

WRIJVINGSVERSCHIJNSELEN  
VAN GASSEN BIJ LAGE DRUK



W. P. J. LIGNAC

BIBLIOTHEEK  
GORLAEUS LABORATORIA  
Postbus 9502  
2300 RA LEIDEN  
T. 071 - 527 43 66 / 67

Universiteit Leiden



1 481 181 9

15 OCT 1949

# WRIJVINGSVERSCHIJNSELEN VAN GASSEN BIJ LAGE DRUK



PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN  
DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS-  
EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-  
UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN  
DE RECTOR-MAGNIFICUS Dr C. C. BERG,  
HOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER  
LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, TEGEN  
DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT  
DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VER-  
DEDIGEN OP WOENSDAG 6 JULI 1949  
TE 14 UUR

DOOR

WILLEM PIETER JACOBUS LIGNAC  
GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE



DRUK: EXCELSIORS FOTO-OFFSET, 'S-GRAVENHAGE

*kast dissertaties*

Promotor

PROF. DR. H. A. KRAMERS





# INHOUD

blz.

Inleiding

1

Hoofdstuk I

A	DE HYDRODYNAMISCHE TOESTAND	
§ 1	Definitie van de viscositeit $\eta$ . . . . .	5
§ 2	Verskillende resultaten van oude berekeningen. . . . .	6
§ 3	Afwijking van de maxwellverdeling. . . . .	6
§ 4	De vergelijking van Boltzmann . . . . .	7
§ 5	Invoering van het symbool $D\bar{v}_x \bar{v}_y$ . . . . .	8
§ 6	Nadere beschouwing der botsingen. . . . .	8
§ 7	De invloed van één botsing op $\Sigma v_x v_y$ . . . . .	9
§ 8	De bepaling van $D\bar{v}_x \bar{v}_y$ . . . . .	9
§ 9	De formule van Chapman. . . . .	10
§ 10	Strooiingscoëfficiënt en potentiaalveld . . . . .	11
§ 11	Toepassing op Chapman's botsingsdoorsnee voor harde bollen	12
§ 12	Quantummechanica . . . . .	12
B	DE MOLECULAIRE TOESTAND . . . . .	13

Hoofdstuk II

A	HET GEBIED VAN DE GLIJDING	
§ 1	Definitie van de glijdingscoëfficiënt $\xi$ . . . . .	14
§ 2	Schatting van de orde van grootte van $\xi$ . . . . .	15
§ 3	Glijding langs twee evenwijdige wanden . . . . .	17
§ 4	Glijding langs de wand van een buis . . . . .	18
B	HET GEBIED DER EERSTE BOTSINGEN	
§ 1	Algemene opzet . . . . .	19
§ 2	Twee concentrische bollen (algemeen geval). . . . .	20
§ 3	Evenwijdige vlakke platen. . . . .	21
§ 4	Een bewegende bol in de ruimte	
	a) theorie . . . . .	23
	b) experiment . . . . .	24
§ 5	Twee concentrische bollen (numeriek voorbeeld),	
	a) theorie . . . . .	25
	b) experiment . . . . .	26
§ 6	Nabetrachting . . . . .	27

Hoofdstuk III

OVERZICHT VAN METINGEN, WAARUIT DE GLIJDINGSCOEFFICIENT  $\xi$   
BEREKEND KAN WORDEN

§ 1	De verschillende methoden . . . . .	28
§ 2	Geschiedenis. . . . .	28
§ 3	De vallende bol . . . . .	30
§ 4	a) De stroming door een buis. . . . .	32
	b) De stroming door een spleet. . . . .	33

	blz.
§ 5 De thermomoleculaire druk. . . . .	34
§ 6 De draaiende cylinder. . . . .	34
§ 7 De schommelende schijf. . . . .	36
§ 8 Overzicht der metingen . . . . .	36
§ 9 Gevolgtrekkingen . . . . .	42

Hoofdstuk IV

DE BEWEGING VAN EEN SCHOMMELENDE SCHIJF IN EEN GAS  
TUSSEN TWEE EVENWIJDIGE VLAKE PLATEN

§ 1 Het model voor de gasstromingen. . . . .	43
§ 2 De bewegingsvergelijking voor de schijf. . . . .	43
§ 3 De bewegingsvergelijking voor de gaslagen . . . . .	45

Hoofdstuk V

METINGEN MET EEN SCHOMMELENDE SCHIJF IN GASSEN BIJ  
KAMERTEMPERATUUR

§ 1 De begrenzende voorwaarden voor de afmetingen van het toestel. . . . .	47
§ 2 De onderdelen en hun bevestiging . . . . .	49
§ 3 Motivering van de gebezigde constructie. . . . .	51
§ 4 De afmetingen van het apparaat . . . . .	51
§ 5 De apparatuur voor het regelen van de druk . . . . .	51
§ 6 Het meten van het logaritmisch decrement $\lambda$ . . . . .	53
§ 7 Rekenschema. . . . .	54
§ 8 Het meten van de trillingstijd $\tau_0$ in vacuo . . . . .	55
§ 9 De berekening van $\tau$ . . . . .	55
§ 10 Het meten van $\lambda_0$ en $\lambda'_\infty - \lambda_0$ . . . . .	56
§ 11 De bepaling van $k$ en $S_1$ . . . . .	56
§ 12 Waarnemingen en resultaten . . . . .	57
§ 13 Contrôle . . . . .	70
§ 14 De nauwkeurigheid . . . . .	71
§ 15 Bespreking der resultaten. . . . .	72

\* \*  
\*

## INLEIDING

In de tweede helft van de negentiende eeuw hebben de baanbrekende werken van R. Clausius<sup>1)</sup>, J. C. Maxwell<sup>2)</sup>, L. Boltzmann<sup>3)</sup>, J. Stefan<sup>4)</sup>, O. E. Meyer<sup>5)</sup> en vele anderen ons vertrouwen doen groeien in de mogelijkheid om vele verschijnselen aan gassen bevreemdend te beschrijven met behulp van de kinetische gastheorie. Er bood zich een schier onbeperkt gebied van verschijnselen aan, die in het licht van deze theorie beschouwd konden worden en daarmee dus ook een groot aantal mogelijkheden om de juistheid van de daarin voorgestelde opvattingen te toetsen.

Vooraf met het oog op de aanschouwelijkheid heeft men aanvankelijk grote betekenis gehecht aan het invoeren van een grootte  $l$ , de gemiddelde vrije weglengte der moleculen. In de veronderstelling, dat de snelheden der moleculen in een gas verdeeld zijn op de wijze, zoals die wordt weergegeven door de verdelingsformule van Maxwell voor een gas in rust, kon men door een elementaire berekening de transportverschijnselen in een eenvoudige betrekking brengen met de gemiddelde vrije weglengte. Niet gelukte het echter de juiste waarde te berekenen van de wijze waarop de viscositeit  $\eta$  van de temperatuur  $T$  afhangt. Volgens de elementaire berekening is  $\eta$  evenredig met de gemiddelde snelheid  $\bar{v}$  van de moleculen en dus evenredig met  $T^{\frac{1}{2}}$ . De experimenten leveren machten van  $T$ , welke in de buurt van 1 liggen.

Reeds in 1866 deed Maxwell<sup>2)</sup> de grote stap, die de theoretische onderzoeken later in nieuwe banen zou leiden. Hij verving de moleculen, welke aanvankelijk als bolletjes van zekere afmeting beschouwd waren, door mathematische punten waaraan krachtvelden waren toegevoegd. Gelijk reeds vaker in de geschiedenis gebleken is, zijn ook toen de gunstige gevolgen niet uitgebleven van het vervangen der aan de eenvoudige voorstelling ontleende begrippen (hier „doorsnee" en „vrije weglengte"), door een meer abstracte formulering.

Verder zag Maxwell in, dat de toepassing van de verdelingswet voor een gas in rust op een niet-uniforme gastoestand slechts een benadering is. Het probleem werd daardoor herleid tot het zoeken naar de juiste verdelingsfunctie.

Het transport van een willekeurige moleculaire grootte  $X$  door een vierkante centimeter van een vlak, stelde hij voor door de vorm  $\sum^s n_s \cdot v_s X$ . Het totale aantal moleculen in ieder ruimte-element denkt men zich hierbij verdeeld in  $s$  groepen. In elke groep hebben de moleculen ongeveer dezelfde snelheid  $v_s$  in een richting loodrecht op het beschouwde vlak. De sommatie  $\sum^s n_s \cdot v_s X$  dient zich uit te strekken over alle moleculen, die zich ter plaatse van het vlakje bevinden.

Beschikt men nu over de juiste uitdrukking voor de snelheidsverdeling in de heersende niet-uniforme toestand, dan heeft men daarmee alle transportproblemen in een continu \*) gas onafhankelijk van de gemiddelde vrije

\*) Voortaan zal ik kortheidshalve spreken van een continu gas, wanneer een gas in de hydrodynamische toestand (gemiddelde vrije weglengte  $l$  verwaarloosbaar, vergeleken bij de afmetingen  $D$  van het vat) bedoeld wordt.



weglenge volledig opgelost. Uit symmetrie-overwegingen valt in te zien, dat bij een zuivere maxwellverdeling het transport feitelijk tot nul zou gereduceerd worden en dat het dus juist de afwijking van de maxwellverdeling is, welke bij deze wijze van behandelen verantwoordelijk gesteld moet worden voor de overdracht van impuls, energie of massa.

De wiskundige moeilijkheden, waarop men bij het zoeken naar de werkelijke snelheidsverdeling stuitte, waren aanvankelijk vrijwel onoverkomelijk. Maxwell ontdekte in 1879, dat de onbekende verdelingsfunctie geheel uit zijn berekening verdween, indien hij veronderstellen zou, dat de puntvormige moleculen elkaar zouden afstoten met een kracht omgekeerd evenredig met de vijfde macht van de afstand. Door deze merkwaardige kunstgreep kon hij het probleem exact oplossen, hetgeen leidde tot de conclusie, dat  $\gamma$  evenredig met  $T$  zou zijn.

Voor het geval van een willekeurig krachtenveld heeft Boltzmann het probleem van de verdelingsfunctie aangepakt, maar hij kwam niet tot vruchtbare resultaten. Pas Chapman<sup>6)</sup> en Enskog<sup>7)</sup> werkten met succes onafhankelijk van elkaar twee mathematisch verschillende methoden uit waarin met willekeurige centrale krachten tussen eenatomige moleculen (het geval der harde bollen inbegrepen) rekening kon worden gehouden.

In hoofdstuk I is naar het voorbeeld, dat Kennard<sup>8)</sup> voor de warmtegeleiding uitwerkte, een beknopt overzicht gegeven van de eerste benadering van Chapman en Enskog's uitdrukking voor de viscositeit.

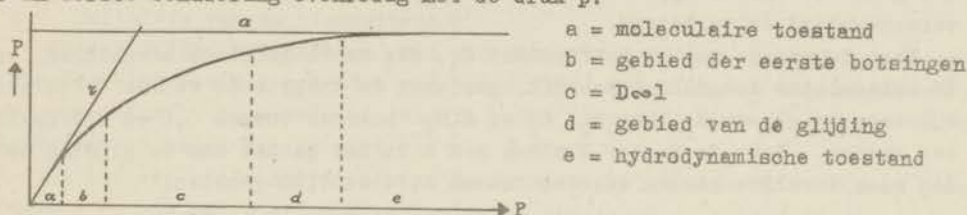
Voor zover de transportverschijnselen worden nagegaan voor een continu gas in een zo grote ruimte, dat de invloed van de wanden geheel buiten beschouwing blijft, heeft men de sommatie  $\sum^s n_{s,1} v_s X$  dus kunnen uitvoeren.

Hiernaast wil ik het geval beschouwen, waarbij juist de wand het verschijnsel geheel beheerst. Dit is het geval in de moleculaire toestand, waaronder we zullen verstaan de toestand in een gas, waarvan de moleculen van wand tot wand lopen zonder onderling te botsen. Ook in dit grensgeval blijkt het mogelijk te zijn een mathematische uitdrukking te vinden, die de transportverschijnselen weergeeft, wanneer we onze redenering baseren op de volgende veronderstellingen:

1. De enige wisselwerking die er bestaat, is die tussen gasmoleculen en wand
2. Het resultaat van die wisselwerking is, dat de richtingen van de moleculen, die de wand verlaten, verdeeld zijn volgens de cosinuswet
3. De snelheidsverdeling van de teruggekaatste moleculen wordt bepaald door de verdelingsfunctie van Maxwell, behorend bij de temperatuur en de snelheid van de wand.

In hoofdstuk II zal ik in het bijzonder nagaan enerzijds, hoe de aanwezigheid van een wand de vergelijking voor het impulstransport voor de Maxwell-Chapman-toestand van een gas zal beïnvloeden, anderzijds, hoe het optreden van botsingen tussen de moleculen onderling de vergelijking in de moleculaire toestand zal wijzigen. In dit omvangrijke probleem zal ik mij beperken tot de gebieden, waarin de allereerste afwijkingen van de twee besproken grenstoestanden optreden.

Denken we aan een verschijnsel, waarbij een weerstand  $P$  wordt veroorzaakt door de aanwezigheid van een gas in het toestel, dan nadert die weerstand tot een constante waarde bij hoge druk. In de moleculaire toestand is  $P$  in eerste benadering evenredig met de druk  $p$ .



figuur 1

In hoofdstuk II worden formules besproken, die in eerste benadering beschrijven hoe de grafiek afwijkt van de asymptoot a (gebied van de glijding) en van de raaklijn r door de oorsprong (gebied van de eerste botsingen).

Uit de experimenten blijkt, dat, als men in het gebied der glijding de gemiddelde snelheid  $u$  van de moleculen in een gas, dat met een constante snelheidsgradiënt  $\frac{\delta u}{\delta x}$  langs een wand stroomt, lineair extrapoleert tot op de wand, deze snelheid niet nadert tot nul, maar tot een waarde  $u_0 = \zeta \frac{\delta u}{\delta x}$ . Hierin heet  $\zeta$  de glijdingscoëfficiënt, waarvan de waarde van de zelfde orde van grootte is als de gemiddelde vrije weglengte  $l$ . We schrijven  $\zeta = k l$ , waarin  $k$  een numerieke constante is. De theorie van de preciese waarde van de glijdingscoëfficiënt is uitermate moeilijk en is zelfs in het eenvoudigste geval (geldigheid van de cosinuswet bij terugkaatsing) nog niet op bevredigende wijze ontwikkeld, al is zij, met Maxwell (1879) als eerste<sup>10)</sup>, meermalen ter sprake gekomen.

Een behandeling van het gebied der eerste botsingen, is het eerst door Sophus Weber<sup>68)</sup> aangesneden (1939) en in een later artikel<sup>18)</sup> nader uitgewerkt. Voor dit gebied wordt in hoofdstuk II B, de methode van Weber volgend, een benaderende theorie gegeven voor enige speciale gevallen, deels in verband met de in hoofdstuk IV en V beschreven metingen van mijzelf en deels in verband met de weinige gegevens uit de literatuur, welke laatste dadelijk achter de theorie vermeld zullen worden.

De nieuwe proeven waren oorspronkelijk bedoeld om de hoeveelheid experimentele gegevens in het gebied der eerste botsingen te vergroten. Het toestel daarvoor moest een bijzonder grote gevoeligheid hebben. Dat stelde mij tevens in staat met grote nauwkeurigheid het gehele gebied tussen de extreme gevallen en daarmee dat van de glijding door te meten.

Wat het gebied van de eerste botsingen betreft bleek het mogelijk de theorie, die voor dit geval op de door Sophus Weber aangegeven grondslag kon worden uitgewerkt, te controleren.

Bij de beschrijving van het toestel zal blijken, dat het zó geconstrueerd is, dat het ook geschikt is voor metingen bij zeer lage temperatuur. Na het voltooiën van de proeven bij kamertemperatuur is het toestel echter ernstig beschadigd, terwijl de oorlog verhinderd heeft de metingen met een nieuw instrument voort te zetten. De bedoelde proeven werden verricht met een in

zijn vlak heen en weer draaiende schijf tussen twee stilstaande platen evenwijdig daaraan. Ter inleiding hiervan werd hoofdstuk IV gewijd aan de theorie over het verband tussen de demping van de schommeling en de viscositeit van het gas. De afleiding, welke Maxwell voor dit verband geeft, werd vereenvoudigd en verbeterd.

Voor de waarde van de coëfficiënt  $S_1$ , die de betreffende afwijkingen van de moleculaire toestand beschrijft, verlangt de theorie de waarde 0,71, terwijl voor de gassen  $H_2$ , He,  $N_2$ ,  $O_2$  en  $C_2H_4$  waarden tussen 0,6 en 0,7 gevonden werden. Voor de factor  $k$  uit  $\zeta = k l$  in het gebied van de glijding werden voor dezelfde gassen waarden tussen 1,14 en 1,20 gemeten.



## HOOFDSTUK I

### A. DE HYDRODYNAMISCHE TOESTAND

#### § 1 Definitie van de viscositeit $\eta$

Steeds blijkt het bestaan van een snelheidsgradiënt in een gas aanleiding te zijn tot het optreden van tangentiële krachten, de zogenaamde wrijvingskrachten. De waarde hiervan is recht evenredig met de grootte van de gradiënt en hangt van de aard van het gas af.

Om tot een goede definitie van de evenredigheidsfactor  $\eta$  te kunnen komen moeten we ons een stationnaire laminaire gasstroming voorstellen, waarvan de translatiesnelheid van punt tot punt in waarde verschilt. Alleen in de richting van de snelheid blijft deze constant, terwijl in een richting loodrecht daarop het grootste verval, de gradiënt, optreedt. In deze richting kiezen wij in het vervolg de x-as van een Cartesisch coördinatenstelsel, positief geteld in de richting van toenemende snelheid. De positieve y-as zullen we steeds in de richting van de snelheid nemen. Loodrecht op de gradiënt beschouwen we nu een vlak. Op het gas aan de kant van de grotere snelheid zal nu door het langzamer bewegende gas aan de andere zijde een remmende kracht P op iedere vierkante centimeter van het vlak worden uitgeoefend. Schrijven we nu

$$-P_{\infty} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

dan heet  $\eta$  de coëfficiënt van inwendige wrijving of kortweg de viscositeit, wanneer u de gemiddelde snelheid van alle deeltjes in een laag is. Met de toevoeging van de index  $\infty$  wordt aangeduid, dat de beschouwing geldt voor hoge druk. Daar echter van een voortdurend werkende kracht alleen sprake kan zijn in een continu medium, behoeft bovenstaande definitie een nadere interpretatie, wanneer we ons het gas denken te zijn samengesteld uit een groot aantal moleculen, die allerlei verschillende snelheden hebben. Het is dan beter te spreken van de hoeveelheid tangentiële impuls  $P_{\infty}$ , welke gemiddeld per seconde door een vierkante centimeter in de richting van de positieve x-as getransporteerd wordt. Door de temperatuurbeweging zullen er voortdurend moleculen zijn, die van de snellere kant naar de langzamere kant het beschouwde vlak passeren, terwijl ook omgekeerd langzame moleculen tussen de snellere terecht kunnen komen. Aangezien gemiddeld evenveel moleculen naar de ene kant als naar de andere kant zullen vliegen moet de overdracht van hoeveelheid beweging per seconde een overschot in de richting van de negatieve x-as opleveren.

Deze impulsoverdracht per  $\text{cm}^2$  is het nu, welke evenredig is met de snelheidsgradiënt, zodat we voortaan schrijven

$$-\eta \frac{\partial u}{\partial x} = \sum m v_y = \sum n_s m v_{y_s} v_{x_s} \quad (2)$$

In de laatste som moet worden gesommeerd over alle groepen van moleculen met dezelfde  $v_{x_s}$ , als er  $n_s$  moleculen van iedere groep per volume element aanwezig zijn. We bepalen ons tot het geval, waarin alle moleculen dezelfde massa hebben.



## § 2 Verschillende resultaten van oude berekeningen

De naam inwendige wrijving drukt goed uit, dat er sprake is van aanraking van gasdelen met verschillende snelheid, hetgeen in een gas neerkomt op het optreden van botsingen tussen de moleculen onderling, waarbij uitwisseling van hoeveelheid beweging plaats heeft. Men mag zeggen, dat de waarde van het impulstransport bepaald wordt door de snelheid, die ieder molecuul verkregen heeft door de laatste botsing vóórdat het beschouwde vlakje gepasseerd werd. In verband hiermee kunnen we aanvoelen, dat men bij de eerste elementaire beschouwingen de gemiddelde vrije weglengte der moleculen bij de beschrijving een rol liet spelen. Het meergenoemde vlak, loodrecht op de richting van de gradiënt, wordt in de ene richting doorsneden door moleculen met een gemiddelde snelheid  $u + \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\Delta x}$  en in de andere richting door moleculen met snelheid  $u - \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\Delta x}$ , waarin  $\bar{\Delta x}$  de gemiddelde afstand is, die een molecuul in een richting loodrecht op het vlakje zonder te botsen doorlopen heeft als het vlak gepasseerd wordt. Het gehele probleem van het impulstransport kwam zodoende neer op de kennis van de waarde van  $\bar{\Delta x}$ , welke uitgedrukt moest worden in 1.

Een elementaire berekening, gebaseerd op de snelheidsverdeling volgens Maxwell<sup>9)</sup> levert

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} l,$$

waarin  $\rho$  = nm de dichtheid van het gas voorstelt,  $\bar{v}$  de gemiddelde absolute waarde van de snelheid der moleculen en  $l$  de gemiddelde waarde van de vrije weglengte, welke onafhankelijk van de snelheid der moleculen geacht wordt.

Boltzmann<sup>3)</sup> verbeterde de uitkomst door de afhankelijkheid der vrije weglengte van de snelheid der moleculen in rekening te brengen. Hij vindt dan:

$$\eta = 0,3502 \rho \bar{v} l.$$

Tenslotte kan deze redenering nog verbeterd worden door rekening te houden met het feit, dat het aantal botsingen per seconde niet constant is, maar afhankelijk van de translatiesnelheid  $u$ , die ter plaatse van elke volgende botsing verschilt van die der vorige. We zouden dan krijgen:

$$\eta = 0,30967 \rho \bar{v} l^*).$$

## § 3 Afwijking van de maxwellverdeling

In alle elementaire berekeningen gaat men uit van een bestaande snelheidsgradiënt. Voor de berekening van  $\bar{\Delta x}$  moet dan de verdelingsfunctie der snelheden bekend zijn. Daarvoor koos men dan de maxwellverdeling voor een gas in rust, hetgeen tot een bepaling van  $\bar{\Delta x}$  en daarmee van  $\eta$  leidde.

Als in ieder punt een snelheidsverdeling volgens Maxwell zou heersen (gesuperponeerd op  $u$ ), dan is het uit symmetrieoverwegingen duidelijk, dat het transport van tangentiële impuls nul is. Er moet een afwijking van de maxwellverdeling zijn, evenredig met  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . De kennis van deze afwijking geeft ineens  $P_{xy}$ , zonder dat men zich dan nog behoeft te verdiepen in de afstand, waarop de laatste botsing heeft plaats gehad.

\*) De theorie werd opgesteld door O.E.Meyer<sup>5)</sup> in 1877; de numerieke uitwerking werd op aanzichten van E.Dorn in 1892 door Wilhelm Conrau verricht, aldus O.E.Meyer in de tweede druk van zijn boek in 1899.

De betere aanpak van het probleem (C h a p m a n <sup>6)</sup>, E n s k o g <sup>7)</sup> 1916, nadat M a x w e l l <sup>10)</sup> in 1879 was voorgegaan) berust op een verdeling met snelheid  $u$  in de  $y$ -richting

$$f_0 = A e^{-\beta^2 [v_x^2 + (v_y - u)^2 + v_z^2]} \text{ en een correctieterm } f_s, \text{ dus} \\ f = f_0 + f_s.$$

Voorts bepaalt men  $A$  en  $\beta$  zo, dat

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f_0 dv_x dv_y dv_z = \iiint_{-\infty}^{\infty} f dv_x dv_y dv_z = 1 \text{ voor de normering en}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} v^2 f_0 dv_x dv_y dv_z = \iiint_{-\infty}^{\infty} v^2 f dv_x dv_y dv_z = \overline{v^2} = \frac{3KT}{m},$$

corresponderend met de "temperatuur" van het gas. Dit levert

$$\beta^2 = \frac{m}{2KT} \text{ en } A = \left(\frac{2}{\pi^3}\right)^{3/2}.$$

Door deze afspraken is de vorm van  $f_s$  geheel vastgelegd en is er voor gezorgd, dat  $\iiint_{-\infty}^{\infty} \chi f_s dv_x dv_y dv_z = 0$  (3)

voor achtereenvolgens

$$\chi = 1, v_x, v_y, v_z \text{ en } v^2.$$

Nu wordt vergelijking (2):

$$-7 \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_s n_s m v_{x_s} v_{y_s} = \iiint_{-\infty}^{\infty} m v_x v_y n f dv_x dv_y dv_z = n m \iiint_{-\infty}^{\infty} v_x v_y f_s dv_x dv_y dv_z. (4)$$

Hierin is  $n$  het aantal moleculen in een kubieke centimeter. Het ontbreken van  $f_0$  in deze laatste integraal brengt duidelijk tot uitdrukking, dat het optreden van inwendige wrijving nu uitsluitend het gevolg is van een afwijking van de maxwellverdeling.

In de elementaire theorie lag de kern van het probleem in de bepaling van de gemiddelde afstand  $\overline{\Delta x}$  van de laag, waarin een molecuul het laatste gebotst had, alvorens het beschouwde oppervlak-element te doorsnijden. Thans ligt de kern van de zaak in het opmaken van een uitdrukking voor  $f_s$ . De gemiddelde vrije weglengte  $l$  treedt bij deze werkwijze in het geheel niet meer als beschrijvende grootte op.

#### § 4 De vergelijking van Boltzmann

De fundamentele boltzmannvergelijking levert een uitdrukking voor de snelheid, waarmee de waarde  $nf$ , het aantal moleculen, dat zich in een cel van de zesdimensionale ruimte  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$  bevindt, zich wijzigt als gevolg van de botsingen. Het symbool voor die veranderingssnelheid zij

$$\left[ \frac{\partial (nf)}{\partial t} \right] \text{ terwijl uit het behoud van het aantal deeltjes volgt}$$

$$\left[ \frac{\partial (nf)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (nf) + v_x \frac{\partial (nf)}{\partial x} + v_y \frac{\partial (nf)}{\partial y} + v_z \frac{\partial (nf)}{\partial z},$$

indien uitwendige krachten buiten beschouwing gelaten worden.

In het bijzonder geldt nu

$$\frac{\partial}{\partial t} (nf) = 0 \text{ voor een stationnairgeval,}$$

$$\frac{\partial (nf)}{\partial y} = \frac{\partial (nf)}{\partial z} = 0 \text{ omdat alleen variaties in de } x\text{-richting aanwezig geacht worden.}$$

Van de algemene uitdrukking blijft dus over:

$$\left[ \frac{\partial (nf)}{\partial t} \right] = v_x \frac{\partial}{\partial x} (nf).$$

Gelijk reeds gezegd denken we ons de werkelijke verdelingsfunctie  $f$  opgebouwd uit een hoofdterm  $f_0$ , gelijk aan die van M a x w e l l en een oor-

rectieterm  $f_s$ , die klein is vergeleken bij  $f_0$ . Mogelijk is  $f_s$  nog een functie van  $x$ , doch de afgeleide  $\frac{\partial(nf_s)}{\partial x}$  zullen we verwaarlozen als term van de tweede orde van kleinheid ten opzichte van  $f_0$ .

Het rechterlid van de boltzmannvergelijking bevat dus slechts de term  $v_x \frac{\partial(nf_0)}{\partial x}$ .

Aangezien de botsingen het totaal aantal moleculen nooit zullen beïnvloeden, zal het linkarlid slechts bestaan uit de term  $\left[\frac{\partial(nf_s)}{\partial t}\right]$  en, associatie- en dissociatieverschijnselen buiten beschouwing gelaten, zelfs als  $\left[n \frac{\partial f_s}{\partial t}\right]$  geschreven kunnen worden. Vullen we nu in het rechterlid de vorm  $f_0 = A e^{-\beta^2 [v_x^2 + (v_y - u)^2 + v_z^2]}$  in, dan vinden we een betrekking, waaruit  $f_s$  moet worden opgelost:

$$\begin{aligned} \left[n \frac{\partial f_s}{\partial t}\right] &= v_x n \lambda \frac{\partial f_0}{\partial x} \quad \text{en na uitwerken:} \\ \left[n \frac{\partial f_s}{\partial t}\right] &= 2n A \beta^2 v_x v_y e^{-\beta^2 [v_x^2 + (v_y - u)^2 + v_z^2]} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5) \end{aligned}$$

We zullen ons in het vervolg beperken tot een coördinatensysteem, ten opzichte waarvan  $u = 0$ .

#### § 5 Invoering van het symbool $D \sum v_x v_y$

Als schatting van  $f_s$  wordt nu geprobeerd:

$$f_s = C v_x v_y e^{-\beta^2 v^2}.$$

De functie  $f_s$  voldoet aan de vijf eisen, uitgedrukt in (3). Men kan bewijzen, dat deze  $f_s$  inderdaad de meest algemene uitdrukking is, die ons wrijvingsprobleem vereist, waarin  $C$  nog een functie van  $v^2$  is. In het nu volgende denken we ons  $C$  constant, hetgeen achteraf slechts een geringe verwaarlozing blijkt te zijn (zie § 9).

C h a p m a n 's kunstgreep van 1916 ligt nu hierin, dat hij gaat uitrekenen, hoe groot de waarde is van

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} v_x v_y \left[n \frac{\partial f_s}{\partial t}\right] dv_x dv_y dv_z. \quad (6)$$

De interpretatie hiervan is: de „snelheid“, waarmee de botsingen de waarde van  $\sum v_x v_y$  veranderen. We noemen uitdrukking (6)  $D \sum v_x v_y$  en herleiden deze met behulp van (5) tot:

$$D \sum v_x v_y = 2n A \beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} \iiint_{-\infty}^{\infty} v_x^2 v_y^2 e^{-\beta^2 v^2} dv_x dv_y dv_z,$$

of na integratie

$$\boxed{D \sum v_x v_y = \frac{n}{2\beta^2} \frac{\partial u}{\partial x}} \quad (7)$$

#### § 6 Nadere beschouwing der botsingen

Thans moeten we ons verdiepen in het mechanisme van de botsing, teneinde de waarde van  $D \sum v_x v_y$  te bepalen. Ter vereenvoudiging kan al dadelijk worden opgemerkt, dat de onderlinge botsingen van de moleculen van de  $f_0$ -verdeling geen invloed kunnen hebben op  $\sum v_x v_y$ , aangezien deze waarde,



zoals wij in § 3 zagen, steeds nul is voor de maxwellverdeling. Onderlinge botsingen van het type  $f_s$  moeten verwaarloosd worden als tweede-orde effect.

We kunnen dus volstaan met een onderzoek naar de invloed van botsingen tussen  $f_s$ - en  $f_o$ -moleculen.

### § 7 De invloed van één botsing op $\Sigma v_x v_y$

We stellen de snelheid van de moleculen vóór een botsing door  $v$  voor en na de botsing door  $V$ . De grootheden behorende tot de groep  $f_s$  worden met de index 1 voorzien, die van de groep  $f_o$  met de index 2. De relatieve snelheid vóór de botsing heet  $w$ , die er na  $W$ . De constante snelheid van het gemeenschappelijk zwaartepunt heet  $Z$ .

De wijziging in  $\Sigma v_x v_y$  door één botsing is

$$\Delta \Sigma v_x v_y = V_{1x} V_{1y} + V_{2x} V_{2y} - v_{1x} v_{1y} - v_{2x} v_{2y}.$$

Bij een botsing voor gelijke moleculen wordt dit:

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma v_x v_y &= (Z_x + \frac{1}{2}w_x) (Z_y + \frac{1}{2}w_y) + (Z_x - \frac{1}{2}w_x) (Z_y - \frac{1}{2}w_y) - \\ &- (Z_x + \frac{1}{2}w_x) (Z_y + \frac{1}{2}w_y) - (Z_x - \frac{1}{2}w_x) (Z_y - \frac{1}{2}w_y). \end{aligned}$$

$$\Delta \Sigma v_x v_y = \frac{1}{2} (W_x W_y - w_x w_y).$$

Hieruit is na enige herleidingen de gemiddelde waarde te vinden bij gegeven hoek  $\theta_r$  tussen  $W$  en  $w$ .

$$\bar{\Delta} \Sigma v_x v_y = -\frac{1}{4} w_x w_y \sin^2 \theta_r \quad (8)$$

als  $\theta_r$  de hoek is, waarover de relatieve snelheid gedraaid wordt. Door dit bedrag te vermenigvuldigen met het totale aantal  $dN$  van de bedoelde botsingen, dat per seconde plaats vindt, wordt na integratie over alle mogelijkheden, de gezochte uitdrukking gevonden.

