als *eerste benaderingen* waarde hebben, daar wij er ons toe bepaalden de coëfficiënten der termen, die door Matthiessen in rekening gebracht zijn, te rectificeeren en de grootere termen, die hij verkeerdelijk wegliet, in de vergelijkingen op te nemen; maar o. a. $\frac{1}{\lambda'^4}$, dus 0,01 als $\lambda'^2 = 10$ is, werd nog evenals bij Matthiessen verwaarloosd, ook $\frac{\lambda^4}{\lambda'^2}$

enz.; het is duidelijk, en men zou het nog ten overvloede kunnen aantoonen op soortgelijke wijze als vroeger geschiedde (p. 106), dat dientengevolge λ en V slechts bij eerste benadering worden gevonden; de grootste waarde van V kan uit de bovenstaande verbeterde vergelijkingen, ook wanneer men den term met $\frac{1}{\lambda'^4}$ daarin opnam, niet bepaald worden, want voor dit maximum is $\lambda'^2 < 4$, dus nu mag ook $\frac{1}{\lambda'^6}$ niet worden weggelaten, wanneer men eenige nauwkeurigheid in de uitkomst wil bereiken. Betere resultaten kan men verkrijgen met behulp der tabellen van Roche volgens de methode, die op p. 114 werd aangegeven, en die, zooals wij vroeger reeds zeiden, voor $\mu = 0$ tamelijk eenvoudig is. Het bovenstaande zal echter, hopen wij, voldoende wezen om te bewijzen, dat Matthiessen zonder eenigen grond het maximum van V bij zeer kleine satellieten „bijna driemaal grooter" stelde dan door Vaughan (en Roche) gedaan was.

Aan het einde van dit historisch-critisch overzicht der becijferingen over de ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende vloeistofmassa past het ons hulde te brengen aan Roche, die het probleem veel algemeener opvatte dan vóór hem was geschied, en door zijne tabellen, „die niets te wenschen overlaten", en die vooral ook bij de bepaling der assenverhoudingen van de ellipsoïde van Jacobi dienstig kunnen zijn, een zeer nuttigen arbeid heeft verricht, terwijl hij door de nauwkeurigheid zijner resultaten en door zijne voorzichtigheid in het opgeven van decimalen zeer gunstig afsteekt bij vele anderen, die *na hem* doch met minder goed gevolg „se sont obstinés à la recherche de ce qui était déjà trouvé" (cf. p. 6). In het volgende hoofdstuk zullen wij spreken over de uitbreiding, die in den laatsten tijd door een uitstekend geleerde aan hetzelfde probleem gegeven werd.

DERDE HOOFDSTUK.

Uitbreiding van het vraagstuk door Poincaré.

§ 1. *Algemeene beschouwingen.* — *Functiën van Lamé.*

In het eerste hoofdstuk hebben wij gezien, dat er onder de omwentelingsellipsoïden een bepaalde figuur is, die tevens tot een andere reeks van evenwichtsvormen, die der ellipsoïden van Jacobi behoort; Poincaré heeft in 1885 bewezen [1]), dat er in de reeks S der omwentelingsellipsoïden *een oneindig groot aantal* figuren wordt gevonden, die te gelijker tijd deel uitmaken van andere reeksen Σ, terwijl ook naast de reeks S' der ellipsoïden van Jacobi *een oneindig groot aantal* reeksen ontstaat, die wij in volgorde door S_3, S_4, ..., S_n, ... zullen aanwijzen; elk dezer reeksen heeft resp. een figuur F_3, F_4, ..., F_n, ... met de reeks S' gemeen.

Alleen wanneer het rotatie-moment kleiner is dan dat van den evenwichtsvorm, waarvoor het quotiënt der assen 1,716 0 bedraagt, zijn de omwentelingsellipsoïden stabiel (vgl. p. 25 en 38); dan gaat de stabiliteit over op de drieassige ellipsoïden, die volgens Liouville [2]) altijd stabiel zijn. Poincaré heeft echter aangetoond, dat deze stelling van Liouville alleen juist is, wanneer men de vloeistofmassa onderwerpt aan de voorwaarde, dat zij ellipsoïdaal moet blijven; onderstelt men

[1]) *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Acta Mathematica, VII, p. 259—380.

[2]) Comptes Rendus, XVI, p. 363.

dit niet, dan geldt alleen voor de ellipsoïden van Jacobi, die minder uitgerekt zijn dan de figuur F_3, dat zij „saeculaire stabiliteit" bezitten [1]), d. w. z. standvastige evenwichtsvormen blijven, ook als er moleculaire wrijving is in de vloeistof; alle figuren in de reeksen $S_4, \ldots, S_n, \ldots$, althans die, welke niet veel van de ellipsoïde afwijken, zijn evenals die in de reeksen Σ instabiel. Maar in de reeks S_3 zijn stabiele vormen; wij ontmoeten daar een standvastige evenwichtsfiguur, die slechts twee symmetrie-vlakken bezit, zij is namelijk niet symmetrisch ten opzichte van de omwentelingsas.

Bij de afleiding dezer resultaten gebruikt Poincaré de theorie der functiën van Lamé, doch vooraf behandelt hij bij wijze van prolegomena eenige stellingen, die wij slechts zeer verkort, in zooverre het voor ons doel noodig is, zullen weergeven.

Vooreerst beschouwt hij het geval van absoluut evenwicht bij een systeem, welks stand bepaald is door n grootheden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hij onderstelt, dat men een krachtfunctie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heeft, zoodat er evenwicht is voor

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

en stabiel evenwicht, als F een grootste waarde bereikt. F bevat behalve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nog een parameter y, zoodat de waarden van x, die met het evenwicht overeenkomen, afhankelijk zijn van y.

Bij een bepaalde waarde van y hebben de n evenwichtsvergelijkingen een zeker aantal reëele oplossingen, die op doorloopende wijze veranderen wanneer men y continu laat varieeren, zoodat verschillende enkelvoudige reeksen *(séries linéaires)* van evenwichtsvormen ontstaan. Behoort éénzelfde

---

[1]) Poincaré, l. c., p. 295 en 377; — Lamb, *Hydrodynamics*, p. 327; — vgl. Thomson and Tait, *Treatise on natural philosophy*, new ed., P. I, p. 391.

evenwichtsvorm tot twee of meer reeksen, dan wordt hij door Poincaré *forme de bifurcation* genoemd. Als twee reeksen bij verandering van y samenvallen en daarna verdwijnen, omdat de wortels der evenwichtsvergelijkingen imaginair worden, is de bijbehoorende evenwichtsvorm een *forme limite*.

Opdat twee of meer reeksen een evenwichtsvorm gemeen hebben, moet Δ, de functionaal-determinant van $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ ten opzichte van de n veranderlijken $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gelijk worden aan nul; en wel is er bepaaldelijk een bifurcatievorm, als Δ hierbij van teeken wisselt, of ook in het algemeen, als één of meer *stabiliteitscoëfficiënten* van teeken wisselen. Deze benaming geeft Poincaré aan de grootheden α in den vorm

$$\Phi = \Sigma \alpha_i Y_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

waarin de kwadratische vorm

$$\Phi = \Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} X_i X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$$

welke Δ tot discriminant heeft, door lineaire substitutie der grootheden X overgaat; volgens de door Sylvester [1]) bewezen stelling der inertie van de kwadratische vormen is het aantal der positieve coëfficiënten α onafhankelijk van de wijze, waarop de transformatie geschied is.

De grootheden α worden stabiliteitscoëfficiënten genoemd, omdat voor de stabiliteit noodzakelijk en voldoende is, dat alle α's negatief zijn; want er is standvastig evenwicht, zooals reeds gezegd werd, wanneer de krachtfunctie F een maximum, dus wanneer Φ bepaaldelijk negatief is. Wanneer derhalve een der coëfficiënten α gelijk wordt aan nul en van teeken wisselt voor een bifurcatievorm C, die tot twee reeksen A en B behoort, en waarvoor één of meer der grootheden α positief

[1]) Philos. Transactions, 1853, II, p. 481.

is, zullen in het algemeen alle evenwichtsvormen A en B, die niet veel van C verschillen, onstandvastig zijn; maar zijn voor C alle α's negatief op de ééne na, die gelijk is aan nul, dan vindt men in beide reeksen A en B stabiele vormen, die niet veel van C verschillen. In dit laatste geval geldt een stelling, die door Poincaré *principe de l'échange des stabilités* wordt genoemd: de bifurcatievorm C komt overeen met een bepaalde waarde van den parameter y, zijn nu voor een grootere waarde van y de evenwichtsvormen A standvastig en de figuren B onstandvastig, dan is er voor een waarde van y, kleiner dan die in het kruispunt, stabiliteit in de reeks B en instabiliteit in de reeks A.

Al deze resultaten blijven gelden, wanneer het aantal veranderlijken $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ oneindig groot is. Maar in het geval van *relatief evenwicht* van een stoffelijk stelsel met betrekking tot bewegelijke assen, b. v. als er wenteling plaats heeft, moet in het voorgaande een en ander gewijzigd worden. Men dient nu onderscheid te maken tusschen de krachten, onafhankelijk van de snelheid, waarvoor een krachtfunctie moet bestaan, en de krachten, die van de snelheid afhangen, d. w. z. de passieve weerstanden uit de moleculaire wrijving voorkomend. Is er standvastig evenwicht, ook als men deze laatste krachten in aanmerking neemt, dan wordt de stabiliteit *saeculair* genoemd; is er alleen stabiliteit, als men van de moleculaire krachten afziet, dan heet zij *kinetische* of *gewone* stabiliteit. Voor de saeculaire stabiliteit is nu nog noodig en voldoende, dat alle stabiliteitscoëfficiënten negatief zijn (in de bepaalde onderstelling, waarop de redeneering van Thomson en Tait berust, dat de arbeid der viscositeit voor alle mogelijke bewegingen altijd negatief en niet nul is). Voor de gewone stabiliteit echter wordt die voorwaarde niet meer vereischt; wel kan zij nooit voorkomen, als een *oneven* aantal stabiliteitscoëfficiënten positief is. De stelling, dat er een bifurcatievorm ontstaat, wanneer bij het doorloopen eener reeks van evenwichtsvormen een dier grootheden van teeken wisselt, blijft gelden in het geval van relatief evenwicht; de regel der wisseling van stabiliteiten blijft bij de saeculaire stabiliteit bestaan, bij de gewone alleen, wanneer niet meer dan één der grootheden α te gelijker tijd nul wordt.

Door toepassing van deze stellingen gaat Poincaré nu onderzoeken, welke de evenwichtsvormen zijn eener homogene, met eenparige snelheid om de z-as wentelende vloeistofmassa, welker deeltjes elkander aantrekken volgens de wet van Newton. De omwentelingsellipsoïden en die van Jacobi vormen hier lineaire reeksen van evenwichtsfiguren, waarbij de hoeksnelheid ω de rol speelt van den parameter y (p 139). Wij hebben vroeger (p. 38) met Roche opgemerkt, dat de as der ellipsoïdale evenwichtsvormen, die in het algemeener probleem eener wentelende en door een uitwendig punt aangetrokken vloeistofmassa naar dat punt gericht moest zijn, hier alle mogelijke richtingen kan hebben, zoodat men de ellipsoïde van Jacobi over een willekeurigen hoek om de z-as kan draaien, zonder dat zij ophoudt evenwichtsvorm te zijn; voor elke waarde der hoeksnelheid heeft men dus een oneindig groot aantal drieassige ellipsoïden. Om deze omstandigheid te ontgaan onderwerpt Poincaré de evenwichtsvormen aan de voorwaarde, dat het xz-vlak een der drie hoofdvlakken van inertie moet wezen; daaruit volgt, dat bij de drieassige ellipsoïde de drie coördinaat-assen assen van inertie moeten zijn, en dat dezelfde ellipsoïde nog voldoet, als men ze over een hoek van 90° om de z-as wentelt. Men ziet nu aanstonds, dat er voor $V < 0{,}187\,11$ vier lineaire reeksen van reëele evenwichtsvormen zijn; de ellipsoïde van Maclaurin, die met $V = 0{,}187\,11$ overeenkomt, is te gelijker tijd bifurcatievorm, omdat ze zoowel tot de reeks der omwentelingsellipsoïden als tot die der drieassige behoort, en grensvorm, omdat de twee ellipsoïden van Jacobi, na hier samengevallen te zijn, imaginair worden; voor 0,187 11 $< V <$ 0,224 67 heeft men nog twee lineaire reeksen van evenwichtsfiguren; wanneer $V = 0{,}224\,67$ is, vallen ook de omwentelingsellipsoïden samen en worden vervolgens imaginair, hier ontstaat dus een grensvorm.

Om nu te kunnen beslissen, of er nog lineaire reeksen van convexe niet-ellipsoïdale evenwichtsfiguren zijn, vraagt Poincaré zich af: zijn er onder de omwentelingsellipsoïden of die van Jacobi nog bifurcatievormen? Deze vraag kan men blijkens het voorafgaande ook aldus stellen: worden de stabiliteitscoëfficiënten dezer evenwichtsvormen gelijk aan nul, en wisselen ze daarbij van teeken? Die coëfficiënten blijken nu afhankelijk te zijn van de functiën van Lamé; hiervoor gebruikt Poincaré de schrijfwijze, die o. a. door Liouville [1]) in zijn brieven aan Brachet was gevolgd, wij zullen liever de notatie van Halphen [2]) aannemen. Een punt in de ruimte wordt dientengevolge bepaald door drie argumenten u, v, w; de functie U van het eerste argument is die oplossing der differentiaal-vergelijking van Lamé

$$\frac{d^2 y}{du^2} = (A\,\mathrm{p}u + B)\,y, \qquad (1)$$

welke een geheele rationale uitdrukking der grootheden $\sqrt{\mathrm{p}u - e_\alpha}$ is. Naast U heeft men altijd een dergelijke functie [3]) V en W der elliptische coördinaten v en w, zoodat het product $f(u)\ f(v)\ f(w)$ een bolfunctie wordt. Beschouwt men $\sqrt{\mathrm{p}u - e_\alpha}$ als van eersten graad, $\mathrm{p}u$ als van tweeden graad, enz., dan blijkt, dat de functie U_n (van n^{den} graad) een der drie volgende gedaanten kan hebben

$a)\qquad y = \mathrm{p}^{(n-2)}u + a_1\,\mathrm{p}^{(n-4)}u + a_2\,\mathrm{p}^{(n-6)}u + \ldots,$

---

[1]) Journal de Mathém., 1$^{\text{re}}$ série, XI, 1846.

