OVER DE

THEORIE DER BEWEGING VAN LICHAMEN IN VLOEISTOFFEN.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.

OVER DE

THEORIE DER BEWEGING VAN LICHAMEN IN VLOEISTOFFEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. D. BIERENS DE HAAN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

OP VRIJDAG DEN 13den DECEMBER 1872, DES NAMIDDAGS TE 2 UREN,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

DOOR

Gerrit Jan Michaëlis,

GEBOREN TE ENKHUIZEN.

LEIDEN,
S. C. VAN DOESBURGH.
1872.

Aan mijne Ouders.

Aan het einde van mijn academische loopbaan gekomen, is het mij een aangename plicht, openlijk mijnen dank te betuigen aan allen, die mij in mijne studiën hebben bijgestaan.

U Hooggeleerde VAN GEER, Hooggeschatte Promotor; en ook U Hooggeleerden RIJKE en BIERENS DE HAAN, geldt dit in de eerste plaats. Niet alleen uw onderwijs, maar ook de welwillendheid, die ik steeds van U ondervonden heb, zal ik mij dankbaar herinneren.

Ook de overige Hoogleeraren, wier onderwijs ik korter of langer tijd genoten heb, betuig ik daarvoor mijne erkentelijkheid.

I.

INLEIDING.

Een vloeistof, in welke een vast lichaam zich beweegt, oefent voornamelijk op drie verschillende wijzen invloed op die beweging uit. In de eerste plaats brengen uitwendige krachten in de vloeistof drukkingen te weeg, die op de oppervlakte van het lichaam worden overgebracht. In de tweede plaats worden deeltjes der vloeistof mede bewogen, en de levendige kracht dier deeltjes moet in de berekening worden opgenomen. Eindelijk ondervindt het lichaam bij zijne beweging een weerstand die het gevolg is van wrijving, van de taaiheid der vloeistof en andere oorzaken.

Newton [1]), die zich het eerst heeft bezig gehouden met de beweging van lichamen in vloeistoffen, bracht

---

[1]) Principia math. philosophiae naturalis. Lib. II.

de eerste en laatstgenoemde omstandigheden in rekening maar verwaarloosde de tweede.

In het geval dat alléén de zwaartekracht op de vloeistof werkt, paste hij de wet van Archimedes toe; en wat den weerstand betreft, bewees hij, dat deze kracht afhangt van de snelheid en afmetingen van het lichaam en de natuur der vloeistof.

Zooals men weet, heeft Newton de slingertijden van verschillende stoffen, onder overigens gelijke omstandigheden, vergeleken, na ze tot het luchtledige gereduceerd te hebben. Hij trok uit zijne waarnemingen het besluit, dat de aantrekkingskracht met hetzelfde vermogen op verschillende stoffen werkt.

Langen tijd twijfelde men niet aan de juistheid der theorie door welke dit resultaat verkregen was.

Dubuat [1]) schijnt het eerst opgemerkt te hebben, dat de beweging der vloeistof in rekening moet worden gebracht. Hij nam aan, dat bij het gewicht van de verplaatste vloeistof moet gevoegd worden dat van de onbekende hoeveelheid vloeistof, welke zich met het lichaam medebeweegt. In de tweede plaats meende hij, dat voor verschillende slingers van denzelfden vorm, het gewicht van die onbekende hoeveelheid in dezelfde verhouding staat tot het gewicht der verplaatste vloeistof. Hoewel Dubuat die beide onderstellingen niet bewezen heeft,

1) Principes d'Hydraulique 3ième partie, section 2, chap. 1.

leidde hij er eene formule voor de slingerbeweging in eene vloeistof uit af, wier nauwkeurigheid hij door talrijke proeven aantoonde. Zij heeft veel overeenkomst met die, welke Bessel later gevonden heeft.

Bessel [1]) kwam namelijk bij zijne bekende onderzoekingen over de lengte van den seconde-slinger geheel onafhankelijk van Dubuat tot het besluit, dat de theorie van Newton onvolledig was. Hij had gevonden, dat de slingerduur van twee bollen van verschillende stof, bij gelijkheid van alle andere omstandigheden, na reductie tot het luchtledige niet even groot was. Zijne proeven waren met zulke groote voorzorgen genomen, dat het verschil niet kon worden toegeschreven aan de fouten der waarneming. Het kon aan tweederlei oorzaken worden geweten: in de eerste plaats was het mogelijk, dat de zwaartekracht niet onafhankelijk is van de eigenschappen der stof; in de tweede plaats kon de reductie der waargenomen slingertijden onnauwkeurig zijn. Bessel bewees, dat het laatstgenoemde het geval was, en bracht de levendige kracht der vloeistof in rekening.

Zooals bekend is, wordt de beweging van een slinger onder de werking der zwaartekracht bepaald door de vergelijking:

$$\left(a^2 + \rho^2\right)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + ag \ sin. \ \vartheta = o \ ^2).$$

---

[1]) Abhandlungen der Akad. der wiss. in Berlin, 1826.

[2]) Zie o. a. Schell. theorie der Bewegung und der Kräfte. Pag. 845.

wanneer a den afstand van het zwaartepunt tot de as voorstelt, ϑ den hoek, dien deze lijn met de vertikaal maakt en ρ den arm van inertie ten opzichte eener lijn, door het zwaartepunt evenwijdig aan de as getrokken. Beweegt echter de slinger zich in eene samendrukbare of onsamendrukbare vloeistof, dan moet, indien zoowel het lichaam als de vloeistof homogeen zijn, voor g in de plaats komen:

$$g' = g \frac{m - m'}{m}.$$

en verder moet, volgens de theorie van Newton, de weerstand in aanmerking worden genomen. Hoewel die kracht in het algemeen niet evenredig is met eene bepaalde macht van de snelheid, kan men haar, zonder groote onnauwkeurigheid bij langzame slingering evenredig met de snelheid aannemen. Talrijke proeven hebben namelijk bewezen, dat wanneer de snelheid wordt voorgesteld door v, de weerstand in het algemeen den vorm aanneemt:

$$W = Av + Bv^2 + Cv^3 + \text{enz.}$$

waarin A, B, C enz. constanten beteekenen, die afhangen van de gedaante van het lichaam en de natuur der vloeistof. Daar zij eene geringe waarde hebben, kan men, wanneer ook de snelheid eene zeer kleine grootheid is, bij benadering den eersten term van bovenstaande reeks behouden, en de overige buiten rekening laten. De vergelijking ter bepaling der beweging zal dus worden:

$$\left(a^2+\rho^2\right)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+b\,\frac{d\vartheta}{dt}+a\,g'\sin\vartheta=o.$$

De constante b moet door proeven bepaald worden. Neemt men nu aan, dat de amplituden voortdurend zeer klein blijven, dan kan men voor bovenstaande vergelijking in de plaats schrijven:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+q\,\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{g'}{l}\,\vartheta=o.$$

Door de substitutie:

$$\vartheta_1=e^{\lambda t}$$

verkrijgt men:

$$\vartheta=Ce^{\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{g'}{l}}\right)t}+C'e^{\left(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{g'}{l}}\right)t}$$

of

$$\vartheta=e^{-\frac{1}{2}qt}\left[C_1\sin\left(\sqrt{\frac{g'}{l}-\frac{1}{4}q^2}\right)t+C'_1\cos\left(\sqrt{\frac{g'}{l}-\frac{1}{4}q^2}\right)t\right]$$

Men vindt daaruit voor den slingerduur:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g'}{l}-\frac{1}{4}q^2}}\;{}^{1)}$$

Indien de dichtheid van de vloeistof klein is, mag men de grootheid $\frac{1}{4}\,q^2$ verwaarloozen; in dat geval zal dus de weerstand een onmerkbaren invloed op den slingertijd uitoefenen. Laat men nu den weerstand buiten aanmerking, dan wordt (volgens de theorie van Newton) de eerste integraal der bewegings-vergelijking van den slinger:

$$m\,(a^2+\rho^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2-2\,a\,(m-m')\,g'\cos\vartheta=c.$$

---

[1]) Zie Poisson, Mécanique. Tome I, pag 350, sec. édit.

Deze vergelijking kan onmiddelijk uit het beginsel der levendige kracht afgeleid worden. Dan blijkt, dat de levendige kracht der medebewogen vloeistofdeeltjes bij die van het lichaam moet gevoegd worden. De snelheid van een vloeistofdeeltje door v voorstellende, wordt de volledige vergelijking:

$$m\,(a^2+\rho^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\int v^2\,dm'-2\,a\,(m-m')\,g'\cos\vartheta=c.$$

volgens het beginsel der levendige kracht, omdat hierin de integraal de levendige kracht voorstelt van de vloeistof, en de eerste term die van het lichaam.

In dezen vorm werd zij door Bessel gevonden.

Bessel ging van de onderstelling uit, dat de waarde der bijgevoegde integraal, telkens na het volbrengen van twee slingeringen, even groot is, en in het geval het lichaam symmetrick is, na het volbrengen van elke slingering. Hij vond, voor het geval, dat $\frac{m'}{m}$ eene kleine grootheid is:

$$\int v^2\,dm'=m'\,ka^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

waarin k eene constante voorstelt, die afhangt van de gedaante van het lichaam. Voor de gereduceerde lengte van den slinger vindt men de uitdrukking:

$$\frac{m\,(a^2+\rho^2)+m'\,ka^2}{(m-m')\,a}$$

Om de constante k te bepalen, moest Bessel zijne toevlucht nemen tot experimenten.

Hij liet twee bolvormige slingers van hetzelfde volumen, maar van verschillende massa in dezelfde vloeistof schommelen. Daar de constante in beide gevallen dezelfde waarde had, kon zij uit de waargenomen slingertijden berekend worden. Over deze bepalingen zullen wij niet uitweiden, maar verwijzen naar de genoemde verhandeling van Bessel. Hij vond door de waargenomen slingertijden in de lucht voor k het getal 0,9459; in water bij slingers van verschillende lengte 0,648 en 0,602.

Daar hij berekend had, dat k onafhankelijk is van de natuur der vloeistof, schreef hij het gevonden verschil daaraan toe, dat bij water de grootheid $\frac{m'}{m}$ niet klein genoeg is, om hare tweede macht te kunnen verwaarloozen.

Later werden verschillende pogingen gedaan, om de beweging van lichamen in samendrukbare en in onsamendrukbare vloeistoffen theoretisch uit de vergelijkingen der hydrodynamica af te leiden.

Poisson [1]) slaagde er in, om dit vraagstuk op te lossen voor een bolvormigen slinger in de lucht. Hij vond dezelfde formule als Bessel voor de lengte van den slinger, maar verkreeg voor de waarde van k het getal 0,5. Uit zijne berekeningen volgde, dat deze waarde geheel onafhankelijk zou zijn van de natuur der vloeistof, en

[1]) Mémoires de l'Institut National, tome XI.

eveneens zou gelden voor onsamendrukbare vloeistoffen.

Hij verwaarloosde echter de inwendige wrijving der vloeistof en daaruit laat zich het verschil verklaren tusschen zijn resultaat en dat van Bessel.

Stokes [1]) heeft deze kracht in rekening gebracht, en verkreeg tot uitkomst:

$$k = 0{,}5 + \frac{9}{4 \nu a}$$

$$\text{waarin } \nu^2 = \frac{\pi \lambda}{2 \eta \text{ T.}}$$

Daarin is a de straal van den bol, λ de dichtheid der vloeistof, η de wrijvings-coëfficient, T de slingerduur.

Meyer [2]) heeft hetzelfde vraagstuk op nog algemeener wijze dan Stokes behandeld. Hij leidde zijn resultaat af uit de bewegings-vergelijkingen van onsamendrukbare vloeistoffen, en onderstelde daarbij, dat de amplituden zeer klein blijven. Bij langzame slingering mag men deze berekening ook op samendrukbare vloeistoffen toepassen. De optredende verdichtingen en verdunningen hebben dan geen merkbaren invloed op het resultaat. De uitkomst van Meyer stemt overeen met die, welke Stokes verkregen had; en voor de lucht kreeg hij voor k ongeveer dezelfde waarde, welke Bessel langs experimenteelen weg gevonden had.

De theorie van den bolvormigen slinger in een vloei-

---

[1]) Transactions of the Cambridge philosophical society. vol. 9 part. 2 1851.

[2]) Journal von Crelle. Band 73.

stof is dus, zooals wij gezien hebben, vrij ver gevorderd, en hare juistheid aan de ervaring getoetst.

Van de algemeene theorie der beweging van lichamen in vloeistoffen kan hetzelfde volstrekt niet worden gezegd. Men ontmoet bij de behandeling van dit onderwerp onoverkomelijke zwarigheden. Veelal stuit men op differentiaal-vergelijkingen, die tot nu toe onoplosbaar zijn. Bij bepaalde vooronderstellingen evenwel, kan men bij het onderzoek naar de beweging van verschillende klassen van lichamen belangrijke resultaten verkrijgen.

Wij zullen in het vervolg steeds onderstellen, dat een vast lichaam zich beweegt in eene onbegrensde, niet samendrukbare vloeistof; dat zij al hare beweging ontleend heeft aan die van het lichaam, zoodat de oneindig ver verwijderde deeltjes in rust zijn; dat geene wrijving bestaat tusschen de oppervlakte van het lichaam en de vloeistof, zoodat aan die oppervlakte de snelheid der vloeistof met die van het lichaam overeenkomt.

Dirichlet [1]), die behalve de genoemde onderstellingen nog aanneemt dat er geene inwendige wrijving bestaat, behandelt de beweging van een bolvormig lichaam in eene vloeistof, die onderworpen is aan de werking der zwaartekracht. Hij bevindt dat in zulk een geval de bol zich beweegt evenals in het luchtledige, wanneer slechts bij zijne massa gevoegd wordt de massa eener hoeveel-

---

[1]) Monatsberichte der Berl. Akad. 1852.

heid der vloeistof, gelijk aan zijne halve volumen. Dirichlet bevond dus dat de drukking, die de bol van de vloeistof ondervindt, evenredig is met de kracht, die op het lichaam werkt, maar onafhankelijk is van de snelheid en de afmetingen van den bol.

Clebsch [1]) breidde de onderzoekingen van Dirichlet uit. Hij leerde vooreerst de bewegings-vergelijkingen kennen van een lichaam, dat symmetriek is ten opzichte van drie loodrecht op elkaar staande vlakken. Ook gaf hij de oplossing der hydrodynamische vergelijkingen, in het geval, dat het lichaam eene ellipsoïde is. De bewegings-vergelijkingen der ellipsoïde echter heeft hij niet opgelost. Dit is tot nu toe niet mogen gelukken, zelfs in het eenvoudige geval, dat noch op het lichaam, noch op de vloeistof krachten werken.

Hoppe [2]) bewees dat de drukking, die een omwentelings-lichaam van een vloeistof ondervindt, waneeer zulk een lichaam zich in de richting van zijne as beweegt, evenredig is aan de kracht, die het in beweging stelt, maar onafhankelijk van de snelheid.

Thomson en Tait behandelden in hun werk „a treatise on natural philosophy" de beweging van een omwentelings-lichaam, welks as steeds in een plat vlak moet blijven. Zij verwaarloozen de wrijving der vloeistof en

---

[1]) Journal von Crelle. Band. 52.

[2]) Poggend. Annal. Band 93.

nemen aan, dat deze niet aan de werking van krachten onderworpen is. Zij leeren den aard der beweging van het lichaam kennen, in het geval, dat er geene krachten op werken. Dit probleem wordt door genoemde geleerden opgelost met behulp van de bewegings-vergelijkingen van Lagrange, zonder gebruik te maken van de vergelijkingen der hydrodynamica.

Hetgeen Newton en zijne tijdgenooten verwaarloosd hadden, n.l. de levendige kracht der vloeistof, is dus juist de eenige invloed der vloeistof op de beweging van het lichaam, die door Thomson en Tait in rekening worden gebracht.

Kirchhoff [1]) heeft die onderzoekingen uitgebreid. Gebruik makende van het beginsel van Hamilton, heeft hij bij dezelfde onderstellingen aangaande de natuur der vloeistof als door Thomson en Tait zijn aangenomen, de bewegings-vergelijkingen van een willekeurig lichaam in een zeer fraaien vorm gegeven. Voor een omwentelings-lichaam, dat niet aan de werking van krachten onderworpen is, geeft hij de oplossing dier bewegings-vergelijkingen.

De vergelijkingen, door Kirchhoff gevonden, werden door Clebsch [2]) aan een nauwkeurig onderzoek onderworpen. Hij spoorde enkele nieuwe gevallen op, in

---

[1]) Journal von Crelle. Band. 71.

[2]) Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. Band III.

welke ze geïntegreerd kunnen worden. In het vervolg zullen wij op deze zaak terugkomen.

Het voorafgaande zij voldoende om een overzicht te geven van het voornaamste, wat over de beweging van lichamen in vloeistoffen geschreven is.

Het doel van dit geschrift is vooreerst, om in het algemeen de wijze te leeren kennen, waarop de beweging van een lichaam in een vloeistof uit de vergelijkingen der hydrodynamica moet afgeleid worden, en de gevallen, waarin dat kan geschieden.

In de tweede plaats is de theorie van Kirchhoff uitgewerkt en met de vroegere onderzoekingen van Clebsch in verband gebracht.

Doch tot recht begrip is het noodzakelijk eene korte beschouwing over de beweging van vloeistoffen te laten voorafgaan.

II.

BEWEGING VAN VLOEISTOFFEN.

Wanneer men de beweging van eene vloeibare massa wil leeren kennen, moet men de verschillende krachten beschouwen, die daarbij optreden.

Wat vooreerst de drukking betreft, deze kracht werkt in eenig punt der vloeistof met hetzelfde vermogen in alle richtingen, maar kan veranderen van het eene pnnt tot het andere. Deze eigenschap is een noodzakelijk gevolg van de volkomen bewegelijkheid der molekulen; wanneer men alleen normale drukkingen beschouwt, geldt zij zoowel in den toestand van beweging als in dien van rust [1]).

In de tweede plaats moeten wij de wrijving in aan-

---

[1]) Zie hierover eene verh. van Poisson in het Journal Polytechnique. XIII.

merking nemen. Newton heeft zich het eerst met dit onderwerp bezig gehouden. Volgens zijne hypothese is de wrijving tusschen twee aan elkaar grenzende vloeistof lagen evenredig aan het verschil hunner snelheden, onafhankelijk van de drukking en evenredig met de grootte van het vlak van aanraking. Later zijn anderen onafhankelijk van Newton tot dezelfde hypothese gekomen. Om de wrijving eener vloeistof te bepalen, gebruikte Coulomb eene dunne cirkelvormige schijf, die aan een in haar midden bevestigden draad horizontaal opgehangen was. Zij kon door torsie van den draad in slingering gebracht worden. Coulomb nam waar, dat de amplituden, ten gevolge van de wrijving der vloeistof, waarin de schijf zich bewoog, zeer snel afnamen. Uit de vermindering der amplituden, die volgens eene meetkundige reeks plaats had, berekende hij de wrijving. Meyer [1]) herhaalde dezelfde proeven met groote voorzorgen, en bewees, dat bij onsamendrukbare vloeistoffen de wrijving evenredig is aan het verschil der snelheden van twee aan elkaar grenzende lagen.