### § 8 Bepaling van $D \Sigma v_x v_y$

Het aantal  $dN$  vinden we uit de volgende redenering:

van alle  $f_s$ -moleculen hebben er  $n f_s(v_1) dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z}$  een snelheid in de buurt van  $v_1$  en gaan er dus  $n w f_s(v_1) dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z}$  per seconde door een  $cm^2$  bij hun beweging ten opzichte van de  $f_o$ -moleculen. Van deze laatste hebben er  $n f_o(v_2) dv_{2x} dv_{2y} dv_{2z}$  een snelheid in de buurt van  $v_2$ . Het aantal botsingen tussen beide groepen moleculen, die een draaiing van de relatieve snelheid over een hoek tussen  $\theta_r$  en  $\theta_r + d\theta_r$  leveren is nu:

$dN = 2\pi G(w, \theta_r) d\theta_r \sin \theta_r n w f_s(v_1) n f_o(v_2) dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z} dv_{2x} dv_{2y} dv_{2z}$  waarin  $G$  de strooiingscoëfficiënt voorstelt. Deze heeft de dimensie van een oppervlak en wordt in § 11 nader besproken.

De aan het slot van § 7 uitgestippelde procedure voltooiend vinden we dus:

$$D \Sigma v_x v_y = -2\pi n^2 \cdot \frac{1}{4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} w w_x w_y G(w, \theta_r) f_s(v_1) f_o(v_2) \sin^3 \theta_r d\theta_r dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z} dv_{2x} dv_{2y} dv_{2z}$$

$$\text{Deze integraal is te herleiden tot } D \Sigma v_x v_y = -\frac{2\pi \sqrt{2}}{5\beta^3} n^2 S C, \quad (9)$$

als wij S voorstellen door

$$S = \frac{\pi}{16} \beta^3 \int_0^\infty \left[ \int_0^\pi G(w, \theta_r) \sin^3 \theta_r d\theta_r \right] w^7 e^{-\frac{1}{2}\beta^2 w^2} dw. \quad (10)$$

Uitdrukking (10) voor S noem ik de effectieve botsingsdoorsnee. In § 11 zal ik aantonen, dat voor een gas, bestaande uit identieke vrije harde bollen, S de klassieke waarde  $\pi r_0^2$  aanneemt, waarin  $r_0$  de diameter van de bollen is.

### § 9 De formule van Chapman

Resumerende vinden we dus twee uitdrukkingen voor  $D\Sigma v_x v_y$ , namelijk:

$$D\Sigma v_x v_y = \frac{n}{2\beta^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

$$C = -\frac{5\beta^6}{4\pi V^2 nS} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

$$D\Sigma v_x v_y = -\frac{2\pi V^2}{5\beta^3} n^2 S C \quad (9)$$

Verder kunnen we vgl. (4) met de gekozen vorm  $f_s = C v_x v_y e^{-\beta^2 v^2}$  uitwerken:

$$-\eta \frac{\partial u}{\partial x} = m \Sigma v_x v_y = mnC \iiint_{-\infty}^{\infty} v_x^2 v_y^2 e^{-\beta^2 v^2} dv_x dv_y dv_z,$$

zodat:

$$\eta = -\frac{m n C}{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot \frac{\pi^{3/2}}{4\beta^7} \quad (12)$$

en na substitutie van C uit (11) en  $\beta = \frac{2}{\bar{v}\sqrt{\pi}}$

$$\eta = \frac{5\pi}{32\sqrt{2}} \frac{m\bar{v}}{S}. \quad (13)$$

Deze uitdrukking voor  $\eta$  blijkt onafhankelijk te zijn van het aantal deeltjes in een  $\text{cm}^3$ . De viscositeit van een gas in de hydrodynamische toestand hangt dus niet af van de druk.

Om dit resultaat te kunnen vergelijken met de vóór 1925 algemeen gebruikte formule van Meyer,  $\eta = 0,30967\rho\bar{v}l$ , gebruik ik - vooruitlopend op het bewijs, dat S voor harde bollen de botsingsdoorsnee voorstelt - de betrekkingen  $l = \frac{1}{nS\sqrt{2}}$  en  $\rho = mn$ , waarin n het aantal moleculen in een kubieke centimeter is. Dan gaat (13) over in:

$$\eta = 0,491 \rho\bar{v}l. \quad (14)$$

Chapman<sup>6)</sup> voerde door successieve benaderingen de berekening ook nog uit met medenemen van machten van  $v^2$  in C (zie § 5). Het resultaat was, dat uitdrukking (14) voor het geval van harde bollen, gewijzigd werd in:

$$\eta = 0,499 \rho\bar{v}l, \quad (15)$$

hetgeen voor onze onderzoekingen voldoende nauwkeurig is in de vorm

$$\eta = \frac{1}{2} \rho\bar{v}l. \quad (16)$$

Om een zuiver inzicht te houden in de onderling onafhankelijke factoren, waardoor  $\eta$  bepaald wordt, is (13) beter, omdat  $\rho$  en  $l$  nog samenhangen.

Een elementaire herleiding van  $\bar{v}$  met behulp van

$$\beta = \frac{2}{\bar{v}\sqrt{\pi}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{m}{2kT}} \quad \text{en} \quad p = \frac{\rho kT}{m} \quad \text{levert}$$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}}$ , zodat (15) ook geschreven kan worden in de vorm:

$$\eta = 0,499 l \sqrt{\frac{8p\rho}{\pi}} \sim \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{8}{\pi} \rho p}.$$

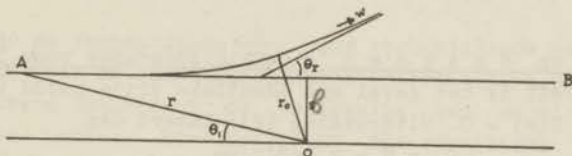
Vervangen we verder nog aldus  $\frac{\rho}{p} = \rho$  en  $p l = 1$ , waarmee we achtereenvolgens de dichtheid en de gemiddelde vrije weglengte bij een druk van 1 microbar invoeren, dan kunnen we schrijven:

$$l = p l = \frac{\sqrt{\pi}/g}{0,499} \frac{\eta}{\sqrt{p}} \quad (17)$$

De betrekkingen (15), (16) en (17) gelden alleen voor het model met harde bollen. Wanneer men in andere gevallen, dus voor „werkelijke” moleculen, met  $l$  wil rekenen, pleegt men deze te definiëren aan de hand van dezelfde formules.

#### § 10 Strooiingscoëfficiënt en potentiaalveld

Tenslotte wil ik nog laten zien, hoe in beginsel de samenhang is tussen botsingsdoorsnee, strooiingscoëfficiënt en het potentiaalveld tussen de moleculen.



figuur 2

De relatieve beweging van twee moleculen kan beschreven worden als de beweging van een punt met gereduceerde massa  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  in een centraal krachtveld  $U(r)$ , dat de potentiële energie van twee moleculen voorstelt. Laat  $O$  (fig. 2) het centrum van dat krachtveld zijn. In de richting  $AB$  loopt een stroom van deeltjes, welke, zodra ze een merkbare invloed van het veld in  $O$  ondervinden, uit hun oorspronkelijke richting geduwd worden. Als per seconde  $n_0$  moleculen van de bundel door een vlakje van een vierkante centimeter loodrecht op de richting van  $AB$  gaan, dan is  $G$  het gedeelte hiervan, dat per seconde door een „botsing” met  $O$  zodanig van richting veranderd wordt, dat de nieuwe richting asymptotisch nadert tot één, die binnen een gekozen ruimtewinkel  $d\omega$  ligt. De richting na de botsing van alle deeltjes die onder een hoek, liggende tussen  $\theta_r$  en  $\theta_r + d\theta_r$  ten opzichte van de oorspronkelijke bewegingsrichting, verder lopen, valt binnen een ring  $d\omega = 2\pi \sin\theta_r d\theta_r$ . Bepalen we ons nu tot één molecuul, dan is

(18)  $2\pi G(\theta_r) \sin\theta_r d\theta_r$  de kans op strooiing binnen een hoek  $d\theta$ . Deze fractie is ook uit te drukken in de afstand  $b$ , waarop  $O$  verwijderd ligt van het verlengde van de weg vóór de botsing. Het ringetje, waarbinnen de opvallende stroom een vlakje loodrecht daarop moet treffen, wil het op de juiste wijze verstrooid worden, heeft een omtrek  $2\pi b$ , is  $db$  breed en heeft dus een oppervlakte

$$2\pi b db \quad (19)$$

Deze twee uitdrukkingen voor de beschouwde botsingskans (18) en (19) gelijkstellend, vinden we, eenvoudigheidshalve veronderstellend dat  $\theta_r$  monotoon verandert met  $b$ :  $2\pi b db = 2\pi G(\theta_r) \sin\theta_r d\theta_r$  of wel

$$G(\theta_r) = \frac{b \left| \frac{db}{d\theta_r} \right|}{\sin\theta_r} \quad (20)$$

Uit de wetten van behoud van energie en impulsmoment kan eenvoudig worden afgeleid dat:



$$\Theta_r(b) = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{\{1 - 2U(r)/\mu w\} r^2 - b^2}}, \quad (21)$$

waarin  $w$  de relatieve snelheid van het botsende paar is.

Afgezien van technische moeilijkheden bij het uitcijferen dezer vergelijkingen is hiermee in beginsel aangeduid, hoe de vorm van het potentiaalveld tussen de deeltjes van invloed is op  $\Theta_r$  en daarmee op  $G$ .

Resumerende merk ik nu op, dat wij volgens (21) bij gegeven potentiaalveld  $U(r)$  de hoek  $\Theta_r$  kunnen vinden, waarover in dit systeem met rustend zwaartepunt de richting van een deeltje wordt veranderd wanneer het op een afstand  $b$  van het centrum van een tweede passeert. Met behulp van (20) vinden we de strooiingscoëfficiënt, welke optreedt in uitdrukking (10) voor de botsingsdoorsnee  $S$ . Tenslotte levert (13) de waarde van  $\eta$ , als  $S$  eenmaal bekend is.

### § 11 Toepassing op Chapman's botsingsdoorsnee voor harde bollen

Als voorbeeld wil ik het geval van identieke vrije harde bollen uitrekenen. Daarvoor is  $U(r) = 0$ . Uitdrukking (21) levert dan

$$\Theta_r = \pi - 2b \sin \frac{b}{r_0}. \quad (22)$$

Hieruit volgt:

$$b = r_0 \cos \frac{\Theta_r}{2}, \quad \text{en} \quad (23)$$

$$\frac{db}{d\Theta_r} = -\frac{1}{2} r_0 \sin \frac{\Theta_r}{2} \quad (24)$$

De grootheden uit (20) ter berekening van de strooiingscoëfficiënt  $G(\Theta_r)$  zijn nu bekend:

$$G = \frac{r_0 \cos \frac{\Theta_r}{2}}{r_0 \sin \frac{\Theta_r}{2} \sin \Theta_r} = \frac{1}{4} r_0^2.$$

In dit geval is  $G$  dus onafhankelijk, zowel van  $\Theta_r$  als van  $w$ . Nu kunnen we de integraal voor de effectieve botsingsdoorsnee (10) uitwerken. Daarin is nu  $\int_0^\pi G(w, \Theta_r) \sin^3 \Theta_r d\Theta_r = \frac{1}{3} r_0^2$ , zodat

$$S = \frac{\pi}{16} \beta^8 \cdot \frac{1}{3} r_0^2 \int_0^\infty w^7 e^{-\frac{1}{2} \beta^2 w^2} dw = \frac{\pi}{48} \beta^8 r_0^2 \frac{6}{2(\frac{1}{2} \beta^2)^4} = \pi r_0^2. \quad (25)$$

De definitie (10) voor  $S$  stemt dus overeen met de betekenis, welke we in de theorie voor vrije harde bollen aan het begrip botsingsdoorsnee hadden toegekend.

### § 12 Quantummechanica

In het hydrodynamische gebied veronderstelden we, dat de gemiddelde vrije weglengte verwaarloosbaar was vergeleken bij de afmetingen van het vat. Zodra aan deze eis niet meer is voldaan zullen afwijkingen van het besproken gedrag kunnen optreden, hetgeen in de volgende hoofdstukken onze aandacht zal krijgen.

Stilzwijkend hebben wij echter ook het gemiddelde van de golflengte  $\lambda$  van De Broglie, welke aan de moleculen moet worden toegevoegd volgens  $\lambda = \frac{h}{\mu w}$ , verwaarloosbaar geacht. We moeten er op verdacht zijn, dat er eveneens afwijkingen van het besprokene kunnen optreden, wanneer  $\lambda$  van



dezelfde orde van grootte wordt als de diameter van de moleculen, omdat dan de uitdrukking voor  $G$  ( $w, \theta_r$ ) niet meer in de vorm van (21) geschreven mag worden.

Gas	$\lambda$ bij 20° C. in Å.E.	$r_0$ in Å.E.	$\frac{\lambda}{r_0}$	$\frac{\lambda}{r_0} \cdot 10^4$ bij 1 atm.
H <sub>2</sub>	1,13	2,919 <sup>11)</sup>	0,38	9,1
He	0,80	2,56 <sup>11)</sup>	0,31	4,1
N <sub>2</sub>	0,30	3,718 <sup>11)</sup>	0,081	4,4
O <sub>2</sub>	0,28	3,61 <sup>8)</sup>	0,078	3,9
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,30	4,95 <sup>8)</sup>	0,061	7,9

Tabel I

In tabel I zijn de verhoudingen  $\frac{\lambda}{r_0}$  voor verschillende gassen aangegeven. Hieruit blijkt, dat de quantummechanische correctie op  $G$  bij waterstof en helium een merkbare invloed op de berekening van de viscositeit dier gassen zou kunnen hebben. Een overzicht der resultaten vindt men bij Chapman en Cowling <sup>12)</sup>. De invloed op  $G$  is zodanig, dat de botsingsdoorsnee groter wordt. In hetzelfde werk vindt men ook mededelingen over een andere quantummechanische correctie, die met de invloed van de statistiek op de botsingskansen samenhangt en die tot gevolg heeft, dat de inwendige wrijving bij voldoende hoge druk door een met de dichtheid evenredige term gecorrigeerd moet worden. Een dergelijke correctie treedt ook in de klassieke theorie op ten gevolge van de uitgebreidheid der moleculen. Bij de in dit proefschrift beschreven proeven zijn deze drukcorrecties te verwaarlozen.

Een recent voorbeeld van de realiteit dezer correcties bij de warmtegeleiding vindt men bij J. B. Ubbink <sup>13)</sup>

## B. DE MOLECULAIRE TOESTAND

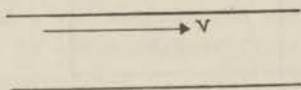
In afdeling A van dit hoofdstuk beperkten we onze beschouwingen tot het grensgeval van een continu gas met snelheidsgradiënt. Met het woord continu wil ik herinneren aan de voorwaarde, dat de gemiddelde vrije weglengte der moleculen verwaarloosbaar klein moet zijn ten opzichte van de afmetingen van het vat. Anders gezegd: de wanden van het vat mogen de stroming niet beïnvloeden. Over de invloed van de wand en over de afmetingen van het vat werd dan ook in het geheel niet gesproken.

Thans zullen we onze aandacht richten op het andere uiterste: het gebied waar de afmetingen van het vat zeer klein zijn, vergeleken bij de gemiddelde vrije weglengte. Nú is het impulstransport volledig een wandeffect. Onderlinge botsingen tussen de moleculen zijn er niet meer, zodat van „inwendige wrijving” niet meer gesproken kan worden.

Voor een behoorlijke beschrijving van het wandeffect is het allereerst van belang te weten met welke snelheidsverdeling de moleculen, die de wand getroffen hebben, weer worden uitgezonden. In het nu volgende zullen we aannemen, dat, wat de richtingen betreft, deze verdeling onafhankelijk is van de richting van het invallende molecuul en nauwkeurig wordt weergegeven

door de cosinuswet. Deze wet zegt, dat in een coördinatensysteem, ten opzichte waarvan de wand in rust is, van een groep moleculen met eenzelfde absolute waarde van de snelheid, het aantal, dat binnen een ruimtehoekselement  $d\omega$  in de richting  $\varrho$  wordt teruggekaatst, evenredig is met  $\cos \varrho$  en  $d\omega$ .

We denken ons dit zeer ijle gas begrensd tussen twee evenwijdige horizontale vlakke platen, waarvan de onderste in rust is en de bovenste een eenparige snelheid  $V$  heeft in een horizontale richting. De temperatuur der



figuur 3

Iedere vierkante centimeter van de stilstaande wand wordt per seconde getroffen door  $\frac{1}{4} n \bar{v}$  moleculen, die elk gemiddeld een hoeveelheid translatiebeweging  $mV$  overbrengen. Het impulstransport  $P_{mol}$  bedraagt in dit gebied dus:

$$- P_{mol} = \frac{1}{4} n \bar{v} \cdot m V. \quad (26)$$

De gemiddelde thermische snelheid  $\bar{v}$  der moleculen wordt bepaald door de temperatuur der platen. De evenredigheid van het impulstransport met het gemiddelde aantal moleculen  $n$  in iedere  $cm^3$  duidt op een evenredigheid met de spanning van het gas, geheel in tegenstelling met het gedrag in de hydrodynamische toestand, waar het impulstransport onafhankelijk van de druk is.

Hoewel feitelijk van inwendige wrijving en van een snelheidsgradiënt in de moleculaire toestand niet gesproken kan worden, wil ik, uitsluitend voor de vergelijkbaarheid der resultaten, een schijnbare viscositeit  $\eta'$  definiëren met behulp van de schijnbare gradiënt  $\frac{V}{D}$ , waarin  $D$  de afstand van de wanden is.

$$- P_{mol} = \eta'_{mol} \cdot \frac{V}{D}. \quad (27)$$

Met behulp van uitdrukking (26) vinden we dan:

$$\eta'_{mol} = \frac{1}{4} n \bar{v} m D. \quad (28)$$

Door gebruik te maken van de vergelijking van Chapman (16)  $\eta = \frac{1}{2} n m \bar{v} l$  kan verband gelegd worden met de inwendige wrijving in het andere grensgeval. Bedenken we nog, dat  $l = \frac{\mu}{p}$ , dan krijgen we

$$\eta'_{mol} = \eta \frac{D}{2l} \cdot p. \quad (29)$$

Dit heet de formule voor de moleculaire wrijving

## HOOFDSTUK II

### A. HET GEBIED VAN DE GLIJDING

#### § 1 Definitie van de glijdingscoëfficiënt $\xi$

Uitgaande van het grensgeval, waarin de wand in het geheel geen invloed heeft op het impulstransport (Hoofdstuk I A), zullen we nu gaan onderzoeken hoe zich de eerste afwijkingen openbaren, wanneer zich de aanwezigheid van een wand doet gevoelen.



Voor een zuiver fenomenologische beschrijving achtten H e l m h o l t z en P i o t r o w s k i <sup>14)</sup> het van nut onderscheid te maken tussen de inwendige wrijvingskracht  $\eta \frac{\partial u}{\partial x}$  tussen de gaslagen onderling en een uitwendige wrijvingskracht  $\epsilon u_0$  tussen de wand en het gas voor het geval, dat dit er als geheel met een effectieve snelheid  $u_0$  langs glijdt. Nauwkeurig gesproken verstaan wij onder  $u_0$  het verschil in snelheid tussen die van de wand en de tot de wand toe lineair geëxtrapoleerde snelheid middenin het gas.

Voor het behoud van een stationnaire toestand is het noodzakelijk, dat de stroom van tangentiële impuls, dwars door een vlakje van een vierkante centimeter evenwijdig aan de wand ergens midden in het gas, gelijk is aan de impulsoverdracht  $P_g$  van het gas op een vierkante centimeter van de wand, dus:

$$-P_g = \epsilon u_0 = \eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (30)$$

$$u_0 = \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (31)$$

Zo kwam men er toe de snelheidssprong  $u_0$  tussen gas en wand evenredig te stellen met de gradiënt  $\frac{\partial u}{\partial x}$  op grote afstand van de wand. De evenredigheidsfactor werd de glijdingscoëfficiënt  $\zeta$  genoemd, welke dus gedefinieerd is door de vergelijking:

$$u_0 = \zeta \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (32)$$

In het vervolg zal ik meestal deze vergelijking van  $\zeta$  gebruiken. Soms komt het echter de duidelijkheid ten goede, wanneer men zich bedient van de uitdrukking:

$$\zeta = \frac{\eta}{\epsilon}, \quad (33)$$

doch blijkens het bovenstaande komt dit op hetzelfde neer.

H e l m h o l t z en P i o t r o w s k i <sup>14)</sup> waren de eersten, die, weliswaar voor vloeistoffen, het verschijnsel van de glijding beschreven en toetsten. De door hen ingevoerde begrippen zijn echter zonder meer voor de glijding van een gas langs een wand overgenomen.

## § 2 Schatting van de orde van grootte van $\zeta$

Van theoretische zijde heeft M a x w e l l <sup>10)</sup> voor het eerst getracht een uitdrukking voor  $\zeta$  te vinden. Hij beschouwt daartoe een gas, dat met constante snelheidsgradiënt laminair stroomt over een horizontale vlakke wand. Middenin het gas is, in een coördinatensysteem waarvoor het gas rust, de bijdrage tot het transport van tangentiële impuls door een vlak loodrecht op de gradiënt voor de helft afkomstig van moleculen met een snelheidscomponent naar beneden en voor de andere helft van moleculen met een snelheidscomponent omhoog. In eerste benadering rekent hij alsof de snelheidsverdeling der moleculen van de eerstgenoemde groep tot de wand toe dezelfde is als ware deze door de wand niet beïnvloed.

Indien we nu veronderstellen, dat de moleculen, die tegen de wand botsen, deze gemiddeld zonder tangentiële snelheid verlaten, dan ontbreekt bij de wand de bijdrage tot het impulstransport van de terugkerende moleculen. De impulsstroom moet echter onveranderd tot de wand toe voortgang hebben. De ontbrekende bijdrage schrijven we toe aan een uitwendige wrijving, door-

dat het gas met een lineair geëxtrapoleerde gemiddelde snelheid  $u_0$  langs de wand glijdt, dus

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} n \bar{v} m u_0. \quad (34)$$

Met behulp van de vergelijking van Chapman

$$\gamma = \frac{1}{2} n m \bar{v} l \quad \text{krijgen we nu:} \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \gamma \frac{u_0}{l}, \quad \text{zodat}$$

$$u_0 = l \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{dus}$$

$$\zeta = l. \quad (35)$$

Maxwell<sup>10)</sup> zelf zag de mogelijkheid al in, dat de wand de gemiddelde tangentiële impuls der teruggekaatste moleculen niet nul zou maken. Terwille van de eenvoudigheid van het beeld stelt hij zich voor, dat van alle per  $\text{cm}^2$  op de wand vallende moleculen een deel  $f_a$  wordt geadsorbeerd en even later weer „verdampt“. Dat deel  $f_a$  verlaat de wand dus diffuus, en heeft gemiddeld geen tangentiële snelheid meer, terwijl voor het overige deel  $1 - f_a$  een spiegelende terugkaatsing wordt aangenomen.

In deze gedachtengang moet het rechterlid van (34) met  $f_a$  vermenigvuldigd worden, omdat slechts een deel  $f_a$  der opvallende moleculen daadwerkelijk zijn impuls afstaat aan de wand. Daaruit volgt:

$$\zeta = \frac{2 - f_a}{f_a} l. \quad (36)$$

De grootheid  $f_a$  kan men ook omschrijven als het gedeelte, dat gemiddeld in de van de wand terugkomende moleculen overblijft van de oorspronkelijke gemiddelde relatieve tangentiële snelheid tussen opvallende moleculen en wand, dus

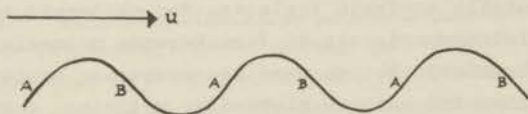
$$f_a = \frac{\bar{u}_{\text{opv.}} - \bar{u}_{\text{terug.}}}{\bar{u}_{\text{opv.}} - \bar{u}_{\text{wand}}}$$

We noemen  $f_a$  dan de totale mechanische accommodatiecoëfficiënt. Deze schrijfwijze is analoog aan die van de totale thermische accommodatiecoëfficiënt

$$f'_a = \frac{\bar{T}_{\text{opv.}} - \bar{T}_{\text{terug.}}}{\bar{T}_{\text{opv.}} - \bar{T}_{\text{wand}}}$$

Volgens het model van Maxwell zou  $f'_a = f_a$  zijn. Experimenteel is dit echter geenszins het geval. Eenvoudig is reeds met het model van Maxwell in te zien, dat de impuls van een molecuul, dat tot de wand doordringt, eerder zal zijn geaccomodeerd dan de kinetische energie. Als de cosinuswet volledig geldig is, moet in dit model  $f_a = 1$  zijn (volledige accommodatie).

In het algemeen zou men verwachten, dat  $f_a < 1$  („echte glijding“), zodat de factor  $k = \frac{2 - f_a}{f_a}$  groter of gelijk aan 1 moet zijn. Toch is er een geval denkbaar, waarbij  $f_a > 1$  wordt. Denkt men zich namelijk een ruwe wand, waarlangs het gas naar rechts stroomt (fig. 5), terwijl in ieder oppervlakelement van de wand de cosinuswet geldt, dan is de kans dat de wand getroffen wordt voor de stukken A groter dan voor de stukken B.



figuur 5

Het grotere aantal moleculen, dat iedere seconde de stukken A verlaat zal de gemiddelde snelheid der



teruggekaatste moleculen een component naar links geven. Hierdoor zou  $f_a > 1$  kunnen worden. Al veronderstelden we de cosinuswet geldig voor infinitesimaal kleine stukjes van de wand, toch zou deze wet voor de wand als geheel niet gelden.

De verschijnselen, die zich aan een werkelijke wand afspelen, zijn veel ingewikkelder dan in het model van Maxwell tot uitdrukking gebracht wordt. Het ware zeer te wensen, dat, althans voor volledig diffuse terugkaatsing tegen een volkomen gladde wand, kon worden uitgerekend, hoe groot de theoretische waarde van  $k$  in  $\zeta = kl$  is.

Het zou te ver voeren hier nader in te gaan op twee nog niet gepubliceerde theoretische beschouwingen, een van Prof. dr H.A. Kramers en een van dr Sophus Th. Holst Weber, welke mij welwillend ter inzage werden gegeven. Beide leveren waarden van  $k$  tussen 1 en 1,4.

Men zou de experimenteel te bepalen grootheid  $k$  voorlopig wel formeel gelijk kunnen stellen aan  $\frac{2 - f_a''}{f_a''}$ , waarin men  $f_a''$  effectieve accommodatiecoëfficiënt kan noemen, doch het valt voorsnog niet in te zien welk verband deze  $f_a''$  heeft met  $f_a$ . Het is trouwens nog zeer de vraag of het in werkelijkheid mogelijk is de snelheidsverdeling der terugkomende moleculen te beschrijven als de som van een cosinusverdeling en een „reflexieverdeling”. Naar aanleiding van al deze beschouwingen moet uitdrukkelijk worden opgemerkt, dat indien experimenteel  $k \neq 1$  gevonden wordt, hieruit geenszins de conclusie mag worden getrokken, dat de cosinuswet niet geldt.

Van grote interesse zou het zijn, indien kon worden vastgesteld, dat de waarde van  $k$  afhangt van de aard van de wand, want dat zou een aanwijzing zijn, dat de cosinuswet, toegepast op de wand als geheel, niet in alle gevallen mag worden gebruikt.

Bij zo goed mogelijk gepolijste oppervlakken (oneffenheden van  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  cm) namen F. Knauer en O. Stern<sup>15)</sup> alleen spiegelende terugkaatsing waar van molecuulstralen, die rakelings over het oppervlak scheerden. H. T. Johnson<sup>16)</sup> en A. E. Llett en H. F. Olson<sup>17)</sup> vonden echter voor sommige gassen ook spiegelende terugkaatsing bij willekeurige hoek van inval, wanneer molecuulstralen gericht werden op pas gespleten en goed ontgast steenzout.

### § 3 Glijding langs twee evenwijdige wanden

Beschouwen we nu eens in het bijzonder het transport van tangentiële impuls door een gas tussen twee vlakke evenwijdige platen op een afstand  $D$  van elkaar, waarvan de ene in rust is en de andere eenparig beweegt met een snelheid  $V$ . Door een willekeurig vlak in het gas, evenwijdig aan de platen, is dit transport per  $\text{cm}^2 \eta \frac{\partial u}{\partial x}$ . Het valt eenvoudig in te zien dat de invloed van de glijding zodanig is, dat verschuiving van de wand over een afstand  $\zeta$  naar buiten, het geval herleidt tot één zonder glijding. In fig. 6 is vertikaal de  $x$ -as getekend in de richting van de gradiënt. Horizontaal staat de  $u$ -as langs de stilstaande plaat. De schuin oplopende lijn I is de grafische voorstelling van de translatiesnelheid van het gas. De laag, onmiddellijk grenzend aan de stilstaande plaat, heeft nog een (geëxtrapoleer-

de) tangentiële snelheid  $u_0$ , welke pas op een afstand  $\xi$  naar beneden nul zou geworden zijn, indien we de constante gradiënt tot achter de wand extrapoleren. Evenzo is de snelheid van het gas langs de bewegende plaat minder dan  $V$ ; deze zou  $\xi$  verder naar boven pas deze waarde bereikt hebben. Dan volgt uit de figuur:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V}{D + 2\xi} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{D}} \cdot \frac{V}{D}.$$

De impulsoverdracht per  $\text{cm}^2$  bedraagt dus

$$-P_g = \eta \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{D}} \cdot \frac{V}{D}. \quad (37)$$

Zonder rekening te houden met de glijding kunnen we die overdracht ook evenredig stellen met de schijnbare gradiënt  $\frac{V}{D}$  en de evenredigheidsfactor schijnbare viscositeit  $\eta'$  noemen (vgl. lijn II in fig. 6):

$$-P_g = \eta' \cdot \frac{V}{D}. \quad (38)$$

Uit (37) en (38) volgt het verband:

$$\eta' = \frac{\eta}{1 + \frac{2\xi}{D}}, \text{ waaruit volgt}$$

$$\eta' = \frac{\eta}{1 + \frac{2k_1}{Dp}}. \quad (39)$$

Aangezien  $\xi$  evenredig is met  $l$  en deze laatste omgekeerd evenredig is met de druk, is de impulsoverdracht tussen twee platen nu wél afhankelijk van de druk. Ook is het duidelijk, dat voor hoge druk de correctieterm  $2k \frac{1}{Dp}$  verwaarloosbaar wordt tegenover één, waardoor, zoals we aan het slot van Hoofdstuk I A zagen, de viscositeit onafhankelijk van de druk wordt.

#### § 4 Glijding langs de wand van een buis

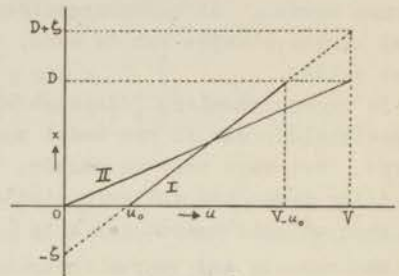
Ook de gewichtshoeveelheid  $Q$  van een gas, die per seconde door een buis stroomt, ondervindt invloed van viscositeit en glijding. De uitdrukking, die P o i s e u i l l e hiervoor afleidde, luidt:

$$Q = \frac{\pi R_b^4}{8\eta L} \rho \bar{p} \Delta p.$$

Als hierin de invloed van de glijding neerkomt op een schijnbare verschuiving van de wand over een afstand  $\xi$  naar buiten, dan wordt de formule, die met de glijding rekening houdt, gevonden door  $R_b$  te vervangen door  $R_b + \xi$ . Voor  $\frac{\xi}{R_b} < 1$  levert dit in eerste benadering:

$$Q = \frac{\pi R_b^4}{8\eta L} \rho \bar{p} \Delta p \left(1 + \frac{4\xi}{R_b}\right). \quad (40)$$

$R_b$  stelt hierin de straal van de cirkelvormige doorsnee van de buis voor,  $L$  de lengte van de buis,  $\Delta p$  het drukverschil tussen de uiteinden en  $\bar{p}$  de gemiddelde druk.



figuur 6

## B HET GEBIED DER EERSTE BOTSINGEN

### § 1 Algemene opzet

Allereerst zal ik schetsen hoe men een probleem van impulstransport in het gebied der eerste botsingen in het algemeen zou kunnen aanvatten. Daarna zal ik enige bijzondere gevallen iets nader bespreken. In een gas bevindt zich een convex vast lichaam L, dat omgeven wordt door een vaste wand W, die een constante snelheid V heeft ten opzichte van dat lichaam L. Zonder aan de algemeenheid te kort te doen kan ik het lichaam L in rust denken.