[2]) *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, II, p. 466.

[3]) Dat hier een functie van Lamé wordt aangewezen met de letter V, die vroeger voor $\frac{\omega^2}{2\pi\rho k}$ werd gebezigd, kan geen verwarring veroorzaken.

welke ontwikkeling met een constanten term of met $\mathfrak{p}'u$ eindigt, naarmate n even of oneven is;

$b)$ $y = [\mathfrak{p}^{(n-3)}u + a_1\,\mathfrak{p}^{(n-5)}u + \ldots + a_k\,\mathfrak{p}u + C]\sqrt{\mathfrak{p}u - e_\alpha}$,

deze vorm kan alleen bij oneven n voorkomen;

$c)$ $y = [\mathfrak{p}^{(n-4)}u + a_1\mathfrak{p}^{(n-6)}u + \ldots + a_k\mathfrak{p}u + C]\sqrt{(\mathfrak{p}u - e_\alpha)(\mathfrak{p}u - e_\beta)}$,

deze ontwikkeling heeft men slechts bij even waarden van n. Naar gelang U_n den vorm a, b of c heeft, wordt ze een functie van de eerste, tweede of derde soort genoemd; de constante A in de vergelijking van Lamé is in al deze gevallen gelijk aan $n\,(n+1)$.

Voor elk der drie soorten geldt, zooals men gemakkelijk inziet, dat de functie van Lamé of hare afgeleide verdwijnt, wanneer u (resp. v of w) gelijk wordt aan ω, ω' of ω''. Voegt men nog aan U_n een constanten factor toe, zoodat ze voor zeer kleine waarden δ van u overgaat in δ^{-n} (b. v. bij de functie van derden graad en eerste soort $\mathfrak{p}'u$ zou die factor $-\frac{1}{2}$ bedragen) dan kan men bewijzen [1]), dat U_n voor $0 < u < \omega$ altijd positief is, en kleiner wordt, wanneer u toeneemt; voor de nulpunten u_0 heeft men altijd

$$e_1 \geqq \mathfrak{p}u_0 \geqq e_3.$$

Naast de oplossing y der differentiaal-vergelijking van Lamé heeft men een andere oplossing, die wij zoo zullen bepalen, dat ze voor $u = \delta$ in δ^{n+1} overgaat, namelijk

$$z = (2\,n+1)\,y\int_0^u \frac{du}{y^2}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

stelt men derhalve deze functie van Lamé door Z voor, dan is $UZ = \delta$ voor kleine waarden δ van het argument; van

¹) Liouville, l. c., p. 262.

deze eigenschap zullen we meermalen gebruik maken. Bij de toepassing dezer functiën op de ellipsoïde $u = \upsilon =$ constant, bezigt Liouville herhaaldelijk de verhouding tusschen den afstand van haar middelpunt tot het raakvlak, en het product der halve assen; deze grootheid l noemend, vinden wij

$$l = \frac{1}{\tau^2 \sqrt{(\mathrm{p}\upsilon - \mathrm{p}v)(\mathrm{p}\upsilon - \mathrm{p}w)}},$$

terwijl de assen der ellipsoïde weder door $\tau^2 (\mathrm{p}\upsilon - e_\alpha)$ werden voorgesteld; haar oppervlakte-element $d\sigma$ wordt dan [1])

$$d\sigma = \tau^2 \sqrt{(\mathrm{p}\upsilon - \mathrm{p}v)(\mathrm{p}\upsilon - \mathrm{p}w)}\,(\mathrm{p}v - \mathrm{p}w)\,\frac{dv}{i}\,dw.$$

Het product $l d\sigma$ komt o. a. te pas bij de „integraal van Liouville" [2]) ter bepaling van de potentiaal in het punt (v', w') eener oppervlaktelading, welker dichtheid $\tau\, l\, V\, W$ bedraagt in het punt (v, w), dat op een afstand Δ van (v', w') ligt; men heeft dan namelijk, de integralen uitstrekkend over de ellipsoïde υ, [3])

$$\tau \int \frac{l\, V\, W\, d\sigma}{\Delta} = \tau \int\!\!\int (\mathrm{p}v - \mathrm{p}w)\, V\, W\, \frac{dv\, dw}{i\Delta} = \frac{4\pi}{2n+1}\, V' W' U Z, \,.\,. \quad (3)$$

waar n den gemeenschappelijken graad van U, V' en W' aanwijst; de formule van Liouville [4])

$$\int l\, V\, W\, V_1\, W_1\, d\sigma = 0$$

---

[1]) Halphen, II, p. 462.

[2]) Journal de Mathém., 1846, p. 224.

[3]) Daar in de volgende berekeningen u meestal de constante waarde υ behoudt, en het wenschelijk is de notatie niet ingewikkelder te maken, worden de teekens U en Z, voor zooverre zij niet achter het integraalteeken voorkomen, van nu af aan altijd gebruikt om functiën niet van het algemeene argument u, maar van de bijzondere waarde υ aan te duiden.

[4]) l. c., p. 271.

wordt thans geschreven

$$\int\int (\text{p}v - \text{p}w)\, V\, V_1\, W\, W_1\, dv\, dw = 0\,; \ldots\ldots (4)$$

deze laatste betrekking geldt, zoodra V en V_1, W en W_1 van elkander verschillen, maar de integraal is niet gelijk aan nul, wanneer V en V_1, W en W_1 samenvallen.

Het nut der functiën van Lamé komt inzonderheid hieruit voort, dat elke betrekking van de plaats op de ellipsoïde υ ontwikkeld kan worden in een convergente reeks van den vorm $\Sigma A_n V_n W_n$, waar de grootheden A constanten zijn.

Deze stellingen komen te pas bij de omzetting der uitkomst door Poincaré verkregen [1]) voor het verschil tusschen de totale potentieele energie E_0 eener vloeistofmassa, terwijl zij een ellipsoïdalen evenwichtsvorm inneemt, en hare potentieele energie E na een oneindig kleine vervorming, waarbij het volumen niet verandert; $d\sigma$ en $d\sigma'$ zijn weder oppervlakte-elementen der ellipsoïde, welker afstand Δ bedraagt; ζ en ζ' stellen op die plaatsen de afstanden voor tusschen het evenwichtsoppervlak en het vervormde oppervlak, langs de normaal der ellipsoïde gerekend; de resultante der middelpuntvliedende kracht en der aantrekkingskracht volgens de wet van Newton wordt door g aangeduid; Poincaré vindt dan [2])

$$E = E_0 - \frac{1}{2}\int g\,\zeta^2\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\int \frac{\zeta\zeta'}{\Delta}\, d\sigma\, d\sigma'.$$

Heeft l de beteekenis op de vorige bladzijde vermeld, dan blijkt gl op het oppervlak der ellipsoïde υ een standvastige waarde te hebben [3]); aan het uiteinde der z-as, waar de middelpuntvliedende kracht verdwijnt, wordt gl, volgens de inwen-

---

[1]) Zie ook Liouville, Journal de Mathém., 1ère série, XX, 1855, p. 174.

[2]) l. c.; p. 315, om aan de schrijfwijze van Poincaré getrouw te blijven, hebben wij de dichtheid ρ en de attractie-constante k gelijk aan 1 gesteld.

[3]) Liouville, Journal de Mathém., 1843, p. 360.

dige normaal der ellipsoïde, dus volgens de negatieve z-as gerekend, door

$$\frac{4\pi}{\tau}\int_0^{\upsilon}\frac{\mathrm{p}\upsilon-e_1}{\mathrm{p}u-e_1}\,du$$

voorgesteld, zooals men uit (3) van het eerste hoofdstuk (p. 12) gemakkelijk afleidt; stelt men nu de functie van Lamé van eersten graad $\sqrt{\mathrm{p}\upsilon-e_1}$ door U_1 voor en de overeenkomstige tweede oplossing der differentiaal-vergelijking (1) door Z_1, dan kan voor $\tau\, g\, l$ aan het uiteinde der z-as en derhalve over het geheele oppervlak der ellipsoïde geschreven worden

$$\tau\, gl = \frac{4}{3}\pi\, U_1\, Z_1.$$

Wanneer men nu $\frac{\zeta}{l}$ in een convergente reeks $\tau^3\,\Sigma\, A_n\, V_n\, W_n$ ontwikkelt, waar de grootheden A constanten zijn, komt er

$$\int g\,\zeta^2\, d\sigma = gl\int\left(\frac{\zeta}{l}\right)^2 l\, d\sigma =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\tau^5\; U_1 Z_1\;\Sigma\, A_n{}^2\int\!\!\int V_n{}^2\, W_n{}^2\,(\mathrm{p}v-\mathrm{p}w)\,\frac{dv}{i}\,dw,$$

terwijl de integralen der dubbele producten in de uitdrukking voor $\left(\frac{\zeta}{l}\right)^2$ zijn weggevallen.

De tweede integraal in $E-E_0$ voorkomend, namelijk

$$\int\!\!\int\frac{\zeta\zeta'}{\Delta}\,d\sigma\; d\sigma',$$

wordt, als men voor $\frac{\zeta}{l}$ en $\frac{\zeta'}{l'}$ de ontwikkeling in functiën van Lamé substitueert,

$$\tau^6\,\Sigma\, A_n\, A_m\int\!\!\int\frac{l\, l V'_n\, W_n V'_m\, W'_m}{\Delta}\,d\sigma\; d\sigma',$$

hetgeen door toepassing van (3) en (4) overgaat in

$$\int\int \frac{\zeta\zeta'}{\Delta} d\sigma d\sigma' = 4\pi\tau^5 \Sigma A_n{}^2 \frac{U_n Z_n}{2n+1} \int\int V_n{}^2 W_n{}^2 (\mathrm{p}v - \mathrm{p}w) \frac{dv}{i} dw,$$

zoodat ten slotte voor de totale potentieele energie van het vervormde oppervlak kan geschreven worden

$$E = E_0 - 2\pi\tau^5 \Sigma A_n{}^2 \left(\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1}\right) \int\int V_n{}^2 W_n{}^2 (\mathrm{p}v - \mathrm{p}w) \frac{dv}{i} dw.$$

Beschouwt men nu het vervormde oppervlak als bepaald door de coëfficiënten A_n, dan zijn de coëfficiënten van stabiliteit

$$-4\pi\tau^5 \left(\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1}\right) \int\int V_n{}^2 W_n{}^2 (\mathrm{p}v - \mathrm{p}w) \frac{dv}{i} dw;$$

wanneer nl. deze coëfficiënten alle negatief zijn, heeft de ellipsoïde zoowel saeculaire als gewone stabiliteit (vgl. p. 140 en 141); op het eerste gezicht schijnt deze conclusie in strijd met de bekende stelling, dat men standvastig evenwicht heeft, wanneer de potentieele energie een minimum is [1]), maar wij hebben om niet te zeer van de schrijfwijze van Poincaré af te wijken het teeken der potentieele energie omgekeerd; met het dubbele der potentieele energie of $2\,E$ bedoelt hij namelijk

$$\int\int \frac{dm\, dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2\, dm,$$

waarin dm en dm' elementen der vloeistofmassa zijn en r den afstand van zulk een element tot de omwentelingsas voorstelt, dus datgene, wat men gewoonlijk de krachtfunctie of potentiaal noemt [2]); opdat men derhalve stabiel evenwicht hebbe, moet $E - E_0$ stellig negatief zijn.

Opdat een ellipsoïde bifurcatievorm zij, moet een der stabiliteitscoëfficiënten nul worden en van teeken wisselen; dit

---

[1]) Zie b. v. Lorentz, *Beginselen der Natuurkunde*, 2de druk, § 162.

[2]) Vgl. Kirchhoff, *Mechanik*, p. 34.

kan niet geschieden, tenzij gedurende het integratieverloop

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_i Z_i}{2n+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wordt. De vraag, of er onder de omwentelingsellipsoïden of die van Jacobi bifurcatievormen zijn, is dus teruggebracht tot de discussie der zooeven vermelde vergelijking, nl. tot het onderzoek, of zij wortels heeft $\delta < \upsilon < \omega$.

§ 2. *Onderzoek der algemeene vergelijking van Poincaré. — Toepassing bij de omwentelingsellipsoïden.*

Van de algemeenere vergelijking

$$F(\upsilon) = \frac{U_m Z_m}{2m+1} - \frac{U_n Z_n}{2n+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

zullen wij het eerste lid $F(\upsilon)$ onderzoeken; dit nadert met het argument υ tot nul (p. 144), terwijl F ook verdwijnt voor $\upsilon = \omega$, wanneer U_m en U_n beide den factor $\sqrt{p\upsilon - e_1}$ bevatten. De vergelijking

$$\frac{F(\upsilon)}{U_m{}^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

heeft in het verloop $0 < \upsilon < \omega$ dezelfde wortels als (5'), want U_m kan wel voor $\upsilon = \omega$, maar niet voor $0 < \upsilon < \omega$ nul worden (p. 144). De wortels nu van

$$\frac{F(\upsilon)}{U_m{}^2} = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{Z_m}{U_m} - \frac{1}{2n+1} \left(\frac{U_n}{U_m}\right)^2 \frac{Z_n}{U_n} = 0$$

worden gescheiden door die der afgeleide vergelijking, waarvoor men blijkens het verband tussschen U en Z, zooals dit door (2) is uitgedrukt, kan schrijven

$$-\frac{d}{d\upsilon}\left(\frac{U_n}{U_m}\right)^2 \times \int_0^{\upsilon} \frac{du}{U_n{}^2} = 0,$$

of ook

$$U'_n\, U_m - U_n\, U'_m = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waar de accenten de afgeleiden naar υ aanwijzen. De wortels van (7) wederom worden gescheiden door die van

$$U''_n\, U_m - U_n\, U''_m = 0\,,$$

hetgeen krachtens de beteekenis der constante A in de vergelijking van Lamé (zie p. 144) identiek is met

$$[n\,(n+1) - m\,(m+1)\,]\, \wp\upsilon + B_n - B_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

want de factor $U_n\, U_m$, die voor $0 < \upsilon < \omega$ geen nulpunt heeft, mocht worden weggelaten.

