P. MOLENBROEK.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE

DER

VLOEISTOFSTRALEN.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE

DER

VLOEISTOFSTRALEN.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE

DER

VLOEISTOFSTRALEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. S. S. ROSENSTEIN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op MAANDAG 12 December, des namiddags te 3 uren,

DOOR

PIETER MOLENBROEK,

GEBOREN TE ROTTERDAM.

LEIDEN. — E. J. BRILL.

1887.

AAN MIJNE OUDERS.

Aan het einde van mijne academische studiën gekomen, is het mij eene aangename plicht een woord van dank te richten tot U, Hoogleeraren in de faculteit der wis- en natuurkunde, wier hulp en steun ik in zoo menig opzicht mocht ondervinden.

Vooral echter aan U, Hooggeleerde van Geer, Hooggeachte Promotor, gevoel ik mij verplicht; niet alleen bij de samenstelling van dit proefschrift, doch in zoovele andere omstandigheden stondt Gij mij met kennis en vriendschap, met raad en daad bij.

Een afzonderlijk woord van dank aan U, Hooggeleerde Lorentz, wiens voorlichting ik meermalen bij bijzondere gelegenheden mocht ontvangen, vinde hier zijne plaats.

INLEIDING.

De theorie der vloeistofstralen is het eerst tot een voorwerp van onderzoek gemaakt door Helmholtz (Berl. Monatsber. 1868) en later meer uitvoerig volgens dezelfde methode door Kirchhoff (Vorl. über math. Physik) behandeld; beide geleerden hebben de theorie der functiën van complexe veranderlijken toegepast, en wel in zoodanigen vorm, dat het slechts mogelijk was, zulke gevallen van stationaire beweging eener onsamendrukbare vloeistof te behandelen, bij welke die beweging door slechts twee gewone rechthoekige coördinaten kan worden uitgedrukt.

In Bd. XXI van Wiedemann's Annalen heeft M. Planck daarop eene methode gegeven ter behandeling van deze vraagstukken, welke, wel is waar, wat haar beginsel betreft, eene uitbreiding zou toelaten ter oplossing van het algemeene geval, waarbij ook een derde coördinaat in aanmerking komt, echter reeds bij de eerste schrede tot die uitbreiding tot nog toe niet overwonnene zwarigheden aanbiedt.

Het scheen mij daarom wenschelijk het meer eenvoudige geval opnieuw te behandelen volgens eene gewijzigde methode in de hoop, dat deze zich tot het algemeene vraagstuk zou laten uitbreiden. Welk een eenvoudigen vorm het vraagstuk echter hierdoor verkregen moge hebben bij bewegingen door slechts twee coördinaten uitgedrukt, zoo is het mij toch niet mogen gelukken een dergelijken voor het tot nog toe onoplosbare vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte te vinden, alhoewel de transformaties, bij het eerste geval uitgevoerd, zich ook bij het tweede bijna geheel laten toepassen.

Het eerste hoofdstuk van dit proefschrift is daarom gewijd aan vloeistofstralen in het platte vlak; in het tweede is eene poging tot beschrijving van vloeistofstralen in de ruimte gedaan, al moge deze dan ook niet tot bevredigende uitkomsten geleid hebben. Wij zullen nu allereerst het gestelde vraagstuk in wiskundigen vorm uitdrukken.

Wij gebruiken de bewegingsvergelijkingen voor vloeistoffen in den door Euler gegeven vorm:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I}\,a)$$

waarin $u\,v\,w$ de componenten der snelheid, X Y Z die der uitwendige kracht per massa-eenheid werkzaam, μ de dichtheid der vloeistof en p den druk, alle in het punt $x\,y\,z$ genomen, voorstellen. Wij nemen aan, dat de uitwendige krachten eene krachtfunctie hebben, welke wij door V voorstellen, zoodat:

$$X=\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial V}{\partial z}$$

en dat de snelheidscomponenten de partieele afgeleiden naar $x\,y\,z$ van éene functie Φ zijn, welke functie, de snelheidspotentiaal, ondersteld wordt, evenals V niet explicite t te bevatten, zoodat wij met eene stationaire, wervellooze beweging eener niet aan wrijving onderworpen vloeistof te maken hebben. Dan is:

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

en dus kan de eerste vergelijking van (I a) ook geschreven worden, daar:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

ondersteld geworden is,

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial \frac{p}{\mu}}{\partial x}=\frac{\partial\left(V-\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x},$$

als men namelijk de vloeistof als homogeen en onsamendrukbaar, dus μ als eene constante beschouwt. Stelt men kortheidshalve de snelheid in het punt $x\,y\,z$ door q voor, dan kan men de drie vergelijkingen (I a) bij onze onderstellingen in den vorm brengen:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}q^2}{\partial x}=\frac{\partial\left(V-\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x},\quad \frac{\partial \frac{1}{2}q^2}{\partial y}=\frac{\partial\left(V-\frac{p}{\mu}\right)}{\partial y},\quad \frac{\partial \frac{1}{2}q^2}{\partial z}=\frac{\partial\left(V-\frac{p}{\mu}\right)}{\partial z}$$

en hieruit volgt door integratie, daar de beweging stationair ondersteld is:

$$\tfrac{1}{2}\, q^2 = \mathrm{V} - \frac{p}{\mu} + \text{const.}$$

Onderstellen wij ten slotte nog, dat er geene uitwendige krachten werkzaam zijn, zoodat V eene constante is en stelt men V + const. door A voor, dan wordt:

$$\tfrac{1}{2}\, q^2 = \mathrm{A} - \frac{p}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}\, b)$$

Deze is de grondvergelijking voor de theorie der vloeistofstralen.

In het volgende definieeren wij nu een vloeistofstraal als een geval van stationaire beweging van eene niet aan wrijving onderhevige onsamendrukbare vloeistof, bij welk geval de bewegende vloeistof ten deele door een vasten wand, ten deele door rustende vloeistof begrensd wordt. Dan moet overal aan dien vasten wand:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}\, c)$$

als n de richting aangeeft van de normaal, die tot het begrenzend oppervlak van de vloeistof wordt getrokken. Voor de overige vloeistofbegrenzing moet de vergelijking (I c) evenzeer gelden, daar dat begrenzende oppervlak door stroomlijnen gevormd wordt, maar bovendien moet daar nog eene andere voorwaarde vervuld worden. In het grensoppervlak der rustende vloeistof toch moet, als men op deze de vergelijking (I b) toepast, p overal constant zijn; volgens de elasticiteitstheorie moet dan echter evenzeer in het grensoppervlak der bewegende vloeistof p overal constant zijn, daar toch volgens die theorie de drukcomponenten tot elk element van het grensoppervlak doorloopend zijn moeten. Dus moet dan ook in het deel der vloeistofbegrenzing, dat niet door den vasten wand gevormd wordt, de snelheid q volgens (I b) eene constante waarde bezitten.

Eindelijk moet overal in de door vloeistof ingenomene ruimte aan de continuiteitsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

voldaan worden, welke hier den vorm aanneemt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

of

$$\Delta^2 \Phi = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I}\, d)$$

In het kort kan dus het te behandelen vraagstuk aldus worden uitgesproken:

Eene functie Φ *van* $x\, y\, z$ *te bepalen, die voldoet aan de partieele differentiaalvergelijking* $\Delta^2 \Phi = 0$ *en zoodanig is, dat voor alle punten van het oppervlak met de vergelijking:*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} = \text{const.} = \varkappa,$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ *wordt. Elk ander oppervlak, waar* $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ *zijn mocht, zonder dat daar:*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} = \varkappa,$$

kan dan geheel of gedeeltelijk als begrenzende vaste wand gedacht worden.

De zwarigheden der oplossing van het vraagstuk berusten in hoofdzaak op de vervulling der grensvoorwaarden; wij zullen dus voornamelijk trachten aan deze door geschikte transformaties een meer eenvoudigen vorm te geven.

EERSTE HOOFDSTUK.

Vloeistofstralen bij bewegingen uitgedrukt door slechts twee coördinaten.

Bij al het volgende zullen wij kortheidshalve voortdurend gebruik maken van de notatie:

$$\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{enz.}, \ \Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \ \Phi_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

en geheel algemeen

$$p_{abc\ldots} = \frac{\partial^n p}{\partial a \partial b \partial c \ldots}.$$

Voor dit meer eenvoudige geval luidt het gestelde vraagstuk als volgt:

Eene functie Φ van x en y te bepalen, die voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II } a)$$

en voor alle punten van het oppervlak:

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} = \varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II } b)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ *de waarde nul doet aannemen. Elk oppervlak, waar verder* $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ *zijn mocht, zonder dat daar* $\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} = \varkappa$, *kan dan geheel of gedeeltelijk als begrenzende vaste wand gelden.*

Tot vereenvoudiging der grensvoorwaarde voeren wij de substitutie uit:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_x &= \varkappa\, e^{\lambda} \cos \mu \\ \Phi_y &= \varkappa\, e^{\lambda} \sin \mu\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } c\text{)}$$

waaruit volgt: $\lambda = \text{Nep.} \log \frac{q}{\varkappa}$,

terwijl μ de hoek is, dien de richting der snelheid q in het punt $x\,y$ vormt met de X-as. Deze substitutie leidt tot:

$$\Phi_{xy} = \varkappa\, e^{\lambda} (\lambda_y \cos \mu - \mu_y \sin \mu) = \varkappa\, e^{\lambda} (\lambda_x \sin \mu + \mu_x \cos \mu),$$

dus
$$\lambda_y \cos \mu - \mu_y \sin \mu = \lambda_x \sin \mu + \mu_x \cos \mu$$

en
$$\Phi_{xx} = \varkappa\, e^{\lambda} (\lambda_x \cos \mu - \mu_x \sin \mu),$$

$$\Phi_{yy} = \varkappa\, e^{\lambda} (\lambda_y \sin \mu + \mu_y \cos \mu);$$

alzoo volgens (II a)

$$\lambda_x \cos \mu - \mu_x \sin \mu + \lambda_y \sin \mu + \mu_y \cos \mu = 0.$$

Uit de twee laatstgevondene vergelijkingen besluit men dan tot:

$$\lambda_x = -\mu_y \quad \text{en} \quad \lambda_y = \mu_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } d\text{)}$$

Voor alle punten van het oppervlak:

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} = q = \varkappa \quad \text{of} \quad \lambda = 0$$

moet $\Phi_n = 0$; nu zijn echter de richtingscosinussen der normaal tot dat oppervlak evenredig met λ_x en λ_y en die der snelheid zijn $\cos \mu$ en $\sin \mu$, alzoo moet voor $\lambda = 0$

$$\lambda_x \cos \mu + \lambda_y \sin \mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } e\text{)}$$

Kan verder eene functie $\psi\,(x\,y)$ gevonden worden, welke voldoet aan de betrekking:

$$\psi_x \cos \mu + \psi_y \sin \mu = 0,$$

zonder dat daarbij λ de waarde nul behoeft aan te nemen, dan kan men een oppervlak met de vergelijking $\psi\,(x\,y) = \text{const.}$

geheel of gedeeltelijk als vasten, de vloeistof begrenzenden wand beschouwen. De functie ψ behoeft verder aan geene voorwaarde te voldoen.

Wij doen nu $\lambda\,\mu$ en $x\,y$ hunne rollen verwisselen door namelijk x en y als afhankelijk en $\lambda\,\mu$ als onafhankelijk veranderlijken in te voeren. Daartoe overwegen wij dat:

$$d\lambda = \lambda_x\,dx + \lambda_y\,dy,$$
$$d\mu = \mu_x\,dx + \mu_y\,dy;$$

dus $\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y \\ \mu_x & \mu_y \end{vmatrix} = \triangle$ stellende:

$$\triangle\,dx = \mu_y\,d\lambda - \lambda_y\,d\mu,$$
$$\triangle\,dy = -\mu_x\,d\lambda + \lambda_x\,d\mu.$$

Ook is:
$$dx = x_\lambda\,d\lambda + x_\mu\,d\mu,$$
$$dy = y_\lambda\,d\lambda + y_\mu\,d\mu;$$

zoodat uit de vier laatste vergelijkingen kan besloten worden:

$$\triangle\,x_\lambda = \mu_y,\ \triangle\,x_\mu = -\lambda_y,\ \triangle\,y_\lambda = -\mu_x \text{ en } \triangle\,y_\mu = \lambda_x. \quad (\text{II } e^*)$$

Bij invoering van deze waarden in (II d) en (II e) moet dus:

$$x_\lambda = -y_\mu \text{ en } y_\lambda = x_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II} f)$$

worden, terwijl voor $\lambda = o$ aan de vergelijking:

$$y_\mu \cos\mu - x_\mu \sin\mu = 0$$

moet voldaan worden. Door eliminatie van y komt men dus tot:

$$x_{\lambda\lambda} + x_{\mu\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II} g)$$

en voor $\lambda = 0$ moet:

$$x_\mu \sin\mu + x_\lambda \cos\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II } h)$$

Het geheele vraagstuk komt daardoor neer op de bepaling van eene functie x van λ en μ, die aan deze beide voorwaarden voldoet. Deze kunnen echter nog meer vereenvoudigd worden. Stel daartoe:

$$\left.\begin{array}{l} x_\mu = u \cos \mu + v\, \Phi(\lambda\, \mu) \\ x_\lambda = -u \sin \mu + v\, \psi(\lambda\, \mu) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } i\text{)}$$

waarin Φ en ψ voorloopig twee geheel willekeurige functiën van λ en μ zijn, die wij aanstonds nader bepalen zullen. u en v worden ondersteld eveneens functiën van λ en μ te zijn. Dan moet:

$$x_{\lambda\mu} = u_\lambda \cos \mu + v_\lambda \Phi + v \Phi_\lambda = -u_\mu \sin \mu - u \cos \mu + v_\mu \psi + v \psi_\mu,$$

wanneer men kortheidshalve Φ en ψ in plaats van $\Phi(\lambda\, \mu)$ en $\psi(\lambda\, \mu)$ schrijft. Opdat aan (II g) voldaan worde, moet verder:

$$-u_\lambda \sin \mu + v \psi_\lambda + v_\lambda \psi - u \sin \mu + u_\mu \cos \mu + v \Phi_\mu + v_\mu \Phi = 0\,;$$

en om aan (II h) te voldoen, moet voor $\lambda = 0$

$$v\,(\Phi \sin \mu + \psi \cos \mu) = 0$$

worden, dus ook $v = 0$, tenzij dat $\Phi \sin \mu + \psi \cos \mu = 0$ ware.