In een knudsgas zou op iedere vierkante centimeter van L een impuls worden overgedragen van  $\frac{1}{4} n \bar{v} m V$ . Zodra echter de gemiddelde vrije weglengte l der gasmoleculen vergelijkbaar wordt met een der afmetingen van het lichaam of met die van het vat, waar het gas in zit, dan brengen de onderlinge botsingen verandering in de uitdrukking voor de impulsoverdracht. Dan brengen de op L vallende moleculen niet alle meer het volle bedrag  $mV$  over. De opvallende moleculen bestaan:

- voor een deel  $f_W$  uit moleculen, die zonder te botsen van W naar L lopen; hierdoor wordt  $f_W m V$  overgebracht;
- voor een deel  $f_{WW}$  uit paren moleculen, die op hun weg van W naar L gebotst hebben tegen andere moleculen, die van W kwamen; hierdoor wordt  $f_{WW} m V$  overgebracht;
- voor een deel  $f_{LW}$  uit moleculen, waarvan de aankomst op L het gevolg is van een botsing in het gas, waarbij een der partners afkomstig was van L en de andere van W; hierdoor wordt  $f_{LW} \frac{mV}{2}$  overgebracht. Immers de moleculen, die L verlaten (groep L) hebben gemiddeld geen translatiesnelheid, terwijl die van de andere (groep W) gemiddeld V bedraagt. Als moleculen van groep L eenmaal botsen met moleculen van groep W, zullen gemiddeld alle moleculen, die tot groep L behoord hebben, een snelheid  $\frac{V}{2}$  erbij gekregen hebben en degene, die tot groep W behoord hebben een bedrag  $\frac{V}{2}$  van hun snelheid V hebben afgestaan;
- voor een deel  $f_{LL}$  uit moleculen, afkomstig van een botsing, waarbij beide partners tot groep L behoorden; hierdoor wordt geen impuls overgedragen.

Voor de overdracht van tangentiële impuls P op iedere vierkante centimeter van het lichaam L moeten we daarom schrijven

$$\frac{P}{\sin \vartheta} = \frac{1}{4} n \bar{v} m V (1 - f_{LW} - f_{LL}) + \frac{1}{4} n \bar{v} f_{LW} \frac{mV}{2},$$

waarin  $\vartheta$  de hoek is tussen de normaal ter plaatse van het beschouwde oppervlak-element van L en de richting waarin de moleculen gemiddeld stromen. Aangezien we kunnen verwachten - hetgeen in bijzondere gevallen ook zal worden aangetoond - dat alle factoren f in eerste benadering recht evenredig zijn met het aantal deeltjes per  $\text{cm}^3$  en dus met de druk p, kan men schrijven

$$P = \left( \frac{dP}{dp} \right)_0 \frac{P}{1 + \frac{1}{2} (f_{LW} + 2 f_{LL})}. \quad (41)$$

Zo is het zoeken naar een betrekking tussen de kracht, die het gas op het lichaam uitoefent en de gasdruk herleid tot het zoeken naar de waarden van  $f_{LW}$  en  $f_{LL}$ .

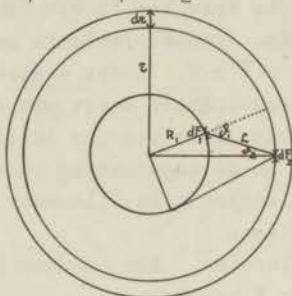


## § 2 Concentrische bollen

Ter vereenvoudiging veronderstellen we, dat alle moleculen dezelfde thermische snelheid  $\bar{v}$  hebben in alle richtingen (clausiusgas) en daardoor alle dezelfde vrije weglengte 1.

Volgens de cosinuswet wordt van een oppervlak-element  $dF_1$  van de bol I binnen een ruimtehoek  $d\omega_2$  in een richting, die een hoek  $\vartheta_1$  maakt met de normaal op  $dF_1$ , per seconde een aantal moleculen uitgezonden ten bedrage van

$$\frac{1}{4\pi} n \bar{v} dF_1 \cos \vartheta_1 d\omega_2.$$



figuur 7

Ter berekening van het aantal moleculen, dat een oppervlak-element  $dF_2$ , dat van  $dF_1$  uit onder een hoek  $d\omega_2$  gezien wordt, van een denkbeeldig met  $L$  concentrisch boloppervlak met straal  $r$  in het gas (fig. 7) inderdaad regelrecht bereikt, moet men dit bedrag nog vermenigvuldigen met de kans op een vrije weg  $L$ , welke  $e^{-L/l}$  bedraagt, wanneer  $L$  de weg is, die tussen  $dF_1$  en  $dF_2$  moet worden afgelegd. Dus  $dF_2$  ontvangt per seconde van  $dF_1$ :  $\frac{1}{4\pi} n \bar{v} dF_1 \cos \vartheta_1 d\omega_2 e^{-L/l}$  moleculen. Voor zeer lage druk nadert de  $e$ -macht tot 1.

Evenzo wordt het aantal moleculen, dat van  $dF_1$  naar  $dF_2$  gaat  $\frac{1}{4\pi} n \bar{v} dF_2 \cos \vartheta_2 d\omega_1$ , waarin  $d\omega_1$  de ruimtehoek is waaronder  $dF_1$  van  $dF_2$  uit gezien wordt. Dan volgt uit

$$dF_1 \cos \vartheta_1 d\omega_2 = dF_2 \cos \vartheta_2 d\omega_1 \quad (42)$$

de gelijkheid dezer aantallen.

Het aantal botsingen  $dn'$ , dat de door  $dF_1$  uitgezonden moleculen per seconde veroorzaken in een volume-element  $dF_2 dr = dF_2 dL \cos \vartheta_2$  bedraagt bij de beschouwde zeer lage druk:

$$\begin{aligned} dn' &= \frac{1}{4\pi} n \bar{v} dF_1 \cos \vartheta_1 d\omega_2 \frac{1}{l} dL \\ &= \frac{1}{4\pi} n \bar{v} dF_1 \cos \vartheta_1 d\omega_2 \frac{1}{l} \frac{dr}{\cos \vartheta_2}. \end{aligned}$$

Door (42) toe te passen krijgen we

$$\begin{aligned} dn' &= \frac{1}{4\pi l} n \bar{v} dF_2 d\omega_1 dr \\ &= \frac{n \bar{v}}{4\pi l} \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi dF_2 dr. \end{aligned}$$

Om het totale aantal botsingen van moleculen uit groep L te berekenen, dat iedere seconde plaats vindt in  $dF_2 dr$ , integreren we de uitdrukking

$$dF_2 dr \frac{n\bar{v}}{4\pi l} \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi$$

over alle waarden van  $\vartheta_2$  tussen 0 en  $\vartheta_3$ , waarin  $\vartheta_3 = \text{bg} \sin \frac{R_1}{r}$ . Zo vinden we voor dit aantal

$$dF_2 dr \frac{n\bar{v}}{4\pi l} 2\pi \int_0^{\vartheta_3} \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 = \frac{1}{2} \frac{n\bar{v}}{l} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2} \right]$$

Als gevolg van iedere botsing zullen twee moleculen het ruimte-element verlaten. Het aantal moleculen, dat per seconde de gehele bolring, welke besloten ligt tussen de stralen  $r$  en  $r + dr$ , verlaat, bedraagt dus

$$4\pi r^2 \frac{n\bar{v}}{l} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2} \right].$$

Indien wij eens veronderstellen, dat de richtingen na een botsing isotroop verdeeld zijn, dan kan een molecuul, dat een volume-element verlaat, alleen de binnenbol bereiken, indien zijn richting binnen de kegel ligt, waaronder L van het vertrekpunt uit gezien wordt. De kans op zo'n richting bedraagt

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\vartheta_3} 2\pi \sin \vartheta_2' d\vartheta_2' = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2} \right].$$

Nu kunnen we opschrijven hoeveel moleculen er per seconde op iedere  $\text{cm}^2$  van L vallen, afkomstig van zo'n botsing in de ruimte binnen een met L concentrische bol met straal  $R_2$ . We noemen dit aantal  $\frac{1}{2} n \bar{v} f_L$ .

$$\frac{1}{2} n \bar{v} f_L = \int_{R_1}^{R_2} \frac{4\pi r^2}{4\pi R_1^2} \cdot \frac{n\bar{v}}{l} \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2} \right]^2 dr. \quad (44)$$

Met behulp van de substitutie  $\sin \vartheta_3 = \frac{R_1}{r}$  herleiden we deze uitdrukking tot

$$\frac{1}{2} n \bar{v} f_L = \int_{\vartheta_{\min}}^{\pi/2} \frac{1}{2} \frac{n\bar{v}}{l} R_1 \cos \vartheta_3 \frac{(1 - \cos \vartheta_3)^2}{\sin^4 \vartheta_3} d\vartheta_3,$$

waarin  $\sin \vartheta_{\min} = \frac{R_1}{R_2}$ . Na integratie volgt:

$$f_L = \frac{2}{3} \frac{R_1}{R_2} p \left[ 1 - \frac{3}{2} \text{tg} \frac{\vartheta_{\min}}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \text{tg}^2 \frac{\vartheta_{\min}}{2} \right) \right]. \quad (45)$$

In verband met de weinige in de literatuur voorkomende bruikbare experimenten zal ik achtereenvolgens drie bijzondere gevallen behandelen, namelijk:

1. evenwijdige vlakke wanden  $\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} \rightarrow 0\right)$
2. een bol in een oneindig grote ruimte  $\left(\frac{R_1}{R_2 - R_1} \rightarrow 0\right)$
3. een bepaald geval van concentrische bollen.

### § 3 Evenwijdige vlakke platen

Uit (45) blijkt, dat voor  $\frac{R_2 - R_1}{R_1} \rightarrow 0$ , hetgeen neerkomt op  $\vartheta_{\min} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  de waarde van  $f_L$  nadert tot  $\frac{2D}{3} p$ , waarin  $D = R_2 - R_1$  de afstand der platen voorstelt. (Dit resultaat had men ook gemakkelijk ineens kunnen berekenen.)

De hierboven (§ 2) ingevoerde veronderstelling over de isotrope verdeling der richtingen na het botsen is in haar algemeenheid stellig onjuist. We kunnen nu een schatting maken van de verhouding  $S_{LW}$  (resp.  $S_{LL}$ ) van het aantal moleculen, dat per seconde inderdaad de wand bereikt na een L-W (resp. L-L) botsing tot  $\frac{1}{2} n \bar{v} f_L$ :

$$S_{LW} = \frac{f_{LW}}{f_L} \quad \text{en} \quad S_{LL} = \frac{f_{LL}}{f_L}. \quad (46)$$

Eenvoudig valt in te zien, dat voor evenwijdige vlakke platen  $f_L$  ook voorstelt welk deel der moleculen van groep L tussen de platen een botsing ondergaat. Sophus Weber<sup>18)</sup> publiceerde uitvoerig voor  $S_{LW}$  een schatting, welke ik verkort zal weergeven.

We denken ons eerst het geval, dat het botsende molecuul, afkomstig van de stilstaande plaat (groep L), in een richting loodrecht op de wand beweegt. Een willekeurig molecuul uit de groep W heeft een zodanige bewegingsrichting, dat de hoek  $\vartheta_r$ , die hij maakt met de bewegingsrichting van het botsende molecuul tussen  $\pi/2$  en  $\pi$  radialen ligt.

De gemiddelde relatieve snelheid tussen het beschouwde botsende molecuul uit groep L en de moleculen uit groep W bedraagt:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta_r \sin \vartheta_r \cdot \sqrt{\bar{v}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{v}^2 \cos \vartheta_r} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1) \bar{v}.$$

Evenzo volgt voor de gemiddelde relatieve snelheid tussen het beschouwde botsende molecuul en een willekeurig deeltje uit het gehele gas (groep L en W samen)

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta_r \sin \vartheta_r \sqrt{\bar{v}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{v}^2 \cos \vartheta_r} = \frac{4}{3} \bar{v}.$$

Het aantal L - W-botsingen (één uit groep L tegen één uit groep W) bedraagt dan

$$\frac{1}{2} n \pi r_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1) \bar{v}. \quad (47)$$

Het totale aantal van alle soorten botsingen in het gas is

$$n \pi r_0^2 \cdot \frac{4}{3} \bar{v}. \quad (48)$$

Voor de moleculen van groep L, die loodrecht op de wand bewegen, zou de verhouding van het aantal L - W-botsingen tot het totale aantal gelijk zijn aan  $\perp S_{LW} = \frac{\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{3}{4} = 0,64$ . Voor de moleculen van groep L die evenwijdig aan de wand lopen, zou deze verhouding  $\parallel S_{LW} = \frac{1}{2}$  zijn. Gemiddeld over alle mogelijke richtingen van de deeltjes van groep L rekenen we voor de gezochte waarde van  $S_{LW}$  met het rekenkundig gemiddelde tussen  $\perp S_{LW}$  en  $\parallel S_{LW}$ , dus  $S_{LW} = 0,57$ .

Het model van een clausiusgas legde reeds een grote beperking op aan de nauwkeurigheid van deze schatting. Het is echter een bekend feit, dat de overgang van het model van een clausiusgas op een maxwellverdeling de resultaten in het algemeen voor niet meer dan enige procenten beïnvloedt.

Wel lijkt de wijze van middelen tussen  $\perp S_{LW}$  en  $\parallel S_{LW}$  om  $S_{LW}$  te krijgen wat willekeurig, doch een volkomen exacte berekening door Prof. Kramers leverde  $S_{LW} = \frac{3}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0,56$ .

Bij isotrope strooiing van de gebotste moleculen, zoals men die voor L - W-botsingen tussen evenwijdige wanden mag verwachten, zou dus van  $f_L$  een fractie  $S_{LW} = \frac{3}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{2}$  terugkeren naar L na een L - W-botsing en een fractie  $S_{LL}^{is} = 1 - (\frac{3}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{2})$  na een L - L-botsing. Voor L - L-botsingen is het echter geenszins geoorloofd de strooiing isotroop te achten. Genoemde exacte berekening leerde, dat in werkelijkheid

$$S_{LL} = \frac{1}{6} S_{LL}^{is} = 0,073.$$

Zo vinden we

$$f_{LW} = S_{LW} f_L = (\frac{3}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{2D}{1} p,$$



zodat

$$f_{LL} = S_{LL} \bar{f}_L = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2D}{l} p}{6},$$

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \frac{P}{1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} + \frac{2(2/3 - 3/4\sqrt{2})}{6} \right] \frac{2D}{l} p},$$

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \frac{P}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{D}{l} p},$$

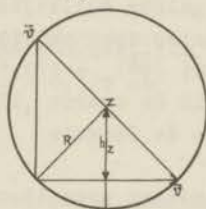
(49)

hetgeen ik, terwille van de experimentele toetsing schrijf in de vorm

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \frac{P}{1 + S_1 \frac{D}{l} p}, \quad (50)$$

waarin  $S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  volgens de theorie.

Voor een schatting van  $S_{LL}$  in de geest van Weber moeten we er aan denken, dat van twee moleculen, die beide bijna loodrecht van de wand vertrekken, de kans, dat één van beide na één onderlinge botsing weer terug komt, zeer klein is. Na zo'n botsing is de richtingsverdeling dus stellig niet isotroop. Het geval, waarin het ene molecuul loodrecht de wand verlaat en het andere bijna evenwijdig aan de wand loopt is een betere representant van het gemiddelde verloop van de L-L-botsingen. Uit het snelheidsdiagram (fig. 8) is eenvoudig af te lezen, dat  $S_{LL} = \frac{1}{2} \frac{R - h_z}{2R}$  dus  $S_{LL} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} = 0,077$ . De factor  $\frac{1}{2}$  moet worden toegevoegd, omdat beide partners van een botsing tot  $f_L$  behoren, terwijl slechts één ervan op L terugkeert. Ook nu blijkt de schatting slechts enkele procenten te verschillen van de juiste waarde.



figuur 8

#### § 4 Een bewegende bol in de ruimte

##### a) Theorie

Uit (45) volgt, dat voor  $\frac{R_1}{R_2 - R_1} \rightarrow 0$ , hetgeen neerkomt op  $v_{\min}^2 \rightarrow 0$ , de waarde van  $f_L$  nadert tot  $\frac{2}{3} \frac{R_1}{l} p$ .

In dit geval zal het in eerste instantie niet nodig zijn om rekening te houden met botsingen van moleculen uit groep L met andere moleculen uit die groep. Immers, van L gaan per seconde  $4\pi R_1^2 \cdot \frac{1}{4} n \bar{v}$  moleculen uit, welke gemiddeld op een afstand  $R_1 + l$  van het middelpunt voor het eerst botsen. Op die afstand bevinden er zich dan nog slechts  $\frac{4\pi R_1^2}{4\pi(R_1+l)^2} \cdot \frac{1}{4} n \bar{v}$  moleculen van groep L. De botsingen, die op genoemde afstand plaats vinden, bestaan dus voor een gedeelte

$$1 - \frac{R_1^2}{(R_1 + l)^2} = 1 - \left[ \frac{R_1}{l(1 + \frac{R_1}{l})} \right]^2,$$

dus practisch voor 100% uit zulke waarvan de deelnemende moleculen van verschillende wanden afkomstig zijn. Om deze reden zou dus  $S_{LL}^{15} = 0$  en dus  $S_{LW}^{15} = 1$  zijn. Indien isotrope strooiing verondersteld mag worden, volgt:

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \frac{P}{1 + \frac{1}{3} \frac{R_1}{l} p},$$

(51)

hetgeen ik, terwille van de experimentele toetsing herleid tot:

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{R_1}{l} p\right),$$

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 - S_2 \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \frac{R_1}{l} p. \quad (52)$$

waarin  $S_2 = \frac{1}{3}$  volgens de theorie.

Bekijken we de botsingen in een gekozen ruimte-element wat nader, dan zal vooral op grote afstand van de bol geen isotrope strooiing plaats vinden. Immers, de moleculen van groep W komen gelijkmatig van alle kanten, terwijl die van groep L alle uit bijna dezelfde richting komen. Hierdoor zal  $S_{LW}$  iets kleiner dan 1 kunnen worden.

Vlakbij de bol is de kans, dat na een L - L-botsing een molecuul naar L wordt teruggestuurd niet meer nul. Hierdoor zou  $S_{LL}$  iets groter dan nul kunnen zijn. Daar deze storende effecten elkaar tegenwerken geeft formule (51) wellicht toch een behoorlijke schatting van de kracht op de bol als functie van de gasdruk. Een zuiverder schatting zou in principe zeer wel mogelijk en interessant zijn, maar zou waarschijnlijk bijzonder omvangrijk rekenwerk vereisen.

#### b) Experiment

K n u d s e n en W e b e r <sup>19)</sup> lieten een halter in een horizontaal vlak torsieslingeringen uitvoeren om een verticale draad, die in het zwaartepunt bevestigd is. Aan de uiteinden van de halter, die 16,04 cm lang is, zitten twee gelijke bolletjes met straal  $R_1$ .

De constanten voor hun toestel waren:

$R_1 = 0,389$  cm;  $(\frac{dP}{dp})_0 = 479 \cdot 10^{-7}$  \*); temperatuur 20,2 °C.

Voor  $\gamma^1$  nam ik de waarde  $\gamma^1 = 6,74$ , berekend uit gemeten waarden van  $\eta$  voor lucht volgens de formule

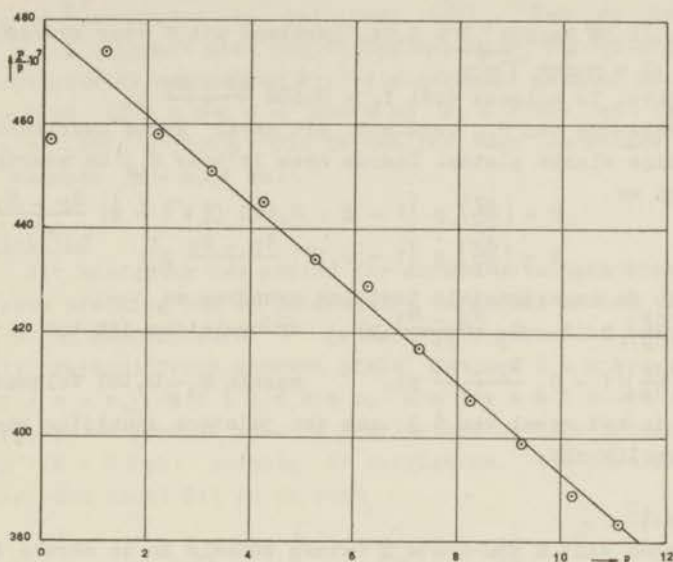
$$\gamma^1 = \frac{\eta}{0,499} \sqrt{\frac{\pi}{8, p}}$$

De waarnemingen neem ik over in tabel II

p	$10^3 P$	$\frac{10^3 P}{p}$
0,14	0,0064	0,05
1,19	0,0564	0,0474
2,21	0,1013	0,0458
3,23	0,1458	0,0451
4,24	0,1876	0,0445
5,25	0,2279	0,0434
6,25	0,2679	0,0429
7,25	0,3024	0,0417
8,24	0,3356	0,0407
9,23	0,3684	0,0399
10,21	0,3975	0,0389
11,19	0,4283	0,0383

Tabel II

\*) Eigenlijk is P de totale kracht in dynes op de bol bij een snelheid van 1 cm/sec. Dit is echter slechts een kwestie van een factor, welke geen invloed heeft op de waarde van  $S_2$ .



figuur 9

Uit de helling van de rechte in de grafische voorstelling, waarin  $\frac{F}{p}$  als functie van  $p$  wordt uitgezet (fig. 9) volgt:  $S_2 = 0,32$ .

### § 5 Twee concentrische bollen

#### a) Theorie

K n u d s e n <sup>20)</sup> liet een bol L met een straal  $R_1$  torsieslingeringen in zuurstof uitvoeren om een verticale ophangdraad door zijn middelpunt. De bol L bevond zich binnen een iets grotere bol W met straal  $R_2$ . De in § 2 ontwikkelde theorie geldt voor een eenparig voortbewegende bol. Bij een draaiende bol kan het voorkomen, dat een molecuul deze bol verlaat en er na een botsing weer op terugkeert op een plaats met een tangentiële snelheid van andere richting en grootte. Dit verschijnsel zal zich het meest voordoen bij moleculen, waarvoor de snelheid een grote tangentiële component bezit. Snelheden met grote tangentiële component komen echter volgens de cosinuswet veel minder vaak voor dan die met grote normale component. Als het zich voordoet zal dit de impulsoverdracht groter maken dan we berekenen als we er geen rekening mee houden. De groep moleculen met een grote tangentiële component levert ook juist de meeste L - L-botsingen, waarvan een partner terugkeert naar L. Dit soort botsingen vermindert de impulsoverdracht. Aangezien deze twee correcties elkaar tegenwerken zal ik de formule (45) voor de voortbewegende bol toepassen op het geval van een draaiende bol als ik  $S_{LW}$  bereken voor isotrope strooiing en  $S_{LL} = 0$  neem. De gegevens bij de proeven van Knudsen zijn:  $R_1 = 1,715$ ;  $R_2 - R_1$  is ca.  $0,5^*$ , temperatuur  $17,6^\circ$  C.

\*) Daar de afstand  $R_2 - R_1$  voor Knudsen destijds van geen belang was, is de waarde slechts bij benadering bekend.



Voor  $\gamma_1$  nam ik de waarde  $\gamma_1 = 6,94$ , berekend uit  $\eta$  voor zuurstof volgens de formule  $\gamma_1 = \frac{\eta}{0,499} \sqrt{\frac{1}{81\rho}}$ .

In dit geval is volgens (45)  $f_{L_1} = 0,668 \frac{R_2 - R_1}{\gamma_1} p$ .

Voor de berekening van  $S_{LW}$  vertoont dit geval grote overeenkomst met dat der evenwijdige vlakke platen. Daarom neem ik voor  $S_{LW}$  de waarde  $S_{LW} = \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ .

Nu krijgen we

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 p \left[1 - \frac{1}{2} \cdot 0,668 \left(\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{R_2 - R_1}{\gamma_1} p\right],$$

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 p \left[1 - 0,187 \frac{R_2 - R_1}{\gamma_1} p\right]. \quad (53)$$

Terwille van de experimentele toetsing schrijven we

$$P = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 p \left(1 - S_3 \frac{R_2 - R_1}{\gamma_1} p\right) \quad \text{en herleiden dit tot}$$

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{dP}{dp}\right)_0 \left(1 - S_3 \frac{R_2 - R_1}{\gamma_1} p\right), \quad \text{waarin } S_3 = 0,187 \text{ volgens de theorie.}$$

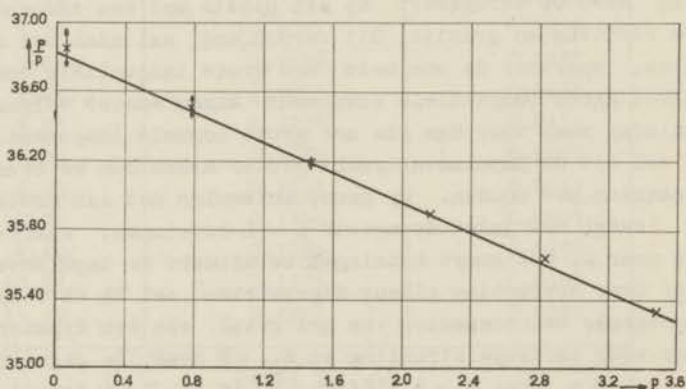
Evenals in het geval van § 3 zou een juistere schatting van  $S_3$  in principe wel mogelijk zijn.

#### b) Experiment

De metingen van Knudsen staan vermeld in de eerste twee kolommen van tabel III. De grafische voorstelling van  $\frac{P}{p}$  tegen  $p$  moet bij lage druk

p	1) $P_{exp.}$	$P_{exp.} - P_0$	$\frac{P_{exp.} - P_0}{p}$
0,060	5,16	2,21	36,85
0,779	31,39	28,44	36,51
1,481	56,55	53,60	36,19
2,166	80,68	77,73	35,89
2,835	104,02	101,07	35,65
3,489	126,22	123,27	35,33

Tabel III



figuur 10

1)  $P_{exp.}$  weer in andere maten, hetgeen hier van geen belang is.



recht zijn en de  $\frac{P}{p}$ -as snijden in het punt  $(\frac{dP}{dp})_0$ . Van de demping  $P_{exp}$ , die Knudsen opgeeft moet nog de nuldemping  $P_0$  worden afgetrokken. Ik heb nu gezocht naar de waarde van  $P_0$ , die genoemde grafiek recht maakt. Zo vond ik  $P_0 = 2,96$  (Knudsen geeft op  $P_0 = 2,95$ ) en  $(\frac{dP}{dp})_0 = 36,81$  (Knudsen  $(\frac{dP}{dp})_0 = 36,85$ ). Uit de helling van de rechte berekende ik  $S_3 = 0,154$ , wanneer  $l = 6,94$  cm.

### § 6 Nabetrachting

Terwijl in dit hoofdstuk het gebied der eerste botsingen steeds beschouwd werd als eerste afwijking van de moleculaire toestand, hebben Knudsen en Weber in genoemd werk <sup>19)</sup> getracht dit gebied te benaderen van de hoge druk uit. Verschillende auteurs, zoals Cunningham, Knudsen en Weber, Millikan, Mattaucah en Davies, hebben geprobeerd de formule voor de wrijvingskracht op een bewegende bol bij normale druk ( $P = 6\pi\eta r$ ) zodanig te corrigeren, dat zij algemene geldigheid verkreeg. Men zocht dit in de vorm

$$P = 6\pi\eta r \left( 1 + a \frac{l}{R_1} p + b \frac{l}{R_2} p e^{-c \frac{R_1}{l} p} \right)^{-1} \quad (55)$$

In deze uitdrukking treden drie empirische constanten op. Indien geen andere voorwaarde aan  $a$ ,  $b$  en  $c$  wordt opgelegd dan dat zij de formule tot een bruikbare afbeelding van de waarnemingen moeten maken, ligt er binnen zekere grenzen enige vrijheid in de keuze der waarden dier factoren. Dit blijkt ook wel uit de verscheidenheid, die bij de verschillende auteurs aan den dag treedt, ook wanneer in alle formules van een zelfde waarde van  $l$  gebruik gemaakt wordt. (Zie tabel IV.)

Auteur	a	b	c
Knudsen + Weber <sup>19)</sup>	1,10	0,572	1,14
Millikan <sup>21)</sup>	1,24	0,41	0,87
Mattaucah <sup>22)</sup>	1,28	0,446	1,66
waarschijnlijkste waarde volgens Davies <sup>23)</sup>	1,257	0,400	1,10

Tabel IV

De wijze, waarop Davies de waarschijnlijkste waarde uitreken is nogal aanvechtbaar. Hij middelt de waarden van  $a$  van Millikan en Mattaucah, middelt vervolgens  $a + b$  van Millikan en Knudsen en Weber en bepaalt daarna  $c$  met behulp van een willekeurig punt uit de grafiek van  $P$  tegen  $p$ .

Uit de beschouwingen in de voorgaande paragrafen is gebleken, dat in het gebied der eerste botsingen het verloop van  $P$  is te beschrijven met behulp van slechts twee constanten,  $(\frac{dP}{dp})_0$  en  $S_1$ . Dat betekent, dat er tussen de drie factoren  $a$ ,  $b$  en  $c$  nog een verband bestaat, waarmee destijds geen rekening gehouden is. Het mag dan ook geen verwondering wekken, dat geen overeenstemming met de theorie gevonden wordt, wanneer we (55) voor  $R_1 < l$  in eerste benadering herleiden tot de vorm  $P = (\frac{dP}{dp})_0 p (1 - S_2 \frac{R_1}{l} p)$  (56) (vgl. § 4a). De waarde, die dan gevonden wordt voor  $S_2$ , is niet gelijk aan  $\frac{1}{3}$ .

## HOOFDSTUK III

### OVERZICHT VAN METINGEN, WAARUIT DE GLIJDINGSCOËFFICIENT

#### kl BEREKEND KAN WORDEN

##### § 1 De verschillende methoden

De methoden van onderzoek kunnen in vijf soorten worden ondergebracht:

1. De weerstand die een voortbewegend lichaam in een gas ondervindt
2. De weerstand bij gasstroming door buizen en spleten
3. De thermo-moleculaire druk
4. Het koppel, overgebracht door een gas van een eenparig draaiende cylinder op een coaxiale rustende cylinder
5. De weerstand van een gas tegen een heen en weer draaiend lichaam.

In de volgende paragrafen zullen de hoofdtrekken van elk dezer methoden beknopt worden aangegeven. De beoordeling der resultaten vereist echter nog een korte toelichting.

Bij het vergelijken van getalwaarden van alle grootheden, die berekend zijn met behulp van de kennis van de vrije weglengte  $l$  der moleculen, moeten wij er rekening mee houden, dat  $l$  steeds berekend wordt uit metingen van de viscositeit volgens  $\eta = k'n m \bar{v} l$ . Vele waarnemingen dateren uit een tijd, waarin men de door Boltzmann berekende waarde  $k' = 0,3502$  gebruikte, andere zijn gebaseerd op de waarde  $k' = 0,30967$  van O.E. Meyer<sup>5)</sup>, terwijl de huidige stand der wetenschap die van Chapman vereist:  $k' = 0,499$ , meestal afgerond tot  $k' = \frac{1}{2}$ . Voor  $k$  (vroeger vaak  $A$  of  $A'$  genoemd) kreeg men daardoor te lage waarden. Voor een juiste vergelijking met moderne resultaten moeten de oude vermenigvuldigd worden met  $\frac{0,499}{0,3502} = 1,43$  of met  $\frac{0,499}{0,30967} = 1,61$ . Op de waarde van  $\zeta = kl$  heeft deze correctie natuurlijk geen invloed.

##### § 2 Geschiedenis

Helmholtz en Piotrowski<sup>14)</sup> publiceerden in 1860 zowel theorie als waarnemingen betreffende de glijding van bewegende vloeistoffen langs een vaste wand. Zij waren de eersten, die met de ook thans nog gebruikelijke definitie van de glijdingscoëfficiënt werkten. Hun metingen vallen buiten het bestek van dit boekje, omdat ze niet met gassen geëxperimenteerd hebben.

Kundt en Warburg<sup>24)</sup> waren de eersten, die glijding aan gassen onderzochten. De waarde, die aan hun metingen gehecht kan worden beperkt zich, objectief gezien, tot die van een behoorlijke schatting. Bij alle metingen uit de jaren, waarin nog geen vloeibare lucht gebruikt werd voor het uitvriezen van verzadigde dampen van kwik en water, moet met mogelijke storingen als gevolg hiervan rekening worden gehouden. Niettemin waren hun getallen zo dicht in de buurt van hetgeen door latere nauwkeurigere methoden gevonden werd, dat nog lange tijd de proeven van Kundt en Warburg een waardevolle steun geweest zijn.