Aan (8) voldoet hoogstens één waarde $0 < \upsilon < \omega$, en wel is dit het geval, wanneer men heeft

$$\frac{B_n - B_m}{n\,(n+1) - m\,(m+1)} > e_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Derhalve heeft (7) hoogstens twee wortels $0 \leqq \upsilon \leqq \omega$, en (5′) kan hoogstens drie wortels $0 \leqq \upsilon < \omega$ en hoogstens twee wortels tusschen δ en ω bezitten. Wanneer (7) geen enkelen wortel heeft kleiner dan ω, is $\dfrac{U_n}{U_m}$ altijd toenemend of altijd afnemend, terwijl υ van 0 tot ω aangroeit; stel dat dit quotiënt steeds afneemt, dan volgt

$$\frac{d}{d\upsilon}\,\frac{F(\upsilon)}{U_m^{\,2}} > 0\,,$$

maar voor $\upsilon = 0$ is $F(\upsilon) = 0$, dus voor waarden van υ tusschen 0 en ω is $F(\upsilon)$ altijd positief. Op dezelfde wijze blijkt, dat $F(\upsilon)$ steeds negatief is, wanneer $\dfrac{U_n}{U_m}$ blijft toenemen.

Deze stellingen gaan wij nu in de eerste plaats toepassen bij de vergelijking (5), dus in het bijzonder geval, dat U_m in (5′) gelijk is aan $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, want deze functie van den eersten graad werd op p. 147 U_1 genoemd. Er zijn nu drie gevallen te onderscheiden:

a) U_n bevat $\sqrt{\wp v - e_1}$ als factor,

b) U_n is niet deelbaar door $\sqrt{\wp v - e_1}$, en n is > 1,

c) U_n is gelijk aan $\sqrt{\wp v - e_2}$ of aan $\sqrt{\wp v - e_3}$.

a) In het eerste geval stellen wij

$$U_n = \varphi \,.\, P_n \sqrt{\wp v - e_1}\,,$$

waarin φ gelijk is aan 1, als U_n van de tweede soort is; $\varphi = \sqrt{\wp v - e_2}$ of $\varphi = \sqrt{\wp v - e_3}$, als U_n van de derde soort is; $\varphi = \sqrt{(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)}$, als U_n van de eerste soort en van oneven graad, dus deelbaar door $\wp' v$ is. P_n is dan een geheel polynomium in $\wp v$, waarvan de wortels alle reëel zijn, en tusschen e_1 en e_3 liggen. De afgeleide vergelijking $\dfrac{d(P_n)}{dv} = 0$ heeft derhalve hare wortels ook uitsluitend tusschen e_1 en e_3, dus terwijl v van 0 tot ω aangroeit, zal P_n, die voor $v = 0$ een pool heeft, *gestadig afnemen*. Evenzoo is het gesteld met $\sqrt{\wp v - e_2}$ en $\sqrt{\wp v - e_3}$, dus met φ en met het product van φ en P_n, dat hier de rol speelt van $\dfrac{U_n}{U_m}$ op de vorige bladzijde. Welnu, wij hebben bewezen, dat $F(v)$ steeds positief is, wanneer dat quotiënt blijft afnemen; dientengevolge heeft (5) geen wortel kleiner dan ω, wanneer U_n den factor $\sqrt{\wp v - e_1}$ bevat.

b) Wanneer U_n niet deelbaar is door $\sqrt{\wp v - e_1}$, wordt

$$F(v) = \frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1}$$

negatief voor $v = \omega$, maar in de onderstelling $n > 1$ is $F(v)$ positief voor $v = \delta$, want dan heeft men

$$F(v) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right)\delta;$$

het aantal wortels tusschen δ en ω moet derhalve *oneven* zijn, maar volgens p. 150 is dat getal hoogstens twee, derhalve moet men hier *één* wortel $\delta < \upsilon < \omega$ hebben, en kan er niet meer dan één wezen.

Hetgeen wij in het eerste hoofdstuk bewezen hebben, dat

$$\int_0^{\upsilon}\left[\frac{p\upsilon - e_1}{pu - e_1} - \frac{(p\upsilon - e_2)(p\upsilon - e_3)}{(pu - e_2)(pu - e_3)}\right] du = 0$$

bij elke verhouding van e_1, e_2, e_3 één en niet meer dan één wortel $\upsilon < \omega$ heeft (vgl. p. 19 en 20), is een geheel bijzonder geval dezer stelling van Poincaré. Maar terwijl een methode zooals die, welke wij t. a. p. konden volgen, omdat U_n bijzonder eenvoudig was, reeds bewerkelijk zou wezen, wanneer U_n b. v. van vierden graad en eerste soort zou zijn, en eenvoudig onmogelijk, wanneer U_n b. v. van honderdsten graad was, doet de bewijsvoering van Poincaré een onfeilbaar middel aan de hand om voor *elken* graad van U_n aanstonds te beslissen of

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n + 1} = 0$$

een wortel $\delta < \upsilon < \omega$ heeft, en leert tevens, dat er *nooit meer dan één* wortel kan zijn.

c) Wanneer U_n gelijk is aan $\sqrt{p\upsilon - e_2}$, of aan $\sqrt{p\upsilon - e_3}$ wordt

$$\frac{U_n}{U_m} = \sqrt{\frac{p\upsilon - e_\gamma}{p\upsilon - e_1}}$$

(waar $e_\gamma = e_2$ of $e_\gamma = e_3$ is) steeds grooter, wanneer men υ van 0 tot ω laat aangroeien, derhalve is

$$F(\upsilon) = \int_0^{\upsilon} \frac{p\upsilon - e_1}{pu - e_1}\, du - \int_0^{\upsilon} \frac{p\upsilon - e_\gamma}{pu - e_\gamma}\, du$$

hier steeds negatief, en heeft men geen wortel $\delta < \upsilon < \omega$. Men kan ook in onze vroegere notatie voor $F(\upsilon)$ een der twee vergelijkingen schrijven

$$F(\upsilon) = c^2 R - a^2 P, \qquad\qquad F(\upsilon) = c^2 R - b^2 Q,$$

en dit is negatief (zie p. 13, in het grensgeval $e_1 = e_2$ zou altijd $F = 0$ zijn, maar daarover wordt thans niet gehandeld).

De discussie der vergelijking (5)

$$F(\upsilon) = \frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1} = 0$$

kan dus als volgt worden samengevat:

a) U_n deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$: geen wortel tusschen δ en ω, $F(\upsilon) > 0$.

b) U_n niet deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, terwijl $n > 1$ is: één wortel tusschen δ en ω.

c) U_n niet deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, $n = 1$: geen wortel, $F(\upsilon) < 0$.

Bij de algemeenere vergelijking

$$F(\upsilon) = \frac{U_m Z_m}{2m+1} - \frac{U_n Z_n}{2n+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5')$$

moet men twee hoofdgevallen onderscheiden, men kan namelijk hebben $n > m$ en $n = m$.

A. $n > m$.

a) U_n is deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, U_m bevat dien factor niet.

Nu is $F(\upsilon)$ positief voor $\upsilon = \omega$ en ook voor $\upsilon = \delta$, derhalve heeft (5′) geen enkelen wortel tusschen δ en ω of wel twee.

b) U_n is niet deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, maar U_m wel.

Dan is $F(\upsilon)$ negatief voor $\upsilon = \omega$ en positief voor $\upsilon = \delta$, er is dus een oneven aantal wortels, derhalve *één enkele wortel* tusschen δ en ω.

c) U_n en U_m zijn beide deelbaar door $\sqrt{\mathrm{p}\upsilon - e_1}$ of geen van beide.

In de laatste onderstelling zijn U'_n en U'_m deelbaar door $\sqrt{\mathrm{p}\upsilon - e_1}$, dus men heeft hier altijd

$$U'_n\, U_m - U_n\, U'_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

voor $\upsilon = \omega$, maar deze vergelijking heeft volgens p. 150 hoogstens twee wortels, die kleiner dan ω of gelijk aan ω zijn; hier kan zij dus slechts één wortel $< \omega$ bezitten, en wel heeft zij zulk een wortel, als (8) er een heeft, met andere woorden, wanneer

$$\frac{B_n - B_m}{n\,(n+1) - m\,(m+1)} > e_1$$

is; alleen als aan deze ongelijkheid voldaan wordt, kan (5′) hier een wortel hebben tusschen δ en ω; is daaraan niet voldaan, dan heeft (5′) zeker niet zulk een wortel.

B. $n = m$.

Voor (5′) vindt men nu

$$F = U_m\, Z_m - U_n\, Z_n = 0\,,$$

terwijl (8) overgaat in

$$B_n - B_m = 0$$

en dus geen enkelen wortel kan hebben; derhalve kan (7), namelijk

$$U'_n\, U_m - U_n\, U'_m = 0$$

slechts één wortel hebben, en heeft ook $F(\upsilon)$ hoogstens één wortel $0 < \upsilon < \omega$. Men heeft ook hier nog met twee verschillende gevallen te doen:

a) U_n en U_m zijn beide of geen van beide deelbaar door $\sqrt{\mathrm{p}\upsilon - e_1}$.

Dan verdwijnt (7) nl.

$$U'_n U_m - U_n U'_m = 0$$

voor $\upsilon = \omega$, en dientengevolge kan zij geen wortel $< \omega$ hebben; derhalve heeft $F(\upsilon)$ geen wortel $0 < \upsilon < \omega$.

b) U_n is deelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, maar U_m niet.

Nu kan (7) één wortel $< \omega$ hebben, dus ook $F(\upsilon)$ heeft geen enkelen of één wortel tusschen δ en ω.

Het aantal wortels $\delta < \upsilon < \omega$ der vergelijking (5′) wordt dus door de volgende tabel bepaald:

	deelbaar of ondeelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$	aantal wortels
$n > m$	U_n deelbaar, U_m ondeelbaar	0 of 2
	U_n ondeelbaar, U_m deelbaar	1
	beide deelbaar of beide ondeelbaar	0 of 1
$n = m$	beide deelbaar of beide ondeelbaar	0
	één van beide deelbaar	0 of 1

Wij zullen van nu af aan de functiën van Lamé niet alleen door den graad en door de soort bepalen, maar soms ook door het aantal i der nulpunten υ_0, die tusschen ω en ω'' liggen, dus door het aantal factoren $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, die in U voorkomen, wanneer men $e_1 = e_2$ stelt; in dit grensgeval wordt [1])

---

[1]) Vgl. Liouville, *Deuxième Lettre à Blanchet*, Journal de Mathém., 1846, p. 276; — Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Aufl., I, p. 362; — Poincaré, Acta Mathematica, VII, p. 306 en 308. Deze laatste heeft op p. 306 een zinstorende drukfout, hij zegt nl.: „Dans le cas de $b^2 = 0$, on a

$$R = \frac{(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots.(n-i+1)} \quad \frac{d^{i+n}(\rho_2^2 + c^2)}{d\rho^{i+n}};\text{"}$$

de differentiatie moet naar $\rho_2 = \sqrt{\rho^2 - c^2}$, niet naar ρ geschieden, en $(\rho_2^2 + c^2)$ in den teller moest tot de n^{de} macht verheven zijn.

$$U_{n,i} = A\,(\mathrm{p}v - e_1)^{\frac{i}{2}}\, D^{i+n}\,(\mathrm{p}v - e_1)^n, \quad . \ . \ . \ . \ (10)$$

waar A een constante is en het teeken D differentiatie naar $\sqrt{\mathrm{p}v - e_3}$ aanwijst; i kan, zooals men begrijpt, hoogstens gelijk zijn aan n.

Wanneer $e_2 = e_3$ is, wordt

$$U_{n,i} = A\,(\mathrm{p}v - e_3)^{\frac{j}{2}}\, D^{j+n}\,(\mathrm{p}v - e_3)^n, \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

nu beduidt D differentiatie naar $\sqrt{\mathrm{p}v - e_1}$, j is gelijk aan het aantal nulpunten tusschen ω'' en ω'. Daar voor alle nulpunten van U geldt, dat

$$e_1 \geqq \mathrm{p}v_0 \geqq e_3$$

is, besluit men gemakkelijk uit (10) en (11):

$i + j = n$, wanneer U niet deelbaar is door $\sqrt{\mathrm{p}v - e_2}$,
$i + j = n + 1$, wanneer U deelbaar is door $\sqrt{\mathrm{p}v - e_2}$

Met behulp van deze stellingen kunnen wij het aantal der bifurcatievormen bepalen, die men ontmoet bij het doorloopen van de geheele reeks der omwentelingsellipsoïden, van den bol af tot aan de platte, oneindig ver uitgestrekte schijf, waarvoor $v = \omega$ is (p. 18). Dit aantal is, zooals op p. 148 bleek, gelijk aan dat der coëfficiënten

$$\frac{U_1\, Z_1}{3} - \frac{U_n\, Z_n}{2n+1},$$

die tusschen δ en ω nul worden en van teeken wisselen. Dit zal geschieden, wanneer n grooter is dan 1, en U_n niet deelbaar door $\sqrt{\mathrm{p}v - e_1}$. Wij kunnen nu gemakkelijk het aantal functiën van de eerste, tweede en derde soort bepalen, die bij een bepaalden graad n aan deze voorwaarden voldoen.

a) De functiën van de eerste soort zijn bij oneven n alle deelbaar door $\mathrm{p}'u$, maar bij even n voldoen zij alle aan onze voorwaarden, haar aantal bedraagt $\frac{n}{2}+1$, dus *bij even waarde van n voldoen $\frac{n}{2}+1$ functiën van de eerste soort.*

b) Onder de functiën van de tweede soort, die alleen bij oneven n voorkomen en welker aantal $\frac{3}{2}(n+1)$ bedraagt, zijn er $n+1$, die niet door $\sqrt{\wp u - e_1}$ deelbaar zijn, dus bij oneven waarde van n voldoen $n+1$ functiën van de tweede soort.

c) Onder de $\frac{3}{2}n$ functiën van de derde soort, die men alleen bij even waarden van n aantreft, zijn er $\frac{1}{2}n$, die niet deelbaar zijn door $\sqrt{\wp u - e_1}$.

