W. H. NIEUWHUIS.

OVER HET BEGINSEL DER VIRTUEELE SNELHEDEN.

LEIDEN. J. A. RENSINK.

~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

OVER HET

BEGINSEL DER VIRTUEELE SNELHEDEN.

Gedrukt bij J. J. Groen, te Leiden.

OVER HET BEGINSEL
DER
VIRTUEELE SNELHEDEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. R. J. FRUIN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op Vrijdag den 28sten Juni 1878, des namiddags te 3 uren,

DOOR

Willem Hillebrand Nieuwhuis,

GEBOREN TE BIERUM.

LEIDEN,
A. J. A. RENSINK,
1878.

Aan mijne Ouders.

HOOFDSTUK I.

INLEIDING.

§ 1.

Een stelsel is eene groep van stoffelijke punten, die op de eene of andere wijze verbonden zijn.

Door de verbintenis van een stelsel verstaat men in 't algemeen datgene, waardoor de uitwerking der krachten, die op het stelsel aangrijpen, gewijzigd wordt; immers de punten kunnen niet in standen komen, strijdig met die verbintenis.

Wanneer de verbintenissen door krachten kunnen worden vervangen, die de punten van het stelsel noodzaken aan de bedoelde verbintenissen te voldoen, dan kan het stelsel na invoering dier krachten als vrij van de verbintenissen beschouwd worden.

Dit is echter alleen dan mogelijk, wanneer de verbintenissen door wetten kunnen worden uitgedrukt, of m. a. w. in vergelijking kunnen worden gebracht.

Die vergelijkingen worden voorwaardesvergelijkingen geheeten, en de krachten, welke de physische verbintenissen vervangen, noemt men verbindingskrachten.

De krachten worden onderscheiden in inwendige en uitwendige krachten. Inwendige krachten gaan uit van punten van het stelsel en werken op andere punten daarvan; uitwendige krachten gaan uit van punten buiten het stelsel gelegen.

Een stelsel is vrij in de ruimte, wanneer de verbintenissen alleen tusschen de punten van het stelsel bestaan en niet ook met punten in de ruimte er buiten gelegen.

Een stelsel is onveranderlijk, wanneer de punten een volkomen vast geheel uitmaken. Dit wordt uitgedrukt door de voorwaarde dat de onderlinge afstanden der punten dezelfde blijven. Daar er nu in de natuur wel geen volkomen onveranderlijk stelsel (système solide, starres System) voorkomt, zoo is de bovengenoemde voorwaarde in werkelijkheid eene onvolkomen vertaling van de wezenlijke verbintenis of van de physische natuur van het stelsel.

In 't algemeen kan men opmerken dat de mathematische uitdrukking der physische natuur van een stelsel steeds approximatief is. Bovendien is ons de inwendige physische gesteldheid der lichamen nog slechts gedeeltelijk bekend.

Het eenvoudigste stelsel is het stoffelijk punt; het is vrij, wanneer het aan geene enkele voorwaarde onderworpen is. Een punt is beperkt, wanneer zijne plaats aan zekere verbintenissen moet voldoen, b. v. wanneer het steeds op een gegeven oppervlak of op een gegeven kromme moet blijven.

Tot de duidelijk veranderlijke stelsels behooren o. a. de elastieke en de weeke lichamen, de drupvormige en de gasvormige vloeistoffen.

Zijn al de punten van een veranderlijk stelsel volkomen vrij beweeglijk, dan heeft men met het oog op den toestand van rust of beweging slechts ieder punt afzonderlijk te beschouwen.

In den regel zijn echter de punten, die een stelsel vormen, niet volkomen vrij, maar aan bepaalde voorwaarden onderworpen; eene kracht, die op een der punten aangrijpt, heeft dan niet dezelfde uitwerking als wanneer het punt geïsoleerd ware.

§ 2.

Wanneer een stelsel krachten, dat op een punt of op een stelsel van punten werkt, geene wijziging brengt in den toestand van rust of van beweging waarin zich dat punt of dat stelsel punten bevindt, dan zegt men dat die krachten in evenwicht zijn. Hoewel minder juist, is het toch gebruikelijker te zeggen dat het punt of het stelsel punten in dat geval in evenwicht is. De theorie van het evenwicht, d. w. z. de wetenschap, die zich bezig houdt met het opsporen der voorwaarden van evenwicht, noemt men Statica.

Uit een statisch oogpunt is een werktuig niet anders dan een stelsel van lichamen, onderworpen aan zekere verbintenissen die de voorwaarden van evenwicht wijzigen. Zoo houden twee krachten die op een lichaam werken elkaar in evenwicht als zij gelijk en tegengesteld zijn; heeft het lichaam echter een vast punt, dan is slechts noodig dat de resultante van beide krachten door dit vaste punt ga.

De pogingen, die in den loop der tijden gedaan zijn om de voorwaarden voor 't evenwicht der verschillende werktuigen onder een algemeen gezichtspunt te brengen, voerden eindelijk tot eene stelling die de geheele Statica omvat en onder den naam van „beginsel der virtueele snelheden" in de wetenschap werd ingevoerd.

Wanneer men aan een stelsel van stoffelijke punten die onderworpen zijn aan zekere verbintenissen, eene onbepaald-kleine verplaatsing geeft, en wel zoodanig dat het stelsel steeds aan de verbintenissen blijft voldoen, dan heeft men virtueele snelheid (virtuelle Geschwindigkeit, vitesse virtuelle, virtual velocity) van een punt de verplaatsing genoemd, die dat punt ondergaat.

Projecteert men nu die virtueele snelheid op de richting der kracht, die in 't bedoelde punt aangrijpt, en neemt men het product van projectie en kracht, dan verkrijgt men het „virtueel moment" dier kracht.

Het virtueel moment heeft hetzelfde teeken als de geprojecteerde virtueele snelheid, en deze laatste is positief of negatief, naar gelang zij, gerekend van het aangrijpingspunt af, in dezelfde richting valt als de kracht of in tegengestelde richting.

Nu wordt het beginsel der virtueele snelheden meestal op de volgende wijze uitgedrukt: wanneer een stelsel punten onder de werking van een willekeurig aantal krachten in evenwicht is, en de punten onbepaald-kleine verplaatsingen ondergaan, doch zoo dat zij steeds aan hunne verbintenissen blijven voldoen, dan is de som der virtueele momenten van alle krachten nul; en omgekeerd, wanneer de som der virt. mom. gelijk nul is, dan is het stelsel in evenwicht.

HOOFDSTUK II.

OORSPRONG EN GESCHIEDENIS VAN HET BEGINSEL DER VIRTUEELE SNELHEDEN TOT EN MET LAGRANGE.

§ 1.

„En réfléchissant sur les phénomènes les plus familiers, „il arrive souvent qu'on entrevoit certains principes, aux„quels sans doute il serait dangereux de se livrer, avant „que d'être parvenu à leur donner la précision et la rigueur „mathématiques, mais qui n'en sont pas moins des indi„cations précises du but vers lequel on doit diriger ses „recherches. C'est ainsi qu'ont été découverts la plupart „des principes les plus importants et les plus usuels „de la mécanique, tels que celui des vitesses virtuelles, „celui de la conservation des forces vives, etc.

„Ces principes ont été d'abord en quelque sorte, aperçus „dans le vague comme par instinct, et appuyés plutôt „sur leur conformité avec les résultats particuliers, aux„quels on arrivait par d'autres voies, que sur des démon„strations générales et rigoureuses. Mais les efforts que „l'on a faits pour leur donner la perfection convenable,

„ont été utiles, et c'est ainsi qu'on est parvenu à les „approprier au calcul, et à ramener toute la mécaniqne „à de simples questions d'analyse."

Deze woorden van CARNOT (Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement par L. M. N. CARNOT. Paris, Bachelier. An XI. — 1803. pag. 89. Art. 119 en 120 zijn in volle mate van toepassing op het beginsel der virt. snelh.

Dit beginsel doorloopt de geheele geschiedenis der mechanica. Reeds de Grieken, bij wie men de kiem onzer hedendaagsche Mechanica moet zoeken, hielden zich bezig met het opsporen der voorwaarden van evenwicht. Schoon hun reeds aanzienlijke wiskundige hulpmiddelen ten dienste stonden, maakten zij daarvan geen gebruik om de beweging der lichamen na te gaan; de zoogenaamde Dynamica waarvan GALILEI de eerste grondslagen gelegd heeft, kwam eerst sedert de 16de eeuw tot haar recht; voor dien tijd werd slechts de Statica beoefend.

Het schijnt dat reeds ARISTOTELES (384—322 v. Chr.) de belangrijkste beginsels der Mechanica gekend heeft. Zie „ARISTOTELIS Mechanica Graeca, emendata, Latina facta, et commentariis illustrata ab Henrico Monantholio. Lugduni B. Anno CIↃ.IↃC." Zoo kent hij de samenstelling der bewegingen (manifestum igitur quod latum secundum diametrum duabus lationibus necesse habet in ratione laterum ferri, pag. 29 van 't aangehaalde werk); wil het windas, de katrol, het getande rad en de wig tot den hefboom terug brengen (igitur et quae circa vectem ad libram, et fortassis alia omnia, quae circa motiones mechanicas, ad vectem, ibid. pag. 20); en leert bovendien dat bij een hefboom die in evenwicht is de gewichten omgekeerd evenredig zijn met de doorloopen wegen (si igitur α est quod movet, β quod movetur, γ longitudo per quam motum est, δ tempus quo movetur, sanè aequali tempore δ aequalis vis α dimidium ipsius β movebit per longitudinem duplo majorem quam γ....: Natur. auscult., lib. VII, cap. 6. Aangehaald uit FOURIER, Memoire sur la statique").

Volgens FOURIER vindt men dus reeds bij ARISTOTELES de eerste sporen van het beg. der virt. snelh. Voor 't geval toch dat we met een hefboom te doen hebben, gaat het beginsel over in de volgende stelling: wanneer de hefboom in evenwicht zal zijn, dan moeten kracht en last zich omgekeerd verhouden als de virt. snelh. hunner aangrijpingspunten, d. i. als de wegen, welke die punten in denzelfden tijd zouden afleggen.

Is bij ARISTOTELES echter alles onduidelijk en onbepaald, anders is dit bij ARCHIMEDES (287—212 v. Chr.) die als grondvester der Statica moet beschouwd worden. Van de onderstelling uitgaande, dat even zware lichamen op gelijke afstanden werkende in evenwicht zijn, toont hij aan dat lichamen, aan de uiteinden van een hefboom aangebracht, evenwicht maken, wanneer hunne gewichten omgekeerd evenredig zijn met hunne afstanden van 't steunpunt. Hij bewijst dat dit niet alleen geldt wanneer de lichamen meetbaar, maar ook wanneer zij onmeetbaar zijn. (Zie „Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt von Ernst Nizze. 1824. Satz 6 und 7"). Bovendien ontwikkelde ARCHIMEDES de theorie van 't zwaartepunt en paste de Statica op de Meetkunde toe o. a. tot het beschrijven van kromme lijnen. Zijne werkzaamheden tijdens het beleg van Syracuse, alsmede zijn

zijn bekend gezegde- „geef mij een steunpunt en ik zal de aarde van hare plaats bewegen" bewijzen, welk een juist inzicht hij had in de theorie der enkelvoudige werktuigen.

§ 2.

Sedert ARCHIMEDES, aan wien men het beginsel van den hefboom te danken heeft, trachtte men de voorwaarden voor 't evenwicht van alle werktuigen, enkelvoudige en samengestelde, tot dit beginsel terug te brengen. Doordien echter niemand het begrip van kracht invoerde als oorzaak der beweging, en de samenstelling der bewegingen waarvan ARCHIMEDES zulke vernuftige toepassingen had geleerd, niet overgedragen werd op de krachten, maar men zich bijna tweeduizend jaren lang angstvallig aan de Aristotelische philosophie vastklemde, leverden bovengenoemde pogingen zeer sobere resultaten.

Eerst toen SIMON STEVIN (1548—1620) de samenstelling en ontbinding der krachten uitvond (Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges par Albert Girard Samielois. A Leyde chez B. et A. Elzevier. Anno CIↃ.IↃ CXXXIV. pag. 504—508), en daardoor het beginsel leverde, waarop nog tegenwoordig vele stellingen der Statica berusten, kon de leer van het evenwicht goede vorderingen maken.

Reeds lang had de ervaring geleerd, dat bij een hefboom die in evenwicht is, kracht en last altijd omgekeerd evenredig zijn met de ruimten die beide in denzelfden tijd kunnen doorloopen. „Cependant" zegt LAGRANGE met zijne gewone voorzichtigheid „il ne parait pas que les

„Anciens aient eu connaissance de cette loi. Guido Ubaldi „est peut-être le premier qui l'ait aperçue dans le levier „et dans les poulies mobiles ou moufles." (Mécanique analytique par J. L. Lagrange. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Tome premier. 1811. Première Partie. Section première. Art. 16.)

Het kan ons niet verwonderen dat er weldra pogingen werden aangewend om te zien of de bovenvermelde wet ook bij andere werktuigen doorging en weldra bemerkte men dat zij gold bij al de zoogenoemde enkelvoudige werktuigen. Guido Ubaldus, Markies del Monte, (1545—1607) nam haar waar aan den hefboom, het windas en de katrol; 't gelukte hem echter niet haar ook toe te passen op het hellend vlak en de daarmee samenhangende werktuigen, zoodat duidelijk blijkt dat hij de algemeenheid van het beginsel volstrekt niet heeft ingezien. (Zie o. a. pag. 42, 43, 103, van „Gvidi Vbaldi E Marchionibus Montis Mechanicorum Liber. Pisavri. M.D.LXXVII".)

§ 3.

Galilei (1564—1642) was de eerste. die duidelijk de bekende betrekking uitsprak, welke er bestaat tusschen twee op een in evenwicht verkeerend werktuig aangrijpende krachten en de snelheden die hunne aangrijpingspingspunten zouden ondergaan, indien men aan dat werktuig eene onbepaald-kleine verplaatsing meedeelde. Tevens voerde hij de benaming „moment eener kracht" in. Hij verstaat daardoor de poging, de energie, de „impetus" van die kracht om beweging voort te brengen; doet vervolgens zien dat het moment (momentum, movimentum) evenredig is aan het product van kracht en virtueele snelheid, en zegt eindelijk dat twee krachten evenwicht maken wanneer hunne momenten gelijk en tegengesteld zijn.

Deze wet wordt het beginsel van GALILEI genoemd. Volgens LAGRANGE (Méc. anal. T. I, pag. 178) heeft GALILEI zich van dit beg. der virt. snelh. niet alleen bediend om statische stellingen in engeren zin, maar ook om de voornaamste theorema's der hydrostatica aan te toonen. Zoo leidt hij in zijne verhandeling „intorno alle cose che stanno su l'acqua, o che in quella si muovono" uit dit beginsel het evenwicht van water in een hevel af.

Nog sterker dan LAGRANGE drukt zich Dr. E. DÜHRING uit op pag. 79 van den tweeden druk zijner „Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. 1877". Daar heet het: „Bei Galilei findet sich dieses Princip, „wenn auch nicht dem Namen, so doch der Sache nach „in allen Richtungen verwerthet. Es wird in der ganzen „Schrift „Della scienza mecanica" für die verschiedenen „einfachen Potenzen und ausserdem noch besonders in den „hydrostatischen Untersuchungen der Abhandlung über „die schwimmenden Körper — boven reeds genoemd —, „übrigens aber auch sonst vielfach zur Anwendung ge„bracht. Ja man kann sagen, dass die Benutzung dieses erst „verhältnissmässig sehr spät zu vollerer Anerkennung ge„langten und berühmt gewordenen Princips einen beson„dern Charakterzug der natürlichen Vorstellungsarten Ga„lilei's ausgemacht habe".

Wat UBALDUS niet had kunnen doen, dat gelukte aan GALILEI volkomen. Hij paste het beg. der virt. snelh. ook toe op het hellend vlak en de daarmee samenhangende werktuigen. (Zie „Opere di Galileo Galilei, T. I, pag. 265, Bologna 1655".) 't Is echter niet te ontkennen dat hij in sommige zijner werken er niet die toepassing van maakt die men had mogen verwachten, zoodat hij zich misschien de zaak nog niet zoo duidelijk voorstelde als sommigen zijner vereerders wel hebben willen beweren. In ieder geval heeft hij steeds slechts het oog op twee krachten.

Bovendien is het thans zeker dat noch aan Del Monte, noch aan Galilei de prioriteit van deze ontdekkingen toekomt. Eene eeuw voor hen leefde er nl. in Italië een man die als dichter, schilder, beeldhouwer en musicus, als wis-, natuur- en werktuigkundige uitblonk; ik bedoel Leonardo da Vinci (1452—1519). Hij was de eerste die zich aan het gezag van Aristoteles ontrukte. In verschillende wetenschappen, vooral in de Mechanica, stond hij verre boven zijne tijdgenooten. De wetten der Statica waren hem volkomen duidelijk; zoowel katrol en takel als hellend vlak en wig bracht hij tot het beginsel van den hefboom terug. Ook was hij reeds bekend met de verhouding, die er bestaat bij den hefboom en andere enkelvoudige werktuigen tusschen de krachten en de relatieve snelheden (verplaatsingen) hunner aangrijpingspunten, en grondde daarop zelfs het evenwicht dier werktuigen. Bij da Vinci vindt men dus de eerste duidelijke sporen van het beg. der virt. snelh.

Jammer dat zijne manuscripten zoo lang verborgen zijn gebleven, en daarom zijne ontdekkingen voor de tweede keer moesten worden gedaan, deels door Ubaldus en Galilei, deels door Stevin. (Zie „Leonardo da Vinci als Ingenieur und Philosoph von Dr. Hermann Grothe, Berlin 1874", alsmede „Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Paris, 1838—1841".)

§ 4.

Welke gezonde denkbeelden Galilei overigens op mechaniech gebied reeds bezat moge uit de volgende aanhaling blijken (Les Méchaniques de Galilée mathématicien et ingénieur du Duc de Florence, traduites de l'Italien par L. P. M. M. — Le Père Maria Mersenne — A Paris. M.DC.XXXIV. pag. 2—5.):

„Il ne faut pas croire qu' on puisse lever de grands „fardeaux avec peu de force, car la nature ne peut être „trompée, ni céder à ses droits....

„Il faut donc ici considérer quatre choses: le fardeau „que l'on veut transporter, la force qui le doit mouvoir, „la distance par laquelle se fait le mouvement, et le temps „du dit mouvement, parce qu' il sert pour en déterminer „la vitesse, puisqu' elle est d'autant plus grande que le „corps mobile ou le fardeau passe par une plus grande „distance en même temps: de sorte que si l'on suppose „telle résistance, telle force et telle distance déterminée „que l'on voudra, il n'y a nul doute que la force requise „conduira le fardeau à la distance donnée, quoique ladite „force soit très-petite, pourvu que l'on divise le fardeau „en tant de parties que la force en puisse mouvoir une, „car elle les transportera toutes les unes après les autres; „d'où il s'ensuit que la moindre force du monde peut „transporter tel poids que l'on voudra.

„Mais l'on ne peut dire à la fin du transport, que l'on „ait remué un grand fardeau avec peu de force, puisqu'

„elle a toujours été égale à chaque partie du fardeau: de „manière que l'on ne gagne rien avec les instruments, „d'autant que si l'on applique une petite force à un grand „fardeau, il faut beaucoup de temps, et que si l'on veut „le transporter en peu de temps, il faut une grande force. „D'où l'on peut conclure qu' il est impossible qu' une „petite force transporte un grand poids dans moins de „temps qu' une plus grande force.

„Néanmoins les machines sont utiles pour mouvoir de „grands fardeaux tout d'un coup sans les diviser, parce „que l'on a souvent beaucoup de temps et peu de force; „c'est pourquoi la longueur du temps récompense le peu „de force. Mais celui-là se tromperait qui voudrait abréger le temps en n'usant que d'une petite force, et montrerait „qu' il n'entend pas la nature des machines, ni la raison „de leurs effets.

„Or il faut conclure que l'on ne peut rien gagner en „force que l'on ne le perde en temps, et que la plus grande „utilité des machines consiste à épargner la dépense, comme „j'ai montré, et conséquemment que ceux qui travaillent „à suppléer la force et le temps tout ensemble, neméri„tent nullement d' avoir du temps, puis qu' ils l'emploient „si mal".