Naar aanleiding van het initiatief van Ehrenhaft<sup>25)</sup> om de lading van het electron te bepalen uit de valsnelheid van kleine deeltjes,



begon K n u d s e n een onderzoek over de weerstand van stromende gassen in het algemeen. Spoedig daarna maakte M i l l i k a n een begin met een systematisch onderzoek over de glijding van een gas langs een vallende bol. Daarbij maakte hij, zonder dit te vermelden, gebruik van een door K n u d s e n gepubliceerde wijziging van de wet van Stokes voor een bewegende bol. Hierdoor en door technische verbeteringen gelukte het hem op den duur een nauwkeuriger bepaling van de lading van het electron uit te voeren.

Eerst heeft men nog al wat moeite gehad met de interpretatie der metingen, doordat men nog niet wist, door welke drukken het gebied van de glijding begrensd werd. K n u d s e n en W e b e r <sup>19)</sup> bijvoorbeeld brengen de schijnbaar afwijkende resultaten van M c. K e e h a n <sup>26)</sup> met die van henzelf in overeenstemming door een betere begrenzing van het geldigheidsgebied. De strooiing in de voorbereidende waarnemingen van Z e l e n y en M c. K e e h a n <sup>27)</sup> is zo groot, dat ze waardeloos geacht moeten worden. Zij werkten met „bolletjes" van plantaardige sporen, waarvan de rondheid ook blijkens de foto's maar zeer betrekkelijk was.

Met steeds toenemende nauwkeurigheid bereiken M i l l i k a n en zijn medewerkers in 1923 resultaten, die M i l l i k a n telkens in overzichtten met theoretische interpretaties verenigt <sup>28)</sup> <sup>29)</sup>.

In 1925 sluit M a t t a u c h <sup>22)</sup> de rij met een bijzonder fraaie serie metingen, waarbij hij de naar zijn mening onzekere bepaling van de diameter der gebruikte bolletjes weet te vermijden.

In verband met de afwijkende uitkomsten van de lading van het electron, gevonden met verschillende methodes, hervatten I s h i d a, F u k u s h i m a en S u e t s u g u <sup>30)</sup> de onderzoekingen van de vallende oliedruppels in 1937 nog eens. Ook een daarop aansluitend onderzoek <sup>31)</sup> over de vorm van de druppels leent zich voor een berekening van k.

Met geheel andere middelen was K n u d s e n in 1909 een theoretisch en experimenteel onderzoek over de glijding begonnen, waarbij hij zich niet beperkte tot de beweging van een bol, doch ook stroming door buizen onderzocht. De genoemde metingen van K n u d s e n en W e b e r <sup>19)</sup> werden uitgevoerd met twee bolletjes aan de uiteinden van een in zijn zwaartepunt aan een torsiedraad opgehangen horizontale halter.

De laatste onderzoekingen in de geest van K n u d s e n dateren van 1937, toen R a s m u s s e n <sup>33)</sup> de stroming door verschillend gevormde spleten mat en van 1939 door A d z u m i <sup>34)</sup>, die de gassen en vooral mengsels van organische gassen weer door buizen met ronde doorsnede liet stromen. W. K l o s e <sup>32)</sup> schreef in 1931 een beknopt en helder artikel, waarin hij de balans opmaakt van hetgeen in dat jaar over de stroming van gassen in buizen bekend was.

Een derde soort onderzoekingen, waarbij de viscositeit van gassen als functie van de druk werd nagegaan, is die, waarbij de demping van slingerende lichamen gemeten wordt. De oriënterende metingen van K u n d t en W a r b u r g <sup>24)</sup> noemde ik reeds. Daarna deed C r o o k e s <sup>35)</sup> een groot aantal waarnemingen aan vele gassen door de demping te meten van een verticaal wiekje, dat om een verticale as trilt. Helaas zijn de gegevens onvol-



doende om hieruit waarden voor  $k$  te berekenen. Hijzelf blijft staan bij de constatering, dat inderdaad vermindering van schijnbare viscositeit optreedt bij verlaging van de druk.

H o g g <sup>36) 37)</sup> daarentegen publiceert twee series metingen met een schommelende schijf tussen evenwijdige platen van verrassend hoge nauwkeurigheid. De metingen in lucht van 1906 geschieden nog zonder gebruik van vloeibare lucht, doch de reiniging met chemische middelen was zeer zorgvuldig. In 1910 herhaalde hij de metingen. Bij zijn proeven in 1910 aan waterstof maakte hij wel gebruik van vloeibare lucht. De bepaling van de demping in vacuo laat nog wat te wensen over, evenals de bepaling van de spanning, welke voor verscheidene punten met een manometer van M a c L e o d gedaan werd. In het gebied van de glijding, waar de invloed van deze factoren niet groot is, mogen de metingen van H o g g stellig de nauwkeurigste genoemd worden, welke ooit volgens deze methode gedaan zijn.

Pas in 1938 werden weer metingen met de schommelende schijf verricht, waaruit de glijding bepaald kan worden, door V a n I t t e r b e e k en K e e s o m <sup>38)</sup>, ditmaal aan helium bij kamertemperatuur en bij extreem lage temperaturen. Helaas is hierbij te weinig zorg besteed aan de bepaling van de dikte  $D$  van de wrijvende gaslaag.

V a n I t t e r b e e k en van P a e m e l <sup>39)</sup> zetten in 1940 de onderzoekingen bij lage temperaturen voort. De resultaten voor  $k$  zijn nogal onwaarschijnlijk.

Tenslotte wordt in hoofdstuk V een nieuwe reeks proeven met een schommelende schijf beschreven. Het daarin genoemde toestel werd geconstrueerd voor metingen tot in het knudsengebied. De grote gevoeligheid die daarvoor vereist was, maakte het toestel ook zeer geschikt voor metingen van de glijdingscoëfficiënt. Bovendien meen ik, dat de daarin aangewende rekenmethode aanbeveling verdient.

In 1935 berekende W e b e r <sup>40)</sup> voor de thermo-moleculaire druk op grond van waarnemingen van K n u d s e n <sup>41)</sup>, een semi-empirische formule waarin  $k$  voorkomt. De waarden van  $k$ , die W e b e r, K e e s o m en S c h m i d t daarmee berekenden uit nieuwe metingen van de laatste <sup>42)</sup>, liggen in de goede orde van grootte. Grotere betekenis mogen we aan deze  $k$  - bepaling echter niet hechten.

De metingen van V a n I t t e r b e e k en C l a e s <sup>43)</sup> over de invloed van een magnetisch veld op de viscositeit van zuurstof hadden voor de glijding gebruikt kunnen worden. Ze werden echter met hetzelfde toestel gedaan als V a n I t t e r b e e k en K e e s o m <sup>38)</sup> gebruikten en bevatten daardoor een te grote onzekerheid in de afstand der wanden.

### § 3 Hoofdtrekken van de $k$ -bepaling met vallende bolletjes

Een vrij vallend bolletje krijgt na enige tijd een eenparige beweging, doordat wrijvingskracht en zwaartekracht elkaar opheffen. Rekening houdend met de opwaartse kracht volgens A r c h i m e d e s wordt de vergelijking:

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 (\rho' - \rho) g = \frac{6 \pi \eta r_1 v'}{1 + \frac{\eta}{\rho' r_1}} \quad (57)$$

$$v' = \frac{2}{9} \frac{r_1^2 (\Gamma' - \rho) g}{\gamma} \left(1 + \frac{e}{r_1}\right) \quad (58)$$

- Hierin is  $v'$  de eindsnelheid van het vallende bolletje  
 $r_1$  de straal van het bolletje  
 $\Gamma'$  de dichtheid van het bolletje  
 $\rho$  de dichtheid van het gas waarin het valt  
 $\gamma$  de viscositeit van het gas waarin het valt  
 $g$  de versnelling van de zwaartekracht.

Een groot aantal metingen werd verricht door Millikan en zijn medewerkers met het oog op de bekende methode ter bepaling van de lading van het electron. Daarbij wordt ook de vrije val van de druppeltjes bekeken, en bovendien de opwaartse snelheid van geladen druppeltjes in een homogeen electrisch veld. Dit levert een tweede betrekking:

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 (\Gamma' - \rho) g - Fe_1 = - \frac{6 \pi \eta r_1 v''}{1 + \frac{e}{r_1}}, \quad (59)$$

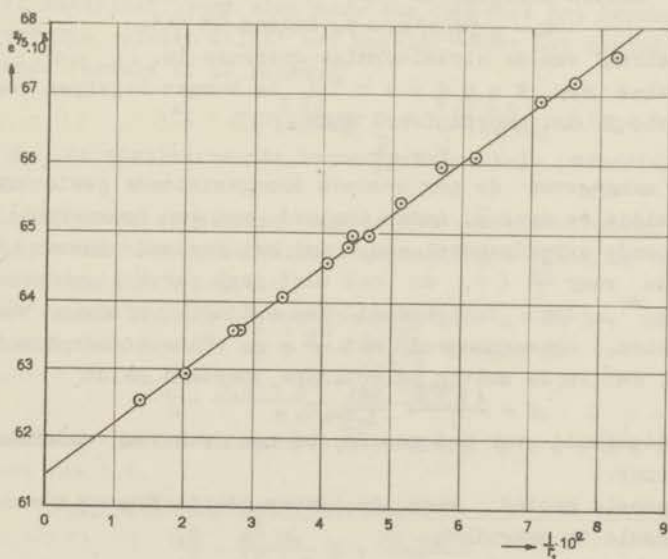
waarin  $F$  de electrische veldsterkte is.

$e_1$  de lading van het bolletje

$v''$  de waarde van de opwaartse eenparige snelheid.

Uit (58) en (59) volgt na eliminatie van  $r_1$  in de hoofdtermen:

$$e_1 = \frac{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{\rho}{2} r_1\right)^{\frac{3}{2}} (v' + v'') \left(\frac{v'}{(\Gamma' - \rho) g}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{e}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}}$$



figuur 11

Noemen we de teller  $e_0$ , dan krijgen we

$$e_0^{2/3} = e_1^{2/3} (1 + k \frac{1}{r_1}).$$

Als  $\eta$  bekend is en de beide valsnelheden gemeten worden is  $e_0$  te berekenen.

Een grafische voorstelling van  $e_0^{2/3}$  als functie van  $\frac{1}{r_1}$  zou de waarde van  $k$  leveren. Immers

$$k = \frac{\text{helling t.o.v. } \frac{1}{r_1} \text{ -as}}{\text{stuk van pos. } e_0^{2/3} \text{-as afgesneden}} \quad (60)$$

De berekening van  $r_1$  is hiervoor echter nodig.

M i l l i k a n voert nu een benadering in twee stappen uit. In eerste benadering wordt  $r_1$  gevonden uit de vrije valsnelheid  $v'$  zonder glijdingscorrectie, dus uit

$$v' = \frac{2 r_1^2 (\tau' - p) E}{9 \eta}.$$

Met deze  $r_1$  wordt de grafiek getekend en  $k$  berekend. Herhaling van hetzelfde werk met glijdingscorrectie blijkt nu een volkomen rechte grafiek te leveren, waaruit de definitieve waarde van  $k$  wordt afgelezen.

De reproduceerbaarheid van de waarde voor de lading  $e_1$  van het electron bij het gebruik van andere bolletjes en gassen bevestigt de juistheid der gevonden waarde van  $k$ .

#### § 4 Hoofdtrekken van de k-bepaling uit de doorstroming

##### a) Door buizen

Wanneer een gas door een cilindervormige buis ter lengte  $L$  stroomt onder invloed van een drukverschil  $\Delta p$  tussen de uiteinden, dan kan de per tijdseenheid doorgestroomde gewichtshoeveelheid gas  $Q$  volgens P o i s s e u i l l e worden weergegeven door

$$Q = \frac{\pi R_b^4}{8 \eta L} \rho \bar{p} \Delta p, \text{ indien } \frac{R_b}{l} \gg 1, \quad (61)$$

waarin  $R_b$  de straal van de cirkelvormige doorsnee is.

Om de formules van K n u d s e n <sup>41)</sup> te kunnen begrijpen voeren we een nieuwe grootheid  $\tau$  in, gedefinieerd door

$$\tau = \frac{Q}{\Delta p}, \quad (62)$$

waarmee wordt aangegeven de per seconde doorgestroomde gewichtshoeveelheid gas bij een gemiddelde druk  $\bar{p}$  onder invloed van een drukverschil van 1 microbar. Hij toonde experimenteel aan, dat het verband tussen  $\tau$  en  $\bar{p}$  niet meer lineair is voor  $\frac{R_b}{l} < 1$ , en ook niet zwak parabolisch door de invloed van de glijding <sup>\*</sup>), doch integendeel een duidelijk minimum vertoont in de buurt van drukken, overeenkomend met  $\frac{R_b}{l} = \frac{1}{3}$ . Theoretisch toont K n u d s e n <sup>41)</sup> aan, dat in de zuiver moleculaire toestand geldt

$$\tau = \frac{4 \sqrt{2} \rho}{3} \frac{R_b^3}{L}, \quad (63)$$

waarin  $\rho$  de dichtheid van het gas is bij een druk van 1 microbar en heersende temperatuur.

Om nu het gehele gebied weer te geven stelt K n u d s e n voor, als empirische formule te gebruiken

$$\tau = a' p + b' \frac{1 + c_1 p}{1 + c_2 p}, \quad \text{waarin} \quad (64)$$

$$a' = \frac{\pi R_b^4 \rho}{8 \eta L}, \quad (65)$$

<sup>\*</sup>) zie hoofdstuk II A, § 4.



de uitdrukking van P o i s e u i l l e en

$$b' = \frac{4\sqrt{2}\rho}{3} \cdot \frac{R_b^3}{L} \quad (66)$$

de coëfficiënt der moleculaire wrijving is.

De getallenwaarde van  $c_1$  en  $c_2$  moet empirisch bepaald worden. Deze getallen blijken verband te houden met de factor  $k$ . Dat was ook wel te verwachten, omdat in de hoofdterm de invloed van de glijding nog niet was opgenomen.

Voor grote waarden van  $p$  gaat formule (64) over in:

$$,T = a' p + b' \frac{c_1}{c_2} = \frac{\pi R_b^4 \rho}{8 \eta L} p \left( 1 + \frac{32}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} p} \frac{1}{R_b p} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right) \quad (67)$$

De formule van P o i s e u i l l e met glijding luidt, volgens (40) en (62)

$$,T = \frac{\pi R_b^4 \rho}{8 \eta L} p \left( 1 + \frac{4\zeta}{R_b} \right),$$

zodat

$$\frac{4\zeta}{R_b} = \frac{32}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} p} \cdot \frac{1}{R_b p} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad (68)$$

Aangezien  $\zeta = k l$  en volgens (17)  $l = \frac{\sqrt{\pi}}{0,499} \frac{\eta}{p \sqrt{p}}$ , krijgen we nu, na invullen in (68)

$$\frac{k \sqrt{\pi} \eta}{0,499 p \sqrt{8} p} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} p} \frac{\eta}{p} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad \text{dus}$$

$$k = \frac{32}{3\pi} \cdot 0,499 \frac{c_1}{c_2} = 1,7 \frac{c_1}{c_2} \quad (69)$$

Het gemiddelde van al K n u d s e n s waarnemingen levert, op deze wijze berekend, de waarde  $k = 1,37$ . Er valt evenwel over te discussiëren of deze analyse der waarnemingen de meest betrouwbare waarde voor  $k$  oplevert.

b) Door spleten

R a s m u s s e n <sup>33)</sup> mat in 1937 de hoeveelheden  $,T$ , die door spleten stroomden. Het materiaal leent zich voor een deel tot het berekenen van  $k$ .

Voor ringvormige spleten blijkt het mogelijk <sup>123p)</sup> voor het gebied van de glijding de volgende formule af te leiden:

$$\frac{,T}{,p} = \frac{\pi d^3}{8 \eta^2 \log R_2/R_1} p + \frac{\pi d^2 \zeta p}{\eta^2 \log R_2/R_1} = A' p + B', \quad (70)$$

waarin  $R_1$  en  $R_2$  de stralen van de begrenzendende cirkels voorstellen en  $d$  de spleetwijdte is.

Onder het gebied van de glijding zal in dit verband verstaan moeten worden het gebied, waarin de gemiddelde vrije weglengte klein is vergeleken bij de kleinste afmeting van de spleet.

Een grafiek van  $,T$  tegen  $p$  levert waarden voor  $A'$  en  $B'$ . Na enige herleiding met behulp van  $\zeta = k l$  en  $p l = \frac{\eta \sqrt{\pi}}{0,499}$  krijgen we

$$k = \frac{0,499 B' e \log R_2/R_1}{\pi d^2 \sqrt{\pi} p} \quad (71)$$

Van verschillende gassen en spleetwijdten kreeg R a s m u s s e n waarden in de buurt van 1,4.

Voor rechthoekige spleten wordt de formule:

$$\frac{,T}{,p} = \frac{d_1^3 d_2}{12 L \eta} p + \frac{d_1^2 d_2 \zeta p}{2 L \eta},$$

waaruit op analoge wijze grafisch de waarde

$$B'' = \frac{d_1^2 d_2 \zeta p}{2 L \eta}$$

bepaald kan worden zodat

$$k = \frac{B'' \cdot 2 L}{d_1^2 d_2 \cdot 0,499} \sqrt{\frac{8, p}{\pi}} \quad (72)$$

Deze laatste methode werd alleen met waterstof beproefd. Het resultaat,  $k = 1,7$  is aanzienlijk hoger dan bij andere metingen. R a s m u s s e n merkte dit zelf niet op, doordat hij de glijding alleen voor de ringvormige spleet uitrekende.

Zijn proeven met cilindervormige spleten werden in het gebied van de glijding helaas niet in voldoende aantal verricht.

### § 5 Hoofdtrekken van de k-bepaling uit de thermo-moleculaire druk.

In hoofdstuk II A werd het probleem van de glijding behandeld voor het geval, waarin geen temperatuurverschillen in de beschouwde ruimte optreden. De toestand werd bepaald door de grensvoorwaarde:

$$u_0 = \zeta \frac{\partial u}{\partial x},$$

waarin volgens K n u d s e n  $\zeta = k l$ .

Indien er een temperatuurgradiënt is in de lengte (y-) richting van een buis met straal r, dan moet volgens M a x w e l l <sup>10)</sup> een thermische term toegevoegd worden.

K n u d s e n <sup>41)</sup> bracht aanvankelijk de grensvoorwaarde in de vorm

$$\frac{1}{4} n m \bar{v} (u_0 + k l \frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{1}{4} n m \bar{v} (\frac{3}{2} \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial y}). \quad (73)$$

In de preciese theorie, die nog niet is opgesteld, evenmin als die voor k zonder temperatuurgradiënt, zal het rechter lid dezer uitdrukking met een waarschijnlijk van 1 verschillende numerieke coëfficiënt vermenigvuldigd dienen te worden. W e b e r <sup>40)</sup> heeft (73) vervangen door de semi-empirische formule

$$u_0 + k l \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{4} k_1 \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_2}} \quad (74)$$

Hiermee wordt de mogelijkheid geschapen, dat in het knudsengebied de snelheid der moleculen bij benadering de juiste theoretisch bekende vorm zal aannemen.

Uit de bewegingsvergelijking voor de stroming van een gas in een buis kunnen we nog de betrekking halen:

$$u = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dl} (r^2 - \frac{1}{2} R_b^2). \quad (75)$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt nu de formule voor het thermo-moleculaire drukverschil:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \frac{p}{T} \frac{1}{\frac{\pi}{24k_1} (\frac{R_b}{l})^2 p^2 + \frac{\pi}{6k_1} (k + \frac{1}{2}) \frac{R_b}{l} p + \frac{\pi}{6} \frac{k_1}{k}} \quad (76)$$

Naar machten van p beschouwd is in de noemer van (76) de term met  $p^2$  de hoofdterm. Wanneer wij door achtereenvolgende benaderingen de coëfficiënten van de machten van p bepalen zullen wij eerst  $k_1$  vinden en daarna k pas uit een correctieterm. De nauwkeurigheid waarmee op deze wijze k bepaald wordt, is dan ook niet groot.

Uit de metingen van W e b e r, K e e s o m e n S c h m i d t <sup>42)</sup> werd met deze formule voor helium de waarde  $k = 1,43$  gevonden, voor neon en waterstof was  $k = 1,25$ . Uit de waarnemingen van K n u d s e n <sup>41)</sup> volgt  $k = 1,47$ .

### § 6 Hoofdtrekken van de k-bepaling met een draaiende cylinder

De in het opschrift aangeduide methode is voor het eerst gebruikt voor het meten van inwendige wrijving van gassen door T i m i r i a z e f f <sup>44)</sup>,

naar het voorbeeld van C o u e t t e, die er de viscositeit van vloeistoffen mee mat.

Voor de bepaling van de glijdingscoëfficiënt werkte H a r r i n g - t o n <sup>45)</sup> voor het eerst met een draaiende cylinder op aanwijzing van M i l l i k a n.

Een duidelijk overzicht van de benodigde formules met bewijzen geeft M i l l i k a n <sup>28)</sup> in een artikel, dat vooraf gaat aan experimenten van S t a c y <sup>46)</sup>. Later werden nog proeven genomen met het toestel van M i l l i k a n door S t a t e s <sup>47)</sup> en door B l a n k e n s t e i n <sup>48)</sup>.

Een metalen cylinder kan draaien om zijn lengte-as, doordat hij is opgehangen aan een torsiedraadje. Co-axiaal met de eerste is een tweede, wijdere cylinder aangebracht, die met constante meetbare snelheid kan draaien om genoemde as. De enige mechanische koppeling dezer twee cylinders wordt gevormd door de stof ertussen. Zet men nu de buitenste cylinder in beweging, dan zal deze de binnenste een weinig in zijn draaiingsrichting meeslepen. Er stelt zich een evenwicht in tussen het wrijvingskoppel, dat op de binnenste cylinder werkt en het torsiekoppel, behorende bij een zekere uitwijking uit de evenwichtsstand. Deze uitwijking hangt af van de afmetingen van het apparaat, de snelheid van de buitenste cylinder en de viscositeit van de tussenstof. Bij gegeven apparaat en constante rotatiesnelheid, zal de uitwijking dus een afbeelding zijn van de viscositeit. Een eenvoudige herleiding van de vergelijking voor bovengenoemd evenwicht levert, zolang geen rekening wordt gehouden met de glijding

$$\eta' = \frac{\pi I \Omega' (R_2^2 - R_1^2)}{\tau^2 L R_1^2 R_2^2 \zeta}, \quad (77)$$

$I$  = het traagheidsmoment van de binnenste cylinder

$\Omega'$  = de hoek, waarover de binnenste cylinder uit zijn evenwichtsstand gedraaid wordt

$R_1$  en  $R_2$  zijn de stralen van de binnenste en de buitenste cylinder

$L$  = de lengte der cylinders

$\zeta$  = de hoeksnelheid van de buitenste cylinder

$\tau$  = de volledige trillingstijd van de binnenste cylinder wanneer deze in vacuo om zijn evenwichtsstand schommelt

$\eta'$  noem ik de schijnbare viscositeit.

De werkelijke viscositeit, de constante waarde, waartoe  $\eta'$  nadert bij toenemende druk, wordt nl. pas gevonden, wanneer we voor de glijding corrigeren, hetgeen volgens M i l l i k a n neerkomt op de betrekking

$$\eta = \eta' \left( 1 + 2 \zeta \frac{R_2^3 + R_1^3}{R_1 R_2^3 - R_1^3 R_2} \right) \quad (78)$$

De correctiefactor is blijkbaar gelijk aan de verhouding  $\eta/\eta'$ , of wel  $\Omega/\Omega'$ , wanneer  $\Omega$  de limiet is, waartoe  $\Omega'$  nadert in de hydrodynamische toestand. De hoeken  $\Omega$  en  $\Omega'$  worden met behulp van een spiegelaflezing bepaald.

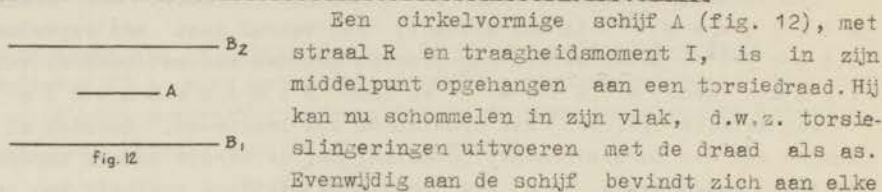
Aangezien  $\zeta$  omgekeerd evenredig is met de druk  $p$  kan uit de helling van de rechte in de grafische voorstelling van  $\frac{\Omega}{\Omega'}$  tegen  $\frac{1}{p}$  de waarde van  $k$  bepaald worden.

M i l l i k a n wijst er op, dat deze methode resultaten levert van grote nauwkeurigheid. De optredende apparaatconstanten zijn immers tevoren alle



*De bepaling.* Met temperatuurschommelingen. Ook met de storingen in het stromingsbeeld aan de rand van de cilindervlakken houdt hij geen rekening. Deze zouden wel weg te werken zijn door in het verlengde der cilindervlakken schutringen aan te brengen. De met deze methode verkregen resultaten zijn in § 9 tabellarisch verzameld.

### § 7 Hoofdtrekken van de k-bepaling met een schommelende schijf



Een oirkelvormige schijf A (fig. 12), met straal R en traagheidsmoment I, is in zijn middelpunt opgehangen aan een torsiedraad. Hij kan nu schommelen in zijn vlak, d.w.z. torsieslingeringen uitvoeren met de draad als as. Evenwijdig aan de schijf bevindt zich aan elke kant op afstand D een stilstaande vlakke schijf ( $B_1$  en  $B_2$ ). Wanneer A in beweging wordt gebracht ontstaat een snelheidsgradiënt in het gas tussen A en de beide vaste schijven, welke aanleiding geeft tot demping van de beweging van A, welke beschreven wordt door de verhouding  $\beta$  tussen het logaritmisch decrement  $\lambda$  van de trilling en de trillingstijd  $\tau$ . Die demping blijkt een bruikbare afbeelding te zijn van het impulstransport tussen de schijven. In het gebied, waar  $l \ll D$  is, geldt volgens (39):

$$\eta' = \eta \frac{1}{1 + \frac{2kl}{Dp}}, \quad (39)$$

waarin  $\eta$  de constante waarde van de viscositeit van het gas bij hoge druk is en  $\eta'$  de schijnbare viscositeit bij lagere druk. Aangezien de demping van de schijf evenredig blijkt te zijn met  $\eta'$  (zie hoofdstuk IV, § 2) volgens:

$$\eta' = \frac{2I}{\pi R^4} (\beta - \beta_0),$$

kunnen we ook schrijven: ( $\beta_0$  beantwoordt aan de nul demping)

$$\beta - \beta_0 = \frac{\beta_\infty - \beta_0}{1 + \frac{2kl}{Dp}},$$

of, uitgedrukt in het nat.-log. decrement  $\lambda = \beta \tau$

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{\lambda'_\infty - \lambda_0}{1 + \frac{2kl}{Dp}}, \quad (79)$$

waarin  $\lambda' = \lambda \frac{\tau_0}{\tau}$ , aldus corrigerende voor de verlenging van de trillingstijd bij toenemende demping.

De indices bij  $\lambda$  en  $\tau$  geven de druk aan. De symbolen bij heersende druk zijn zonder index opgegeven.

Een eenvoudige herleiding van (79) levert:

$$\lambda' - \lambda_0 = (\lambda'_\infty - \lambda_0) \frac{2kl}{Dp} \frac{\lambda' - \lambda_0}{p}. \quad (80)$$

Uit de helling van de grafiek met  $\lambda' - \lambda_0$  en  $\frac{\lambda' - \lambda_0}{p}$  als assen wordt k gevonden. De resultaten zijn in de tabellen van § 9 verwerkt.

### § 8 Overzicht der metingen

Een verzameling met alle tot dusver voltooide metingen van k, met inbegrip van waarnemingen, die niet speciaal met dit oogmerk werden uitgevoerd, doch niettemin voor bewerking in onze zin vatbaar waren, is in de volgende tabellen weergegeven.

In het overzicht van tabel V zijn alleen de waarden van k bij kamertemperatuur vermeld.

gas	k	materiaal	auteur	jaar	ref.
H <sub>2</sub>	1.75	glazen rechth. spleet	Rasmussen	1937	33
H <sub>2</sub>	1.55	glas	Adzumi	1937	34a
C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.53	glas	Adzumi	1937	34a
CHCl <sub>3</sub>	1.53	glas	Adzumi	1937	34a
CHCl <sub>3</sub> +CCl <sub>4</sub>	1.52	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub>	1.52	zilver	Adzumi	1939	34b
lucht	1.52	vers schellak	Lee	1914	49
lucht	1.52	vers schellak	Millikan	1915	50
lucht	1.5	spiegelglas	Kundt + Warburg	1875	24
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1.50	glas	Adzumi	1937	34a
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1.50	glas	Adzumi	1937	34a
CCl <sub>4</sub>	1.50	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub>	1.47	buis (glas)	Knudsen	1909	41
H <sub>2</sub>	1.47	therm. mol. (glas)	Knudsen	1927	51
(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	1.46	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub>	1.45	buis (glas)	Knudsen	1909	41
O <sub>2</sub>	1.45	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48
He	1.43	therm. mol. (glas)	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42
CO <sub>2</sub>	1.41	glazen ringspleet	Rasmussen	1937	33
H <sub>2</sub>	1.41	glazen ringspleet	Rasmussen	1937	33
O <sub>2</sub>	1.41	glazen buis	Knudsen	1909	41
O <sub>2</sub>	1.41	glazen ringspleet	Rasmussen	1937	33
Ar	1.41	glazen ringspleet	Rasmussen	1937	33
H <sub>2</sub>	1.38	alluminium	Adzumi	1939	34b
CO <sub>2</sub>	1.38	glazen buis	Knudsen	1909	41
O <sub>2</sub>	1.38	glazen buis	Knudsen	1909	41
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> +CCl <sub>4</sub>	1.36	glas	Adzumi	1937	34a
lucht	1.35	glas	Hogg	1906	36
H <sub>2</sub>	1.35	glazen buis	Knudsen	1909	41
H <sub>2</sub>	1.34	koper	Adzumi	1939	34b
CO <sub>2</sub>	1.33	glazen buis	Knudsen	1909	41
H <sub>2</sub>	1.33	glas	Hogg	1910	37
O <sub>2</sub>	1.30	gepolijste Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47
H <sub>2</sub>	1.3	glas	v. Itterbeek + v. Paemel	1940	39
Ne	1.3	glas	v. Itterbeek + v. Paemel	1940	39
He	1.3	glas	v. Itterbeek + v. Paemel	1940	39
H <sub>2</sub>	1.30	glazen ringspleet	Rasmussen	1937	33
lucht	1.30	olie	Ishida	1937	31
He	1.29	olie	Ishida	1923	52
CO <sub>2</sub>	1.29	olie	Millikan	1923	53
lucht	1.29	tabaksrook	Mönch	1933	54
N <sub>2</sub>	1.28	olie	Mattauch	1925	22
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	1.27	olie	Ishida	1923	52
lucht	1.27	olie	Ishida, Fukushima, Suetsugu	1937	30
N <sub>2</sub> O	1.25	olie	Ishida	1923	52
H <sub>2</sub>	1.25	therm. mol. (glas)	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42
Ne	1.25	therm. mol. (glas)	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42
lucht	1.25	olie	Millikan	1913	21

Tabel V a

gas	k	materiaal	auteur	jaar	ref.
H <sub>2</sub>	1.24	ijzer	Adzumi	1939	34b
51.18% H <sub>2</sub> + 48.82% C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.24	glas	Adzumi	1937	34a
25.97% H <sub>2</sub> + 74.03% C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.24	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub> + C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1.24	glas	Adzumi	1937	34a
lucht	1.24	geëlied messing	van Dijke	1923	55
lucht	1.24	olie	Millikan	1923	53
Ar.	1.24	olie	Ishida	1923	52
lucht	1.23	olie	Ishida	1923	52
75.6% H <sub>2</sub> + 24.31% C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.22	glas	Adzumi	1937	34a
O <sub>2</sub>	1.22	ongepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47
lucht	1.21	olie	Millikan	1915	50
CO <sub>2</sub>	1.21	olie	Ishida	1923	52
N <sub>2</sub>	1.20	geslepen glas	Lignac	1942	Hoofdst.V
CH <sub>4</sub>	1.20	olie	Ishida	1923	52
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> iso	1.19	olie	Ishida	1923	52
CO <sub>2</sub>	1.18	olie	Lasalle	1921	56
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.18	geslepen glas	Lignac	1942	Hoofdst.V
O <sub>2</sub>	1.17	geslepen glas	Lignac	1942	Hoofdst.V
CHCl <sub>3</sub> + (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	1.17	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub>	1.16	olie	Ishida	1923	52
CO <sub>2</sub>	1.16	geëlied messing	van Dijke	1923	55
lucht	1.15	olie	Millikan	1911	57
He	1.15	geslepen glas	Lignac	1942	Hoofdst.V
lucht	1.15	schoon messing	van Dijke	1923	55
H <sub>2</sub>	1.14	geslepen glas	Lignac	1942	Hoofdst.V
lucht	1.13	vers schellak	Stacy	1923	46
50.82% H <sub>2</sub> + 49.18% C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.12	glas	Adzumi	1937	34a
75.18% H <sub>2</sub> + 24.82% C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.12	glas	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub> + C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.12	glas	Adzumi	1937	34a
lucht	1.11	glas	Knudsen + Weber	1911	19
lucht	1.11	geschuurd messing	van Dijke	1923	55
lucht	1.1	was	Mac Keehan	1911	26
CO <sub>2</sub>	1.09	olie	Eglin	1923	58
O <sub>2</sub>	1.09	olie	Eglin	1923	58
He	1.09	olie	Eglin	1923	58
lucht	1.06	vers schellak	Harrington	1916	45
lucht	1.04	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48
CO <sub>2</sub>	1.04	oud schellak	van Dijke	1923	55
lucht	1.03	oud schellak	van Dijke	1923	55
lucht	1.03	oud schellak	Stacy	1923	46
lucht	1.01	koper	Stacy	1923	46
lucht	1.01	kwik	Derieux	1918	59
H <sub>2</sub>	0.99	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48
CO <sub>2</sub>	0.97	geschuurd messing	van Dijke	1923	55
He	0.95	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48
He	0.80	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47
He	0.62	ongepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47

Tabel V b



Vallende bolletjes, kamertemp.

gas		druppel	auteur	jaar	ref. opm.
lucht	1.15	olie	Millikan	1911	57
	1.1	was	M <sup>o</sup> c Keehan	1911	26
	1.11	glas	Knudsen+Weber	1911	19
	1.25	olie	Millikan	1913	21
	1.52	vers schellak	Lee	1914	49
	1.52	vers schellak	Millikan	1915	50
	1.21	olie	Millikan	1915	39
	1.01	kwik	Derieux	1918	59
	1.23	olie	Ishida	1923	52
	1.24	olie	Millikan	1923	53
	1.29	tabaksrook	Mönch	1933	54
	1.30	olie	Ishida	1937	30
	1.27	olie	Ishida Fukushima Suetsugu	1937	31
	CO <sub>2</sub>	1.18	olie	Lasalle	1921
1.21		olie	Ishida	1923	52
1.29		olie	Millikan	1923	53
1.09		olie	Eglin	1923	58
H <sub>2</sub>	1.16	olie	Ishida	1923	52
O <sub>2</sub>	1.09	olie	Eglin	1923	58
He	1.29	olie	Ishida	1923	52
	1.09	olie	Eglin	1923	58
N <sub>2</sub>	1.28	olie	Mattauch	1925	22
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> iso	1.19	olie	Ishida	1923	52
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	1.27	olie	Ishida	1923	52
N <sub>2</sub> O	1.25	olie	Ishida	1923	52
C H <sub>4</sub>	1.20	olie	Ishida	1923	52
Ar.	1.24	olie	Ishida	1923	52
Gemiddeld	1.22				

gemidd.  
van 150  
waarn.  
trillende  
bollen

gemidd.  
van 146  
waarn.