Voor elke even waarde van n zijn er derhalve $\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}$, dus $n+1$ functiën, waarvoor (5) een wortel heeft tusschen δ en ω, en eveneens zijn er $n+1$ zoodanige functiën voor elke oneven waarde van n grooter dan 1.

Maar bij de omwentelingsellipsoïden is $e_2 = e_3$, zoodat de functiën van de tweede soort, welker algemeene gedaante is

$$y = z\sqrt{\wp u - e_\gamma}, \qquad \gamma = 2 \text{ of } \gamma = 3$$

blijkbaar twee aan twee samenvallen; *bij oneven waarden van n heeft men derhalve $\frac{n+1}{2}$ bifurcatievormen onder de omwentelingsellipsoïden.* B. v. voor $n=3$ heeft (5) een wortel $\delta < u < \omega$, wanneer U_n een der volgende functiën is [1]):

$$\left(\wp u + \frac{1}{2}e_2 - \frac{B}{10}\right)\sqrt{\wp u - e_2}, \qquad B^2 - 6e_2 B + 45e_2^2 - 15g_2 = 0,$$

$$\left(\wp u + \frac{1}{2}e_3 - \frac{B}{10}\right)\sqrt{\wp u - e_3}, \qquad B^2 - 6e_3 B + 45e_3^2 - 15g_2 = 0;$$

---

[1]) Vgl. Halphen, II, p. 469.

men ziet, dat deze vier functiën voor $e_2 = e_3$ twee aan twee samenvallen. Voor even waarden van n is het wel duidelijk, dat in dit ontaardingsgeval de functiën van de derde soort in functiën van de eerste soort overgaan, maar men ziet niet onmiddellijk, dat ze met de andere functiën van de eerste soort samenvallen. Om dit nader toe te lichten zullen wij voor een oogenblik de functiën U aanwijzen door

$$U^1{}_{n,i}, \quad U^2{}_{n,i}, \quad U^3{}_{n,i},$$

waar de indices 1, 2, 3 de soort bepalen, n den graad, terwijl i en j volgens p. 156 de aantallen der nulpunten v_0 aanduiden, die op de zijden van het parallelogram der halve perioden resp. tusschen ω en ω'' en tusschen ω'' en ω' liggen; bij de functiën van de derde soort, die hier deelbaar moeten zijn door $\sqrt{pv - e_2}$, wordt dus éénzelfde nulpunt zoowel tot het getal i als tot het getal j gerekend (vgl. p. 155). Ingeval $e_2 = e_3$ is, zullen volgens (11) de functiën samenvallen, waarbij n en j dezelfde zijn; voor een gegeven waarde van j is bij functiën van de derde soort $i = n + 1 - j$, bij die van de eerste soort $i = n - j$; men heeft derhalve voor $e_2 = e_3$

$$U^3{}_{n,n+1-j} = U^1{}_{n,n-j}.$$

Nu kan er echter geen functie van de derde soort wezen, die met $j = 0$ overeenkomt, daar i niet gelijk kan worden aan $n + 1$, dus de functie van de eerste soort voor deze bijzondere waarde van j, namelijk $U^1{}_{n,n}$ blijft op zich zelve staan. De $\frac{n}{2}$ functiën van de derde soort, bij welke wij een bifurcatievorm konden verwachten, vallen dus samen met even zoovele functiën van de eerste soort, terwijl er dan nog ééne functie U^1 overblijft; derhalve heeft men *bij even n in de reeks der omwentelings-ellipsoïden $\frac{n}{2} + 1$ bifurcatievormen.* B. v. voor $n = 2$ zijn de volgende functiën [1]) niet deelbaar door $\sqrt{\wp u - e_1}$:

$$U^3_{2,1} = \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}, \qquad U^1_{2,0} = \wp u + \frac{1}{6}\sqrt{3 g_2},$$

$$U^1_{2,2} = \wp u - \frac{1}{6}\sqrt{3 g_2},$$

nu heeft men

$$\frac{1}{6}\sqrt{3 g_2} = \sqrt{\frac{e_1^2 - e_2 e_3}{3}},$$

dus, wanneer $e_2 = e_3$ is,

$$\frac{1}{6}\sqrt{3 g_2} = \frac{1}{2} e_1.$$

Dus $U^3_{2,1}$ en $U^1_{2,0}$ vallen nu samen tot $\wp u - e_3$, terwijl $U^1_{2,2} = \wp u + e_3$ is.

Wij komen derhalve tot het besluit [2]), dat men bij het doorloopen der geheele reeks van de omwentelingsellipsoïden een oneindig groot aantal bifurcatievormen aantreft, zoodat er naast die ellipsoïdale evenwichtsfiguren oneindig vele reeksen van evenwichtsvormen bestaan. Het scheen echter niet geheel zonder belang het aantal dier reeksen bij elken graad n der functiën van Lamé te onderzoeken; dit bleek nu voor oneven waarden van n, wanneer grooter dan 1 is, $\frac{n+1}{2}$ te bedragen, voor even waarden van n is het $\frac{n}{2} + 1$.

Uit hetgeen wij op de vorige bladzijden zagen volgt nog, dat bij de omwentelingsellipsoïden in den regel twee stabiliteitscoëfficiënten te gelijker tijd van teeken wisselen, maar ook dan is er een bifurcatievorm (vgl. p. 140). Alleen in het bijzonder geval dat $j = 0$ is, hetwelk, zooals straks nog nader wordt toegelicht,

---

[1]) Vgl. Halphen, II, p. 468 en 470.

[2]) Poincaré, p. 339.

alleen bij 'even waarde van n kan voorkomen, verdwijnt één enkele stabiliteitscoëfficiënt.

Doorloopt men de reeks der omwentelingsellipsoïden in de boven aangegeven richting, m. a. w. laat men het rotatie-moment van 0 tot ∞ aangroeien, dan is, zooals Poincaré zeer duidelijk bewijst [1]), de eerste bifurcatievorm, dien men ontmoet, die welke aan de vergelijking

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U'_{2,0} Z'_{2,0}}{5} = 0,$$

of ook aan

$$\int_0^v \left[\frac{pv - e_1}{pu - e_1} - \left(\frac{pv - e_3}{pu - e_3}\right)^2\right] du = 0,$$

voldoet; en dit is, zooals uit het voorgaande blijkt, de ellipsoïde van Maclaurin, die tevens tot de reeks der figuren van Jacobi behoort. Hieruit volgt, dat bij de ellipsoïden van Maclaurin, die een kleiner rotatie-moment hebben dan deze bifurcatievorm, alle stabiliteitscoëfficiënten negatief zijn, zoodat zij tot de stabiele evenwichtsvormen behooren. Bij de meer afgeplatte omwentelingsellipsoïden is in elk geval de met $U'_{2,0}$ overeenkomende stabiliteitscoëfficiënt positief, en zullen verder successievelijk de straks besproken coëfficiënten positief worden; deze figuren liggen dus alle „op den tak der instabiele oplossingen", zooals wij bij de behandeling van het probleem van Roche zeiden; althans is het zeker, dat zij de saeculaire stabiliteit missen. Ook in alle reeksen Σ van niet-ellipsoïdale evenwichtsfiguren, die wij hier naast de omwentelingsellipsoïden zien ontstaan, zijn volgens het vroeger vermelde beginsel der wisseling van de stabiliteit (p. 141) de evenwichtsvormen, die zeer weinig van de ellipsoïden verschillen, saeculair instabiel. Van deze lichamen, voor zooverre

[1]) p. 335—339.

zij oneindig weinig van de ellipsoïden verschillen, bewijst Poincaré[1]) nog de volgende eigenschappen, terwijl hij het aantal nulpunten op de zijde van het parallelogram der halve perioden tusschen ω'' en ω' liggend weder door j voorstelt:

„1⁰. Si $j = 0$, la figure Σ serait de révolution autour de l'axe des z.

2⁰. Si j n'est pas nul, la figure Σ ne changerait pas quand on la ferait tourner autour de l'axe des z d'un angle $\frac{2\pi}{j}$; elle admettrait j plans de symétrie passant par l'axe des z, de façon que l'angle dièdre de deux de ces plans de symétrie consécutifs soit $\frac{\pi}{j}$.

3⁰. Comme $j + n$ est toujours pair, le plan des xy serait aussi un plan de symétrie.

4⁰. Enfin si j est pair, l'axe des z serait un axe de symétrie et l'origine un centre de symétrie."

Alleen in het bijzonder geval, dat $j = 0$ is, zoodat alle nulpunten grooter zijn dan e_2, zijn dus de evenwichtsvormen Σ omwentelingslichamen.

Als de graad oneven is, zijn de functiën U_n, waarbij

$$F(v) = \frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1}$$

voor een waarde van het argument tusschen 0 en ω verdwijnt en van teeken wisselt, alle van de tweede soort en deelbaar door $\sqrt{pv - e_2}$ of $\sqrt{pv - e_3}$ (vgl. p. 157), hier kan j derhalve nooit gelijk aan nul zijn, zoodat in dit geval de figuren, die naast de omwentelingsellipsoïden voorkomen, en weinig van de ellipsoïden verschillen, nooit omwentelingslichamen kunnen zijn met de z-as als as. Bij elke even waarde van n echter heeft men één functie $U_{n,n}$, waar $i = n$ en dus $j = 0$

[1]) p. 330—335.

is (vgl. p. 158 en 156), zoodat er onder de $\frac{n}{2}+1$ reeksen van lichamen, die bij even n naast de omwentelingsellipsoïden ontstaan, altijd één is, waarin die lichamen, voor zooverre zij oneindig weinig van de ellipsoïden verschillen, van omwenteling zijn om de z-as.

Dat $j+n$ altijd even moet zijn, zooals in de aangehaalde woorden van Poincaré gezegd werd, is geen andere voorwaarde dan dat U_n niet deelbaar mag wezen door $\sqrt{\wp v - e_1}$, want een functie U_n, die hieraan voldoet, kan, naarmate zij van de eerste, tweede of derde soort is, altijd als volgt ontwikkeld worden:

a) n even.

$$U^1{}_n = (\wp v - \wp\alpha_1)(\wp v - \wp\alpha_2) \ldots . (\wp v - \wp\alpha_k),$$
$$U^3{}_n = (\wp v - \wp\alpha_1)(\wp v - \wp\alpha_2) \ldots . (\wp v - \wp\alpha_k) \sqrt{(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)};$$

b) n oneven.

$$U^2{}_n = (\wp v - \wp\alpha_1)(\wp v - \wp\alpha_2) \ldots . (\wp v - \wp\alpha_k)\sqrt{\wp v - e_2},$$
$$U^2{}_n = (\wp v - \wp\alpha_1)(\wp v - \wp\alpha_2) \ldots . (\wp v - \wp\alpha_k)\sqrt{\wp v - e_3}.$$

a) Wanneer n even is, heeft men voor elke waarde

$$e_2 > \wp\alpha > e_3$$

twee nulpunten tusschen ω'' en ω'; is U_n van de derde soort, dan komt hierbij nog één nulpunt $v=\omega''$ en tevens $v=\omega'$; ten slotte is dus j en derhalve ook $j+n$ even.

b) Wanneer n oneven is, heeft men behalve het even aantal nulpunten tusschen ω'' en ω', dat uit de factoren $\wp v - \wp\alpha$ voortkomt, altijd nog één nulpunt $v=\omega''$ of $v=\omega'$, hier is dus j oneven, en derhalve $j+n$ even, zooals in het andere geval. Aldus wordt tevens bevestigd hetgeen wij zoo juist zagen, dat $j=0$ niet kan voorkomen bij een oneven waarde van

---

[1]) Poincaré, p. 329.

n. Men kan ook gemakkelijk bewijzen, dat bij een functie U_n, die deelbaar is door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$, altijd $j + n$ oneven is de voorwaarde [1])

$$j \equiv n \pmod 2,$$

is dus dezelfde als: U_n ondeelbaar door $\sqrt{\wp\upsilon - e_1}$.

Ten slotte dient nog de evenwichtsvorm besproken te worden, die in de reeks der omwentelingsellipsoïden aan de grootste waarde van $\frac{\omega^2}{2\pi\rho k}$, nl. 0,224 67, beantwoordt. Poincaré zegt, dat deze figuur overeenkomt met $j = 0$, $n = 2$. Wanneer wij trachten deze bewering van Poincaré te bewijzen, zal blijken, dat hetgeen hij daaraan toevoegt[1]): „C'est une forme limite et non une forme de bifurcation", slechts ten deele juist is.