Uit de laatste vergelijkingen volgt nu gemakkelijk door oplossing:

$$u_\lambda + u = v\,[\psi_\mu \cos \mu + \Phi_\mu \sin \mu + (\psi_\lambda \sin \mu - \Phi_\lambda \cos \mu)] + \\ + v_\mu (\psi \cos \mu + \Phi \sin \mu) + v_\lambda (\psi \sin \mu - \Phi \cos \mu)$$

en $$u_\mu = v\,[\psi_\mu \sin \mu - \Phi_\mu \cos \mu - (\psi_\lambda \cos \mu + \Phi_\lambda \sin \mu)] + \\ + v_\mu (\psi \sin \mu - \Phi \cos \mu) - v_\lambda (\psi \cos \mu + \Phi \sin \mu)$$

Stellen wij verder:

$$\psi \cos \mu + \Phi \sin \mu = g \text{ en } \psi \sin \mu - \Phi \cos \mu = h \qquad \text{(II } k\text{)}$$

zoodat:

$$\psi_\lambda \cos \mu + \Phi_\lambda \sin \mu = g_\lambda, \quad \psi_\lambda \sin \mu - \Phi_\lambda \cos \mu = h_\lambda,$$

$$\psi_\mu \cos \mu + \Phi_\mu \sin \mu = g_\mu + h \text{ en } \psi_\mu \sin \mu - \Phi_\mu \cos \mu = h_\mu - g$$

wordt, dan kunnen de twee laatstgevondene vergelijkingen worden vereenvoudigd tot:

$$\left.\begin{array}{ll} & u_\lambda + u = v\,(g_\mu + h + h_\lambda) + v_\mu g + v_\lambda h \\ \text{en} & u_\mu = v\,(h_\mu - g - g_\lambda) + v_\mu h - v_\lambda g \end{array}\right\} \quad . \quad \text{(II } l\text{)}$$

Door de eerste vergelijking naar μ te differentieeren en de tweede naar λ, kan daarna de functie u geëlimineerd worden. Het resultaat wordt:

$$v\,(g_{\mu\mu}+g_{\lambda\lambda}+2\,g_\lambda+g)+2\,v_\mu\,g_\mu+2\,v_\lambda\,(g+g_\lambda)+$$
$$+\,g\,(v_{\lambda\lambda}+v_{\mu\mu})=0.$$

Onderstellen wij nu Φ en ψ zoodanig gekozen, dat $g_\mu=0$ en $g+g_\lambda=0$ worden, dan verdwijnt ook de coëfficient van v in de laatst verkregene vergelijking en deze wordt dus eenvoudig herleid tot: $v_{\lambda\lambda}+v_{\mu\mu}=0$. Daartoe is slechts noodig, dat $g=e^{-\lambda}$ genomen worde. In de uitkomst is h geheel verdwenen; deze functie kan daarom geheel willekeurig gekozen worden en het eenvoudigst is wel $h=0$ te nemen. Uit (II k) volgt dan:

$$\psi=e^{-\lambda}\cos\mu \quad \text{en} \quad \Phi=e^{-\lambda}\sin\mu\,;$$

verder is: $$\Phi\sin\mu+\psi\cos\mu=e^{-\lambda}$$

dus voor $\lambda=0$ wordt die vorm niet gelijk aan nul. Door alzoo te stellen:

$$\left.\begin{aligned} x_\mu &= u\cos\mu+v\,e^{-\lambda}\sin\mu \\ x_\lambda &= -u\sin\mu+v\,e^{-\lambda}\cos\mu \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ \text{(II } m\text{)}$$

wordt het vraagstuk teruggebracht tot het volgende:

Eene functie v van λ en μ te bepalen, welke voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\mu^2}=0 \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(II } n\text{)}$$

en die voor $\lambda=0$ de waarde nul aanneemt . . . . . (II o)

Volgens (II l) zijn dan u en v verbonden door de vergelijkingen:

$$u_\lambda+u=e^{-\lambda}v_\mu \quad \text{en} \quad u_\mu=-e^{-\lambda}v_\lambda\,.\ \ .\ \text{(II } p\text{)}$$

Eene kleine vereenvoudiging wordt nog verkregen door te stellen: $u = e^{-\lambda} w$, als w eene functie van λ en μ is; dan toch wordt:

$$u_\lambda + u = e^{-\lambda} w_\lambda \quad \text{en} \quad u_\mu = e^{-\lambda} w_\mu$$

dus volgens (II p):

$$w_\lambda = v_\mu \quad \text{en} \quad w_\mu = -v_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } q\text{)}$$

waaruit weder volgt, dat ook:

$$w_{\lambda\lambda} + w_{\mu\mu} = 0.$$

Tevens gaat daardoor (II m) over in:

$$\left.\begin{aligned} x_\mu &= e^{-\lambda} (w \cos \mu + v \sin \mu) \\ x_\lambda &= e^{-\lambda} (-w \sin \mu + v \cos \mu) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(II } r\text{)}$$

terwijl (II n) en (II o) onveranderd blijven.

Het is nu ook gemakkelijk de beteekenis der functiën v en w aan te geven. Zij weder Φ de snelheidspotentiaal, dan wordt:

$$\Phi_\lambda = \Phi_x x_\lambda + \Phi_y y_\lambda = \varkappa v \quad \text{en} \quad \Phi_\mu = \Phi_x x_\mu + \Phi_y y_\mu = \varkappa w \quad \text{(II } s\text{)}$$

zoodat $\varkappa v$ en $\varkappa w$ de partieele afgeleiden naar λ en μ van de snelheidspotentiaal voorstellen.

Eindelijk moeten wij nog nagaan, hoe wij den vasten wand vinden kunnen; wij zagen, dat als zoodanig beschouwd kan worden een oppervlak $\psi(xy) = \text{const.}$, indien:

$$\psi_x \cos \mu + \psi_y \sin \mu = 0.$$

Voert men nu λ en μ als onafhankelijk veranderlijken in, dan moet:

$$(\psi_\lambda \lambda_x + \psi_\mu \mu_x) \cos \mu + (\psi_\lambda \lambda_y + \psi_\mu \mu_y) \sin \mu = 0,$$

en daardoor volgens de substitutievergelijkingen (II e^*) in verband met (II f):

$$-(\psi_\lambda x_\lambda + \psi_\mu x_\mu) \cos \mu + (-\psi_\lambda x_\mu + \psi_\mu x_\lambda) \sin \mu = 0$$

en nu van (II r) gebruik makend:

$$\psi_\lambda v + \psi_\mu w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II } t\text{)}.$$

Zoodra dus eene functie ψ van λ en μ kan bepaald worden, welke voldoet aan (II t), kan men een oppervlak met de vergelijking $\psi(\lambda\,\mu) = \text{const.}$ geheel of gedeeltelijk als vasten wand beschouwen. Eene zoodanige functie ψ is echter gemakkelijk te verkrijgen door te stellen:

$$\psi_\lambda = w \text{ en } \psi_\mu = -v \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II } u\text{)};$$

want de eenige voorwaarde, die hierbij moet vervuld worden, nl. $\psi_{\lambda\mu} = w_\mu = -v_\lambda$, is volgens (II q) ook werkelijk vervuld[1]). De vaste wand kan alzoo tot vergelijking hebben $\psi(\lambda\,\mu) = \text{const.}$, indien men ψ uit (II u) bepaalt.

Opdat de wand een vlakke zij, moet zijne vergelijking den vorm hebben $\mu = \text{const.}$, of meer algemeen $\psi(\mu) = 0$. Dit is echter nog niet voldoende; bovendien moet namelijk nog de normaal tot het oppervlak $\mu = \text{const.}$ loodrecht staan op de richting $\mu = \text{const.}$ Dus is $\mu = \mu_0$ een vaste vlakke wand, dan moet bovendien:

$$\mu_x \cos\mu_0 + \mu_y \sin\mu_0 = 0 \quad \text{of} \quad -y_\lambda \cos\mu_0 + x_\lambda \sin\mu_0 = 0$$

dus ook: $\quad x_\lambda \sin\mu_0 - x_\mu \cos\mu_0 = 0.$

Duiden wij de waarden van w en v voor $\mu = \mu_0$ door w_0 en v_0 aan, dan moet dus:

$$\sin\mu_0(-w_0 \sin\mu_0 + v_0 \cos\mu_0) - \cos\mu_0(w_0 \cos\mu_0 + v_0 \sin\mu_0) =$$
$$= -w_0 = 0.$$

De uitkomst wordt ten slotte: Zoodra voor eene waarde $\mu = C$ $w = 0$ wordt, kan men het platte vlak $\mu = C$ als vaste vloeistofbegrenzing aanmerken.

---

1) Eene meer algemeene onderstelling zou zijn $\psi_\lambda = \chi w$ en $\psi_\mu = -\chi v$ als χ eene willekeurige functie van λ en μ is, die alleen aan de voorwaarde voldoet: $\frac{\partial}{\partial\mu}(\chi w) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}(\chi v)$.

De vorm, waarin het vraagstuk hier verkregen is, stemt bijna geheel overeen met dien, waarin Planck het gebracht heeft. Deze toch komt ten slotte tot deze opgave: eene functie $\psi(\lambda \mu)$ te bepalen, welke voldoet aan de vergelijking $\psi_{\lambda\lambda} + \psi_{\mu\mu} = 0$ en die voor $\lambda = 0$ eene standvastige waarde aanneemt.

Uit het vorige blijken nu aanstonds eenige algemeene stellingen:

1e: Zijn $v = \psi_1(\lambda \mu)$ en $v = \psi_2(\lambda \mu)$ oplossingen, die beide aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldoen, dan zal zulks ook met $v = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2$ het geval zijn, als C_1 en C_2 willekeurige constanten zijn, alzoo geldt het beginsel der superpositie in den hier verkregen vorm.

2e: Is $v = \psi(\lambda \mu)$ eene aan alle voorwaarden voldoende oplossing en $\chi(\lambda \mu)$ eene functie, welke uit de vergelijkingen:

$$\chi_\lambda = -\psi_\mu, \quad \chi_\mu = \psi_\lambda$$

bepaald wordt, dan zal ook:

$$v = \psi(\lambda \mu)\, \chi(\lambda \mu)$$

eene oplossing zijn, daar in dat geval $v = 0$ wordt voor $\lambda = 0$ en

$$v_\lambda = \psi \chi_\lambda + \chi \psi_\lambda, \quad v_{\lambda\lambda} = \psi \chi_{\lambda\lambda} + \chi \psi_{\lambda\lambda} + 2 \psi_\lambda \chi_\lambda,$$

zoodat aan de vergelijking (II n) of:

$$\psi(\chi_{\lambda\lambda} + \chi_{\mu\mu}) + \chi(\psi_{\lambda\lambda} + \psi_{\mu\mu}) + 2(\psi_\lambda \chi_\lambda + \psi_\mu \chi_\mu) = 0$$

werkelijk voldaan wordt.

Wij zullen nu eenige eenvoudige oplossingen van onze vergelijkingen kort behandelen. Allereerst kunnen wij daartoe de theorie der functiën van complexe grootheden te hulp nemen.

De meest algemeene oplossing van de vergelijking:

$$v_{\lambda\lambda} + v_{\mu\mu} = 0$$

is:

$$v = f_1(\lambda + i\mu) + f_2(\lambda - i\mu),$$

hetgeen men gemakkelijk aantoont door te stellen:

$$\lambda + i\mu = \lambda'$$
$$\lambda - i\mu = \mu'$$

en λ' en μ' als onafhankelijk veranderlijken in te voeren. Zal voor $\lambda = 0$ $v = 0$ worden, dan moet:

$$f_1(i\mu) + f_2(-i\mu) = 0,$$

dus algemeen:

$$f_2(x) = -f_1(-x).$$

De meest algemeene aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldoende oplossing is dus:

$$v = f_1(i\mu + \lambda) - f_1(i\mu - \lambda).$$

Voor de vroeger ingevoerde w wordt dan:

$$w_\lambda = i\,[f'_1(i\mu + \lambda) - f'_1(i\mu - \lambda)]$$

en

$$w_\mu = -\,[f'_1(i\mu + \lambda) + f'_1(i\mu - \lambda)]$$

als men de afgeleide van $f_1(x)$ naar x door $f'_1(x)$ voorstelt. Hieruit volgt dan:

$$w = i\,[f_1(i\mu + \lambda) + f_1(i\mu - \lambda)].$$

Zal dus voor $\mu = C$ $w = 0$ worden, d. i. zal men met een vlakken wand $\mu = C$ te doen hebben, dan moet

$$f_1(iC + \lambda) + f_1(iC - \lambda) = 0.$$

Een der eenvoudigste gevallen is $f_1(x) = e^{kx}$; dus

$$v = e^{k(i\mu + \lambda)} - e^{k(i\mu - \lambda)} = e^{ik\mu}(e^{k\lambda} - e^{-k\lambda}) =$$
$$= (e^{k\lambda} - e^{-k\lambda})(\cos k\mu + i \sin k\mu)$$

waaruit, zonder dat in de oplossing nog complexe grootheden voorkomen, volgt, dat:

$$v = (e^{k\lambda} - e^{-k\lambda}) \sin(k\mu + \alpha),$$

waarbij α eene constante is, eene oplossing is.