Overeenkomstig deze wet zullen wij nu de krachten, door de wrijving veroorzaakt, in rekening brengen.

Eindelijk moeten wij nog de uitwendige krachten, die op de vloeistof werken, in aanmerking nemen.

Wij nemen in de vloeistof een rechthoekig coördina-

---

[1]) Journal von Crelle. Band 59.

ten-stelsel aan. De componenten der snelheid van een deeltje in de richting der assen stellen wij voor door de teekens: u_1, v_1, w_1. Wij onderstellen, dat die snelheid eene gestadig veranderende functie van de coördinaten is. In dat geval heeft het verschil in snelheid van twee aan elkaar grenzende lagen eene oneindig kleine waarde, die wij kunnen voorstellen door:

$$s'_1 - s_1 = ds_1.$$

Uit de boven aangehaalde wet zouden wij hieruit het besluit trekken, dat de wrijving, die optreedt bij de beweging van zulke aan elkaar grenzende lagen, eveneens eene oneindig kleine grootheid is, zoo de proeven van Coulomb, Meyer en anderen het tegendeel niet hadden aangetoond.

De constante, waarmede het bovenstaande verschil in snelheid vermenigvuldigd moet worden, is dus oneindig groot; of wat op hetzelfde neerkomt, men moet de wrijving niet evenredig nemen met de differentiaal, maar met de differentiaal-quotiënten der snelheid.

Deze wrijving wordt gewoonlijk inwendige wrijving genoemd, in tegenoverstelling van die welke ontstaat, wanneer eene vloeistof met eene andere in aanraking komt. In dat geval zal de kracht evenredig zijn aan het verschil in snelheid van beide vloeistoffen.

Indien wij aannemen, dat de vloeistof homogeen is, zal in ieder punt de wrijvings-coëfficient onafhankelijk van de richting der beweging wezen. Wij stellen dien coëfficient voor door de letter f. De drukking in eenig punt der vloeistof noemen wij P, de componenten der uitwendige krachten X_1 IJ_1 Z_1 de dichtheid ρ.

Wij zullen nu de werking der genoemde krachten nagaan op een zeer klein parallelopipedum, welks zijden evenwijdig genomen zijn aan de coördinaat-vlakken.

Evenwijdig met de as x_1 [1]) werken op de twee tegenovergestelde zijden van het parallelopipedum ten gevolge van de drukking der vloeistof, de krachten:

$$P\,dy_1\,dz_1 \text{ en } -\left(P+\frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1\right)dy_1\,dz_1$$

Evenzoo werken, evenwijdig met de beide andere assen, de krachten:

$$P\,dx_1\,dz_1 \text{ en } -\left(P+\frac{\partial P}{\partial x_1}dy_1\right)dx_1\,dz_1$$

$$\text{en } P\,dx_1\,dy_1 \;\text{,,}\; -\left(P+\frac{\partial P}{\partial x_1}dz_1\right)dx_1\,dy_1$$

Op dezelfde wijze vinden wij de krachten, die tengevolge van de wrijving op de zijden van het parallelopipedum werken.

De wrijvings-krachten, die in de richting van de as x_1 werken, zijn evenredig met de verschillende differentiaal-quotienten van de snelheid volgens die as, zooals uit het voorgaande duidelijk is. Aangezien de snelheid eene functie is van de coördinaten, en daar de wrijving

---

[1]) Wij gebruiken hier de teekens u_1 v_1 x_1 enz., ter onderscheiding van de later veelvuldiger voorkomende analoge grootheden bij de beweging van een vast lichaam in de vloeistof.

de beweging tegenwerkt, zal die kracht op het vlak $y_1 z_1$ van het parallelopipedum de grootte hebben:

$$-f \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dy_1 dz_1$$

en op het tegenovergestelde zijvlak:

$$f\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dx_1\right) dy_1 dz_1$$

Verder zullen in de richting der as x_1 nog werken de krachten:

$$-f \frac{\partial u_1}{\partial y_1} dx_1 dz_1 \text{ en } f\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} dy_1\right) dx_1 dz_1$$

$$-f \frac{\partial u_1}{\partial z_1} dx_1 dy_1 \text{ en } f\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} dz_1\right) dx_1 dy_1.$$

Op dezelfde wijze zullen wij de krachten vinden, welke ten gevolge van de wrijving evenwijdig met de assen y_1 en z_1 werken; door in bovenstaande uitdrukkingen, u_1 met v_1 en w_1 te verwisselen, verkrijgt men de grootte dier krachten.

De werking der uitwendige krachten op het beschreven parallelopipedum wordt voorgesteld door de uitdrukkingen:

$$X_1 \rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$
$$Y_1 \rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$
$$\text{en } Z_1 \rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

De krachten, die in tegengestelden zin werken, bij elkaar voegende, verkrijgen wij de volgende differentiaal-vergelijkingen der beweging;

$$\rho \frac{du_1}{dt} = f\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)-\frac{\partial P}{\partial z_1}+X_1 \rho$$

$$\rho\,\frac{dv_1}{dt}=f\left(\frac{\delta^2 v_1}{\delta x_1{}^2}+\frac{\delta^2 v_1}{\delta y_1{}^2}+\frac{\delta^2 v_1}{\delta z_1{}^2}\right)-\frac{\delta P}{\delta y_1}+Y_1\rho\,.....(1)$$

$$\rho\,\frac{dw_1}{dt}=f\left(\frac{\delta^2 w_1}{\delta x_1{}^2}+\frac{\delta^2 w_1}{\delta y_1{}^2}+\frac{\delta^2 w_1}{\delta z_1{}^2}\right)-\frac{\delta P}{\delta z_1}+Z_1\rho$$

Hiervoor kunnen wij ook schrijven:

$$\rho\left(\frac{\delta u_1}{\delta t}+\frac{\delta u_1}{\delta x_1}u_1+\frac{\delta u_1}{\delta y_1}v_1+\frac{\delta u_1}{\delta z_1}w_1\right)=$$
$$=f\left(\frac{\delta^2 u_1}{\delta x_1{}^2}+\frac{\delta^2 u_1}{\delta y_1{}^2}+\frac{\delta^2 u_1}{\delta z_1{}^2}\right)-\frac{\delta P}{\delta x_1}+X_1\rho$$

$$\rho\left(\frac{\delta v_1}{\delta t}+\frac{\delta v_1}{\delta x_1}u_1+\frac{\delta v_1}{\delta y_1}v_1+\frac{\delta v_1}{\delta z_1}w_1\right)=$$
$$=f\left(\frac{\delta^2 v_1}{\delta x_1{}^2}+\frac{\delta^2 v_1}{\delta y_1{}^2}+\frac{\delta^2 v_1}{\delta z_1{}^2}\right)-\frac{\delta P}{\delta y_1}+Y_1\rho\,......(2)$$

$$\rho\left(\frac{\delta w_1}{\delta t}+\frac{\delta w_1}{\delta x_1}u_1+\frac{\delta w_1}{\delta y_1}v_1+\frac{\delta w_1}{\delta z_1}w_1\right)=$$
$$=f\left(\frac{\delta^2 w_1}{\delta x_1{}^2}+\frac{\delta^2 w_1}{\delta y_1{}^2}+\frac{\delta^2 w_1}{\delta z_1{}^2}\right)-\frac{\delta P}{\delta z_1}+Z_1\rho$$

want vooreerst is:

$$\frac{du_1}{dt}=\frac{\delta u_1}{\delta t}+\frac{\delta u_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\delta u_1}{\delta y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\delta u_1}{\delta z_1}\frac{dz_1}{dt}\text{ enz.}$$

en verder zijn:

$$\frac{dx_1}{dt}=u_1\;\frac{dy_1}{dt}=v_1\;\frac{dz_1}{dt}=w_1.$$

Wanneer men verder de massa's vergelijkt, die in den tijd dt in het beschouwde parallelopipedum stroomen en er uitgaan, zal men eene nieuwe vergelijking verkrijgen, die de verandering der specifieke massa in het tijdselement leert kennen. Zij wordt op dezelfde wijze afgeleid als in het geval, dat de wrijving niet in aanmerking wordt genomen. Men vindt gemakkelijk, dat die vergelijking voor onsamendrukbare vloeistoffen de gedaante aanneemt:

$$\frac{\delta u_1}{\delta x_1}+\frac{\delta v_1}{\delta y_1}+\frac{\delta w_1}{\delta z_1}=o \quad {}^{1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Deze vier vergelijkingen zijn voldoende om de beweging en de drukking der vloeistof te leeren kennen.

Deze afleiding van de vergelijkingen (1) is grootendeels gevolgd naar die van Meyer [2]).

In het algemeen zijn de vergelijkingen (2) en (3) niet te integreeren. Wanneer echter de uitwendige krachten eene kracht-functie hebben, en bovendien de componenten der snelheid volgens de assen, partieële differentiaalquotienten zijn eener zelfde functie, worden die vergelijkingen veel eenvoudiger. Stellen wij dat:

$$u_1=\frac{\delta\varphi}{\delta x_1}\; v_1=\frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\; w_1=\frac{\delta\varphi}{\delta z_1}$$

Vermenigvuldigen wij nu de vergelijkingen (2) achtereenvolgens met dx_1, dy_1, dz_1 en tellen ze bij elkaar op, dan wordt het resultaat:

$$\rho\left\{d.\frac{\delta\varphi}{\delta t}+\tfrac{1}{2}d.\left[\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_1}\right)^2+\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\right)^2+\left(\frac{\delta\varphi}{\delta z_1}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=f\; d.\left\{\frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y_1^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_1^2}\right\}-dP+\rho\, dU.$$

Hierin beteekent U de kracht-functie der uitwendige krachten.

Vergelijking (3) verandert door de substitutie in deze:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y_1^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_1^2}=o \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

---

[1]) Zie de afleiding dezer vergel. bij Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

[2]) Journal von Crelle. Band 59.

Deze vergelijking in de voorgaande overbrengende, verdwijnt daaruit de wrijving, en haar integreerende, wordt zij:

$$\frac{d\varphi}{dt}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_1}\right)^2+\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\right)^2+\left(\frac{\delta\varphi}{\delta z_1}\right)^2\right]=\mathrm{U}-\frac{\mathrm{P}}{\rho}+\mathrm{W}. \quad (5)$$

W stelt eene grootheid voor, die niet afhangt van de coördinaten, maar alleen van den tijd. De vergelijkingen (4) en (5) bepalen nu de beweging van de vloeistof. Daar de wrijving verdwenen is, hebben wij bewezen, dat de componenten alleen aan de gestelde voorwaarden kunnen voldoen, wanneer men de wrijving buiten rekening laat. Wij zullen dit voortaan doen.

De constanten, die bij de integratie van de vergelijkingen (4) en (5) ontstaan, moeten bepaald worden uit den aanvangstoestand der beweging en uit de wijze, waarop de vloeistof begrensd wordt. In de meeste gevallen is ook nu de oplossing onuitvoerbaar.

Wij gaan nu aannemen, dat een vast lichaam zich in de vloeistof beweegt, en laten voorloopig alle wrijving buiten rekening.

De vloeistofdeeltjes ontleenen al hunne beweging aan die van het lichaam; zij worden in het oneindige door een vast oppervlak begrensd en zijn daar in rust; aan de oppervlakte van het lichaam is hunne snelheid gelijk aan die der punten, waarmede zij in aanraking zijn. Nemen wij een rechthoekig coördinaten-stelsel aan, dat met het lichaam vast verbonden is, en noemen wij de componenten der snelheid van den oorsprong in de richting der assen: u, v, w; die der hoekssnelheid van het lichaam p, q, r.

De levendige kracht van het lichaam is eene homogene functie van den tweeden graad der genoemde zes grootheden. Het is gemakkelijk aan te toonen, dat ook de levendige kracht der vloeistof eene homogene functie van den tweeden graad ten opzichte derzelfde grootheden is.

De snelheid van een willekeurig punt (x, y, z) van het lichaam heeft tot componenten:

$$u + ry - qz$$
$$v + pz - rx$$
$$w + qx - py,$$

zooals door ontbinding der hoekssnelheden om de verschillende assen gevonden wordt. De normaal aan eenig punt van de oppervlakte des lichaams door N voorstellende, bestaat voor dat oppervlak de vergelijking:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{N}} = \left(u + ry - qz\right)\frac{\delta x}{\delta \mathrm{N}} + \left(v + pz - rx\right)\frac{\delta y}{\delta \mathrm{N}} + \\ + \left(w + qx - py\right)\frac{\delta z}{\delta \mathrm{N}}.$$

Nu kan men aannemen, dat deze vergelijking na integratie zal worden:

$$\varphi = u\lambda_1 + v\lambda_2 + w\lambda_3 + p\lambda_4 + q\lambda_5 + r\lambda_6 + \mathrm{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin de grootheden λ functiën voorstellen, die afhangen van de gedaante van het lichaam en de coördinaten, terwijl T alleen van den tijd afhangt.

De uitdrukkingen λ zijn geheel onbepaald; alleen weet men, dat zij aan de oppervlakte van het lichaam moeten voldoen aan de voorwaarden;

$$\begin{array}{ll} \frac{\delta\lambda_1}{\delta N} = \frac{\delta x}{\delta N} & \frac{\delta\lambda_4}{\delta N} = z\,\frac{\delta y}{\delta N} - y\,\frac{\delta z}{\delta N}. \\ \frac{\delta\lambda_2}{\delta N} = \frac{\delta y}{\delta N} & \frac{\delta\lambda_5}{\delta N} = x\,\frac{\delta z}{\delta N} - z\,\frac{\delta x}{\delta N} \\ \frac{\delta\lambda_3}{\delta N} = \frac{\delta z}{\delta N} & \frac{\delta\lambda_6}{\delta N} = y\,\frac{\delta x}{\delta N} - x\,\frac{\delta y}{\delta N} \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Wegens de verwaarloozing der wrijving toch, heeft alle beweging plaats in de richting der normaal. De dubbele levendige kracht is gegeven door de uitdrukking:

$$\rho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right)^2 \right\}$$

waarbij de integralen over de geheele ruimte, die door de vloeistof wordt ingenomen, moeten uitgestrekt worden. Het is zeer gemakkelijk, om die uitdrukking af te leiden; want in aanmerking nemende, dat de snelheid van een deeltje der vloeistof tot componenten langs de assen x_1 y_1 en z_1 de grootheden:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x_1}, \ \frac{\delta\varphi}{\delta y_1}, \ \frac{\delta\varphi}{\delta z_1} \text{ heeft,}$$

zal de component der snelheid langs de x-as wezen:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x_1} \cos(xx_1) + \frac{\delta\varphi}{\delta y_1} \cos(xy_1) + \frac{\delta\varphi}{\delta z_1} \cos(xz_1) = \frac{\delta\varphi}{\delta x}.$$

Men ziet, dat de functie φ verscheidene eigenschappen met de potentiaal-functie van krachten gemeen heeft

Zij wordt daarom gewoonlijk snelheids-potentiaal genoemd.

Brengt men in de gevonden uitdrukking voor de levendige kracht formule (6) over, dan is het duidelijk, dat zij eene homogene functie van den tweeden graad der zes grootheden, u, v, w, p, q en r worden zal.

Indien wij onderstellen, dat het vaste lichaam symmetriek is ten opzichte der coördinaat-vlakken, dan blijkt het, dat wij voor de vergelijking (6) kunnen schrijven:

$$\varphi = ul_1 x + vl_2 y + wl_3 z + pl_4 yz + ql_5 xz + rl_6 xy + \mathrm{T} \quad . \; . \; . \; (8)$$

waarin de grootheden l functiën zijn, die niet veranderen, wanneer de teekens der coördinaten omgekeerd worden. Dit kan men afleiden uit de vergelijkingen (7), Ook volgt uit de symmetrie van het lichaam, dat wanneer men de componenten der snelheid u v w, benevens de coördinaten van teeken doet veranderen, de functie φ toch dezelfde waarde moet behouden.

Laten wij nu aannemen dat het lichaam een bol is, waarvan het oppervlak gegeven is door de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2,$$

terwijl wij den afstand van een willekeurig punt (x y z) voorstellen door r; dus is voor zulk een punt;

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Trachten wij in dat geval de snelheids-potentiaal te leeren kennen.

Wij moeten, om dat doel te bereiken, de vergelijking oplossen:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y_1^{\,2}}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_1^{\,2}}=o.$$

Waneeer nu het vaste en het bewegelijke coördinaten-stelsel verbonden zijn door de betrekkingen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z \\ y_1 &= \beta+\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z \quad \ldots\ldots\ldots (9) \\ z_1 &= \gamma+\gamma_1+\gamma_2 y+\gamma_3 z \end{aligned}$$

krijgen wij, gebruik makende van de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\,2}+\beta_1^{\,2}+\gamma_1^{\,2} &= 1. \\ \alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2}+\gamma_2^{\,2} &= 1. \\ \alpha_3^{\,2}+\beta_3^{\,2}+\gamma_3^{\,2} &= 1. \\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 &= 0. \\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 &= 0. \\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

dat:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x_1^{\,2}}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y_1^{\,2}}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_1^{\,2}}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_2}=0.$$

Aan de vergelijking:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z^2}=0.$$

zal voldaan worden, indien wij stellen:

$$\frac{\delta^2\lambda_1}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\lambda_1}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\lambda_1}{\delta z^2}=0.$$

$$\frac{\delta^2\lambda_2}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\lambda_2}{dy^2}+\frac{\delta^2\lambda_2}{\delta z^2}=0.$$

Men kan verder aannemen, dat elke dezer functiën λ_1, λ_2 enz. alleen afhangen van de grootheid r; hetgeen wij opmaken uit de symmetrie van het lichaam en zal doorgaan, indien de specifieke massa op denzelfden afstand van het middelpunt overal dezelfde waarde heeft.