Vooreerst dan zullen wij onderzoeken, of de grensvorm der omwentelingsellipsoïden werkelijk bepaald wordt door $j = 0$, $n = 2$, of wat hetzelfde is door $i = 2$, $n = 2$, (want $j = 0$ kan, zooals wij zooeven zagen, slechts bij functiën van even graad en eerste soort voorkomen, zoodat nu $i = n - j = n$ wordt), derhalve door de vergelijking (cf. p. 159)

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U'_{2,2} Z'_{2,2}}{5} = \int_0^{\upsilon} \left[\frac{\wp\upsilon - e_1}{\wp u - e_1} - \left(\frac{\wp\upsilon + e_3}{\wp u + e_3}\right)^2\right] du =$$

$$= \int_0^{\upsilon} \left[\frac{\cot^2 \frac{\upsilon\pi}{2\omega}}{\cot^2 \frac{u\pi}{2\omega}} - \frac{\left(1 + 3\cot^2 \frac{\upsilon\pi}{2\omega}\right)^2}{\left(1 + 3\cot^2 \frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\right] du = 0.$$

Men kan hier desverkiezende nog stellen (vgl. p. 24)

$$\operatorname{tg} \frac{\upsilon\pi}{2\omega} = \lambda, \qquad \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2\omega} = x,$$

[1]) Poincaré, p. 329.

en verkrijgt dan

$$\int_0^\lambda \left[\lambda^2 x^2 - \frac{(\lambda^2+3)^2 x^4}{(x^2+3)^2}\right] \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

hetgeen men kan omzetten in

$$F(\lambda) = \frac{7\lambda^3 + 9\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)} - \operatorname{bg\,tg} \lambda = 0.$$

Nu is volgens p. 15 bij de omwentelingsellipsoïden

$$\frac{(3+\lambda^2)\operatorname{bg\,tg}\lambda - 3\lambda}{\lambda^3} = V,$$

de grensvorm wordt derhalve bepaald door

$$\frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

en dit blijkt identiek te wezen met $F(\lambda) = 0$; deze laatste vergelijking stelt dus den grensvorm der omwentelingsellipsoïden voor.

$F(\lambda)$ is gelijk aan nul voor $\lambda = 0$, zij wordt daarna positief overeenkomstig hetgeen wij bij de discussie der vergelijking van Poincaré gezien hebben (p. 151), bereikt haar grootste waarde, wanneer $\lambda = \sqrt{3}$ is [1]), verdwijnt voor $\lambda = 2{,}5293$ (p. 15), en blijft verder steeds afnemen, totdat zij voor $\lambda = \infty$ gelijk is aan $-\frac{\pi}{2}$.

De stabiliteitscoëfficiënt, die door

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U'_{2,2} Z'_{2,2}}{5}$$

bepaald wordt, wisselt dus van teeken voor een waarde van υ tusschen δ en ω. Maar hieruit volgt blijkens de woorden

[1]) Tisserand, *Mécan. cél.*, II, p. 86.

van Poincaré zelf, dat alsdan een bifurcatievorm ontstaat: „Pour qu'une forme d'équilibre appartenant à une série linéaire réelle soit de bifurcation, il suffit non seulement que Δ change de signe, mais que l'un quelconque des coëfficients de stabilité change de signe[1])". Ten anderen is hier ook een grensvorm, want twee lineaire reeksen van evenwichtsvormen vallen samen, en worden imaginair, wanneer de parameter (hier de grootheid V) aangroeit (vgl. p. 140). Zooals er dus voor $V = 0{,}187\ 11$ een ellipsoïdale evenwichtsvorm bestaat, die grensvorm is t. o. v. de ellipsoïden van Jacobi, maar tevens bifurcatievorm der drieassige ellipsoïde met een andere reeks, die der evenwichtsfiguren van Maclaurin[2]), zoo heeft men ook voor $V = 0{,}224\ 67$ een evenwichtsfiguur, die grensvorm is t. o. v. de omwentelingsellipsoïden van Maclaurin en d'Alembert, maar tevens bifurcatievorm t. o. v. de omwentelingsellipsoïde en een reeks van niet-ellipsoïdale evenwichtsvormen. Derhalve moet ook voor de grootste waarde van V uit de reeks der omwentelingsellipsoïden een reeks van niet-ellipsoïdale evenwichtsvormen ontstaan, die, in zooverre zij oneindig weinig van de ellipsoïde verschillen, omwentelingslichamen zijn, omdat hier $j = 0$ is.

§ 3. *Bifurcatievormen in de reeks der ellipsoïden van Jacobi.*

Poincaré gaat nu over tot de ellipsoïde van Jacobi, en geeft, ten deele zonder bewijs, een nieuwe afleiding van hare vergelijking[3]). „Wanneer men de ellipsoïde E over een oneindig kleinen hoek om de kleinste as laat draaien — zegt hij — zoodat ze den stand E' gaat innemen, en den afstand van

---

[1]) p. 276.
[2]) Zie hierboven p. 142; — vgl. Poincaré, p. 301.
[3]) p. 340.

E en E' langs de normaal van een dezer lichamen gerekend door ζ voorstelt, is

$$\zeta = A\, l\, V_2\, W_2\,,$$

waar A een oneindig kleine constante beteekent;" l is weder de verhouding van den afstand tusschen middelpunt en raakvlak der ellipsoïde tot het product der halve assen; de functiën van den tweeden graad V_2 en W_2 stellen hier resp. bepaaldelijk voor

$$\sqrt{(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)}\,, \qquad \sqrt{(\wp w - e_2)(\wp w - e_3)}.$$

Dit resultaat van Poincaré kan als volgt bewezen worden: wanneer wij voor de vergelijking der ellipsoïde E schrijven

$$\frac{x_1^2}{p_1 - s} + \frac{x_2^2}{p_2 - s} + \frac{x_3^2}{p_3 - s} - 1 = 0\,,$$

hierbij onderstellend

$$p_1 < p_2 < p_3,$$

en den afstand van het middelpunt tot het raakvlak, dus

$$l\sqrt{(p_1 - s)(p_2 - s)(p_3 - s)}$$

kortheidshalve P noemen, terwijl de hoek van wenteling ε zoo klein wordt ondersteld, dat ε^2 mag verwaarloosd worden, vindt men voor de vergelijking van E'

$$\frac{\left[x_1\left(1 + \frac{P\zeta}{p_1 - s}\right)\right]^2}{p_1 - s} + \frac{\left[x_2\left(1 + \frac{P\zeta}{p_2 - s}\right) - \varepsilon x_3\right]^2}{p_2 - s} +$$

$$+ \frac{\left[x_3\left(1 + \frac{P\zeta}{p_3 - s}\right) + \varepsilon x_2\right]^2}{p_3 - s} - 1 = 0,$$

zoodat men gebruik makend van

$$\frac{1}{P^2} = \left(\frac{x_1}{p_1 - s}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{p_2 - s}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{p_3 - s}\right)^2$$

tot de volgende betrekking komt

$$\zeta = \frac{P(p_3 - p_2)\varepsilon}{(p_3 - s)(p_2 - s)} x_3 x_2.$$

Aan elk punt (x_1, x_2, x_3) zijn drie waarden van s toegevoegd; daarmede zullen wij de drie waarden υ, v, w laten overeenstemmen, die het argument $\mathfrak{u}$ in de vergelijking

$$\tau^2 (\mathfrak{p}\mathfrak{u} - e_\alpha) = p_\alpha - s$$

aanneemt; bedenkt men nu, dat de factoren $p_3 - s$ en $p_2 - s$ in den noemer van ζ betrekking hebben op de ellipsoïde υ, dan vindt men [1])

$$x_\alpha^2 = \frac{\tau^2 (\mathfrak{p}\upsilon - e_\alpha)(\mathfrak{p}v - e_\alpha)(\mathfrak{p}w - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)},$$

en leidt verder gemakkelijk af, dat

$$\zeta = A\, l\, V_2\, W_2$$

is, terwijl de grootheid A op de ellipsoïde υ constant blijft, en ε als factor bevat, derhalve is zij oneindig klein.

In de uitdrukking voor de potentieele energie, die wij volgens Poincaré hebben afgeleid (p. 148), komt derhalve nu alleen de stabiliteitscoëfficiënt voor, die

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_2 Z_2}{5}$$

als factor bevat, daar volgens p. 166 $\sqrt{(\mathfrak{p}\upsilon - e_2)(\mathfrak{p}\upsilon - e_3)}$ door U_2 wordt voorgesteld; aangezien nu bij een ellipsoïde

---

[1]) Halphen, II, p. 459, plaatst verkeerdelijk in deze formule en in een andere, die hij daaruit afleidt, den factor τ in het tweede lid.

van Jacobi het evenwicht niet wordt verstoord, wanneer men haar om de kleinste as laat wentelen, moet de stabiliteitscoëfficiënt, waarvan zooeven sprake was, gelijk wezen aan nul, zoodat men komt tot de voorwaarde

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_2 Z_2}{5} = \int_0^{\upsilon} \left[\frac{p\upsilon - e_1}{pu - e_1} - \frac{(p\upsilon - e_2)(p\upsilon - e_3)}{(pu - e_2)(pu - e_3)}\right] du = 0,$$

en dit is, zooals men ziet, de vergelijking, die vroeger voor de ellipsoïde van Jacobi gevonden werd.

Bij elke ellipsoïde van Jacobi verdwijnt derhalve een stabiliteitscoëfficiënt, en men kan haar dan ook in zekeren zin beschouwen als behoorend tot twee reeksen van evenwichtsvormen, nl. *a*) tot de reeks der ellipsoïden, die bij de omwentelingsfiguur begint en met de oneindig lange naald eindigt, *b*) tot de reeks der ellipsoïden, die slechts van elkander verschillen door haren stand t. o. v. de x- en y-as[1]). Opdat intusschen een ellipsoïde van Jacobi een eigenlijk gezegde bifurcatievorm zij, moet nog een andere stabiliteitscoëfficiënt verdwijnen; er moet dus voldaan zijn aan de voorwaarde

$$\frac{U_1 Z_1}{3} = \frac{U_2 Z_2}{5} = \frac{U_n Z_n}{2n+1}, \quad \dots\dots\dots \tag{12}$$

of wanneer men den wortel van

$$F(\upsilon) = \frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_n Z_n}{2n+1} = 0$$

door υ_n voorstelt, en den wortel van [2])

$$F_2(\upsilon) = \frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_2 Z_2}{5} = 0$$

υ_2 noemt, moet men hebben

$$\upsilon_2 = \upsilon_n.$$

---

[1]) Zie hierboven p. 142; vgl. ook Poincaré, p. 266 en 292.

[2]) Wij duiden hier het eerste lid door $F_2(\upsilon)$ aan, omdat in de algemeenere vergelijking (cf. p. 153) U_n door U_2 vervangen is.

Hoedanig moet nu hier U_n wezen? Vooreerst is het noodig, dat $n > 1$ is, en U_n niet deelbaar door $\sqrt{\wp v - e_1}$, anders is er geen wortel v_n (p. 153). Wij kunnen hier nog bijvoegen, dat $n > 2$ moet zijn, want wanneer U_n een functie van den tweeden graad was, niet deelbaar door $\sqrt{\wp v - e_1}$ en verschillend van $\sqrt{(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)}$, die door U_2 wordt aangeduid, zou de vergelijking

$$U_2 Z_2 - U_n Z_n = 0$$

geen wortel hebben; immers wij hebben hier het geval $n = m$, en beide functiën zijn ondeelbaar door $\sqrt{\wp v - e_1}$; derhalve is er geen wortel $\delta < v < \omega$ (p. 154).

Wanneer men $e_2 = e_3$ stelt in de vergelijkingen (12), blijkt dat $v_2 < v_n$ wordt. Want als men de reeks der omwentelingsellipsoïden doorloopt, zoodat de aequatoras, aanvankelijk (bij den bol) even groot als de omwentelingsas, ten slotte (bij de platte schijf) oneindig veel langer is, wanneer men dus

$$\frac{\wp v - e_1}{\wp v - e_3} = \cos^2 v \sqrt{\frac{3\, e_1}{2}} = \cos^2 \frac{\pi v}{2\,\omega}$$

van 1 tot 0 laat afnemen (vgl. p. 18), ontmoet men het eerst den bifurcatievorm, waarvoor $F_2(v)$ van teeken wisselt (vgl. p. 160). Derhalve is

$$\cos^2 \frac{\pi v_2}{2\omega} > \cos^2 \frac{\pi v_n}{2\omega},$$

met andere woorden

$$v_2 < v_n.$$

Beschouwt men nu de vergelijkingen (12) in het andere grensgeval: $e_1 = e_2$, dan wordt v_2 met de reëele periode oneindig groot (vgl. p. 26), en ook $v_n = \infty$, ingeval $U_n Z_n$ den factor $\wp v - e_1$ bevat. Dit zal nu altijd geschieden, wanneer de nulpunten van U_n niet alle tusschen ω'' en ω' liggen, m. a. w. wanneer i in de formule (10) op p. 156

$$U_{n,i} = A\,(\mathrm{p}\upsilon - e_1)^{\frac{i}{2}}\, D^{i+n}\,(\mathrm{p}\upsilon - e_1)^n$$

van nul verschilt. Maar als $i = 0$ is, zoodat wij de functie van den n^{den} graad door $U_{n,0}$ kunnen aanwijzen, is

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1}$$

voor $\upsilon = \infty$ negatief, zoodat het argument tusschen δ en ω, waarvoor die vorm van teeken wisselt (vgl. p. 153), hetwelk wij voortaan $\upsilon_{n,0}$ zullen noemen, nu kleiner is dan υ_2.