Dat men in tijd of in snelheid verliest, wat men in kracht of in arbeid wint, werd ook reeds, hoewel minder duidelijk en algemeen dan bij Galilei, door Ubaldus ingezien. Immers op pag. 105 van zijn reeds vroeger aangehaald werk zegt hij met het oog op den takel: „Ex „dictis etiam manifestum est, quò pondus facilius moue„tur, eò quoq; tempus maius esse; quò verò difficilius, „eò minus esse. et è conuerso".

§ 5.

Ter wille der volledigheid moet nog vermeld worden dat ook Cartesius (1596—1650) de Statica tot een beginsel herleid heeft, dat in den grond der zaak met dat van Galilei overeenkomt. Hij neemt nl. als evident aan, dat er eene even groote kracht noodig is om een gewicht tot eene zekere hoogte op te heffen, als om een twee maal grooter gewicht tot eene twee maal kleinere hoogte op te voeren enz. (Zie „Descartes, Lettres. T. I. Paris. Lett. 73"; alsmede zijn „Traité de Mécanique", voorkomende in zijne „Opuscula posthuma".).

Vervolgens merkt Descartes op dat men bij het vergelijken van krachten die elkaar in evenwicht houden, alleen op het begin der mogelijke bewegingen heeft te letten. Hij past zijn beginsel nu allereerst toe op katrol en blokkatrol, waarop later Lagrange terugkwam toen hij de blokkatrol als uitganspunt nam voor een algemeen bewijs van het beg. der virt. snelh. Verder past Cartesius zijn beginsel ook toe op den hefboom, het hellend vlak, etc. Wat den hefboom betreft, komt hij zoodoende tot de naar hem genoemde grondstelling van Cartesius: twee gewichten aan den hefboom zijn in evenwicht wanneer zij omgekeerd evenredig zijn met de loodrechte wegen die zij zouden doorloopen wanneer de hefboom gedraaid werd.

Hiermede is Descartes echter te veel eer aangedaan, want, al moge het waar wezen dat de katrol eene meer aanschouwelijke voorstelling geeft van het beg. der virt. snelh. dan de hefboom, tot wezenlijke uitbreiding van het beginsel van Galilei heeft hij niets bijgedragen. Ook stond

Cartesius wat zijne kennis van Mechanica betreft volstrekt niet op de hoogte van zijn tijd; over de werken van Galilei en Stevin haalde hij de schouders op.

We kunnen niet nalaten hier op te merken dat, wat Cartesius kracht heet, tegenwoordig arbeid genoemd wordt; en dat bij Galilei de begrippen van kracht en moment elkaar ongeveer dekken. (Zie o. a. het reeds genoemde werk van Dühring, pag. 23—28.).

Eindelijk zij nog vermeld dat ook Pascal (1623—1662) in zijn „Traité de l'équilibre des liqueurs, Chap. II" van 't beginsel van Galilei gebruik gemaakt heeft; alsmede Musschenbroek (1692—1761) in zijne „Introductio ad philosophiam naturalem, § 462", terwijl Newton (1642—1727) er slechts ter loops melding van maakt in zijne „Pilosophiae naturalis principia mathematica". De laatstgenoemde heldert het op door de botsing der lichamen en brengt het als 't ware terug tot zijn beginsel der gelijkheid van actie en reactie. Zeer terecht merkt Dühring op dat bij deze beschouwing van Newton het eigendommelijke van het beg. der virt. snelh. geenszins tot zijn volle recht komt, „indem der Satz von den virt. Geschw. specifisch „für die aus der Systemverfassung und den äussern Be„wegungseinschränkungen hervorgehenden Möglichkeiten „der relativen Geschwindigkeitsentwicklungen gelten soll".

§ 6.

Toen men eenmaal gevonden had dat de stelling, dat voor 't geval van evenwicht de krachten omgekeerd evenredig zijn met de virt. snelh. hunner aangrijpingspunten volgens de richtingen dier krachten, niet alleen bij den hefboom, maar ook bij de andere enkelvoudige werktuigen doorging, lag het voor de hand hieruit het besluit te trekken, dat zij ook gelden moest voor elk samengesteld werktuig waarop slechts twee krachten werken; immers een zoodanig werktuig kan men beschouwen als een samenstel van verschillende enkelvoudige werktuigen. Nu behoefde men nog slechts één stap verder te gaan om te komen tot een willekeurig stelsel van krachten te gelijk werkende op eene zelfde machine.

Het duurde echter tamelijk lang eer men dien stap deed; het beg. der virt. snelh. scheen in vergetelheid te geraken en niemand trachtte de beschouwingen van Galilei uit te breiden of er nieuwe waarheden uit af te leiden.

Johannes Bernoulli (1667—1748), hoogleeraar in de Wiskunde eerst te Groningen en later te Bazel, was de eerste die de groote algemeenheid van het beginsel van Galilei inzag en daarover een brief schreef aan Pierre Varignon (1654—1722), gedagteekend: Bazel 26 Jan. 1717. Met toestemming van Bernoulli werd deze brief door Varignon in zijne „Nouvelle Mécanique" medegedeeld en wij laten hem hier bijna in zijn geheel volgen.

„Concevez plusieurs forces différentes qui agissent sui„vant différentes tendances ou directions, pour tenir en „équilibre un point, une ligne, une surface ou un corps; „concevez aussi que l'on imprime à tout le système de „ces forces un petit mouvement, soit parallèle à soi-même „suivant une direction quelconque, soit autour d'un point „fixe quelconque: il vous sera aisé de comprendre que par „ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera „dans sa direction, à moins que quelqu'une ou plusieurs „des forces n'aient leurs tendances perpendiculaires à la

„direction du petit mouvement; auquel cas cette force ou „ces forces n'avanceraient ni ne reculeraient de rien: car „ces avancements ou reculements qui sont ce que j'appelle „„vitesses virtuelles" ne sont autre chose que ce dont „chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le „petit mouvement; et ces augmentations ou diminutions se „trouvent, si l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité „de la ligne de tendance de quelque force, laquelle per- „pendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, „mise dans la situation voisine par le petit mouvement, „une petite partie, qui sera la mesure de la vitesse vir- „tuelle de cette force....

Na deze redeneering door eene figuur opgehelderd te hebben, deelt Bernoulli mede dat hij aan het product van kracht en virtueele snelheid den naam „énergie" zal geven. Verder merkt hij op dat de virt. snelh. pos. of neg. ge nomen wordt, naar mate de hoek, dien zij met de richting waarin de kracht werkt, maakt, scherp of stomp is.

Ten slotte spreekt hij de volgende stelling uit:

„Proposition générale.

„En tout équilibre de forces quelconques, en quelque „manière qu'elles soient appliquées et suivant quelques „directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou „médiatement, ou immédiatement, la somme des énergies „affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives „prises affirmativement."

Bernoulli bewijst deze stelling niet en meldt ook niet hoe hij er aan gekomen is; 't is echter waarschijnlijk dat het lezen der werken van Galilei en Descartes, en het beschouwen van meer samengestelde gevallen hem er bij inductie toe gebracht heeft.

't Is van belang hierbij op te merken dat Bernoulli voor 't eerst de uitdrukking „virtueele snelheid" bezigde.

§ 7.

Bovenvermelden brief van Bernoulli vindt men pag. 174—176 van het tweede deel der „Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en MDCLXXXVII. Ouvrage posthume de M. Varignon. Paris. MDCCXXV." Dit werk waarmee de schrijver zich meer dan dertig jaren lang heeft bezig gehouden en dat eerst drie jaren na zijn dood verscheen, is gebaseerd op het toen wel reeds lang bekende maar niet gebruikte beginsel van de samenstelling en ontbinding der krachten, welk beginsel blijkbaar door Varignon aan Stevin is ontleend. Echter is het werk bijkans onleesbaar wegens de verbazende menigte gevolgen en dikwijls nietige opmerkingen, die de schrijver blijkbaar met eene soort van zelfvoldoening heeft bijeenverzameld, en mogelijk ware het reeds lang vergeten, zoo niet de beroemde brief van Bern. er zich in bevond.

Varignon was zoo ingenomen met de stelling van Bernoulli, dat hij er dadelijk bijna vijftig pagina's aan wijdde om haar in zeven eenvoudige gevallen te betoogen. Een algemeen bewijs wordt echter door hem niet gegeven.

Van het beginsel van 't evenwicht, nl. dat wanneer de krachten elkaar in evenwicht houden, de snelheden der aangrijpingspunten genomen volgens de richting dier krachten, omgekeerd evenredig zijn met die krachten, maakt ook d'Alembert (1717—1783) melding op pag. 267

van zijn „Traite de Dynamique. Nouvelle édition 1758". Hij zegt daar verder: „Ce principe est reconnu depuis „longtemps par les géomètres pour le principe fondamental „de l'équilibre; mais personne, que je sache, n'a encore „démontré ce principe en général, ni fait voir, que celui „de la conservation des forces vives en résulte nécessai„rement."

Vervolgens beweert hij dat dit beginsel gemakkelijk betoogd kan worden en neemt drie gevallen aan nl. 1°. dat de krachten gelijk en tegengesteld zijn, 2°. dat zij aangrijpen aan de ongelijke armen van een hefboom en 3°. dat de resultante gaat door „quelque obstacle fixe et in„surmontable." Een algemeen en duidelijk bewijs blijft hij echter in gebreke te geven, met een paar woorden maakt hij er zich van af.

Een dergelijk, in den grond der zaak hetzelfde beginsel werd door Maupertuis opgesteld onder den naam van „Loi du repos des corps" in de Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1740, pag. 173—176; en ook het beginsel van Courtivron, voorkomende in de Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1749, pag. 15—27 laat zich gemakkelijk uit dat der virt. snelh. afleiden.

Enveens hangt met het beg. der virt. snelh. samen het bekende beginsel van Torricelli, nl. dat er evenwicht is wanneer een stelsel van zware lichamen zoodanig is geplaatst dat het zwaartepunt niet kan dalen; welke stelling men vindt in zijne verhandeling „De motu gravium „naturaliter descendentium, 1644."

§ 8.

We zijn nu genaderd tot den tijd waarin het beg. der virt. snelh. zijn hoogsten bloei bereikt en in zijne grootste algemeenheid, hoogste sierlijkheid en veelzijdig nut aan het licht treedt. D'ALEMBERT maakt het naar hem genoemde beginsel bekend, waardoor alle vraagstukken over beweging tot statische problemen herleid worden, en daardoor wordt het LAGRANGE mogelijk om zijne „Mécanique analytique" en aan LAPLACE om zijne „Mécanique céleste" op het beg. der virt. snelh. te vestigen.

Aan het reeds genoemde „Traité de Dynamique" van D'ALEMBERT ontbrak nog slechts eene gemakkelijke en algemeene methode om de voorwaarden te bepalen waaronder een willekeurig stelsel krachten in evenwicht is. LAGRANGE (1736—1813) vond deze methode in het door BERNOULLI ontdekte en door hem nog algemeener voorgestelde beg. der virt. snelh.

Het eerst maakte hij daarvan gebruik in eene verhandeling „Sur la libration de la lune", die in 1764 den prijs der Parijzer academie van wetenschappen behaalde. In deze verhandeling vereenigt hij het dynamisch beginsel van D'ALEMBERT met het statisch beginsel van BERNOULLI en brengt daardoor op de meest algemeene en eenvoudige manier de beweging der maan om haar zwaartepunt terug tot de integratie van differentiaalvergelijkingen.

In 1788 verscheen zijn hoofdwerk, de „Méchanique analytique". Hierin stelde LAGRANGE het beg. der virt. snelh. volgens zijn eigen uitdrukking als een soort van mechanisch axioma voorop en deed de rijkheid er van duidelijk en schoon uitkomen: immers zijn geheele werk is er op gegrond. Hij formuleerde het als volgt: „Si un système „quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, „tirés chacun par des puissances quelconques, est en équi„libre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement „quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un „espace infiniment petit qui exprimera sa vîtesse virtuelle, „la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace „que le point, où elle est appliquée, parcourt suivant la „direction de cette même puissance, sera toujours égale à „zéro, en regardant comme positifs les petits espaces par„courus dans le sens des puissances, et comme négatifs „les espaces parcourus dans un sens opposé."

Welk eene groote waarde LAGRANGE aan dit beginsel hechtte, blijkt uit de volgende woorden: „Et en général „je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux „qu'on pourrait peut-être encore découvrir dans la science „de l'équilibre, ne seront que le même principe des vî„tesses virtuelles, envisagé différemment, et dont ils ne „différeront que dans l'expression.

„Mais ce principe est non-seulement en luimême très„simple et très-général; il a de plus l'avantage précieux „et unique de pouvoir se traduire en une formule générale qui „renferme tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équi„libre des corps." (Méc. analyt., I Partie, Section I, art.17).

Niet anders oordeelt GAUSS (1777—1855) wanneer hij zegt (Journal von Crelle, 1829. Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik von Prof. Dr. Gauss): „Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Ge„schwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische „Aufgabe, und durch D'ALEMBERT's Princip für die Dy„namik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt.

„Es liegt daher in der Natur der Sache, dass es kein „neues Grundprincip für die Bewegungs- und Gleichge- „wichts-Lehre geben kann, welches der Materie nach nicht „in jenen beiden schon enthalten und aus ihnen abzu- „leiten wäre."

§ 9.

't Was een gelukkig denkbeeld van Lagrange om de stelling van Bernoulli als eene grondwaarheid te beschouwen en haar in eene algemeene formule uit te drukken, want juist daardoor gelukte het hem om de vergelijkingen niet alleen voor 't evenwicht maar ook voor de beweging van alle mogelijke stelsels te vormen, of zoo als hij het zelf uitdrukt „de réduire la Mécanique à des „opérations purement analytiques." Daardoor echter sprong Lagrange, zooals Poinsot (1777—1859) zeer terecht opmerkt, over alle mechanische moeilijkheden heen.

De loop zijner berekeningen was zeer duidelijk, doch er bleef nog altijd over om 't beg. der virt. snelh. te bewijzen.

Wel is waar had Bernoulli de genoemde stelling zonder bewijs medegedeeld en had ook Galilei het naar hem genoemde beginsel als een axioma beschouwd, doch men moet niet uit het oog verliezen dat het beg. der virt. snelh. bij zijn eerste optreden in de wetenschap een veel eenvoudiger vorm had dan tegenwoordig, en dat het daarom door den grooten Italiaan niet zonder eenigen grond als axioma mocht worden beschouwd; terwijl later toen het op eene steeds meer gecompliceerde wijze werd uitgedrukt, ook het axiomatische meer en meer verdween en een bewijs noodzakelijk werd.

HOOFDSTUK III.

NADERE BESCHOUWING VAN HET BEGINSEL DER VIRTUEELE SNELHEDEN EN GESCHIEDENIS VAN DIT BEGINSEL IN DE 19DE EEUW.

§ 1.

We beginnen dit hoofdstuk met de volgende woorden van MAUPERTUIS (Histoire de l'Acad. Royale des sciences. Année 1740. Avec les Mémoires de mathématique etc. Paris, 1742. Loi du repos des corps par M. de Maupertuis). „Si les sciences sont fondées sur certains principes „simples et clairs dès le premier aspect, d'où dépendent „toutes les vérités qui en sont l'objet, elles ont encore „d'autres principes, moins simples à la vérité et souvent „difficiles à découvrir, mais qui, étant une fois découverts, „sont d'une très-grande utilité.

„Les premiers principes n'ont guère besoin de démon„stration par l'évidence dont ils sont dès que l'esprit les „examine; les derniers ne sauraient avoir de démonstra„tion physique à la rigueur, parce qu'il est impossible „de parcourir généralement tous les cas où ils ont lieu. „Tel est par exemple le principe si connu et si utile dans

„la Statique ordinaire que dans tous les assemblages de „corps leur commun centre de gravité descend le plus bas „qu'il est possible. Tel est celui de la conservation des „forces vives.

„Quant aux démonstrations a priori de ces sortes de „principes, il ne parait pas que la Physique puisse les „donner, elles semblent appartenir à quelque science supé-„rieure.

„Cependant leur certitude est si grande, que plusieurs „mathématiciens n'hésitent pas à en faire les fondements „de leurs théories et s'en servent tous les jours pour ré-„soudre des problèmes, dont la solution leur coûterait „sans eux beaucoup plus de peine."

Dit laatste is volkomen van toepassing op de wijze waarop LAGRANGE gebruik heeft gemaakt van het beg. der virt. snelh. Zijne geheele „Méc. anal." is er als 't ware een bewijs van a posteriori. Daarom is ook de opmerking van POINSOT juist, dat wanneer vooraan in genoemd werk een bewijs van het beginsel geplaatst werd, de „Méc. anal." twee malen hetzelfde zou bevatten.

§ 2.

Wanneer men nu mocht kunnen aannemen dat het beg. der virt. snelh. tot die beginsels behoorde welke op het eerste gezicht klaar en duidelijk, dus evident zijn, dan was een bewijs van welken aard ook geheel onnoodig. Dit is echter niet het geval zoo als ook door LAGRANGE zelf werd ingezien. Immers hij zegt in den tweeden druk der „Méc. anal. P. I, S. I, art. 18": „Quant à la nature „du princ. des vit. virt., il faut convenir qu'il n'est pas

„assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en „principe primitif." Ook GAUSS was van dat gevoelen zooals blijkt uit de volgende woorden (Journal von Crelle, 1829, Abhandlung 18): „Der eigenthümliche Character „des Princips der virt. Geschw. besteht darin, dass es „eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen „Aufgaben, und so der Stellvertreter aller andern Principe „ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar auf„zuweisen, dass es sich, so wie es nur ausgesprochen „wird, schon von selbst als plausibel empföhle."

Daar nu BERNOULLI en LAGRANGE bij inductie gekomen zijn tot het beg. der virt. snelh. en die inductie zeer goed onvolledig kan zijn, is eene mathematische deductie van genoemd beginsel volstrekt niet overbodig, ja zelfs zeer gewenscht. Immers geeft een besluit waarvan de inductie niet volledig is slechts waarschijnlijkheid.

Het beg. der virt. snelh. heeft dus blijkbaar een bewijs noodig. Door een bewijs wordt het echter teruggebracht tot eene wet, die òf evident is, òf eenvoudiger dan het genoemde beginsel. Neemt men nu in aanmerking, dat een beginsel de onderste grondstelling is, waarvan alle onderzoek naar waarheid moet uitgaan, en waarop alle resultaten gegrond moeten wezen, dan is het duidelijk, dat we aan het beg. der virt. snelh. zijn karakter als beginsel moeten ontzeggen.

§ 3.

In de behoefte aan een algemeen bewijs van het beg. der virt. snelh. werd het eerst voorzien door FOSSOMBRONI in eene verhandeling gedrukt te Florence in 1796 en getiteld „Memoria sul principio delle velocità virtuali" die door tijdgenooten zeer geroemd wordt en waarvan o. a. de Prony melding maakt op pag. 36 van 't eerste deel zijner „Leçons de mécan. anal." Zie ook „Dühring, krit. „Gesch. p. 325." Ik heb haar niet kunnen machtig worden. Ook de schrijver van het artikel „virt. Geschwind." in „Gehler's Physicalisches Wörterbuch, 1825—'45" had haar niet kunnen bekomen en merkt aan dat zij zeer zeldzaam is.

Het tweede bewijs werd gegeven door Fourier (1768—1830) in 1797 en komt voor in 't „Journal de l'Ecole „polytechnique, cinquième cahier, tome II. An VI." In dit deel komen nog twee andere bewijzen van hetzelfde beginsel voor, en wel een van Lagrange zelf en een van R. de Prony.

Fourier grondt zijn bewijs op het beginsel van Archimedes d. i. het beginsel van den hefboom, of op het theorema van Stevin d. i. het parallelogram van krachten. Volgens Lagrange zijn deze wetten echter niet evident genoeg maar hebben zelven bewijs noodig; daarom brengt hij het beg. der virt. snelh. terug tot een ander beginsel dat volgens hem uit zich zelf evident is en dat hij „le „principe de l'équilibre des moufles" — het beg. der blokkatrollen of takels — noemt.