In de eerste plaats moet voldaan worden aan de vergelijking:

$$\frac{\delta^2 l_1 x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 l_1 x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 l_1 x}{\delta z^2} = o$$

of ook aan: $x \left\{ \frac{\delta^2 l_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 l_1}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 l_1}{\delta z^2} \right\} + 2 \frac{\delta l_1}{\delta x} = o.$

Maar wij hebben, volgens onze onderstelling:

$$\frac{\delta l_1}{\delta x} = \frac{d l_1}{dr} \frac{x}{r}.$$

$$\frac{\delta^2 l_1}{\delta x^2} = \frac{d^2 l_1}{dr^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{d l_1}{dr} \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

$$\frac{\delta^2 l_1}{\delta y^2} = \frac{d^2 l_1}{dr^2} \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{d l_1}{dr} \frac{r^2 - y^2}{r^3}.$$

$$\frac{\delta^2 l_1}{\delta z^2} = \frac{d^2 l_1}{dr^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{d l_1}{dr} \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

De vergelijking, die opgelost moet worden, verkrijgt dus den vorm:

$$\frac{d^2 l_1}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d l_1}{dr} = o.$$

De eerste integraal is:

$$\frac{d l_1}{dr} = \frac{C}{r^4}.$$

En aan de oppervlakte van het lichaam:

$$\left(\frac{d l_1}{dr}\right)_0 = \frac{C}{r_0{}^4}.$$

De gezochte functie wordt:

$$l_1 = -\frac{C}{3r^3} + D,$$

waarin C en D willekeurige constanten voorstellen, die nog bepaald moeten worden.

Daar in het oneindige de vloeistofdeeltjes in rust zijn, moet voor $r = \infty$, $l_1 = o$ zijn.

Hieruit volgt, dat wij de constante D weg moeten laten. Om C te bepalen, maken wij gebruik van de voorwaarde-vergelijking (7):

$$\left(\frac{\delta l_1 x}{\delta r}\right)_0 = \left(\frac{\delta x}{\delta r}\right)_0$$

waaruit volgt:

$$\left(\frac{\delta l_1}{\delta r}\right)_0 = \frac{1-(l)_0}{r_0} \qquad (10)$$

$(l_1)_0$ beteekent de waarde der funtie l_1 aan het oppervlak van den bol. Zij is:

$$(l_1)_0 = -\frac{C}{3r_0^{\,3}}.$$

Deze waarde, gesubstituëerd in (10), geeft:

$$\frac{C}{r_0^{\,4}} = \frac{1+\frac{C}{3r_0^{\,3}}}{r_0}.$$

$$\text{Daaruit volgt: } C = \frac{3}{2}\, r_0^{\,3}.$$

$$\text{En dus: } \lambda_1 = -\frac{r_0^{\,3} x}{2r^3}.$$

Op volkomen dezelfde wijze zullen wij nog vinden:

$$\lambda_2 = -\frac{r_0^{\,3} y}{2r^3}.$$

$$\lambda_3 = -\frac{r_0^{\,3} z}{2r^3}.$$

Om de functie λ_4 te berekenen, moet de vergelijking:

$$\frac{\delta^2 l_4 yz}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 l_4 yz}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 l_4 yz}{\delta z^2} = o$$

worden opgelost. Haar op dezelfde manier behandelende als wij zooeven gedaan hebben met de vergelijking ter bepaling van λ_1, vindt men successievelijk:

$$yz\left\{\frac{\partial^2 l_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 l_4}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 l_4}{\partial z^2}\right\}+2\left(z\frac{\partial l_4}{\partial y}+y\frac{\partial l_4}{\partial z}\right)=o$$

$$\frac{d^2 l_4}{dr^2}+\frac{6}{r}\frac{dl_4}{dr}=o.$$

$$\text{Dus: } \left(\frac{dl_4}{dr}\right)_0=\frac{C}{r_0^6}$$

$$\left(l_4\right)_o=-\frac{C}{5r_0^5}.$$

Om de constante C te vinden hebben wij de vergelijking:

$$\left(\frac{\partial l_4 yz}{\partial r}\right)_o=z\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_o-y\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_o$$

waaruit:

$$\left(\frac{dl_4}{dr}\right)_o+2\left(\frac{l_4}{r}\right)_0=o.$$

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden, tenzij $C=o$.

De functiën λ_4, λ_5, λ_6 zullen verdwijnen, wanneer een bolvormig lichaam zich in de vloeistof beweegt. Ten slotte vinden wij voor de gezochte functie:

$$\varphi=-\frac{r_0^3}{2r^3}\left(ux+vy+wz\right)+T \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Kenden wij nu nog slechts u, v, w als functiën van den tijd, dan zou φ tot op eene willekeurige constante na volkomen bepaald wezen, en wij zouden door substitutie in (5) de drukking in elk punt van de vloeistof kunnen vinden. Daaruit kunnen wij gemakkelijk de geheele drukking berekenen, die de vloeistof op de oppervlakte van den bol uitoefent. Het bepalen van de beweging van het lichaam zal in het volgende hoofdstuk ter sprake komen.

Wanneer het lichaam, dat zich in de vloeistof beweegt eene ellipsoïde is, waarvan de specifieke massa op elke concentrische laag constant is, kan de functie φ eveneens worden bepaald.

Zooals in de inleiding gezegd is, heeft Clebsch dit vraagstuk behandeld. Wij zullen in hoofdzaak zijne methode volgen, door in plaats van rechthoekige coördinaten, elliptische in te voeren.

De vergelijking van het lichaam zij:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Noemen wij de elliptische coördinaten van een punt $(x\, y\, z)$ μ, μ_1 en μ_2, dan bestaan, zooals bekend is, de betrekkingen [1]:

$$x^2=\frac{(a^2+\mu)(a^2+\mu_1)(a^2+\mu_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$y^2=\frac{(b^2+\mu)(b^2+\mu_1)(b^2+\mu_2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}.$$

$$z^2=\frac{(c^2+\mu)(c^2+\mu_1)(c^2+\mu_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Ter bepaling van λ, gaan wij weder uit van de bovenstaande vergelijking:

[1]) Zie over de theorie der ell. coörd Jakobi Vorlesungen über Dynamik u. s. w. Berlin 1866. 26ste Vorlesung.

$$x\left(\frac{\partial^2 l_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 l_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 l_1}{\partial z^2}\right)+2\frac{\partial l_1}{\partial x}=o,$$

die, zooals wij gezien hebben, geldt voor ieder lichaam, dat symmetriek is ten opzichte van de coördinaat-vlakken.

Evenals wij bij den bol ondersteld hebben, dat l_1 alleen afhankelijk was van den afstand r, nemen wij nu om dezelfde reden aan, dat l_1 alleen afhangt van μ.

Wij krijgen dan de betrekkingen:

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial x^2}=\frac{d^2 l_1}{d\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\frac{dl_1}{d\mu}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial y^2}=\frac{d^2 l_1}{d\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2+\frac{dl_1}{d\mu}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial z^2}=\frac{d^2 l_1}{d\mu^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2+\frac{dl_1}{d\mu}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right).$$

Maar volgens de theorie der elliptische coördinaten is, wanneer wij kortheidshalve zetten [1]):

$$(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)=\mathrm{R}.$$

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2=4\frac{\mathrm{R}}{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=\frac{2\,\mathrm{R}}{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}\left(\frac{1}{a^2+\mu}+\frac{1}{b^2+\mu}+\frac{1}{c^2+\mu}\right)=$$

$$=\frac{2}{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}\frac{d\mathrm{R}}{d\mu}.$$

terwijl: $$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{2\,x\,\mathrm{R}}{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)(a^2+\mu)}$$

Deze waarden, overgebracht in de vergelijking ter bepaling van l_1, zullen wij vinden:

---

[1]) Zie het zooeven aangehaalde werk van Jakobi.

$$R\frac{d^2l_1}{d\mu^2}+\frac{1}{2}\frac{dR}{d\mu}\frac{dl_1}{d\mu}+\frac{R}{a^2+\mu}\frac{dl_1}{d\mu}=o$$

Stel $\frac{dl_1}{d\mu}=L_1$, dan wordt de vergelijking:

$$\frac{dL_1}{L_1}+\frac{1}{2}\frac{dR}{R}+\frac{d\mu}{a^2+\mu}=o.$$

Dus integreerende:

$$L_1=\frac{C}{(a^2+\mu)\sqrt{R}}$$

En:

$$l_1=C\int\frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{R}}+D$$

Daar in het oneindige de functie l_1 nul moet worden, is $D=o$, en wij kunnen schrijven:

$$l_1=-C\int_\mu^\infty\frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{R}}$$

Op dezelfde wijze zal men kunnen afleiden, dat:

$$l_2=-C^I\int_\mu^\infty\frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{R}}.$$

$$l_3=-C^{II}\int_\mu^\infty\frac{d\mu}{(c^2+\mu)\sqrt{R}}.$$

Ten einde l_4 te leeren kennen, hebben wij de vroeger afgeleide vergelijking noodig:

$$yz\left\{\frac{\partial^2 l_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 l_4}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 l_4}{\partial z^2}\right\}+2\left(z\frac{\partial l_4}{\partial y}+y\frac{\partial l_4}{\partial z}\right)=o.$$

Zij wordt, wanneer elliptische coördinaten ingevoerd worden:

$$R\frac{d^2l_4}{d\mu^2}+\frac{1}{2}\frac{dR}{d\mu}\frac{dl_4}{d\mu}+R\left(\frac{1}{b^2+\mu}+\frac{1}{c^2+\mu}\right)\frac{dl_1}{d\mu}=o.$$

Hieruit is zeer gemakkelijk l_4 op te lossen. De uitkomst is:

$$l_4 = -C^{IV}\int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)(c^2+\mu)\sqrt{R}}.$$

Verder wordt:

$$l_5 = -C^{V}\int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)\sqrt{R}}.$$

$$l_6 = -C^{VI}\int_\mu^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)\sqrt{R}}.$$

De verschillende constanten C kunnen evenzoo uit de voorwaarde-vergelijkingen (7) berekend worden, als boven bij den bol is verricht. Wij zullen dat hier evenwel niet uitvoeren, omdat de uitdrukkingen te samengesteld worden. Het is uit het hier aangevoerde genoegzaam te zien, dat de snelheids-potentiaal bij eene ellipsoïde gevonden kan worden, en welken vorm zij zal aannemen.

Wij hebben vroeger reeds gewezen op de overeenkomst in eigenschappen van de snelheids-potentiaal en de potentiaal-functie der krachten. Het is dus ook geen wonder, dat er eene overeenstemming bestaat tusschen de resultaten, die wij hier verkregen hebben, en de uitkomsten, die men verkrijgt bij de berekening der aantrekkingskracht van een bol en eene ellipsoïde op een punt in de ruimte uitgeoefend. In beide gevallen toch, bestaat voor de potentiaal-functie de vergelijking:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\varphi}{\delta z^2}=o.$$

Hoewel wij er geen nader gebruik van zullen maken, schijnt het niet ondienstig die overeenkomst aan te geven. De componenten der aantrekkingskracht van een bol op een punt $(x\, y\, z)$ uitgeoefend, voorstellende door R_x, R_y en R_z, bestaan de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A\, R_x \\ \lambda_2 &= A\, R_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (12) \\ \lambda_3 &= A\, R_z. \end{aligned}$$

waarin A eene constante beteekent. Daaruit volgt, dat de uitdrukking:

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

evenredig is met de geheele kracht, die de bol op het beschouwde punt uitoefent. Bij eene homogene ellipsoide hebben wij de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A\, R_x \\ \lambda_2 &= A' R_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (13) \\ \lambda_3 &= A'' R_z \end{aligned}$$

waarin A, A′ en A″ verschillende constanten voorstellen. De gevonden waarden voor de verschillende functiën λ kunnen gemakkelijk in de gedaante van elliptische integralen worden geschreven.

Zij worden dan, zooals blijkt uit de verkregen betrekkingen [1]):

$$l_1 = -\frac{2\,C^1}{\lambda'^3\, a^3}\left[\frac{\triangle\, tang\, \psi - E(k\, \psi)}{1 - k^2}\right].$$

---

[1]) Zie Legendre, Traité de fonctions elliptiques T. 1. p. 539.

$$l_2 = -\frac{2\,C^{II}}{\lambda'^3\,a^3}\left[\frac{E-(1-k^2)\,F}{k^2}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\triangle}\right]\times\frac{1}{1-k^2}$$

$$l_3 = -\frac{2\,C^{III}}{\lambda'^3\,a^3}\left[\frac{F-E}{k^2}\right].$$

(14) . . . .

$$l_4 = \frac{-C^{IV}}{(b^2-c^2)}\left(\frac{l_3}{C^{III}}-\frac{l_2}{C^{II}}\right)$$

$$l_5 = \frac{-C^{V}}{(a^2-c^2)}\left(\frac{l_3}{C^{III}}-\frac{l_1}{C^{I}}\right).$$

$$l_6 = \frac{-C^{VI}}{(a^2-b^2)}\left(\frac{l_2}{C^{II}}-\frac{l_1}{C^{I}}\right).$$

Hierin zijn F en E de gewone teekens voor elliptische integralen van de eerste en tweede soort; verder zijn:

$$k = \sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}.$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{a}}.$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\lambda' a}{\sqrt{a^2+\mu}}.$$

Voor andere lichamen dan die, welke door een oppervlak van den tweeden graad begrensd worden, is het tot nu toe niet mogen gelukken, de beweging der vloeistof uit die van het lichaam af te leiden.

De relatieve snelheid van een deeltje der vloeistof met betrekking tot die van het lichaam heeft tot componenten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} - (u + ry - qz)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta y} - (v + pz - rx)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta z} - (w + qx - py)$$

omdat de relatieve snelheid in eene bepaalde richting, gelijk is aan het verschil van de absolute snelheid van het vloeistofdeeltje in die richting en de absolute snelheid van een punt, dat er mede samenvalt en met het lichaam vast verbonden is.

In het geval, dat het vaste lichaam alleen eene translatie-beweging heeft, veranderen bovenstaande formulen in de volgende:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} - u.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta y} - v.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta\varphi}{\delta z} - w.$$

Volgens de theorie van de samenstelling der snelheden, heeft men echter de betrekkingen:

$$u = \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt}. \quad ^{1)}$$

$$v = \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt}.$$

$$w = \alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt}.$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$p = \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt}.$$

$$q = \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt}.$$

[1]) Zie o. a. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. p. 148.

$$r = \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Bij de translatie zijn de negen richtings-cosinussen natuurlijk constant, en wij vinden:

$$u = -\frac{dx_0}{dt}\quad v = -\frac{dy_0}{dt}\quad w = -\frac{dz_0}{dt}.$$

wanneer x_0 y_0 z_0 de coördinaten van den oorsprong van het stelsel $(x_1 y_1 z_1)$ in het bewegelijke stelsel zijn.

Nu is verder, volgens de vergelijking (6):

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = u \frac{\delta\lambda_1}{\delta x} + v \frac{\delta\lambda_2}{\delta x} + w \frac{\delta\lambda_3}{\delta x} + p \frac{\delta\lambda_4}{\delta x} + q \frac{\delta\lambda_5}{\delta x} + r \frac{\delta\lambda_6}{\delta x}.$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y} = u \frac{\delta\lambda_1}{\delta y} + v \frac{\delta\lambda_2}{\delta y} + w \frac{\delta\lambda_3}{\delta y} + p \frac{\delta\lambda_4}{\delta y} + q \frac{\delta\lambda_5}{\delta y} + r \frac{\delta\lambda_6}{\delta y}.$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta z} = u \frac{\delta\lambda_1}{\delta z} + v \frac{\delta\lambda_2}{\delta z} + w \frac{\delta\lambda_3}{\delta z} + p \frac{\delta\lambda_4}{\delta z} + q \frac{\delta\lambda_5}{\delta z} + r \frac{\delta\lambda_6}{\delta z}.$$

De vergelijkingen voor de relatieve beweging der vloeistof worden dus, wanneer het lichaam geene hoekssnelheid heeft:

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta x}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\delta\lambda_2}{\delta x}\frac{dy_0}{dt} + \frac{\delta\lambda_3}{\delta x}\frac{dz_0}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) \text{ enz.}$$

of ook, omdat λ_1, λ_2, λ_3 ten opzichte van den tijd constant zijn:

$$dx = -\left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta x} - 1\right) dx_0 - \frac{\delta\lambda_2}{\delta x} dy_0 - \frac{\delta\lambda_3}{\delta x} dz_0.$$

En: $$dy = -\frac{\delta\lambda_1}{\delta y} dx_0 - \left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta y} - 1\right) dy_0 - \frac{\delta\lambda_3}{\delta y} dz_0.$$

$$dz = -\frac{\delta\lambda_1}{\delta z} dx_0 - \frac{\delta\lambda_2}{\delta z} dy_0 - \left(\frac{\delta\lambda_3}{\delta z} - 1\right) dz_0.$$

Hieruit volgt, dat de banen der vloeistofdeeltjes alleen afhangen van de gedaante van het lichaam en de baan langs welke de punten van het lichaam zich bewegen.

Stellen wij, dat het lichaam zich om eene vaste as beweegt. Laten wij die as samenvallen met de as x_1. Den afstand van den oorsprong van het stelsel x y z tot de as van wenteling zullen wij R noemen. De hoek, die R met de as der z_1 maakt, zij ϑ.