Wil men niet van functiën van complexe grootheden gebruik maken, dan kan men op de volgende wijze oplossingen vinden. Stel

$$v = \sin k\lambda\, f(\mu) \quad \text{of} \quad = \sin(k\mu + l)\, f(\lambda),$$

waarin k en l willekeurige constanten zijn; de eerste onderstelling zullen wij verder vervolgen. Dan moet, opdat aan (II n) voldaan worde:

$$\frac{d^2 f}{d\mu^2} - k^2 f = 0$$

waarvan de algemeene oplossing is:

$$f = C\, e^{k\mu} + C'\, e^{-k\mu},$$

in welke C en C′ twee willekeurige constanten zijn. Dus is

$$v = \sin k\lambda\, (C\, e^{k\mu} + C'\, e^{-k\mu})$$

eene aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldoende oplossing. Verder wordt volgens (II q):

$$w = -\cos k\lambda\, (C\, e^{k\mu} - C'\, e^{-k\mu})$$

en deze w wordt nul voor:

$$\mu = \frac{1}{2k} \log \frac{C'}{C},$$

alzoo voor $\mu = 0$ als $C' = C$ genomen wordt. Deze onderstelling voeren wij in, dan is de vaste wand het oppervlak $\mu = 0$ d. i. een plat vlak // aan het X Z vlak. Dus is daarbij:

$$v = \sin k\lambda\, (e^{k\mu} + e^{-k\mu}), \quad w = -\cos k\lambda\, (e^{k\mu} - e^{-k\mu})$$

indien men de constante C weglaat, en verder wordt:

$$x = -\frac{e^{k\mu - \lambda}}{1 + k^2}[\sin(k\lambda + \mu) + k\cos(k\lambda + \mu)] -$$

$$-\frac{e^{-k\mu - \lambda}}{1 + k^2}[\sin(k\lambda - \mu) + k\cos(k\lambda - \mu)]$$

volgens (II m) en:

$$y = \frac{e^{k\mu - \lambda}}{1 + k^2} [\cos(k\lambda + \mu) - k \sin(k\lambda + \mu)] -$$

$$- \frac{e^{-k\mu - \lambda}}{1 + k^2} [\cos(k\lambda - \mu) - k \sin(k\lambda - \mu)]$$

volgens (II f), waaruit ook blijkt, dat het oppervlak $\mu = 0$ met $y = 0$ identiek is. Uit (II s) volgt nog, dat:

$$\varphi = -\frac{\varkappa}{k} \cos k\lambda\, (e^{k\mu} + e^{-k\mu}).$$

Voor de vrije vloeistofbegrenzing is $\lambda = 0$, dus

$$x = -\frac{e^{k\mu}}{1 + k^2} (\sin\mu + k\cos\mu) + \frac{e^{-k\mu}}{1 + k^2} (\sin\mu - k\cos\mu)$$

$$y = \frac{e^{k\mu}}{1 + k^2} (\cos\mu - k\sin\mu) - \frac{e^{-k\mu}}{1 + k^2} (\cos\mu + k\sin\mu).$$

Snijden wij haar door de rechte lijn $y = a$, dan kan men uit:

$$a = \frac{e^{k\mu}}{1 + k^2} (\cos\mu - k\sin\mu) - \frac{e^{-k\mu}}{1 + k^2} (\cos\mu + k\sin\mu)$$

de daaraan voldoende waarden van μ oplossen en deze in x substitueerende, de bij $y = a$ behoorende waarden van x vinden, waardoor onmiddellijk de breedte van den straal evenwijdig aan de X-as gerekend daar ter plaatse gevonden wordt. Zoo voldoen bijv. voor $y = 0$ de waarden van μ, die wortels zijn van de transcendente vergelijking:

$$e^{2k\mu} = \frac{1 + k\,tg\,\mu}{1 - k\,tg\,\mu}.$$

Die wortels zijn het eenvoudigst te vinden door twee krommen te construeeren met de vergelijkingen:

$$y = e^{2kx} \quad \text{en} \quad y = \frac{1 + k\,tg\,x}{1 - k\,tg\,x}$$

en de waarden van x te nemen, die bij de snijpunten dezer krommen behooren. Onderstellen wij k positief en laten wij

x van 0 tot ∞ aangroeien, dan groeit y voor de eerste kromme ook voortdurend aan. Voor de tweede kromme echter wordt y telkens nul, als:

$$1 + k\,tg\,x = 0, \quad \text{gevende:} \quad x = \mathrm{B}g\,tg\left(-\frac{1}{k}\right) + n\pi,$$

en y wordt telkens ∞, als:

$$1 - k\,tg\,x = 0, \quad \text{dus:} \quad x = \mathrm{B}g\,tg\left(+\frac{1}{k}\right) + n\pi.$$

Er zullen alzoo oneindig vele waarden van μ zijn, die aan de straks genoemde transcendente vergelijking voldoen en wij kunnen dit geval beschouwen als een oneindig aantal vloeistofstralen uit een vat met vlakken bodem met even vele openingen te voorschijn tredende, zoodanig dat elke uit eene opening tredende straal in de volgende opening weder het vat binnentreedt, daar toch voor niet ééne eindige waarde van μ $y = \infty$ wordt. Men kan echter ook door voor de waarde van μ geschikte grenzen te kiezen, het geval verkrijgen van een enkelen vloeistofstraal, die bij ééne opening het vat verlaat, en bij eene tweede weder daarbinnen treedt.

Eene analoge discussie laat de oplossing:

$$v = sin\,(k\mu + l)\,(e^{k\lambda} - e^{-k\lambda}),$$

op de vorige blz. verkregen, toe. Uit de eerste der twee algemeene stellingen op blz. 13 volgt verder, dat de twee functiën:

$$v = \int d\,k.\,sin\,k\lambda\,[\mathrm{C}\,e^{k\mu} + \mathrm{C}'\,e^{-k\mu}]$$

en
$$v = \mathrm{C}\int d\,k\,sin\,(k\mu + \lambda)\,[e^{k\lambda} - e^{-k\lambda}],$$

waarin de integraties naar k tusschen twee geheel willekeurig gekozene grenzen daarvan kunnen plaats hebben, evenzeer oplossingen voor het vraagstuk zijn zullen. Alle deze gevallen leveren belangrijke vloeistofbewegingen op.

Eene andere oplossing wordt verkregen door te stellen:

$$v = \Phi_{(0)}(\mu) + \lambda\,\Phi_{(1)}(\mu) + \lambda^2\,\Phi_{(2)}(\mu) + \ldots + \lambda^n\,\Phi_{(n)}(\mu)\ldots$$

Opdat v voor $\lambda = 0$ verdwijne, moet $\Phi_{(0)}(\mu) = 0$, en opdat aan (II n) voldaan worde, moet algemeen:

$$\frac{d^2\Phi_{(n)}}{d\mu^2} + (n+1)(n+2)\,\Phi_{(n+2)} = 0;$$

dus:

$$\Phi_{(n)} = -\frac{1}{n.(n-1)}\,\frac{d^2\,\Phi_{(n-2)}}{d\mu^2}.$$

Hieruit volgt, dat:

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(4)} = \ldots = \Phi_{(2n)} = 0$$

zijn moeten, en dat:

$$\Phi_{(3)} = -\frac{1}{2.3}\,\frac{d^2\,\Phi_{(1)}}{d\mu^2},\quad \Phi_{(5)} = +\frac{1}{1.2.3.4.5.}\,\frac{d^4\,\Phi_{(1)}}{d\mu^4}\ldots$$

$$\Phi_{(2n+1)} = (-1)^n\,\frac{1}{1^{2n+1/1}}\,\frac{d^{2n}\,\Phi_{(1)}}{d\mu^{2n}}$$

worden; zoodat eene aan alle vereischten van het vraagstuk voldoende oplossing is:

$$v = \Sigma\,(-1)^n\,\frac{1}{1^{2n+1/1}}\,\frac{d^{2n}\,\Phi_{(1)}}{d\mu^{2n}}\,.\,\lambda^{2n+1},$$

als men voor n alle geheele positieve getallen (nul ingesloten) neemt en daarbij $\frac{d^0\,\Phi_{(1)}}{d\mu^0}$ als symbool voor $\Phi_{(1)}$ beschouwt.

Hierin kan $\Phi_{(1)}$ nog geheel willekeurig gekozen worden als functie van μ; neemt men daarvoor eene geheele rationeele algebraïsche functie, dan zal de uitdrukking voor v een eindig aantal termen bevatten, in de overige gevallen echter uit een oneindig groot aantal termen bestaan. Voor de bijbehoorende waarde van w vinden wij:

$$w = \Sigma\,(-1)^{n-1}\,\frac{1}{1^{2n/1}}\,\frac{d^{2n-1}\,\Phi_{(1)}}{d\mu^{2n-1}}\,\lambda^{2n},$$

waarbij de sommatie naar n zich moet uitstrekken van $n = 1$

tot $n =$ éénе eenheid meer dan de hoogste waarde van n in de som voor v. Tot dit geval behooren ook eenige bewegingen, waarbij de vaste begrenzende wand een vlakke is. Eene der eenvoudigste wordt verkregen door te stellen:

$$v = \lambda (a \mu^2 + b \mu + c) - \tfrac{1}{3} \lambda^3 a,$$

waarin $a\, b\, c$ willekeurige constanten zijn, die nader bepaald zullen worden. Hierbij behoort:

$$w = -(\tfrac{1}{3} a \mu^3 + \tfrac{1}{2} b \mu^2 + c \mu + d) + \tfrac{1}{2} \lambda^2 (2 a \mu + b),$$

waarin d eene willekeurige constante is. Stelt men $b = 0$, dan wordt $w = 0$ voor $\mu = 0$, als nog bovendien $d = 0$ genomen wordt. Alzoo behooren:

$$v = \lambda (a \mu^2 + c) - \tfrac{1}{3} a \lambda^3, \quad w = a \lambda^2 \mu - \mu (\tfrac{1}{3} a \mu^2 + c)$$

bij een vloeistofstraal uit een vlakken wand te voorschijn tredend.

Hieruit volgt verder:

$$\frac{1}{\varkappa} \Phi = -\tfrac{1}{12} a \lambda^4 + \tfrac{1}{2} \lambda^2 (a \mu^2 + c) - \tfrac{1}{12} a \mu^4 - \tfrac{1}{2} c \mu^2 + d,$$

waarbij d eene willekeurige constante is;

$$\begin{aligned} x = e^{-\lambda} [\tfrac{1}{3} a \lambda^3 \cos \mu + a \lambda^2 (\mu \sin \mu + \cos \mu) + \\ + \lambda \{a (-\mu^2 \cos \mu + 2 \mu \sin \mu + 2 \cos \mu) - c \cos \mu\} - \\ - \tfrac{1}{3} a (\mu^3 \sin \mu + 3 \mu^2 \cos \mu - 6 \mu \sin \mu - 6 \cos \mu) - \\ - c (\mu \sin \mu + \cos \mu)], \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = e^{-\lambda} [\tfrac{1}{3} a \lambda^3 \sin \mu + a \lambda^2 (-\mu \cos \mu + \sin \mu) + \\ + \lambda \{a (-\mu^2 \sin \mu - 2 \mu \cos \mu + 2 \sin \mu) - c \sin \mu\} + \\ + \tfrac{1}{3} a (\mu^3 \cos \mu - 3 \mu^2 \sin \mu - 6 \mu \cos \mu + 6 \sin \mu) + \\ + c (\mu \cos \mu - \sin \mu)], \end{aligned}$$

waaruit weder blijkt, dat voor $\mu = 0$ ook $y = 0$ wordt.

De vergelijkingen voor de vrije vloeistofbegrenzing worden $\lambda = 0$ stellend:

$$x = -\tfrac{1}{3}a(\mu^3 \sin\mu + 3\mu^2 \cos\mu - 6\mu \sin\mu - 6\cos\mu) -$$
$$- c(\mu \sin\mu + \cos\mu),$$
$$y = \tfrac{1}{3}a(\mu^3 \cos\mu - 3\mu^2 \sin\mu - 6\mu \cos\mu + 6\sin\mu) +$$
$$+ c(\mu \cos\mu - \sin\mu).$$

Aan $y = 0$ voldoen alle wortels der vergelijking:

$$tg\,\mu = \frac{\mu(a\mu^2 - 6a + 3c)}{3a\mu^2 - 6a + 3c},$$

en het aantal dier wortels wordt weder oneindig groot, zoodat wij een geval van vloeistofbeweging krijgen analoog aan het vroeger behandelde.

Vervolgens wenden wij ons tot de door Planck gegevene oplossingen.

Zijn l en m twee willekeurige functiën elk van λ en μ, zoodanig dat voor $\lambda = 0$ een van beide nul wordt en $\psi(l.m)$ eene willekeurige functie van haar product $l.m$, die aan de vergelijking (II n) voldoet, dan zal de functie:

$$v = \psi(l.m) - \psi(0)$$

eene oplossing van het vraagstuk geven. Wij zullen ons in het volgende uitsluitend bezighouden met het geval, dat l slechts van λ, m slechts van μ afhangt; de eenige te vervullen voorwaarden zijn dan, dat voor $\lambda = 0$, $l = 0$ wordt en dat $\psi_{\lambda\lambda} + \psi_{\mu\mu} = 0$. De waarde van w is hier niet algemeen aan te geven; men kan dientengevolge ook niet algemeen beslissen, of bij de tot deze oplossingen behoorende gevallen van vloeistofbeweging vlakke vaste wanden voorkomen of niet. Oplossingen van den vorm $\psi(l.m)$ van de vergelijking $v_{\lambda\lambda} + v_{\mu\mu} = 0$ kunnen aldus verkregen worden:

$$v_\lambda = \psi'.m\,l_\lambda,$$

als men door ψ' de afgeleide van ψ naar het argument $l.m$ voorstelt. Verder:

$$v_{\lambda\lambda} = m\,(\psi'\, l_{\lambda\lambda} + \psi''\, l_\lambda .\, m\, l_\lambda);$$

dus moet:

$$\psi''\,(m^2\, l_\lambda^2 + l^2\, m_\mu^2) + \psi'\,(m\, l_{\lambda\lambda} + l\, m_{\mu\mu}) = 0.$$

Volgens onze onderstellingen kan men schrijven:

$$l_{\lambda\lambda} = \frac{d\,l_\lambda}{d\,l}\, l_\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{d\,l_\lambda^2}{d\,l} \quad \text{en} \quad m\, l_{\lambda\lambda} = \tfrac{1}{2}\, m\frac{d\,l_\lambda^2}{d\,l} = \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\, l\, \partial\, m}\,(m^2\, l_\lambda^2),$$

zoodat in plaats van de hierboven gevondene vergelijking kan geschreven worden:

$$4\,\psi''\,(m^2\, l_\lambda^2 + l^2\, m_\mu^2) + \psi'\,\frac{\partial^2}{\partial\, l\, \partial\, m}\,(m^2\, l_\lambda^2 + l^2\, m_\mu^2) = 0;$$

stelt men nog:

$$m^2\, l_\lambda^2 + l^2\, m_\mu^2 = \mathrm{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}\, v)$$

dan moet alzoo:

$$\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial^2\, \mathrm{H}}{\partial\, l\, \partial\, m} = -\frac{4\,\psi''}{\psi'} = f(l\,.\,m) \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}\, w)$$

Het komt er dus op aan van deze vergelijking (II w), waarin H als eene functie van l en m beschouwd wordt, oplossingen te vinden en daarna l_λ en m_μ zoodanig als functiën van l en m respectievelijk te bepalen, dat aan (II v) voldaan wordt. Eenige eenvoudige aan (II w) voldoende functiën zijn gemakkelijk aan te geven:

1e: Zij $\dfrac{\partial^2\, \mathrm{H}}{\partial\, l\, \partial\, m} = 0$, dus: $\mathrm{H} = f_1(l) + f_2(m)$.

Substitueert men deze waarde in (II v), dan wordt daaraan voldaan door te stellen:

$$l_\lambda = \text{const.} = a \quad \text{en} \quad m_\mu = \text{const.} = b,$$

2e: $\mathrm{H} = \chi\,(l\,.\,m)$, want dan is: $\dfrac{\partial^2\, \mathrm{H}}{\partial\, l\, \partial\, m} = \chi' + l\, m\, \chi''$.