Prony heeft niets dan lof voor de bewijzen van Fourier en Lagrange, maar zijns inziens hebben zij de kwestie uit zulk een algemeen oogpunt beschouwd, dat het niet gemakkelijk is hunne resultaten te vergelijken met die, welke de gewone handelwijzen der leer van 't evenwicht opleveren. In het eerste gedeelte zijner verhandeling gaat hij uit van de bekende zes voorwaardesvergelijkingen voor 't evenwicht van een vrij onveranderlijk stelsel, doch merkt zeer juist op dat, hoewel het op deze manier geleverde bewijs, wat strengheid betreft, niets te wenschen overlaat, de verg. der virt. snelh. zoodoende ten eenenmale haar karakter van beginsel verliest, wijl zij als gevolg en niet als grondwaarheid voorgesteld wordt. Hij geeft daarom nog een ander bewijs gegrond op de samenstelling der krachten en het beginsel van den hefboom.

In 1798 — An VII — verscheen het eerste deel der „Mécanique céleste" van LAPLACE (1749—1827) waarin deze groote geleerde niet in gebreke blijft een nieuw bewijs te leveren voor het beg. der virt. snelh. dat hij aldus uitspreekt: „Si l'on fait varier infiniment peu la position „d'un système de corps, en l'assujettissant aux conditions „qu'il doit remplir, la somme des forces qui le sollicitent, „multipliée chacune par l'espace que le corps auquel elle „est appliquée, parcourt suivant sa direction, doit être „égale à zéro, dans le cas de l'équilibre du système" (Méc. cél. T. I, 1e Partie, Livre I, Chap. 3). Zijn bewijs berust op het beginsel van STEVIN en op het beginsel van NEWTON dat actie gelijk is aan reactie.

In 1783 had L. N. M. CARNOT (1753—1823) een werkje geschreven getiteld: „Essai sur les machines en général." Hiervan verscheen in 1803 een aanzienlijk vermeerderde druk onder den titel: „Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement." In dit merkwaardige geschrift stelt CARNOT het beg. der virt. snelh. nog algemeener voor door nl. de onbepaald-kleine virtueele snelheden te vervangen door eindige die hij „vitesses géometriques" noemt.

Blijkens art. 136, pag. 108 van het aangehaalde werk is eene geometrische snelheid die, welke een lichaam aanneemt wanneer het eene geometrische beweging ondergaat. Door eene geometr. bew. van een stelsel lichamen verstaat CARNOT eene zoodanige „qui ne change rien à „l'intensité de l'action qu'ils exercent ou pourraient exer- „cer les uns sur les autres si on leur imprimait d'autres „mouvements quelconques." En in art. 144 heet het: „cette „dénomination de mouvements géométriques est fondée sur „ce que les mouvements dont il s'agit n'ayant aucun effet „sur l'action qui peut s'exercer entre les corps du système, „sont absolument indépendants des règles de la dynamique."

Door beschouwingen omtrent den schok van volkomen onveerkrachtige lichamen komt hij ten slotte — art. 215 — tot het volgende theorema dat het beg. der virt. snelh. is: „lorsque plusieurs corps animés de diverses forces „motrices se font mutuellement équilibre, si l'on vient à „imprimer au système un mouvement quelconque géomé- „trique", — waartoe blijkens art. 159 eene onbepaaldkleine kracht voldoende is — „la somme des produits de „chacune de ces forces motrices par sa vitesse géométri- „que" — of virtueele snelheid volgens art. 161 — „ esti- „mée dans le sens de cette force, est égale à zéro."

Overigens geeft CARNOT in art. 121 en 122 van hetzelfde geschrift een bewijs van het beg. der virt. snelh., dat gegrond is op het evenwicht van den hefboom.

§ 4.

Een jaar later maakte POINSOT zijne beroemde verhandeling „Théorie générale de l'équilibre et du mouvement „des systèmes" bekend, die voor 't eerst geplaatst werd in het „Journ. de l'Ecole Polyt. 13e Cahier, T. VI, 1806." Hierin wil POINSOT van het beg. der virt. snelh. „où se „mêlent des idées vagues et étrangères de mouvements „infiniment petits et de perturbations d'équilibre" niets weten, maar leidt het als ter loops af uit de door hem gegeven theorie. Alle tot dien tijd toe gegeven bewijzen keurt hij af.

In 1806 gaf AMPÈRE (1775—1836) onder den titel „Demonstration générale du princ. des vit. virt., degagée de „la considération des infiniment petits" een bewijs in hetzelfde deel van genoemd tijdschrift. Hierin zegt hij van 't beg. der virt. snelh. o. a.: „M. LAGRANGE l'a ramené „d'une manière très-simple au principe de l'équilibre des „moufles, M. CARNOT à celui de l'équilibre du levier. La „démonstration de ce même principe a été déduite par M. „LAPLACE de considérations plus générales, mais trop abstraites peut-être pour être mises facilement à la portée „de commençants." Hij geeft nu een bewijs, volgens hem even algemeen als dat van LAPLACE en alleen gegrond op de samenstelling en ontbinding der krachten.

In de „Mémoires de l'Académie impériale des sciences de „St. Pétersbourg, Tome I, 1809" komt een opstel voor onder den titel: „Essai d'une démonstration du principe des vit. virt., par B. VISCOVATOV. — Présenté le 5 Décembre 1802." De schrijver keurt de wijze waarop het beg. door LAGRANGE is geformuleerd, af, „parce qu'il renferme des idées contraires à l'exactitude mathématique" en drukt het op de volgende wijze uit: „Si plusieurs forces, ayant des directions quelconques, sont appliquées à un système de corps „ou de points, et se font équilibre; la somme de ces puissances multipliées chacune par la vîtesse qu'elle tend à

„imprimer au point auquel elle est appliquée est nécessai-„rement égale à zéro." Zijn bewijs is gebaseerd op het parallelogram en parallelopipedum van krachten.

Aan het slot dezer § maken we nog melding van een werkje in 1812 te Leipzig verschenen en tot titel hebbende: „Analytische Bestimmung des Gesetzes der virt. „Geschw. in mechanischer und statischer Hinsicht vom „Grafen G. von Buquoy." De schrijver leidt dit geschrift met de volgende woorden in: „Der gegenwärtige Aufsatz „enthält nich bloss eine neue Beweisart des eben erwähn-„ten statischen Prinzips, sondern es wird hier das Gesetz „der virt. Geschw. allgemein für jeden dynamischen Zustand „zusammenhangender Punkte und Massen analytisch be-„stimmt, woraus dann das statische Prinzip der virt. „Geschw. als eine blosse Anwendung des erwähnten all-„gemeinen Gesetzes auf einen einzelnen Fall von selbst „folgt. Diese Methode, das Gesetz der virt. Geschw. in „einer so allgemeinen Beziehung zu betrachten, gewährt „den Vortheil, dass sich die Sätze der Mechanik unmit-„telbar aus einem einzigen Grundsatze ableiten lassen, „und dass jene der Statik nicht eigends für sich abge-„handelt werden müssen, sondern dass sie aus jenen der „Mechanik durch blosse Substitutionen erhalten werden „können.

„Ein solcher Vortrag der Mechanik und Statik ist aller-„dings der Funktion des Denkens angemessener, als jener, „wo man die Statik der Mechanik vorangehen lässt, und „nach den erwiesenen Lehren der Statik, folglich eines „Theiles der Mechanik, letztere auf die in ersterer auf-„gestellte Sätze begründet.

„Ueberdiess glaube ich aber auch behaupten zu dürfen,

„dass nicht leicht, nach irgend einer Lehrmethode, die „Dynamik überhaupt mit jener Kürze dargestellt werden „könne, als nach der hier vorgetragenen analytischen Be- „stimmung des Gesetzes der virt. Geschw.

„Nebst der Deutlichkeit, Kürze und Evidenz in allen „Behauptungen und Folgerungen, deren ich mich in dieser „Schrift beflissen habe, darf ich selbiger auch noch das „Verdienst zugestehen, dass darin auf keinen bekannten „Grundsatz der Statik oder Mechanik gebaut wird."

De algemeene dynamische stelling waartoe Buquoy geraakt en waarvan 't beg. der virt. snelh. slechts een bizonder geval is luidt als volgt: „Wenn wie viel immer „Punkte und Massen unter einander dergestalt verbunden „sind, dass durch die Bewegung irgend eines Punktes C „nach einer angenommenen Richtung um einem festgesetz- „ten Raum S, alle übrigen Punkte und Massen eines „solchen Systems, zu gleicher Zeit, Räume von bestimm- „ten Grössen und nach bestimmten Richtungen zu durch- „laufen gezwungen sind, so findet binnem jedem Zeitele- „mente dt folgendes Gesetz Statt: Die Summe der Pro- „dukte aus den, in den verschiedenen Punkten und Mas- „sen des Systems angebrachten Kräften (welche allemal „durch die Grösse ihres Drucks bestimmt werden) in jene „Räume, welche die Angriffspunkte dieser Kräfte zu glei- „cher Zeit zu durchlaufen dadurch gezwungen sind, dass „der Punkt C erwähntermassen den Raum S beschreibt, „ist allemal gleich dem Produkte aus dem Quotienten „$\frac{1}{2\,g\,dt}$ in die Summe der Produkte aus den Massen in jene „Räume, welche die Massen nach den Richtungen ihrer „Bewegung zu gleicher Zeit zu durchlaufen gezwungen „sind, wenn der Punkt C erwähntermassen den Raum

„S beschreibt, und in die Differentialien jener Geschwin-
„digkeiten, welche den Massen am Ende der Zeit t ent-
„sprechen."

Verder zegt BUQUOY; „Man muss gestehen, dass die „Allgemeinheit, Bestimmtheit und Evidenz dieses Lehr „satzes, dass ferner die Leichtigkeit, welche er gewähret, „alle darnach behandelton Aufgaben der Dynamik dem „analytischen Kalkul zu unterwerfen, demselben einen „Vorzug einräumen, dessen sich wohl wenige Sätze der „Dynamik rühmen dürften.

„Es müsste sich, auf diesen Lehrsatz gestützet, ein „vollständiges Lehrgebäude der Mechanik mit einer ganz „eigenen Kürze aufführen lassen, etc."

Jammer dat BUQUOY zulks niet zelf gedaan heeft, want het schijnt dat zijn opstel weinig de opmerkzaamheid getrokken heeft, niettegenstaande hij weldra een tweede werkje uitgaf, getiteld: „Weitere Entwickelung und Anwendung des Gesetzes der virt. Geschw.", ja zelfs ten overvloede in 1815 zijne denkbeelden in de Fransche taal blootlegde onder den titel: „Exposition d'un nouveau principe général de dynamique, dont le princ. des vit. virt. n'est qu'un cas particulier."

§ 5.

In 1811 verscheen de tweede druk van 't eerste deel der „Mécanique analytique", door den schrijver zelven herzien en vermeerderd. Hierin neemt LAGRANGE ook het reeds vroeger door hem gegeven bewijs op, doch eenigszins gewijzigd; het „principe de l'équilibre des moufles" waarop het gegrond wordt, ontvangt hier den naam van „principe des poulies" (Méc. anal. T. I, 1811, P. I, S. I, art. 18—20).

Sedert hebben nog een groot aantal bewijzen van het beg. der virt. snelh. het licht gezien, waarvan de belangrijkste later zullen worden vermeld. Voor wij echter het betoog van LAGRANGE en de voornaamste der vroeger en later gegevene bewijzen nader beschouwen, is het noodig het beg. der virt. snelh. wat meer van nabij te bezien en in formule uit te drukken.

§ 6.

Wanneer punten waarop krachten werken, op de eene of andere wijze in zulk een toestand gebracht zijn dat ze die krachten niet vrij kunnen volgen, daardoor b. v. dat sommige dier punten wederzijds verbonden zijn of genoodzaakt worden om op eene lijn of een vlak te blijven, dan vormen ze een systeem van punten dat door zekere voorwaarden beperkt wordt of dat aan zekere verbintenissen moet voldoen.

Nemen we nu aan dat zulk een stelsel eene onbepaald-kleine verplaatsing ondergaat, doch zoodanig dat het steeds aan zijne verbintenissen blijft voldoen, dan ondergaan ook de afzonderlijke punten onbepaald-kleine verplaatsingen. Deze verplaatsingen der punten nu noemt men volgens LAGRANGE hunne virt. snelh., en wanneer men de verplaatsing van een punt projecteert op de richting der kracht die in dat punt aangrijpt, dan verkrijgt men de virt. snelheid van dat punt volgens de richting der daarop werkende kracht. Deze aldus geprojecteerde verplaatsing werd door BERNOULLI virtueele snelheid genoemd.

De benaming virtueele snelheid is echter ongepast, wijl we hier met verplaatsingen te doen hebben en eene snelheid geene verplaatsing is, maar de verhouding tusschen weg en tijd. De tijd is hier echter voor 't geheele stelsel verplaatsingen dezelfde; nemen we dien als eenheid aan en onderstellen we, 't welk geoorloofd is, dat de krachten aan de punten gedurende den onbepaald-kleinen tijd eene eenparige rechtlijnige beweging geven, dan worden de snelheden werkelijk gelijk aan de wegen; en merkt men bovendien op dat vroeger — en ook nu nog wel — de snelheid bepaald werd als de weg in de eenheid van tijd doorloopen, dan wordt het ons duidelijk dat Bernoulli van snelheden kon spreken.

Daar die snelheden of liever verplaatsingen echter niet inderdaad aanwezig zijn, maar slechts zouden ontstaan wanneer het evenwicht onbepaald-weinig werd verstoord; daar zij dus enkel als mogelijk gedacht worden zoo noemde Bern. ze virt. snelh., — van „virtus" (bekwaamheid, vatbaarheid, mogelijkheid) —. Hierbij kan men nog de volgende reden voegen. Vroeger — en sommige schrijvers doen het nog — verdeelde men de Mechanica in Statica en Dynamica en trachtte deze onderscheiding streng vol te houden. Nu mocht er in de Statica geen beweging dus ook geen snelheid zijn, en daarom nam men zijne toevlucht tot de uitdrukking „virtueele snelheid" even als men in de Physica spreekt van een „virtueel beeld". Gedeeltelijk heeft dus de uitdrukking virtueele snelheid eene historische beteekenis.

§ 7.

Wat betreft deze verplaatsingen, moeten we onderscheid maken of ze al dan niet in tegengestelden zin kunnen worden uitgevoerd. In 't eerste geval noemt men ze omkeerbare, in 't laatste geval niet-omkeerbare verplaatsingen. Is een punt b. v. op een hellend vlak in evenwicht dan is eene verplaatsing langs het hellend vlak omkeerbaar, doch eene verplaatsing loodrecht van het hellend vlak af is niet omkeerbaar, wijl het punt niet in tegengestelde richting kan worden bewogen omdat het hierin belet wordt door het hellend vlak. Dit hellend vlak noemt men nu een bewegingsbeletsel.

Een bewegingsbeletsel kan eenzijdig of tweezijdig zijn, al naar dat de beweging slechts in eene richting of ook in de tegengestelde richting verhinderd wordt. In 't pas genoemde voorbeeld hebben we een eenzijdig bewegingsbeletsel; ook wanneer twee punten door een gespannen onrekbaren draad verbonden zijn, wijl ze in dat geval wel tot elkander kunnen naderen, doch zich niet verder van elkaar kunnen verwijderen. Zijn echter twee punten door eene vaste staaf verbonden, dan kunnen zij noch tot elkander naderen, noch zich van elkander verwijderen; derhalve hebben we hier met een tweezijdig bewegingsbeletsel te maken. Hetzelfde is het geval wanneer een punt gedwongen wordt steeds op eene bepaalde lijn of op een bepaald oppervlak te blijven.

Tweezijdige bewegingsbeletsels geven omkeerbare, eenzijdige bewegingsbeletsels geven niet-omkeerbare verplaatsingen.

We nemen nu aan dat op ieder punt van het stelsel eene enkele kracht werkt; immers werken er meer krachten op dan kan men die tot eene resultante samenstellen.

De projecties der virtueele verplaatsingen op de overeenkomstige richtingen der krachten vermenigvuldigd met die krachten zelven, of wat hetzelfde is, de virtueele verplaatsingen vermenigvuldigd met de in hunne richting vallende componenten der overeenkomstige krachten, noemt men virtueele momenten. Die momenten zijn pos. of neg., naar gelang de componenten der krachten naar denzelfden kant gericht zijn als waarheen de verplaatsingen geschieden, of naar den tegengestelden kant.

Bij ieder systeem van virtueele verplaatsingen behoort dus een systeem van virtueele momenten. In de meeste gevallen heeft eenzelfde stelsel punten een oneindig aantal systemen van virt. verpl., dus ook van virt. mom.

Van alle mogelijke stelsels van punten zijn de twee uiterste gevallen, dat elk der punten afzonderlijk volkomen vrij is en dat alle punten onderling volkomen vast verbonden zijn. Hiertusschen ligt eene geheele reeks van samenstellingen, want de punten kunnen op allerlei wijzen en onder allerhande voorwaarden verbonden wezen. Die verbintenissen, waaraan de punten moeten voldoen, worden dikwijls uitgedrukt door voorwaardesvergelijkingen $\varphi = o$, $\psi = o$, enz., waarin φ, ψ, ... functien zijn van de coordinaten der punten. Bovendien kunnen genoemde functien ook den tijd bevatten. Men moet wel onderscheid maken tusschen de onbepaald-kleine werkelijke beweging van een stelsel en de virtueele. De eerste heeft plaats in een tijdselement dt terwijl èn verbintenissen èn krachten met den tijd veranderen. Bij de virt. verplaatsing echter worden niet alleen de krachten maar ook de verbintenissen als onveranderlijk beschouwd. De virt. verpl. van een punt is dus slechts de variatie van 't punt welke bestaanbaar is met de op dat oogenblik bestaande voorwaardesvergelijkingen. Die variaties, welke afhangen van de betrekking waarin die vergelijkingen tot den tijd staan, worden eenvoudig buiten beschouwing gelaten. Hebben we dus met virt. verpl. te doen dan moet in de vergelijkingen $\varphi = o$, $\psi = o, \ldots$, de tijd als constant worden beschouwd.

Is b. v. een punt genoodzaakt op een bol te blijven die zich met eene zekere snelheid voortbeweegt, dan verstaat men door de virt. verpl. van dat punt de verplaatsing op dien bol in de onderstelling dat hij in rust ware. Zijn de op een punt werkende krachten functien van den tijd of van de met den tijd in betrekking staande plaats van het punt, dan spreekt het van zelf, dat ook in deze functien t als onveranderlijk moet worden aangenomen.

§ 8.

Zij P de kracht die op een punt van een stelsel aangrijpt, δs de virtueele verplaatsing van het aangrijpingspunt en φ de hoek dien de richting der kracht maakt met de richting der verplaatsing, dan is $P \cos \varphi\, \delta s$ het virtueel moment der kracht P. Nu is $\cos \varphi\, \delta s$ de projectie der virt. verpl. op de richting der kracht d. i. de verplaatsing van 't aangrijpingspunt in de richting der kracht; stellen we die door δp voor dan wordt het moment $P \delta p$.

Nemen we een rechthoekig coordinatenstelsel in de ruimte; noemen we α, β, γ de hoeken die de richting der kracht P en α', β', γ' de hoeken die de verplaatsing δs met de assen maakt, dan is

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Stellen we eindelijk de componenten van P volgens de assen door X, Y, Z en de componenten van δs door δx, δy, δz voor, dan is

$$\cos\alpha = \frac{X}{P}, \ \cos\beta = \frac{Y}{P}, \cos\gamma = \frac{Z}{P};$$

$$\cos\alpha' = \frac{\delta x}{\delta s}, \ \cos\beta' = \frac{\delta y}{\delta s}, \ \cos\gamma' = \frac{\delta z}{\delta s};$$

en dus

$$\cos\varphi = \frac{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}{P\delta s}$$

of

$$P\cos\varphi\delta s = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = P\delta p.$$

Nu luidt het beg. der virt. snelh., zoo algemeen mogelijk voorgesteld, als volgt: Wanneer een stelsel punten in evenwicht is en men geeft aan die punten onbepaaldkleine verplaatsingen zoodanig dat zij steeds aan hunne verbintenissen blijven voldoen, dan is voor het evenwicht noodig en voldoende dat de som der virt. mom. òf nul òf neg. is; d. i. in formule

$$\Sigma P\cos\varphi\,\delta s = \Sigma P\delta p = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overset{=}{<} 0.$$

Het bovenste teeken geldt wanneer we enkel met omkeerbare verplaatsingen te doen hebben; zijn er echter ook niet-omkeerbare verplaatsingen dan gelden beide teekens.