Wij weten nu, dat:

$$\alpha = 0.$$
$$\beta = \mathrm{R}\ sin\ \vartheta.$$
$$\gamma = \mathrm{R}\ cos\ \vartheta.$$

Verder zullen wij een nieuw coördinaten-stelsel invoeren, dat met het lichaam verbonden is, en denzelfden oorsprong heeft als het stelsel (x y z). Wij bepalen den stand van dit stelsel zoodanig, dat de as x′ evenwijdig is aan de lijn, om welke het lichaam wentelt. De as z′ valle samen met de lijn R. Om van het eene stelsel tot het andere over te gaan, hebben wij de volgende formulen:

$$x' = ax + a'y + a''z.$$
$$y' = bx + b'y + b''z.$$
$$z' = cx + c'y + c''z.$$

Hieruit volgt:

$$x_1 = \alpha + x'(a\alpha_1 + a'\alpha_2 + a''\alpha_3) + y'(b\alpha_1 + b'\alpha_2 + b''\alpha_3) + \\ + z'(c\alpha_1 + c'\alpha_2 + c''\alpha_3).$$

$$y_1 = \beta + x'(a\beta_1 + a'\beta_2 + a''\beta_3) + y'(b\beta_1 + b'\beta_2 + b''\beta_3) + \\ + z'(c\beta_1 + c'\beta_2 + c''\beta_3).$$

$$z_1 = \gamma + x'(a\gamma_1 + a'\gamma_2 + a''\gamma_3) + y'(b\gamma_1 + b'\gamma_2 + b''\gamma_3) + \\ + z'(c\gamma_1 + c'\gamma_2 + c''\gamma_3).$$

Uit deze formulen volgen onmiddelijk de betrekkingen:

$$a\alpha_1 + a'\alpha_2 + a''\alpha_3 = 1$$
$$b\alpha_1 + b'\alpha_2 + b''\alpha_3 = 0$$
$$c\alpha_1 + c'\alpha_2 + c''\alpha_3 = 0$$

$$a\beta_1 + a'\beta_2 + a''\beta_3 = 0 \qquad a\gamma_1 + a'\gamma_2 + a''\gamma_3 = 0$$
$$b\beta_1 + b'\beta_2 + b''\beta_3 = \cos\vartheta \qquad b\gamma_1 + b'\gamma_2 + b''\gamma_3 = -\sin\vartheta$$
$$c\beta_1 + c'\beta_2 + c''\beta_3 = \sin\vartheta \qquad c\gamma_1 + c'\gamma_2 + c''\gamma_3 = \cos\vartheta.$$

Deze vergelijkingen stellen ons in staat, om de hoeken α_1 α_2, β_1 β_2 enz. in ϑ en de bekende grootheden a a', b b' enz. uit te drukken, en wel zullen wij vinden:

$$\alpha_1 = a \qquad \beta_1 = b\cos\vartheta + c\sin\vartheta.$$
$$\alpha_2 = a' \qquad \beta_2 = b'\cos\vartheta + c'\sin\vartheta.$$
$$\alpha_3 = a'' \qquad \beta_3 = b''\cos\vartheta + c''\sin\vartheta.$$
$$\gamma_1 = c\cos\vartheta - b\sin\vartheta.$$
$$\gamma_2 = c'\cos\vartheta - b'\sin\vartheta.$$
$$\gamma_3 = c''\cos\vartheta - b''\sin\vartheta.$$

Verder verkrijgen wij:

$$u = \mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt}(\beta_1\cos\vartheta - \gamma_1\sin\vartheta)$$

$$v = \mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt}(\beta_2\cos\vartheta - \gamma_2\sin\vartheta)$$

$$w = \mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt}(\beta_3\cos\vartheta - \gamma_3\sin\vartheta)$$

of, de pas gevonden waarden β_1 β_2 enz. overbrengende:

$$u = b\,\mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt} \quad v = b'\mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt} \quad w = b''\mathrm{R}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Verder wordt:

$$p = \Big[(b'\cos\vartheta + c'\sin\vartheta)(c''\cos\vartheta - b''\sin\vartheta) - (c'\cos\vartheta - b'\sin\vartheta)\times$$
$$\times(b''\cos\vartheta + c''\sin\vartheta)\Big]\frac{d\vartheta}{dt}.$$

$$\text{of } p = (b'c'' - b''c') \frac{d\vartheta}{dt} = a \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\text{En: } q = \qquad\qquad = a' \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$r = \qquad\qquad = a'' \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Nu wordt:

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \mathrm{R} \left(b \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + b' \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + b'' \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \right) + a \frac{\partial \lambda_4}{\partial x} + a' \frac{\partial \lambda_5}{\partial x} + a'' \frac{\partial \lambda_6}{\partial x} \right\} \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$- (b\mathrm{R} + ya'' - za') \frac{d\vartheta}{dt}$$

En dergelijke uitdrukkingen vindt men voor de relatieve snelheid in de richting van de andere assen. Wij zien uit deze formule, dat ook bij de beweging van een lichaam om eene vaste as, de banen der vloeistofdeeltjes van de snelheid onafhankelijk zijn.

Men kan de vraag opwerpen, waarom wij niet dadelijk het stelsel (x y z) den stand gegeven hebben, waarin wij het coördinaten-stelsel (x′ y′ z′) hebben gebracht. Dit zal duidelijk in het oog springen, wanneer wij in het vervolg de beweging van een lichaam om eene vaste as zullen onderzoeken. Dan zullen de hier verkregen formulen weder te pas komen.

Beide theorema's, die hier bewezen zijn, heeft men te danken aan Clebsch, die ze echter een anderen vorm heeft gegeven.

Indien weder een bolvormig lichaam zich in de vloeistof beweegt, en wel zonder hoekssnelheid in de richting van de x-as, worden de vergelijkingen voor de banen der vloeistofdeeltjes volgens de zooeven gevonden formulen:

$$dx = \left\{ \frac{r_0^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3\,x^2}{r^5} \right) + 1 \right\} dx_0$$

$$dy = - \frac{3xy\,r_0^3}{2r^5} dx_0$$

$$dz = - \frac{3xz\,r_0^3}{2r^5} dx_0$$

Men ziet, dat bij het grooter worden van r de uitdrukkingen, die de verplaatsingen in de richting van y- en z-assen aangeven, spoedig zeer klein worden. Op eenigen afstand van het lichaam zullen dus de banen der vloeistofdeeltjes nagenoeg in de richting der x-as vallen. Tevens blijkt uit deze formulen, dat op een eenigszins aanzienlijken afstand van den bol de absolute snelheid nagenoeg onmerkbaar zal wezen.

Als toepassing van het tweede theorema nemen wij weder een bol. Bedenken wij, dat zulk een lichaam symmetriek is ten opzichte van elk stel rechthoekige assen, welks oorsprong het middelpunt van den bol is, dan kunnen wij het stelsel (x y z) doen samenvallen met (x′ y′ z′). De vergelijkingen voor de banen der vloeistofdeeltjes worden alzoo:

$$dx = \frac{3\,\mathrm{R}\,r_0^3}{2} \frac{x\,y}{r^5} d\vartheta.$$

$$dy = \left\{ \left(- \frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) \frac{\mathrm{R} r_0^3}{2} - (\mathrm{R} + z) \right\} d\,\vartheta.$$

$$dz = \left(\frac{3\,Rr_0^3}{2} \frac{xz}{r^5} + y \right) d\vartheta.$$

Op een aanzienlijken afstand van het lichaam mag men zonder merkbare onnauwkeurigheid te begaan voor deze uitdrukkingen schrijven:

$$dy = (R + z)\, d\vartheta.$$

$$dz = y\, d\vartheta.$$

Dan wordt de vergelijking van de baan:

$$y^2 + z^2 + 2\,R\,z = C.$$

De relatieve baan der vloeistofdeeltjes nadert dus hoe langer hoe meer tot den cirkel. Zoowel bij translatie als bij wenteling van een bol komt de beweging der vloeistof langzamerhand met die van het lichaam overeen, naarmate de afstand tot dit laatste grooter wordt. Wij weten nu genoeg van de beweging der vloeistof, om tot de beweging van het lichaam over te gaan.

III.

BEWEGING VAN LICHAMEN IN VLOEISTOFFEN.

---

1. VERGELIJKINGEN VOOR DE BEWEGING VAN EEN WILLEKEURIG LICHAAM.

Om in het algemeen de beweging van een lichaam in eene vloeistof te leeren kennen, moet men uitgaan van de differentiaal-vergelijkingen (2) en (3). Wanneer men er in geslaagd is, die vergelijkingen te integreeren, kent men zoowel de snelheid als de drukking P in elk punt, uitgedrukt in den tijd. Bij de integratie ontstaan natuurlijk constanten, die uit den aanvangstoestand en de begrenzing der vloeistof bepaald moeten worden. Neemt men b. v. aan, dat de vloeistof al hare beweging aan die van het lichaam ontleent en in het oneindige begrensd is door een vast oppervlak, dan ontstaan daardoor voorwaarde-vergelijkingen, die ter bepaling van de constanten kunnen dienen.

De drukking, die het lichaam in eenig punt zijner oppervlakte van de vloeistof ondervindt, is samengesteld uit de drukkracht P en de wrijvingskrachten in dat punt.

Laatstgenoemden hangen volgens het bovenstaande op eene bepaalde wijze van de snelheid af, en zijn dus naar richting en grootte bekend. Door integratie dier grootheden over de gansche oppervlakte van het lichaam leert men de geheele drukking kennen, die de vloeistof op het lichaam uitoefent. Is men zoover gevorderd, dan kan men de differentiaal-vergelijkingen voor de beweging van het lichaam op de gewone wijze vinden.

Zooals reeds gezegd is, zijn de vergelijkingen (2) en (3) slechts in zeer zeldzame gevallen te integreeren. Zoolang dit vraagstuk onuitvoerbaar blijft, is van de algemeene theorie der beweging van lichamen in vloeistoffen niet veel te maken.

Bij bijzondere onderstellingen aangaande den aard der beweging heeft men bovenstaande theorie somtijds kunnen toepassen.

Meijer heeft op die wijze de beweging van een bolvormigen slinger onderzocht, wiens schommelingen voortdurend zeer klein blijven. Hij voert in de hydrodynamische vergelijkingen nieuwe veranderlijken in, die met y_1 en z_1 verbonden zijn door de vergelijkingen:

$$y_1 = \omega \cos\psi \; z_1 = \omega \sin\psi.$$

en mocht nu de beweging onafhankelijk van den hoek

ψ aannemen. De vergelijkingen (2) en (3) worden dan integreerbaar [1]).

Clebsch heeft bovenstaande theorie toegepast in de twee gevallen, waarin wij de functie φ hebben bepaald, daarbij aannemende dat alleen de zwaartekracht op de vloeistofdeeltjes werkt. Hij leerde natuurlijk de drukking, die de vloeistof op het lichaam uitoefent, kennen als eene functie van den tijd, van de grootheden, die de beweging van het lichaam bepalen en van de zwaartekracht. Men verkrijgt daarbij dus zes gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen ter bepaling van de grootheden u, v, w, p, q en r. Gebruik makende van vergelijking (6) gaf hij voor een willekeurig lichaam, dat symmetriek is ten opzichte van de coördinaat-vlakken op dezelfde wijze de differentiaal-vergelijkingen voor de beweging van het lichaam, met dit onderscheid, dat er dan constanten in voorkomen, die tot nu toe niet te bepalen zijn.

In de onderstelling evenwel, dat de wrijving niet bestaat, dat de componenten der snelheid van een vloeistofdeeltje partiëele differentiaal-quotienten zijn eener zelfde functie, en dat de krachten, welke op de vloeistof werken eene krachtfunctie hebben, kan bovenstaande theorie door een andere vervangen worden.

Wij hebben bewezen, dat bij deze onderstellingen de levendige kracht der vloeistof eene homogene functie

---

[1]) Zie Journal von Crelle. Band 73.

van den tweeden graad is der grootheden, die de beweging van het lichaam bepalen. De levendige kracht van het geheele systeem is daarom eene homogene functie van den tweeden graad derzelfde grootheden. Nemen wij aan, dat de krachten, die op het lichaam werken eene kracht-functie hebben. Hebben de drukkingen, die op het lichaam worden uitgeoefend door de uitwendige krachten der vloeistof eveneens eene krachtfunctie, dan kunnen wij onmiddelijk gebruik maken van de bewegings-vergelijkingen van Lagrange in den vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \xi'_n} = \frac{\delta (T+V)}{\delta \xi_n} \; ^{1)}$$

T is de levendige kracht van het geheele systeem. Zij U_0 de krachtfunctie der verschillende op het lichaam werkende krachten, en U_1 die der drukkingen, dan is:

$$V = U_0 - U_1.$$

De plaats van het lichaam is op elk oogenblik gegeven door de 12 grootheden $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ enz., die in de vergelijkingen (9) voorkomen. Wij mogen dus de levendige kracht van het systeem beschouwen als eene functie van die grootheden. De vergelijkingen van Lagrange nemen dan de volgende gedaante aan:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} = \frac{\delta (T+V)}{\delta \alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)} = \frac{\delta (T+V)}{\delta \beta}$$

[1]) De afleiding dezer vergelijkingen vindt men o. a. bij Schell. pag. 914.

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)}=\frac{\delta(T+V)}{\delta\gamma}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)}=\frac{\delta(T+V)}{\delta\alpha_1} \text{ enz.}$$

Maar volgens de uitdrukkingen (15), bestaan de betrekkingen:

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}=\alpha_1\frac{\delta T}{\delta u}+\alpha_2\frac{\delta T}{\delta v}+\alpha_3\frac{\delta T}{\delta w}$$

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)}=\beta_1\frac{\delta T}{\delta u}+\beta_2\frac{\delta T}{\delta v}+\beta_3\frac{\delta T}{\delta w}$$

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)}=\gamma_1\frac{\delta T}{\delta u}+\gamma_2\frac{\delta T}{\delta v}+\gamma_3\frac{\delta T}{\delta w}$$

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)}=\frac{1}{2}\left(\alpha_3\frac{\delta T}{\delta q}-\alpha_2\frac{\delta T}{\delta r}\right)$$

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)}=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{\delta T}{\delta r}-\alpha_3\frac{\delta T}{\delta p}\right)$$

$$\frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)}=\frac{1}{2}\left(\alpha_2\frac{\delta T}{\delta p}-\alpha_1\frac{\delta T}{\delta q}\right) \text{ enz.}$$

Volgens dezelfde uitdrukkingen hebben wij verder:

$$\frac{\delta T}{\delta\alpha}=0\ \frac{\delta T}{\delta\beta}=0\ \frac{\delta T}{\delta\gamma}=0.$$

$$\frac{\delta T}{\delta\alpha_1}=\frac{\delta T}{\delta u}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{\delta r}\frac{d\alpha_2}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\delta T}{\delta q}\frac{d\alpha_3}{dt} \text{ enz.}$$

De drie eerste bewegings-vergelijkingen nemen door deze herleidingen de gedaante aan:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\delta T}{\delta u} + \alpha_2 \frac{\delta T}{\delta v} + \alpha_3 \frac{\delta T}{\delta w}\right) = \frac{\delta V}{\delta \alpha}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\delta T}{\delta u} + \beta_2 \frac{\delta T}{\delta v} + \beta_3 \frac{\delta T}{\delta w}\right) = \frac{\delta V}{\delta \beta}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\delta T}{\delta u} + \gamma_2 \frac{\delta T}{\delta v} + \gamma_3 \frac{\delta T}{\delta w}\right) = \frac{\delta V}{\delta \gamma}.$$

Daarin stellen de laatste leden de componenten der krachten voor in de richting van de onbewegelijke coordinaat-assen. Men kan die vergelijkingen gemakkelijk tot den volgenden vorm brengen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta u} = q\frac{\delta T}{\delta w} - r\frac{\delta T}{\delta v} + \alpha_1 \frac{\delta V}{\delta \alpha} + \beta_1 \frac{\delta V}{\delta \beta} + \gamma_1 \frac{\delta V}{\delta \gamma}.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta v} = r\frac{\delta T}{\delta u} - p\frac{\delta T}{\delta w} + \alpha_2 \frac{\delta V}{\delta \alpha} + \beta_2 \frac{\delta V}{\delta \beta} + \gamma_2 \frac{\delta V}{\delta \gamma}. \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta w} = p\frac{\delta T}{\delta v} - q\frac{\delta T}{\delta u} + \alpha_3 \frac{\delta V}{\delta \alpha} + \beta_3 \frac{\delta V}{\delta \beta} + \gamma_3 \frac{\delta V}{\delta \gamma}.$$

Uit de negen laatste vergelijkingen der beweging, vormen wij drie nieuwe. De eerste daarvan is:

$$\alpha_2 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)} - \alpha_3 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)} + \beta_2 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\beta_3}{dt}\right)} - \beta_3 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)} +$$

$$+ \gamma_2 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)} - \gamma_3 \frac{\delta T}{\delta\left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)} = \alpha_2 \frac{\delta (T+V)}{\delta \alpha_3} - \alpha_3 \frac{\delta (T+V)}{\delta \alpha_2} +$$

$$+ \beta_2 \frac{\delta (T+V)}{\delta \beta_3} - \beta_3 \frac{\delta (T+V)}{\delta \beta_2} + \gamma_2 \frac{\delta (T+V)}{\delta \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\delta (T+V)}{\delta \gamma_2}.$$

Maken wij gebruik van bovenstaande herleidingen, dan volgt:

$$\frac{1}{2}\alpha_2\frac{d}{dt}\left(\alpha_2\frac{\partial T}{\partial p}-\alpha_1\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\frac{1}{2}\alpha_3\frac{d}{dt}\left(\alpha_3\frac{\partial T}{\partial p}-\alpha_1\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta_2\frac{d}{dt}\left(\beta_2\frac{\partial T}{\partial p}-\beta_1\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\frac{1}{2}\beta_3\frac{d}{dt}\left(\beta_3\frac{\partial T}{\partial p}-\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_2\frac{d}{dt}\left(\gamma_2\frac{\partial T}{\partial p}-\gamma_1\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\frac{1}{2}\gamma_3\frac{d}{dt}\left(\gamma_3\frac{\partial T}{\partial p}-\gamma_1\frac{\partial T}{\partial r}\right)=$$

$$=\alpha_2\frac{\partial(T+V)}{\partial\alpha_3}-\alpha_3\frac{\partial(T+V)}{\partial\alpha_2}+\beta_2\frac{\partial(T+V)}{\partial\beta_3}-\beta_3\frac{\partial(T+V)}{\partial\beta_2}+$$

$$+\gamma_2\frac{\partial(T+V)}{\partial\gamma_3}-\gamma_3\frac{\partial(T+V)}{\partial\gamma_2}.$$

of, wanneer men gebruik maakt van de betrekkingen, die er tusschen de richtings-cosinussen bestaan:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta p}=v\frac{\delta T}{\delta w}-w\frac{\delta T}{\delta v}+q\frac{\delta T}{\delta r}-r\frac{\delta T}{\delta q}+\alpha_2\frac{\delta V}{\delta\alpha_3}-\alpha_3\frac{\delta V}{\delta\alpha_2}+$$

$$+\beta_2\frac{\delta V}{\delta\beta_3}-\beta_3\frac{\delta V}{\delta\beta_2}+\gamma_2\frac{\delta V}{\delta\gamma_3}-\gamma_3\frac{\delta V}{\delta\gamma_2}.$$

En op dezelfde wijze leiden wij de volgende twee vergelijkingen af:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta q}=w\frac{\delta T}{\delta u}-u\frac{\delta T}{\delta w}+r\frac{\delta T}{\delta p}-p\frac{\delta T}{\delta r}+\alpha_3\frac{\delta V}{\delta\alpha_1}-\alpha_1\frac{\delta V}{\delta\alpha_3}+$$

$$+\beta_3\frac{\delta V}{\delta\beta_1}-\beta_1\frac{\delta V}{\delta\beta_3}+\gamma_3\frac{\delta V}{\delta\gamma_1}-\gamma_1\frac{\delta V}{\delta\gamma_3}. \quad \ldots(17)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta r}=u\frac{\delta T}{\delta v}-v\frac{\delta T}{\delta u}+p\frac{\delta T}{\delta q}-q\frac{\delta T}{\delta p}+\alpha_1\frac{\delta V}{\delta\alpha_2}-\alpha_2\frac{\delta V}{\delta\alpha_1}+$$

$$+\beta_1\frac{\delta V}{\delta\beta_2}-\beta_2\frac{\delta V}{\delta\beta_1}+\gamma_1\frac{\delta V}{\delta\gamma_2}-\gamma_2\frac{\delta V}{\delta\gamma_1}.$$

Kirchhoff heeft de vergelijkingen (16 en (17) afgeleid uit het beginsel van Hamilton, in de onderstelling, dat op de vloeistof geene uitwendige krachten werken. De uitbreiding, die er hier aan gegeven is, zal in het vervolg te pas komen.