Uit (II v) volgt dan: $l_\lambda = a\, l$ en $m_\mu = b\, m$.

Maar ook kan (II v) in den vorm:

$$\left(\frac{l_\lambda}{l}\right)^2 + \left(\frac{m_\mu}{m}\right)^2 = \chi_1 (l \,.\, m)$$

geschreven worden, en hieraan wordt voldaan door de onderstelling:

$$\left(\frac{l_\lambda}{l}\right)^2 = \log.\, a\, l^n, \quad \left(\frac{m_\mu}{m}\right)^2 = \log.\, b\, m^n,$$

waarin n elk willekeurig geheel, gebroken, positief of negatief getal zijn kan; dus wordt:

$$l_\lambda = l \sqrt{\log.\, a\, l^n} \quad \text{en} \quad m_\mu = m \sqrt{\log.\, b\, m^n}.$$

3e:
$$\mathrm{H} = (a\, l^k + b\, m^k)\, \chi (l \,.\, m),$$

want dan is:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial l \partial m} = (a\, l^k + b\, m^k)\, [(k+1)\, \chi' + m\, l\, \chi''];$$

k is weder geheel willekeurig. Bij substitutie van deze H in (II v) blijkt, dat aan die vergelijking bijv. voldaan wordt door:

$$l_\lambda^2 = a\, l^{k+2} \quad \text{en} \quad m_\mu^2 = b\, m^{k+2}.$$

Maar de daarbij voorkomende vergelijking (II v) kan ook aldus geschreven worden:

$$\left(\frac{l_\lambda}{l}\right)^2 + \left(\frac{m_\mu}{m}\right)^2 = (a\, l^k + b\, m^k)\, \chi_1 (l \,.\, m) = \left(\frac{b}{l^k} + \frac{a}{m^k}\right) \chi_2 (l \,.\, m),$$

en hieraan wordt voldaan door de onderstelling:

$$l_\lambda = l \sqrt{\frac{b}{l^k}} \quad \text{en} \quad m_\mu = m \sqrt{\frac{a}{m^k}}.$$

Wegens het willekeurige van a, b en k is echter deze oplossing in de vorige begrepen. Voor het geval, dat $k = 2$ is, ligt nog eene andere oplossing voor de hand; dan toch moet:

$$m^2\, l_\lambda^2 + l^2\, m_\mu^2 = (a\, l^2 + b\, m^2)\, \chi (l \,.\, m),$$

en hieraan kan voldaan worden door:

$$l_\lambda = \sqrt{b}\left(1 - \frac{c}{b}\, l^2\right) \quad \text{en} \quad m_\mu = \sqrt{a}\left(1 + \frac{c}{a}\, m^2\right).$$

Deze is de oplosing, welke door Planck in Wied. Annalen Bd. XXI is uitgewerkt, en voor de daarbij voorkomende beteekenis der functiën bij bijzondere waarden van a, b en c identiek blijkt te worden met de uitkomsten, die reeds vroeger door Helmholtz en Kirchhoff bij volgens eene andere methode behandelde gevallen zijn verkregen.

Uit de vergelijking (II v) kan nog het volgende algemeen geldende besluit getrokken worden: Zijn l'_λ en m'_μ twee waarden van l_λ en m_μ, die aan die vergelijking voldoen, dan zullen de functiën gedefinieerd door de vergelijkingen:

$$l^2_\lambda = l'^2_\lambda - c\, l^2, \quad m^2_\mu = m'^2_\mu + c\, m^2,$$

waarin c eene willekeurige constante is, evenzeer daaraan voldoen. Bij de vorige oplossingen kan men hierdoor nog even zoovele andere verkrijgen.

Gaat men na, of de verkregene oplossingen voldoen aan de voorwaarde, dat voor $\lambda = 0$, $l = 0$ worden moet, dan zal men bevinden, dat slechts de navolgende die eigenschap bezitten:

α. . . . . $l_\lambda = a$ waarbij $m_\mu = b$.

β. . . de hierbij volgens de laatstvoorgaande alinea behoorende:

$$l_\lambda = \sqrt{a - c\, l^2}, \quad m_\mu = \sqrt{b + c\, m^2},$$

waarin dan $a\, b\, c$ positief of negatief zijn kunnen.

γ. . . . . $l_\lambda = a\, l^{-i}$, $m_\mu = b\, m^{-i}$ als i een positief getal is.

δ. . . . . de hierbij behoorende:

$$l_\lambda = \sqrt{a\, l^p - c\, l^2}, \quad m_\mu = \sqrt{b\, m^p + c\, m^2},$$

waarbij de waarden $p = 1, 3, 4, -1, -2$ onderzocht kunnen worden.

ε. . . . . $l_\lambda = \sqrt{b}\left(1 - \frac{c}{b}\, l^2\right)$, $m_\mu = \sqrt{a}\left(1 + \frac{c}{a}\, m^2\right)$.

Het sub β opgenomen geval voert tot de reeds besprokene oplossingen (zie blz. 15). Het geval ε, dat bij Planck tot zeer belangwekkende bewegingen voert, kan langs den hier gevolgden weg niet geheel uitgewerkt worden. Maken wij toch daarbij de volgende onderstellingen: a en b zijn positief en worden door a^2 en b^2 vervangen, evenzoo p door p^2, dan komt er:

$$l_\lambda = b\left(1 - \frac{p^2}{b^2}\,l^2\right) \quad \text{en} \quad m_\mu = a\left(1 + \frac{p^2}{a^2}\,m^2\right).$$

Hieruit volgt dan door integratie met inachtneming der voorwaarde, dat voor $\lambda = 0$, $l = 0$ worden moet:

$$2\,p\,\lambda = Nep.\,log\,\frac{b + p\,l}{b - p\,l} \quad \text{of} \quad \frac{p\,l}{b} = \frac{e^{2p\lambda} - 1}{e^{2p\lambda} + 1}.$$

Evenzoo:

$$\mathrm{B}g\,tg\,\frac{p\,m}{a} = p\,\mu \quad \text{of} \quad \frac{p\,m}{a} = tg\,p\,\mu,$$

als men over de integratie-constante hierin ook doelmatig beschikt. Voor de ondubbelzinnige bepaling van μ is dan noodig vast te stellen, dat μ steeds bijv. tusschen o en π gelegen zijn zal. Verder wordt H in ons geval:

$$= \left(1 + \frac{p^4}{a^2\,b^2}\,l^2\,m^2\right)(a^2\,l^2 + b^2\,m^2)$$

en
$$\frac{\partial^2\,\mathrm{H}}{\partial\,l\,\partial\,m} = \frac{8\,p^4}{a^2\,b^2}\,l\,m\,(a^2\,l^2 + b^2\,m^2),$$

alzoo volgens (II w):

$$-\frac{4\,\psi''}{\psi'} = \frac{\dfrac{8\,p^4}{a^2\,b^2}\,l\,m}{1 + \dfrac{p^4}{a^2\,b^2}\,l^2\,m^2}$$

en hieruit vindt men:

$$\psi = \mathrm{C}\,\mathrm{B}g\,tg\,\frac{p^2\,l\,m}{a\,b} + \mathrm{C}'.$$

In het volgende nemen wij eenvoudigheidshalve aan:

$$\psi = \mathrm{B}g\,tg \frac{p^2\, l\, m}{a\, b} = \mathrm{B}g\,tg \left\{ \frac{e^{2p\lambda} - 1}{e^{2p\lambda} + 1}\, tg\, p\, \mu \right\},$$

en kunnen dan voor de ondubbelzinnige bepaling van ψ vaststellen, dat wij dien Bg tg ook weder tusschen bepaalde grenzen kiezen. $\psi(0)$ zal dan ook $= 0$ genomen kunnen worden. Eene aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldoende oplossing is dus:

$$v = \mathrm{B}g\,tg \left\{ \frac{e^{2p\lambda} - 1}{e^{2p\lambda} + 1}\, tg\, p\, \mu \right\},$$

en hieruit volgt verder:

$$w = -p\,\lambda + \tfrac{1}{2}\, log\,(1 + e^{4p\lambda} + 2\, e^{2p\lambda} \cos 2\, p\, \mu).$$

Nu kunnen echter noch Φ, noch de vergelijking van den vasten wand als functie van λ en μ bepaald worden, zelfs niet bij de eenvoudigste onderstellingen: $p = 1$ en $p = \frac{1}{2}$. Voor $\mu =$ const. wordt nooit $w = 0$, alzoo is de vaste wand niet vlak. Wij komen hier dus tot eene geheel andere vloeistofbeweging dan de door Helmholtz, Kirchhoff en Planck behandelde.

Deze laatste liggen echter voor de hier gevolgde methode opgesloten in de oplossing:

$$v = \frac{1 - e^{4a\lambda}}{1 + e^{4a\lambda} + 2\, e^{2a\lambda} \cos 2\, a\, \mu},$$

waarin a eene geheel willekeurige, reëele of complexe constante zijn kan. Men vindt hieruit namelijk voor de functie w:

$$w = 2\, e^{2a\lambda} \frac{\sin 2\, a\, \mu}{1 + e^{4a\lambda} + 2\, e^{2a\lambda} \cos 2\, a\, \mu},$$

als men aanneemt, dat voor $\mu = 0$, $w = 0$ zijn zal, en verder wordt de potentiaalfunctie:

$$\Phi = -\varkappa\,\lambda - \frac{\varkappa}{2a}\, log\, \frac{e^{-4a\lambda} + 2\, e^{-2a\lambda} \cos 2\, a\, \mu + 1}{4},$$

als men evenzoo aanneemt, dat voor $\lambda = 0$ en $\mu = 0$, Φ nul is. Voor de bijzondere onderstelling $a = 1$, wordt:

$$\Phi = -\varkappa\lambda - \frac{\varkappa}{2} \log \frac{e^{-4\lambda} + 2e^{-2\lambda} \cos 2\mu + 1}{4},$$

en
$$x = -e^{-\lambda} \cos \mu - bg\,tg \frac{2e^{\lambda} \cos \mu}{e^{2\lambda} - 1},$$

$$y = -e^{-\lambda} \sin \mu + \tfrac{1}{2} \log \frac{e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} \sin \mu + 1}{e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda} \sin \mu + 1}.$$

Overweegt men nu, dat de hier gebruikte λ volgens hare beteekenis de negatieve waarde is van de door Planck gebruikte, en dat μ hier dezelfde beteekenis heeft als bij genoemden schrijver, dan blijkt bij vergelijking met Planck's uitkomsten, dat deze beweging met een der door Kirchhoff behandelde overeenstemt, terwijl de door Helmholtz behandelde in de onderstelling $a = \frac{1}{2}$ verkregen wordt.

De methode, waardoor wij in het vorige het vraagstuk in zulk een eenvoudigen vorm brachten, maakt volstrekt geen direct gebruik van de functie Φ_λ, en eerst later zagen wij de beteekenis van v te voorschijn komen. De vraag ligt voor de hand, of men die uitkomsten niet evenzeer op eene meer rechtstreeksche wijze had kunnen verkrijgen, hetgeen bovendien voor de uitbreiding op het algemeene geval misschien van belang is, daar de onderstelling gemaakt worden kan, dat zich aldaar dan ook de functie Φ_λ op overeenkomstige wijze gedragen zal. In het volgende is zulk eene directe afleiding gegeven. Wij gaan uit van:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,$$

terwijl voor alle punten van het oppervlak:

$$\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2}=\varkappa,\quad \Phi_n=0,$$

zijn moet. De gebruikte substitutie:

$$\Phi_x=\varkappa\, e^{\lambda}\cos\mu\,,$$

$$\Phi_y=\varkappa\, e^{\lambda}\sin\mu\,,$$

geeft aanleiding tot de betrekkingen:

$$\lambda_x=-\mu_y\,,$$

$$\lambda_y=\mu_x.$$

Men heeft:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\lambda_x+\frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\mu_x,$$

en $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\cdot\lambda_x^2+2\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu}\cdot\lambda_x\mu_x+\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\cdot\mu_x^2+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\lambda_{xx}+\frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\mu_{xx},$$

zoodat overal in de door de vloeistof ingenomene ruimte moet voldaan worden aan de vergelijking:

$$\Phi_{\lambda\lambda}(\lambda_x^2+\lambda_y^2)+2\Phi_{\lambda\mu}(\lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y)+\Phi_{\mu\mu}(\mu_x^2+\mu_y^2)+$$

$$+\Phi_{\lambda}(\lambda_{xx}+\lambda_{yy})+\Phi_{\mu}(\mu_{xx}+\mu_{yy})=0,$$

en ingevolge: $$\begin{cases}\lambda_x=-\mu_y\\ \lambda_y=\mu_x,\end{cases}$$

herleidt deze zich tot: $\Phi_{\lambda\lambda}+\Phi_{\mu\mu}=0.$

De voorwaarde wordt, dat voor $\lambda=0$:

$$\Phi_x\lambda_x+\Phi_y\lambda_y=0,$$

zijn moet, dus:

$$\Phi_{\lambda}(\lambda_x^2+\lambda_y^2)+\Phi_{\mu}(\lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y)=0,$$

en deze herleidt zich tot $\Phi_{\lambda}=0$. Het vraagstuk kan dus nog op andere wijze worden uitgesproken, dan in het vorige geschied is, en wel als volgt: Eene functie Φ van λ en μ

te bepalen zoodanig, dat in de geheele door de vloeistof ingenomene ruimte:

$$\Phi_{\lambda\lambda} + \Phi_{\mu\mu} = 0,$$

en dat voor $\lambda = 0$ ook Φ_{λ} de waarde nul aanneemt. Deze vorm is een weinig minder eenvoudig dan de vroeger gevondene, doch deze laatste ligt natuurlijk daarin opgesloten, want als overal:

$$\Phi_{\lambda\lambda} + \Phi_{\mu\mu} = 0,$$

dan is (door naar λ te differentieeren) ook overal:

$$v_{\lambda\lambda} + v_{\mu\mu} = 0,$$

in de onderstelling dat λ en μ en Φ in de beschouwde ruimte steeds doorloopende verandering ondergaan.