Deze onderscheiding werd door LAGRANGE nog niet gemaakt; hij laat stilzwijgend al de gevallen, waar nietomkeerbare verplaatsingen voorkomen, buiten beschouwing, en toont alleen aan dat $\Sigma P\delta p$ niet neg. kan zijn wanneer ook de tegengestelde verplaatsing mogelijk is (Méc. anal. T. I, pag. 25).

Gauss was misschien de eerste die het onderscheid tusschen omkeerbare en niet-omkeerbare verpl. duidelijk inzag. Immers in zijne verhandeling „Ueber ein neues „allgemeines Grundgesetz der Mechanik" zegt hij: Nach „dem Principe der virt. Geschw. erfordert das Gleich„gewicht, dass die Summe der virtuellen Momente immer „= o sei, wie man es gewöhnlich ausspricht, oder rich„tiger, dass jene Summe niemals positiv werden könne" en maakt daarbij nog de volgende aanmerking: „Der ge„wöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedin„gungen voraus, dass die jeder möglichen Bewegung ent„gegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B., dass ein „Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, „dass die Entfernung zweier Punkte von einander unver„änderlich sei u. dergl. Allein dies ist eine unnöthige und „der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die „Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt ei„nen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf „ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm bloss dass Aus„treten auf die eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehn„barer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht „nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung „unmöglich, u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz „der virt. Geschw. nicht lieber gleich anfangs so aus„drücken, dass es alle Fälle umfasst?"

Dat overigens in geval van evenwicht bij elke mogelijke onbepaald-kleine verplaatsing de som der mometen niet steeds gelijk nul is, werd reeds door Fourier ingezien, zooals blijkt uit art. 6, 11, 13, 14, 17 e. a. van zijn „Mé-

„moire sur la Statique, contenant la démonstration du „princ. des vit. virt. et la théorie des momens." Een onderscheid tusschen omkeerbare en niet-omkeerbare verplaatsingen maakt hij echter niet; ook neemt hij geen voorwaardesongelijkheden aan, maar beschouwt niet-omkeerb. verpl. wel als mogelijk, doch als strijdig met de voorwaardesvergelijkingen. Zoo zegt hij o. a. „Comme il „arrive souvent que les points du système s'appuient „seulement sur les obstacles fixes sans y être attachés, „il est évident qu'il y a des déplacements possibles qui „ne satisfont pas aux équations de condition: on voit en„core que par ces déplacements le moment des résultantes „est nécessairement positif, puisque la direction de ces for„ces doit être perpendiculaire aux surfaces résistantes. Ainsi „la somme des moments des forces appliquées est positive „pour tous les déplacements de cette espèce; mais il est im„possible que l'on dérange un corps dur en équilibre, de „sorte que le moment total des forces appliquées soit négatif. „Au reste si l'on considère les résistances comme des for„ces, le corps peut être regardé comme libre, et la somme „des moments est nulle pour tous les déplacements possibles."

Tevens blijkt uit deze en veel meer andere plaatsen van het aangehaalde geschrift dat volgens Fourier de som der momenten nooit neg. kan zijn, terwijl Gauss beweert dat zij nooit pos. kan wezen. Deze schijnbare tegenspraak vloeit alleen hieruit voort dat Fourier — in tegenstelling met alle andere schrijvers — eene verplaatsing als neg. beschouwt, wanneer hare projectie in dezelfde richting valt als waarin de kracht werkt. Om welke reden Fourier van het eenmaal aangenomen gebruik afwijkt, is mij niet duidelijk.

§ 9.

Aan het product van kracht en virt. verplaatsing in de richting dier kracht, dat in navolging van GALILEI thans algemeen virtueel moment genoemd wordt, werd door J. BERNOULLI den naam gegeven van „energie". Dit heeft echter geen navolging gevonden. Tegenwoordig verstaat men door energie het vermogen om arbeid te kunnen verrichten. Zie o. a. „KREBS, Einleitung in die Mecha-„nische Wärmetheorie, Leipzig, 1874; § 10."

Het virtueel moment staat in nauw verband met eene andere grootheid die later in de Mechanica is ingevoerd door CORIOLIS (Traité du calcul et de l'effet des machines, 1829) en „arbeid" eener kracht wordt geheeten. Door elementairen arbeid eener kracht verstaat men het product dier kracht en der projectie op hare richting van den weg dien het aangrijpingspunt in een tijdselement doorloopt. Deze arbeid is pos. als de projectie der verplaatsing van 't aangrijpingspunt in de richting der kracht valt, en neg. als zij valt in tegengestelde richting. Verplaatst het aangrijpingspunt zich niet werkelijk, maar wordt de verplaatsing slechts als mogelijk gedacht, dan spreekt men van virtueelen elementairen arbeid.

Zij P de kracht, δs de onbepaald-kleine verplaatsing van 't aangrijpingspunt, en φ de hoek welken de richting der kracht met de richting der verpl. maakt, dan is $P \cos \varphi \, \delta s$ de elementaire arbeid.

Hier onderstellen we dat zoowel P als φ gedurende de verpl. δs niet van waarde veranderen. In die onderstelling is, zooals men ziet, het virt. mom. eener kracht juist gelijk aan den virt. elementairen arbeid.

De verg. $\Sigma P \cos \varphi \delta s = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \leqq 0$ kan dus ook op de volgende wijze worden uitgesproken: wanneer de totale virtueele arbeid gelijk aan nul of neg. is, dan is er evenwicht, en omgekeerd. Zoo geformuleerd draagt het beg. der virt. snelh. den naam van beg. van den virt. arbeid.

Stellen we in de uitdrukking $P \cos \varphi \delta s$ den hoek $\varphi = 90^0$ dan is $\cos \varphi$ en dus ook $P \cos \varphi \, \delta s$ gelijk aan nul, dat is in woorden: wanneer het aangrijpingspunt verplaatst wordt loodrecht op de richting der kracht, dan is het virt. mom. resp. de virt. arbeid der kracht nul. Het is wel duidelijk dat deze stelling ook doorgaat, wanneer de verplaatsing niet meer onbepaald-klein is.

Is $\varphi = 0$ dan gaat $P \cos \varphi \, \delta s$ over in $P \, \delta s$. Nemen we nu aan dat het aangrijpingspunt zich steeds in de richting der constante kracht — b. v. zwaartekracht — P bewegende, een weg $s_1 - s_0 = l$ aflegt, dan wordt de arbeid of het moment der kracht voorgesteld door $\int_{s_0}^{s_1} P \, \delta s =$ $P(s_1 - s_0) = P \, l$.

Zijn eindelijk P en φ niet slechts gedurende eene onbepaald-kleine, maar ook gedurende eene bepaalde verplaatsing van 't aangrijpingspunt constant, dan wordt de arbeid of het moment der kracht gedurende die verplaatsing uitgedrukt door $\int_{s_0}^{s_1} P \cos \varphi \delta s = P \cos \varphi (s_1 - s_0) = P \cos \varphi . l$.

Uit deze opmerkingen blijkt dat het beg. der virt. snelh. of van den virt. arbeid in sommige gevallen ook geldt voor eindige verplaatsingen en dan uitgedrukt kan worden door de formulen

$$\Sigma P . l = 0 \qquad \text{of} \qquad \Sigma P \cos\varphi . l = 0$$

De eerste formule is, hoewel niet volkomen streng, van toepassing bij katrollen en takels; de tweede bij een lichaam dat onder de werking van constante krachten op een hellend vlak in evenwicht is en er langs bewogen wordt. In beide gevallen zijn de verplaatsingen omkeerbaar.

§ 10.

Is een zeker punt van een stelsel onbeweeglijk vast en geeft men aan het systeem eene virt. verpl., dan is het virt. mom. der op dat punt werkende kracht nul, wijl 't punt in kwestie geen verplaatsing ondergaat.

Is een punt, 't welk ondersteld wordt in evenwicht te zijn, gedwongen zich op een oppervlak te bewegen, dan moet de resultante van al de op dat punt werkende krachten loodrecht op dat oppervlak staan. Want anders zou men die kracht kunnen ontbinden in twee andere, waarvan de eene volgens de normaal en de andere volgens eene der raaklijnen gericht zou wezen; dan zou de eerste worden opgeheven, doch de laatste zou het punt doen bewegen en 't zou bijgevolg niet in evenwicht zijn. Bij eene virtueele verplaatsing van het stelsel verplaatst zich het punt in het raakvlak, dus loodrecht op de daarop werkende kracht; de projectie der verplaatsing op de richting der kracht is blijkbaar nul en derhalve is het virt. mom. eveneens nul.

Hetzelfde valt op te merken bij een punt dat genoodzaakt is op eene kromme te blijven.

Het spreekt van zelf dat het bovenstaande ook geldt wanneer het punt geen deel uitmaakt van een stelsel, maar we slechts met een enkel punt te doen hebben.

Beschouwen we nu een punt dat volkomen vrij in de ruimte in evenwicht is. Nemen we een rechthoekig drieassig coordinatenstelsel aan met den oorsprong in het punt. Zij $R(\lambda, \mu, \nu)$ de resultante van een willekeurig aantal krachten $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $P_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $P_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$,.. die op het punt werken, dan hebben we de vergelijkingen

$$R \cos \lambda = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots$$
$$R \cos \mu = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \ldots$$
$$R \cos \nu = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + \ldots$$

Geven we nu aan het punt de virt. verpl. $\delta s(\varrho, \sigma, \tau)$ dan zijn $\delta s \cos \varrho$, $\delta s \cos \sigma$, $\delta s \cos \tau$ de projecties dier verplaatsing op de assen. Door de bovenstaande verg. respectievelijk met deze projecties te vermenigvuldigen, vinden we

$$R\delta s \cos \varrho \cos \lambda = P_1 \delta s \cos \varrho \cos \alpha_1 + P_2 \delta s \cos \varrho \cos \alpha_2 + \ldots$$
$$R\delta s \cos \sigma \cos \mu = P_1 \delta s \cos \sigma \cos \beta_1 + P_2 \delta s \cos \sigma \cos \beta_2 + \ldots$$
$$R\delta s \cos \tau \cos \nu = P_1 \delta s \cos \tau \cos \gamma_1 + P_2 \delta s \cos \tau \cos \gamma_2 + \ldots$$

Hieruit volgt door optelling

$$R\delta s \cos(\delta s, R) = P_1 \delta s \cos(\delta s, P_1) + P_2 \delta s \cos(\delta s, P_2) + \ldots$$

Nu zijn $\delta s \cos(\delta s, R)$, $\delta s \cos(\delta s, P_1)$, ... de verplaatsingen in de richtingen der krachten R, P_1, P_2, ... Stellen we die voor door δr, δp_1, δp_2,... dan gaat de laatste verg. over in

$$R\delta r = P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots$$

dat is in woorden: het virt. mom. der resultante is gelijk aan de som van de virt. mom. der componenten. Daar nu het punt, 't welk we beschouwen, in evenwicht is, moet $R = 0$ zijn, bijgevolg wordt de verg.

$$0 = P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots$$

Eindelijk kan zich ook het geval voordoen dat een punt slechts op eene kromme of op een oppervlak rust; deze kromme of dit oppervlak kan men zich gemakshalve als stoffelijk denken. Het punt kan zich dan wel langs, of van de kromme of 't oppervlak af bewegen, maar het kan er niet doorheen dringen om op de andere zijde te komen. Dit is b. v. het geval wanneer een stoffelijk punt op een massieven bol ligt. Voor elke verplaatsing van het punt langs het oppervlak is nu blijkens het voorgaande de som der virt. mom. nul; laten we zien of dit ook het geval is voor iedere andere mogelijke virt. verpl. Daar het punt op het oppervlak rust is de resultante van alle krachten die er op werken loodrecht op het oppervlak; de projectie van elke andere verplaatsing dan langs het vlak, valt in tegengestelde richting als waarin de resultante werkt en is dus neg. Bij gevolg is ook het virt. mom. der resultante negatief zoodat we hier hebben

$$\mathrm{R}\delta\mathrm{r} = \Sigma\,\mathrm{P}\delta\mathrm{p} < 0.$$

De algemeene verg. voor 't evenwicht van een punt is derhalve

$$\Sigma\,\mathrm{P}\delta\mathrm{p} \overset{=}{<} 0.$$

§ 11.

We hebben vroeger reeds opgemerkt dat het beg. der virt. snelh. het eerst is waargenomen bij den hefboom, of liever dat door het algemeen toepassen van de voorwaarde waaronder een hefboom in evenwicht is, genoemd beginsel als 't ware bij intuitie is gevonden.

Indien de hefboomsarmen éène rechte lijn uitmaken en de daarop aangrijpende krachten evenwijdig zijn, dan geldt het beg. der virt. snelheden, in de onderstelling dat die krachten standvastig zijn in grootte en in richting, voor alle mogelijke verplaatsingen.

Aan de laatste onderstelling wordt voldaan, wanneer de genoemde krachten gewichten, of wat hetzelfde is, wanneer de uiteinden van den hefboom zware punten zijn. In dit zeer biz. geval gaat het beg. der virt. snelh. over in de volgende stelling: twee op de uiteinden van een rechtlijnigen hefboom aangrijpende gewichten zijn in evenwicht wanneer zij omgekeerd evenredig zijn met de loodrechte verplaatsingen der aangrijpingspunten — of met de door die punten doorloopen cirkelbogen — wanneer de hefboom gedraaid wordt.

Van deze laatste stelling wordt o. a. melding gemaakt door W. J. G. KARSTEN in zijn „Lehrbegriff der gesam„ten Mathematik, 3er Theil, zweite Aufl. 1790, pag. 34." Hierbij teekent de schrijver het volgende aan: „Dieser „Satz wird vom CARTES, VARIGNON, u. a. m. als ein ganz „allgemeiner Grundsatz der ganzen Statik gebraucht. Dass „er beim Hebel richtig sey, erhellet aus der bisherigen „Ausführung; aber diese beweiset noch nicht dass der„selbe Satz allemahl richtig sey, unter welchen Umstän den auch sonst die Gewichte gegen einander würken." Uit deze woorden blijkt echter dat de schrijver noch DESCARTES, noch zelfs VARIGNON schijnt te hebben ingezien. De laatste toch zegt op pag. 320 en 321 van 't eerste deel zijner „Nouv. Méc." van dezelfde stelling: „C'est là ce „qu'on appelle d'ordinaire le premier principe de Mécanique, „excepté M. DESCARTES et VARRON, jurisconsulte Gene„vois, lesquels ont pris tous deux pour ce premier prin„cipe qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour lever

„un corps pesant à une certaine hauteur que pour en lever „un autre moins pesant à une hauteur d'autant plus grande „qu'il est moins pesant, ou en lever un plus pesant à „une hauteur d'autant moindre. C'est ainsi que parle M. „DESCARTES dans ses lettres (Tom. I, Lettre 73). Voici „présentement comme parle VARRON dans la pag. 23 de „son traité „De motu", imprimé à Genève en 1584: Tantum „enim est libram unam quatuor spatiis moveri, quantum „libras quatuor uno spatio eodem tempore."

Bovendien gaat VARIGNON zelf blijkens pag. 6 van het aangehaalde werk van het beginsel van STEVIN uit.

§ 12.

Kan het dus als niet overtollig geacht worden, het beg. der virt. snelh. te bewijzen voor een enkel punt, dan behoeft het ons ook niet te verwonderen dat tot op dezen tijd toe verschillende geleerden zich met het beginsel hebben bezig gehouden en er algemeene bewijzen voor hebben trachten te vinden. De voornaamste dier bewijzen zullen we kortelijks vermelden.

In zijn „Handbuch der Statik fester Körper, Berlin, 1808" grondt J. A. EYTELWEIN de geheele Statica op het beg. van STEVIN en leidt tevens daaruit het beg. der virt. snelh., volgens hem ook wel genoemd „das Gesetz vom Bestreben nach Geschwindigkeit" af, doch slechts voor zoo ver als hij het tot zijn doel noodig had, zoodat hij er geen algemeen bewijs van geeft.

Ook MÖBIUS (Lehrbuch der Statik von A. F. Möbius, 1837; Ier Th. pag. 333—340, IIer Th. pag. 47—58) gaat bij zijn bewijs uit van het parallelogram van krachten en toont het -- naar zijn bewering — voor alle mogelijke systemen aan. De bewijzen voor 't omgekeerde van 't beginsel, zooals die door LAPLACE en POISSON gegeven zijn, keurt hij af en geeft een nieuw bewijs daarvoor in plaats.

Eenige jaren later werd door F. J. STAMKART een geheel nieuw bewijs geleverd in een werkje, getiteld: „Iets over het grondbeginsel der virtuele snelheden, toegepast op de beweging der wipbruggen. Amsterdam, 1843." STAMKART bewijst het beg. der virt. snelh. eerst voor een enkel punt, daarna voor een hefboom en brengt eindelijk het algemeene beginsel tot het bizondere geval van den hefboom terug. Het laatste gedeelte van STAMKART'S bewijs komt in hoofdzaak overeen met dat van CARNOT, waarvan vroeger melding gemaakt is, en dat ook op het beg. van den hefboom berust. In de voorrede van het pas genoemde werkje stelt de schrijver voor om het beg. der virt. snelh. te noemen het „Leerstuk der evenwigt makende of zich opwegende krachten".

In eene „Verhandeling over de zamenstelling en het evenwigt van een stelsel krachten, werkende op een vast ligchaam", voorkomende in de Verh. d. Ie kl. Kon. Ned. Instit. 3e reeks, Ie deel, 1849" bewijst ook R. LOBATTO het beg. der virt. snelh., doch alleen voor een vast lichaam. Hij komt hiertoe door middel eener tamelijk samengestelde reeks van stellingen en gevolgen, waarin hij vooral MÖBIUS volgt.

Niet onbelangrijk is een opstel, voorkomende in de „Memorias da Academia real das Sciencias de Lisboa, 1a Classe 1854", 't welk tot titel voert: „Memoria sobre o Equilibrio dos Systemas ou Formula das Velocidades Virtuaes por ALBINO FRANCISCO DE FIGUEIREDO E ALMEIDA". In de voorrede of inleiding worden eenige beschouwingen over stelsels en verbintenissen, alsmede over het beginsel in 't algemeen gegeven, en tevens wordt er een oog geslagen op enkele bewijzen daarvan, met name op die van LAGRANGE, LAPLACE en POINSOT. De verhandeling zelve is verdeeld in drie hoofdstukken, waarvan het laatste de methode behandelt om van de formule der virt. snelh. gebruik te maken tot het oplossen van statische vraagstukken. Van de beide andere hoofdstukken handelt het eerste over voorwaardesvergelijkingen en over de krachten waardoor ze kunnen worden vervangen; terwijl in hoofdst. II het beginsel waarvan sprake is wordt bewezen eerst voor een vrij punt, dan voor een vrij systeem, en daarna voor een stelsel onderworpen aan zekere verbintenissen. Eindelijk wordt in dat hoofdstuk nog aangetoond dat als $\Sigma P\delta p = 0$ is, er evenwicht bestaat.

In het „Archiv der Mathematik und Physik von J. A. GRUNERT, 25er Theil, 1855" vindt men eene verhandeling van GRUNERT zelf over het beg. der virt. snelh. en over de algemeene voorwaardesvergelijkingen voor rust en voor beweging, waarin hij POISSON volgt. Ook hij leidt het beg. af uit het parallelogram van krachten, en toont verder aan hoe uit het beg. der virt. snelh. de algem. voorwaardesverg. voor 't evenw. van een willekeurig stelsel van punten kunnen worden afgeleid. Door eindelijk genoemd beginsel te combineeren met dat van D'ALEMBERT, verkrijgt hij ook de algemeene bewegingsvergelijkingen, waarmee in den grond der zaak de geheele Mechanica afgehandeld is.