Werken er geene krachten op het lichaam en op de vloeistofdeeltjes, dan verkrijgen de bewegings-vergelijkingen van het lichaam den volgenden fraaien vorm:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta u} &= q\frac{\delta T}{\delta w} - r\frac{\delta T}{\delta v}\\
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta v} &= r\frac{\delta T}{\delta u} - p\frac{\delta T}{\delta w}\\
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta w} &= p\frac{\delta T}{\delta v} - q\frac{\delta T}{\delta u}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta p} &= v\frac{\delta T}{\delta w} - w\frac{\delta T}{\delta v} + q\frac{\delta T}{\delta r} - r\frac{\delta T}{\delta q}\\
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta q} &= w\frac{\delta T}{\delta u} - u\frac{\delta T}{\delta w} + r\frac{\delta T}{\delta p} - p\frac{\delta T}{\delta r}\\
\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta r} &= u\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta u} + p\frac{\delta T}{\delta q} - q\frac{\delta T}{\delta p}
\end{aligned}\right\} \ldots (19)$$

Men kan van dit stelsel gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen, onmiddelijk drie integralen aangeven. Ze bij elkaar optellende, na ze achtereenvolgens met u, v, w, p, q en r vermenigvuldigd te hebben, vindt men na integratie:

$$u\frac{\delta T}{\delta u} + v\frac{\delta T}{\delta v} + w\frac{\delta T}{\delta w} + p\frac{\delta T}{\delta p} + q\frac{\delta T}{\delta q} + r\frac{\delta T}{\delta r} = 0$$

of, in aanmerking nemende, dat T eene homogene functie van den tweeden graad is:

$$2\,T = C_1,$$

Dit resultaat was te voorzien. Want, daar de wrijving verwaarloosd is en er geene uitwendige krachten werken, bestaat er geen enkele oorzaak, die de levendige kracht van het systeem kan doen veranderen.

Door de vergelijkingen successievelijk met

$$\frac{\delta T}{\delta p},\ \frac{\delta T}{\delta q},\ \frac{\delta T}{\delta r},\ \frac{\delta T}{\delta u},\ \frac{\delta T}{\delta v},\ \frac{\delta T}{\delta r}$$

te vermenigvuldigen, ze daarna bij elkaar op te tellen, en de uitkomst te integreeren vinden wij dat:

$$\frac{\delta T}{\delta u}\ \frac{\delta T}{\delta p} + \frac{\delta T}{\delta v}\ \frac{\delta T}{\delta q} + \frac{\delta T}{\delta w}\ \frac{\delta T}{\delta r} = C_2.$$

Door eindelijk de vergelijkingen (18) met:

$$\frac{\delta T}{\delta u},\ \frac{\delta T}{\delta v} \text{ en } \frac{\delta T}{\delta w}$$

te vermenigvuldigen, ze daarna bij elkaar te voegen, en het resultaat te integreeren, vindt men den derden integraal:

$$\left(\frac{\delta T}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{\delta w}\right)^2 = C_3.$$

Wanneer de vergelijkingen (18) en (19) opgelost zijn, kan men gemakkelijk de grootheden berekenen, die den stand van het lichaam bepalen. Uit de vergelijkingen (15) toch, kunnen de betrekkingen worden afgeleid:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_3\, q - \alpha_2\, r.$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1\, r - \alpha_3\, p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_2\, p - \alpha_1\, q.$$

Van dit systeem kent men twee integralen:

$$\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \alpha_3^{\,3} = 1$$

$$\alpha_1 \frac{\delta T}{\delta u} + \alpha_2 \frac{\delta T}{\delta v} + \alpha_3 \frac{\delta T}{\delta w} = C.$$

en daar de tijd niet expliciet in die vergelijkingen voorkomt, wordt de derde integraal door een quadratuur gevonden.

Op volkomen analoge wijze worden de overige richtings-cosinussen berekend.

Uit de drie eerste vergelijkingen (15) verkrijgen wij:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1\, u + \alpha_2\, v + \alpha_3\, w.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1\, u + \beta_2\, v + \beta_3\, w. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1\, u + \gamma_2\, v + \gamma_3\, w.$$

Daarmede zijn al de grootheden bepaald, van welke de stand van het lichaam in de ruimte afhangt. De eenige moeilijkheid van het vraagstuk om de beweging van het lichaam te bepalen, is dus gelegen in de vergelijkingen van Kirchhoff.

Wanneer geene uitwendige krachten werken kent men reeds drie integralen. Daar de tijd in de tweede leden niet voorkomt, volgt de zesde integraal onmiddelijk uit de kennis van de vijf overigen. Gelukt het slechts om op de een of andere wijze de vierde integraal te bepalen, dan is het systeem volkomen opgelost; want dan kan de vijfde door de methode van den integreerenden factor altijd worden gevonden, zooals Clebsch heeft aangetoond.

Men kan namelijk de vergelijkingen (18) en (19) eene transformatie doen ondergaan op de volgende wijze:

Stellende:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = u' \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = p'$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = v' \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = q'$$

$$\frac{\partial T}{\partial w} = w' \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = r'$$

Dan is:

$$2\,T = u\,u' + v\,v' + w\,w' + p\,p' + q\,q' + r\,r'.$$

Differentieert men deze uitdrukking achtereenvolgens naar u', v', w', p', q' en r', dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial T}{\partial u'} = u. \qquad \frac{\partial T}{\partial p'} = p.$$

$$\frac{\partial T}{\partial v'} = v. \qquad \frac{\partial T}{\partial q'} = q.$$

$$\frac{\partial T}{\partial w'} = w. \qquad \frac{\partial T}{\partial r'} = r.$$

Deze uitdrukkingen overbrengende in de vergelijkingen (18) en (19) worden deze:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du'}{dt} &= w'\frac{\delta T}{\delta q'} - v'\frac{\delta T}{\delta r'}\\
\frac{dv'}{dt} &= u'\frac{\delta T}{\delta r'} - w'\frac{\delta T}{\delta p'}\\
\frac{dw'}{dt} &= v'\frac{\delta T}{\delta p'} - u'\frac{\delta T}{\delta q'}\\
\frac{dp'}{dt} &= w'\frac{\delta T}{\delta v'} - v'\frac{\delta T}{\delta w'} + r'\frac{\delta T}{\delta q'} - q'\frac{\delta T}{\delta r'}\\
\frac{dq'}{dt} &= u'\frac{\delta T}{\delta w'} - w'\frac{\delta T}{\delta u'} + p'\frac{\delta T}{\delta r'} - r'\frac{\delta T}{\delta p'}\\
\frac{dr'}{dt} &= v'\frac{\delta T}{\delta u'} - u'\frac{\delta T}{\delta v'} + q'\frac{\delta T}{\delta p'} - p'\frac{\delta T}{\delta q'}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (22)$$

De vergelijkingen zijn nu in eenen vorm gebracht, waarin de integreerende factor gevonden kan worden. Volgens de theorie van Jacobi is, wanneer de vier bekende integralen worden voorgesteld door:

$$f_1 = C_1\ f_2 = C_2 f_3 = C_3 f_4 = C_4,$$

$$Q = \frac{M}{\sum \pm \frac{\delta f_1}{\delta v'}, \frac{\delta f_2}{\delta w'}, \frac{\delta f_3}{\delta p'}, \frac{\delta f_4}{\delta q'},}$$

de laatste multiplicator van de vergelijking:

$$\frac{du'}{U'} = \frac{dr'}{R'}$$

wanneer door middel van de vier integralen, v', w', p' en q' geëlimineerd zijn,

De grootheid M moet voldoen aan de partieele differentiaal-vergelijking:

$$\frac{\delta(U'M)}{\delta u'}+\frac{\delta(V'M)}{\delta v'}+\frac{\delta(W'M)}{\delta w'}+\frac{\delta(P'M)}{\delta p'}+\frac{\delta(Q'M)}{\delta q'}+\frac{\delta.(R'M)}{\delta r'}=0$$

waarin U′, V′, W′ enz. kortheidshalve in de plaats gezet zijn van de uitdrukkingen, die in de tweede leden der differentiaal-vergelijkingen voorkomen.

Wanneer wij in aanmerking nemen, dat:

$$\frac{d\frac{\delta T}{\delta p'}}{dw'}=\frac{d\frac{\delta T}{\delta w'}}{dp'},\quad \frac{d\frac{\delta T}{\delta q'}}{du'}=\frac{d\frac{\delta T}{\delta u'}}{dq'}\ \text{enz.}$$

dan zien wij, dat de vergelijking bestaat:

$$\frac{\delta U'}{\delta u'}+\frac{\delta V'}{\delta v'}+\frac{\delta W'}{\delta w'}+\frac{\delta P'}{\delta p'}+\frac{\delta Q'}{\delta q'}+\frac{\delta R'}{\delta r'}=0.$$

en dat M constant is. De laatste multiplicator kan daarom altijd worden gevonden, wanneer men de vierde integraal heeft kunnen opsporen.

Clebsch heeft de vergelijkingen (22) aan een onderzoek onderworpen. Hij heeft namelijk de voorwaarden nagegaan, aan welke de coëfficienten der levendige kracht moeten voldoen, opdat die vergelijkingen een vierde integraal hebben, die eene homogene functie van den eersten of van den tweeden graad der veranderlijken is. Bij dat onderzoek bracht hij door eene coördinatenverplaatsing de uitdrukking voor de levendige kracht in een eenvoudiger vorm, dien hij de gereduceerde functie T noemde. Zij bevat, in plaats van 21 verschillende coëfficienten er slechts 18, tusschen welke nog twee betrekkingen bestaan.

Wij zullen niet in eene beschouwing treden van de wijze, waarop dit probleem werd opgelost [1]), maar alleen de uitkomsten mededeelen.

Clebsch spoorde twee gevallen op, in welke de bewegings-vergelijkingen een lineaire integraal hebben. Aan een dier uitkomsten is geene mechanische beteekenis te hechten en kan in de natuur niet voorkomen. De andere heeft onder bijzondere omstandigheden betrekking op een omwentelings-lichaam.

Verder leerde hij drie gevallen kennen, in welke de vergelijkingen (22) een integraal hebben, die eene homogene functie van den tweeden graad der veranderlijken is, en niet samengesteld kan worden uit de drie reeds bekende integralen. Een dier resultaten leerde niets nieuws. Het voerde tot een lineaire integraal terug. In de beide andere gevallen heeft Clebsch de mechanische beteekenis van zijn resultaat niet aangegeven; hij heeft niet nagegaan voor welke lichamen die gevallen gelden. Bovendien werd de vijfde integraal, door de methode van den laatsten multiplicator verkregen, zoo ingewikkeld, dat zij niet te herleiden is. De aard der beweging van het lichaam is dus ook niet te bepalen. Moge dus de onderzoeking van Clebsch voor de zuivere wiskunde van groote waarde zijn, voor de mechanica leverde zij tot nu toe niet veel nieuws op. Het eenige

---

[1]) Zie Mathematische Annal. von Clebsch u. Neumann. Band III

geval toch, waarin hij aan zijn resultaat eene mechanische beteekenis kon hechten, was reeds vroeger door Kirchhoff behandeld.

Wij gaan nu de theorie in enkele bijzondere gevallen toepassen.

---

2. BEWEGING VAN EEN BOL.

Wij nemen weder aan, dat de massa in homogene concentrische lagen over het lichaam verdeeld is.

Het middelpunt zij de oorsprong van het stelsel $(x\,y\,z)$.

In de eerste plaats gaan wij bewijzen, dat, indien een lichaam symmetriek is ten opzichte van een rechthoekig stelsel, de levendige kracht ten opzigte van dat stelsel den vorm aanneemt:

$$2\,T = a_{11}\,u^2 + a_{22}\,v^2 + a_{33}\,w^2 + a_{44}\,p^2 + a_{55}\,q^2 + a_{66}\,r^2.$$

De uitdrukking T is samengesteld uit de levendige kracht van de vloeistof en die van het lichaam. Beschouwen wij elk afzonderlijk. Stellen wij de levendige kracht der vloeistof voor door de volgende formule:

$$2\,T' = a'_{11}\,u^2 + a'_{22}\,v^2 + a'_{33}\,w^2 + a'_{44}\,p^2 + a'_{55}\,q^2 +$$
$$+ a'_{12}\,u\,v + a'_{13}\,u\,w + \text{enz.}$$

Maar in hoofdstuk II zagen wij dat:

$$2\,\mathrm{T} = \rho \iiint \left\{ \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right)^2 dx\, dy\, dz.\right.$$

terwijl:

$$\varphi = u\lambda_1 + v\lambda_2 + w\lambda_3 + p\lambda_4 + q\lambda_5 + r\lambda_6 + \text{Const.}$$

Daaruit volgt:

$$a'_{11} = \rho \iiint \left\{ \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz.$$

$$a'_{22} = \rho \iiint \left\{ \left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz.$$

$$a'_{12} = \rho \iiint \left\{ \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta x}\right)\left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta x}\right) + \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta y}\right)\left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta y}\right) + \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta\lambda_2}{\delta z}\right) \right\} dx\, dy\, dz.$$

enz.

Door partiëele integratie vinden wij:

$$\iiint \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta x}\right)^2 dx\, dy\, dz = \iint \lambda_1 \frac{\delta\lambda_1}{\delta x}\, dy\, dz - \iiint \lambda_1 \frac{\delta^2\lambda_1}{\delta x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

$$\iiint \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta y}\right)^2 dx\, dy\, dz = \iint \lambda_1 \frac{\delta\lambda_1}{\delta y}\, dx\, dz - \iiint \lambda_1 \frac{\delta^2\lambda_1}{\delta y^2}\, dx\, dy\, dz.$$

$$\iiint \left(\frac{\delta\lambda_1}{\delta z}\right)^2 dx\, dy\, dz = \iint \lambda_1 \frac{\delta\lambda_1}{\delta z}\, dx\, dy - \iiint \lambda_1 \frac{\delta^2\lambda_1}{\delta z^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Wanneer deze vergelijkingen worden opgeteld, en daarbij in aanmerking wordt genomen, dat:

$$\frac{\delta^2\lambda_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\lambda_1}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\lambda_1}{\delta z^2} = 0,$$

dan verkrijgen wij voor den eersten coëfficient:

$$a'_{11} = -\rho \int_{\infty}^{0} ds\, \lambda_1 \frac{\delta \lambda_1}{\delta N}$$ [1])

waarin *ds* een element van de oppervlakte des lichaams voorstelt. In het oneindige verdwijnt deze integraal, omdat daar geen beweging plaats heeft. Zij behoeft dus slechts over het oppervlak van het lichaam genomen te worden.

Wij bekomen voor de overige coëfficienten dergelijke uitdrukkingen, b. v.:

$$a'_{12} = -\rho \int_{\infty}^{0} ds\, \lambda_1 \frac{\delta \lambda_2}{\delta N}$$

Is nu het lichaam symmetriek ten opzichte van de coördinaat-vlakken, dan veranderen de uitdrukkingen in:

$$a'_{11} = -\rho \int ds\, l_1\, x \cos (N\, x).$$

$$a'_{12} = -\rho \int ds\, l_1\, x \cos (N\, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

enz.

In aanmerking nemende, dat l_1 l_2 enz. functiën zijn, die niet van teeken veranderen met de veranderlijken, is het duidelijk in het oogloopend, dat bij symmetrieke lichamen alleen de coëfficienten a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{44}, a'_{55}, a'_{66}, blijven bestaan. De dubbele levendige kracht van het lichaam:

---

[1]) Het bovenste teeken beduidt de integratie over de oppervlakte van het lichaam.

$$2T'' = \iiint (u + ry - qz)^2 + (v + pz - rx^2) + (w + qx - py)^2\, dm$$

zijnde, blijkt, dat ook in deze uitdrukking alleen de vierkanten der snelheden overblijven.

Een bol is symmetriek ten opzichte van elk rechthoekig stelsel, dat tot oorsprong het middelpunt heeft.

Nemen wij in het lichaam een nieuw coördinatenstelsel, dat met het vorige verbonden is door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned}$$

De componenten der snelheden en hoekssnelheden in de richting der nieuw aangenomen assen, noemen wij u', v', w', p', q' en r'.

Dan hebben wij de betrekkingen:

$$\begin{aligned} u + ry - qz &= a\,(u' + r'y' - q'z') + b\,(v' + p'z' - r'x') + c(w' + q'x' - p'y'). \\ v + pz - rx &= a'(u' + r'y' - q'z') + b'(v' + p'z' - r'x') + c'(w' + q'x' - p'y'). \\ w + qx - py &= a''(u' + r'y' - q'z') + b''(v' + p'z' - r'x') + c''(w' + q'x' - p'y'). \end{aligned}$$

Letten wij er nu op, dat:

$$\begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a \\ b''c - bc'' &= a' \end{aligned}$$

dan vinden wij tusschen de snelheden in de richting der oude en der nieuwe assen, de betrekkingen:

$$\begin{aligned} u &= au' + bv' + cw' & p &= ap' + bq' + cr' \\ v &= a'u' + b'v' + c'w' & q &= a'p' + b'q' + c'r' \\ w &= a''u' + b''v' + c''w' & r &= a''p' + b''q' + c''r'. \end{aligned}$$

De levendige kracht van het systeem, ten opzichte van het nieuwe stelsel, kunnen wij voorstellen door:

$$2\,T = b_{11}\,u'^2 + b_{22}\,v'^2 + b_{33}\,w'^2 + b_{44}\,p'^2 + b_{55}\,q'^2 + b_{66}\,r'^2.$$

Deze uitdrukking gelijkstellende met de bovenstaande, daarbij acht gevende op de zooeven gevonden betrekkingen, krijgen wij:

$$ab\,a_{11} + a'b'\,a_{22} + a''b''\,a_{33} = 0$$
$$ac\,a_{11} + a'c'\,a_{22} + a''c''\,a_{33} = 0$$
$$bc\,a_{11} + b'c'\,a_{22} + b''c''\,a_{33} = 0$$

Evenzoo:

$$ab\,a_{44} + a'b'\,a_{55} + a''b''\,a_{66} = 0$$
$$ac\,a_{44} + a'c'\,a_{55} + a''c''\,a_{66} = 0$$
$$bc\,a_{44} + b'c'\,a_{55} + b''c''\,a_{66} = 0$$

Aan deze vergelijkingen kan niet worden voldaan, tenzij:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \text{ en } a_{44} = a_{55} = a_{66}.$$

De uitdrukking voor de levendige kracht neemt dus deze gedaante aan:

$$2T = a_{11}\,(u^2 + v^2 + w^2) + a_{44}\,(p^2 + q^2 + r^2).$$

Wij hebben de betrekkingen, die er tusschen de coëfficienten a_{11} a_{22} enz. bij den bol bestaan, op bovenstaande wijze afgeleid, om aan te toonen, dat men de wijze, waarop het lichaam zich beweegt, kan leeren kennen zonder vooraf de functie φ te hebben bepaald.