Wij vonden derhalve voor de twee grensgevallen der drieassige ellipsoïden:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \upsilon_2 < \upsilon_{n,0},$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \upsilon_2 > \upsilon_{n,0};$$

bij het doorloopen dezer geheele reeks van evenwichtsvormen zal men dus een oneven aantal malen een assenverhouding aantreffen, waarvoor $\upsilon_2 = \upsilon_{n,0}$ is, zoodat aan de vergelijkingen (12) voldaan wordt en een bifurcatievorm ontstaat. Men heeft dus bifurcatievormen in de reeks der ellipsoïden van Jacobi, wanneer alle nulpunten der functie U_n in de vergelijkingen (12) tusschen ω'' en ω' liggen; om te bewijzen, dat er *alleen* in dit geval bifurcatievormen kunnen zijn, behoeven wij slechts aan te toonen, dat $\frac{U_{n,i}}{U_2}$, zoodra i van 0 verschilt, steeds afneemt, wanneer υ van 0 tot ω aangroeit, want hieruit volgt, dat de uitdrukking

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{n,i} Z_{n,i}}{2n+1}$$

geen wortel heeft tusschen 0 en ω (p. 150).

Hoe de functie $U_{n,i}$, die in elk geval niet deelbaar is door $\sqrt{\wp v - e_1}$, ontwikkeld kan worden, hebben wij reeds op p. 162 gezien; terwijl $\sqrt{(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)}$ door U_2 werd voorgesteld, verkrijgt dus het quotiënt van $U_{n,i}$ en U_2 een der vier volgende gedaanten:

$$\frac{\wp v - \wp \alpha_1}{\sqrt{\wp v - e_2}} \cdot \frac{\wp v - \wp \alpha_2}{\sqrt{\wp v - e_3}} (\wp v - \wp \alpha_3) \;.\;.\;.\;.\;.\; (\wp v - \wp \alpha_k),$$

$$\frac{\wp v - \wp \alpha_1}{\sqrt{\wp v - e_3}} (\wp v - \wp \alpha_2)(\wp v - \wp \alpha_3) \;.\;.\;.\;.\;.\; (\wp v - \wp \alpha_k),$$

$$\frac{\wp v - \wp \alpha_1}{\sqrt{\wp v - e_2}} (\wp v - \wp \alpha_2)(\wp v - \wp \alpha_3) \;.\;.\;.\;.\;.\; (\wp v - \wp \alpha_k),$$

$$(\wp v - \wp \alpha_1)(\wp v - \wp \alpha_2)(\wp v - \wp \alpha_3) \;.\;.\;.\;.\;.\; (\wp v - \wp \alpha_k);$$

de grootheden $\wp \alpha$, die alle tusschen e_1 en e_3 liggen, onderstellen wij in afdalende orde gerangschikt.

Nu worden de factoren $\wp v - \wp \alpha$ altijd kleiner, wanneer v van 0 tot ω aangroeit; ook

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\wp v - \wp \alpha}{\sqrt{\wp v - e_3}}\right) = \frac{\wp' v}{\sqrt{\wp v - e_3}} \left[\frac{(\wp v - e_3) + (\wp \alpha - e_3)}{2(\wp v - e_3)}\right]$$

is negatief, daar $\wp \alpha > e_3$ is en $\wp' v < 0$, terwijl v tusschen 0 en ω ligt. Eveneens is

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\wp v - \wp \alpha_1}{\sqrt{\wp v - e_2}}\right) = \frac{\wp' v}{\sqrt{\wp v - e_2}} \left[\frac{(\wp v - e_2) + (\wp \alpha_1 - e_2)}{2(\wp v - e_2)}\right]$$

negatief voor $0 < v < \omega$, wanneer $\wp \alpha_1 \geqq e_2$ is.

Derhalve is $\frac{U_{n,i}}{U^2}$ altijd afnemend en kan voor geen waarde van v kleiner dan ω voldaan worden aan de vergelijkingen (12), zoolang i grooter dan nul is, m. a. w. zoolang een nulpunt van $U_{n,i}$ op de zijde van het parallelogram der halve perioden tusschen ω en ω'' ligt of met ω'' samenvalt; in dit geval kunnen er dus geen bifurcatievormen zijn. Aan de vergelijkingen

$$\frac{U_1 Z_1}{3} = \frac{U_2 Z_2}{5} = \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1} \quad \ldots\ldots \quad (12')$$

kan echter voldaan worden; men zal dus onder de ellipsoïden van Jacobi ten minste één bifurcatievorm hebben, wanneer de nulpunten van U_n alle tusschen ω'' en ω' liggen. Bij elke waarde van n is er één zoodanige functie: wanneer n even is, moet zij, zooals men begrijpt, van de eerste soort wezen; wanneer n oneven is, moet zij van de tweede soort zijn en deelbaar door $\sqrt{\wp v - e_3}$.

Uit de bewijsvoering op de vorige bladzijde kunnen wij nog iets meer afleiden dan Poincaré gedaan heeft. Al is namelijk $\wp\alpha_1 < e_2$, toch zal, zooals men aanstonds ziet, $\frac{U_{n,0}}{U_2}$ steeds afnemen, dus

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1}$$

zal voor waarden van v tusschen 0 en ω niet van teeken wisselen (vgl. p. 150), wanneer de betrekking tusschen e_1, e_2 en e_3 zoodanig is, dat men tusschen die grenzen altijd heeft

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\wp v - \wp\alpha_1}{\sqrt{\wp v - e_2}}\right) > 0,$$

dus wanneer voldaan wordt aan

$$(e_1 - e_2) + (\wp\alpha_1 - e_2) \geqq 0,$$

$$e_1 + \wp\alpha_1 \geqq 2\, e_2.$$

De vergelijkingen (12′) zullen derhalve niet voor elke waarde van $\frac{e_2}{e_1}$ een oplossing hebben, wel wanneer dit quotiënt tot 1 nadert, want in dit grensgeval is $e_1 + \wp\alpha_1 < 2\,e_2$, daar $\wp\alpha_1 < e_2$ is.

Een en ander moge nog opgehelderd worden door de toepassing op een voorbeeld. Wij kiezen daartoe de functie $U_{3,0}$, die de eenvoudigste is onder de functiën $U_{n,0}$ in (12′), want, zooals reeds op p. 169 gezegd werd, moet $n > 2$ zijn. Welke is nu de functie van derden graad, die al hare nulpunten tusschen ω'' en ω' heeft? Wij zagen reeds, dat het een functie van de tweede soort moet zijn, deelbaar door $\sqrt{\wp u - e_3}$, dus[1])

$$\left[\wp u + \frac{e_3}{2} - \frac{B}{10}\right] \sqrt{\wp u - e_3}, \qquad B^2 - 6\,e_3 B + 45\,e_3^{\,2} - 15\,g_2 = 0,$$

met andere woorden

$$\left[\wp u + \frac{1}{5}\,(e_3 \mp \sqrt{6\,e_3^{\,2} - 15\,e_1\,e_2})\right] \sqrt{\wp u - e_3}.$$

De vorm met het minusteeken gaat voor $e_1 = e_2$ over in

$$(\wp u - e_1)\,\sqrt{\wp u - e_3},$$

die met het plusteeken geeft

$$\left(\wp u - \frac{1}{10}\,e_3\right) \sqrt{\wp u - e_3}\,;$$

dus alleen de laatste functie voldoet aan de voorwaarde, dat alle nulpunten tusschen ω'' en ω' moeten liggen, derhalve hebben wij

$$U_{3,0} = \left[\wp u + \frac{1}{5}\,(e_3 + \sqrt{6\,e_3^{\,2} - 15\,e_1\,e_2})\right] \sqrt{\wp u - e_3}.$$

Nu is er, zooals wij zagen, geen wortel, wanneer men heeft

$$e_1 + \wp\alpha \gtreqless 2\,e_2,$$

dus in ons voorbeeld, zoolang de betrekking

$$-\,e_3 - \sqrt{6\,e_3^{\,2} - 15\,e_1\,e_2} + 5\,e_1 \geqq 10\,e_2$$

---

[1]) Halphen, II, p. 469.

blijft gelden, en dit kan men gemakkelijk omzetten in

$$(2e_1 - 5e_2)(e_1 - e_2) \geqq 0;$$

$\dfrac{U_{3,0}}{U_2}$ blijft dus afnemen, en dientengevolge heeft de vergelijking

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

zeker geen wortel, wanneer men heeft

$$e_1 \geqq \frac{5}{2} e_2,$$

met andere woorden

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \leqq \frac{3}{4}.$$

Zooals men begrijpt, volgt hieruit geenszins, dat er altijd een wortel zou zijn, wanneer $2e_1 < 5e_2$ is; wel blijft dan $\dfrac{U_{3,0}}{U_2}$ niet gedurig afnemen, zoodat de afgeleide vergelijking van

$$\frac{1}{U_2^2}\left[\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7}\right] = 0$$

een wortel tusschen 0 en ω heeft, maar daaruit volgt slechts dat (13) een wortel *kan hebben* tusschen δ en ω (vgl. p. 150).

Ditzelfde resultaat kon ook nog als volgt worden afgeleid; de vergelijking (13) heeft volgens p. 154 zeker geen wortel, als

$$\frac{B_n - B_m}{n(n+1) - m(m+1)} \leqq e_1$$

is, terwijl zij in het tegengestelde geval een wortel *kan hebben* (p. 154); nu is [1])

$$B_2 = -3e_1, \qquad B_{3,0} = 3e_3 - 2\sqrt{6e_3^2 - 15e_1e_2},$$

[1]) Halphen, II, p. 469 en 470.

zoodat men na een eenvoudige bewerking bevindt, dat (13) geen wortel heeft voor

$$\left(e_1 - \frac{5}{2}e_2\right)\left(e_1 + \frac{1}{2}e_2\right) \geqq 0,$$

maar $e_1 + \frac{1}{2}e_2$ of $\frac{1}{2}(e_1 - e_3)$ is altijd positief. Zoo blijkt dus hier weder, dat de stabiliteitscoëfficiënt, die met $U_{3,0}$ overeenkomt, zeker niet van teeken zal wisselen, zoolang $2\,e_1 > 5\,e_2$ is.

In dit eenvoudig voorbeeld hadden wij nog op een derde manier kunnen vinden, dat

$$\frac{U_2\,Z_2}{5} - \frac{U_{3,0}\,Z_{3,0}}{7} =$$

$$= \int_0^{\upsilon} \frac{\wp\upsilon - e_3}{\wp u - e_3}\left[\frac{\wp\upsilon - e_2}{\wp u - e_2} - \left(\frac{\wp\upsilon - \wp\alpha}{\wp u - \wp\alpha}\right)^2\right] du = 0,$$

waarin

$$-\frac{1}{5}\left(e_3 + \sqrt{6\,e_3^2 - 15 e_1\,e_2}\right),$$

kortheidshalve door $\wp\alpha$ werd voorgesteld, geen wortel tusschen 0 en ω heeft, als $e_1 + \wp\alpha > 2\,e_2$ is. Want met weglating van den factor $\wp\upsilon - e_3$, die in het integratieverloop niet nul wordt, kan men de vergelijking omzetten in

$$\int_0^{\upsilon} \frac{(\wp u - \wp\upsilon)\,[(\wp u - e_2)\,(\wp\upsilon - e_2) - (\wp\alpha - e_2)^2]}{(\wp u - e_2)\,(\wp u - e_3)\,(\wp u - \wp\alpha)^2}\,du = 0.$$

Opdat hieraan voldaan worde, moet $\wp\upsilon - e_2 < e_2 - \wp\alpha$ wezen; wanneer echter $e_1 + \wp\alpha > 2\,e_2$ is, heeft men voor elke waarde van υ tusschen 0 en ω

$$\wp\upsilon - e_2 > e_2 - \wp\alpha,$$

zoodat de integraal in het verloop tusschen 0 en ω steeds positief blijft. Maar hier kan weder dezelfde opmerking gemaakt worden als op p. 152: in meer ingewikkelde gevallen zou het niet doenlijk zijn langs dezen weg te bewijzen, dat $e_1 + p\alpha < 2\, e_2$ moet wezen, opdat

$$\frac{U_2\, Z_2}{5} - \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1}$$

tusschen 0 en ω van teeken wissele; hierboven werd dit door uitbreiding eener redeneering van Poincaré algemeen aangetoond.

Dat diezelfde vorm tusschen δ en ω *nooit meer dan éénmaal* van teeken kan wisselen, volgt ook aanstonds *voor elke waarde* van n uit hetgeen wij op p. 154 zagen, want U_2 en $U_{n,0}$ zijn geen van beide deelbaar zijn door $\sqrt{pv - e_1}$.

Uit hetgeen wij tot nu toe gezien hebben volgt, dat het aantal bifurcatievormen onder de ellipsoïden van Jacobi oneindig groot is, want bij elke waarde van den graad n is er één functie $U_{n,0}$ en hiermede komt telkens een oneven aantal bifurcatievormen overeen (p. 170). Waarschijnlijk is dit oneven aantal nooit grooter dan 1: „Bien que diverses raisons me fassent penser qu'il en est probablement ainsi, je n'ai pu encore le démontrer rigoureusement. Il y aurait surtout intérêt à établir cette proposition en ce qui concerne la fonction $U_{3,0}$ ..... Il faudrait pour cela des calculs qui seraient sans doute fort longs, mais qui ne seraient pas inextricables." [1]) Hoewel ook ons deze berekening niet gelukt is, zij het toch geoorloofd nog eens duidelijk aan te geven, wat bewezen moet worden.