Heeft men uit de gevondene voorwaarden:

$$\Phi_{\lambda\lambda\lambda} + \Phi_{\lambda\mu\mu} = 0,$$

en voor $\lambda = 0$, $\Phi_{\lambda} = 0$, Φ_{λ} bepaald, dan is ook Φ_{μ} te vinden, want door differentiatie vindt men $\Phi_{\lambda\mu}$, en verder is:

$$\Phi_{\mu\mu} = -\Phi_{\lambda\lambda},$$

dus is Φ_{μ} eveneens bekend. Eindelijk is:

$$\Phi_{\lambda} = \Phi_{x}\, x_{\lambda} + \Phi_{y}\, y_{\lambda} = \varkappa\, e^{\lambda}\, (x_{\lambda} \cos \mu + x_{\mu} \sin \mu),$$

$$\Phi_{\mu} = \Phi_{x}\, x_{\mu} + \Phi_{y}\, y_{\mu} = \varkappa\, e^{\lambda}\, (x_{\mu} \cos \mu - x_{\lambda} \sin \mu),$$

waaruit x als functie van λ en μ bepaald worden kan; want bij oplossing wordt:

$$\varkappa\, x_{\lambda} = e^{-\lambda}\, (\Phi_{\lambda} \cos \mu - \Phi_{\mu} \sin \mu),$$

$$\varkappa\, x_{\mu} = e^{-\lambda}\, (\Phi_{\lambda} \sin \mu + \Phi_{\mu} \cos \mu).$$

Op dergelijke wijze vindt men y, daar $y_{\lambda} = x_{\mu}$ en $y_{\mu} = -x_{\lambda}$.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Vloeistofstralen in de ruimte.

Het gestelde vraagstuk is reeds in de inleiding aldus uitgesproken:

Eene functie Φ *van* $x\, y\, z$ *te bepalen, die overal in eene begrensde ruimte aan de vergelijking* $\Delta^2 \Phi = 0$ *voldoet en zoodanig is, dat voor alle punten van het oppervlak:*

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \varkappa\,,$$

$\Phi_n = 0$ *wordt.*

Wij beginnen met het transformeeren der laatste voorwaarde. Voeren wij daartoe de substitutie uit door de volgende vergelijkingen bepaald:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= \varkappa\, e^\lambda \cos\mu \\ \Phi_y &= \varkappa\, e^\lambda \sin\mu \cos\nu \\ \Phi_z &= \varkappa\, e^\lambda \sin\mu \sin\nu \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\text{III } a)\ [1]$$

1) De meer symmetrische substitutie:

$$\Phi_x = \varkappa\, e^\lambda \cos\alpha$$
$$\Phi_y = \varkappa\, e^\lambda \cos\beta$$
$$\Phi_z = \varkappa\, e^\lambda \cos\gamma$$

met de voorwaarde: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,
biedt boven de hier gebruikte geene voordeelen, daar de symmetrie bij het verwisselen van afhankelijk en onafhankelijk veranderlijken verdwijnt.

De beteekenis der grootheden $\lambda\,\mu\,\nu$ is de volgende:

$$\lambda = Nep.\,log\,\frac{q}{\varkappa}\,,$$

waarin q de snelheid in het punt $x\,y\,z$ voorstelt; μ is de hoek, dien de snelheid in dat punt vormt met de X-as en ν de hoek ingesloten door het X Y-vlak en een vlak door de snelheid evenwijdig aan de X-as gebracht. Dan wordt:

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \varkappa$$

voor $\lambda = 0$. Voor alle punten van het oppervlak $\lambda = 0$ moet dus $\Phi_n = 0$ zijn, of daar de richtingscoëfficienten van de normaal tot dat oppervlak evenredig zijn met λ_x, λ_y, λ_z, zoo moet voor $\lambda = 0$:

$$\lambda_x\,\Phi_x + \lambda_y\,\Phi_y + \lambda_z\,\Phi_z = 0\,,$$

of $$\lambda_x \cos\mu + \lambda_y \sin\mu\cos\nu + \lambda_z \sin\mu\sin\nu = 0.$$

Verder is:

$$\Phi_{xx} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_x \cos\mu - \mu_x \sin\mu)\,,$$

$$\Phi_{yy} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_y \sin\mu\cos\nu + \mu_y \cos\mu\cos\nu - \nu_y \sin\mu\sin\nu)\,,$$

$$\Phi_{zz} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_z \sin\mu\sin\nu + \mu_z \cos\mu\sin\nu + \nu_z \sin\mu\cos\nu)\,;$$

en $$\Phi_{yz} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_z \sin\mu\cos\nu + \mu_z \cos\mu\cos\nu - \nu_z \sin\mu\sin\nu) =$$

$$= \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_y \sin\mu\sin\nu + \mu_y \cos\mu\sin\nu + \nu_y \sin\mu\cos\nu)\,,$$

$$\Phi_{zx} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_x \sin\mu\sin\nu + \mu_x \cos\mu\sin\nu + \nu_x \sin\mu\cos\nu) =$$

$$= \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_z \cos\mu - \mu_z \sin\mu)\,,$$

$$\Phi_{xy} = \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_y \cos\mu - \mu_y \sin\mu) =$$

$$= \varkappa\,e^\lambda\,(\lambda_x \sin\mu\cos\nu + \mu_x \cos\mu\cos\nu - \nu_x \sin\mu\sin\nu)\,;$$

en het vraagstuk luidt nu: drie functiën $\lambda\,\mu\,\nu$ van $x\,y\,z$ ieder te bepalen, zóó dat deze voldoen aan de vier vergelijkingen (III b):

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_x \cos\mu + (\lambda_y \cos\nu + \lambda_z \sin\nu)\sin\mu - \mu_x \sin\mu + \\
+ (\mu_y \cos\nu + \mu_z \sin\nu)\cos\mu + (\nu_z \cos\nu - \nu_y \sin\nu)\sin\mu = 0, \\
(\lambda_y \sin\nu - \lambda_z \cos\nu)\sin\mu + (\mu_y \sin\nu - \mu_z \cos\nu)\cos\mu + \\
\qquad + (\nu_y \cos\nu + \nu_z \sin\nu)\sin\mu = 0, \\
\lambda_x \sin\mu \sin\nu - \lambda_z \cos\mu + \mu_x \cos\mu \sin\nu + \mu_z \sin\mu + \\
\qquad + \nu_x \sin\mu \cos\nu = 0, \\
\lambda_x \sin\mu \cos\nu - \lambda_y \cos\mu + \mu_x \cos\mu \cos\nu + \mu_y \sin\mu - \\
\qquad - \nu_x \sin\mu \sin\nu = 0;
\end{array}\right\} \quad \text{(III } b\text{)}$$

en dat voor $\lambda = 0$:

$$\lambda_x \cos\mu + \lambda_y \sin\mu \cos\nu + \lambda_z \sin\mu \sin\nu = 0 \quad . \quad \text{(III } c\text{)}$$

Wij gaan nu de omkeering der veranderlijken uitvoeren. Daartoe overwegen wij, dat:

$$\left.\begin{array}{l}
dx = x_\lambda d\lambda + x_\mu d\mu + x_\nu d\nu \\
dy = y_\lambda d\lambda + y_\mu d\mu + y_\nu d\nu \\
dz = z_\lambda d\lambda + z_\mu d\mu + z_\nu d\nu
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(III } d\text{)}$$

en daaruit volgt, indien men:

$$D = \begin{vmatrix} x_\lambda & x_\mu & x_\nu \\ y_\lambda & y_\mu & y_\nu \\ z_\lambda & z_\mu & z_\nu \end{vmatrix}$$

stelt en de minoren van de elementen x_λ, x_μ, enz. in dezen determinant respectievelijk door X_λ, X_μ, enz. voorstelt:

$$D\, d\lambda = X_\lambda dx + Y_\lambda dy + Z_\lambda dz,$$
$$D\, d\mu = X_\mu dx + Y_\mu dy + Z_\mu dz,$$
$$D\, d\nu = X_\nu dx + Y_\nu dy + Z_\nu dz,$$

Door vergelijking dezer betrekkingen met het stelsel:

$$\left.\begin{array}{l} d\lambda = \lambda_x\, dx + \lambda_y\, dy + \lambda_z\, dz \\ d\mu = \mu_x\, dx + \mu_y\, dy + \mu_z\, dz \\ d\nu = \nu_x\, dx + \nu_y\, dy + \nu_z\, dz \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{III}\, e)$$

besluit men dat:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{D}\,\lambda_x = \mathrm{X}_\lambda\,, & \mathrm{D}\,\lambda_y = \mathrm{Y}_\lambda\,, & \mathrm{D}\,\lambda_z = \mathrm{Z}_\lambda \\ \mathrm{D}\,\mu_x = \mathrm{X}_\mu\,, & \mathrm{D}\,\mu_y = \mathrm{Y}_\mu\,, & \mathrm{D}\,\mu_z = \mathrm{Z}_\mu \\ \mathrm{D}\,\nu_x = \mathrm{X}_\nu\,, & \mathrm{D}\,\nu_y = \mathrm{Y}_\nu\,, & \mathrm{D}\,\nu_z = \mathrm{Z}_\nu \end{array}\right\} \quad . \quad (\mathrm{III}\, f)$$

Stelt men verder:

$$\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{vmatrix} = \Delta,$$

en tevens de minoren van de elementen λ_x, λ_y, enz. in dezen determinant respectievelijk $= \mathrm{L}_x$, L_y, enz., dan wordt door oplossing van (III e):

$$\Delta\, dx = \mathrm{L}_x\, d\lambda + \mathrm{M}_x\, d\mu + \mathrm{N}_x\, d\nu\,,$$

$$\Delta\, dy = \mathrm{L}_y\, d\lambda + \mathrm{M}_y\, d\mu + \mathrm{N}_y\, d\nu\,,$$

$$\Delta\, dz = \mathrm{L}_z\, d\lambda + \mathrm{M}_z\, d\mu + \mathrm{N}_z\, d\nu\,,$$

en door vergelijking met (III d) besluit men tot:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta\, x_\lambda = \mathrm{L}_x\,, & \Delta\, y_\lambda = \mathrm{L}_y\,, & \Delta\, z_\lambda = \mathrm{L}_z \\ \Delta\, x_\mu = \mathrm{M}_x\,, & \Delta\, y_\mu = \mathrm{M}_y\,, & \Delta\, z_\mu = \mathrm{M}_z \\ \Delta\, x_\nu = \mathrm{N}_x\,, & \Delta\, y_\nu = \mathrm{N}_y\,, & \Delta\, z_\nu = \mathrm{N}_z \end{array}\right\} \quad . \quad (\mathrm{III}\, g)$$

Men vindt nu onmiddellijk door de drie laatste vergelijkingen van (III b) eerst resp. met λ_x, $-\lambda_y$, λ_z, daarna met μ_x, $-\mu_y$, μ_z, en eindelijk met ν_x, $-\nu_y$, ν_z te vermenigvuldigen en telkens de uitkomsten te sommeeren, het volgend drietal:

$$\left.\begin{array}{l}
(L_y \sin\nu - L_z \cos\nu) \sin\mu + (N_y \cos\nu + N_z \sin\nu) \sin\mu + \\
\qquad + N_x \cos\mu = 0\,, \\
(M_y \sin\nu - M_z \cos\nu) \sin\mu + (N_y \cos\nu + N_z \sin\nu) \cos\mu - \\
\qquad - N_x \sin\mu = 0\,, \\
L_x \sin\mu - (L_y \cos\nu + L_z \sin\nu) \cos\mu + M_x \cos\mu + \\
\qquad + (M_y \cos\nu + M_z \sin\nu) \sin\mu = 0\,;
\end{array}\right\} \text{(III } h\text{)}$$

waarin dan gemakkelijk door (III g) x_λ enz. zijn in te voeren. Het gelukt echter niet, ook voor de eerste vergelijking van (III b) eene daarmede aequivalente af te leiden, die van $L_x, L_y \ldots$ slechts de eerste machten bevat, hoewel de verbinding van die eerste vergelijking met de drie overige tot merkwaardige uitkomsten voert. Zoo volgt bijv. uit de eerste en tweede vergelijking van (III b):

$$\lambda_x \cos\mu \sin\nu + \lambda_z \sin\mu - \mu_x \sin\mu \sin\nu + \mu_z \cos\mu - \nu_y \sin\mu = 0,$$

en

$$\lambda_x \cos\mu \cos\nu + \lambda_y \sin\mu - \mu_x \sin\mu \cos\nu + \mu_y \cos\mu + \nu_z \sin\mu = 0,$$

welke vergelijkingen in vorm bijna geheel met de derde en vierde vergelijking van (III b) overeenstemmen. Door middel van (III f) kan men ook in de eerste vergelijking van (III b) de grootheden $x_\lambda, y_\lambda \ldots$ invoeren, doch de daardoor ontstaande vergelijking bevat dan telkens producten van die grootheden twee aan twee. Dit is de oorzaak, ten gevolge waarvan het vraagstuk hier aanzienlijk moeilijker wordt dan in het geval, toen slechts twee coördinaten in aanmerking kwamen.