Beginnen wij, met aan te nemen, dat er geene uitwendige krachten werken.

De differentiaal-vergelijkingen der beweging zullen nu worden:

$$\frac{du}{dt} = wq - rv \qquad \frac{dp}{dt} = o$$

$$\frac{dv}{dt} = ur - pw \qquad \frac{dq}{dt} = o$$

$$\frac{dw}{dt} = pv - qu \qquad \frac{dr}{dt} = o$$

De hoekssnelheid van het lichaam is alzoo constant. Door eene verschuiving der coördinaat-assen kan men de as van wenteling met één harer doen samenvallen. Wij kunnen b. v. q en r nul stellen. Dan blijven nog te integreeren de vergelijkingen:

$$\frac{du}{dt} = o$$

$$\frac{dv}{dt} = -pw$$

$$\frac{dw}{dt} = p\,v.$$

Uit de eerste volgt, dat u constant is, uit de twee laatsten, dat:

$$v^2 + w^2 = const. = \Lambda^2.$$

De geheele snelheid is dus constant en wij vinden voor de componenten:

$$u = u_0$$

$$v = -v_0 \sin pt + w_0 \cos pt = \Lambda \cos (pt + c)$$

$$w = v_0 \cos pt + w_0 \sin pt = \Lambda \sin (pt + c).$$

De vergelijkingen, die ter bepaling van de richtings-cosinussen dienen, nemen dezelfde gedaante aan als de bewegings-vergelijkingen. Zij geven dus:

$$\alpha_1 = (\alpha_1)_0 \qquad \beta_1 = (\beta_1)_0 \qquad \gamma_1 = (\gamma_1)_0$$
$$\alpha_2 = A' \cos(pt + c) \qquad \beta_2 = B' \cos(pt + c) \qquad \gamma_2 = C' \cos(pt + c)$$
$$\alpha_3 = A' \sin(pt + c) \qquad \beta_3 = B' \sin(pt + c) \qquad \gamma_3 = C' \sin(pt + c).$$

Uit de vergelijkingen (21) volgt nu verder:

$$\frac{d\alpha}{dt} = C'. \frac{d\beta}{dt} = C''. \frac{d\gamma}{dt} = C'''.$$

Het blijkt, dat de invloed van de levendige kracht der vloeistof den aard der beweging van een bol niet verandert. Om die beweging volkomen te leeren kennen, moeten nog de coëfficienten a_{11} en a_{44} bepaald worden. Volgens vergelijkingen (11) en (23) wordt:

$$a'_{11} = \frac{1}{2} m'.$$

$$\text{en} \quad a'_{44} = o$$

wanneer m' de massa voorstelt van een volumen der vloeistof, gelijk aan dat van den bol. Wij verkrijgen dus:

$$a_{11} = m + \frac{1}{2} m'$$

$$a_{44} = M.$$

m stelt de massa van den bol voor, terwijl M het traagheidsmoment om eene middellijn beteekent. De bol beweegt zich dus, alsof hij verbonden was met eene hoeveelheid der vloeistof, die gelijk is aan zijn halve volumen.

Werkt de zwaartekracht op den bol en eveneens op de deeltjes der vloeistof, dan kunnen wij weder zeer gemakkelijk de beweging uit de vergelijkingen (16) en (17) afleiden.

Vooraf moeten wij de drukking berekenen, die het lichaam ten gevolge van de werking der zwaartekracht op de deeltjes der vloeistof ondervindt.

Wij zullen aannemen, dat de zwaartekracht werkt in de richting van de as z_1. Dan blijkt uit de vergelijking (5) dat de drukking in eenig punt der vloeistof uitgeoefend ten gevolge van de werking der zwaartekracht is:

$$P' = g\rho(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z).$$

Deze uitdrukking over de oppervlakte van den bol geïntegreerd zijnde, geeft voor de drukking de grootheid:

$$g\, m'.$$

De vergelijkingen (16) en (17) worden nu:

$$a_{11}\frac{du}{dt} = \gamma_1 g\,(m - m').$$

$$a_{11}\frac{dv}{dt} = -\,a_{11}pw + \gamma_2 g\,(m - m')$$

$$a_{11}\frac{dw}{dt} = \quad a_{11}pv + \gamma_3 g\,(m - m')$$

$$\frac{dp}{dt} = o$$

$$\frac{dq}{dt} = o$$

$$\frac{dr}{dt} = o$$

Wij stellen nu weer q en r nul, en beginnen met de waarden van de hoeken γ_1 γ_2 en γ_3 te zoeken uit de vergelijkingen:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = o. \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = -\gamma_3 p. \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_2 p.$$

De waarden dier hoeken zijn alzoo dezelfden als in het geval, dat de zwaartekracht niet werkt. Deze uitkomsten overbrengende in bovenstaande vergelijkingen; worden zij:

$$a_{11} \frac{du}{dt} = (\gamma_1)_0 \, g(m-m')$$

$$a_{11} \frac{dv}{dt} = -a_{11} \, p \, w + C' g \, (m-m') \cos (pt + c)$$

$$a_{11} \frac{dw}{dt} = a_{11} \, p \, v + C' g \, (m-m') \sin (pt + c).$$

Uit de eerste volgt, dat de snelheid in de richting van de as van wenteling, evenredig is met den tijd. Uit de twee laatsten vinden wij:

$$a_{11} \frac{d^2w}{dt^2} + a_{11} \, p^2 \, w - 2 \, C'g \, (m-m') \, p \cos (pt + c) = o$$

$$a_{11} \frac{d^2v}{dt^2} + a_{11} \, p^2 \, v + 2 \, C'g \, (m-m') \, p \sin (pt + c) = o$$

Door de methode van de variatie der constanten kan men gemakkelijk van deze lineaire differentiaal-vergelijkingen der tweede orde de integralen bepalen. Wij zuldus vinden:

$$a_{11} \, u = \gamma_1 \, gmt + const.$$

$$a_{11} \, v = A \cos (pt + c) + g \, (m-m') \, t \, \gamma_2.$$

$$a_{11} \, w = A \sin (pt + c) + g \, (m-m') \, t \, \gamma_3.$$

Men verkrijgt verder voor de snelheden in de richting van de onbewegelijke assen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\, g\,(m-m')\, t + const.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)\, g\,(m-m')\, t + const.$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)\, g\,(m-m')\, t + const.$$

Hiervoor kan geschreven worden:

$$\frac{d\alpha}{dt} = const.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = const.$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = g\,(m-m') + const.$$

De vloeistof verandert dus ook den aard der beweging van eenen bol niet, wanneer de zwaartekracht of eene andere constante kracht werkt.

In de gevallen, in welke nu de beweging van den bol berekend is, kan de drukking bepaald worden, die het lichaam van de vloeistof ondervindt. Wij maken daartoe gebruik van de vergelijking (5). Werken er geene krachten, dan wordt zij:

$$-\frac{P}{\rho} = \frac{\delta\varphi}{\delta t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right)^2\right] + W$$

Aan de oppervlakte van het lichaam is, volgens (11):

$$\varphi = -\frac{1}{2}(ux + vy + wz) + T.$$

Wij vinden hieruit:

$$P = \frac{1}{2} \rho \left(x \frac{du}{dt} + y \frac{dv}{dt} + z \frac{dw}{dt} \right) - \frac{1}{8} \rho (u^2 + v^2 + w^2) - C.$$

Deze uitdrukking moet over het oppervlak van den bol geïntegreerd worden. De componenten der drukking volgens de assen zullen worden:

$$D_x = \int P \cos (Nx)\, ds.$$
$$D_y = \int P \cos (Ny)\, ds.$$
$$D_z = \int P \cos (Nz)\, ds.$$

De uitdrukking voor P in deze integralen gesubstitueerd zijnde, daarbij opmerkende, dat

$$\int C \cos (Nx)\, ds = o$$

bij een symmetriek lichaam, wanneer C onafhankelijk is van x, vindt men:

$$D_x = \frac{1}{2} m' \frac{du}{dt} = o.$$

$$D_y = \frac{1}{2} m' \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} m' pw.$$

$$D_z = \frac{1}{2} m' \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} m' pv.$$

Hieruit hadden ook de bewegings-vergelijkingen van een bol kunnen worden afgeleid.

---

3. BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGS-LICHAAM.

Wij zullen éene der bewegelijke assen nl. de z-as doen samenvallen met de as van omwenteling; en onderstellen, dat de massa zóó over het lichaam verdeeld is, dat het symmetriek is ten opzichtc van de vlakken xz en yz, welke richting men ook aan die vlakken geeft.

Uit de vergelijkingen (23) vinden wij nu zeer gemakkelijk, dat de levendige kracht van het systeem den vorm aanneemt:

$$2T = a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + a_{33} w^2 + a_{44} p^2 + a_{55} q^2 + a_{66} r^2 + \\ + a_{15} uq + a_{24} vp.$$

Wanneer wij nu de assen der x-, en der y-, vervangen door twee andere rechthoekige assen in hetzelfde vlak, zal volgens het zooeven gezegde de levendige kracht ten opzichte van het nieuwe stelsel denzelfden vorm hebben als ten opzichte van het oude.

Nemen wij aan dat:

$$x = ax' + by'.$$
$$y = a'x' + b'y'.$$

dan volgt daaruit op dezelfde wijze als bij den bol is aangetoond, dat:

$$u + au' + bv'$$
$$v = a'u' + b'v'$$
$$w = w'$$
$$p = ap' + bq'$$
$$q = a'p' + b'q'$$
$$r = r'.$$

De twee uitdrukkingen voor de levendige kracht van het systeem, die wij door deze substitutie verkrijgen, gelijkstellende, zullen wij de betrekkingen vinden:

$$a_{11}\,ab + a_{22}\,a'b' = o$$
$$a_{44}\,ab + a_{55}\,a'b' = o$$
$$(a_{15} + a_{24})\,u'p' = o.$$

Aan deze vergelijkingen kan alleen worden voldaan, indien:

$$a_{11} = a_{22} \qquad a_{44} = a_{55} \qquad en\ a_{15} = -a_{24}.$$

Wij hebben een willekeurig punt op de as van wenteling tot oorsprong der coördinaten gekozen. Wij mogen dat punt dus ook langs die as verplaatsen, zonder dat de gedaante van T eene verandering zal ondergaan.

Zij alzoo:

$$z = z_0 + z'$$

waarin z_0 den afstand van den nieuwen tot den vroegeren oorsprong beteekent, dan wordt daardoor:

$$u = u' + q'z_0$$
$$v = v' - p'z_0.$$

Indien wij nu aannemen, dat

$$z_0 = -\frac{a_{15}}{2a_{11}},$$

dan vinden wij de levendige kracht in den eenvoudigsten vorm:

$$2T = a_{11}\,(u^2 + v^2) + a_{33}\,w^2 + a_{44}\,(p^2 + q^2) + a_{66}\,r^2.$$

Het punt op de as, dat men tot oorsprong van coordinaten moet nemen, om de uitdrukking voor de levendige kracht in dezen eenvoudigen vorm te verkrijgen, werd door Thomson en Tait het middelpunt van reactie genoemd. Het is duidelijk, dat het bij eene homogene omwentelings-ellipsoïde en dergelijke symmetrieke lichamen zal samenvallen met het middelpunt der figuur.

De vergelijkingen voor de beweging van het lichaam, in het geval, dat er geene krachten werken, zullen worden:

$$a_{11}\frac{du}{dt} = a_{33}\,qw - a_{11}\,rv.$$

$$a_{11}\frac{dv}{dt} = a_{11}\,ru - a_{33}\,pw,$$

$$a_{33}\frac{dw}{dt} = a_{11}\,(pv - qu).$$

$$a_{44}\frac{dp}{dt} = (a_{33} - a_{11})\,vw + (a_{66} - a_{44})\,qr.$$

$$a_{44}\frac{dq}{dt} = (a_{11} - a_{33})\,vw + (a_{44} - a_{66})\,pr.$$

$$a_{66}\frac{dr}{dt} = o.$$

De hoekssnelheid van het lichaam om de as van omwenteling wordt eene constante grootheid. Er blijven dus nog vijf vergelijkingen over, waarvan vier integralen bekend zijn. De laatste integraal kan hier dus onmiddelijk uit de bekende worden afgeleid. Dit kan zelfs zeer gemakkelijk geschieden, want uit de vier bekende integralen:

$$a_{11}\,(u^2 + v^2) + a_{33}\,w^2 + a_{44}\,(p^2 + q^2) + a_{66}\,r^2 = C_1$$

$$a^2_{11}\,(u^2 + v^2) + a^2_{33}\,w^2 = C_2$$

$$a_{11}\,a_{44}\,(up + vq) + a_{33}\,a_{66}\,wr = C_3$$

$$a_{66}\,r = C_4$$

leiden wij zonder moeite af, dat:

$$u^2 + v^2 = c_1 - c_1' w^2$$
$$p^2 + q^2 = c_2 - c_2' w^2$$
$$up + vq = c_3 - c_3' w$$

waarin de grootheden c op eene bepaalde wijze van de constanten C afhangen.

Verder heeft men nog:

$$(u^2 + v^2)(p^2 + q^2) - (up + vq)^2 = (pv - qu)^2 =$$
$$= (c_1 - c_1' w^2)(c_2 - c_2' w^2) - (c_3 - c_3' w)^2.$$

Nu kan voor de derde bewegings-vergelijking worden geschreven:

$$a_{33} \frac{dw}{dt} = a_{11} \sqrt{(c_1 - c_1' w^2)(c_2 - c_2' w^2) - (c_3 - c_3' w)^2},$$

En door integratie:

$$t = \frac{a_{33}}{a_{11}} \int_{wo}^{w} \frac{dw}{\sqrt{(c_1 - c_1' w^2)(c_2 - c_2' w^2) - (c_3 - c_3' w)^2}},$$

De component der snelheid in de richting van de omwentelings-as van het lichaam wordt dus door eene elliptische functie van den tijd uitgedrukt. Volgens bovenstaande vergelijkingen zijn nu ook de geheele snelheid van het middelpunt van reactie benevens de geheele hoekssnelheid van het lichaam elliptische functiën van den tijd. De snelheid s en de hoekssnelheid Ω noemende, worden

$$s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{c_1 - c_1'' w^2}.$$
$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{c_2 - c_2'' w^2}.$$

De hier verkregen elliptische integraal is moeilijk tot den normalen vorm te reduceeren.

De verdere oplossing van het vraagstuk, om de richtings-cosinussen en de coördinaten van den oorsprong der coördinaten te bepalen, is zeer moeilijk uitvoerbaar, en zou tot zeer ingewikkelde uitdrukkingen aanleiding geven. Gemakkelijker is het te doen, en leidt tot belangrijke resultaten, wanneer men aanneemt, dat de as van wenteling altijd in hetzelfde vlak zich bewegen moet.

Stellen wij b. v. $v = o$, $p = o$, $r = o$, dan is aan die voorwaarde voldaan, en de vergelijkingen voor de beweging worden nu:

$$a_{11} \frac{du}{dt} = a_{33}\, q\, w.$$

$$a_{33} \frac{dw}{dt} = - a_{11}\, q u.$$

$$a_{55} \frac{dq}{dt} = (a_{11} - a_{33})\, u w.$$

Deze vergelijkingen hebben volkomen denzelfden vorm als de differentiaal-vergelijkingen van Euler voor de beweging van een willekeurig lichaam om een vast punt. Zij kunnen daarom op dezelfde wijze worden geïntegreerd. Die integratie is op verschillende wijzen volbracht [1]). Wij zullen ons alleen met het resultaat bezighouden, en daaruit de overige onbekenden van het

---

[1]) Zie o. a. Jakobi, mathem. Werke. Band II. s. 139—196.

probleem afleiden. Zooals bekend is. kunnen de onbekenden altijd door bestaanbare elliptische functiën van den tijd worden uitgedrukt, en kunnen er vier onderscheidene gevallen plaats hebben. Zij in de eerste plaats:

$$a_{33} > a_{11}$$

$$a_{11}\, a_{55}\, q_o^2 > a_{33}\,(a_{33} - a_{11})\, w_o^2.$$

q_0 en w_0 stellen de waarde der componeneen q en w bij den aanvang der beweging voor. Het resultaat der integratie zal wezen:

$$u = \mathrm{A}\ sin\ am\ kt.$$

$$w = w_o\ cos\ am\ kt.$$

$$q = q_o \triangle\ am\ kt.$$

waarin:

$$\mathrm{A} = \frac{a_{33}}{a_{11}}\, w_o$$

$$k = q_o$$

$$\text{en}\quad \rho = \sqrt{\frac{(a_{33} - a_{11})a_{33}}{a_{11}\, a_{55}}} \times \frac{w_o}{q_o}$$

Om nu hieruit de richtings-cosinussen te bepalen, maken wij weder gebruik van de vergelijkingen (20). Zij worden hier:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_3\, q_0 \triangle\ am\, kt.$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = -\alpha_1\, q_0 \triangle\ am\, kt.$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = o$$

Deze vergelijkingen geven tot uitkomst:

$$\alpha_1 = (\alpha_3)_0 \, sin \, amkt - (\alpha_1)_0 \, cos \, amkt.$$

$$\alpha_3 = (\alpha_3)_0 \, cos \, amkt + (\alpha_1)_0 \, sin \, amkt.$$

$$\alpha_2 = (\alpha_2)_0$$

Daarin beteekenen $(\alpha_1)_0$, $(\alpha_2)_0$, $(\alpha_3)_0$ enz. de richtingscosinussen van de bewegelijke assen met de x_1-as bij den aanvang der beweging. De grootheden β_1 β_2 γ_1 γ_2 enz, moeten uit de overige vergelijkingen (20) op dezelfde wijze worden gevonden.

Wanneer wij verder gebruik maken van de vroeger gevonden vergelijkingen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \beta_2 v + \gamma_3 w$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w.$$

zullen wij voor de componenten der snelheid volgens de vaste coördinaten, de waarden verkrijgen: .