Tabel VI

Doorstroming, kamertemp.

gas	k	vorm	auteur	jaar	ref.
CO <sub>2</sub>	1.33	buis	Knudsen	1909	41
	1.38	buis	Knudsen	1909	41
	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
H <sub>2</sub>	1.47	buis	Knudsen	1909	41
	1.35	buis	Knudsen	1909	41
	1.45	buis	Knudsen	1909	41
	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
	1.30	ringspleet	Rasmussen	1937	33
	1.75	rechth.spleet	Rasmussen	1937	33
	1.55	buis	Adzumi	1937	34a
	1.52	buis	Adzumi	1939	34b
	1.38	buis	Adzumi	1939	34b
	1.34	buis	Adzumi	1939	34b
1.24	buis	Adzumi	1939	34b	
O <sub>2</sub>	1.38	buis	Knudsen	1909	41
	1.41	buis	Knudsen	1909	41
	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
Ar.	1.41	ringspleet	Rasmussen	1937	33
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1.50	buis	Adzumi	1937	34a
C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.53	buis	Adzumi	1937	34a
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1.50	buis	Adzumi	1937	34a
CHCl <sub>3</sub>	1.53	buis	Adzumi	1937	34a
CCl <sub>4</sub>	1.50	buis	Adzumi	1937	34a
(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	1.46	buis	Adzumi	1937	34a
75.6%H <sub>2</sub> + 24.31%C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.22	buis	Adzumi	1937	34a
51.18%H <sub>2</sub> + 48.82%C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.24	buis	Adzumi	1937	34a
25.97%H <sub>2</sub> + 74.03%C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.12	buis	Adzumi	1937	34a
50.82%H <sub>2</sub> + 49.18%C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.12	buis	Adzumi	1937	34a
75.18%H <sub>2</sub> + 24.82%C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	1.12	buis	Adzumi	1937	34a
CHCl <sub>3</sub> + (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	1.17	buis	Adzumi	1937	34a
H <sub>2</sub> + C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1.24	buis	Adzumi	1937	34a
CCl <sub>4</sub> + C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1.36	buis	Adzumi	1937	34a
CHCl <sub>3</sub> + CCl <sub>4</sub>	1.52	buis	Adzumi	1937	34a
Gemiddeld	1.39				

Tabel VII

## Thermomoleculaire druk

gas	k	oppervlak	auteur	jaar	ref.	opm.
H <sub>2</sub>	1.47	glas	Knudsen	1927	51	
	1.25	glas	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42	
He	1.43	glas	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42	
Ne	1.25	glas	Weber, Keesom+Schmidt	1936	42	
Gemiddeld	1.35					

Tabel VIII

## Roterende cylinder, kamertemp.

gas	k	oppervlak	auteur	jaar	ref.	opm.
lucht	1.06	vers schellak	Harrington	1916	45	
	1.13	vers schellak	Stacy	1923	46	
	1.03	oud schellak	Stacy	1923	46	
	1.03	oud schellak	van Dijke	1923	55	
	1.24	geölied messing	van Dijke	1923	55	
	1.01	koper	Stacy	1923	46	
	1.15	schoon messing	van Dijke	1923	55	
	1.11	geschuurd messing	van Dijke	1923	55	
	1.04	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48	
	CO <sub>2</sub>	1.16	geölied messing	van Dijke	1923	55
0.97		geschuurd messing	van Dijke	1923	55	
1.04		oud schellak	van Dijke	1923	55	
H <sub>2</sub>	0.99	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48	
O <sub>2</sub>	1.22	ongepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47	2 series
	1.30	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47	
	1.45	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48	
He	0.62	ongepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47	
	0.80	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	States	1923	47	
	0.95	gepolijst Ag <sub>2</sub> O	Blankenstein	1923	48	
Gemiddeld	1.07					

Tabel IX

## Schommelende schijf

gas	k	materiaal	auteur	jaar	ref.	temp.	
lucht	1.5	spiegelglas	Kundt+Warburg	1875	24	15°-20°C	
	1.35	glas	Hogg	1906	36	15°-20°C	
H <sub>2</sub>	1.33	glas	Hogg	1910	37	15°-20°C	
	1.3	geslepen glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	15°-20°C	
	1.3	geslepen glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	90°K	
	1.65	geslepen glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	20°K	
	1.85	geslepen glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	16°K	
	1.14	geslepenglas	Lignac	1942	Hst. V	20°C	
	O <sub>2</sub>	1.17	geslepenglas	Lignac	1942	Hst. V	20°C
		He	1.3	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39
Ne	$\frac{4}{3}$	koper	v. Itterbeek+ Keesom	1940	38	20°, 38 K	
	$\frac{4}{3}$	koper	v. Itterbeek+ Keesom	1940	38	4°, 23 K	
	1.3	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	90°K	
	1.5	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	20°K	
	1.6	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	16°K	
	1.15	geslepen glas	Lignac	1942	Hst. V	20°C	
	D <sub>2</sub>	1.3	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	90°K
		1.65	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	20°K
		1.85	glas	v. Itterbeek+ v. Paemel	1940	39	16°K
		N <sub>2</sub>	1.20	geslepen glas	Lignac	1942	Hst. V
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.18	geslepen glas	Lignac	1942	Hst. V	20°C	
Gemiddeld bij kamertemp.	1.27						

Tabel X



## § 9 Gevolgtrekkingen

Een blik op het cijfermateriaal leert ons verschillende dingen:

Ten eerste bevestigt het de theoretische overwegingen van hoofdstuk II, waarin wordt meegegeeld, dat de waarde van  $k$  tussen 1 en  $\frac{3}{2}$  moet liggen. Alleen de drie waarden voor helium bij kamertemperatuur, gemeten met de roterende cylinder, wijken aanzienlijk af. Een reden hiervoor kan ik niet vinden, terwijl mijn eigen metingen geen bevestiging van die afwijking leveren.

Ten tweede vinden we er geen aanwijzingen in, dat de aard van het gas de waarde van  $k$  beïnvloedt.

Ten derde biedt het materiaal geen steun aan de soms verkondigde mening, dat  $k = \frac{4}{3}$  voor alle gassen. Tabel V laat duidelijk zien, dat de waarden vrijwel regelmatig verdeeld liggen tussen 1,5 en 1,0. Het niet gewogen gemiddelde bedraagt 1,23.

Ten vierde blijkt, dat de waarden voor  $k$  niet willekeurig verdeeld liggen tussen 1,5 en 1,0. De waarnemingen vóór 1910 zijn minder waard, doordat geen vloeibare lucht werd gebruikt, gelijk in § 2 van dit hoofdstuk reeds werd betoogd. In dezelfde paragraaf zijn de verschillende methoden gewaardeerd en is de ontwikkeling ervan geschetst. In verband hiermee moet aan de hoogste waarden niet te veel betekenis gehecht worden. Wel is echter opmerkelijk, dat de waarden van  $k$  in het algemeen afnemen als de ruwheid van het oppervlak toeneemt. Daarbij moeten we wel bedenken, dat „geschuurde" en „gepolijste" oppervlakken voor moleculen ruw geacht moeten worden. Met Parijsrood blijven er nog oneffenheden van de orde van  $0,1\mu$ . Typisch ruwe oppervlakken leveren in het algemeen minder dan 1,15. Olie en geoliede wanden geven waarden tussen 1,30 en 1,15. Er valt evenwel niet met zekerheid uit de ter beschikking staande cijfers op te maken of deze vermeende relatie tussen ruwheid en glijdingscoëfficiënt bij oppervlakken van in al deze proeven voorkomende aard reëel is.

We kunnen namelijk een tweede systematisch verschil opmerken in de waarden van  $k$ , bepaald met verschillende methoden. De doorstromingsmethode geeft, behalve voor mengsels, steeds waarden van  $k$ , die groter dan 1,3 zijn. De roterende cylinder gaf in 't algemeen waarden, die kleiner dan 1,3 zijn.

De waarde van  $k$  wordt bij de doorstromingsmethode bepaald uit formules met vele empirische constanten, aan welk euvel de bepalingen met cylinder en schijf aanzienlijk minder lijden. Bovendien moet bij korte buizen (R a s - m u s s e n <sup>33</sup>) met de mogelijkheid van wijzigingen in het stromingsbeeld aan de einden rekening gehouden worden.

Onderzoekingen met kwikdruppels heeft men later steeds vermeden, omdat deze soms zeer afwijkende resultaten leverden. Dit heeft aanvankelijk aanleiding gegeven tot een discussie over de vorm der druppels en mogelijke verdamping of oxydatie. De sterk afwijkende waarde, die D e r i e u x <sup>59</sup>) met vallende kwikdruppels vond, moet om bovenstaande redenen dan ook buiten beschouwing blijven.

## HOOFDSTUK IV

### De beweging van een schommelende schijf in een gas tussen twee vlakke platen

#### § 1 Het model voor de gasstroming

Een horizontale vlakke cirkelvormige schijf is opgehangen aan een verticale draad door zijn middelpunt. Boven en onder deze schijf bevindt zich een stilstaande schijf.

Als er geen wrijving is zal de opgehangen schijf een harmonische beweging uitvoeren onder invloed van een torsiekoppel met moment

$K'\alpha$ , als  $\alpha$  de hoek is, waarover de schijf is gedraaid ten opzichte van zijn evenwichtsstand. Is er wel wrijving, dan blijkt de schijf een gedempte harmonische trilling uit te voeren, welke weergegeven kan worden in de vorm

$$\alpha = \varphi_0 e^{(-\frac{\lambda}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau})t} \quad (81)$$

waarin  $\lambda$  het natuurlijk-logarithmisch decrement voorstelt,  $\tau$  de trillingstijd en  $\varphi_0$  de amplitude.

In de volgende berekening stellen we ons ten doel na te gaan hoe de demping  $\beta = \lambda/\tau$  van de soortelijke eigenschappen van het gas afhangt, in het bijzonder van de viscositeit  $\eta$ . We zullen ons daarbij beperken tot het volgende model voor het gas tussen de schijven:

1. Het strekt zich in horizontale richting oneindig ver uit
2. Het beweegt zich in lagen evenwijdig aan de schijven
3. De middelpuntvliedende werking wordt verwaarloosd
4. De gaslagen voeren elk ook een gedempte harmonische beweging uit van de vorm  $\alpha_x = \alpha \varphi_x e^{(-\frac{\lambda}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau})t}$ , waarin de index  $x$  aangeeft, hoever de laag van het oppervlak van de schijf verwijderd is
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_x = \alpha$ . Met effecten bij lagere gasdrukken zal later rekening gehouden worden door met een schijnbare viscositeit te werken.

#### § 2 De bewegingsvergelijking voor de schijf

Voor de schijf kunnen we de differentiaal vergelijking opschrijven

$$I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + 2\beta I \frac{\partial \alpha}{\partial t} + K'\alpha = 0 \quad (82)$$

De tweede term stelt het wrijvingskoppel voor, dat de demping  $\beta$  veroorzaakt. De demping  $\beta$  is voor een klein deel  $\beta_0$  afkomstig van de inwendige wrijving van de torsiedraad en voor het overige van de wrijving van het gas. Het koppel  $C'$ , dat het gas alleen op de schijf uitoefent, bedraagt dus

$$C' = 2(\beta - \beta_0) I \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (83)$$

Uit fig. 13 kunnen we aflezen, dat dit koppel ook is uit te drukken in de wrijvingskracht  $P_0$ , welke het gas op elk punt van de schijf uitoefent:

$$C' = 2 \int_0^R P_0 r^2 d\alpha dr. \quad (84)$$

De factor 2 is afkomstig van de wrijving aan beide kanten van de schommelende schijf. De definitie van het begrip viscositeit  $\eta$  levert

$$P_0 = -\eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (85)$$

of uitgedrukt in de hoeksnelheid  $\dot{\alpha}$ :  $P_0 = -\eta r \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial x} \right)_{x=0}$

waardoor de uitdrukking (84) voor  $C'$  wordt

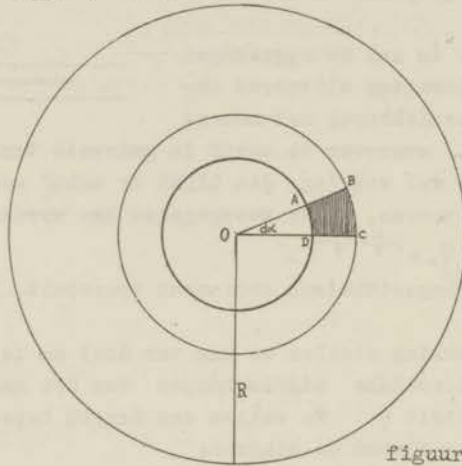
De oorsprong van het coördinatenstelsel is in het middelpunt van schijf A gekozen.

$r$  = radiale coördinaat

$x$  = coördinaat loodrecht op de schijf

$\alpha$  = hoekcoördinaat in een vlak evenwijdig aan de schijf

$d\omega = d r \cdot r \cdot d\alpha = \text{opp. A B C D}$



figuur 13

$$*) \quad \alpha = \left( \frac{e^{a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} + \frac{e^{-a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) e^{\omega t}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left( \frac{e^{a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} + \frac{e^{-a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) \omega e^{\omega t}$$

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_{x=0} = \omega e^{\omega t}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left( \frac{a_1 e^{a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} - \frac{a_1 e^{-a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) \omega e^{\omega t}$$

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} - \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_{x=0}$$

$$**) \quad D \left( \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} - \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) = \frac{D a_1 (e^{-2a_1 D} - e^{2a_1 D})}{2(1 - \frac{1}{2} [e^{2a_1 D} + e^{-2a_1 D}])} = -\frac{a_1 D}{2} \cdot \frac{2i \sin \frac{2a_1 D}{i}}{1 - \cos \frac{2a_1 D}{i}}$$

$$= \frac{a_1 D}{2} \cdot \frac{2i \sin 2ia_1 D}{2 \sin^2 ia_1 D} = \frac{a_1 D}{2} \cdot \frac{2i \cos ia_1 D}{\sin ia_1 D} = ia_1 D \cotg ia_1 D.$$

afleiding der formules van bladzijde 45



$$C' = -\pi \eta R^4 \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (86)$$

Het probleem is nu herleid tot het bepalen van  $\left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{x=0}$  uit de bewegingsvergelijking voor de gaslagen.

Combinatie van (83) en (86) zal dan de gezochte betrekking tussen  $\beta$  en  $\eta$  leveren.

### § 3 De bewegingsvergelijking voor de gaslagen

$$\text{Voor het gas tussen de schijven geldt } -\frac{\partial P_x}{\partial x} = \rho r \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (87)$$

De definitie van  $\eta$  in de vorm  $P_x = -\eta r \frac{\partial \chi}{\partial x}$  herleidt dit tot

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (88)$$

De uitwijking  $\chi$  wordt beschreven als een complexe e-functie, waar we later het reële deel van nemen.

$$\begin{aligned} \chi &= \varphi_x e^{\omega t}, \text{ waarin } \omega = -\frac{\lambda}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau} \\ \dot{\chi} &= \frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi_x \omega e^{\omega t} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \omega e^{\omega t} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \varphi_x \omega^2 e^{\omega t} \end{aligned}$$

Deze waarden voor de differentiaalquotienten in (88) invoegend krijgen we

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\eta} \omega \varphi_x = 0 \quad (89)$$

Deze vergelijking wordt opgelost door  $\varphi_x = C_1' e^{a_1 x} + C_2' e^{a_2 x}$  met de randvoorwaarden: 1. voor  $x = 0$  is  $\varphi_x = 1$ , dus  $C_1' + C_2' = 1$ .

$$2. \text{ voor } x = D \text{ is } \varphi_x = 0, \text{ dus } C_1' e^{a_1 D} + C_2' e^{a_2 D} = 0$$

Zet  $\varphi_x = e^{a_2 x}$  in (89), dan vinden we  $a_2^2 + \frac{\rho \lambda}{\eta \tau} - \frac{2\pi i \rho}{\eta \tau} = 0$ , zodat  $a_2 = \pm \sqrt{\frac{2\pi i \rho - \rho \lambda}{\eta \tau}}$

Laten we de wortel, waarin het reële deel positief is,  $a_1$  noemen. Nu volgt uit de beide randvoorwaarden

$$C_1' = \frac{1}{1 - e^{2a_1 D}}; \quad C_2' = \frac{1}{1 - e^{-2a_1 D}}$$

De oplossing voor de bewegingsvergelijking van het gas is dus:

$$\varphi_x = \frac{e^{a_1 x}}{1 - e^{2a_1 D}} + \frac{e^{-a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}}, \text{ zodat } \chi = \left( \frac{e^{a_1 x}}{1 - e^{2a_1 D}} + \frac{e^{-a_1 x}}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) e^{\omega t}$$

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x} = \left( \frac{a_1}{1 - e^{2a_1 D}} - \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} \right) \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)_{x=0} \quad (*) \quad (90)$$

Hiermee hebben we de uitdrukking gevonden, waarvan het reële deel nodig was voor (86). Vullen we dus (90) in (86) in en stellen we het resultaat gelijk aan (83), dan volgt  $\beta - \beta_0 = \frac{\pi \eta R^4}{2I} \mathcal{R} \left( \frac{a_1}{1 - e^{2a_1 D}} - \frac{a_1}{1 - e^{-2a_1 D}} \right)$ ,

$$\beta - \beta_0 = \frac{\pi \eta R^4}{2I} \mathcal{R} (i a_1 D \cotg i a_1 D). \quad (**)$$

De reeksontwikkeling van de cotangens levert tenslotte

$$\beta - \beta_0 = \frac{\pi \eta R^4}{2ID} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\lambda \rho D^2}{\eta \tau} + \frac{1}{45} \frac{4 \pi^2 \rho^2 D^4 - \lambda^2 \rho^2 D^4}{\eta^2 \tau^2} \dots \right) \quad (91)$$

In eerste benadering bestaat inderdaad de evenredigheid tussen  $\eta$  en  $\beta - \beta_0$ :

$$\eta = \frac{2 I D}{\pi R^4} (\beta - \beta_0) \quad (91a)$$

Hoewel bij het gebruikte apparaat de eerste benadering zeker veroorloofd is, wil ik op de onbenaderde formule toch wat dieper ingaan. De eerste, die deze betrekking wilde afleiden, was Maxwell in 1866<sup>67)</sup>. Hij werkte niet met de complexe e-functie en heeft daarvoor een uitermate bewerkelijke berekening nodig, welke leidt tot het resultaat:

$$\beta - \beta_0 = \frac{\pi \eta R^4}{2ID} \left( 1 - \frac{\lambda \rho D^2}{3 \eta \tau} + \frac{1}{45} \frac{4\pi^2 \rho^2 D^4}{\eta^2 \tau^2} - \frac{3}{12} \frac{\lambda^2 \rho^2 D^4}{\eta^2 \tau^2} \dots \right) \quad *) \quad (92)$$

Het merkwaardige verschil tussen (91) en (92), dat door de omlijning duidelijk in het oog springt, moet het gevolg zijn van het enige principiële verschil in de oplossing van het probleem. Maxwell houdt namelijk geen rekening met de phaseverschillen tussen de horizontale gaslagen onderling, hetgeen ik in § 2 wel deed, door het invoeren van de complexe e-functie in de uitdrukking voor  $\alpha_x$ . Blijkbaar is de tweede term in de reeksontwikkeling van Maxwell hierdoor al voor 100 % fout.

De eerste, die de aandacht op de phaseverschuiving gevestigd heeft, was R. Ladenburg uit Breslau, die in een brief aan Zemplén wijst op diens onjuiste afleiding<sup>60)</sup> van een formule voor een trillende holle bol. Drie jaar later herstelt Zemplén<sup>61)</sup> zijn fout.

In zijn eerste werk laat Zemplén zien, dat een exacte oplossing der bewegingsvergelijkingen alleen mogelijk is, indien het oppervlak van het trillende vaste lichaam door een of meer eenvoudige analytische functies volledig kan worden voorgesteld. Daar dit voor een schijf met zijn scherpe randen uitgesloten is, moeten daarvoor benaderingsmethoden worden uitgewerkt. In beginsel vertoont de cylinder dit euvel ook, doch door het aanbrenge van schutringen in het verlengde van de bewegende cylinder kan het effect der randen practisch geëlimineerd worden. Coster<sup>62)</sup> geeft in 1918 voor een trillende cylinder een afleiding, die rekening houdt met de phaseverschuiving in het gas, welke veel overeenkomst vertoont met de berekening in § 2 van dit hoofdstuk voor de schijf.

Als Van Itterbeek<sup>64)</sup> in 1933 de methode van Coster op de schijf toepast zonder complexe e-functie, moet dit dan ook als een stap terug gezien worden en niet als een vereenvoudiging in het bewijs, noch als een verbetering van de reeksontwikkeling van Maxwell.

Bij alle genoemde beschouwingen en ook in dit boekje zijn centrifugale werkingen buiten beschouwing gelaten, omdat de snelheid van het trillende lichaam zo klein gehouden kan worden, dat de invloed verwaarloosbaar wordt<sup>65)</sup> Wanneer de demping onafhankelijk blijkt te zijn van de amplitude (en daarmee van de snelheid), dan is aan deze voorwaarde voldaan.

Experimenteren we in het gebied van de glijding of bij nog lagere druk, dan verliest het differentiaalquotient  $\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{x=0}$  zijn betekenis.

In hoofdstuk I B en hoofdstuk II A, § 3 voerden we de schijnbare viscositeit in, waarvan de definitie geschreven kan worden in de vorm  $P_0 = -\eta' r \frac{\chi}{D}$ .

Op dezelfde wijze als hierboven komen we zonder benadering tot de betrekking

$$\eta' = \frac{2 ID}{\pi R^4} (\beta - \beta_0) \quad (92a)$$

Hiermee is bewezen, dat de schijnbare viscositeit en de normale viscositeit dezelfde verhouding tot de demping van de schijf vertonen.

\*) Op pag. 257 van Maxwell's werk staat een drukfout. De betrekking voor p en q moet luiden  $\frac{p^2}{\mu} = q^2 - p^2$ . L. S t e e n h u i s<sup>63)</sup>, diss. Groningen 1879, maakt van de foutieve uitdrukking gebruik en krijgt, mede door andere onnauwkeurigheden, verkeerde berekeningen.



## HOOFDSTUK V

### METINGEN MET EEN SCHOMMELENDE SCHIJF IN GASSEN BIJ KAMERTEMPERATUUR

#### § 1 De begrenzenende voorwaarden voor de afmetingen van het toestel

Bij de bouw van het toestel, waarmee de demping gemeten moest worden van een schommelende schijf in gassen bij zeer lage druk, is er in de eerste plaats naar gestreefd de gevoeligheid zo hoog mogelijk op te voeren. Formule (92) wijst ons daartoe de weg, als we deze herleiden tot

$$\text{Omdat } I = \frac{1}{2} \pi M R^4 \text{ is} \quad \lambda' - \lambda_0 = \eta' \frac{\pi R^4 \tau_0}{2 I D}$$

$$\lambda' - \lambda_0 = \eta' \frac{\tau_0}{M D}, \quad (93)$$

waarin M de massa van een stuk van de schijf met 1 cm<sup>2</sup> oppervlakte is.

Grote gevoeligheid betekent:  $\lambda' - \lambda_0$  moet groot zijn ondanks kleine  $\eta'$ . Het toestel moet dus zo gebouwd worden, dat  $\frac{\tau_0}{M D}$  zo groot mogelijk wordt.

Dus: a) grote trillingstijd in vacuo

b) dunne schijf van licht materiaal

c) kleine afstand tussen bewegende en stilstaande schijf.

a) De trillingstijd kan redelijkerwijs niet onbeperkt vergroot worden, omdat de metingen dan te lang gaan duren. Een trillingstijd van 11 seconden geeft juist die rustige nadering tot de omkeerpunten, welke een nauwkeurige aflezing waarborgt.

b) Glas is een licht materiaal, dat goed te slijpen is. De tot dusver door andere auteurs vaak gebruikte metalen schijven zijn zwaarder en leveren bovendien het gevaar, dat nog lange tijd gasresten uit het materiaal vrijkomen.

De straal werd beperkt door de afmeting der gebruikelijke Dewarglazen, waar het apparaat in moest passen om de mogelijkheid tot het meten bij lage temperaturen open te houden.

Dat is ook van geen belang, omdat het logaritmisch decrement er niet van afhangt (93). De keus viel op  $R = 1,479$  cm.

Technisch is het niet mogelijk een glazen plaatje veel dunner dan een honderdste van zijn diameter te slijpen. Dank zij de voortreffelijke techniek van de glasslijperij van het Kamerlingh Onnes Laboratorium kon een dikte van 0,0192 cm bereikt worden.

c) De schijven werden op afstand gehouden door geslepen glazen cylindertjes. Ook hier stelde de techniek een minimumgrens vast. De afstand tussen de bewegende schijf en de stilstaande schijven werd aan beide kanten 0,0205 cm.

Om de meting van een zeer geringe demping mogelijk te maken, moet de correctie voor de zogenaamde nuldemping, dat is de demping veroorzaakt door inwendige wrijving in het ophangstelsel, ook zo klein mogelijk zijn.

De waarde van de nuldemping wordt bepaald door de formule  $\lambda_0 = \frac{\pi r_2^4 \tau_0}{8 I E} \eta_0$ , waarin  $r_2, \eta_0$  en  $E$  achtereenvolgens de straal, inwendige wrijving en lengte van de ophangdraad zijn.

Met behulp van  $\tau_0 = \sqrt{\frac{8 \pi I E}{\pi r_2^4}} \lambda_0$  en  $I = \frac{1}{2} M R^2$  herleiden we de uitdrukking tot

$$\lambda_0 = \frac{\pi r_2^2}{2 R} \sqrt{\frac{\pi}{M E E_0}} \eta_0, \quad (94)$$

waarin E de torsie modulus is. Deze uitdrukking moet dus zo klein mogelijk



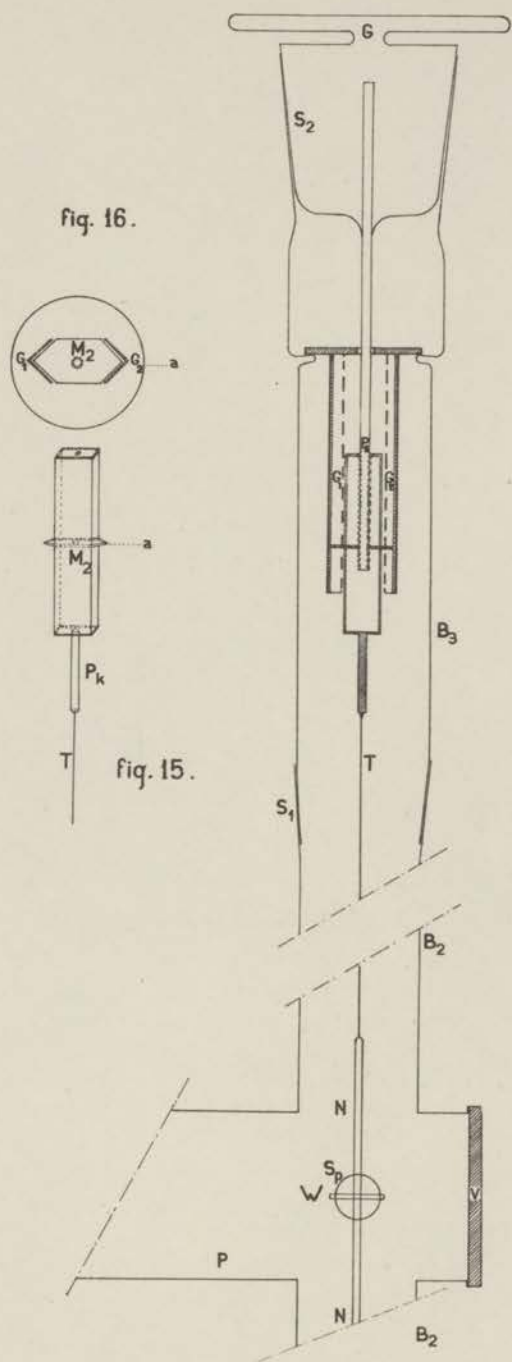


fig. 17.

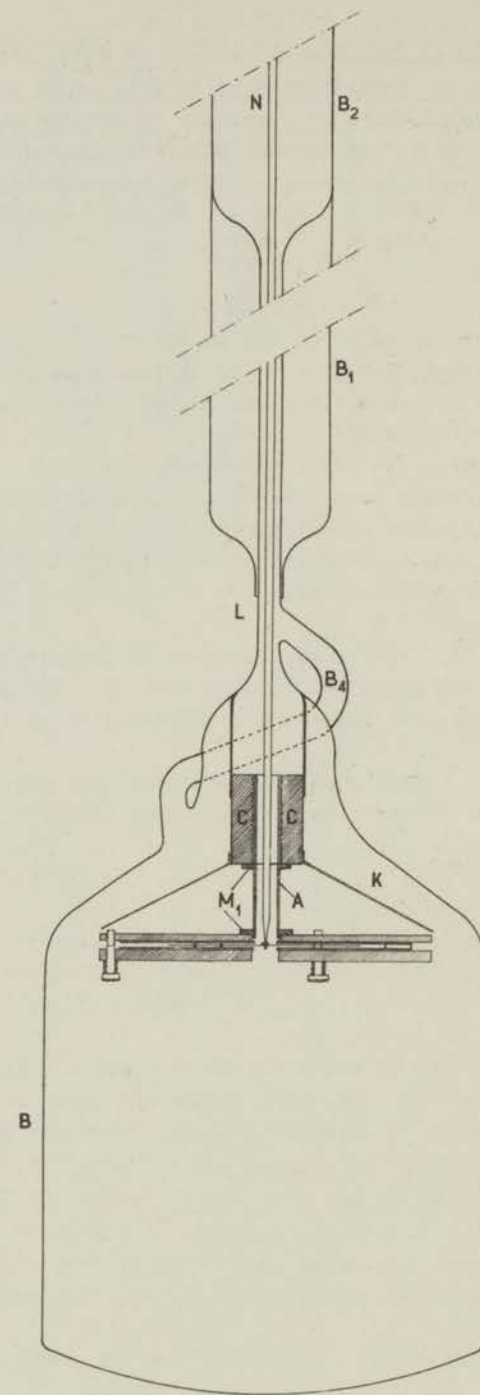


fig. 14.

gemaakt worden.