Voert men de verwisseling van afhankelijk en onafhankelijk veranderlijken uit, dan komt het volgende viertal van vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}
X_\lambda \cos\mu + (Y_\lambda \cos\nu + Z_\lambda \sin\nu)\sin\mu - X_\mu \sin\mu + \\
\quad + (Y_\mu \cos\nu + Z_\mu \sin\nu)\cos\mu + \\
\quad + (Z_\nu \cos\nu - Y_\nu \sin\nu)\sin\mu = 0\,, \\
(y_\lambda \sin\nu - z_\lambda \cos\nu)\sin\mu + (y_\nu \cos\nu + z_\nu \sin\nu)\sin\mu + \\
\quad + x_\nu \cos\mu = 0\,, \\
(y_\mu \sin\nu - z_\mu \cos\nu)\sin\mu + (y_\nu \cos\nu + z_\nu \sin\nu)\cos\mu - \\
\quad - x_\nu \sin\mu = 0\,, \\
x_\lambda \sin\mu - (y_\lambda \cos\nu + z_\lambda \sin\nu)\cos\mu + x_\mu \cos\mu + \\
\quad + (y_\mu \cos\nu + z_\mu \sin\nu)\sin\mu = 0\,;
\end{array}\right\} \quad \text{(III } i\text{)}$$

terwijl bovendien voor $\lambda = 0$ moet voldaan worden aan de voorwaarde:

$$X_\lambda \cos\mu + Y_\lambda \sin\mu \cos\nu + Z_\lambda \sin\mu \sin\nu = 0\,; \quad \text{(III } k\text{)}$$

of fraaier geschreven:

$$\begin{vmatrix} \cos\mu & \sin\mu\cos\nu & \sin\mu\sin\nu \\ x_\mu & y_\mu & z_\mu \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Kan men verder eene functie $\psi\,(x\,y\,z)$ vinden, die voldoet aan de betrekking:

$$\psi_x \Phi_x + \psi_y \Phi_y + \psi_z \Phi_z = 0\,,$$

zonder dat $\lambda = 0$, dan kan men een oppervlak $\psi\,(x\,y\,z) = \text{const.}$ geheel of gedeeltelijk als vasten wand beschouwen. Daar:

$$\psi_x = \psi_\lambda \lambda_x + \psi_\mu \mu_x + \psi_\nu \nu_x\,,$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor ψ_y en ψ_z gelden, terwijl Φ_x, Φ_y, Φ_z zich verhouden als $\cos\mu$, $\sin\mu\cos\nu$, $\sin\mu\sin\nu$, moet de functie ψ dus voldoen aan de voorwaarde, dat voor $\psi\,(\lambda\,\mu\,\nu) = \text{const.}$, zonder dat $\lambda = 0$, voldaan wordt aan:

$$\psi_\lambda\,[X_\lambda \cos\mu + Y_\lambda \sin\mu\cos\nu + Z_\lambda \sin\mu\sin\nu] +$$
$$+\,\psi_\mu\,[X_\mu \cos\mu + Y_\mu \sin\mu\cos\nu + Z_\mu \sin\mu\sin\nu] +$$
$$+\,\psi_\nu\,[X_\nu \cos\mu + Y_\nu \sin\mu\cos\nu + Z_\nu \sin\mu\sin\nu] = 0.$$

Wij slaan nu een weg in, die eenigszins afwijkt van de in het eerste hoofdstuk gevolgde methode, welke weg daar echter ook zeer goed kon worden gevolgd, doch niet gekozen behoefde te worden, omdat de uitkomsten der transformatie aldaar zich onmiddellijk in een eenvoudigen vorm voordeden. De bedoelde weg bestaat in de volgende substitutie:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\mu + y\sin\mu\cos\nu + z\sin\mu\sin\nu &= u\,e^{-\lambda},\\ -\,x\sin\mu + y\cos\mu\cos\nu + z\cos\mu\sin\nu &= v\,e^{-\lambda},\\ -\,y\sin\mu\sin\nu + z\sin\mu\cos\nu &= w\,e^{-\lambda},\end{aligned}\right\}\text{(III } m)$$

waarin wij $u\,v\,w$ als functies van $\lambda\,\mu\,\nu$ beschouwen. Dan is:

$$\left.\begin{aligned} x &= (u\cos\mu - v\sin\mu)\,e^{-\lambda},\\ y\sin\mu &= [(u\sin\mu + v\cos\mu)\sin\mu\cos\nu - w\sin\nu]\,e^{-\lambda},\\ z\sin\mu &= [(u\sin\mu + v\cos\mu)\sin\mu\sin\nu + w\cos\nu]\,e^{-\lambda}.\end{aligned}\right\}\text{(III } n)$$

Verder leidt men hieruit $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda, x_\mu, y_\mu \ldots$ af, benevens de onderstaande in het volgende herhaaldelijk voorkomende vormen:

$$x_\lambda\cos\mu + y_\lambda\sin\mu\cos\nu + z_\lambda\sin\mu\sin\nu = (u_\lambda - u)\,e^{-\lambda},$$
$$-\,x_\lambda\sin\mu + y_\lambda\cos\mu\cos\nu + z_\lambda\cos\mu\sin\nu = (v_\lambda - v)\,e^{-\lambda},$$
$$x_\mu\cos\mu + y_\mu\sin\mu\cos\nu + z_\mu\sin\mu\sin\nu = (u_\mu - v)\,e^{-\lambda},$$
$$-\,x_\mu\sin\mu + y_\mu\cos\mu\cos\nu + z_\mu\cos\mu\sin\nu = (v_\mu + u)\,e^{-\lambda},$$
$$x_\nu\cos\mu + y_\nu\sin\mu\cos\nu + z_\nu\sin\mu\sin\nu = (u_\nu - w)\,e^{-\lambda},$$
$$-\,x_\nu\sin\mu + y_\nu\cos\mu\cos\nu + z_\nu\cos\mu\sin\nu = (v_\nu - w\,cotg\,\mu)\,e^{-\lambda},$$

$$(-\,y_\lambda\sin\nu + z_\lambda\cos\nu)\sin\mu = (w_\lambda - w)\,e^{-\lambda},$$
$$y_\lambda\cos\nu + z_\lambda\sin\nu = (u_\lambda\sin\mu + v_\lambda\cos\mu - u\sin\mu - v\cos\mu)\,e^{-\lambda},$$

$$(-y_\mu \sin\nu + z_\mu \cos\nu)\sin\mu = (w_\mu - w \cot g\,\mu)\, e^{-\lambda},$$

$$y_\mu \cos\nu + z_\mu \sin\nu = (u_\mu \sin\mu + v_\mu \cos\mu + u\cos\mu - v\sin\mu)\, e^{-\lambda},$$

$$(-y_\nu \sin\nu + z_\nu \cos\nu)\sin\mu = \{w_\nu + \sin\mu\,(u\sin\mu + v\cos\mu)\}\, e^{-\lambda},$$

$$y_\nu \cos\nu + z_\nu \sin\nu = \left(u_\nu \sin\mu + v_\nu \cos\mu - \frac{w}{\sin\mu}\right) e^{-\lambda}.$$

Maakt men hiervan gebruik dan leveren de drie laatste vergelijkingen van (III i):

$$\left.\begin{aligned} u_\nu &= w_\lambda \\ v_\nu &= w_\mu \\ u_\mu &= v_\lambda \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III } o)$$

drie zeer eenvoudige betrekkingen. De eerste der vergelijkingen (III i) schrijven wij als volgt:

$$(-x_\nu \cos\mu - y_\nu \sin\mu \cos\nu - z_\nu \sin\mu \sin\nu)(z_\lambda \cos\nu - y_\lambda \sin\nu) +$$
$$+ (x_\nu \sin\mu - y_\nu \cos\mu \cos\nu - z_\nu \cos\mu \sin\nu)(z_\mu \cos\nu - y_\mu \sin\nu) +$$
$$+ (z_\nu \cos\nu - y_\nu \sin\nu)(x_\lambda \cos\mu + y_\lambda \sin\mu \cos\nu + z_\lambda \sin\mu \sin\nu -$$
$$- x_\mu \sin\mu + y_\mu \cos\mu \cos\nu + z_\mu \cos\mu \sin\nu) +$$
$$+ x_\lambda \sin\mu\,(y_\mu \cos\nu + z_\mu \sin\nu) - x_\mu \sin\mu\,(y_\lambda \cos\nu + z_\lambda \sin\nu) = 0;$$

terwijl door de invoering van $u\,v\,w$ ontstaat:

$$-(w_\lambda - w)^2 - (w_\mu - w\cot g\,\mu)^2 + (u_\lambda + v_\mu)[w_\nu +$$
$$+ \sin\mu\,(u\sin\mu + v\cos\mu)] + \sin^2\mu\,[(u_\lambda - u)(u + v_\mu) -$$
$$- (v_\lambda - v)(u_\mu - v)] = 0. \quad . \; . \; . \quad \text{(III } p)$$

De voorwaarde (III k) kan ook aldus geschreven worden:
Voor $\lambda = 0$ moet:

$$(x_\nu \sin\mu - y_\nu \cos\mu \cos\nu - z_\nu \cos\mu \sin\nu)(z_\mu \cos\nu - y_\mu \sin\nu) +$$
$$+ (-x_\mu \sin\mu + y_\mu \cos\mu \cos\nu + z_\mu \cos\mu \sin\nu)(z_\nu \cos\nu -$$
$$- y_\nu \sin\nu) = 0;$$

of $\qquad - (w_\mu - w \, cotg \, \mu)^2 +$

$$+ [w_\nu + sin \, \mu \, (u \, sin \, \mu + v \, cos \, \mu)] \, (u + v_\mu) = 0 \quad . \text{(III } q\text{)}$$

Evenzoo laat de vergelijking (III l) zich schrijven:

$$\begin{aligned}
&\psi_\lambda \, [(x_\nu \, sin \, \mu - y_\nu \, cos \, \mu \, cos \, \nu - z_\nu \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\mu \, cos \, \nu - y_\mu \, sin \, \nu) + \\
&+ (-x_\mu \, sin \, \mu + y_\mu \, cos \, \mu \, cos \, \nu + z_\mu \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\nu \, cos \, \nu - y_\nu \, sin \, \nu)] + \\
&+ \psi_\mu \, [(x_\lambda \, sin \, \mu - y_\lambda \, cos \, \mu \, cos \, \nu - z_\lambda \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\nu \, cos \, \nu - y_\nu \, sin \, \nu) + \\
&+ (-x_\nu \, sin \, \mu + y_\nu \, cos \, \mu \, cos \, \nu + z_\nu \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\lambda \, cos \, \nu - y_\lambda \, sin \, \nu)] + \\
&+ \psi_\nu \, [(x_\mu \, sin \, \mu - y_\mu \, cos \, \mu \, cos \, \nu - z_\mu \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\lambda \, cos \, \nu - y_\lambda \, sin \, \nu) + \\
&+ (-x_\lambda \, sin \, \mu + y_\lambda \, cos \, \mu \, cos \, \nu + z_\lambda \, cos \, \mu \, sin \, \nu) \, (z_\mu \, cos \, \nu - y_\mu \, sin \, \nu)] = 0;
\end{aligned}$$

of $\qquad \psi_\lambda \, [(u + v_\mu) \{ w_\nu + sin \, \mu \, (u \, sin \, \mu + v \, cos \, \mu) \} -$

$$\begin{aligned}
&- (w_\mu - w \, cotg \, \mu)^2] + \psi_\mu \, [(w_\lambda - w) \, (w_\mu - w \, cotg \, \mu) - \\
&- (v_\lambda - v) \, \{ w_\nu + sin \, \mu \, (u \, sin \, \mu + v \, cos \, \mu) \}] + \\
&+ \psi_\nu \, [(v_\lambda - v) \, (w_\mu - w \, cotg \, \mu) - (w_\lambda - w) \, (u + v_\mu)] = 0. \text{(III } q^*\text{)}
\end{aligned}$$

Stelt χ eene willekeurige functie van $\lambda \, \mu \, \nu$ voor, dan wordt aan deze betrekking voldaan door de onderstelling:

$$\left. \begin{aligned}
\psi_\lambda &= \chi \, (w_\lambda - w) \\
\psi_\mu &= \chi \, (w_\mu - w \, cotg \, \mu) \\
\psi_\nu &= \chi \, \{ w_\nu + sin \, \mu \, (u \, sin \, \mu + v \, cos \, \mu) \}
\end{aligned} \right\} \quad . \quad \text{(III } r\text{)}$$

en de hierdoor gedefinieerde functie $\psi =$ const. genomen, levert eene vergelijking, welke als die van den vasten wand kan beschouwd worden. Natuurlijk moeten, opdat een zoodanige functie ψ bestaat, de differentiaalquotienten van u, v, w en χ nog aan bepaalde betrekkingen voldoen.

Evenzeer zal de functie $\psi' =$ const. gesteld, waarbij ψ' bepaald wordt door de vergelijkingen (III r^*):

$$\left. \begin{aligned}
\psi'_\lambda &= \chi' \, (v_\lambda - v) \\
\psi'_\mu &= \chi' \, (u + v_\mu) \\
\psi'_\nu &= \chi' \, (w_\mu - w \, cotg \, \mu)
\end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad \text{(III } r^*\text{)}$$

als vergelijking van den vasten wand beschouwd mogen worden. Daarbij moeten dan ook de differentiaalquotienten van u, v, w en χ' naar $\lambda\, \mu\, \nu$ aan bepaalde, gemakkelijk aan te geven voorwaarden voldoen.

Het geval van een vlakken wand kan men aldus verkrijgen. Het platte vlak:

$$a x + b y + c z - l = 0\,,$$

zal als vaste wand kunnen beschouwd worden, indien voor alle punten van dat vlak:

$$a \cos \mu + b \sin \mu \cos \nu + c \sin \mu \sin \nu = 0\,;$$

dus $u\, v\, w$ invoerende, ook als deze laatste betrekking bestaat voor alle punten van het oppervlak:

$$a\,(u \cos \mu - v \sin \mu) + (b \cos \nu + c \sin \nu)\,(u \sin \mu + v \cos \mu) +$$
$$+ \frac{w}{\sin \mu}(c \cos \nu - b \sin \nu) = l = \text{const.}$$

Zoodat het X Y-vlak als vlakke wand beschouwd kan worden, als voor $\nu = 0$ ook tevens $w = 0$.

De drie functiën $u\, v\, w$ staan in een eenvoudig verband met de potentiaalfunctie Φ; want:

$$\Phi_\lambda = \Phi_x x_\lambda + \Phi_y y_\lambda + \Phi_z z_\lambda =$$
$$= \varkappa\, e^\lambda\,(x_\lambda \cos \mu + y_\lambda \sin \mu \cos \nu + z_\lambda \sin \mu \sin \nu) = \varkappa\,(u_\lambda - u).$$

Evenzoo: $\Phi_\mu = \varkappa\,(u_\mu - v)$ en $\Phi_\nu = \varkappa\,(u_\nu - w)$;

of volgens (III o):

$$\varkappa\,(u_\lambda - u) = \Phi_\lambda\,,$$
$$\varkappa\,(v_\lambda - v) = \Phi_\mu\,,$$
$$\varkappa\,(w_\lambda - w) = \Phi_\nu\,,$$

Aan de vergelijkingen (III o) wordt voldaan door te onderstellen:

$$\left.\begin{array}{r} u = f_\lambda \\ v = f_\mu \\ w = f_\nu \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III } s)$$

als f eene willekeurige functie van $\lambda\,\mu\,\nu$ is; deze moet dan aan de vergelijking (III p) en aan de voorwaarde (III q) voldoen. Het vraagstuk is hierdoor geheel teruggebracht tot de bepaling van éene functie f en wel zoodanig, dat deze, bij wederinvoering van de gewone notatie, voldoet aan de vergelijking:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\nu} - \frac{\partial f}{\partial\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\nu} - \frac{\partial f}{\partial\nu}\,cotg\,\mu\right)^2 -$$
$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} + sin\,\mu\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\,sin\,\mu + \frac{\partial f}{\partial\mu}\,cos\,\mu\right)\right] +$$
$$+ sin^2\mu\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} - \frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right)\right] = 0\,; \; (\text{III } t)$$

en aan de voorwaarde, dat voor $\lambda = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\nu} - \frac{\partial f}{\partial\nu}\,cotg\,\mu\right)^2 -$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} + sin\,\mu\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\,sin\,\mu + \frac{\partial f}{\partial\mu}\,cos\,\mu\right)\right] = 0 \;\; (\text{III } u)$$

zijn moet.