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha_3) \, (\mathrm{A} \; sin^2 \; am \; kt + w_0 \; cos^2 \; am \; kt) -$$
$$- (\alpha_1)_0 \, (\mathrm{A} - w_0) \, sin \; am \; kt \; cos \; am \; kt.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = (\beta_3)_0 \, (\mathrm{A} \; sin^2 \; am \, kt + w_0 \; cos^2 \; am \; kt) -$$
$$- (\beta_1)_0 \, (\mathrm{A} - w_0) \, sin \; am \; kt \; cos \; am \; kt.$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (\gamma_3)_0 \; (\mathrm{A} \; sin^2 \; am \, kt + w_0 \; cos^2 \; am \; kt) -$$
$$- (\gamma_1)_0 \, (\mathrm{A} - w_0) \, sin \; am \; kt \; cos \; am \; kt.$$

Wij mogen nu nog aan de onbewegelijke coördinaatassen een bepaalden stand in de ruimte geven; en wel zullen wij ze evenwijdig aannemen aan de met het lichaam verbonden assen bij den aanvang der beweging. Dan worden bovenstaande uitdrukkingen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(\mathrm{A} - w_0) \sin am\, kt \cos am\, kt.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = o$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathrm{A} \sin^2 am\, kt + w_0 \cos^2 am\, kt.$$

Door integratie dezer formulen leeren wij de verplaatsingen langs de assen kennen:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\mathrm{A} - w_0}{k\rho^2} \triangle\, am\, kt.$$

$$\beta - \beta_0 = o$$

$$\gamma - \gamma_0 = -\frac{\mathrm{A} - w_0}{k\rho^2} \left[\mathrm{E}\,(am\, kt) - kt\right] + w_0\, t.$$

E beteekent weer de elliptische integraal van de tweede soort.

Kon men den tijd uit deze vergelijkingen voor de verplaatsingen van den oorsprong langs de assen elimineeren, dan zou men de kromme kennen langs welke de oorsprong zich beweegt. Bij benadering kan somtijds de eliminatie worden uitgevoerd; daarvan zullen wij later een voorbeeld ontmoeten.

Den hoek, dien de omwentelings-as van het lichaam gedurende de beweging met hare oorspronkelijke richting maakt, zullen wij ψ noemen.

Wij kunnen dien hoek zeer gemakkelijk in den tijd uitdrukken, want:

$$q = \frac{d\psi}{dt}$$

of

$$\psi = \int q\, dt = am\; kt.$$

Uit die waarde merken wij op, dat de as van wenteling zich beweegt evenals een gewone slinger onder de werking der zwaartekracht. Daar de hoek ψ alle mogelijke waarden kan aannemen, hetwelk blijkt uit de eigenschappen van de functie: $am\; kt$, wentelt het lichaam gedurende de beweging geheel en al om de y-as. De omloopstijd wordt uitgedrukt door:

$$T = \frac{4K}{k} = \frac{4K}{q_0},$$

want in den tijd dat kt aangroeit van nul tot de waarde 4K, neemt de hoek ψ toe van nul tot 2π.

In de tweede plaats kunnen wij aannemen, dat:

$$a_{33} > a_{11}$$

en

$$a_{33}\,(a_{33} - a_{11})\, w_0^2 > a_{11}\, a_{55}\, q_0^2.$$

Dan vindt men:

$$u = A\; sin\; am\; kt.$$

$$w = w_0\; \triangle\; am\; kt.$$

$$q = q_0\; cos\; am\; kt.$$

waarin beteekenen:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{a_{33}\, a_{55}}{a_{11}(a_{33}-a_{11})}}\, q_0$$

$$k = \sqrt{\frac{a_{33}(a_{33}-a_{11})}{a_{11}\, a_{55}}}\, w_0$$

$$\rho = \sqrt{\frac{a_{11}\, a_{55}}{a_{33}(a_{33}-a_{11})}}\, \frac{q_0}{w_0}$$

Om de grootheden, die den stand van het lichaam bepalen, te berekenen, zullen wij in dit geval de vergelijkingen moeten oplossen:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_3\, q_0 \cos am\, kt.$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = -\alpha_1\, q_0 \cos am\, kt.$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = o$$

Zij geven tot resultaat:

$$\alpha_1 = \rho\, (\alpha_3)_0 \sin am\, kt - (\alpha_1)_0 \triangle am\, kt.$$
$$\alpha_3 = (\alpha_3)_0 \triangle am\, kt + \rho\, (\alpha_1)_0 \sin am\, kt.$$
$$\alpha_2 = (\alpha_2)\, o.$$

Dergelijke uitdrukkingen vindt men voor β_1, β_2 enz.

Nemen wij weder het vaste coördinaten-stelsel evenwijdig met het bewegelijke bij den aanvang der beweging, dan worden de snelheden langs de assen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\rho\, w_0 - \Lambda) \sin amkt \triangle am\, kt.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = o$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \rho\, (\Lambda - \rho w_0) \sin^2 am\, kt + w_0.$$

De verplaatsingen zijn:

$$\alpha-\alpha_\circ = -\frac{(\rho w_\circ - A)}{k}(\cos am\, kt - 1)$$

$$\beta-\beta_\circ = o$$

$$\gamma-\gamma_\circ = -\frac{A-\rho w_\circ}{k\rho}\Big[E\,(am\, kt) - kt\Big] + w_\circ\, t.$$

Wij moeten nu nog den hoek, dien de as van het lichaam met hare oorspronkelijke richting maakt, in den tijd uitdrukken.

Die hoek weder ψ noemende, is:

$$\frac{d\psi}{dt} = q_\circ \cos am\, kt$$

$$\psi = q_\circ \int_o^t \cos am\, kt\, dt =$$

$$= \frac{q_\circ}{\rho k}\, bg \sin\,(\rho \sin am\, kt).$$

Maar $\rho\, k = q_\circ$.

Dus:

$$\psi = bg\ \sin\ (\rho\ \sin am\, kt).$$

In dit geval volgt, zooals uit deze formule te zien is, de as van wenteling evenals in het voorgaande de beweging van een gewonen slinger onder de werking der zwaartekracht.

De punten der as doorloopen echter nu geen volkomen cirkel. De grootste waarde, die ψ bereiken kan, is:

$$\psi_1 = bg \sin \rho.$$

De slingerduur wordt gegeven door:

$$T = \frac{4K}{k}.$$

Laat ons nu onderstellen, dat de amplituden van de slingeringen, welke de as maakt, voortdurend zeer klein blijven. Men mag dan in plaats van den hoek zelven, den sinus nemen. Dit zal plaats hebben, wanneer ρ eene zeer kleine grootheid is.

Nu wordt:

$$\psi_1 = \rho$$

$$\text{en } \psi = \psi_1 \sin kt.$$

En men vindt voor de snelheden langs de assen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\rho w_0 - A) \sin kt.$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \rho (A - \rho w_0) \sin^2 kt + w_0$$

Dus:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{A - \rho w_0}{k} (\cos kt - 1)$$

$$\gamma - \gamma_0 = \frac{\rho (A - \rho w_0)}{2k} (kt - \sin kt \cos kt) + w_0 t.$$

Uit deze twee vergelijkingen kan de tijd zonder moeite geëlimineerd worden, en daardoor de kromme bepaald, welke het middelpunt van reactie doorloopt gedurende de beweging. De punten dezer kromme zullen beurtelings aan de éene en de andere zijde van de lijn liggen, die bij het begin der beweging met de as van wenteling samenviel. De kromme snijdt deze lijn op gelijke afstanden. In de snijpunten is de snelheid het grootst, het kleinst in die punten der kromme lijn, die den grootsten afstand van de bedoelde lijn hebben.

Nu blijven er nog twee gevallen overig, wanneer namelijk:

$$a_{11} > a_{33}$$
$$\text{en} \quad a_{33}\, a_{55}\, q_0^{\,2} > a_{11}\, (a_{11} - a_{33})\, w_0^{\,2}$$
$$\text{of:} \quad a_{11} > a_{33}$$
$$a_{33}\, a_{55}\, q_0^{\,2} < a_{11}\, (a_{11} - a_{33})\, w_0^{\,2}.$$

Deze gevallen verdienen evenwel geene opzettelijke behandeling. Zij kunnen uit de vorige afgeleid worden, wanneer men in plaats van *am kt* zet: $\frac{\pi}{2}$ — *am kt*. In het tweede geval zal de hoek ψ gedurende de beweging bij zeer kleine slingeringen nagenoeg gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ blijven.

Bij eene homogeen lichaam zal alleen van de gedaante afhangen of wij zullen hebben:

$$a_{11} > a_{33}$$
$$\text{of:} \quad a_{33} > a_{11}.$$

In het geval eener homogene omwentelings-ellipsoïde kunnen wij zeer gemakkelijk uit onze vroegere resultaten afleiden, dat het eerste plaats zal hebben, wanneer de omwentelings-as grooter is dan de beide anderen, het tweede, indien de as van wenteling de kleinste is.

4. BEWEGING VAN EEN LICHAAM OM EEN VAST PUNT.

Het is tot nu toe niet mogen gelukken, om de bewegingsvergelijkingen voor een willekeurig lichaam te integreeren. Wij zullen nu gaan onderzoeken, wat die vergelijkingen worden bij bijzondere onderstellingen aangaande den aard der beweging, en dan de integratie beproeven.

Onze eerste onderstelling is, dat een lichaam zich in een vloeistof om een vast punt beweegt, terwijl noch op de vloeistof, noch op het vaste lichaam krachten werken. Het vaste punt worde aangenomen tot oorsprong van het coördinaten-stelsel $(x\,y\,z)$.

Wij behoeven nu slechts in de uitdrukking, welke wij voor de levendige kracht van het systeem hebben gevonden, de grootheden, die de beweging van den oorsprong bepalen, nul te stellen. Zij zal dus worden:

$$2\,\mathrm{T} = a_{44}p^2 + a_{55}q^2 + a_{66}r^2 + a_{45}pq + a_{46}pr + a_{56}qr.$$

Deze uitdrukking kan in een eenvoudiger gedaante worden gebracht.

Om dit te doen, gaan wij in het lichaam een nieuw coördinaten-stelsel invoeren, dat eveneens het vaste punt tot oorsprong heeft.

Beide stelsels zijn verbonden door de betrekkingen:

$$x = ax' + by' + cz'$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z'$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z'$$

waaruit wij, op dezelfde wijze als vroeger gedaan is, tusschen de hoekssnelheden langs de nieuwe en de oude assen de vergelijkingen vinden:

$$
\begin{aligned}
p &= ap' + bq' + cr' \\
q &= a'p' + b'q' + c'r' \\
r &= a''p' + b''q' + c''r'.
\end{aligned}
$$

Nu kunnen de substitutie-coëfficienten a, b, c enz. zóódanig bepaald worden, dat de levendige kracht den vorm aanneemt:

$$2\,T = b_{44}\,p'^2 + b_{55}\,q'^2 + b_{66}\,r'^2.$$

Dit probleem komt geheel overeen met dat, om de assen van een lichaam van den tweeden graad te bepalen. De coëfficienten b_{44}, b_{55}, b_{66} zullen dus de wortels zijn van de vergelijking van den derden graad, voorgesteld door den determinant:

$$
\begin{vmatrix}
a_{44}-b & \frac{1}{2}\,a_{45} & \frac{1}{2}\,a_{46} \\
\frac{1}{2}\,a_{45} & a_{55}-b & \frac{1}{2}\,a_{56} \\
\frac{1}{2}\,a_{46} & \frac{1}{2}\,a_{56} & a_{66}-b
\end{vmatrix} = o
$$

die zooals bekend is, altijd drie bestaanbare wortels heeft. Ook de substitutie-coëfficienten zullen steeds bestaanbare waarden verkrijgen. De differentiaal-vergelijkingen der beweging kunnen nu uit de vergelijkingen (18) en (19) afgeleid worden. Zij zullen worden:

$$b_{44}\frac{dp'}{dt}=(b_{66}-b_{55})\,q'r'.$$

$$b_{55}\frac{dq'}{dt}=(b_{44}-b_{66})\,p'r'.$$

$$b_{66}\frac{dr'}{dt}=(b_{55}-b_{44})\,p'q'.$$

Deze vergelijkingen hebben denzelfden vorm als de differentiaal-vergelijkingen van Euler voor de bepaling der vrije beweging van het lichaam om een vast punt. Bij de beweging in een vloeistof worden dus de hoekssnelheden ook door elliptische functiën van den tijd uitgedrukt.

Het onderscheid van beide gevallen is daarin gelegen, dat nu bij een willekeurig lichaam de hoekssnelheden p', q' en r' niet gericht zijn volgens de hoofdassen der traagheids-ellipsoïde, en dat de coëfficienten b_{44}, b_{55} en b_{66} niet de momenten van inertie om die assen voorstellen.

Daar wij van de genoemde coëfficienten eenige eigenschappen zullen afleiden, die veel overeenkomst hebben met die der traagheids-momenten, zullen wij ze kortheidshalve den naam gecorrigeerde traagheidsmomenten geven; dit is in overeenstemming met Clebsch, die het verschil dezer coëfficienten en der traagheids-momenten bij een symmetriek lichaam volgens dezelfde richting de correctie's der momenten van inertie noemt. Wanneer het lichaam namelijk symmetriek is, dan bevat de levendige kracht van het systeem alleen de tweede machten van de hoekssnelheden. Beweegt zulk een lichaam zich dus om het middelpunt van symmetrie, dan vallen in de bovenstaande vergelijkingen der beweging de componenten der hoekssnelheid langs de assen van dat punt.

Daar de gecorrigeerde traagheids-momenten eener ellipsoïde in hoofdstuk II bepaald zijn, kan de beweging van zulk een lichaam om zijn middelpunt in eene vloeistof volledig gevonden worden.

Bij een willekeurig lichaam kan men de bewegingsvergelijkingen op de gewone manier integreeren. De gecorrigeerde traagheids-momenten blijven daarbij echter onbepaald.

De componenten der hoekssnelheid kunnen altijd door bestaanbare elliptische functiën van den tijd uitgedrukt worden.

Er kunnen daarbij zes onderscheidene gevallen plaats hebben. Zij, om een voorbeeld te nemen, gegeven, dat:

$$b_{44} > b_{55} > b_{66}$$
$$\text{en } b_{66}(b_{55}-b_{66})\, r_o'^2 > b_{44}(b_{44}-b_{55})\, p_o'^2.$$

dan blijkt uit de twee integralen der bewegings-vergelijkingen:

$$b_{44} p'^2 + b_{55} q'^2 + b_{66} r'^2 = C_1$$
$$b_{44}^2 p'^2 + b_{55}^2 q'^2 + b_{66}^2 r'^2 = C_2^2.$$

uit welke volgt:

$$b_{44}(b_{44}-b_{66})\, p'^2 + b_{55}(b_{55}-b_{66})\, q'^2 = C'.$$
$$b_{55}(b_{44}-b_{55})\, q'^2 + b_{66}(b_{44}-b_{66})\, r'^2 = C''.$$
$$b_{44}(b_{44}-b_{55})\, p'^2 - b_{66}(b_{55}-b_{66})\, r'^2 = C'''$$

dat:

$$p' = p_0' \cos am\, kt.$$
$$q' = \Lambda \sin am\, kt.$$
$$r' = r_0' \triangle am\, kt.$$

in welke elliptische functiën de modulus nu kleiner dan de eenheid en bestaanbaar is.

Geven wij het onbewegelijke coördinaten-stelsel eveneens tot oorsprong het vaste punt, om hetwelk het lichaam zich beweegt. Wij kunnen dan den stand der bewegelijke assen bepalen door middel van de vergelijkingen (20); het kan hier gemakkelijker gebeuren door de Eulersche hoeken te bepalen.

Uit de bewegings-vergelijkingen leidt men af, dat:

$$b_{44}\, \alpha_1\, p' + b_{55}\, \alpha_2\, q' + b_{66}\, \alpha_3\, r' = c'$$
$$b_{44}\, \beta_1\, p' + b_{55}\, \beta_2\, q' + b_{66}\, \beta_3\, r' = c''$$
$$b_{44}\, \gamma_1\, p' + b_{55}\, \gamma_2\, q' + b_{66}\, \gamma_3\, r' = c'''$$

Dat zijn de projecties van de grootheid C (het koppel van impulsie) op de assen. Er is hier dus een onveranderlijk vlak, dat wij doen samenvallen met het vlak x_1 y_1.

De hoeken van Euler voorstellende door Φ, ϑ en ψ vindt men:

$$b_{44}\, p' = C_2 \sin \varphi \sin \vartheta.$$
$$b_{55}\, q' = C_2 \cos \varphi \sin \vartheta.$$
$$b_{66}\, r' = C_2 \cos \vartheta$$

En daaruit:

$$\cos \vartheta = \frac{c_{66}\, r'}{C_2}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c_{44}\, p'}{c_{55} q'}$$

$$d\psi = \frac{C_2 (c_1 - c_{66}\, r'^2).}{C_2^2 - c_1^2\, r'^2}\, dt$$

De vijf overige gevallen worden op volkomen dezelfde wijze behandeld.

Door eenvoudige toepassing der theorie van oppervlakken van den tweeden graad, kunnen wij nog eenige conclusies trekken ten opzichte van de beweging.

Wanneer vooreerst de gecorrigeerde traagheidsmomenten ten opzichte van eenig rechthoekig coördinaten-stelsel voldoen aan de vergelijkingen:

$$\frac{a_{45}\, a_{46} - 2\, a_{44}\, a_{56}}{a_{56}} = \frac{a_{56}\, a_{45} - 2\, a_{55}\, a_{46}}{a_{46}} = \frac{a_{46}\, a_{56} - 2\, a_{66}\, a_{45}}{a_{45}}$$

dan volgt daaruit, dat twee wortels der bovenstaande derde-machts-vergelijking even groot zijn.

Dan wordt b. v.:

$$b_{44} = b_{55}.$$

En de vergelijkingen der beweging geven:

$$p' = c \sin (\mu\, r_0'\, t + c')$$

$$q' = c \cos (\mu\, r_0'\, t + c')$$

waarin $c = \sqrt{p'^2 + q'^2}$

$$\mu = \frac{b_{44} - b_{66}}{b_{44}}$$

De mechanische beteekenis dezer voorwaarde-vergelijking, is, wanneer men nog weet, dat het lichaam symmetriek is en zich beweegt om het middelpunt van symmetrie, dat het een omwentelings-lichaam moet wezen.

Het kan nu gemakkelijk aangetoond worden, dat de gecorrigeerde traagheidsmomenten eenige belangrijke eigenschappen hebben.

Uit de vergelijking van de twee uitdrukkingen, die wij voor de levendige kracht vonden, volgen namelijk de betrekkingen:

$$b_{44}\, a^2 + b_{55}\, b^2 + b_{66}\, c^2 = a_{44}.$$
$$b_{44}\, a'^2 + b_{55}\, b'^2 + b_{66}\, c'^2 = a_{55}$$
$$b_{44}\, a''^2 + b_{55}\, b''^2 + b_{66}\, c''^2 = a_{66}.$$

En ze bij elkander optellende:

$$b_{44} + b_{55} + b_{66} = a_{44} + a_{55} + a_{66}.$$

De som der gecorrigeerde traagheidsmomenten voor drie loodrechte assen, die elkaar in eenig punt van het lichaam snijden, is constant.