Een tweede eis, waaraan de ophangdraad moet voldoen, is, dat deze de schijf moet kunnen dragen:

(95)  $\pi R^2 M < \pi r_2^2 B$ , waarin B de vloeigrens van de draad is.

Uit (94) en (95) volgt:

$$\lambda_0 > \frac{\pi \eta_0 r_2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{BE \epsilon_0}}. \quad (96)$$

Nu afmetingen en materiaal van de schijf gekozen zijn wordt door (95) de minimale doorsnee van de ophangdraad bepaald. Deze hangt dan alleen nog van de aard van de stof af. Om de nuldemping zo laag mogelijk te houden moeten we een stof zoeken, waarvoor, blijkens (96) de waarde  $\frac{\eta_0}{\sqrt{BE}}$  zo klein mogelijk is. Voor zover de weinige gegevens<sup>66)</sup> over  $\eta_0$  van verschillende metalen dat mogelijk maakten, werd de keus door deze eis beperkt tot constantaan, phosphorbrons, manganen, platina, nikkel en wolfram. In het gebruikte apparaat werd wolfram genomen met een diameter van 0,00190 cm. Om nu de trillingstijd op het gewenste bedrag van 11 seconden te krijgen moest de lengte van de draad 19 cm worden.

Een andere begrenzende voorwaarde wordt geleverd door de eis, dat ter voorkoming van turbulenties in het gas het getal van 2000 van Reynolds niet overschreden mag worden door de functie  $\frac{2 D U P}{\eta}$ , waarin u de lineaire translatiesnelheid van een willekeurig gasdeeltje tussen de schijven voorstelt. Bij de beschreven afmetingen blijft deze functie echter steeds beneden een honderdste van de kritieke waarde. Voor de keus van materiaal en afmetingen legt deze voorwaarde dus geen gewicht in de schaal.

## § 2 De onderdelen en hun bevestiging

De beweegbare schijf heeft in het midden een gaatje van  $\frac{1}{2}$  mm diameter, waar doorheen later een glazen ophangnaald gestoken moet worden. In de vaste schijven zit een groter gat om die naald vrij door te laten. De vaste schijven, op afstand gehouden door drie glazen cilindertjes van 0,601 mm hoogte, worden geklemd tussen twee messingschijven, verbonden door drie messingschroeven.

De drie glazen cilindertjes zitten op afstanden van  $120^\circ$  langs de omtrek der schijven, de schroeven in de messingschijven eveneens, doch op plaatsen midden tussen die der glazen cilindertjes. De schroefpennen worden omgeven door een spiraalveertje, daarna door gaten in de onderste messingschijf gestoken en vervolgens in de bovenste schijf geschroefd in het buiten de glazen schijven uitstekende deel.

Een messingbuisje A (fig.14) wordt met zijn ene einde in de bovenste messingschijf geschroefd en daarna met zijn andere einde in het stukje chroomijzer C, dat in het glas gesmolten zit. De moeren M moeten sterk worden aangedraaid om de speling op te heffen. De messing stralingskap K moet de instraling van warmte verhinderen, indien bij zeer lage temperaturen wordt gemeten. \*)

\*) Bij het ontwerpen van het toestel is er voor gezorgd, dat het ook geschikt was voor metingen bij zeer lage temperatuur (vgl. blz. 3)

Als al deze onderdelen bevestigd zijn kan de aanvankelijk van onderen opengelaten ballon worden dichtgesmolten.

Nu kan de glazen buis  $B_1$  door de cryostaatkap gestoken worden en daarna aan buis  $B_2$  worden gelast. Hierop komen twee zijbuizen uit: één (P) voert naar de popleiding met toebehoren, de andere, korte, wordt afgesloten door er een planparallel geslepen glazen venster V tegen te lakken. (fig. 17)

In het slijpstuk  $S_1$  past buis  $B_3$  met slijpstukken  $S_1$  en  $S_2$  aan beide einden. In het bovenste past een holle stop met greep G, om hem gemakkelijk met de hand te kunnen draaien. Onderin de stop wordt een stalen pen  $P_s$ , voorzien van schroefdraad, gelakt, welke past in de moer  $M_2$ , aangegeven in het midden van figuur 15. Deze figuur beeldt af, wat er glijden kan in de messinggoten  $G_1$  en  $G_2$ . Dit onderdeel bestaat uit twee ijzeren plaatjes evenwijdig aan het vlak van tekening, op afstand gehouden door drie vierkante doorboorde stukjes, waarvan het middelste, de zoëven genoemde moer  $M_2$ , een schroefdraad heeft. Aan het onderste vierkant is een koperen pen  $P_k$  gesoldeerd, waarin aan de onderkant, precies in het midden een heel nauw kanaaltje is geboord. Daarin wordt de wolfram torsiedraad T gelakt, welke naar omlaag reikt tot even boven het venster V. Aan het onderste eind van deze draad wordt een glazen naald N gelakt, welke, als alle slijpstukken in elkaar geschoven zijn, met zijn punt juist tot in het gaatje van de beweegbare schijf reikt.

Ter hoogte van het venster V wordt op de naald N een vertikaal staand spiegeltje  $S_p$  gelakt. Op de achterzijde daarvan lakken we vervolgens een weekijzeren staafje, loodrecht op de naald, dat moet dienen om de torsiedraad een weinig te kunnen wringen met behulp van een magnetisch koppel.

Door om de popleiding P en de zijbuis met venster enige wikkelingen van koperdraad aan te brengen, waar doorheen een elektrische stroom kan lopen na het sluiten van een drukcontact, bereikt men het gewenste koppel op de ophangdraad.

Het bevestigen van de schijf gaat als volgt in zijn werk. Terwijl we buis  $B_3$  door middel van het slijpstuk  $S_1$  op buis  $B_2$  zetten, kijken we, via een onder de ballon B opgesteld spiegeltje, door het gat in de onderste koperen en glazen schijven naar het tevoren goed in het centrum getikte gaatje van de nog los liggende glazen schijf. Dit matglazen schijfje is goed te zien, als er een lamp bij L geplaatst is. Na enige voorzichtige pogingen kan de spits uitgetrokken punt van de naald door het gaatje omlaaggelaten worden. Het slijpstuk  $S_1$  wordt nu goed aangedrukt. Door te draaien aan G, terwijl  $B_3$  wordt vastgehouden, kan de naald weer iets opgehaald worden, totdat deze juist vrij bengelt in het gaatje. Nu wordt een electrisch oventje om de ballon geschoven tot zo hoog, dat toch nog juist in de kijker van een kathetometer het losse schijfje van opzij zichtbaar blijft. Het oventje wordt heel langzaam warmer gemaakt om tenslotte een tevoren om de naald aangebracht ringetje Dekhotinski-lak te doen vloeien. Zodra in de kijker enige vormverandering van de lak waarneembaar is, wordt het stoken gestaakt. De lak moet juist zover uitlopen, dat deze het plaatje aanraakt.



Indien het schijfje zuiver horizontaal ligt, komt het op deze wijze goed loodrecht op zijn draaiingsas te hangen. Door met twee kathetometers in onderling loodrechte richtingen de rand van het schijfje te bekijken wordt tevoren gecontroleerd, of aan deze eis voldaan is.

### § 3 Motivering van de gebezigde constructie

Het slijpstuk  $S_1$  is nodig om het spiegeltje de juiste evenwichtsstand te kunnen geven. Het slijpstuk  $S_2$  dient om de plaats van de schommelende schijf in verticale richting te kunnen wijzigen. Het gebogen buisje  $B_4$  is nodig, omdat zonder dit de toe- en afvoer van gas alleen door de opening in de ballon zou kunnen plaats vinden. Bij het leegzuigen van de ballon zou de vrije schijf meegezogen worden en de opening afsluiten, terwijl bij te snel toevloeden van gas de kracht tegen het schijfje het torsiedraadje zou kunnen doen breken. Het hangende deel woog ongeveer twee gram. De draad kon ongeveer dertig gram dragen.

### § 4 De afmetingen van het apparaat

vrije glazen schijf:	diameter 29,583 mm, gewicht	0,3324 g;
	dikte 0,192 mm, diam. gaatje	0,58 mm;
vaste glazen schijven:	diameter 43,9 mm, diam. gaatje	3,44 mm;
vaste messing schijven:	diameter 49,8 mm, diam. gaatje	4,09 mm;
drie glazen cylindertjes:	hoogte 0,601; 0,601; 0,602 mm; diam. 3,5 mm;	
gemiddelde vrije afstand aan elke kant van de schommelende schijf:		

$$D = \frac{0,601 - 0,192}{2} \text{ mm} = 0,205 \text{ mm};$$

volledige trillingstijd in vacuo: 11,5 seconden;  
 glazen ophangnaald N: lengte 60 cm, dikte 1 mm;  
 wolframen torsiedraad T: lengte 19 cm, diameter 0,019 mm;  
 spiegeltje Sp: diameter 6,5 mm, dikte 0,9 mm;  
 venster V: diameter  $\pm 2$  cm, dikte 3,2 mm;  
 direct gemeten nat. log. decrement in vacuo  $\lambda = \pm 0,006$ ;  
 afstand spiegeltje tot schaalverdeling: 380 cm;  
 lengte van de schaalverdeling: 800 mm.

De dikte van de beweegbare glazen schijf en de hoogte van de cylindertjes werd bepaald met een microcator, door middel waarvan vergeleken werd met de „Endmassen van Johansson" (Ford). Aflezing was mogelijk tot op  $\frac{1}{2} \mu$ . De reproduceerbaarheid was echter slechter door oneffenheden in de schijven. Het opgegeven gemiddelde van vele waarnemingen kan daardoor ongeveer  $4 \mu$  fout zijn.

De diameter der schijven werd bepaald met een comparator. Aflezing was mogelijk tot op  $1 \mu$ . Ongeafheden in de rand komen voor tot bedragen van 0,02 mm.

### § 5 Apparatuur voor het regelen van de druk

De loop van het buizenstelsel, dat met een slijpstuk aan buis P (fig. 17) wordt geschoven, blijkt het best uit de schematische weergave in fig. 18.

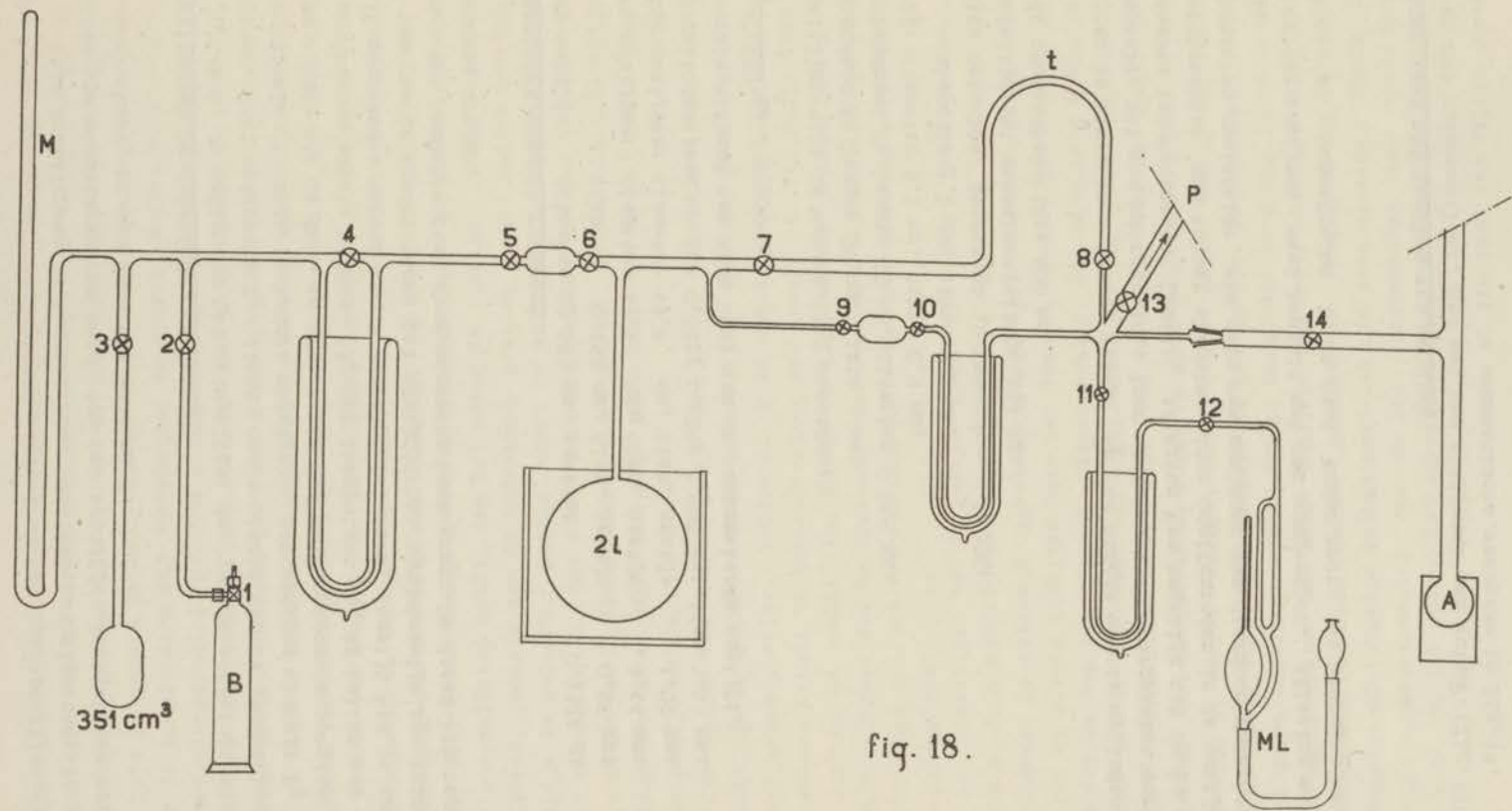


fig. 18.

Eerst wordt het apparaat met toebehoren goed leeggepompt door de diffusiepompe P achter kraan 13. Het te gebruiken gas, dat onder hoge druk in cilinder B zit, kan nu met behulp van een tweetal gaspipetten I en II in elke gewenste hoeveelheid tot het dempingsapparaat worden toegelaten.

De kranen 4, 7 en 8 worden slechts geopend, als er snel gepompt moet worden; anders zou de enige verbinding tussen pomp en manometer door twee koelcapillairen van 3 mm doorsnee lopen. Deze capillairen zijn zo nauw gehouden om de invloed, die niveaudaling van het zich er omheen bevindende koelmiddel op de druk heeft, verwaarloosbaar klein te maken.

De grote bol van twee liter tussen beide pipetten hing in een bak met water, om kleine temperatuurschommelingen onmerkbaar te maken.

Bij de metingen van de viscositeit van helium, waterstof, stikstof en zuurstof werd vloeibare lucht als koelmiddel gebruikt om mogelijke condenseerbare verontreiniging te bevroeren. Alleen bij de metingen aan aethyleen werd als koelmiddel een mengsel van vloeibare lucht en alcohol tussen  $-70^{\circ}\text{C}$  en  $-105^{\circ}\text{C}$  gebruikt. Deze temperatuurvariatie, die met pentaanthermometers werd gecontroleerd, had geen merkbare invloed op de druk door de geringe diameters der koelcapillairen.

De volumebepalingen werden voorafgegaan door het wegen van de glazen ballon bij kraan 3, gevuld met kwik of water. Dit leverde voor het volume van die bol  $351\text{ cm}^3$ . Daarna werd de drukverandering bepaald in het stuk, begrensd door de kranen 2, 3 en 5, door het aansluiten van de leeggepompte ballon van  $351\text{ cm}^3$ . Dit werd - steeds met vloeibare lucht om de capillairen - bij twee verschillende drukken gedaan om, behalve het volume van genoemd stuk, ook de diameter van de manometerbuizen M te kunnen berekenen. Deze doorsnede bleek  $1,25\text{ cm}^2$  te bedragen, zodat het volume van de ledige ruimte dus steeds vermeerderd moet worden met 1,25 maal de halve druk in cm. Rekening houdend met deze correctie kan nu ook het volume bepaald worden van de ruimte begrensd door de kranen 6, 7 en 9, welke  $1938\text{ cm}^3$  bleek te bedragen.

Op analoge wijze kan tenslotte het volume van de ruimte begrensd door 8, 10, 11 en 13 en het dempingsapparaat gemeten worden. Dit bedroeg  $660\text{ cm}^3$ . De ruimte tussen manometer, 2, 3 en 5 was in vacuo  $165\text{ cm}^3$ .

De inhoud der pipetten was te voren bepaald door ze te wegen gevuld met kwik. Het volume van pipet I was  $1,727\text{ cm}^3$ , van pipet II  $0,886\text{ cm}^3$ .

Na het leegpompen werden alle kranen gesloten, behalve 2, 5 en 9. Door het openen van de kranen 1 en 2 werd enig gas toegelaten, waarvan de druk gemeten werd met een kathetometer, die op de gesloten manometer gericht was. Door 5 te sluiten en daarna 6 te openen werd  $1,727\text{ cm}^3$  gas van gemeten druk verdeeld over de ruimte van  $1938\text{ cm}^3$  tot aan kraan 10. Sluiten we nu 9 en openen we vervolgens 10 en 14, dan wordt  $0,886\text{ cm}^3$  gas van bekende spanning verdeeld over het dempingsapparaat van  $660\text{ cm}^3$ . Als we deze handelingen herhalen kan iedere gewenste hogere druk worden ingesteld.

#### § 6 Het meten van het logarithmisch decrement $\lambda$

Het spiegeltje en daarmee de schijf kreeg een uitwijking, door even een



stroom te laten lopen door de windingen om venster en popleiding. De stroomsluiter kon worden bediend, terwijl de waarnemer achter een kijker naar het spiegeltje keek. De uitwijkingen, die achtereenvolgens na het verbreken van de stroom werden afgelezen, werden verzameld in een reeks van ongeveer dertig trillingen bij lage druk - dit grote aantal om de invloed van slingeren in een verticaal vlak om het ophangpunt te elimineren - in kortere reeksen bij hogere druk, afnemende tot twee of drie bij normale druk. In dit laatste geval is bij kamertemperatuur geen grotere waarnemingsreeks mogelijk, omdat de schijf daarna vrijwel stilstaat. Onder deze omstandigheden waren de verticale slingeren trouwens zo spoedig uitgedempt, dat lange reeksen ook niet nodig waren.

### § 7 Rekenschema

De waarnemingen, gecorrigeerd met de herleiding van koorde tot boog, worden achtereenvolgens in kolom A en B (tabel XI) genoteerd, tot men op de helft van het aantal der reeks gekomen is.

Dan worden kolom C en D van onder naar boven ingevuld met herhaling van de laatste twee van A en B in omgekeerde volgorde. In kolom G komen eerst grote verschillen voor, omdat hier n-vouden van het log. decrement staan. Aan een n-voudig log. decrement wordt een gewicht n toegekend, reden waarom ter berekening van de gemiddelde  $\lambda$  door  $\sum n^2$  gedeeld moet worden. Omdat de factor  $\frac{e_{\log 10}}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$  bij dit werk steeds weer optreedt, vermeld ik de waarden voor  $n = 1$  tot  $n = 36$  in tabel XII.

A	B	C	D	E	F	mantisse	mantisse	G	aantal
links	rechts	rechts	links	A - B	C - D	log E	log F	log E - log F	slinger- ringen s
7983		3138		7510	1851	87564	26741	0,60823	6
	473		4989	6691	2087	82549	31549	0,50597	5
7164		2902		5959	2350	77517	37107	0,40410	4
	1205		5252	5302	2638	72444	42127	0,30317	3
6507		2614		4721	2966	67403	47217	0,20186	2
	1786		5580	4202	3336	62418	52323	0,10095	1
5995		2244							
	2244		5995						
								$\Sigma$ (G.s) = 9,20981	

stand van de kruisdraad op de schaalverdeling bij de omkeerpunten in tienden millimeters

$$\lambda = \sum_{s=1}^6 (G.s) \frac{e_{\log 10}}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + s^2} = 9,20981 \times 2,53033 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda = 0,23304 \cdot$$

Voorbeeld van rekenschema (zie § 7)

Tabel XI

$s$	$\frac{e^{\log 10}}{1^2 + 2^2 + \dots + s^2}$	$s$	$\frac{e^{\log 10}}{1^2 + 2^2 + \dots + s^2}$
1	2,3026	19	9,3222 . $10^{-4}$
2	4,6052 . $10^{-1}$	20	8,0230 . $10^{-4}$
3	1,6447 . $10^{-1}$	21	6,9544 . $10^{-4}$
4	7,6753 . $10^{-2}$	22	6,0674 . $10^{-4}$
5	4,1865 . $10^{-2}$	23	5,3251 . $10^{-4}$
6	2,5303 . $10^{-2}$	24	4,6992 . $10^{-4}$
7	1,6447 . $10^{-2}$	25	4,1676 . $10^{-4}$
8	1,1287 . $10^{-2}$	26	3,7133 . $10^{-4}$
9	8,0792 . $10^{-3}$	27	3,3226 . $10^{-4}$
10	5,9807 . $10^{-3}$	28	2,9849 . $10^{-4}$
11	4,5506 . $10^{-3}$	29	2,6915 . $10^{-4}$
12	3,5424 . $10^{-3}$	30	2,4353 . $10^{-4}$
13	2,8115 . $10^{-3}$	31	2,2106 . $10^{-4}$
14	2,2686 . $10^{-3}$	32	2,0127 . $10^{-4}$
15	1,8569 . $10^{-3}$	33	1,8378 . $10^{-4}$
16	1,5392 . $10^{-3}$	34	1,6826 . $10^{-4}$
17	1,2900 . $10^{-3}$	35	1,5443 . $10^{-4}$
18	1,0918 . $10^{-3}$	36	1,4208 . $10^{-4}$

Tabel XII

§ 8 Het meten van de trillingstijd  $\tau$  in vacuo

Op de plaats van de evenwichtsstand werd op de schaal een zwart draadje gehangen. De tijd, die verloopt tussen de eerste en de  $n^{\text{de}}$  maal, dat het beeld van dit draadje de kruisdraad in de kijker passeert in de zelfde richting is  $n$ -maal de trillingstijd. Zo werd  $\tau$  bepaald na zorgvuldig leegpompen. Bij grote demping is de directe meting van  $\tau$  niet nauwkeurig genoeg, omdat dan slechts weinig slingeringen plaats hebben en bovendien de nulstand zeer langzaam overschreden wordt. De waarnemingen van  $\tau$  werden dan ook alleen ter controle verricht om te zien, of de ophangdraad de wand niet had aangeraakt.

Bij andere auteurs leidde dit vroeger nooit tot onnauwkeurigheden, omdat de demping in gassen nooit zo groot werd. De gevoeligheid van het hier besproken toestel is echter zoveel groter, dat het natuurlijk-logarithmisch decrement bij kamertemperatuur voor lucht en helium ongeveer 2,8 wordt, een bedrag, waarbij de trillingstijd ongeveer 10 % groter is dan die van de ongedempte trilling.

§ 9 De berekening van  $\tau$

De theorie der gedempte trillingen levert de betrekking  $\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\tau_0^2}}$ . De waarden van de wortelvorm werden ontleend aan een tabel in „Lehrbuch der

praktischen Physik" van Kohlrausch. Hierbij dient men er op te letten, dat Kohlrausch een log. decrement  $\Lambda$  definieert, zodanig, dat onze  $\lambda = 2\Lambda$ .

### § 10 Het meten van $\lambda_0$ en $\lambda_\infty - \lambda_0$ .

Na het apparaat zo goed mogelijk te hebben leeggepompt werd  $\lambda_0$  gemeten uit een reeks van 150 slingeringen, terwijl de pomp nog aanstond. De nauwkeurigheid acht ik evenwel niet groot, omdat kleine trillingen in het gebouw storend zijn, terwijl ook slingeringen in een vertikaal vlak niet uitgedempt worden. Het resultaat was  $\lambda_0 = 0,0064$ .

Beter leek mij daarom een extrapolatie uit de waarden bij lage druk. Daarin zit dan tevens verwerkt de anders verwaarloosde demping, afkomstig van de dampspanning van vet of lak, terwijl zelfs de invloed van slecht leegpompen vóór het toelaten van een zuiver gas hierin opgenomen kan worden. De extrapolatie naar  $p = 0$  werd uitgevoerd met behulp van de methode der kleinste kwadraten.

Volgens (79) in hoofdstuk III § 7 geldt:

$$\lambda' - \lambda_0 = (\lambda_\infty - \lambda_0) - \frac{2kl}{D} \cdot \frac{\lambda' - \lambda_0}{P}$$

Door extrapolatie kan  $\lambda_\infty - \lambda_0$  gevonden worden uit het diagram van  $\lambda' - \lambda_0$  tegen  $\frac{\lambda' - \lambda_0}{P}$ .

### § 11 De bepaling van $k$ en $S_1$

Overzichtelijker blijkt de beschrijving te worden, wanneer we het verband tussen demping en druk enigszins herleiden. Formule (79), welke in het gebied van de glijding een constante  $k$  heeft, schrijven we in de vorm:

$$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_\infty - \lambda_0} = 1 - k \cdot \frac{2l}{D} \cdot \frac{\lambda' - \lambda_0}{P(\lambda_\infty - \lambda_0)} \quad (97)$$

Een grafische voorstelling op de assen  $\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_\infty - \lambda_0}$  en  $\frac{2l}{D} \cdot \frac{\lambda' - \lambda_0}{P(\lambda_\infty - \lambda_0)}$  zal, indien  $k$  voor alle gassen dezelfde waarde heeft, één enkele curve bevatten, die het gedrag voor al die gassen weergeeft.

De rechte, of zijn verlengde, door de waarnemingspunten moet de assen snijden in de punten 1 en  $\frac{1}{k}$ . Deze laatste eigenschap levert de waarde van  $k$ .

Blijkens hoofdstuk II B § 3 wordt het gebied van de eerste botsingen beschreven door de formule:

$$\eta' = \eta \frac{D}{2l} \cdot \frac{P}{1 + \frac{D}{4l} S_1} \quad (98)$$

Met gebruikmaking van de evenredigheid tussen viscositeit en demping is deze vorm te herleiden tot

$$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_\infty - \lambda_0} = \frac{1}{2S_1} - \frac{1}{2S_1} \cdot \frac{2l}{D} \cdot \frac{\lambda' - \lambda_0}{P(\lambda_\infty - \lambda_0)} \quad (99)$$

Zolang het verloop beschreven kan worden met een constante waarde van  $S_1$ , zal de curve op genoemde nieuwe coördinaatassen ook in dit gebied recht worden. De grafiek in het gehele gebied van vacuum tot 1 atmosfeer valt dus uiteen in twee practisch rechte stukken, waartussen een krom stukje in de buurt van de knudse grens de overgang van de ene helling in de andere vormt.

Het verlengde van de rechte bij lage druk moet de  $\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_\infty - \lambda_0}$ -as snijden bij



de waarde  $\frac{1}{2S_1}$ . Dit levert ons dus de mogelijkheid om de theoretische schatting van  $S_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$  uit hoofdstuk II B, § 3 te toetsen. De andere as moet worden gesneden bij de waarde 1.

§ 12 Waarnemingen \*) en resultaten

Zuurstof bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,0947$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 2,700$ ;  $l = 7,016$  cm

$P_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{P} \frac{2l}{D(\lambda'_\infty - \lambda_0)}$	datum	uur
0.00609	38.71	38.71	0.01083	0.9129	14-7-1942	14.47
0.00609	39.32	39.32	0.01106	0.9317		
0.01238	71.58	71.58	0.02300	0.9540		15.05
0.01238	71.35	71.35	0.02292	0.9504		15.12
0.01864	102.77	102.77	0.03456	0.9518		15.21
0.01864	103.24	103.24	0.03443	0.9462		
0.02487	132.16	132.16	0.04544	0.9380		15.40
0.02487	132.39	132.39	0.04553	0.9396		
0.03776	189.03	188.95	0.06647	0.9036		16.02
0.03776	188.75	188.67	0.06637	0.9023		
0.06925	316.48	316.04	0.1135	0.8417		16.41
0.06925	316.66	316.22	0.1136	0.8422		
0.1619	610.83	607.74	0.2216	0.7025		16.58
0.1619	611.38	608.39	0.2215	0.7021		
0.2546	836.03	828.67	0.3034	0.6117		17.07
0.2546	835.25	827.89	0.3031	0.6113		
0.3472	1024.05	1010.75	0.3708	0.5483		17.19
0.3472	1024.62	1011.32	0.3711	0.5485		
0.5324	1304.3	1277.4	0.4696	0.4528		17.30
0.5324	1303.5	1276.6	0.4693	0.4522		
0.7173	1512	1470	0.5411	0.3873		17.44
0.7173	1518	1476	0.5433	0.3888		
0.9955	1808	1738	0.6404	0.3302		17.58
0.9955	1787	1717	0.6326	0.3263		
49.69	2975	2689	0.9926	0.01025		18.17
49.69	2962	2676	0.9878	0.01021		
49.69	2974	2688	0.9922	0.01025		

Tabel XIII

\*) Aan de heer J.Kooi, nat. phil. cand., ben ik veel dank verschuldigd voor de grote toewijding, waarmede hij bij de proeven geassisteerd heeft, hetgeen de nauwkeurigheid en de betrouwbaarheid der waarnemingen in hoge mate bevordert heeft.