Aan de vergelijking

$$\frac{U_1\, Z_1}{3} - \frac{U_2\, Z_2}{5} = \int_0^v \left[\frac{pv - e_1}{pu - e_1} - \frac{(pv - e_2)\,(pv - e_3)}{(pu - e_2)\,(pu - e_3)}\right] du = 0$$

[1]) Poincaré, p. 344.

voldoet voor elke verhouding van e_1, e_2, e_3 één argument υ_2 tusschen 0 en ω, en wel weten wij, dat υ_2 grooter dan $\frac{\omega}{2}$ moet zijn (p. 20); ook

$$\frac{U_1\,Z_1}{3}-\frac{U_{3,0}\,Z_{3,0}}{7}=\int_0^{\upsilon}\left[\frac{\mathrm{p}\upsilon-e_1}{\mathrm{p}u-e_1}-\frac{(\mathrm{p}\upsilon-e_3)\,(\mathrm{p}\upsilon-\mathrm{p}\alpha)^2}{(\mathrm{p}u-e_3)\,(\mathrm{p}u-\mathrm{p}\alpha)^2}\right]du=0,$$

waar

$$5\,\mathrm{p}\alpha=-e_3-\sqrt{6\,e_3{}^2-15\,e_1\,e_2}$$

is, heeft altijd één oplossing $\upsilon_{3,0}$ tusschen 0 en ω.

Voor $e_2=e_3$, of $\frac{e_2}{e_1}=-\frac{1}{2}$ is $\upsilon_2<\upsilon_{3,0}$,

voor $e_2=e_1$ . . . . is $\upsilon_2>\upsilon_{3,0}$;

er is dus een oneven aantal waarden van $\frac{e_2}{e_1}$, waarvoor $\upsilon_2=\upsilon_{3,0}$ wordt; ook weten wij reeds, dat zij niet aan elkander gelijk kunnen worden, zoolang $\frac{e_2}{e_1}\leqq\frac{2}{5}$ is. (p. 173).

Men zou dus moeten aantoonen, dat voor

$$\frac{2}{5}<\frac{e_2}{e_1}<1$$

met andere woorden voor

$$\frac{3}{4}<\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}<1$$

slechts éénmaal $\upsilon_2=\upsilon_{3,0}$ wordt. Zooals wij reeds zeiden is het ons niet gelukt dit bewijs te leveren; vermoedelijk werd dit niet vergemakkelijkt door de invoering van het elliptisch argument, en zou het ook hier beter zijn, zooals Meyer in een soortgelijke quaestie deed (vgl. p. 22), de beide assenverhoudingen als afzonderlijke veranderlijken te beschouwen. Intusschen kunnen wij met Poincaré als waarschijnlijk aannemen, dat aan de vergelijkingen

$$\frac{U_1 Z_1}{3} = \frac{U_2 Z_2}{5} = \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7} \quad \ldots\ldots\ldots (13')$$

slechts op ééne wijze wordt voldaan, en dat het evenzoo gesteld is met elke andere functie $U_{n,0}$.

De reden, waarom Poincaré het boven bedoelde bewijs voor $U_{3,0}$ bijzonder gewichtig achtte, en waarom wij ook op de voorgaande bladzijden dit geval uitvoeriger behandeld hebben is, dat de stabiliteitscoëfficiënt, die hiermede overeenkomt, eer van teeken wisselt dan voor elke grootere waarde van den graad der functie $U_{n,0}$ geschiedt; doorloopt men dus de ellipsoïden van Jacobi van de omwentelingsfiguur af tot aan de oneindig lange naald, dan ontmoet men het eerst den bifurcatievorm, die bepaald is door de vergelijkingen (13'). Want men kan aantoonen dat, als $k > p$ is,

$$\frac{U_{p,0} Z_{p,0}}{2p+1} - \frac{U_{k,0} Z_{k,0}}{2k+1} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

steeds positief blijft voor waarden van υ tusschen 0 en ω liggend; hieruit volgt dan, dat als

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_{p,0} Z_{p,0}}{2p+1}$$

van teeken wisselt,

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U_{k,0} Z_{k,0}}{2k+1}$$

nog positief is, dus de overeenkomstige stabiliteitscoëfficiënt is nog negatief. Maar volgens p. 150 is (14) altijd positief, terwijl υ van 0 tot ω aangroeit, wanneer $\frac{U_{k,0}}{U_{p,0}}$ hierbij steeds afneemt, of ook wanneer

$$U_{p,0}\, U''_{k,0} - U_{k,0}\, U''_{p,0} =$$
$$= U_{k,0}\, U_{p,0}\, [\{ k(k+1) - p(p+1) \} \mathrm{p}\upsilon + B_{k,0} - B_{p,0}],$$

waar de accenten weder afgeleiden naar υ aanwijzen, geen wortel heeft tusschen 0 en ω. Nu is het eerste lid dezer laatste vergelijking de afgeleide van

$$U_{p,0}\, U'_{k,0} - U_{k,0}\, U'_{p,0},$$

hetgeen voor $\upsilon = \omega''$ en voor $\upsilon = \omega$ verdwijnt (vgl. p. 144); het tweede lid van diezelfde vergelijking heeft dus een wortel tusschen ω'' en ω', maar in dat verloop worden $U_{k,0}$ en $U_{p,0}$ niet gelijk aan nul; derhalve moet

$$[k(k+1) - p(p+1)]\, \mathrm{p}u + B_{k,0} - B_{p,0}$$

tusschen ω'' en ω' een nulpunt bezitten, en daaruit volgt onmiddellijk, dat deze uitdrukking geen wortel kan hebben tusschen 0 en ω. Blijkens hetgeen wij zooeven gezien hebben, leidt men hieruit af, dat (14) niet van teeken wisselt, terwijl υ van 0 tot ω aangroeit, maar omdat wij ondersteld hebben, dat $k > p$ is, heeft men voor kleine waarden van υ (vgl. p. 151)

$$\frac{U_{p,0}\, Z_{p,0}}{2p+1} - \frac{U_{k,0}\, Z_{k,0}}{2k+1} = \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2k+1}\right)\delta > 0,$$

derhalve blijft die uitdrukking positief, en is onder de stabiliteitscoëfficiënten met $U_{n,0}$, $(n > 2)$ overeenkomend, die welke

$$\frac{U_1\, Z_1}{3} - \frac{U_{3,0}\, Z_{3,0}}{7}$$

als factor bevat, de eerste, die van teeken wisselt.

Doch wij kunnen nu nog een ander besluit trekken. Wij hebben nl. gezien, dat

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7}$$

eerst van teeken wisselt, en derhalve aan de vergelijkingen (13′) slechts voldaan kan worden, wanneer $2 e_1 < 5 e_2$ is; a fortiori zal

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{k,0} Z_{k,0}}{2k+1} \quad (k > 3)$$

eerst van teeken wisselen, wanneer de verhouding e_1 en e_2 nog meer tot de eenheid nadert; derhalve heeft men onder de ellipsoïden van Jacobi geen enkelen bifurcatievorm, zoolang $e_1 \geqq \frac{5}{2} e_2$ is, m. a. w. zoolang $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \leqq \frac{3}{4}$ is.

Wanneer aan de hoeksnelheid ω_n een ellipsoïde van Jacobi beantwoordt, die een bifurcatievorm is, omdat

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1}$$

hier van teeken wisselt, heeft men voor de hoeksnelheid $\omega_n + \delta$ (waar δ oneindig klein is) naast de drieassige ellipsoïde een niet-ellipsoïdalen evenwichtsvorm S_n, bepaald door de vergelijking [1])

$$\zeta = A\, l\, V_{n,0} W_{n,0}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

waar ζ en l dezelfde beteekenis hebben als op p. 146 en 166, terwijl A een oneindig kleine constante is afhankelijk van δ (vgl. p. 167). Dit oppervlak heeft nog de drie symmetrievlakken der ellipsoïde, als n even is, terwijl het bij oneven waarde van n niet symmetrisch is t. o. v. de omwentelingsas. Want

---

[1]) Poincaré, p. 345.

nemen wij weder zooals vroeger de z-as als omwentelingsas der ellipsoïde en de x-as als langste as, dan wordt (zie p. 167)

$$x^2 = \frac{\tau^2 (\mathfrak{p}\upsilon - e_3)(\mathfrak{p}v - e_3)(\mathfrak{p}w - e_3)}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)},$$

$$y^2 = \frac{\tau^2 (\mathfrak{p}\upsilon - e_2)(\mathfrak{p}v - e_2)(e_2 - \mathfrak{p}w)}{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)},$$

$$z^2 = \frac{\tau^2 (\mathfrak{p}\upsilon - e_1)(e_1 - \mathfrak{p}v)(e_1 - \mathfrak{p}w)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}.$$

Nu bevat $V_{n,0}$ noch $\sqrt{e_1 - \mathfrak{p}v}$, noch $\sqrt{\mathfrak{p}v - e_2}$ als factor; $W_{n,0}$ is niet door $\sqrt{e_1 - \mathfrak{p}w}$ deelbaar en evenmin door $\sqrt{e_2 - \mathfrak{p}w}$; dus ζ verandert niet als één dezer vier wortelvormen, m. a. w. als y of z van teeken wisselt. Dus het xz-vlak en het xy-vlak zijn symmetrievlakken van het oppervlak S_n. Wanneer n even is, zoodat $V_{n,0}$ en $W_{n,0}$ als functiën van de eerste soort $\sqrt{\mathfrak{p}v - e_3}$ en $\sqrt{e_3 - \mathfrak{p}w}$ niet tot factor hebben, verandert ζ niet, als x van teeken wisselt; dan is derhalve ook het yz-vlak symmetrievlak. Maar als n oneven is, zoodat $V_{n,0}$ en $W_{n,0}$ functiën van de tweede soort zijn resp. door $\sqrt{\mathfrak{p}v - e_3}$ en door $\sqrt{\mathfrak{p}w - e_3}$ deelbaar, is S_n niet symmetrisch ten opzichte van de omwentelingsas.

Wel is het hier geleverde bewijs niet streng, omdat de vergelijking van S_n slechts bij benadering door (15) wordt voorgesteld; maar van een nauwkeuriger vergelijking uitgaande komt men tot hetzelfde resultaat: drie symmetrievlakken, als n even is, twee symmetrievlakken bij oneven waarde van n. [1])

Dit laatste geval doet zich dus o. a. voor bij de oppervlakken, die oneindig weinig verschillen van de ellipsoïde van Jacobi, waarvoor

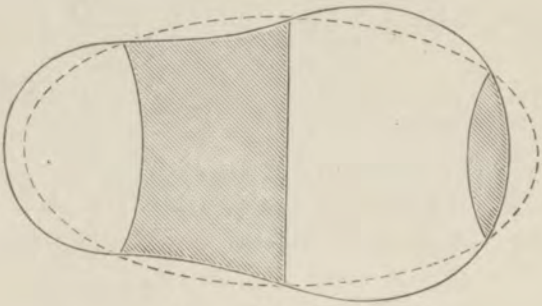
$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7}$$

---

[1]) Poincaré, p. 346.

verdwijnt. Wij laten hier de door Poincaré [1]) gegeven afbeelding volgen der projectie op een der symmetrievlakken van zulk een oppervlak en van de ellipsoïde waaruit het ontstaat; de schijnbare omtrek der ellipsoïde is door de stippellijn aangegeven, de arceeringen wijzen op het deel van het lichaam, dat binnen de ellipsoïde gelegen is.

Fig. 6.



Ten slotte blijft ons nog over de stabiliteit der ellipsoïden van Jacobi en der evenwichtsoppervlakken in de daarnaast bestaande reeksen S_n te bespreken. Poincaré zegt [2]), dat de stabiliteitscoëfficiënt overeenkomend met $R^1_{0,2}$ — zoo noemt hij de functie van Lamé, die op p. 159 door $U^1_{2,0}$ werd voorgesteld — bij de ellipsoïde van Jacobi altijd positief is. Terwijl hij deze stelling niet nader toelicht, en wij uit het voorgaande slechts weten, dat $U^1_{2,0}$ voor $e_2 = e_3$ samenvalt met een andere functie van Lamé, die wij op p. 159 voor een oogenblik $U^3_{2,1}$ noemden, dat verder blijkens de vergelijking

$$\int_0^{\upsilon} \left[\frac{p\upsilon - e_1}{pu - e_1} - \frac{(p\upsilon - e_2)(p\upsilon - e_3)}{(pu - e_2)(pu - e_3)}\right] du = 0,$$

---

[1]) p. 347.