Beschrijven wij om het vaste punt eene ellipsoïde, die tot vergelijking heeft:

$$a_{44}\, x^2 + a_{55}\, y^2 + a_{66}\, z^2 + a_{45}\, xy + a_{46}\, xz + a_{56}\, yz = 1$$

dan zullen de assen dier ellipsoïde zijn:

$$\sqrt{\frac{1}{b_{44}}}, \quad \sqrt{\frac{1}{b_{55}}}, \quad \sqrt{\frac{1}{b_{66}}}.$$

en die ellipsoïde geeft ons op dezelfde wijze een aantal eigenschappen der gecorrigeerde traagheidsmomenten als de traagheids-ellipsoïde ons leert ten opzichte van de momenten van inertie.

Zoo zal de som der omgekeerde waarden van de gecorrigeerde traagheidsmomenten, volgens drie geconjugeerde middellijnen van een punt eene constante grootheid wezen.

Zoo zal ook de meetkunstige plaats van alle assen, volgens welke de gecorrigeerde traagheidsmomenten van een punt eene even groote waarde hebben, een kegel van den tweeden graad zijn, welke met de pas beschreven ellipsoïde gemeenschappelijke hoofdassen heeft.

Wij zullen nog eene andere merkwaardige eigenschap der gecorrigeerde traagheidsmomenten bewijzen.

Zij weder:

$$2\,T = a_{11}\,u^2 + a_{22}\,v^2 + a_{33}\,w^2 + a_{44}\,p^2 + a_{12}\,uv + a_{13}\,uw + \text{enz.}$$

de levendige kracht van het systeem, dat eene willekeurige beweging heeft.

Voeren wij nu een nïeuw coördinaten-stelsel in, dat evenwijdig is aan het oorspronkelijke, maar waarvan de oorsprong gegeven is door de waarden A, B en C van x, y en z.

De snelheden en hoekssnelheden in het nieuwe stelsel stellen wij weder voor door u', v', w', p', q' en r'.

Wij vinden dus:

$$u' = u + r\,B - q\,C.$$

$$v' = v + p\,C - r\,A.$$

$$w' = w + q\,A - p\,B.$$

$$p' = p.$$

$$q' = q.$$

$$r' = r.$$

De levendige kracht, uitgedrukt in de nieuw ingevoerde veranderlijken wordt:

$$2\,\mathrm{T} = a_{11}\,u'^2 + a_{22}\,v'^2 + a_{33}\,w'^2 + (a_{44} + a_{33}\,\mathrm{B}^2 + a_{22}\,\mathrm{C}^2 - a_{23}\,\mathrm{BC}$$
$$+ a_{24}\,\mathrm{C} - a_{34}\,\mathrm{B})\,p'^2 + \text{enz.}$$

Is nu echter het lichaam symmetriek ten opzichte van het stelsel $(x\ y\ z)$, dan wordt de zaak veel eenvoudiger; dan zullen wij krijgen:

$$2\,\mathrm{T} = a_{11}\,u'^2 + a_{22}\,v'^2 + a_{33}\,w'^2 + (a_{44} + a_{33}\,\mathrm{B}^2 + a_{22}\,\mathrm{C}^2)\,p'^2 +$$
$$+ (a_{55} + a_{33}\,\mathrm{A}^2 + a_{11}\,\mathrm{C}^2) + (a_{66} + a_{22}\,\mathrm{A}^2 + a_{11}\,\mathrm{B}^2)\,v'^2 + \text{enz.}$$

Indien het lichaam homogeen is, zal de oorsprong van het stelsel $(x\ y\ z)$ het middelpunt van massa zijn. Aangezien de coëfficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} uit den aard der zaak positief zijn, volgt uit bovenstaande formule, dat bij een homogeen lichaam, hetwelk symmetriek is ten opzichte van een rechthoekig stelsel, de gecorrigeerde traagheidsmomenten voor lijnen, die door het zwaartepunt gaan, kleiner zijn, dan voor elke andere lijn.

Bij een bol bestaat de betrekking:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Noemt men dus het gecorrigeerde traagheidsmoment ten opzichte eener as, die door het middelpunt van den bol getrokken is, H, en ten opzichte eener lijn, die er op eene afstand d evenwijdig mede loopt: H′, dan volgt uit het voorgaande de vergelijking:

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} + a_{11}\,d^2,$$

eene eigenschap, die groote overeenkomst heeft met eene andere, welke voor de momenten van inertie van een willekeurig lichaam geldt.

Het is bekend, dat wanneer de centrale ellipsoïde van een lichaam twee gelijke assen heeft, op de ongelijke as twee punten kunnen worden aangegeven, vóór welke alle traagheidsmomenten dezelfde waarde hebben.

Die voorwaarde is bij een lichaam in een vloeistof in het algemeen door eene andere te vervangen.

Zij het lichaam weder symmetriek, dan hebben wij te voldoen aan de volgende vergelijkingen, om de punten te bepalen, voor welke alle gecorrigeerde traagheidsmomenten even groot zijn:

$$a_{44} + a_{22}\,C^2 = a_{55} + a_{11}\,C^2 = a_{66}.$$

De punten worden dus op de z-as gegeven door de waarden:

$$C = \pm\sqrt{\frac{a_{66}-a_{55}}{a_{11}}}$$

indien voldaan is aan de voorwaarde-vergelijking:

$$a_{11}(a_{44}-a_{66}) + a_{22}(a_{66}-a_{55}) = o.$$

En dergelijke voorwaarden vindt men, zoo de punten op eene der beide andere assen zullen gelegen zijn. Heeft men:

$$a_{44} = a_{55}.$$

dan volgt uit de voorwaarde-vergelijking, dat ook:

$$a_{11} = a_{22}.$$

Op de as van een omwentelings-lichaam zijn dus twee punten gelegen, voor welke alle gecorrigeerde traagheidsmomenten even groot zijn.

---

5. BEWEGING VAN EEN LICHAAM OM EENE HORIZONTALE AS, ONDER DE WERKING DER ZWAARTEKRACHT.

De tweede onderstelling, die wij aangaande den aard der beweging aannemen, is, dat een willekeurig lichaam zich om eene horizontale as beweegt, terwijl, zoowel op de vloeistofdeeltjes als op het lichaam de zwaartekracht werkt. Wij moeten daarbij gebruik maken van de formulen, welke wij vroeger gevonden hebben

Wij hebben toen bewezen, dat indien wij de as der x_1 laten samenvallen met de vaste as; indien wij weder in het lichaam een nieuw coördinaten-stelsel invoeren, zoodanig, dat de as x' evenwijdig is aan de lijn, om welke het lichaam wentelt, en y' samenvalt met de loodlijn uit den oorsprong van het stelsel $(x\ y\ z)$ op de as neergelaten; dat wanneer eindelijk R dien afstand voorstelt, wij zullen hebben:

$$u = bR\frac{d\vartheta}{dt} \qquad p = a\frac{d\vartheta}{dt}.$$

$$v = b'R\frac{d\vartheta}{dt} \qquad q = a'\frac{d\vartheta}{dt}.$$

$$w = b''R\frac{d\vartheta}{dt} \qquad r = a''\frac{d\vartheta}{dt}.$$

De vergelijkingen der beweging worden in dit geval:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta u} = q\frac{\delta T}{\delta w} - r\frac{\delta T}{\delta v} + \gamma_1 g (m - m')$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta v} = r\frac{\delta T}{\delta u} - p\frac{\delta T}{\delta w} + \gamma_2 g (m - m')$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta w} = p\frac{\delta T}{\delta v} - q\frac{\delta T}{\delta u} + \gamma_3 g (m - m')$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta p} = v\frac{\delta T}{\delta w} - w\frac{\delta T}{\delta v} + q\frac{\delta T}{\delta r} - r\frac{\delta T}{\delta q}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta p} = w\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta w} + r\frac{\delta T}{\delta p} - p\frac{\delta T}{\delta r}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta r} = u\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta u} + p\frac{\delta T}{\delta q} - q\frac{\delta T}{\delta p}.$$

wanneer de zwaartekracht werkt volgens de as z_1, en tot oorsprong van het bewegelijke coördinaten-stelsel het middelpunt van massa van het lichaam is gekozen.

Bovenstaande waarden van de veranderlijken in deze vergelijkingen gesubstitueerd zijnde, zullen deze den volgenden vorm verkrijgen:

$$A_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (a' A_3 - a'' A_2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (c \cos\vartheta - b \sin\vartheta)\, g\, (m - m')$$

$$A_2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (a'' A_1 - a A_3)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (c' \cos\vartheta - b' \sin\vartheta)\, g\, (m - m')$$

$$A_3 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (a A_2 - a' A_1)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (c'' \cos\vartheta - b'' \sin\vartheta)\, g\, (m - m')$$

$$A_4 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \left[R (b' A_3 - b'' A_2) + a' A_6 - a'' A_5\right]\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

$$A_5 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \left[R (b'' A_1 - b A_3) + a'' A_4 - a A_6\right]\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

$$A_6 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \left[R\,(b\,A_2 - b'\,A_1) + a\,A_5 - a'\,A_4\right]\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_2$$

Hierin stellen de grootheden A de uitdrukkingen: $\frac{\delta T}{\delta u}$, $\frac{\delta T}{\delta v}$, $\frac{\delta T}{\delta w}$ enz. voor, wanneer men daarin, in plaats van de veranderlijken u, v, w enz. geschreven heeft:

$$bR,\ b'R,\ b''R,\ a,\ a',\ a''.$$

Telt men nu de drie eerste vergelijkingen bij elkander op, na ze achtereenvolgens met A_1, A_2 en A_3 vermenigvuldigd te hebben, dan zal men verkrijgen:

$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\left(\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) + \Big[(bA_1 + b'A_2 + b''A_3)\,sin\,\vartheta -$$

$$-\,(c\,A_1 + c'A_2 + c''A_3)\,cos\,\vartheta\Big]\,g\,(m - m') = o$$

Telt men ook de drie laatste vergelijkingen op, na ze successievelijk met a, a' en a'' vermenigvuldigd te hebben, dan verkrijgt men de vergelijking:

$$(A_4a + A_5a' + A_6a'')\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - R(A_1c + A_2c' + A_3c''\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = o.$$

De eerste dezer uitkomsten stelt de beweging van het zwaartepunt om de vaste as voor; de tweede de beweging van het lichaam om de assen, die door het zwaartepunt gaan.

Wanneer wij dus eerstgenoemde vergelijking met R vermenigvuldigen, en er de tweede bij optellen, dan zal de geheele beweging van het lichaam door de volgende vergelijking uitgedrukt worden:

$$\left\{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\,R + (A_4\,a + A_5\,a' + A_6\,a'')\right\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} -$$

$$- R\,(A_1c + A_2c' + A_3c'')\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + R\left\{(b\,A_1 + b'A_2 + b''A_3)\,sin\,\vartheta -\right.$$

$$\left.- (c\,A_1 + c'\,A_2 + c''\,A_3)\,cos\,\vartheta\right\}g\,(m - m') = o.$$

Deze vergelijking kan gemakkelijk geïntegreerd worden. Zij is lineair en van de eerste orde ten opzichte van $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Schrijft men haar dus kortheidshalve in den vorm:

$$2\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + B\,sin\,\vartheta - C\,cos\,\vartheta = o$$

dan vindt men op de gewone manier, door substitutie van twee nieuwe veranderlijken;

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+A^2}\left\{(AB+C)\,sin\,\vartheta + (B-AC)\,cos\,\vartheta + c_1 e^{A\,\vartheta}\right\}$$

waarin c_1 eene willekeurige constante beteekent.

Deze constante kan bepaald worden, wanneer wij aannemen, dat voor $\vartheta = \vartheta_1$ de snelheid nul wordt.

Wij vinden nu:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+A^2}\left\{\left[(AB + C)\,sin\,\vartheta + (B-AC)\,cos\,\vartheta\right] -\right.$$

$$\left.-\left[(AB + C)\,sin\,\vartheta_1 + (B-AC)\,cos\,\vartheta_1\right]e^{-A\,(\vartheta_1 - \vartheta)}\right\}$$

De integraal dezer vergelijking kan alleen bij benadering worden gevonden, wanneer ondersteld wordt, dat de amplituden zeer klein zijn. Worden nu de uitdrukkingen *sin* ϑ, *cos* ϑ en $e^{A\vartheta}$ in reeksen ontwikkeld, dan kan men zonder groote onnauwkeurigheden te begaan, die termen verwaarloozen, waarin ϑ tot eene hoogere dan de vierde macht voorkomt. Men zal in die onderstelling den hoek ϑ als eene elliptische functie van den tijd kunnen bepalen.

Indien aangenomen wordt, dat het lichaam symmetriek is ten opzichte van het coördinaten-stelsel $(x\ y\ z)$ dan worden:

$$A_1 = a_{11}\, b\, R. \qquad A_4 = a_{44}\, a$$
$$A_2 = a_{22}\, b' R. \qquad A_5 = a_{55}\, a'$$
$$A_3 = a_{33}\, b'' R. \qquad A_6 = a_{66}\, a''.$$

De vergelijkingen voor de bepaling der beweging zullen dan veranderen in de volgenden:

$$(a_{11}^2 b^2 + a_{22}^2 b'^2 + a_{33}^2 b''^2)\, R \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \Big[(a_{11} b^2 + a_{22} b'^2 + a_{33} b''^2) \sin\vartheta -$$
$$- (a_{11} bc + a_{22} b'c' + a_{33} b'' c'') \cos\vartheta\Big]\, g\, (m - m') = o.$$

en: $$(a_{44}a^2 + a_{55}a'^2 + a_{66}a''^2) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - R^2 (a_{11} bc + a_{22} b'c' + a_{33} b''c'') \times$$
$$\times \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = o$$

Die vergelijkingen kunnen weder, even als bij een willekeurig lichaam is geschied, tot eene enkele vereenigd worden, die de beweging van het systeem bepaalt. Zij wordt:

$$\Big\{(a^2_{11} b^2 + a^2_{22} b'^2 + a^2_{33} b''^2)\, R^2 + (a_{44}a^2 + a_{55}a'^2 + a_{66}a''^2)\Big\} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} -$$
$$- R^2 (a_{11}bc + a_{22}b'c' + a_{33}b''c'') \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + R\Big[(a_{11}b^2 + a_{22}b'^2 + a_{33}b''^2) \sin\vartheta$$
$$- (a_{11}bc + a_{22}b'c' + a_{33}b''c'') \cos\vartheta\Big]\, g\, (m - m') = o$$

Deze vergelijking wordt in de behandeling volstrekt niet eenvoudiger dan die, welke wij voor een willekeurig lichaam hebben gevonden.

Wanneer echter het lichaam symmetriek is ten opzichte van het nieuw aangenomen coördinaten-stelsel (x' y' z'), dan verkrijgt de bewegings-vergelijking de gedaante:

$$(a_{22}\,\mathrm{R}^2 + a_{44})\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \mathrm{R}\,\sin\vartheta\;g\,(m - m') = o$$

Deze vergelijking is volkomen analoog aan die, welke de gewone slingerbeweging bepaalt. Alleen hebben de massa en het traagheidsmoment eene correctie ondergaan.

De beweging van een bol in een vloeistof om eene horizontale as, onder de werking der zwaartekracht, zal dus, volgens hetgeen wij gevonden hebben aangaande de coëfficienten der levendige kracht bij zulk een lichaam, worden voorgesteld door de vergelijking:

$$\left[(m + \tfrac{1}{2}\,m')\,\mathrm{R}^2 + \mathrm{M}\right]\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \mathrm{R}\,\sin\vartheta\;g\,(m - m') = o.$$

Zij komt wat den vorm betreft geheel overeen met de formule van Bessel. Wij hadden haar onmiddelijk kunnen afleiden uit hetgeen gevonden is, omtrent de algemeene beweging van den bol onder de werking der zwaartekracht.

De coëfficient k in de formule van Bessel, die hij experimenteel bepaald heeft, vinden wij gelijk aan 0,5, hetgeen overeenkomt met het resultaat von Poisson. Dit was te verwachten, omdat de uitkomst, die wij verkregen hebben, afgeleid is uit eene algemeene theorie, waarin de wrijving der vloeistofdeeltjes verwaarloosd is.

Zooals in de inleiding reeds gezegd is, kan men door eene speciale onderzoeking van de slingerbeweging van een bolvormig lichaam in eene vloeistof, den coëfficient k zoodanig bepalen, dat hij dezelfde waarde verkrijgt, als Bessel door proeven vond.

STELLINGEN.

I.

De proeven van Schellbach weerspreken de meening niet, dat men den weerstand, dien een slinger bij zeer kleine schommelingen in de lucht ondervindt, evenredig mag aannemen met de snelheid.

II.

Ten onrechte beweert Meijer, dat in de verhandeling van Clebsch over de beweging van eene ellipsoïde in een vloeistof, in het Journal von Crelle, Band 52, op pag. 119, de formule (21) onnauwkeurig is.

III.

Het „beginsel der virtuëele snelheden" draagt dien naam ten onrechte.

IV.

Beter is het, om de vergelijking der kromtelijnen direct af te leiden uit de bepaling, door Monge van die lijnen gegeven, dan den weg te volgen, dien Dupin heeft ingeslagen in zijne „Développemens de géometrie" Mém. II.

V.

De toepassing van de theorie der integreerende vergelijking is te beschouwen als eene eerste poging, om de oplossing der differentiaal-vergelijkingen langs een meer wetenschappelijken weg te vinden, dan nu in het algemeen het geval is.

VI.

De afleiding der waarde van $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$, zooals die voorkomt in Serret, Cours de calcul différential et intégral, pag. 125, is onjuist.

VII.

Fluorescentie en Phosphorescentie zijn slechts onderscheiden door den duur van het verschijnsel.

VIII.

Er bestaan geene genoegzame gronden, om aan te nemen, dat het Noorderlicht hetzelfde verschijnsel is, als het electrisch licht in Geiszlersche buizen.

IX.

De ijs-calorimeter van Bunsen heeft weinig praktische waarde.

X.

Het ontstaan van een ligament bij den overgang van Venus over de Zon, is geen irradiatie-verschijnsel.

XI.

Het bestaan van spectra van verschillende orden eener zelfde stof, is niet bewezen.

XII.

De theorie van Respighi omtrent het flikkeren der sterren verdient de voorkeur boven die van Arago.

XIII.

De berekening der temperatuur van de Zon door Zöllner, hoewel aan bedenkingen onderhevig, geeft juistere resultaten, dan die van Secchi.

XIV.

De dimorphie van koolzure kalk wordt niet voldoende verklaard, door het verschil in temperatuur der oplossing, waaruit zich de kristallen afzetten.

XV.

De sponsen moeten tot de coelenteraten gerekend worden.

XVI.

In de leerboeken der differentiaal- en integraal-rekening mag de meetkundige beschouwing alleen dienen tot opheldering van resultaten, die langs analytischen weg verkregen zijn.