Stikstof bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,00738$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 2,385$ ;  $\mu_l = 6,53$  cm

$p_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2l}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	datum	uur
0.000621	8.81	8.81	0.00060	0.46	8-7-1942	15.20
0.00620	36.86	36.86	0.01236	0.9530		16.04
0.01299	68.70	68.70	0.02571	0.9458		16.35
	68.30	68.30	0.02554	0.9396		16.48
0.02224	114.5	114.5	0.02491	0.9649		17.10
0.02825	137.75	137.75	0.05466	0.9248	9-7-1942	13.38
	137.66	137.66	0.05463	0.9243		
0.03392	164.9	164.9	0.06605	0.9305	8-7-1942	18.00
	165.4	165.4	0.06626	0.9334		
0.05650	247.6	247.4	0.10064	0.8512	9-7-1942	16.05
	249.2	249.0	0.10131	0.8569		
0.08471	343.6	343.1	0.1408	0.7996		16.22
	345.3	344.7	0.1414	0.7976		
0.1129	433.7	432.6	0.1783	0.7546		16.45
	431.6	430.5	0.1774	0.7508		
0.1411	510.9	509.1	0.2104	0.7126		
	507.9	506.1	0.2091	0.7083		
0.1693	582.4	579.8	0.2400	0.6777		17.13
	581.6	579.0	0.2397	0.6767		
0.1975	647.9	644.3	0.2671	0.6461		17.23
	648.6	645.0	0.2673	0.6466		
0.3469	928.0	918.0	0.3818	0.5262	8-7-1942	18.30
	928.0	918.0	0.3818	0.5262		
	931.0	920.9	0.3830	0.5276		
0.5034	1145.5	1127.1	0.4695	0.4458		18.40
	1147.3	1128.8	0.4702	0.4464		
	1145.3	1126.9	0.4694	0.4457		
0.8159	1436	1400	0.5841	0.3421		18.58
	1438	1402	0.5849	0.3426		
	1431	1395	0.5820	0.3409		
1.189	1660	1605	0.6700	0.2693	9-7-1942	
	1665	1609	0.6717	0.2700		
	1665	1609	0.6717	0.2700		
2.180	1982	1890	0.7895	0.1731		18.04
	1982	1890	0.7895	0.1731		
	1987	1895	0.7916	0.1735		
3.172	2126	2014	0.8415	0.1268		18.23
	2132	2019	0.8436	0.1271		
4.163	2222	2105	0.8797	0.1010		
	2219	2103	0.8788	0.1009		
5.153	2281	2144	0.8960	0.08311		
	2288	2150	0.8985	0.08335		
92.04	2549	2361	0.9870	0.005123	8-7-1942	19.10
	2557	2368	0.9899	0.005142		
	2557	2368	0.9899	0.005142		
190.31	2574	2381	0.9954	0.002500		19.22
	2571	2379	0.9946	0.002498		
58	2569	2377	0.9937	0.002495		

Tabel XIV

Aethen bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,0104$ ;  $\lambda'_0 - \lambda_0 = 1,344$ ;  $l = 3,75$  cm

$p_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}$	datum	uur
0.000350	8.79 ?	8.79	- 0.00118	- 0.925	17-7-1942	11.49
	8.47 ?	8.47	- 0.00141	- 1.106		
0.001049	12.6 ?	12.6	0.00166	0.434		12.08
	14.4	14.4	0.00300	0.785		
0.003496	27.38	27.38	0.01265	0.9930		14.08
0.005593	38.31	38.31	0.02079	1.0202		14.28
0.008385	51.80	51.80	0.03082	1.0089		14.48
0.01187	67.97	67.97	0.04285	0.9908		15.00
0.01605	85.93	85.93	0.05622	0.9614		15.10
0.02195	114.08	114.08	0.07715	0.9647		15.42
0.02889	138.12	138.12	0.09504	0.9030		15.59
0.03617	163.3	163.3	0.1138	0.8635		16.14
	164.6	164.6	0.1147	0.8703		
0.04344	189.6	189.5	0.1333	0.8423		16.32
0.05071	211.5	211.4	0.1496	0.8097		16.38
0.05798	235.6	235.4	0.1674	0.7924		16.47
0.09722	338.4	337.9	0.2437	0.6881		17.05
0.1366	424.2	423.1	0.3070	0.6167		17.13
	426.6	425.5	0.3088	0.6206		
0.1758	496.8	495.2	0.3607	0.5632		17.32
	496.7	495.1	0.3606	0.5629		
0.2149	559.4	557.1	0.4068	0.5196		17.42
	557.8	555.5	0.4056	0.5179		
0.3788	742.1	736.9	0.5405	0.3917		17.50
0.5428	861.2	853.0	0.6269	0.3170		17.54
0.7067	940.5	930.2	0.6843	0.2658		18.00
0.8706	999.6	987.2	0.7267	0.2291		18.05
	999.9	987.5	0.7269	0.2291		
1.1986	1084.3	1068.6	0.7873	0.1803		18.23
1.6901	1154.0	1135.0	0.8367	0.1359		18.35
2.3445	1211.0	1189.2	0.8770	0.1027		18.54
2.5079	1217.4	1195.2	0.8814	0.09645		19.07
93.38	1382.5	1350.4	0.9969	0.002930		19.23
	1382.2	1350.1	0.9967	0.002930		
	1382.9	1350.8	0.9972	0.002931		

Tabel XV



Waterstof 20° C;  $\lambda_0 = 0,00561$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 1,179$ ;  $d = 12,29$  cm

$p_{mm}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{p(\lambda'_\infty - \lambda_0)}$	datum	uur
0.00258	7.31	7.31	0.00144	0.502	16-7-1942	11.10
0.00516	10.89	10.89	0.00448	0.779		11.25
0.00774	14.73	14.73	0.00774	0.897		11.46
0.01031	18.24	18.24	0.01072	0.9333		11.54
0.01544	25.19	25.19	0.01661	0.9661		12.18
	25.23	25.23	0.01665	0.9684		
	25.04	25.04	0.01648	0.9585		14.13
0.02057	31.72	31.72	0.02215	0.9668		14.26
0.02569	38.03	38.03	0.02750	0.9615		14.38
0.03593	51.13	51.13	0.03862	0.9653		15.16
0.04616	63.83	63.83	0.04939	0.9607	15.28	
	63.41	63.41	0.04904	0.9539	15.32	
0.1445	165.93	165.91	0.13600	0.8449	15.49	
	166.86	166.84	0.13679	0.8503		
0.2427	248.5	248.3	0.2042	0.7556	16.07	
0.3408	315.6	315.2	0.2627	0.6922	16.28	
	313.1	312.7	0.2605	0.6865		
0.4390	374.6	373.9	0.3125	0.6392	16.38	
0.6354	469.9	468.5	0.3927	0.5550	16.47	
	471.7	470.3	0.3942	0.5572		
0.8318	544.2	542.0	0.4551	0.4913	17.02	
	543.0	540.8	0.4541	0.4902		
1.028	606.3	603.4	0.5072	0.4430	17.19	
1.224	655.4	651.8	0.5482	0.4022	17.30	
1.467	705.7	701.1	0.5901	0.3612	15-7-1942	15.50
	709.6	705.0	0.5934	0.3633		
1.518	717.1	712.4	0.5996	0.3547	16-7-1942	17.46
1.810	763.9	758.2	0.6385	0.3168	18.06	
1.948	783.5	777.4	0.6548	0.3019	15-7-1942	16.08
2.401	840.1	833.4	0.7023	0.2627	16-7-1942	18.14
	839.3	832.6	0.7016	0.2624		
2.992	892.0	883.1	0.7445	0.2235	18.21	
3.583	933.0	922.8	0.7781	0.1950	18.28	
	928.6	918.5	0.7745	0.1941		
4.764	987.4	975.5	0.8229	0.1551	18.40	
	987.0	975.1	0.8225	0.1550		
6.533	1037.2	1023.5	0.8636	0.1187	18.57	
	1036.9	1023.2	0.8633	0.1187		
57	1190.0	1169.3	0.9873	0.0155	15-7-1942	16.23
	1191.4	1170.7	0.9885	0.0155		
56.68	1194.0	1173.1	0.9905	0.01569	16.29	
213.5	1208.3	1186.8	1.0021	0.004216	16.53	
394.33	1201.6	1180.5	0.9968	0.002270	16-7-1942	19.09
	1203.3	1182.1	0.9981	0.002273		
	1193.9	1173.1	0.9905	0.002256		

Helium bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,0078$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 2,601$ ;  $l = 19,30$  cm

$p_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{P(\lambda'_\infty \lambda_0)}$	datum	uur
0.000586	8.98 ?	8.98	0.00046	1.09	2-7-1942	12.10
0.001759	9.27 ?	9.27	0.00058	0.45		12.32
	9.20 ?	9.20	0.00054	0.43		15.26
0.003515	11.63 ?	11.63	0.00147	0.592		15.45
0.00878	21.91	21.91	0.00543	0.8728		16.05
0.02624	55.05	55.05	0.01817	0.9781		16.45
0.04927	94.62	94.62	0.03338	0.9570	6-7-1942	11.45
	90.06 ?	90.06	0.03167	0.9081		
0.05289	101.98	101.98	0.03621	0.9673	2-7-1942	17.20
0.07884	161.7 ?	161.7	0.0592	1.0602		17.55
	161.40	161.38	0.05905	1.0580		
0.09828	168.38	168.36	0.06173	0.8874	6-7-1942	14.40
	176.4 ?	176.4	0.0648	0.9320		
0.1471	250.1	249.78	0.09304	0.8934		15.05
	250.13	249.90	0.09308	0.8940		
	250.40	250.17	0.09319	0.8950		
0.1681	279.59	279.31	0.10439	0.8771		15.30
	280.92	280.64	0.10490	0.8815		
0.1891	299.80	299.44	0.11213	0.8375		15.54
	311.97	311.53	0.11678	0.8722		
0.2101	338.49	337.95	0.12694	0.8532		16.13
0.2312	370.7	370.0	0.1393	0.8511		
	367.2	366.5	0.1379	0.8424		
0.2363	370.9	370.2	0.1393	0.8331	2-7-1942	18.15
0.2942	444.3	443.1	0.1674	0.8038	6-7-1942	16.50
	442.4	441.2	0.1666	0.8000		
0.3783	539.0	536.8	0.2034	0.7593		17.25
	537.2	535.1	0.2027	0.7571		
0.3841	543.8	541.6	0.2052	0.7549	2-7-1942	18.25
	545.6	543.4	0.2059	0.7571		
0.4416	603.0	600.1	0.2277	0.7283	10-7-1942	15.18
	602.4	599.5	0.2275	0.7288		
	604.0	601.1	0.2281	0.7299		
0.4834	634.8	640.3	0.2432	0.7104	6-7-1942	
	644.0	640.4	0.2432	0.7104		
0.5319	689.7	685.5	0.2606	0.6919	2-7-1942	18.40
	689.3	685.1	0.2604	0.6914		
	689.5	685.3	0.2605	0.6919		
	690.1	689.9	0.2623	0.6963		
0.8830	967.3	956.1	0.3646	0.5833	10-7-1942	15.43
	965.4	954.2	0.3639	0.5822		
0.9746	1022.2	1008.9	0.3849	0.5579	2-7-1942	18.55
	1018.8	1005.6	0.3836	0.5561		
	1027.0	1013.6	0.3867	0.5605		

Vervolg Helium bij 20°.

$p_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda'$	$10^3 \lambda$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{p(\lambda'_\infty - \lambda)}$	datum	uur
1.324	1223.7	1201.2	0.4588	0.4896	10-7-1942	15.55
	1227.2	1204.5	0.4601	0.4909		
1.766	1432	1396	0.5337	0.4269		
	1419	1385	0.5294	0.4235		
2.207	1568	1522	0.5821	0.3726		16.09
	1575	1528	0.5844	0.3740		
2.648	1689	1631	0.6240	0.3328		16.24
	1701	1642	0.6282	0.3350		
3.532	1875	1797	0.6886	0.2754		16.35
	1887	1808	0.6921	0.2769		
4.852	2067	1964	0.7520	0.2189		16.49
	2058	1956	0.7490	0.2181		
7.053	2262	2128	0.8151	0.1633		17.11
	2264	2130	0.8159	0.1634		
9.249	2380	2225	0.8524	0.1302		18.00
	2390	2233	0.8555	0.1307		
83.076	2829	2579	0.9885	0.01681	2-7-1942	19.03
	2831	2580	0.9889	0.01681		
	2807	2562	0.9820	0.01670		
	2803	2559	0.9808	0.01668		
86.90	2800	2556	0.9797	0.01592	2-7-1942	19.12
	2795	2553	0.9785	0.01590		
	2803	2559	0.9808	0.01595		
260.31	2790	2549	0.9770	0.01588	10-7-1942	18.14
	2838	2586	0.9912	0.005379		

Tabel XVIIb



Helium bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,00646$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 2,608$ ;  $l = 19,30$  cm

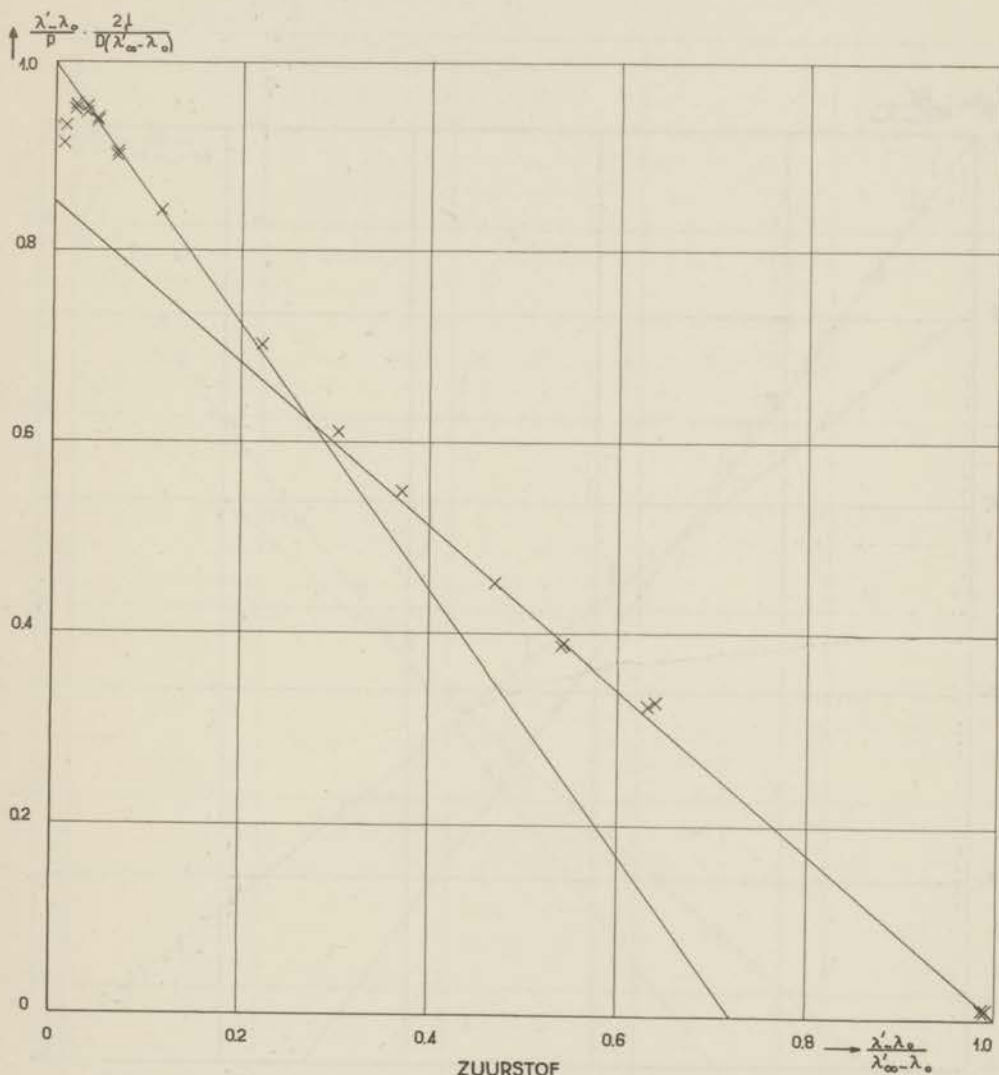
$p_{mm}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{\rho(\lambda'_\infty - \lambda_0)}$	datum	uur
0.001765	7.70 ?	7.70	0.00048	0.38	13-7-1942	12.35
	7.41 ?	7.41	0.00036	0.29		
0.004409	13.37 ?	13.37	0.00265	0.849		12.55
	12.57	12.57	0.00234	0.750		
	13.38 ?	13.38	0.00265	0.849		
0.01496	33.25	33.25	0.01027	0.9697		15.05
	33.57	33.57	0.01040	0.9820		
0.02549	52.88	52.88	0.01780	0.9863		15.30
	53.23	53.23	0.01793	0.9936		
0.03600	71.84	71.84	0.02507	0.9837		15.45
	72.13	72.13	0.02518	0.9879		
0.04651	89.74	89.74	0.03193	0.9697		16.10
0.2752	416.7	415.7	0.1569	0.8054		16.30
	420.2	419.1	0.1582	0.8120		
	418.3	417.3	0.1575	0.8085		
0.5035	657.7	654.1	0.2483	0.6966		16.45
	664.2	660.5	0.2508	0.7036		
0.7318	854.3	846.5	0.3221	0.6216		16.59
	857.3	849.5	0.3233	0.6239		
	856.1	848.3	0.3228	0.6231		
0.9599	1020	1007	0.3836	0.5644		17.15
	1008	995.4	0.3792	0.5579		
	1013	1001	0.3813	0.5610		
1.188	1146	1128	0.4300	0.5113		17.35
	1144	1126	0.4293	0.5105		
	1148	1130	0.4308	0.5122		
2.144	1507	1466	0.5591	0.3684		18.07
	1536	1492	0.5690	0.3749		
4.056	1938	1852	0.7071	0.2462		18.24
	1954	1866	0.7124	0.2480		
6.922	2243	2112	0.8068	0.1647		18.41
	2228	2100	0.8022	0.1637		
	2253	2121	0.8102	0.1653		

Tabel XVIII

Helium bij 20° C;  $\lambda_0 = 0,0641$ ;  $\lambda'_\infty - \lambda_0 = 2,607$ ;  $r_1 = 19,30$  cm

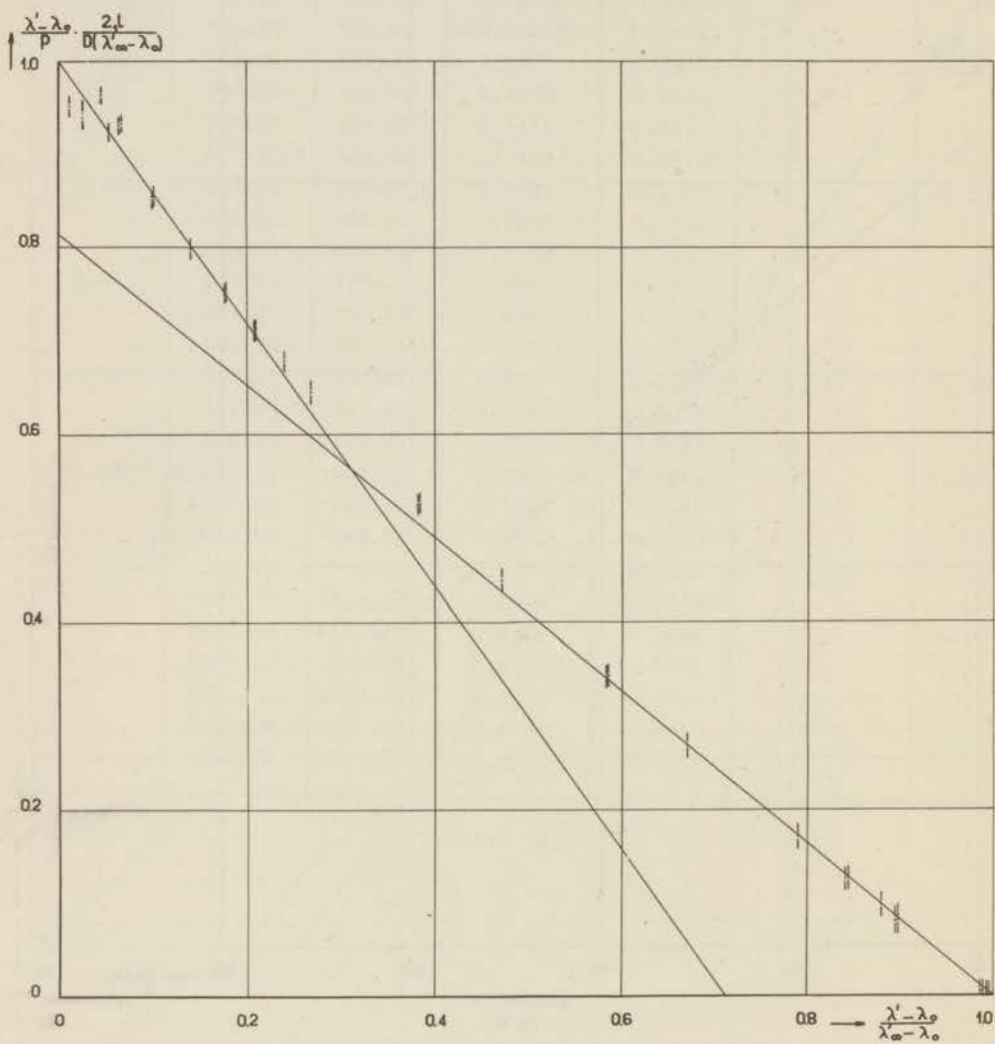
$p_{\text{mm}}$	$10^3 \lambda$	$10^3 \lambda'$	$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda'_\infty - \lambda_0}$	$\frac{2,1}{D} \frac{\lambda' - \lambda_0}{p(\lambda'_\infty - \lambda_0)}$	datum	uur
0.0276	57.81	57.81	0.01972	1.0324	23-9-1942	15.48
	59.01	59.01	0.02018	1.0565		
0.0552	104.35	104.35	0.03757	0.9862		16.05
	105.94	105.94	0.03818	1.0022		
0.252	390.84	389.98	0.1471	0.8452		16.35
	390.58	389.72	0.1470	0.8446		
	391.91	391.05	0.1476	0.8475		
0.449	387.35 ?	386.54	0.1458	0.8376		16.52
	606.56	603.71	0.2291	0.7389		
	607.80	604.94	0.2296	0.7404		
0.646	606.83	603.98	0.2292	0.7393		17.02
	785.59	779.46	0.2966	0.6646		
	784.61	778.49	0.2962	0.6638		
0.843	787.28	781.06	0.2972	0.6660		17.30
	932.12	921.87	0.3512	0.6031		
	931.83	921.58	0.3511	0.6029		
1.040	934.65	924.37	0.3522	0.6048		17.40
	1059.24	1044.52	0.3982	0.5544		
	1059.03	1044.31	0.3982	0.5543		
1.236	1054.98	1040.53	0.3967	0.5523		17.48
	1172.65	1152.71	0.4398	0.5151		
	1172.19	1152.26	0.4396	0.5149		
1.433	1173.42	1153.47	0.4400	0.5155		17.58
	1282.47	1256.69	0.4796	0.4846		
	1279.23	1253.65	0.4785	0.4834		
	1283.08	1257.29	0.4799	0.4848		
	1284.04	1258.10	0.4802	0.4851		

Tabel XIX

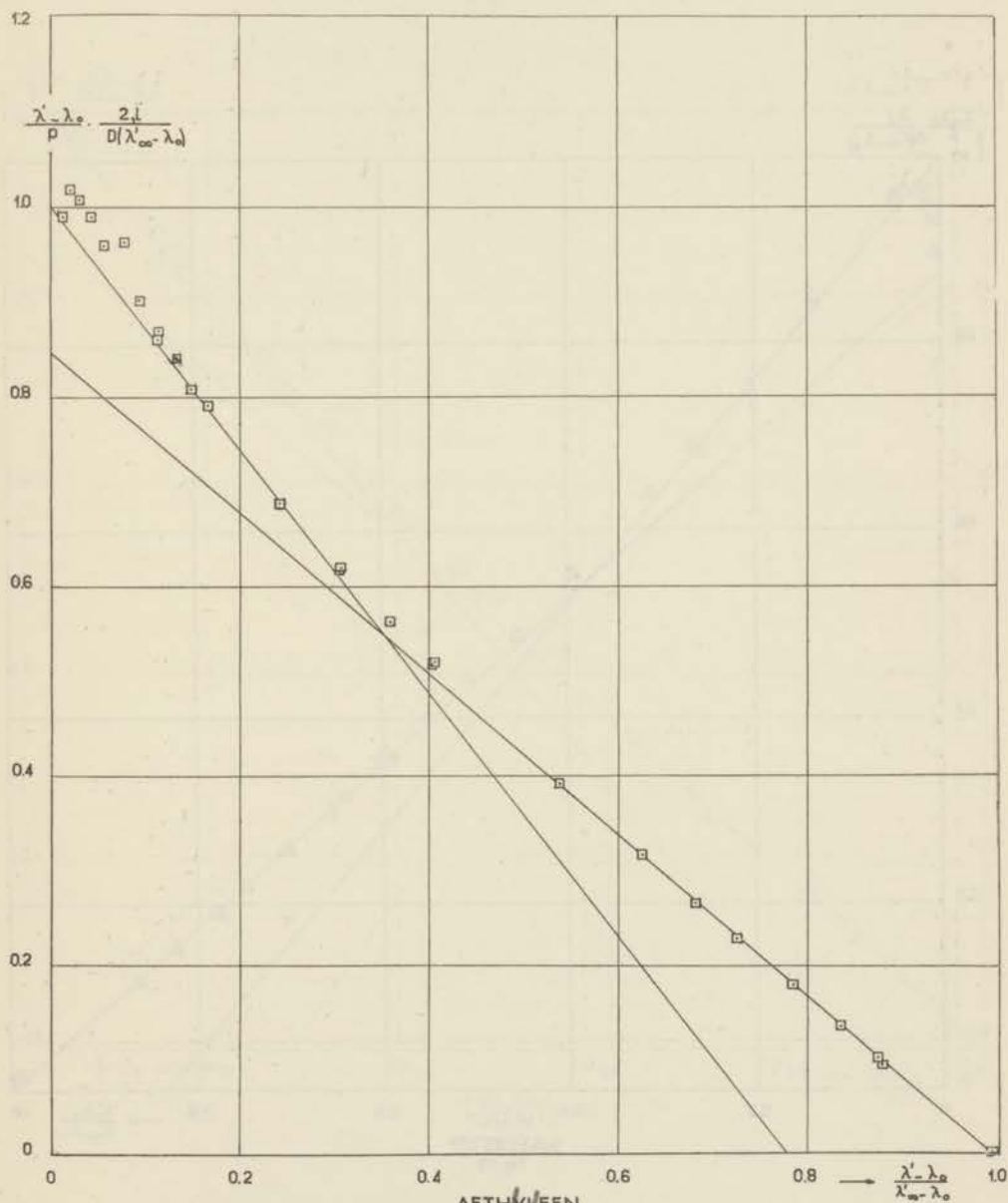


ZUURSTOF  
Fig. 19

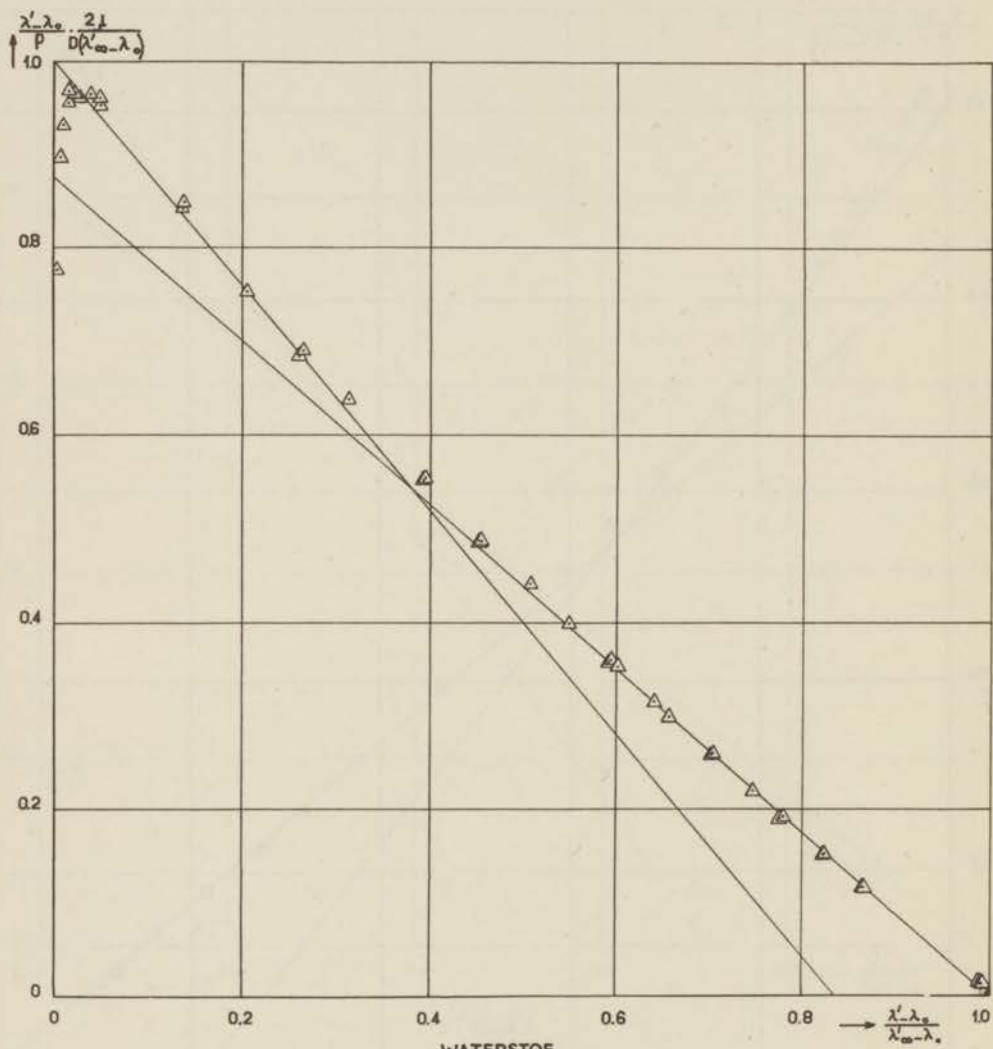




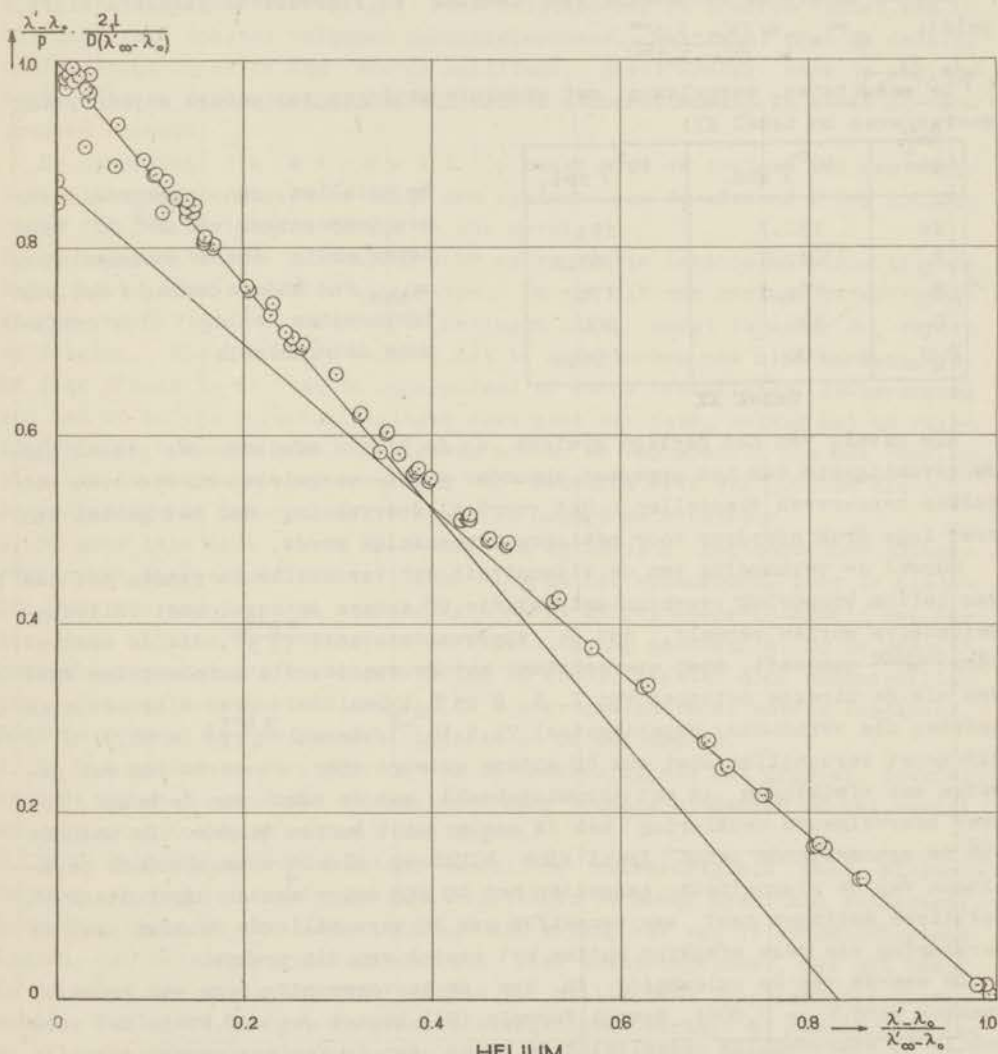
STIKSTOF  
fig. 20



AETHLEEN  
fig. 21







§ 13 Contrôle

De grafische voorstellingen (fig. 19-23) van de metingen aan eenzelfde gas geven ons een indruk van de reproduceerbaarheid. Gezien het feit, dat deze bevredigend is ook op verschillende dagen, doet zich de mogelijkheid voor het toestel te ijken en relatieve waarden  $\eta_{rel.}$  van de viscositeit ten opzichte van helium te berekenen.

Indien immers de verhouding van demping en viscositeit dezelfde blijft, geldt:

$$\eta^{gas} = \eta^{He} \frac{(\lambda'_{\infty} - \lambda_0)^{gas}}{(\lambda'_{\infty} - \lambda_0)^{He}}$$

De resultaten, vergeleken met absolute metingen van andere auteurs, zijn weergegeven in tabel XX.

gas	$10^6 \eta_{abs.}$	$10^6 \eta_{rel.}$
He	192,7	193
H <sub>2</sub>	87,8	87,2
N <sub>2</sub>	174,6	176
O <sub>2</sub>	200	200
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	100	99,4

Tabel XX

De getallen zijn opgegeven voor een temperatuur van 20° C. Voor zover nodig zijn de waarnemingen  $\eta_{abs.}$  van andere auteurs tot die temperatuur herleid door grafische interpolatie.

Als gevolg van het geringe gewicht en de kleine afstand der platen was de gevoeligheid van het apparaat bijzonder groot vergeleken bij die van tot dusver beschreven toestellen. Het voordeel daarvan is, dat het gebied van zeer lage druk hierdoor voor metingen toegankelijk wordt.

Hoewel de verhouding van de viscositeit der verschillende gassen tot die van helium behoorlijk overeenstemt met die bij andere auteurs, moet volledigheidshalve worden vermeld, dat de apparaatconstante  $\frac{\pi R^4 T_0}{2 l D}$ , die de verhouding  $\frac{\lambda' - \lambda_0}{\eta}$  aangeeft, niet overeenstemt met de waarde, die berekend kan worden uit de directe metingen van I, R, D en  $T_0$ . Gemiddeld over alle metingen bedroeg die verhouding experimenteel  $75,6 \cdot 10^{-6}$ , terwijl  $\frac{\pi R^4 T_0}{2 l D} = 85,9 \cdot 10^{-6}$ . Dit soort verschillen komt ook bij andere auteurs voor en wordt dan wel geweten aan afwijkingen in het stromingsbeeld aan de rand van de schijf. Een meer bevredigende verklaring heb ik echter niet kunnen vinden. De methode van de schommelende schijf leent zich blijkbaar slecht voor absolute bepalingen van de viscositeit. Aangezien het bij mijn experimenten uitsluitend om relatieve metingen gaat aan eenzelfde gas bij verschillende drukken valt de verklaring van deze afwijking buiten het bestek van dit boekje.