Vooral dient niet vergeten te worden de merkwaardige verhandeling van HERMANN SCHEFFLER: „Ueber das GAUSS'sche Grundgesetz der Mechanik" en voorkomende in het „Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr. O. SCHLÖMILCH und Dr. B. WITZSCHEL, 3er Jahrgang, 1858." Na in hoofdstuk 3 te hebben aangetoond hoe het beg. der virt. snelh. uit dat van GAUSS — Princ. des kleinsten Zwanges — kan worden afgeleid, geeft hij in 't volgende hoofdstuk een nieuw bewijs van 't beg. der virt. snelh., gegrond op het parallelogram van krachten, op het beginsel van NEWTON dat de actie gelijk en tegengesteld is aan de reactie, en op het feit dat elke beweging van een lichaam teruggebracht kan worden tot eene translatie en eene rotatie.

Een der nieuwste bewijzen — doch alleen voor 't geval dat de krachten, welke de voorwaardesvergelijkingen vervangen, eene potentiaalfunctie bezitten — is dat van CARL NEUMANN in de „Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 21er Band, 1869; pag. 257—280" en getiteld: „Ueber den Satz der virtuellen Verrückungen." Hij grondt zijn betoog „auf folgenden bekannten Satz, welcher un„mittelbar entspringt aus der Definition der Kräfte: Wir„ken auf ein völlig freies System materieller Punkte „m_i mit den Coordinaten x_i y_i z_i ($i = 1, 2, 3, .. n$) die „beliebig gegebenen Kräfte ein X_i Y_i Z_i ; so gelten für „die Bewegung des Systems folgende 3n Differentialglei„chungen:

$$,,\quad m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i$$

„wobei noch hinzuzufügen ist, dass Coordinaten und „Kräfte bezogen zu denken sind auf ein absolut festes „rechtwinckliges Axensystem."

Dr. GUSTAV KIRCHHOFF (Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik. Zweite Aufl. 1877.) leidt het beg. der virt. snelh. uit de bewegingsverg. van LAGRANGE af.

Eindelijk moeten we nog vermelden dat ook in de bekende leerboeken over Mechanica — van DUHAMEL, STURM, SCHELL, etc. — bewijzen van het genoemde beginsel voorkomen, en dat allen daarbij gebruik maken van de samenstelling en ontbinding der krachten.

Daar nu onder de groote mathematici misschien wel GAUSS de eenige is die het beg. der virt. snelh. werkelijk als beginsel beschouwt en dus een bewijs onnoodig oordeelt; wijl GAUSS echter zelf toestemt dat dit beginsel volstrekt niet op het eerste gezicht plausibel schijnt; daar eindelijk LAGRANGE aan zijn beginsel ontrouw is geworden en er in den tweeden druk zijner „Méc. anal." een bewijs voor heeft gegeven; zoo schijnt het ons in verband met vroegere opmerkingen raadzaam toe, om behalve het woord snelheden ook het woord beginsel te laten vervallen, en voortaan te spreken van de „stelling der virtueele verplaatsingen." Later, bij de beschouwing van POINSOT's verhandeling, zal ons echter blijken, dat ook het begrip virtueel (= denkbeeldig, mogelijk doch niet bestaande) gemist kan worden.

We zullen nu in het volgende hoofdstuk nog een weinig stilstaan bij enkele der bewijzen die voor deze stelling, door de Duitschers ook wel „Gleichgewichtssatz von LAGRANGE" geheeten, geleverd zijn.

HOOFDSTUK IV.

Over de verschillende manieren waarop men de stelling der virt. verpl. heeft bewezen of trachten te bewijzen.

§ 1.

Na de verschijning van den eersten druk der „Méc. anal." zag men weldra in dat de juistheid van de stelling der virt. verpl. niet op het eerste gezicht duidelijk was. Toch trachtte men haar nog altijd het karakter van een beginsel te doen behouden. Daartoe was echter niet alleen noodig dat men in de bewijzen uitging van evidente waarheden, maar daarenboven moest ieder uitgangspunt vermeden worden dat, hoe weinig ook, afhing van de kennis die men toen ter tijde omtrent de voorwaarden van evenwicht bij verschillende werktuigen, — hefboom, katrol, enz. — bezat. Dit was zeer juist gezien, want al die voorwaarden behoorden als gevolgen van het algemeen beginsel te worden beschouwd en daarom mocht geene daarvan vooropgesteld worden. Zulks werd o. a. opgemerkt door FOURIER en PRONY.

Door deze beschouwing echter van de stelling der virtueele verplaatsingen brachten de geleerden van 't laatst der vorige en 't begin dezer eeuw zich zelven in eene groote moeilijkheid. Wat den een evident toescheen, was het den ander niet, en een bewijs waarin de genoemde stelling niet duidelijk als beginsel te voorschijn trad, werd onverbiddelijk afgekeurd of doodgezwegen. Misschien moet men hierin wel eene der redenen zoeken, waarom de classische verhandeling van Poinsot lang met stilzwijgen voorbij werd gegaan en en de werkjes van Buquoy zelfs tot op onzen tijd bijna geheel onbekend gebleven zijn. Beiden beschouwen nl. de stell. der virt. verpl. niet als een beginsel maar als een eenvoudig gevolg hnnner theorieën. 't Kan ons dus niet verwonderen dat zooveel geleerden haar hebben betoogd en er in trachtten te slagen haar helder als beginsel in 't licht te doen treden. 't Natuurlijk gevolg hiervan was dat vele dier bewijzen uiterst langdradig en onduidelijk, andere wel is waar kort doch niet algemeen genoeg waren.

Zoo bleef dan de stell. der virt. verpl. steeds geheimzinnig en duister; de wijze waarop Lagrange haar had uitgesproken was velen niet naar den zin, ja de laatstgenoemden meenden dat men hier niets met onbepaald-kleine wegen of verplaatsingen te maken had maar dat de stelling van dit begrip moest worden losgemaakt. Zij die zoo spraken letten er echter niet op dat de richtingen der verplaatsingen ieder oogenblik door de verbintenissen waaraan het stelsel moet voldoen, veranderen; en dat bovendien de krachten als constant worden aangenomen zoowel in grootte als in richting; kortom, zij beschouwden de zaak niet uit een juist oogpunt.

Lagrange zelf keurt al de bewijzen af die gegrond zijn op het beginsel van den hefboom en op het theorema van

Stevin, dus de bewijzen van Fourier, Carnot e. a. Inderdaad gaat men in die bewijzen uit van voorwaarden voor 't evenwicht die, wanneer men de stell. der virt. verpl. als beginsel beschouwt, slechts gevolgen mogen zijn. Dit bezwaar oppert Lagrange echter niet; hij keurt die bewijzen alleen daarom af wijl de beginsels van den hefboom en van de samenstelling der krachten volgens hem niet evident zijn. Verder beweert hij dat er in de Statica een ander beginsel is, 't welk niet, zooals dat van Archimedes en van Stevin, een bewijs noodig heeft, maar dat uit zich zelf evident is en dus niet van de twee vorige afhangt, hoewel de mechanici het er gewoonlijk toe terugbrengen. Aan dit nieuwe beginsel geeft hij den naam van „beginsel der katrollen".

Het bewijs van Lagrange komt in 't kort op het volgende neer. Door middel van een koord, aan welks eene einde een gewicht is opgehangen en dat vervolgens over vaste katrolschijven loopt en verder verschillende vaste en beweeglijke blokkenhuizen met elkaar vereenigt, zoodanig dat de beweeglijke blokkenhuizen vast verbonden zijn met de punten van een willekeurig gegeven stelsel, brengt hij de krachten aan welke op die punten moeten werken. Het koord wordt als onuitrekbaar en de middellijnen der katrolschijven als onbepaald-klein beschouwd, zoodat de deelen van het koord die bij een bepaald blokkenhuis behooren als evenwijdig mogen beschouwd worden en tevens de grootte der kracht uitdrukken. Is nu het stelsel in evenwicht dan moet het gewicht bij eene onbepaald-kleine verplaatsing der punten van het stelsel niet kunnen dalen; want ware er eene verplaatsing die dit vergunde, dan zou het gewicht, aangezien het steeds tracht te dalen, die verplaatsing in het stelsel te weeg brengen. Stelt men nu door α, β, γ, enz. de onbepaald-kleine lengten voor die de punten volgens de richting der daarop werkende krachten, d. i. volgens de richting der deelen van het koord die de beweeglijke met de vaste blokkenhuizen vereenigen, zouden doorloopen; en zijn P, Q, R, enz. de aantallen evenwijdige koorddeelen die op de punten uitkomen, m. a. w. de op de punten aangrijpende krachten; dan moet men blijkbaar hebben

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0 \quad .$$

Is omgekeerd bovenstaande vergelijking waar voor alle mogelijke onbepaald-kleine verplaatsingen van het stelsel, dan blijft de lengte van het koord onveranderd en het gewicht in denzelfden stand: dus is er evenwicht.

Ten slotte merkt LAGRANGE op dat, nu de stelling aldus betoogd is voor onderling meetbare krachten, zij ook gemakkelijk kan worden aangetoond wanneer de krachten onderling onmeetbaar zijn.

't Is echter duidelijk dat LAGRANGE hier in de eigen fout zijner voorgangers vervalt, daar toch het beginsel der katrollen even goed als dat van den hefboom eene voorwaarde voor evenwicht is, terwijl dit zoogenaamde nieuwe beginsel ook wat evidentie betreft veel te wenschen schijnt over te laten. Immers de grootste wiskundigen, slechts weinigen zooals DESCARTES, VARIGNON, LAGRANGE uitgezonderd, brengen het evenwicht van de katrol tot dat van den hefboom terug.

Bovendien is de meening van LAGRANGE dat hij in zijn bewijs geen gebruik zou gemaakt hebben van de samenstelling en ontbinding der krachten, onjuist. Immers bij elke verplaatsing niet in de richting der kracht gelegen, werkt de laatste slechts met een deel harer intensiteit nl. met dat hetwelk in de richting der verplaatsing valt. De ontbinding der kracht blijft dus steeds eene stilzwijgende onderstelling, ja ligt reeds in de formuleering der stelling opgesloten. Op grond hiervan schijnt het onmogelijk ooit tot de stell. der virt. verpl. te geraken zonder van het beg. van STEVIN gebruik te maken.

Eindelijk neemt LAGRANGE blijkbaar stilzwijgend aan, dat bij de willekeurige onbepaald-kleine verplaatsing waarvan hij spreekt, de verbindingskrachten zich in 't geheel niet doen gevoelen en dus òf niet bestaan òf ten minste geen arbeid verrichten, m. a. w. dat de som van de virt. mom. der verbindingskrachten nul is.

Hoe vernuftig en eenvoudig het bewijs van LAGRANGE dus ook moge zijn, op volkomen strengheid en algemeenheid mag het geen aanspraak maken; allerminst voldoet het aan de eischen door den schrijver zelven gesteld. In ieder geval ware het van uit zijn standpunt beter geweest zoo hij het achterwege had gelaten.

§ 2.

Hetgeen in het laatst der vorige § omtrent de verbindingskrachten is opgemerkt, is ook van toepassing op het bewijs van CARNOT die de stell. der virt. verpl. tot het evenwicht van den hefboom terugbrengt.

In het bewijs van LAPLACE wordt ieder punt van het stelsel afzonderlijk beschouwd als in evenwicht te zijn onder den invloed der onmiddellijk aangrijpende krachten mS, der reacties p volgens de richtingen f, en der weerstanden R loodrecht op de krommen of oppervlakken waarop het punt zich moet verplaatsen. Zoo verkrijgt hij als algemeene evenwichtsvergelijking

$$0 = \Sigma\, mS.\,\delta s + \Sigma\, p.\,\delta f + \Sigma\, R\,\delta r \ldots \quad (k)$$

waaruit hij nu de twee laatste termen tracht te doen verdwijnen. Met den laatsten term gaat dit vrij gemakkelijk. Immers de verplaatsingen δr zijn nul ten gevolge der voorwaarden waaraan de punten moeten voldoen. 't Komt er dus nu nog slechts op aan om aan te toonen $\Sigma\, p\delta f = 0$ en hierin ligt het zwaartepunt van LAPLACE's betoog.

Om dit laatste resultaat te verkrijgen bedient zich LAPLACE van eene ontbinding der krachten p. Ziehier zijne eigene woorden. „Concevons le système animé des „seules forces p, p', p'', etc. et supposons que les corps „soient forcés de se mouvoir sur des courbes qu'ils puis„sent décrire en vertu des mêmes conditions. Alors ces „forces se décomposeront en d'autres, les unes q, q', q'', etc. dirigées suivant les droites f, f', f'', etc. et qui se „détruiront mutuellement sans produire d'action sur les „courbes décrites; les autres T, T', T'', etc. perpendicu„laires aux courbes décrites; les autres enfin, tangen„tielles à ces courbes, et en vertu desquelles le système „sera mû. Mais il est aisé de voir que ces dernières forces „doivent être nulles; car le système étant supposé leur „obéir librement, elles ne peuvent produire ni pression „sur les courbes décrites, ni réaction des corps les uns „sur les autres; elles ne peuvent donc pas faire équilibre „aux forces —p, —p', —p'' etc. q, q', q'', etc. T, T', T'', etc.; „il faut donc qu'elles soient nulles, et que le systeme „soit en équilibre en vertu des seules forces —p, —p', —p'', „etc. q, q', q'', etc. T, T', T'', etc. Soient δi, $\delta i'$, $\delta i''$, etc. les

„variations des directions des forces T, T', T'', etc., on „aura en vertu de l'équation (k)

„ $$0 = \Sigma(q-p)\delta f + \Sigma T\delta i\ ;$$

„mais le système étant supposé en équilibre en vertu des „seules forces q, q', etc. sans qu'il en résulte aucune action „sur les courbes décrites, l'équation (k) donne encore „$0 = \Sigma q\delta f$; partant

„ $$0 = \Sigma p\delta f - \Sigma T\delta i.$$

„Si l'on assujétit les variations des coordonnées à satis-„faire aux courbes décrites, on a $\delta i = 0$, $\delta i' = 0$, etc ; „on a donc alors

„ $$0 = \Sigma p\delta f.\text{''}$$

Bij het nagaan dezer onduidelijke redeneering kan men er zich niet over verwonderen, dat het bewijs van Laplace langen tijd voor duister en uiterst moeilijk te begrijpen doorging. Aan de juistheid en algemeenheid waagde men echter niet te twijfelen, totdat Poinsot in eene verhandeling van vijf pagina's, voorkomende in „Liouville, Journal de Mathématiques, T. III, 1838" overtuigend de onjuistheid en cirkelredeneering van den chrijver der „Méc. cél." aantoonde.

In deze „Note sur une certaine démonstration etc." merkt Poinsot op dat de krachten p even goed als de krachten q volgens de richtingen f werken; en dat, daar de krachten q elkander opheffen zonder eenige werking op de beschreven krommen uit te oefenen, men die krommen kan wegdenken, zoodat de punten in evenwicht verkeeren enkel onder den invloed der krachten q. Maar volgens onderstelling doen zij dit ook onder de werking der krachten p, waaruit volgt, dat de krachten q dezelfde zijn als de krachten p, en derhalve de andere composanten T, alsmede die welke rakende zijn aan de krommen, uit zich zelven nul zijn. Zoodat, zegt POINSOT, „l'auteur n'aurait „encore fait que changer le nom de ces forces sans faire „un seul pas vers la démonstration." Verder gaat POINSOT als volgt voort: »Mais pour voir la chose avec plus „de clarté, suivons l'auteur plus loin. Accordons-lui „que chaque force p est décomposée en une autre q, une „autre T et une autre tangentielle. Accordons encore que „toutes les forces tangentielles se détruisent d'elles-mêmes „sur chaque point. Alors le groupe des forces p dirigées „dans les droites f, f', f'', etc. sera donc réduit au groupe „des forces q dirigéee dans les mêmes droites, et au groupe „des forces T perpendiculaires aux courbes décrites; et „l'on aura comme l'auteur le suppose l'equation

$$0 = \Sigma\,(q-p)\,\delta f + \Sigma\,T\,\delta i.$$

„Mais actuellement, comment peut-il savoir que l'on a „séparément l'équation $\Sigma\,q\delta f = 0$? Est-ce parce que les „forces q se font équilibre d'elles-mêmes sur le système? „Mais la loi de l'équilibre des forces q lui est aussi in„connue que la loi de l'équilibre des forces p qui se font „aussi équilibre ou des forces appliquées mS qui se font „aussi équilibre. L'équation $0 = \Sigma q\delta f$ est donc le principe „même des vit. virt. qu'il cherche, et l'auteur parait être „dans le cercle vicieux."

Ook JACOBI (Vorlesungen über Dynamik, 1866; pag. 15) is van oordeel dat de uitbreiding van de symbolische vergelijking der virt. verpl. op een door voorwaarden beperkt stelsel door LAPLACE volstrekt niet bewezen, maar slechts „historisch behauptet" wordt.

Wat betreft het bewijs dat J. B. J. FOURIER geeft in zijn reeds genoemd en in vele opzichten zeer belangrijk geschrift „Mémoire sur la statique," ook dit kan niet volkomen streng en algemeen genoemd worden. FOURIER onderzoekt eerst het evenwicht van een punt, daarna van eene rechte onbuigbare en onuitrekbare lijn en eindelijk dat van twee onbuigbare oppervlakken die tegen elkaar drukken. Van deze elementen kan men volgens hem het evenwicht van elk willekeurig stelsel doen afhangen. Hierbij onderstelt hij uitdrukkelijk dat de voorwaarden, waaraan het stelsel moet voldoen, door vergelijkingen zijn uitgdrukt, doch hij wijst niet in 't algemeen aan hoe die voorwaardesvergelijkingen door krachten kunnen worden vervangen. Eindelijk bemerkt men bij het lezen der 40 pagina's lange verhandeling van FOURIER dat de schrijver ondanks den vloed van woorden die hij gebruikt, er niet in geslaagd is om de stell. der virt. verpl. als beginsel voor te stellen (wat toch zijn doel was), noch om de algemeenheid en moeilijkheid van het bedoelde theorema tot zijn volle recht te laten komen.

§ 3.

Langzamerhand kwam men er van terug de stelling der virtueele verplaatsingen uitsluitend als beginsel op te vatten en als zoodanig te bewijzen. Men begreep dat het voldoende was de stelling te betoogen, dat men daarbij zeer goed van bekende voorwaarden van evenwicht mocht uitgaan, en dat de groote moeilijkheid alleen gelegen was in het vinden van een volkomen algemeen bewijs.

Bij de pogingen die daartoe nu gedaan werden, deden zich de drie volgende vragen op: of de verplaatsingen inderdaad onbepaald-klein moeten wezen, òf in geval van evenwicht de formule Σ P cos $\varphi \delta s = 0$ wel altijd doorgaat, en op welke manier de vergelijkingen door krachten kunnen worden vervangen en of die vervanging altijd mogelijk zij.

Reeds vroeger hebben we medegedeeld dat sommige schrijvers niets wilden weten van onbepaald-kleine verplaatsingen, maar meenden dat de stelling even goed doorging voor willekeurige verpl. Tevens hebben we opgemerkt dat en waarom hunne meening onjuist was. Ook hebben we gezien dat het in enkele bizondere gevallen, en wel in die waarbij het aangrijpingspunt zich verplaatst in de richting der kracht of er steeds een standvastigen hoek mee vormt, terwijl de kracht onveranderd blijft, niet noodig is om elementaire verpl. te beschouwen. 't Is echter duidelijk dat dit in 't algemeen volstrekt niet het geval is.

In alle bewijzen van de stell, der virt. verpl. (misschien alleen dat van Fourier uitgezonderd), die in 't laatst der vorige en 't begin van deze eeuw geleverd zijn, werd stilzwijgend aangenomen dat, welke ook de voorwaarden mochten wezen waaraan het stelsel moest voldoen, toch al de verplaatsingen omkeerbaar waren. Dit is echter niet steeds het geval zooals in hoofdst. III, § 7 is uiteengezet. In § 8 van 't zelfde hoofdst. is reeds gemeld, dat Gauss de eerste was die daarop opmerkzaam maakte. Om duidelijk in te zien dat eenzijdige bewegingsbeletsels werkelijk in de natuur voorkomen, stelle men zich een geelectriseerden geleider, omgeven door niet-geleiders voor; een deeltje electriciteit van de oppervlakte van den geleider kan zich dan wel naar binnen, doch niet naar buiten bewegen.