De vergelijking van den vasten wand wordt ten slotte $\psi = \text{const.}$, als ψ bepaald is door:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_\lambda = \chi\,(f_{\lambda\nu} - f_\nu) \\ \psi_\mu = \chi\,(f_{\mu\nu} - f_\nu\,cotg\,\mu) \\ \psi_\nu = \chi\,\{f_{\nu\nu} + sin\,\mu\,(f_\lambda\,sin\,\mu + f_\mu\,cos\,\mu)\} \end{array}\right\} \; . \quad (\text{III } v)$$

of $\psi' = \text{const.}$, indien:

$$\left.\begin{array}{l} \psi'_\lambda = \chi'\,(f_{\lambda\mu} - f_\mu) \\ \psi'_\mu = \chi'\,(f_\lambda + f_{\mu\mu}) \\ \psi'_\nu = \chi'\,(f_{\mu\nu} - f_\nu\,cotg\,\mu) \end{array}\right\} . \; . \; . \quad (\text{III } v^*)$$

waarin dan χ en χ' aan bepaalde voorwaarden voldoen moeten, opdat de tweede leden de differentiaalquotienten naar $\lambda\,\mu\,\nu$ van éene functie zijn kunnen; de vaste wand is een plat vlak, als voor $\nu = 0$ ook $f_\nu = 0$. Het verband tusschen de functie f en de potentiaalfunctie Φ is vrij eenvoudig; want uit de vergelijkingen, die het verband tusschen $u\,v\,w$ en Φ uitdrukken en (III s) volgt onmiddellijk:

$$\varkappa\,(f_\lambda - f) = \Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III } w)$$

Wij zijn nu met de transformatie juist zoover gevorderd, als wij in het eerste hoofdstuk bij de vergelijkingen (II g) en (II h) waren. Bij vergelijking der daar en hier verkregene vormen blijkt, hoeveel moeilijker het vraagstuk in het algemeene geval is, dan dit in het platte vlak was. Men moet nu trachten in plaats van de functie f eene andere, of in plaats van $f_\lambda\,f_\mu\,f_\nu$ drie met elkander samenhangende functiën in te voeren, hoofdzakelijk met het doel aan de voorwaarde (III u) een meer eenvoudigen vorm te geven. Dit is mij echter tot nog toe niet kunnen gelukken; evenmin ben ik er in geslaagd van de vergelijking (III t) onmiddellijk eene bijzondere oplossing te vinden, die bovendien aan de voorwaarde (III u) voldoet.

Trachten wij nu ook de in het tweede gedeelte van het eerste hoofdstuk gevolgde directe methode toe te passen op het geval, dat drie coördinaten in aanmerking komen. Dan moet overal in de door de vloeistof ingenomene ruimte:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0.$$

Voor alle punten van het oppervlak:

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \varkappa$$

moet $\Phi_n = 0$ zijn en de aan te wenden substitutie is:

$$\Phi_x = \varkappa\, e^{\lambda} \cos\mu\,,$$
$$\Phi_y = \varkappa\, e^{\lambda} \sin\mu \cos\nu\,,$$
$$\Phi_z = \varkappa\, e^{\lambda} \sin\mu \sin\nu\,,$$

die tot de vergelijkingen (III b) aanleiding geeft. Op dergelijke wijze als bij het vorige geval vindt men, dat overal in de door de vloeistof ingenomene ruimte:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\lambda\lambda}(\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2)+\Phi_{\mu\mu}(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2)+\\
&+\Phi_{\nu\nu}(\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2)+2\,\Phi_{\mu\nu}(\mu_x\nu_x+\mu_y\nu_y+\mu_z\nu_z)+\\
&+2\,\Phi_{\nu\lambda}(\nu_x\lambda_x+\nu_y\lambda_y+\nu_z\lambda_z)+2\,\Phi_{\lambda\mu}(\lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y+\lambda_z\mu_z)+\\
&+\Phi_\lambda(\lambda_{xx}+\lambda_{yy}+\lambda_{zz})+\Phi_\mu(\mu_{xx}+\mu_{yy}+\mu_{zz})+\\
&+\Phi_\nu(\nu_{xx}+\nu_{yy}+\nu_{zz})=0
\end{aligned}$$

zijn moet, welke betrekking wij kortheidshalve aldus schrijven:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\lambda\lambda}\,\Sigma\,\lambda^2+\Phi_{\mu\mu}\,\Sigma\,\mu^2+\Phi_{\nu\nu}\,\Sigma\,\nu^2+2\,\Phi_{\mu\nu}\,\Sigma\,\mu\,\nu+2\,\Phi_{\nu\lambda}\,\Sigma\,\nu\,\lambda+\\
&+2\,\Phi_{\lambda\mu}\,\Sigma\,\lambda\,\mu+\Phi_\lambda\,\Sigma\,\lambda+\Phi_\mu\,\Sigma\,\mu+\Phi_\nu\,\Sigma\,\nu=0. \quad \text{(III}\,aa)
\end{aligned}$$

De te vervullen voorwaarde wordt verder, dat voor $\lambda = 0$:

$$\Phi_x\,\lambda_x+\Phi_y\,\lambda_y+\Phi_z\,\lambda_z=0$$

of $$\Phi_\lambda\,\Sigma\,\lambda^2+\Phi_\mu\,\Sigma\,\lambda\,\mu+\Phi_\nu\,\Sigma\,\lambda\,\nu=0\ \ .\ \ .\ \ \text{(III}\,bb)$$

zijn moet.

Het komt dus er op aan die verschillende Σ's te berekenen; dit laat zich op de volgende wijze verrichten: Vorm bij de vergelijkingen (III b) $\sin\nu \times$ de eerste — $\cos\nu \times$ de tweede; evenzoo $\cos\nu \times$ de eerste $+ \sin\nu \times$ de tweede; met de derde en vierde vergelijking van (III b) heeft men dan vier vergelijkingen, die in den volgenden vorm kunnen gebracht worden:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda_x\sin\nu+\mu_z)\cos\mu+(\lambda_z-\mu_x\sin\nu)\sin\mu=\nu_y\sin\mu\\
&\quad(\lambda_x\sin\nu+\mu_z)\sin\mu-(\lambda_z-\mu_x\sin\nu)\cos\mu=\\
&\qquad\qquad=-\nu_x\sin\mu\cos\nu\,,\\
&(\lambda_x\cos\nu+\mu_y)\cos\mu+(\lambda_y-\mu_x\cos\nu)\sin\mu=-\nu_z\sin\mu\\
&\quad(\lambda_x\cos\nu+\mu_y)\sin\mu-(\lambda_y-\mu_x\cos\nu)\cos\mu=\\
&\qquad\qquad=\nu_x\sin\mu\sin\nu\,;
\end{aligned}\right\}\text{(III}\,cc)$$

en hieruit volgt dan weder het stelsel van vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x \sin\nu + \mu_z &= (\nu_y \cos\mu - \nu_x \sin\mu \cos\nu) \sin\mu\,,\\ \lambda_z - \mu_x \sin\nu &= (\nu_y \sin\mu + \nu_x \cos\mu \cos\nu) \sin\mu\,,\\ \lambda_x \cos\nu + \mu_y &= (-\nu_z \cos\mu + \nu_x \sin\mu \sin\nu) \sin\mu\,,\\ \lambda_y - \mu_x \cos\nu &= (-\nu_z \sin\mu - \nu_x \cos\mu \sin\nu) \sin\mu.\end{aligned}\right\}(\text{III}\,dd)$$

Door de eerste en derde vergelijking van (III *dd*) op elkander te deelen en de uitkomst te rangschikken, en evenzoo met de tweede en vierde, met de eerste en vierde en met de tweede en derde te handelen, verkrijgt men het volgend viertal van vergelijkingen:

$$\nu_x \lambda_x \sin\mu - (\mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z) \cos\mu = \nu_z \lambda_x \cos\mu \sin\nu -$$
$$- \mu_z \nu_x \sin\mu \sin\nu + \nu_y \lambda_x \cos\mu \cos\nu - \mu_y \nu_x \sin\mu \cos\nu\,,$$

$$(\nu_y \lambda_y + \nu_z \lambda_z) \sin\mu - \mu_x \nu_x \cos\mu = -\nu_x \lambda_z \cos\mu \sin\nu +$$
$$+ \mu_x \nu_z \sin\mu \sin\nu - \nu_x \lambda_y \cos\mu \cos\nu + \mu_x \nu_y \sin\mu \cos\nu\,,$$

$$-\mu_x \nu_x \sin\mu \cos^2\nu - \mu_z \nu_z \sin\mu - \nu_x \lambda_x \cos\mu \sin^2\nu -$$
$$- \nu_y \lambda_y \cos\mu = \nu_z \lambda_x \sin\mu \sin\nu + \mu_z \nu_x \cos\mu \sin\nu -$$
$$- \mu_x \nu_y \cos\mu \cos\nu - \nu_x \lambda_y \sin\mu \cos\nu\,,$$

$$-\mu_x \nu_x \sin\mu \sin^2\nu - \mu_y \nu_y \sin\mu - \nu_x \lambda_x \cos\mu \cos^2\nu -$$
$$- \nu_z \lambda_z \cos\mu = -\nu_x \lambda_z \sin\mu \sin\nu - \mu_x \nu_z \cos\mu \sin\nu +$$
$$+ \mu_y \nu_x \cos\mu \cos\nu + \nu_y \lambda_x \sin\mu \cos\nu.$$

Bij optelling der twee eerste wordt:

$$\Sigma\, \nu\lambda \,.\, \sin\mu - \Sigma\, \mu\nu \,.\, \cos\mu = (\mathrm{M}_y \sin\nu - \mathrm{M}_z \cos\nu) \cos\mu -$$
$$- (\mathrm{L}_y \sin\nu - \mathrm{L}_z \cos\nu) \sin\mu\,,$$

en evenzoo volgt uit de twee laatste:

$$-\Sigma\, \nu\lambda \,.\, \cos\mu - \Sigma\, \mu\nu \,.\, \sin\mu = (\mathrm{M}_y \sin\nu - \mathrm{M}_z \cos\nu) \sin\mu +$$
$$+ (\mathrm{L}_y \sin\nu - \mathrm{L}_z \cos\nu) \cos\mu\,,$$

alzoo:

$$\Sigma\, \nu\lambda = \mathrm{L}_z \cos\nu - \mathrm{L}_y \sin\nu \quad \text{en} \quad \Sigma\, \mu\nu = \mathrm{M}_z \cos\nu - \mathrm{M}_y \sin\nu. \quad (\text{III}\,ee)$$

Uit de vergelijkingen (III *dd*) volgt, door te vormen $\sin\nu \times$ de eerste $+ \cos\nu \times$ de derde:

$$\lambda_x + \mu_z \sin\nu + \mu_y \cos\nu = (\nu_y \sin\nu - \nu_z \cos\nu) \sin\mu \cos\mu;$$

en evenzoo uit de tweede en vierde:

$$-\mu_x + \lambda_z \sin\nu + \lambda_y \cos\nu = (\nu_y \sin\nu - \nu_z \cos\nu) \sin^2\mu;$$

terwijl uit de twee laatste vergelijkingen van (III *l*) volgt:

$$(\lambda_y \sin\nu - \lambda_z \cos\nu) \cos\mu - (\mu_y \sin\nu - \mu_z \cos\nu) \sin\mu + \\ + \nu_x \sin\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III } ff)$$

Deze vergelijkingen zullen bij de volgende herleidingen meermalen kunnen worden toegepast, evenzeer als de twee onderstaande, die men uit de eerste en derde resp. tweede en vierde vergelijking van (III *dd*) vormt:

$$\mu_z \cos\nu - \mu_y \sin\nu = (\nu_y \cos\nu + \nu_z \sin\nu) \sin\mu \cos\mu - \nu_x \sin^2\mu,$$

$$\lambda_z \cos\nu - \lambda_y \sin\nu = (\nu_y \cos\nu + \nu_z \sin\nu) \sin^2\mu + \nu_x \sin\mu \cos\mu.$$

Door bij (III *dd*) te vormen de eerste $\times$ de tweede $+$ de derde $\times$ de vierde, wordt:

$$\Sigma \lambda \mu - \Sigma \nu^2 . \sin^3\mu \cos\mu = \sin^2\mu (\mathrm{M}_y \cos\nu + \mathrm{M}_z \sin\nu) + \\ + \sin\mu \cos\mu (\mathrm{L}_y \cos\nu + \mathrm{L}_z \sin\nu).$$

Wanneer men echter voor de vergelijkingen (III *dd*) de daaruit volgende onderstaande neemt:

$$\lambda_x \sin\nu + \nu_x \sin^2\mu \cos\nu = -\mu_z + \nu_y \sin\mu \cos\mu,$$

$$\mu_x \sin\nu + \nu_x \sin\mu \cos\mu \cos\nu = \lambda_z - \nu_y \sin^2\mu,$$

$$\lambda_x \cos\nu - \nu_x \sin^2\mu \sin\nu = -\mu_y - \nu_z \sin\mu \cos\mu,$$

$$\mu_x \cos\nu - \nu_x \sin\mu \cos\mu \sin\nu = \lambda_y + \nu_z \sin^2\mu;$$

en van deze nu vormt: de eerste $\times$ de tweede $+$ de derde $\times$ de vierde, dan wordt:

$$\Sigma \lambda \mu + \Sigma \nu^2 . \sin^3\mu \cos\mu = (\mathrm{M}_x \cos\mu - \mathrm{L}_x \sin\mu) \sin\mu,$$

alzoo uit deze twee laatstgevondene betrekkingen in verband met (III h) :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\lambda\mu &= \sin\mu\,(M_x\cos\mu + M_y\sin\mu\cos\nu + M_z\sin\mu\sin\nu) = \\ &= (-L_x\sin\mu + L_y\cos\mu\cos\nu + L_z\cos\mu\sin\nu)\sin\mu\,, \\ \Sigma\nu^2 . \sin^3\mu\cos\mu &= \sin\mu\cos\mu\,(M_z - L_y\cos\nu - L_z\sin\nu) = \\ &= \sin^2\mu\,(-L_x - M_y\cos\nu - M_z\sin\nu)\,;\end{aligned}\right\}\text{(III } gg)$$

waaruit nog volgt:

$$\Sigma\nu^2 . \sin\mu = (M_z - L_y\cos\nu - L_z\sin\nu)\sin\mu -$$
$$-(L_x + M_y\cos\nu + M_z\sin\nu)\cos\mu.$$