De waarde van de nul demping is van de te verwachten orde van grootte. Gemeten werd  $\lambda_0 = 0,0064$ , terwijl formule (94) levert  $\lambda_0 = 0,0013$ . Het verschil is waarschijnlijk gedeeltelijk te wijten aan de geringe nauwkeurigheid, waarmee de inwendige wrijving  $\eta_0$  van wolfram bekend is, omdat deze zeer gevoelig is voor de wijze, waarop de draad tevoren behandeld is. Verder kan ook het lak zelf nog een bijdrage aan de nul demping geleverd hebben. Daar steeds met een, uit waarnemingen bij zeer lage druk, geëxtrapolerde waarde van  $\lambda_0$  gewerkt is, kan ook deze afwijking van de theorie geen invloed op de resultaten hebben gehad.

#### § 14 De nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid, waarmee de demping bepaald kon worden, is niet voor het gehele drukgebied hetzelfde. De verschillende bronnen van fouten zullen we achtereenvolgens nagaan.

1. Daar het bewegingsprobleem van de schijf niet exact kan worden opgelost, blijft een onzekerheid bestaan over de invloed van de randcorrecties. De invloed van mogelijke wervelingen, die ontstaan aan de scherpe randen, was bij het gebruikte toestel volkomen oncontroleerbaar. Het feit, dat de demping onafhankelijk bleek te zijn van de amplitude, pleit echter voor de geringe betekenis van deze storing, terwijl ook de overeenstemming in tabel XX vertrouwen schenkt.

De schatting, die Maxwell<sup>67)</sup> maakt over de invloed van een merkbare dikte van de draaiende schijf ten opzichte van de afstand  $D$  der schijven bleek van geen betekenis te zijn in ons geval.

2. De bepaling van de nuldemping door extrapolatie leverde op verschillende dagen niet geheel dezelfde uitkomsten. Ik wijt dit aan geringe verontreinigingen van het gas. Ze storen de metingen niet, omdat ik onder  $\lambda_0$  versta de demping, die overblijft wanneer het te onderzoeken gas niet aanwezig is. Of deze afkomstig is van de ophangdraad of diens bevestiging, dampspanning van lak of andere verontreinigingen doet niet ter zake, zolang het om relatief kleine bedragen gaat. Hoogstens moeten we voorzichtig zijn met conclusies uit de waarden van dempingen in dezelfde orde van grootte als  $\lambda_0$ , doch deze zijn om andere redenen reeds in hogere mate onzeker.

3. Bij zeer lage druk wordt de meting van de demping gestoord door slingeren van de draad in een vertikaal vlak om het ophangpunt. Door te middelen over een groot aantal waarnemingen wordt de reproduceerbaarheid wel beter, doch blijkens de grafiek is de strooing nog aanzienlijk. Bij de met „?" gemerkte waarnemingen was deze storing zo groot, meestal door bodemtrillingen, dat aan deze punten aanzienlijk minder gewicht moet worden toegekend, mede in verband met de onnauwkeurigheid in de nuldemping.

4. In het gebied van de glijding is de nauwkeurigheid het grootst, doordat daar de onder 3. genoemde slingeren zeer spoedig uitdempen en het aantal waargenomen omkeerpunten groot kon blijven.

5. In de hydrodynamische toestand wordt de nauwkeurigheid weer minder, doordat na twee of drie volledige trillingen de schijf practisch stilstaat. Bovendien bevatten de omkeerpunten, die weinig ver van de evenwichtsstand liggen, een relatief grote afleesfout. Daar staat tegenover, dat het beeld in de kijker zo rustig is, dat tienden van millimeters gegarandeerd kunnen worden. Bij lagere drukken en grotere uitwijkingen bedraagt de onzekerheid in de aflezing der omkeerpunten wel 0,2 à 0,3 millimeter.

6. De temperatuurveranderingen in de loop van de dag bedroegen niet meer dan enkele tiende-graden. Het torsiekoppel, dat daar het gevoeligst voor is, ondervindt hiervan nog geen merkbare wijziging.

7. De demping, die het spiegeltje veroorzaakt, onderzocht ik door een piertje in dezelfde vorm eveneens aan de naald te bevestigen. De demping in lucht bij kamertemperatuur onderging hierdoor geen wijziging, zodat ook deze



correctie achterwege kon blijven.

8. Bij het instellen van de druk van 0,1556 mm bij zuurstof bestond enige onzekerheid over het al of niet sluiten van een kraan. Ik heb het waarschijnlijkste geval uitgerekend. Volledigheidshalve moet daarom worden opgemerkt, dat de juistheid van de drukken boven genoemde waarde niet meer volledig gegarandeerd kan worden. Door beschadiging van het apparaat was herhaling van de reeks uitgesloten.

Beoordeeld naar de strooïing in de grafische voorstelling acht ik de mogelijke relatieve fout in de richting van de rechte in het glijdingsgebied en daarmee in  $k$ , ongeveer 2 % voor elk gas afzonderlijk. De strooïing van de rechte bij lage druk is groter. De onnauwkeurigheid in  $S_1$  is nooit groter dan 5 %.

### § 15 Bespreking der resultaten

De resultaten kunnen in het kort worden samengevat in tabel XXI:

gas	$S_1$	$k$
H <sub>2</sub>	0,60	1,14
He	0,60	1,15
N <sub>2</sub>	0,70	1,20
O <sub>2</sub>	0,66	1,17
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,64	1,18

Tabel XXI

De waarden van  $k$  leveren geen verrassing, noch in verband met de theorie (hoofdstuk II A, § 2), noch vergeleken bij de resultaten van andere auteurs. Zij zijn iets lager dan de enige betrouwbare metingen van  $k$ , welke bij kamertemperatuur met de schommelende schijf gedaan werden (door H o g g 36) 37), zie ook tabel V en X). De waarden van  $k$  verschillen een weinig voor verschillende gassen.

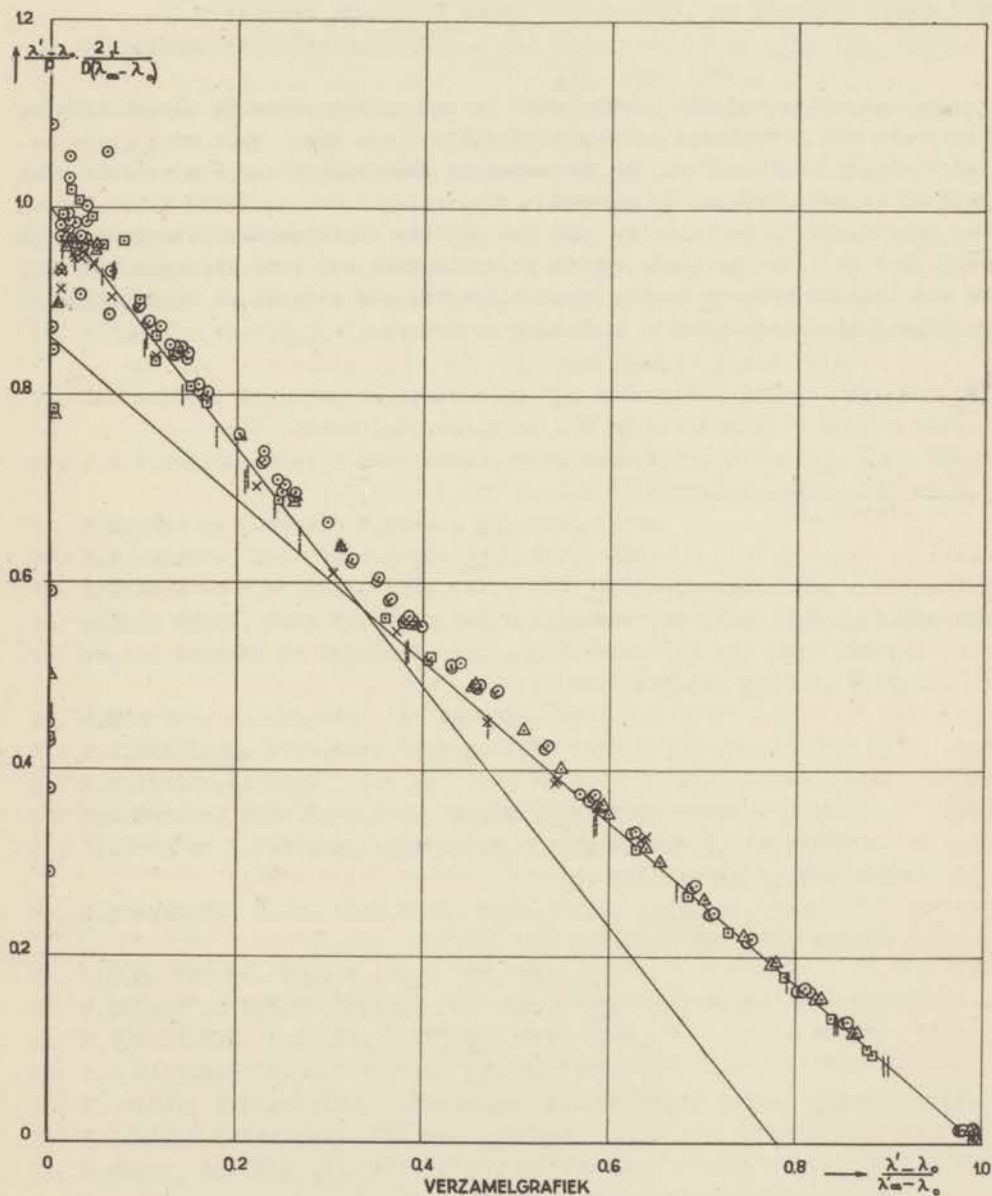
Hoewel de verschillen op de grens van de meetbaarheid liggen, meen ik hierin toch een zwakke aanwijzing te zien, dat de invloed van het krachtenveld tussen de moleculen bij deze nauwkeurigheid van meten merkbaar wordt.

De waarden van  $S_1$  liggen meestal iets lager dan de theorie van hoofdstuk II B, § 3 leerde (0,707), doch zeker hoger dan de schatting van W e b e r gaf (0,576), waarbij de invloed van de L - L-botsingen verwaarloosd werd. Hier duidelijker dan bij  $k$  blijkt enige afhankelijkheid van de aard van het gas. Zoals gemeld zijn de berekeningen door K r a m e r s exact doorgevoerd, doch steeds in de veronderstelling, dat de moleculen harde bollen zijn. De gevonden afwijkingen maken het zeer gewenst, dat de theorie uitgebreid wordt tot moleculen met meer aan de werkelijkheid beantwoordende krachtvelden.

Aanvaardt men de theorie voor harde bollen, dan zouden  $k$  en  $S_1$  onafhankelijk van de aard van het gas zijn. Dan heeft het zin de waarnemingen alle in eenzelfde grafiek te verenigen (fig. 24). De punten moeten dan op één en dezelfde kromme liggen. De richtingen, waartoe de beide einden van de kromme naderen, geven als gemiddelde waarden  $k = 1,17$ ;  $S_1 = 0,64$ .

Uit de waarnemingen van H o g g 36) 37) aan waterstof en lucht, waaruit met zulk een grote nauwkeurigheid  $k$  bepaald kan worden, is ook de waarde  $S_1$  te berekenen. Daaruit blijkt voor lucht  $S_1 = 0,64$  en voor waterstof  $S_1 = 0,62$ , beide bij kamertemperatuur.

De formule voor het gebied van de glijding is geldig, zolang de waarnemingspunten op een rechte liggen in de grafische voorstelling met de in § 11



besproken coördinaten. De systematische afwijkingen van de rechte lijn blijven beneden 1% voor zodanige drukken, dat  $l < \frac{1}{3} D$ .

Op dezelfde wijze blijkt, dat de formule voor het gebied van de eerste botsingen met systematische afwijkingen beneden 1% geldig blijft, zolang  $l > \frac{3}{2} \frac{V}{3} D$ .

$$\begin{array}{cc} x & x \\ & x \end{array}$$

Aan het einde van dit proefschrift is het mij een behoefte uitdrukking te geven aan een gevoel van grote erkentelijkheid aan hen, door wier grote belangstelling en toewijding de theoretische achtergrond van mijn experimenten voor mij is gaan leven. De geregelde besprekingen met dr Holst Weber vormen een hoogtepunt in de beleving van een actieve deelname aan wetenschappelijk werk. Ook de later gevolgde studie onder leiding van Prof. Kramers heeft mij na een lang en eenzaam zoeken meer zelfvertrouwen gegeven en mijn inzicht in de moleculaire problemen in hoge mate bevorderd.



## LITERATUUR

1. R.Clausius, Pogg. Ann. 100, 353, 1857; Phil. Mag., (4) 23, 434, 1862.
2. J.C. Maxwell, Phil. Mag., (4) 35, 129, 1868.
3. L. Boltzmann, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 72, 427, 1875.
4. J. Stefan, S.-B. Akad. Wiss. Wien, (II), 65, 323, 1872.
5. O.E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase (1e druk 1877; 2e druk 1899).  
Kinetic Theory of Gases (Trans. publ. by Longmans Green, 1899).
6. S. Chapman, Phil. Trans. roy. Soc., (A) 211, 433, 1912; 216, 279, 1916;  
217, 115, 1918.
7. D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen,  
Diss. Uppsala, 1917.
8. E.H. Kennard, Kinetic Theory of Gases (Mc Graw - Hill Book Comp.,  
New York, London 1938).
9. J.C. Maxwell, Phil. Mag., (4) 19, 19, 1860.
10. J.C. Maxwell, Phil. Trans. roy. Soc., (A) 170, 231, 1879.
11. J. de Boer en A. Michels, Physica, 's-Grav., (5) 5, 945, 1938.
12. S. Chapman en T.G. Cowling, The mathematical Theory of non-uniform gases,  
(Cambr. Univ. Press 1939).
13. J.B. Ubbink, Physica, 's-Grav., (5) 10, 465, 1943; Commun. Kamerlingh  
Onnes Lab., Leiden, 266 d; proefschrift Leiden 1945.
14. H.L.F. Helmholtz en G. Piotrowski, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 40, 607, 1860  
(in 't bijzonder bladz. 609 en 640).
15. F. Knauer en O. Stern, Z. Phys., 53, 779, 1929.
16. T.H. Johnson, Phys. Rev., (2) 31, 1122, 1928.
17. A. Ellett en H.F. Olson, Phys. Rev., (2) 31, 643, 1928.
18. Sophus Weber, Math. Fys. Medd. det Kgl. Danske Vid. Selsk. 24, no. 4, 1947 (\$7).
19. Martin Knudsen en Sophus Weber, Ann. Physik, (4) 36, 981, 1911;  
Phil. Mag., (6) 29, 12, 1917.
20. M. Knudsen, Ann. Physik, (4) 44, 525, 1914.
21. R.A. Millikan, Phys. Rev., (2) 2, 139, 1913.
22. J. Mattauch, Z. Phys., (6) 32, 439, 1925.
23. C.N. Davies, Proc. Phys. Soc., London, 57, 259, 1945.
24. A. Kundt en E. Warburg, Ann. Physik, (Pogg.), (6) 5, 337, 1875;  
5, 525, 1875; 9, 399, 1876.
25. F. Ehrenhaft, S.-B. Akad. Wiss. Wien, (IIa) 118, 321, 1909;  
Phys. Z., 10, 308, 1909.
26. L.W. Mc Keehan, Phys. Z., 12, 707, 1911.
27. J. Zeleny en L.W. Mc Keehan, Phys. Rev., 30, 535, 1910.
28. R.A. Millikan, Phys. Rev., (2) 21, 217, 1923.
29. R.A. Millikan, Phys. Rev., (2) 22, 1, 1923.
30. Y. Ishida, I. Fukushima, T. Suetsugu, Scient. Pap., Tokyo, 32, 57, 1937.
31. Y. Ishida, Scient. Pap., Tokyo, 32, 233, 1937.
32. W. Klose, Ann. Physik, (5) 11, 73, 1931.
33. R.E.H. Rasmussen, Ann. Physik, (5) 29, 665, 1937.
- 34a. H. Adzumi, Bull. Chem. Soc. Japan, 12, 292, 1937.  
b. H. Adzumi, Bull. Chem. Soc. Japan, 14, 343, 1939.

35. W. Crookes, Phil. Trans. roy. Soc., 172, 387, 1881.
36. J. L. Hogg, Proc. Amer. Acad., 42, 113, 1906/1907; Contr. Jefferson Lab., Harvard Univ., 4, no 4, 1906.
37. J. L. Hogg, Proc. Amer. Acad., 45, 1, 1909/1910; Contr. Jefferson Lab., Harvard Univ., 7, no 1, 1909.
38. A. van Itterbeek en W. H. Keesom, Physica, 's-Grav. (5), 4, 257, 1938; Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, 252a.
39. A. van Itterbeek en O. van Paemel, Physica, 's-Grav. (7), 4, 273, 1940.
40. Sophus Weber, Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, suppl. 71b; Rapp. K.O. 6<sup>ième</sup> Congr. int. Froid, no. 5, 1932; Actes 6<sup>ième</sup> Congr. int. Froid, 2 (A), 27, 1935.  
Sophus Weber en W. H. Keesom, Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, 223b; Rapp. K.O. 6<sup>ième</sup> Congr. int. Froid, no 6, 1932; Actes 6<sup>ième</sup> Congr. int. Froid, 2(A), 51, 1935.
41. M. Knudsen, Ann. Physik, (4) 28, 75, 1909.
42. Sophus Weber, W. H. Keesom, G. Schmidt, Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, 264a; Rapp. K.O. 7<sup>ième</sup> Congr. int. Froid, no 6, 1936.
43. A. van Itterbeek en A. Claes, J. Phys. Radium, (7) 9, 457, 1938.
44. A. Timiriazeff, Ann. Physik, (4) 40, 971, 1913.
45. E. L. Harrington, Phys. Rev., (2) 8, 738, 1916.
46. L. J. Stacy, Phys. Rev., (2) 21, 239, 1923.
47. M. N. States, Phys. Rev., (2) 21, 662, 1923.
48. E. Blankenstein, Phys. Rev., (2) 22, 582, 1923.
49. J. Y. Lee, Phys. Rev., (2) 4, 420, 1914.
50. R. A. Millikan, Phys. Rev., 5, 334, 1915; Chicago meeting Phys. Soc., Nov. '14.
51. M. Knudsen, Math. Fys. Medd. det Kgl. Danske Vid. Selsk, 8, no 3, 1927.
52. Y. Ishida, Phys. Rev., (2) 21, 550, 1923.
53. R. A. Millikan, Phys. Rev., (2) 22, 1, 1923.
54. G. Mönch, Phys. Z. 34, 77, 1933.
55. K. S. van Dijke, Phys. Rev., (2) 21, 250, 1923.
56. L. J. Lasalle, Phys. Rev., (2) 17, 354, 1921.
57. R. A. Millikan, Phys. Rev., (4) 32, 349, 1911.
58. J. M. Eglin, Phys. Rev., (2) 22, 161, 1923.
59. J. B. Derieux, Phys. Rev., (2) 11, 203, 1918.
60. Gy. Zemplén, Ann. Physik, (4) 19, 786, 1906.
61. Gy. Zemplén, Ann. Physik, (4) 29, 869, 1909; Matematikai és Természettudományi Ertesítő, 27, 77, 1909 (in Hongaarse taal).
62. D. Coster, Verslagen Kon. Acad. Amsterdam, 27, no 1, 23, 1918; Proc. roy. Acad. Amsterdam, 21, no 1, 193, 1919; Phil. Mag., (6) 37, 587, 1919.
63. L. Steenhuis, proefschrift Groningen, 1879.
64. A. van Itterbeek, Wis- en Natuurk. T., 6, 257, 1932/1933.
65. G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, no 26.
66. F. E. Fowle, Smithsonian Physical Tables, (Smiths. Miscell. Coll. Vol. 71, no 1)
67. J. C. Maxwell, Phil. Trans. roy. Soc., (A) 156, 249, 1866.
68. Sophus Weber, Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, suppl. 88a, 1939; Physica, 's-Grav., (5) 6, 551, 1939.

## SUMMARY

This thesis deals with the theory and the experimental data pertaining to some molecular problems connected with the flow of a gas along a wall (no temperature differences). In a certain pressure-domain transport of tangential momentum to the wall is described on the basis of a pressure-independant coefficient of viscosity  $\eta$  of the gas. At sufficiently high rarefaction, in the purely molecular state, this transport is proportional to the pressure of the gas. Due to the pioneer-work of Maxwell, Knudsen, Chapman a.o. the theory has been developed for the extreme regions mentioned (part a and e in fig. 1).

In chapter I A a review is given of the way in which Chapman was able to derive the viscosity coefficient of a monatomic gas from the law governing the distribution of angular deviations in a single collision.

In chapter I B the case is considered where the gas is in its molecular state, i.e. where the molecules go from one wall to another without practically any encounter with other molecules. In this extreme case too a mathematical expression can be found for the transport of momentum. It becomes particularly simple if we suppose that the chance for a molecule to leave the wall in a certain direction is independant of its initial velocity and given by the so-called cosine-law.

In chapter II special attention is paid, on the one hand, to the way in which, near a wall, the expression for the transport of momentum in the Maxwell-Chapman-state is changed ("region of slip", part d in fig. 1) and on the other hand, to the way in which the expression pertaining to the molecular state should be modified when, with increasing pressure, collisions between gas-molecules come into play ("region of first collisions", part b in fig. 1). We have restricted ourselves to a discussion of the first order deviations from the two limiting cases.

In the region of slip it is known experimentally that linear extrapolation unto the wall of the mean velocity  $u$  of the molecules of the gas, flowing with constant gradient  $\frac{\partial u}{\partial x}$  along the wall, does not bring  $u$  down to zero, but only to a finite value  $u_0 = \zeta \frac{\partial u}{\partial x}$ .  $\zeta$  is called the coefficient of viscosity-slip, the value of which is of the same order as that of the mean free path  $l$ . We write  $\zeta = kl$ , where  $k$  is a numerical constant. Maxwell had given in 1879 an approximate theory of the value of  $k$ , taking also into account a possible deviation from the cosine-law reflection due to incomplete accomodation of tangential momentum ("real" slip). A precise theory for the value of  $k$  is still lacking.



The theory in the region of first collisions was first treated by Sophus Weber <sup>68)</sup> in 1939 and developed more in detail in 1948 <sup>18)</sup>. His way of handling the problem served as a model where in chapter II we gave an approximate theory for some special cases, partly in view of some older experiments of Knudsen and Weber, partly in view of new measurements by myself. These measurements which are discussed in detail in chapter IV and V were performed at room temperature with an oscillating disc between two parallel plates at pressures ranging from the molecular state up to one atmosphere. In this way new experimental data are collected both for the region of first collisions and for the region of slip, which can be compared with theory.

The value of the coefficient  $S_1$  by which in Weber's theory the deviations from the molecular state are described in the region of first collisions, is found to vary from 0,6 to 0,7 (0,60 in  $H_2$ , 0,60 in He, 0,70 in  $N_2$ , 0,69 in  $O_2$ , 0,64 in  $C_2H_4$ ), whereas the predicted value is 0,71.

In the region of slip the values of  $k$  ( $\bar{v} = k\lambda$ ) were found to vary from 1,14 to 1,20 (1,14 in  $H_2$ , 1,15 in He, 1,20 in  $N_2$ , 1,17 in  $O_2$ , 1,18 in  $C_2H_4$ ).

A complete list of all available data, from which values of  $k$  could be deduced, is given and discussed at the end of chapter III.

\*            \*

\*

Errata

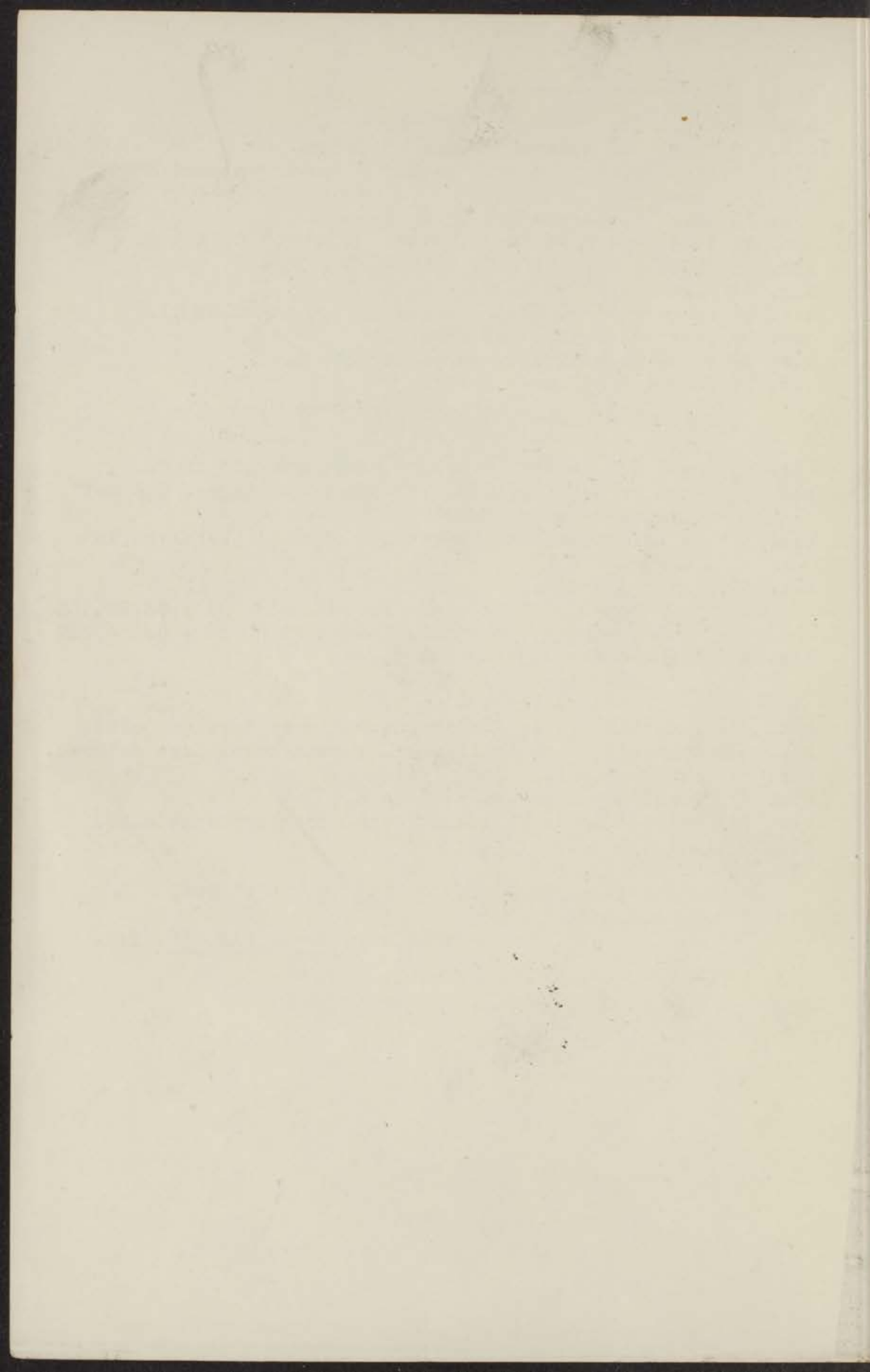
*diss Liqueur*



- blz. 5 regel 28: "per seconde" vervalt.
- blz. 6 regel 14: molecull, lees molecuul.
- blz. 11: in figuur 2 moet de letter s vervangen worden door b.
- blz. 13 tabel I, eerste kolom: H<sub>1</sub> lees He.
- blz. 13 tabel I opschrift 2e kolom:  $\lambda$  bij 20° C in Å.E.
- blz. 13 tabel I opschrift 5e kolom:  $\frac{\lambda}{l} \cdot 10^4$ .
- blz. 17 regel 9: \*) vervalt.
- blz. 18 in formule 39 moet l vervangen worden door ,l.
- blz. 19 regel 31 geem, lees geen.
- blz. 27 regel 5: haak sluiten achter 36,85.
- blz. 27 formule (55) moet luiden
- $$P = 6 \pi \eta r \left( 1 + a \frac{l}{R_1} p + b \frac{l}{R_1} p e^{-c \frac{R_1}{l} p} \right)^{-1}$$
- blz. 33 regel 22: achter "mogelijk" toevoegen "te zijn".
- blz. 36 regel 1: vervang "temperatuurschommelingen. Ook met" door "te bepalen. Met".
- blz. 36: in alle formules l vervangen door ,l (behalve in  $l \leq D$ ).
- blz. 41 regel 13 en 14:
- $\frac{4}{3}$  koper v. Itterbeek+ Keesom 1938 38 + 68 20,38K
- $\frac{4}{3}$  koper v. Itterbeek+ Keesom 1938 38 + 68 4,23K
- blz. 44: binnen de omlijsting toevoegen  
vóór regel 1: \*)  
vóór regel 6: \*\*).
- blz. 47: onderste regel: torsimodulus, lees: torsiemodulus.
- blz. 53, regel 14 en onder figuur 21: aethyleen, lees aetheen.
- blz. 56, regel 16: (79), lees (80).
- blz. 72 regel 5 van onder: S, lees S<sub>1</sub>.
- blz. 74 regel 1 en 4: systematische, lees systematische.
- blz. 74 regel 5 luidt  $l > \frac{3}{2} D$ .
- blz. 76 no 60 luidt:  
Gy. Zemplén. Ann. Physik, (4) 19, 783, 1906.
- blz. 76 no 67 luidt:  
J.C.Maxwell, Phil. Trans.roy. Soc., (A) 156, 249, 1866.

*blz. 3 regel 12: nA, leern.*

*blz. 6 regel 2: achter do, ]*







## STELLINGEN

- 1 Het is te betwijfelen of de rekenwijze, waarmee Knudsen de glijdingscoëfficiënt uit zijn doorstromingsproeven bepaalt, wel de nauwkeurigste is.  
M.Knudsen, Ann.Physik, (4) 26, 75, 1909
- 2 De manier, waarop Adzumi de glijdingscoëfficiënt berekent, is onjuist.  
H.Adzumi, Bull.Chem.Soc.Japan, 12, 292, 1937
- 3 De methode van Carson om de gemiddelde doorsnee van de poriën in papier te meten is zeer onnauwkeurig en zelfs onjuist, wanneer hij adviseert tot het gebruik van lagere gasdrukken.  
F.T.Carson, Bur.Stand.J.Res. 24, 435, 1940
- 4 Ten onrechte spreekt men van de methode van Millikan ter bepaling van de lading van het electron. De eerste meting met behulp van deze methode is afkomstig van Ehrenhaft.  
F.Ehrenhaft, S.-B.Akad.Wiss.Wien, (IIa) 118, 321, 1909  
Phys. Z., 10, 308, 1909
- 5 Millikan interpreteert de theorie van Maxwell onjuist, wanneer hij tot onvolledige accommodatie van de tangentiële impuls besluit, indien de glijdingscoëfficiënt groter dan de waarde van de gemiddelde vrije weglengte blijkt te zijn.  
Phys. Rev. (2) 22, 1, 1923
- 6 De hydrodynamische verschijnselen van gas- en vloeistofkolommen, die door de aanwezigheid van een temperatuurgradiënt in trilling kunnen geraken, zijn een nader onderzoek waard.

- 7 Het is gewenst het gebruik van het begrip „accommodatiecoëfficiënt" nader te preciseren.
- 8 Het is jammer, dat men de wolkensoort, die vroeger Nimbus heette, tegenwoordig Nimbostratus is gaan noemen. Stratonimbus zou redelijker geweest zijn.
- 9 Bij het aflezen van een holle vloeistofmeniscus met een kathetometer wordt de nauwkeurigheid in hoge mate bevorderd door het plaatsen van een kleine lichtbron boven het objectief van de kijker.
- 10 Bij het natuurkunde-onderwijs in de eerste ronde van het middelbaar-onderwijs moet de logische volgorde worden prijsgegeven, indien psychologische overwegingen daar aanleiding toe geven.
- 11 Het Dalton-onderwijs is thans de meestbelovende vorm van schoolorganisatie, die kan leiden tot wezenlijke vernieuwing van de inhoud van het middelbaar-onderwijs.
- 12 Bij het eindexamen in de natuur- en scheikunde van het middelbaar-onderwijs zou een betere beoordeling van de leerlingen bereikt kunnen worden door in hoofdzaak mondeling te examineren.
- 13 Teneinde de harmonische groei van de universitaire gemeenschap te bevorderen dient men er tegen te waken, dat de Civitas-Academica als leidende gedachte niet vereenzelvigd wordt met de organisatie, die men te Leiden gekozen heeft om aan die gedachte vorm te geven.