Neemt men nu aan dat, wanneer geen bewegingsbeletsels aanwezig of de bewegingsbeletsels door krachten vervangen zijn, de formule $\Sigma P \cos \varphi \delta s = 0$ geldt, dan is het gemakkelijk om aan te toonen dat, als er enkel tweezijdige bewegingsbeletsels voorkomen en dus de verplaatsingen alle omkeerbaar zijn, dezelfde formule blijft gelden; doch dat, wanneer er onder de bewegingsbeletsels ook eenzijdige en dus onder de verplaatsingen ook niet-omkeerbare voorkomen, men moet hebben $\Sigma P \cos \varphi \delta s \overline{\lessgtr} 0$. Want neemt men aan dat de bewegingsbeletsels door krachten zijn vervangen; stelt men die krachten door Q_1, Q_2, enz. en de verplaatsingen in de richtingen dier krachten door δq_1, δq_2, enz. voor; zijn verder P_1, P_2, enz. de krachten die reeds op het systeem werkten en δp_1, δp_2, enz. de virt. verpl. volgens de richtingen dier krachten, dan is wijl er ondersteld wordt evenwicht te zijn

$$\Sigma P \delta d + \Sigma Q \delta q = 0 \quad .$$

In het eerste geval dat we enkel met tweezijdige bewegingsbeletsels te maken hebben, kunnen de verpl. niet anders dan loodrecht op de overeenkomstige krachten Q geschieden en zijn dus al de grootheden δq absoluut nul, bijgevolg verdwijnt hier de geheele term $\Sigma Q \delta q$ en houden we over

$$\Sigma P \delta p = 0 \quad .$$

Komen er echter onder de bewegingsbeletsels ook eenzijdige voor, dan zijn voor alle verpl. waarbij de punten op de beletsels stooten, de grootheden δq nul, dus $\Sigma Q \delta q = 0$ en derhalve ook $\Sigma P \delta p = 0$; doch bij de tegengestelde en alle overige mogelijke verpl. zijn alle of minstens enkele der virt. mom. $Q \delta q$ positief, daar de projecties der verpl. in dezelfde richting vallen als de krachten; wel kunnen sommige dier momenten nul zijn, doch nooit kan eene der grootheden δq neg. worden. Derhalve is hier $\Sigma Q \delta q > 0$ en daar $\Sigma P \delta p + \Sigma Q \delta q = 0$ is, moet noodzakelijk $\Sigma P \delta p < 0$ zijn.

De stell. der virt. verpl., zoo algemeen mogelijk opgevat, moet dus door de volgende verg. worden uitgedrukt

$$\Sigma P \delta p \overline{\overline{<}} 0 \quad .$$

De opmerking van GAUSS dat de stell. der virt. verpl. eigenlijk zoo moet luiden dat voor 't geval van evenwicht de som der virt. mom. nooit pos. kan worden, was weinig of in 't geheel niet de aandacht waardig gekeurd; noch MÖBIUS, noch GRUNERT, noch DUHAMEL maken er melding van. Eerst in 1858 werd zij aan eene strenge critiek onderworpen door SCHEFFLER in zijne reeds vermelde verhandeling „Ueber das GAUSS'sche Grundgesetz der Mechanik". In hoofdst. 5 hiervan zegt de schrijver o. a.:

„Allerdings verwehren feste Punkte, Linien und Flä-„chen oft nur gewisse Bewegungen, gestatten aber die „direct entgegengesetzten. Solange nun die Festigkeit sol-„cher Punkte wirklich in Anspruch genommen, also ein „Bestreben zur Bewegung in der unmöglichen Richtung „obwaltet, existiren an diesen Punkten als Widerstände „jener Punkte Kräfte, welche für das Gleichgewicht des „Systems durchaus nothwendig sind. Sowie aber eine „Verrückung nach der möglichen Richtung eintritt, welche „die Widerstandsfähigkeit dieser Punkte ausser Thätig-„keit setzt, verschwinden die durch jene Widerstände „repräsentirten Kräfte aus dem Systeme, welche allerdings, „wenn sie fortbeständen, fur eine solche Bewegung lauter „positive virtuelle Momente hätten, also durch ihr Ver-„schwinden eine negative Summe für die Momente der „übrigen Kräfte zurücklassen. Durch das Verschwinden

„eines Theils der ursprünglichen Kräfte bleibt aber das „System nicht mehr dasselbe, und tritt sogar aus dem Zu„stande des Gleichgewichts heraus; auch würden solche „Bewegungen niemals geeignet sein, die zum Gleichge„wicht nothwendigen Widerstände der festen Punkte, „welche ganz die Rolle äusserlich angebrachter Kräfte „spielen, mitzubestimmen, also die Bedingungen des Gleich„gewichts volständig zu entwickeln. Demgemäss müssen „solche Bewegungen, welche den umöglichen direct ent„gegenliegen, wenn sie eine Veränderung des gegebenen „Systems von Kräften zur Folge haben, ebenfalls für „unzulässig gehalten werden. Das Princip der virtuellen „Geschwindigkeiten erfordert also, wenn dasselbe zur „vollständigen Bestimmung der zum Gleichwichte nöthi„gen Kräfte und Widerstände in Anwendung gebracht „werden soll, immer die Annullirung der Summe der „virt. Mom."

Nu is het van uit een zuiver mechanisch oogpunt volkomen juist, dat eene verplaatsing van het stelsel, welke tegengesteld is aan de richting waarin eene verplaatsing onmogelijk is, ten gevolge heeft dat de weerstanden, die de rol van uitwendige krachten vervullen, verdwijnen, het stelsel dus aan andere krachten onderworpen wordt en dien ten gevolge uit den toestand van evenwicht geraakt; doch men moet in het oog houden dat we hier te doen hebben met virt. verpl., resultaat eener werking van onzen geest; dat de opmerking van Gauss alleen betrekking heeft op de mathematische formuleering van de stell. der virt. verpl., en dat er van uit dat standpunt alleen gevraagd wordt wat er plaats heeft op 't oogenblik dat het in den toestand van evenwicht verkeerende stelsel de bewuste onbepaald-kleine verplaatsing ondergaat en dus de verbintenissen van kracht zijn. En daar men nu aanneemt dat de elementaire verplaatsingen niet strijden tegen de verbintenissen en die verbintenissen zelven hier òf positieve òf in 't geheel geen momenten opleveren, zoo is het duidelijk en stemt SCHEFFLER ook toe, dat men werkelijk eene negatieve som of eene som gelijk aan nul voor de momenten der krachten verkrijgt, want anders zou het systeem niet meer aan de verbintenissen kunnen voldoen.

De moeilijkheid schuilt eigenlijk in het vinden der juiste krachten die de verbintenissen vervangen, en wanneer men nu met SCHEFFLER al die verpl. welke tegengesteld zijn aan de richting waarin eene verplaatsing onmogelijk is, eenvoudig niet wil toelaten, ontwijkt men alleen de zwarigheid en beperkt zeer de algemeenheid der bedoelde stelling.

Dat de voorwaardesvergelijkingen, die eenzijdige bewegingsbeletsels vervangen, ongelijkheden moeten zijn, is gemakkelijk in te zien. Moet b. v. een punt (x_1, y_1, z_1) aan de voorwaarde voldoen dat het niet 't inwendige van een bol $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ kan doordringen, dan hebben we $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 \overline{\gtrless} 0$, waarin r de straal van den bol is wiens middelpunt in den oorsprong der coördinaten ligt. Ligt het punt ver buiten den bol dan hebben we met deze voorwaardesongelijkheid niets te maken en is de vergelijking voor 't evenwicht van 't stelsel eenvoudig $\Sigma P \,\delta p = 0$. Eerst wanneer het punt tegen den bol drukt en het systeem waartoe het behoort, in evenwicht is, komt de ongelijkheid in aanmerking en kan men onderstellen dat er eene kracht op werkt welke het punt belet in den bol te dringen. Zij die kracht N; ondergaat nu het stelsel eene virtueele verplaatsing zoodanig dat het punt zich langs of van den bol af beweegt, en stellen we de projectie dier verplaatsing op de richting van N door δn voor, dan is, aangezien die kracht N ondersteld wordt gedurende die virt. verplaatsing onveranderd te blijven, wijl het evenwicht moet voortbestaan, $\Sigma P\delta p + N\delta n = 0$. Daar nu $N\delta n$ òf nul òf pos. is, moet $\Sigma P\delta p$ òf nul òf neg. wezen.

Schreef men als voorwaardesvergelijking alleen $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0$, dan zou het punt zich noch binnen noch buiten, maar slechts òp den bol kunnen bewegen, $N\delta n$ ware dan steeds nul en dus ook $\Sigma P\delta p = 0$.

§ 4.

We zijn nu als van zelven gekomen tot de vraag òf en hòe de verbintenissen (voorwaardesvergelijkingen) door krachten kunnen worden vervangen.

Nemen we een volkomen willekeurig in evenwicht verkeerend stelsel punten aan waarop de krachten P_1, P_2, enz. werken. Onderstellen we dat dit stelsel aan zekere verbintenissen of voorwaarden onderworpen zij, en tevens dat die voorwaarden kunnen worden vervangen door de krachten Q_1, Q_2, enz. Voeren we nu werkelijk al de krachten Q in, d. w. z. vervangen we al de verbintenissen door krachten, die daaraan volkomen beantwoorden, dan mogen we het oorspronkelijke systeem als een stelsel van vrije punten beschouwen onder de werking der krachten $\Sigma P + \Sigma Q$. Opdat nu dit stelsel in den toestand van evenwicht zij, moet blijkbaar, daar alle verbintenissen door krachten vervangen zijn, ieder punt afzonderlijk onder den invloed der daarop werkende krachten in evenwicht verkeeren. Ondergaat nu het stelsel eene virtueele verplaatsing waarbij het steeds aan zijne verbintenissen moet blijven voldoen, d. w. z. zoodanig dat de verbintenissen onveranderd voortbestaan, dan zijn de krachten Q even goed standvastig als de krachten P. Nu is voor ieder vrij punt afzonderlijk de som der virt. mom. gelijk nul, zooals vroeger is aangetoond; bijgevolg is ook voor 't geheele stelsel de totale som der virt. mom. nul, d. i. $\Sigma P \delta p + \Sigma Q \delta q = 0$.

Wanneer we dus krachten kunnen vinden die de verbintenissen volkomen vervangen, zoodat het stelsel als een systeem van vrije punten, wier verplaatsingen dan klaarblijkelijk alle omkeerbaar zijn, kan worden beschouwd, dan is het bewijs van de stell. der virt. verpl. vrij eenvoudig. Evenwel hebben we reeds bij de eenvoudigste werktuigen met verbintenissen te doen, en daarom had POINSOT zeker geen ongelijk, toen hij beweerde dat de geheele Mechanica neerkomt op het bepalen der weerstanden die de punten van een stelsel ondervinden ten gevolge der verbindingsvoorwaarden.

In de uitdrukking die LAGRANGE geeft aan de stell. der virt. verpl. spreekt hij in 't geheel niet over verbintenissen die er tusschen de deelen van een stelsel kunnen bestaan, of over voorwaarden waaraan het stelsel moet voldoen; in Section II past hij echter de stelling stoutweg zonder bewijs ook op een door voorwaarden beperkt stelsel toe, en eerst in Sect. IV merkt hij op dat elke voorwaardesvergelijking equivalent is aan eene of meer (onbepaalde) krachten, na wier invoering het stelsel als vrij van de verbintenissen kan beschouwd worden.

Moet derhalve een stelsel aan zekere verbintenissen voldoen, dan is het volstrekt noodig om de krachten te zoeken, die dezelfde werking uitoefenen als de voorwaarden of verbintenissen waaraan het stelsel onderworpen is.

„Diese zu den gegebenen Kräften hinzutretenden fingir-„ten Kräfte müssen mit jenen Bedingungen äquivalent „sein, sie müssen also das System von einer überschrei-„tung des durch die Bedingungen vorgeschriebenen Spielraums „abzuhalten im Stande und gleichzeitig von solcher Beschaf-„fenheit sein, dass sie einer Bewegung innerhalb dieses Spiel-„raums keinerlei Widerstand entgegensetzen”. (Neumann.)

Verschillende schrijvers maken òf in 't geheel geen gewag van verbintenissen òf zij nemen — soms stilzwijgend — aan dat die verbintenissen door krachten kunnen worden vervangen; daar zij echter in gebreke blijven aan te wijzen hoe dit geschieden kan, zoo zijn alleen daarom reeds hunne bewijzen voor de stell. der virt. verpl. onvolledig en dus af te keuren.

Maar ten einde een algemeenen regel op te geven, volgens welken de verbintenissen door krachten kunnen worden vervangen, moet men, zooals Poinsot zeer tereeht opmerkt, die voorwaarden onder eenen algemeenen vorm zoeken samen te vatten.

Er moet eene algemeene definitie van een stelsel worden gegeven, even als men in de geometrie kromme lijnen algemeen voorstelt. Dit is ook de meening van Neumann, zooals blijkt uit de volgende woorden: „Sollen die bei „einem mechanischen Problem gegebenen Bedingungsglei-„chungen als hervorgegangen betrachtet werden aus der „Wirkung irgend welcher Kräfte die mit den Bedingungsgl. „äquivalent, sonst aber nicht näher bekannt sind, so wird

„das Problem ein völlig bestimmtes erst dann sein, wenn „für jene Aequivalenz eine genaue und allgemein gültige „Definition angegeben werden kann. Aber — voegt hij er bij — „eine solche Definition scheint sich nicht von selber darzubieten, und würde wohl nur in künstlicher „Weise, durch Herbeiziehung irgend welcher willkührlicher Festsetzungen, möglich sein."

§ 5.

De voorwaarden, waaraan een stelsel moet voldoen, treden meestal op in den vorm van vergelijkingen — hieronder ook ongelijkheden te verstaan —, die eene betrekking uitdrukken tusschen de coördinaten der punten van 't stelsel. De verbintenissen worden door ongelijkheden voorgesteld wanneer de in hunne beweging beperkte punten niet volkomen beperkt worden, maar de bewegingsbeletsels slechts eenzijdig zijn.

Kunnen de voorwaarden of verbintenissen niet door wetten worden uitgedrukt en kan men ze dus niet in vergelijking brengen, dan is het ook onmogelijk er iets mee uit te voeren. Het is duidelijk dat de voorwaarden waaraan een stelsel van punten moet voldoen, betrekking hebben òf op de inwendige gesteldheid van 't systeem òf op de uitwendige plaatsing van het stelsel ten opzichte van punten daarbuiten gelegen.

Is het nu mogelijk om de voorwaarden door vergelijkingen voor te stellen, dan is het nog de vraag door welke krachten zij kunnen worden vervangen. Dat het vinden van krachten die volkomen equivalent aan de voorwaarden zijn, eigenaardige moeilijkheden oplevert, zal ons blijken wanneer we op het voetspoor van NEUMANN het eenvoudige geval beschouwen, dat een stoffelijk punt m (x, y, z) gedwongen wordt om op een oppervlak φ (x, y, z) te blijven.

De krachten die deze verg. vervangen, moeten blijkbaar zoodanig zijn, dat het punt m, waar het zich ook op het oppervlak bevindt, er door belet wordt het oppervlak te verlaten; zij moeten zich dus niet alleen met de grootste intensiteit verzetten tegen elke beweging van het punt van het oppervlak af, maar daarenboven moeten zij geene werking uitoefenen zoolang het punt werkelijk op het oppervlak blijft.

Trekken we nu in m op het oppervlak $\varphi = 0$ de normaal N; noemen we die zijde van 't oppervl. waar φ positieve waarden aanneemt de pos., en die waarop φ eene negatieve waarde verkrijgt de neg. zijde; zij $n_1(x_1, y_1, z_1)$ een punt der normaal onbepaald-dicht bij m aan de pos. zijde van 't oppervl. gelegen, en noemen we α, β, γ de hoeken die N met de assen van een rechthoekig coördinanatenstelsel in de ruimte maakt, dan is

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{}}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{}}.$$

De richting van mn_1 wordt dus voorgesteld door de grootheden $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, of wel, als p een willekeurige positieve factor is, door $p\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $p\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $p\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Zij nu $n_2(x_2, y_2, z_2)$ een op de normaal aan de neg. zijde van 't oppervl. onbepaald-dicht bij m liggend punt, dan wordt op dezelfde manier als boven de richting mn_2 voorgesteld door $-q\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -q\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -q\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Stellen we de waarde van φ in n_1 door φ_1 en in n_2 door φ_2 voor, of wat hetzelfde is: zij φ_1 de aangroeiing van φ bij den overgang van m naar n_1 en φ_2 de aangroeiing van φ bij den overgang van m naar n_2, dan is $\varphi_1 > 0$ en $\varphi_2 < 0$; bij gevolg kan men p door φ_1 en $-q$ door φ_2 vervangen, en dan worden de richtingen mn_1 en mn_2 voorgesteld door

$$\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{en} \quad \varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Derhalve worden de tegengestelde richtingen n_1m en n_2m, dat zijn de richtingen naar het oppervlak toe, voorgesteld door

$$-\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{en} -\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

waarvoor we ook mogen schrijven

$$-\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, -\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}, -\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} \text{en} -\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, -\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}, -\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2}$$

Zij nu K eene willekeurige positieve constante, en noemen we de componenten der op het punt m werkende kracht X_1, Y_1, Z_1, dan kunnen we die componenten voorstellen door

$$X_1 = -K\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ Y_1 = -K\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ Z_1 = -K\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Het is duidelijk dat deze kracht het punt m, ingeval het zich in n_1 of n_2 mocht komen te bevinden, weer naar het oppervlak terugdrijft. Wil zich dus het punt van 't oppervl. verwijderen dan wordt het door de krachten X_1, Y_1, Z_1 weerhouden, en men ziet dat de intensiteit dier krachten door vergrooting der constante K tot eene willekeurige hoogte kan worden opgevoerd. Blijkbaar worden echter diezelfde krachten ten gevolge van den factor φ gelijk aan nul, zoolang het punt op het oppervlak blijft, wijl in dat geval $\varphi = 0$, dus ook $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ is. Aan eene verplaatsing op het oppervl. bieden de krachten x_1, y_1, z_1 derhalve niet den minsten tegenstand.

Nu is het gemakkelijk om aan te toonen dat de krachten X_1, Y_1, Z_1 beschouwd kunnen worden als de negatieve partieele differentiaalquotienten eener zelfde functie π, die dan krachtfunctie (potentiaalfunctie) geheeten wordt. Daartoe voeren we in alle drie de componenten nog den positieven factor $2e^{K\varphi^2}$ in, waardoor we verkrijgen

$$X_1 = -2Ke^{K\varphi^2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y_1 = -2Ke^{K\varphi^2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$Z_1 = -2Ke^{K\varphi^2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

of

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(e^{K\varphi^2}),\ Y_1 = -\frac{\partial}{\partial y}(e^{K\varphi^2}),\ Z_1 = -\frac{\partial}{\partial z}(e^{K\varphi^2}),$$

of $e^{K\varphi^2} = \pi$ stellende

$$X_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial x},\ Y_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial y},\ Z_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial z},$$

of

$$X_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ Y_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ Z_1 = -\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Willen we nu de kracht hebben in eene gegevene richting, dan leert de potentiaaltheorie dat de kracht in eene willekeurige richting uitgeoefend voorgesteld wordt door de neg. afgeleide der krachtfunctie ten opzichte van die richting.

Nu is het wel waar dat we de gefingeerde krachten X_1, Y_1, Z_1 door middel der willekeurige positieve constante zoo groot kunnen maken als we verkiezen, en dat zij dus in staat zijn om de voorwaardesvergelijking $\varphi = 0$ met een willekeurigen graad van nauwkeurigheid te vervangen; doch hoe groot hunne intensiteit ook zij, steeds zullen kleine afwijkingen van het gegeven oppervlak mogelijk zijn. Eerst wanneer die krachten oneindig groot waren, zoude het punt onmogelijk het oppervlak kunnen verlaten.

Daar dus de krachten X_1, Y_1, Z_1, er nooit voor kunnen zorgen dat de verplaatsing het door de verg. $\varphi = 0$ uitgedrukte karakter volkomen streng bezit, zoo duidt deze vergelijking slechts een ideaal karakter aan, en streng genomen wordt er niet aan de verg. $\varphi = 0$, maar aan eene andere verg. $\varphi = \varepsilon$ voldaan, waarin ε eene grootheid voorstelt die ieder oogenblik eene andere waarde aanneemt, doch steeds uiterst klein is.