[2]) p. 365.

de stabiliteitscoëfficiënt bij $U^3_{2,1}$ passend voor alle ellipsoïden van Jacobi gelijk blijft aan nul (vgl. p. 168), zal men allicht het bewijs niet overtollig achten, dat bij deze evenwichtsvormen altijd

$$\frac{U_1 Z_1}{3} - \frac{U^1_{2,0} Z^1_{2,0}}{5} = \int_0^{\upsilon} \left[\frac{p\upsilon - e_1}{pu - e_1} - \frac{\left(p\upsilon + \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)^2}{\left(pu + \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)^2} \right] du$$

derhalve ook

$$\int_0^{\upsilon} \left[\frac{(p\upsilon - e_2)(p\upsilon - e_3)}{(pu - e_2)(pu - e_3)} - \frac{\left(p\upsilon + \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)^2}{\left(pu + \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right)^2} \right] du$$

negatief is. Noemen wij kortheidshalve de twee functiën U van Lamé, die in den laatsten vorm voorkomen U_p en U_q, dan zal

$$U_p Z_p - U_q Z_q$$

steeds negatief zijn voor $0 < \upsilon < \omega$, wanneer $\frac{d}{d\upsilon} \frac{U_q}{U_p}$ of ook

$$U'_q U_p - U_q U'_p$$

tusschen die grenzen positief is (p. 150); welnu, deze grootheid verdwijnt voor $\upsilon = \omega$ (p. 155) en is voor waarden van υ, die kleiner zijn dan ω, steeds afnemend, daar hare afgeleide

$$U''_q U_p - U_q U''_p = (B_q - B_p) U_p U_q,$$

welker teeken door dat van

$$B_q - B_p = -\sqrt{3 g_2} + 3e_1$$

wordt bepaald, voor $e_2 > e_3$ altijd negatief is. Bij de ellipsoïde van Jacobi is er dus behalve den stabiliteitscoëfficiënt, die gelijk is aan nul, ook altijd één, die positief is. Wanneer dus de vroeger gegeven regel (p. 141): „voor de saeculaire stabiliteit is noodig en voldoende, dat alle stabiliteitscoëfficiënten negatief zijn", hier onveranderd doorging, zou de ellipsoïde van Jacobi nooit saeculaire stabiliteit bezitten. Maar die stelling gold slechts[1]), „ingeval de arbeid der passieve weerstanden voor alle mogelijke bewegingen altijd negatief was, zonder ooit gelijk aan nul te wezen". Bij de ellipsoïde van Jacobi echter zijn er, terwijl het zwaartepunt vast wordt ondersteld, nog drie verplaatsingen, die geen passieven weerstand met zich brengen, nl. de wentelingen om de drie assen. Houdt men hiermede rekening, dan blijkt, zooals Poincaré [2]) ten deele met verwijzing naar Thomson en Tait[3]) uitvoerig bewijst — wij resumeeren hier slechts zoo kort mogelijk zijne conclusies — dat dientengevolge in de stabiliteitscoëfficiënten behoorend bij de functiën van Lamé van tweeden graad en eerste soort, dus bij de twee functiën, waarvan op de vorige bladzijde sprake was, een correctie moet worden aangebracht. En wel is deze correctie van dien aard, dat alle ellipsoïden van Jacobi saeculaire stabiliteit blijken te bezitten, wanneer men de vloeistofmassa onderwerpt aan de voorwaarde, dat alleen „harmonische bewegingen van de tweede orde" [4]) mogelijk zijn, m. a. w. *in de onderstelling dat het oppervlak ellipsoïdaal moet blijven.* Is echter die beperkende voorwaarde niet gesteld, dan moet er stabiliteit zijn met betrekking tot de harmonische bewegingen van elke orde; nu blijft de ellipsoïde van Jacobi stabiel met betrekking tot de bewegingen van de n^{de} orde, totdat

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{n,0} Z_{n,0}}{2n+1}$$

---

[1]) Poincaré, p. 296 en 365.

[2]) p. 365—370.

[3]) *Treatise on natural philosophy*, new ed., § 778''; vgl. ook Lamb, *Hydrodynamics*, p. 596.

[4]) „Harmonische bewegingen van de n^{de} orde" zijn oneindig kleine trillingen der vloeistofmassa, zoodanig dat de potentiaal aan het vrije oppervlak door een som van functiën van Lamé van den n^{den} graad kan worden voorgesteld. Vgl. Poincaré, p. 363.

van teeken wisselt; dit geschiedt het eerst voor $n = 3$ (p. 179). Wij kunnen dus besluiten, dat de ellipsoïden van Jacobi, waarvoor

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7}$$

positief is $\left(\text{dus is elk geval die waarbij } \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \leqq \frac{3}{4} \text{ is} \right)$ saeculair stabiel zijn, terwijl de overige evenwichtsvormen dezer reeks slechts de saeculaire stabiliteit bezitten, in geval de vloeistofmassa ellipsoïdaal moet blijven [1]); zoo zijn ook de ellipsoïden van d'Alembert slechts saeculair stabiel, wanneer de vloeistof den vorm eener omwentelingsellipsoïde moet behouden (vgl. p. 160).

Bij de ellipsoïde van Jacobi, die evenwichtsvorm kan zijn eener vloeistofmassa met de snelheid en gemiddelde dichtheid der Aarde wentelend, heeft men (vgl. p. 75)

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = 0{,}999\,998\,;$$

er is dus wel geen twijfel of hier is

$$\frac{U_2 Z_2}{5} - \frac{U_{3,0} Z_{3,0}}{7}$$

negatief, zoodat deze evenwichtsvorm hoogstwaarschijnlijk slechts saeculaire stabiliteit bezit, wanneer de vloeistofmassa ellipsoïdaal moet blijven.

Omtrent de evenwichtsfiguren in de reeksen $S_3, S_4, \ldots S_n, \ldots$, die naast de ellipsoïden van Jacobi bestaan, leert het beginsel der wisseling van de stabiliteit (p. 141), dat de figuren S_3, voor zooverre zij weinig van de ellipsoïde verschillen, saecu-

[1]) Wel zijn er waarschijnlijk zeer uitgerekte ellipsoïden, die de gewone stabiliteit hebben, en dit is zeker ook het geval bij eenige zeer afgeplatte omwentelingsellipsoïden. Poincaré, p. 377.

laire stabiliteit hebben, terwijl alle vormen $S_4, \ldots. S_n, \ldots.$, die niet veel van de respectieve bifurcatievormen verschillen, instabiel zijn, zoodra er in de vloeistofmassa eenige moleculaire wrijving aanwezig is.

In dit overzicht der voortreffelijke verhandeling van Poincaré bleef nog menig belangrijk punt onbesproken........

Sed vereor tardae causa fuisse morae.

Sluiten wij liever met den wensch, dat Poincaré, *thans* hoogleeraar der *Mécanique céleste* en *Astronomie mathématique*, het vraagstuk der evenwichtsvormen van een wentelende vloeistofmassa nog eens ter hand neme en onze kennis van dit belangwekkend deel der hoogere wiskunde andermaal door even schoone resultaten vermeerdere.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Wanneer men de halve assen der ellipsoïde van Jacobi door a, b en c voorstelt, en deze reeks van evenwichtsvormen doorloopt, zoodat $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ van 0 tot 1 aangroeit, ontmoet men een oneindig groot aantal bifurcatievormen, maar men zal geen dezer figuren aantreffen, zoolang $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2} \leqq \frac{3}{4}$ is.

II.

De drieassige ellipsoïde, die evenwichtsvorm kan zijn eener met de snelheid en gemiddelde dichtheid der Aarde wentelende vloeistofmassa, bezit hoogstwaarschijnlijk niet de saeculaire stabiliteit (tenzij de vloeistofmassa aan de bijzondere voorwaarde onderworpen is, dat zij de gedaante eener ellipsoïde moet behouden).

III.

Onder de drieassige ellipsoïden, die evenwichtsvormen zijn eener vloeistofmassa met de snelheid en gemiddelde dichtheid der Maan wentelend en door de Aarde aangetrokken, ligt voor de zeer uitgerekte figuur, welker langste as naar de aarde gericht is, de verhouding dezer as tot de omwentelingsas tusschen 896 en 897.

IV.

Terwijl men onder de ellipsoïden van Jacobi voor elken graad n (grooter dan twee) der functiën van Lamé waarschijnlijk slechts één bifurcatievorm heeft, zijn er naast de omwentelingsellipsoïden voor elke oneven waarde van n, grooter dan 1, $\frac{n+1}{2}$ reeksen van niet-ellipsoïdale evenwichtsfiguren; voor elke even waarde van n zijn er $\frac{n}{2}+1$ reeksen van andere lichamen, waaronder nu telkens één reeks is, waarin omwentelingslichamen voorkomen.

V.

De evenwichtsvorm, die tot de ellipsoïden van Maclaurin en van d'Alembert behoort, is niet, zooals Poincaré, Acta Mathem., VII, p. 329, zegt, uitsluitend grensvorm, maar tevens bifurcatievorm met een reeks van niet-ellipsoïdale evenwichtsfiguren, die, voor zooverre zij weinig van de ellipsoïde verschillen, omwentelingslichamen zijn.

VI.

De omwentelingsellipsoïde van d'Alembert wordt soms ten onrechte ellipsoïde van Laplace genoemd (zoo b. v. door Matthiessen, Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 291), maar veelal, wat nog minder juist is, met de ellipsoïde van Maclaurin verward (b. v. in *Index du Répertoire Bibliographique des sciences mathématiques*, **U 6 b**).

VII.

De tabel der assenverhoudingen bij de ellipsoïde van Jacobi door Plana medegedeeld (Astron. Nachr., XXXVI, c. 169 en 170) en overgenomen in Fortschritte der Physik, 1853, p. 55, alsook door Todhunter, *History of the theories of attraction*, II, p. 444, is geheel onvertrouwbaar.

VIII.

Kostka verbeterde met behulp van zeer goede benaderingsformules (Berliner Monatsberichte, 1870, p. 123) de resultaten van Meyer (Crelle's Journal, XXIV, p. 59) voor de assenverhoudingen der ellipsoïde van Jacobi met de snelheid en gemiddelde dichtheid der Aarde wentelend, nadat zij reeds buiten zijn weten door anderen verbeterd waren; maar zijne resultaten zijn niet volkomen vertrouwbaar, omdat hij geheel onzekere decimalen opgeeft.

IX.

De wijze waarop Matthiessen (Zeitschr. Math. Phys., XVI, p. 303 en XXV, p. 84) van reeksontwikkelingen gebruik maakt om de waarde van elliptische integralen te bepalen, is zeer onnauwkeurig en verdient geen navolging.

X.

Prof. Darwin, die onafhankelijk van degenen, die vroeger hetzelfde vraagstuk bewerkten, benaderingsformules afleidde voor zeer uitgerekte ellipsoïden van Jacobi (Proc. Roy. Soc., XLI, p. 326), geeft niet voldoende rekenschap van de methode van verwaarloozing, welke hij voorstelt.

XI.

De kinetische energie der wentelende beweging van de ellipsoïde van Jacobi bereikt een grootste waarde niet, zooals Darwin zeide, „when the length of the ellipsoid is about five times its diameter", (l. c., p. 334) maar wanneer de verhouding der langste en kortste as omtrent $9\frac{1}{2}$ is.

XII.

Het is te betreuren, dat Poincaré zijne beschouwingen in het zevende deel der Acta Mathematica niet heeft uitgebreid tot de evenwichtsvormen eener wentelende (en niet wentelende) homogene vloeistofmassa, die door een verwijderd punt wordt aangetrokken, en dat Tisserand (*Mécan. cél.*, II) deze evenwichtsfiguren niet uitvoeriger behandeld heeft.

XIII.

De behandeling der elliptische functiën volgens Weierstrass en Halphen levert onmiskenbare voordeelen op.

XIV.

Hoewel de „Revue semestrielle des publications mathématiques" moeilijk aan alle eischen kan voldoen, bewijst zij toch reeds groote diensten door de beoefenaars der wiskunde spoedig in kennis te stellen van hetgeen door anderen gedaan is.

XV.

$$\int \frac{5\,x + 3}{\sqrt{X}}\,dx = \log \frac{x^3 + 4\,x^2 + 3\,x + (x+2)\sqrt{X}}{x^3 + 4\,x^2 + 3\,x - (x+2)\sqrt{X}} + \mathrm{C},$$

wanneer men heeft

$$X = x^4 + 4\,x^3 + 2\,x^2 + 1.$$

XVI.

In de beide formules (80,2°) en (80,3°) bij Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, I, p. 447,

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 e_2 + \frac{1}{3} = -16 \sum \frac{p\,(-q)^p}{1+(-q)^p},$$

$$p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 e_3 + \frac{1}{3} = -16 \sum \frac{p\,q^p}{1+q^p},$$

moet de factor 16 in 8 veranderd worden.

XVII.

Bij de studie der algebraïsche functiën verdient het aanbeveling de Riemann'sche oppervlakken te gebruiken.

XVIII.

De gebruikelijke afleiding van de grenswaarde, waartoe de bolfunctie P_n (cos ϑ) zou naderen voor $n = \infty$ (zie b. v. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Aufl., I, p. 175), munt niet uit door groote strengheid.

XIX.

Te recht zegt de Freycinet (*Essais sur la philosophie des sciences*, p. 24): „Faute d'une attention suffisante on se laisse quelquefois aller à une illusion, contre laquelle cependant les philosophes ont en soin de mettre en garde: on assimile l'infini avec l'indéfini. Le langage mathématique y prête malheureusement." Met denzelfden schrijver (p. 27) kan men de uitdrukking, dat twee evenwijdige lijnen elkander snijden op oneindigen afstand „un abus de langage" noemen.

XX.

„J'estime aussi peu fondé de conclure des lois dynamiques contre la liberté, qu'il le serait de conclure de la liberté contre les lois dynamiques." (de Freycinet, l. c., p. 254).

XXI.

Aan de meetkunde van meer dan drie afmetingen ligt geen objectieve realiteit ten grondslag.

XXII.

Wanneer de deeltjes eener homogene vloeistofmassa elkander aantrekken volgens de wet van Newton, en daarenboven onderworpen zijn aan een kracht, welker componenten volgens de (vaste) assen door αx, βy en γz worden voorgesteld, terwijl α, β en γ zoo gekozen zijn, dat de ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1$$

evenwichtsvorm der massa is, worden volgens Poincaré (Acta Mathem., VII, p. 350) de perioden der oneindig kleine trillingen van de vloeistofmassa bepaald door de vergelijking

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} R = -4\pi\xi \frac{dR}{d\rho} \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)} \left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right);$$

dit moet veranderd worden in

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} R = -\xi \frac{dR}{d\rho} \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)} \left(gl - \frac{4\pi RS}{2n+1}\right).$$

XXIII.

Men mag nog steeds hopen, dat de functiën van Lamé bij de toepassing op de ellipsoïde nieuwe resultaten zullen opleveren.

XXIV.

Reeds Suarez (*Disput. Metaph.* XVIII, s. 8, n. 36) heeft „ex experimentis et rationibus" afgeleid, dat de magneet niet „immediate in distans" zijne werking uitoefent, maar „non nisi per medium, alterando scilicet illud usque ad ferrum". (Zie ook Conimbric., in VII Phys., C. II, q. 1, a. 3 in fine).

XXV.

Zeer ten onrechte zegt de Freycinet (*Essais sur la philosophie des sciences,* p. 29): „l'Espace est infini ou il n'est pas."

XXVI.

Het is wenschelijk in het eindexamen der Gymnasia van aanstaande medici minder boldriehoeksmeting te eischen, en voor aanstaande juristen de stereometrie ten deele te vervangen door de kennis van intrest op intrest-rekening.