Quadrateert men elk der vier vergelijkingen (III dd) en sommeert de uitkomsten, dan wordt:

$$\Sigma\lambda^2 + \Sigma\mu^2 = \Sigma\nu^2 . \sin^2\mu + 2\,(N_y\sin\nu - N_z\cos\nu),$$

en als men diezelfde vergelijkingen achtereenvolgens aldus schrijft:

$$\begin{aligned}\lambda_x\sin\nu &= -\mu_z + \nu_y\sin\mu\cos\mu - \nu_x\sin^2\mu\cos\nu\,, \\ \lambda_x\cos\nu &= -\mu_y - \nu_z\sin\mu\cos\mu + \nu_x\sin^2\mu\sin\nu\,, \\ \lambda_y &= \mu_x\cos\nu - \nu_z\sin^2\mu - \nu_x\sin\mu\cos\mu\sin\nu\,, \\ \lambda_z &= \mu_x\sin\nu + \nu_y\sin^2\mu + \nu_x\sin\mu\cos\mu\cos\nu\,;\end{aligned}$$

en
$$\begin{aligned}\mu_x\sin\nu &= \lambda_z - \nu_y\sin^2\mu - \nu_x\sin\mu\cos\mu\cos\nu\,, \\ \mu_x\cos\nu &= \lambda_y + \nu_z\sin^2\mu + \nu_x\sin\mu\cos\mu\sin\nu\,, \\ \mu_y &= -\lambda_x\cos\nu - \nu_z\sin\mu\cos\mu + \nu_x\sin^2\mu\sin\nu\,, \\ \mu_z &= -\lambda_x\sin\nu + \nu_y\sin\mu\cos\mu - \nu_x\sin^2\mu\cos\nu\,;\end{aligned}$$

daarna elk der vergelijkingen dier beide stelsels quadrateert en de uitkomsten voor elk stelsel sommeert:

$$\Sigma\lambda^2 - \Sigma\mu^2 - \Sigma\nu^2 . \sin^2\mu =$$
$$= [2\,L_x\cos\mu + 2\sin\mu\,(L_y\cos\nu + L_z\sin\nu)]\sin\mu\,,$$

en
$$\Sigma\lambda^2 - \Sigma\mu^2 + \Sigma\nu^2 . \sin^2\mu =$$
$$= [2\,M_x\sin\mu - 2\cos\mu\,(M_y\cos\nu + M_z\sin\nu)]\sin\mu\,;$$

dus in verband met eene vroegere uitkomst:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,\lambda^2 &= M_x \sin^2\mu - \sin\mu\cos\mu\,(M_y\cos\nu + M_z\sin\nu) + \\ &\quad + N_y\sin\nu - N_z\cos\nu\,, \\ \Sigma\,\mu^2 &= -L_x\sin\mu\cos\mu - \sin^2\mu\,(L_y\cos\nu + L_z\sin\nu) + \\ &\quad + N_y\sin\nu - N_z\cos\nu.\end{aligned}\right\}\text{(III } hh)$$

Thans blijft nog over $\Sigma\,\lambda$, $\Sigma\,\mu$, $\Sigma\,\nu$ te bepalen. Differentieeren wij daartoe de eerste vergelijking van (III *ff*) naar x, de vierde van (III *dd*) naar y en de derde naar z en sommeeren de uitkomsten, dan wordt:

$$\Sigma\,\lambda = -2\sin\mu\,(L_x\cos\mu + L_y\sin\mu\cos\nu + L_z\sin\mu\sin\nu).$$

Differentieeren wij evenzoo de tweede vergelijking van (III *ff*) en de derde en eerste vergelijking van (III *dd*) respectievelijk naar x, y, z en sommeeren, dan blijkt, dat:

$$\Sigma\,\mu = -L_x\cos 2\mu - (L_y\cos\nu + L_z\sin\nu)\sin 2\mu - \\ - (M_y\cos\nu + M_z\sin\nu).$$

Eindelijk door de derde vergelijking van (III *ff*) naar x en de eerste en derde van (III *cc*) naar y en z resp. te differentieeren:

$$\Sigma\,\nu\,.\sin\mu + \Sigma\,\mu\,\nu\,.\cos\mu = (L_y\sin\nu - L_z\cos\nu)\sin\mu + \\ + (M_y\sin\nu - M_z\cos\nu)\cos\mu - (N_x\cos\mu + N_y\sin\mu\cos\nu + \\ + N_z\sin\mu\sin\nu)\,;$$

dus: $$\Sigma\,\nu\,.\sin\mu = 2\,(L_y\sin\nu - L_z\cos\nu)\sin\mu + \\ + 2\,(M_y\sin\nu - M_z\cos\nu)\cos\mu = 2\cos\mu\,(M_y\sin\nu - M_z\cos\nu) - \\ - 2\,(N_x\cos\mu + N_y\sin\mu\cos\nu + N_z\sin\mu\sin\nu),$$

volgens de vroeger gevondene betrekkingen.

De vergelijkingen (III *aa*) en (III *bb*) nemen dus in dit geval volstrekt niet den eenvoudigen vorm aan, dien wij bij het bijzondere geval vonden. Wij gaan nog in de verschillende Σ's de grootheden $u\,v\,w$ invoeren. Van de in het begin van dit hoofdstuk ingevoerde Δ gebruik makende, wordt dan:

$$\Sigma\,\lambda^2 = \Delta\,[sin\,\mu\,(x_\mu\,sin\,\mu - y_\mu\,cos\,\mu\,cos\,\nu - z_\mu\,cos\,\mu\,sin\,\nu) + \\ + y_\nu\,sin\,\nu - z_\nu\,cos\,\nu] = -\,\Delta\,e^{-\lambda}\,[(u + v_\mu)\,sin\,\mu + \\ + \frac{w_\nu}{sin\,\mu} + u\,sin\,\mu + v\,cos\,\mu],$$

$$\Sigma\,\mu^2 = \Delta\,[sin\,\mu\,(-\,x_\lambda\,cos\,\mu - y_\lambda\,sin\,\mu\,cos\,\nu - z_\lambda\,sin\,\mu\,sin\,\nu) + \\ + y_\nu\,sin\,\nu - z_\nu\,cos\,\nu] = -\,\Delta\,e^{-\lambda}\,[u_\lambda\,sin\,\mu + \frac{w_\nu}{sin\,\mu} + v\,cos\,\mu].$$

$$\Sigma\,\nu^2 \,.\, sin\,\mu = \Delta\,[-\,x_\lambda\,cos\,\mu - y_\lambda\,sin\,\mu\,cos\,\nu - z_\lambda\,sin\,\mu\,sin\,\nu + \\ + x_\mu\,sin\,\mu - y_\mu\,cos\,\mu\,cos\,\nu - z_\mu\,cos\,\mu\,sin\,\nu] = -\,\Delta\,e^{-\lambda}\,(u_\lambda + v_\mu),$$

$$\Sigma\,\mu\,\nu = \Delta\,(z_\mu\,cos\,\nu - y_\mu\,sin\,\nu) = \Delta\,e^{-\lambda}\,\frac{w_\mu - w\,cotg\,\mu}{sin\,\mu},$$

$$\Sigma\,\nu\,\lambda = \Delta\,(z_\lambda\,cos\,\nu - y_\lambda\,sin\,\nu) = \Delta\,e^{-\lambda}\,\frac{w_\lambda - w}{sin\,\mu} = \frac{1}{\varkappa}\,\Delta\,e^{-\lambda}\,\frac{\Phi_\nu}{sin\,\mu},$$

$$\Sigma\,\lambda\,\mu = \Delta\,(x_\mu\,cos\,\mu + y_\mu\,sin\,\mu\,cos\,\nu + z_\mu\,sin\,\mu\,sin\,\nu)\,sin\,\mu = \\ = \Delta\,e^{-\lambda}\,(u_\mu - v)\,sin\,\mu = \frac{1}{\varkappa}\,\Delta\,e^{-\lambda}.\,\Phi_\mu\,sin\,\mu,$$

$$\Sigma\,\lambda = -\,2\,\Delta\,(x_\lambda\,cos\,\mu + y_\lambda\,sin\,\mu\,cos\,\nu + z_\lambda\,sin\,\mu\,sin\,\nu)\,sin\,\mu = \\ = -\,2\,\Delta\,e^{-\lambda}\,sin\,\mu\,(u_\lambda - u),$$

$$\Sigma\,\mu = \Delta\,[cos\,\mu\,(-\,x_\lambda\,cos\,\mu - y_\lambda\,sin\,\mu\,cos\,\nu - z_\lambda\,sin\,\mu\,sin\,\nu) + \\ + sin\,\mu\,(x_\lambda\,sin\,\mu - y_\lambda\,cos\,\mu\,cos\,\nu - z_\lambda\,cos\,\mu\,sin\,\nu) - \\ - (y_\mu\,cos\,\nu + z_\mu\,sin\,\nu)] \\ = -\,\Delta\,e^{-\lambda}\,[cos\,\mu\,(u_\lambda + v_\mu) + sin\,\mu\,(u_\mu - v + v_\lambda - v)],$$

$$\Sigma \nu . \sin\mu = 2 \Delta [(y_\lambda \sin\nu - z_\lambda \cos\nu) \sin\mu + \cos\mu (y_\mu \sin\nu - z_\mu \cos\nu)] =$$
$$= 2 \Delta e^{-\lambda} [w \operatorname{cosec}^2 \mu - w_\lambda - w_\mu \operatorname{cotg} \mu].$$

Drukt men daarna $u\,v\,w$ in f uit, dan gaan de twee vergelijkingen (III aa) en (III bb) over in twee andere, die twee functiën Φ en f bevatten, tusschen welke het verband (III w) bestaat. Het vraagstuk verkrijgt op deze wijze geen eenvoudigen vorm, al kan men ook van (III w) gebruik makende, de functie Φ met hare differentiaalquotienten door f, f_λ, f_μ, enz. vervangen en het geheele vraagstuk daardoor op eene tweede wijze tot de bepaling eener enkele functie terugbrengen. De differentiaalvergelijking, waaraan dan f te voldoen heeft, wordt echter, zooals men gemakkelijk inziet, van den tweeden graad en van de derde orde, zoodat de mededeeling daarvan achterwege blijven kan.

Aan het slot spreek ik de verwachting uit, dat een zich in de hier aangegevene richting bewegend onderzoek te eeniger tijd tot oplossingen voor het tot nog toe voor ons ontoegankelijke vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte moge voeren.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De geometrische theorie der kromme lijnen heeft zich nog niet geheel losgemaakt van de toepassing der algebra. Pogingen, aangewend om die theorie onafhankelijk van laatstgenoemde hulpwetenschap te ontwikkelen, verdienen belangstelling. Uit dit oogpunt beschouwd verdient Reye's methode (Geometrie der Lage) de voorkeur boven die van Steiner (Vorl. über synth. Geom.).

II.

De invoering van het begrip „imaginaire elementen" in de synthetische meetkunde kan langs zuiver meetkundigen weg geschieden.

III.

Vooral met het oog op de behandeling der mechanica, is de invoering van de grondbegrippen der vectorentheorie bij het elementair wiskundig onderwijs wenschelijk

IV.

De grondslagen van de theorie der quaternionen moeten in mechanischen zin gedefinieerd worden.

V.

Van de methoden ter behandeling van de vraagstukken omtrent vloeistofstralen, bij welke de beweging door slechts twee coördinaten uitgedrukt wordt, is die, welke door Kirchhoff in zijne „Vorlesungen über mathematische Physik" gevolgd is, de meest ingewikkelde. Zij is tevens bij het tegenwoordig standpunt der wiskunde die, welke het minst geschikt is om uitgebreid te worden ter oplossing van meer algemeene gevallen van de theorie der vloeistofstralen.

VI.

De invoering van Schering's „algemeene differentialen" bij de theorie van Hamilton-Jacobi verdient aanbeveling.

VII.

Eerst door de beschouwingen van Clebsch omtrent de richtingen van de drie hoofdassen van inertie voor elk punt der ruimte is de stelling van Cauchy-Poinsot, dat voor elk punt der ruimte drie zoodanige assen bestaan, als het ware belichaamd; daarom verdient aan Clebsch' beschouwingen niet eene plaats onder, doch eene naast die van Poinsot te worden ingeruimd.

VIII.

Het is als een vooruitgang te beschouwen, wanneer men er in slaagt, een tot nu toe als statisch werkend beschouwde kracht, als een gevolg van bewegingsverschijnselen te verklaren.

IX.

De verklaring van de spanning van een gas volgens de vortex-atoomtheorie, die Sir William Thomson (Nature, Vol. 24) geschetst en J. Thomson (A Treatise on the motion of vortex rings) uitgewerkt heeft, is *van het standpunt der vortex-atoomtheorie* onhoudbaar.

X.

Tegen de vele bezwaren, aan de toepassing der vortex-atoomtheorie tot nu toe verbonden, wegen de daarmede verkregene uitkomsten niet op.

XI.

Het is wenschelijk, dat het begrip „electromotorische kracht", vooral in elementaire leerboeken, meer uitvoerig toegelicht worde.

XII.

Helmholtz heeft *niet* bewezen, dat de grondformule van Weber voor de electrische werkingen bij radiale stroomingen in een bol (Gesamm. Abh. Bd. I

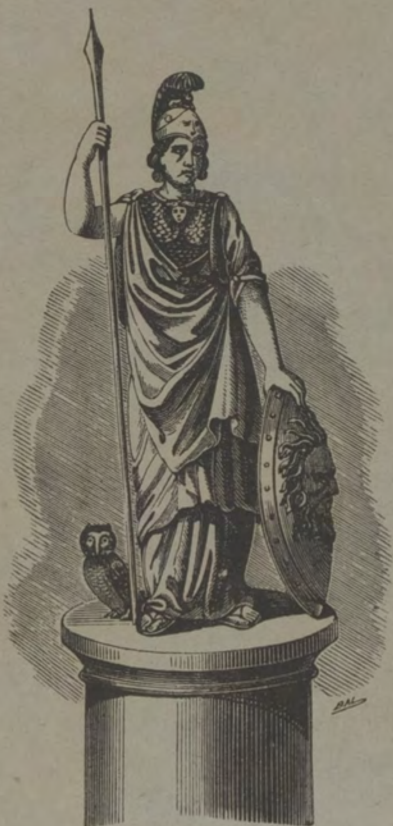
Inleiding pag. 554 en later § 5) tot *steeds* grooter wordende snelheden der electriciteit aanleiding zou kunnen geven, dus ook niet, dat deze wet met de ervaring strijdig is.

XIII.

Het ware wenschelijk aan gymnasia en hoogere burgerscholen de tegenwoordig veelal afzonderlijk behandelde rekenkunde en stelkunde tot één leervak onder den naam „algemeene rekenkunde" te vereenigen.

XIV.

Vooral voor hen, die eene klassieke opleiding genieten, is de kennis van de wijze van ontstaan en die van het wezen der hedendaagsche zedelijke en maatschappelijke verhoudingen, van wetenschap, kunst en godsdienst noodzakelijk.



Gedrukt bij E. J. Brill, Leiden.