Deze beschouwing heeft betrekking op een willekeurig gekozen plaats van 't gegeven oppervl. en geldt dus voor ieder punt daarvan.

§ 6.

Stellen we gemakshalve in de laatste formulen der vorige paragraaf $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = \lambda$ dan gaan ze over in

$$X_1 = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y_1 = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z_1 = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

Wanneer we nu aannemen dat, behalve de voorwaardesverg. $\varphi = 0$, nog andere krachten op het punt werken, dan kunnen we die laatste onmiddellijk aangrijpende krachten tot eene resultante samenstellen, en volgens de assen ontbinden in de componenten X, Y, Z. Maken we dus het punt vrij dan hebben voor 't geval van evenwicht

$$X - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad , \quad Y - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad , \quad Z - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad .$$

Deze drie vergelijkingen verbonden met $\varphi = 0$ kunnen nu dienen ter berekening van de onbekenden x, y, z en λ.

Om hieruit de stell. der virt. verpl. af te leiden vermenigvuldigen we bovenstaande drie verg. resp. met δx, δy, δz, waarbij we aannemen dat deze variaties zoodanig zijn, dat de nieuwe coordinaten ook aan de verg. $\varphi = 0$ voldoen. Door nu de som dier vergelijkingen te nemen vinden we

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z - \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z\right) = 0$$

of

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z - \lambda\,\delta\varphi = 0$$

of

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0 \; .$$

Uit het voorgaande blijkt dat deze formule op volkomen strengheid geen aanspraak kan maken, en dat we de stell. der virt. verpl. niet anders mogen beschouwen dan als uitdrukking eener benaderingsmethode. Neumann komt dan ook in zijne verhandeling „Ueber den Satz der virt. Verr.", waarin hij de stelling streng tracht te betoogen voor het geval dat de door de voorwaardesverg. voorgestelde krachten eene potentiaalfunctie bezitten, tot het volgende besluit: „Treten bei einem mechanischen Pro-„blem irgend welche Bedingungsgleichungen auf, die ent-„weder nur die Coordinaten enthalten, oder ausserdem „auch noch mit der Zeit behaftet sind, und können diese „Gleichungen — zufolge der physicalischen Bedeutung

„des Problemes — aufgefasst werden als ein Symbol für „nicht näher bekannte Kräfte, von denen indessen voraus-„gesetzt werden darf, dass sie ein Potential besitzen, so „wird der Satz der virt. Verr. in Gültigkeit sein.

„Denn wenn auch, bei so mangelhafter Kenntniss der „hinter den gegebenen Bedingungsgleichungen verborgenen „Kräfte von eener völlig strengen Behandlung des vorge-„stellten Problemes Abstand zu nehmen ist, so wird doch „durch jenen Satz der virt. Verr. die Vorschrift ausge-„sprochen für diejenige approximative Behandlung des „Problemes, welche unter so bewandten Umständen und „bei Anwendung des Fundamentalsatzes (zie Hoofdst. III, „§ 12) von selber sich darbietet. Wie wenig von einer absolut „strengen Behandlung derartiger Probleme die Rede sein „kann, zeigt sich deutlich, wenn wir etwa die Bewegung „eines von der Schwerkraft sollicitirten Pendels, oder über-„haupt die Bewegung eines starren Körpers, auf den gegebene „Kräfte einwirken, näher ins Auge fassen. Um eine solche „Bewegung mit voller Genauigkeit zu untersuchen, müssten „wir nothwendig zurückgehen auf diejenigen Molecular-„kräfte, welche hinter der sogenannten Starrheit des Kör-„pers verborgen sind, in unsere Untersuchung also noth-„wendig mit hineinziehen jene kleinen Dilatationen und „Contractionen, welche während der Bewegung des Kör-„pers in seinem Innern stattfinden, und welche im Ver-„lauf dieser Bewegung von Augenblick zu Augenblick sich „ändern. Vernachlässingen wir diese inneren Vorgänge, „so verzichten wir zugleich auf die wirklich strenge Be-„handlung des Problemes.

„Ob der Satz der virt. Verrückungen die zweckmässigste „Näherungsmethode darbietet, und wie gross bei dieser

„Methode der Grad der Annäherung sei, — über diese „Fragen dürfte wohl kaum Näheres zu ermitteln sein, „solange unsere Kenntniss über die hinter den Bedingungs- „gleichungen verborgenen Kräfte auf der vorausgesetzten „niedrigen Stufe verharrt. Jedenfalls aber wird zu sagen „sein, dass jene durch den Satz der virt. Verr. ausgespro- „chene Näherungsmethode auf Grund unserer Deductionen „berechtigt erscheint, dass sie gleichzeitig diejenige ist, „welche am Einfachsten sich darbietet, und dass sie end- „lich auch diejenige ist, welche seit langer Zeit conven- „tionell geworden ist."

Keeren we nog even tot de verg. $\varphi = 0$, een onstoffelijk oppervlak voorstellende, terug. Moet een punt ergens op dat oppervl. in evenwicht zijn, dan mag het zich niet bewegen en derhalve moet de resultante van alle onmiddellijk op dat punt aangrijpende krachten gericht zijn volgens de normaal, aangezien er door het ŏppervlak geen wrijving wordt uitgeoefend. Die resultante kan nul zijn; dan heeft het punt geene neiging om het oppervl. te verlaten en is dus de reactie van 't vlak ook nul. Is die resultante niet nul en het vlak zooals hier ondersteld wordt niet materieel, dan moet door de verg. $\varphi = 0$ eene reactie gelijk aan die resultante worden uitgeoefend. Voor 't geval van evenwicht hangt dus de reactie van 't oppervlak af van de op het punt rechtstreeks aangrijpende krachten.

Beschouwt men nu, na die reactie als kracht ingevoerd te hebben, het punt als vrij, dan moet men er ook, aangezien het punt volkomen in evenwicht en volkomen vrij is, eene virtueele verplaatsing in alle mogelijke richtingen aan kunnen geven, dus ook in eene richting niet volgens het oppervlak gericht. Dit laat echter de verg. $\varphi = 0$ niet toe; tegen eene dergelijke verplaatsing moet zich dus de achter die verg. verborgen kracht ten sterkste verzetten, want anders zou het punt niet meer aan de verg. $\varphi = 0$ maar aan eene andere $\varphi = \varepsilon$ voldoen. De door de verg. $\varphi = 0$ voorgestelde kracht kan derhalve nooit zoodanig zijn dat men het punt als volkomen vrij mag beschouwen.

Wanneer nu een stelsel aan dergelijke voorwaardesvergelijkingen onderworpen is, dan ontwijkt men bij het bewijzen van de stell. der virt. verpl. de moeilijkheid om die verg. door krachten te vervangen, en wel door alleen die virt. verpl. van het stelsel te beschouwen, waarvoor de totale arbeid der reacties (in ons geval de virt. arbeid der door het oppervl. volgens de normaal uitgeoefende kracht) verdwijnt. Deze virt. verpl. worden dan gezegd niet te strijden met de voorwaardesvergelijkingen, of m. a. w. zij zijn zoodanig dat het stelsel aan zijne verbintenissen blijft voldoen.

Uit de aldus beperkte virt. verpl. waarin dan eigenlijk de verbintenissen liggen opgesloten, en uitgaande van den evenwichtstoestand, kan men nu wel a posteriori de verbindingskrachten bepalen, doch het schijnt niet mogelijk om de voorwaardesvergelijkingen a priori door krachten te vervangen en dan de genoemde stelling te bewijzen, zooals streng genomen zou moeten geschieden.

Men kan zich wel is waar voorstellen dat vaste punten, lijnen en oppervlakken door krachten vervangen zijn, die in vergelijking van de rechtstreeks aangrijpende krachten onbepaald-groot of liever onverwinlijk zijn; of juister uitgedrukt, dat genoemde voorwaarden vervangen kunnen worden door krachten die slechts onbeduidend weinig toegeven; doch behalve dat eene dergelijke voorstelling altijd iets duisters overlaat, geeft zij ook geen inzicht in de grootte dier krachten vergeleken met de eene of andere gegeven kracht. LAGRANGE, die deze moeilijkheid wel schijnt te hebben gevoeld, voerde daarom onbepaalde krachten in, waarna hij het stelsel als vrij beschouwde. (Zie zijne „Méthode des multiplicateurs", pag. 74—79 van T. I der „Méc. anal.").

§ 7.

Wanneer een stelsel van punten aan eene zekere voorwaardesverg. $\varphi = 0$ moet voldoen, dan kan er soms meer dan eene uitlegging aan die verg. worden gegeven, m. a. w. eene gegevene verg. kan soms vervangen worden door verbintenissen van geheel verschillenden aard. En omgekeerd kunnen geheel verschillende verbintenissen dikwijls door eene zelfde voorwaardesvergelijking worden uitgedrukt. Met het oog hierop zegt J. M. C. DUHAMEL (Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 4e partie, pag. 141 en 142):

„Mais il ne suffirait pas de connaître les équations de „condition, pour déterminer les diverses actions exercées „entre les liens matériels qui unissent les points, parce „que les mêmes équations peuvent être l'expression de „liaisons d'espèce très-différente; comme aussi les mêmes „liaisons peuvent s'exprimer par un ensemble d'équations „très-différentes, formant un système équivalent. On ne „peut donc chercher à déterminer les diverses réactions „exercées dans les appareils qui établissent les liaisons, „que lorsque ces appareils sont définis dans tous leurs

„détails, et qu'on ne se borne pas à donner les équations „entre les coordonnées, qui en sont la conséquence. Si, „par exemple, un point est lié à un point fixe par une „tige rigide, on aura entre les coordonnées x, y, z du „premier et les coordonnées a, b, c du second l'équation „$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = l^2$, l désignant la lon„gueur de la tige. Mais on aurait aussi la même équation „en assujettissant le point à rester sur une sphère maté„rielle ayant pour rayon l et pour centre le point (a, b, c)."

Wanneer men nu, zooals bij de meeste bewijzen van de stell. der virt. verpl. pleegt te geschieden, de vergelijking door krachten vervangt, dan onderstelt men stilzwijgend dat die twee of meer verbintenissen die tot de zelfde vergelijking voeren, elkander kunnen vervangen zonder dat daardoor de beweging gewijzigd wordt; eene onderstelling die misschien moeilijk te bewijzen zal zijn. Wilde men echter om deze moeilijkheid te ontgaan, de gegeven voorwaardesvergelijking direct als basis voor het onderzoek nemen, dan zou men zooals Jacobi opmerkt (Verhandl. der Kön. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipz. 1869, pag. 257) in eene den winter van 1847 op 1848 te Berlijn gehouden voorlezing, volstrekt niet in staat zijn het vraagstuk op te lossen. „Soll z. B. ein Punkt gezwungen „sein auf einer gegebenen nicht materiellen Fläche zu blei„ben, so ist — zegt Jacobi — zur Ermittelung des gesuchten „Ortes eigentlich nur eine Vorschrift vorhanden, nämlich „die Gleichung der gegebenen Fläche; die fernere Vor„schrift, dass gegebene Kräfte den Punkt sollicitiren, „giebt an und für sich keinen Aufschluss, weil sie etwas „ganz Heterogenes besagt, sofern die Kräfte den Punkt „nicht auf der Fläche zu belassen streben."

§ 8.

De kwestie om gegeven voorwaardesvergelijkingen door krachten te vervangen, is het eerst uitvoerig behandeld door Louis Poinsot in zijne reeds meermalen genoemde verhandeling „Théorie générale de l'équil. et du mouv. des systèmes." Doel en inhoud van dit geschrift worden door hem als volgt beschreven: „On y a eu pour objet „principal d'établir d'une manière directe, je veux dire, „sans le secours du princ. des vit. virt. les équations de „l'équilibre et du mouvement d'un système variable de „figure suivant des conditions quelconques données. C'est „donc au fond toute la Mécanique affranchie de la consi-„dération du princ. des vit. virt. Cependant, comme ce „principe peut être utile dans les applications, on a cru „devoir en donner (Note II) une démonstration appro-„fondie et qui met le théorème dans un nouveau jour."

In deze verhandeling die men met recht classisch kan noemen, toont P. duidelijk en overtuigend aan, dat het zoogenaamde beginsel der virt. snelh. niets anders is dan een eenvoudig gevolg der algemeene theorie van 't evenwicht, zooals hij die in dit geschrift geeft.

Als axioma neemt Poinsot aan: wanneer op eenig veranderlijk stelsel krachten werken die elkander in evenwicht houden, dan houdt het evenwicht niet op als het stelsel (of een deel daarvan) eensklaps vast gemaakt wordt. Het lemma dat hij nu tot basis van zijne beschouwing neemt is, dat de voorwaarden voor het evenwicht van alle mogelijke stelsels zich herleiden tot deze enkele, dat de krachten die op de verschillende punten van een stelsel werken, ontbonden kunnen worden volgens de rechte lijnen die de punten vereenigen, in krachten twee aan twee gelijk en tegengesteld.

Nu moeten de krachten gezocht worden, die op de punten, als vrij beschouwd, dezelfde werking uitoefenen, als door de verbintenissen wordt te weeg gebracht.

Poinsot begint met een stelsel van 4 punten A, B, C en D. Noemen we m, n, p, q, r, s hunne afstanden, dan kan elke verbintenis tusschen die punten worden voorgesteld door eene verg. van den vorm

$$f(m, n, p, q, r, s) = 0$$

Blijkens het axioma, waarvan P. uitgaat, mogen we ons drie der punten, b. v. A, B en C als volkomen vast denken, zoodat alleen het punt D, waarop de ribben m, n en p uitkomen, beweeglijk blijft. In de bovenstaande verg. zijn dan q, r en s constant, zoodat zij het oppervlak voorstelt dat door D wordt beschreven, terwijl het steeds aan zijne verbintenis blijft voldoen. Beweegt nu een punt zich op een oppervl., dan zal dit laatste altijd eene werking op het punt uitoefenen, gericht volgens de normaal op het oppervl.; derhalve kan de verbintenis van het punt D vervangen worden door eene kracht werkende volgens de normaal.

Zij F(x, y, z) de verg. van een vlak op een rechth. coordinatenstelsel, dan is de verg. van de richting der normaal

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

waarin α, β, γ de hoeken zijn die de normaal met de assen maakt. We hebben hier echter met de assen m, n, p van een scheefh. coordinatenst. te doen en nu zullen we de stelling bewijzen, dat, wanneer we een stuk op de normaal nemen, en dit projecteeren op de assen van een scheefh. stelsel, de stukken even als bij een rechth. stelsel, evenredig zijn aan de partieele differentiaalquotienten.

Zij gegeven op rechth. coord. $A(a_1, b_1, c_1)$, $B(a_2, b_2, c_2)$, $C(a_3, b_3, c_3)$ en $D(x, y, z)$, dan is

$$AD = m = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$
$$AD = n = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}$$
$$CD = p = \sqrt{(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2}$$

Nu is

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{x - a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}}$$
$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{y - b_1}{\sqrt{}}$$
$$\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{z - c_1}{\sqrt{}}$$

enz. Wanneer we nu de afgeleiden onzer verg. $f = 0$ met betrekking tot de richtingen m, n, p, projecteeren op de X-as van een rechth. stelsel, dan komt er voor de som

$$\frac{\partial f}{\partial m} \cos(m, X) + \frac{\partial f}{\partial n} \cos(n, X) + \frac{\partial f}{\partial p} \cos(p, X)$$

of

$$\frac{\partial f}{\partial m} \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + \ldots}} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + \ldots}} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2 + \ldots}}$$

of

$$\frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{of} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \,.$$

Even zoo vinden we door op de Y-as en Z-as te projecteeren

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial f}{\partial z} .$$

Zetten we dus op de assen van een scheefh. coordinatenstelsel grootheden uit, evenredig aan de eerste afgeleiden der functie f ten opzichte dier assen, dan is de resultante van het hieruit samengestelde parallelopipedum de richting der normaal.

Om derhalve het punt D vrij te maken van zijne verbintenis, moeten we eene kracht aannemen, werkende volgens de richting der normaal, en ontbinden we die kracht in hare componenten volgens de ribben m, n, p, dan kunnen we die componenten voorstellen door

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial m} , \lambda \frac{\partial f}{\partial n} , \lambda \frac{\partial f}{\partial p} .$$

Op dezelfde wijze vinden we voor het punt A, als vrij beschouwd, de componenten

$$\lambda' \frac{\partial f}{\partial m} , \lambda' \frac{\partial f}{\partial q} , \lambda' \frac{\partial f}{\partial r} .$$

Daar echter onder bovenstaande krachten twee voorkomen die volgens dezelfde lijn werken en dus gelijk en tegengesteld moeten zijn, zoo is $\lambda' = \lambda$; bijgevolg worden de krachten, die de verbintenissen kunnen vervangen, voorgsteld op de volgende wijze:

voor het punt A door: $\lambda f'(m)$, $\lambda f'(q)$, $\lambda f'(r)$;
voor het punt B door: $\lambda f'(n)$, $\lambda f'(q)$, $\lambda f'(s)$;
voor het punt C door: $\lambda f'(p)$, $\lambda f'(r)$, $\lambda f'(s)$;
en voor 't punt D door: $\lambda f'(m)$, $\lambda f'(n)$, $\lambda f'(p)$.

We beschouwen nu een stelsel bestaande uit een willekeurig aantal punten, en nemen aan dat er slechts ééne verbintenis bestaat van den vorm

$$f(m, n, p, q, r, \ldots) = 0 .$$

Verder onderstellen we dat al de punten verbonden zijn tot driehoekige pyramiden, die alle tot basis hebben een zijvlak A B C van eene der pyramiden. Nemen we dit zijvlak als vaste basis aan en bepalen we elk ander punt met betrekking tot de punten A, B en C, dan hebben $(n-3)\,3+3$ of $3\,n-6$ gegevens of voorwaarden waardoor het stelsel volkomen bepaald wordt. Onderstellen we nu dat in de functie f $3\,n-6$ afstanden voorkomen dan is het duidelijk dat het aantal verbintenissen zich moet bewegen tusschen de getallen 1 en $3\,n-6$.

Voorshands nemen we echter maar ééne verbintenis aan, en moeten nu wederom de krachten bepalen die dezelfde uitwerking te weeg brengen als de verbintenis $f=0$.

Daartoe merken we op dat in al de toppen onzer pyramiden 3 ribben samenkomen, doch in ieder der punten A, B en C, $n-1$. Beschouwen we achtereenvolgens ieder dier toppen als beweeglijk en al de andere punten als vast, dan zijn blijkens het voorgaande de krachten, welke volgens de ribben op die punten moeten aangrijpen, ten einde ze als vrij te kunnen beschouwen, evenredig aan de eerste afgeleiden van f ten opzichte der ribben, volgens welke zij gericht zijn.

Beschouwen we nu een der drie overige punten, b. v. het punt A, waarin de ribben m, q, r, t, enz. samenkomen. Nemen we de afgeleiden van de functie f ten opzichte dier ribben, en projecteeren we die op de assen van een rechth. coordinatenstelsel, dan verkrijgen we op dezelfde manier als boven

$$f'(m)\cos(m,X)+f'(q)\cos(q,X)+f'(r)\cos(r,X)+\dots$$

of

$$\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\dots.$$

of

$$\frac{\partial f}{\partial x} .$$

Hiermede is dus de volgende stelling aangetoond: heeft men een stelsel van rechte lijnen die in een punt samenkomen, alsmede eene betrekking $f = 0$ tusschen die lijnen; zet men dan op die lijnen stukken af, evenredig aan de afgeleiden der functie, dan is de diagonaal of resultante van den veelhoek op die stukken juist gericht volgens de normaal op het vlak dat het punt beschrijft. Maken we dus het punt A vrij, dan worden de krachten die we volgens de ribben moeten aanbrengen voorgesteld door

$$\lambda f'(m), \ \lambda f'(q), \ \lambda f'(r), \ \lambda f'(t), \text{ enz.}$$

Eveneens moeten we in de punten B en C, wanneer we ze als vrij beschouwen, volgens de daarin samenkomende ribben krachten aanbrengen, die evenredig zijn aan de eerste afgeleiden der functie ten opzichte van die ribben.

Gaan we nu over tot rechthoekige coordinaten, en projecteeren we de in een der punten van 't stelsel aagrijpende krachten $\lambda f'(m)$, $\lambda f'(n)$, $\lambda f'(p)$, ... op de assen, dan vinden we voor de som der projectiën op de X-as

$$\lambda \left\{ f'(m) \cos(m, X) + f'(n) \cos(n, X) + \ldots \right\}$$

of

$$\lambda \left\{ f'(m) \frac{\partial m}{\partial x} + f'(n) \frac{\partial n}{\partial x} + \ldots \right\}$$

of

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} .$$

Drukken we nu ook de verbindingsvergelijking uit in de rechthoekige coordinaten der punten, en stellen we haar symbolisch voor door

$$L = 0$$

dan zijn de krachten die de verbindingsverg. vervangen

in het eerste punt $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial x_1}$, $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial y_1}$, $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial z_1}$;

in het tweede punt $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial x_2}$, $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial y_2}$, $\lambda \dfrac{\partial L}{\partial z_2}$;

enz.

Is een stelsel verbonden door meer dan eene vergelijking, dan beschouwen we al de verbintenissen als vast behalve die, welke door de eerste verg. wordt voorgesteld, en passen hierop de boven verklaarde handelwijze toe. Daarna beschouwen we al de verbintenissen als vast behalve de tweede, en voeren de krachten in welke die tweede verbintenis vervangen; enz. Het is duidelijk dat de verbintenissen onafhankelijk van elkaar moeten zijn, anders zou deze methode niet geoorloofd wezen.

Uit dit alles vloeit het volgende theorema voort: welke ook de vergelijkingen $L = 0$, etc. mogen zijn die tusschen de verschillende punten van een stelsel bestaan; voor 't evenwicht eischt iedere vergelijking dat men in de punten langs hunne coordinaten krachten aanbrengt evenredig met de eerste afgeleiden der functie L ten opzichte der respectieve coordinaten.

Dit is de algemeene regel welke dient om de onderlinge weerstanden der punten van het stelsel te bepalen; nu blijft er nog slechts over om deze krachten te verbinden met die welke onmiddellijk aangrijpen (de uitwendige krachten) en dan de punten als vrij en geïsoleerd te beschouwen.

Zijn dus $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, enz. willekeurige vergelijkingen tusschen de coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$; enz. der verschillende punten en λ_1, λ_2, enz. onbepaalde coefficienten, dan heeft men, als men X', Y', Z'; X", Y", Z"; enz. de totale krachten noemt, die in de punten volgens hunne coordinaten moeten aangebracht worden om de verbindingsvergelijkingen te vervangen:

$$X' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \ldots, \quad X'' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \ldots,$$

$$Y' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_1} + \ldots, \quad Y'' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_2} + \ldots,$$

$$Z' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_1} + \ldots, \quad Z'' = \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_2} + \ldots,$$

enz. Noemen we nu X_1, Y_1, Z_1 de componenten der uitwendige kracht voor het punt (x_1, y_1, z_1), X_2, Y_2, Z_2 die der uitw. kracht voor het punt (x_2, y_2, z_2), enz., dan moeten we als voorwaarde voor het evenwicht van het eerste als vrij beschouwde punt hebben

$$X_1 + X' = 0 \quad , \quad Y_1 + Y' = 0 \quad , \quad Z_1 + Z' = 0 \quad ,$$

of

$$X_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + .. = 0, \; Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + .. = 0, \; Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + .. = 0.$$

Evenzoo vinden we voor het evenwicht van het punt x_2, y_2, z_2) de drie vergl.

$$X_2 + X'' = 0 \; , \; Y_2 + Y'' = 0 \; , \; Z_2 + Z'' = 0, \text{ of}$$

$$X_2 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + .. = 0, Y_2 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_2} + .. = 0, Z_2 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_2} + .. = 0;$$

en zoo vervolgens.

Op deze wijze verkrijgt Poinsot de zoogenoemde evenwichtsvergelijkingen van Lagrange

$$X_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial L_3}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial x_1} = 0$$

$$Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_2 + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_m} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial x_n} = 0$$

$$Y_n + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_n} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_n} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial y_n} = 0$$

$$Z_n + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_n} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial z_n} = 0.$$

§ 9.

Al het in de vorige § behandelde heeft blijkbaar niets te maken met de stelling der virt. verplaatsingen.

'tIs echter gemakkelijk om uit de pas verkregen evenwichtsvergelijkingen den algebraïschen vorm af te leiden, die het zoogenoemde beginsel der virt. snelh. voorstelt.

Daartoe vermenigvuldigen we deze vergelijkingen resp. met δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, enz. waarin δx_1, enz. onbepaald-kleine verplaatsingen volgens de assen voorstellen, die de punten kunnen ondergaan, terwijl zij aan de voorwaardesvergelijkingen blijven voldoen. Door eindelijk de som der aldus verkregen vergelijkingen te nemen, vinden we

$$\sum_1^n(X_n\delta x_n+Y_n\delta y_n+Z_n\delta z_n)+\sum_1^m\lambda_m\left(\frac{\partial L_m}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial L_m}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial L_m}{\partial z_1}\delta z_1\right)$$

$$+\sum_1^m\lambda_m\left(\frac{\partial L_m}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial L_m}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial L_m}{\partial z_2}\delta z_2\right)+\;.\;.\;.\;.\;+$$

$$+\sum_1^m\lambda_m\left(\frac{\partial L_m}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial L_m}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial L_m}{\partial z_n}\delta z_n\right)=0$$

Maar gaat de verg. $L_m=0$ ook voor den volgenden stand door, dan is $L_m+\partial L_m=0$, en dus wegens $L_m=0$, ook $\partial L_m=0$; derhalve hebben we

$$\frac{\partial L_m}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial L_m}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial L_m}{\partial z_1}\delta z_1=0,$$

enz. Zoodat de pas verkregen vergelijking overgaat in

$$\sum_1^n(X_n\delta x_n+Y_n\delta y_n+Z_n\delta z_n)=0.$$

Uit het voorgaande blijkt, zooals Poinsot aan het slot van zijn geschrift zeer juist opmerkt, dat het zoogenaamde beg. der virt. snelh. volkomen identiek is met het algemeene theorema, dat het doel zijner verhandeling uitmaakt. 't Kan ons dus niet verwonderen dat P. van dit geheele beginsel niets wil weten, maar beweert dat de zaak door het invoeren van virtueele verplaatsingen slechts duister en onduidelijk wordt. Inderdaad bevat zijne voorstelling niets virtueels, zoodat ook dit laatste begrip geheel overbodig is. Het laat zich zeer goed begrijpen, dat Lagrange met deze verhandeling van Poinsot geenszins ingenomen was. „Tout, dans cette oeuvre nouvelle," zegt Bertrand (Journal des Savants, 1872) „devait „intéresser l'auteur de la Mécanique analytique, non lui „plaire; on y proposait, en effet, une route directe pour

„atteindre, sans aucun postulatum, le but qu'il s'était „proposé dans son bel ouvrage." Op den witten rand der proeven, die P. aan LAGR. zond, maakte de laatste dan ook allerlei aanmerkingen, welke P. echter niet in gebreke bleef te beantwoorden. Jammer dat deze kritiek en verdediging nog niet in 't licht zijn verschenen; zij zouden misschien eene belangrijke bijdrage leveren tot de geschiedenis van de stelling der virt. verpl.

Men moet wel in het oog houden dat P. uitdrukkelijk uitgaat van de onderstolling, dat de voorwaarden, die de verschillende punten onderling verbinden en er een stelsel van uitmaken, hierin bestaan dat er in alle standen, welke die punten kunnen innemen, functien hunner coordinaten gevonden kunnen worden die òf nul òf constant blijven.

't Schijnt dat de verhandeling van P. in het eerst òf geene zeer gunstige ontvangst heeft genoten òf opzettelijk met stilzwijgen voorbij werd gegaan; in allen gevalle werd er weinig of geen melding van gemaakt, en ging men nog steeds voort naar een rechtstreeks bewijs voor de stelling der virt. verpl. te zoeken.

Ten einde nu de moeilijkheid om de verbindingskrachten te bepalen, te ontwijken, gaan sommigen, 't zij stilzwijgend, 't zij uitdrukkelijk, van de stelling uit dat de verbindingskrachten elkaar in evenwicht houden, of dat de arbeid dier krachten nul is bij al de verplaatsingen, die niet met de verbintenissen strijden. Dat eene dergelijke onderstelling niet geoorloofd is, spreekt van zelf.

Dit neemt echter niet weg, dat in enkele gevallen de verbindingskrachten inderdaad niet behoeven bepaald te worden, hetzij omdat de virtueele momenten dier krachten elkander onderling opheffen, hetzij omdat ze uit den aard der zaak nul zijn. Men heeft dan alleen de momenten der rechtstreeks aangrijpende of uitwendige krachten te beschouwen. In 't algemeen is dit het geval wannner de verbintenissen onhafhankelijk van de uitwendige krachten of volkomen onveranderlijk zijn. Dan toch doen die krachten geene reacties in het stelsel ontstaan die bij de verplaatsing arbeid verrichten en dus in rekening moeten gebrachten worden.

Stelsels bestaande uit volkomen vaste, onveerkrachtige lichamen, die draaien kunnen om volkomen vaste punten of om vaste assen, leveren voorbeelden op van verbintenissen die volkomen onafhankelijk en onveranderlijk zijn; en nu is het duidelijk dat de virt. mom. der krachten welke die verbintenissen kunnen vervangen, eene waarde nul hebben, om de eenvoudige reden dat de aangrijpingspunten dier krachten zich niet kunnen verplaatsen.

Niet volkomen onveranderlijk, doch alleen in zoo verre men verplaatsingen beschouwt, die niet met de verbindingsvergelijkingen in strijd zijn, zijn met name de voorwaarden, waardoor bepaalde punten van een stelsel genoodzaakt worden zich lang voorgeschreven banen (lijnen of oppervlakken) te bewegen. Dan zijn de virt. mom. der verbindingskrachten nul, wijl de elemetentaire verplaatsingen in die gevallen loodrecht op de richtingen der krachten staan en derhalve hare projecties nul zijn.

§ 10.

Het is hier de plaats om nog kortelijk op het vroeger vermelde bewijs van Lagrange terug te komen. Aan dit bewijs geeft LAGR. eene laatste inkleeding in het 5de hoofdstuk van het 3de gedeelte (pag. 350—357) zijner „Théorie des fonctions analytiques, nouv. éd. 1813."

Dit geheele hoofdstuk, twee jaren na den tweeden druk van 't eerste deel der „Méc. anal." verschenen, is gewijd aan een algemeen betoog van het zoogenoemde beg. der virt. snelh. Was het eerste bewijs van LAGRANGE zuiver mechanisch, dit laatste is zuiver analytisch en berust op het vervangen door krachten van de voorwaardesvergelijkingen, die tusschen de coördinaten der verschillende onderling verbonden lichamen bestaan.

Eerst beschouwt LAGR. hier de beweging van een lichaam op een gegeven oppervlak of onderworpen aan zekere verbintenissen, en toont aan dat de voorwaardesvergelijkingen equivalent zijn aan onbepaalde krachten die evenredig zijn aan de eerste afgeleiden; vervolgens gaat hij over op een stelsel van twee lichamen door een onrekbaren draad verbonden welke over eene vaste katrolschijf loopt; daarna laat hij den draad over twee vaste schijven (a, b, c) en (α, β, γ) loopen en zegt dan: „Enfin si on „supposait que le fil auquel est attaché le corps M (x, y, z) „après avoir passé sur la première poulie fixe, reposât „sur le même corps M et de là sur la même poulie et de nouveau sur le corps et sur la poulie à plusieurs reprises „de manière qu' il y eût m cordons entre le corps et la „poulie; qu'ensuite le fil en quittant cette poulie, passât „sur la seconde poulie fixe et de là sur le corps N (ξ, η, ζ) „en faisant aussi plusieurs tours entre ce corps et la même „poulie avant d'être attaché fixement au corps N, de ma„nière qu'il y eût n cordons entre ce corps et la poulie, „comme la tension T est la même dans toute l'étendue

„du fil, le corps M étant tiré par m cordons serait „tiré vers la première poulie par une force égale à m T, „et le corps N serait tiré vers la seconde poulie par une „forc égale à n T. Or il est clair que dans ce cas l'équation qui renferme la condition de l'inextensibilité du fil serait

„$m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+n\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0$

„en désignant par d la longueur totale du fil moins la „longueur interceptée entre les deux poulies; et il est „facile de voir qu'en représentant cette équation par „$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$ on aurait pour les forces qui tireraient „le corps M suivant x, y, z et le corps N suivant ξ, η, ζ „les expressions $T f'(x)$, $T f'(y)$, $T f'(z)$, $T f'(\xi)$, $T f'(\eta)$, „$T f'(\zeta)$."

Bestaat een stelsel uit drie of meer lichamen dan handelt hij even zoo.

Men ziet dat het koord- en katrollenstelsel hier een veel eenvoudiger vorm heeft dan in de „Méc. anal." Immers het vroegere vrije einde van het koord, waaraan het gewicht hing, is hier aan het laatste lichaam vastgemaakt, zoodat het gewicht vervalt; ook zijn de blokkenhuizen verdwenen, en in plaats daarvan wordt het koord onmiddellijk om de lichamen van het stelsel en om de vaste katrollen geslingerd.

Nu merkt Lagrange op: vooreerst dat de krachten die uit de wederzijdsche werking der lichamen van een stelsel voortvloeien op de bekende wijze (Zie o. a. reeds den eersten druk der Méc. anal., Ie Partie, Section IV) uit de voorwaardesvergelijkingen kunnen worden afgeleid; en in de tweede plaats dat wanneer direct op een stelsel van lichamen aangrijpende krachten elkaar in evenwicht houden, zij dan gelijk en tegengesteld moeten zijn aan die welke uit de wederzijdsche werking der lichamen voortvloeien. Zoo vindt hij nu eene vergelijking waaruit al de termen met onbepaalde vermenigvuldigers aangedaan ten gevolge der voorwaardesvergelijkingen verdwijnen, zoodat de eindvergelijking juist de formule der virt. verpl. is.

Het is duidelijk, dat bij dit bewijs uitdrukkelijk van de ontbinding der krachten volgens de coordinaten-assen gebruik gemaakt wordt.

§ 11.

In zijne verhandeling „Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik" leidt Scheffler de stelling, waarvan sprake is, eerst af uit het beginsel van Gauss; doch aangezien Gauss zelf zijn „Princip des kleinsten Zwanges" uit dat van Bernoulli en van d'Alembert afleidt en men moeilijk dit beginsel als eene uit den aard der zaak duidelijke mechanische grondstelling kan beschouwen, zoo geeft Scheffler nog een ander volgens hem zelven hoogst eenvoudig bewijs voor de stell. der virt. verpl.

Hierin toont hij haar eerst aan voor een volkomen onveranderlijk en vrij in de ruimte geplaatst stelsel en gaat daarbij uit van de zes bekende evenwichtsvergelijkingen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $L=0$, $M=0$, $N=0$. Dit bewijs komt vrij wel overeen met dat van Duhamel in diens „Cours de Mécanique, T. I, pag. 201—204". Vervolgens onderstelt Scheffler dat bij dit stelsel nog een tweede onveranderlijk stelsel gevoegd wordt, zegt dat wegens de gelijkheid van actie en reactie de virtueele momenten der verbindingskrachten verdwijnen, vereenigt met dit stelsel op dezelfde wijze door middel eener beweeglijke op onmiddellijke aanraking gebaseerde verbinding een derde onveranderlijk lichaam, en zoo verder; en zegt eindelijk: „Erwägt man schliesslich, dass es bei der vorstehenden „Betrachtung gleichgültig ist, ob eins oder mehrere der „betrachteten Systeme endliche oder unendlich kleine Di„mensionen hat, in welchem letzteren Falle sich dasselbe „auf einen materiellen Punkt reducirt, so folgt dass das „fragliche Princip überhaupt auf jedes System anwendbar „bleibt, wie auch die Verbindungen durch starre, bieg„same, dehnbare, pressbare Körper u. s. w. beschaffen sein „mögen, weil jeder nicht starre endliche Körper sich in „unendlich kleine Theile welche man als starr betrachten „kann, zerlegen lässt".

Inderdaad is deze laatste redeneering hoogst eenvoudig, doch zij kan noch streng noch waar genoemd worden. In de eerste plaats toch heeft het wel eenige moeilijkheid in, om zich ieder lichaam voor te stellen als te bestaan uit onbepaald-kleine volkomen onveranderlijke gedeelten, en in de tweede plaats zouden die „starre Theile" onmiddellijk naast elkaar moeten gelegen zijn — zooals ook de schrijver onderstelt — ten einde hem recht te geven om de verbindingskrachten buiten beschouwing te laten. Over voorwaardesvergelijkingen waaraan het stelsel onderworpen kan zijn, spreekt Schffler in 't geheel niet; zijn bewijs geldt dus alleen voor een vrij in de ruimte geplaatst stelsel en is derhalve niet algemeen.

We zullen ten slotte nog kort stilstaan bij die bewijzen van de stelling der virt. verpl., welke in de meest bekende leerboeken over Mechanica voorkomen.

§ 12.

De algemeene bewijzen voor de stell. der virt. verpl. (théorème du travail virtuel) zooals die gegeven worden door CH. STURM in zijn „Cours de Mécanique, T. II, art. 448—454" en door H. LAURENT in zijn „Traité de Mécanique rationnelle, T. I, art. 70 en 71", zijn niet anders dan wijzigingen van het reeds in 1806 door AMPÈRE gegeven betoog, 't welk men vindt in het „Journ. de l'Ecole Polyt. T. VI, pag. 247—269".

STURM en LAURENT nemen beiden aan, dat al de verbintenissen kunnen worden uitgedrukt door vergelijkingen tusschen de coordinaten der punten van het stelsel ten opzichte van een rechthoekig drieassig coordinatenstelsel, zoodat de verbindingsvergelijkingen den algemeenen vorm hebben $L(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots.) = 0$. Naar het aantal dier vergelijkingen onderscheiden zij nu de stelsels in „systèmes à liaisons complètes" en in „systèmes à liaisons incomplètes."

Een syst. à liais. compl. is een stelsel dat het grootst mogelijke aantal verbintenissen heeft. Dit grootste aantal is $3n - 1$, wanneer n het aantal punten voorstelt. Want daar de plaats van een punt door zijne drie coördinaten volkomen bepaald is, zoo wordt de plaats der n punten bepaald door $3n$ coordinaten, en had men nu $3n$ verbindingsvergel. dan kon men al de onbekenden oplossen, en zou ieder punt eene vaste plaats hebben en het stelsel dus onbeweeglijk zijn. Bestaan er tusschen de coörd. der punten van een stelsel minder dan $3n - 1$ verbintenissen, dan noemt men het een syst. à liais. incompl.

In 't eerste geval kan ieder der coord. worden uitgedrukt in functie van een hunner, en de punten kunnen zich dan slechts te gelijk langs bepaalde kromme lijnen verplaatsen. Beschouwt men dus enkel verplaatsingen langs die krommen, d. w. z. verpl. die vereenigbaar zijn met de verbintenissen, dan kan men die verbintenissen wegdenken en de punten onder den invloed der direct daarop aangrijpende krachten als vrij beschouwen.

LAURENT besluit nu onmiddellijk, STURM langs een kleinen omweg tot de form. der virt. verpl.

Heeft men te doen met een syst. à liais. incompl. waar het aantal verbintenissen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, enz. ten getale van i kleiner dan $3n - 1$ is, dan voegt men daarbij $3n - i - 1$ nieuwe, willekeurige, doch niet met de eerste strijdige, verbintenissen; daardoor worden slechts sommige verplaatsingen onmogelijk gemaakt doch het evenwicht niet verstoord. We hebben nu $3n - 1$ verbintenissen, derhalve is dit geval tot het vorige teruggebracht.

Het is duidelijk dat de bewijzen van STURM en LAURRNT niet volkomen streng zijn, omdat de schrijvers uitgaan van de onderstelling dat het mogelijk is om al de verbintenissen nauwkeurig in vergelijkingen uit te drukken, waaraan de punten absoluut moeten voldoen, welke ook de krachten zijn die daarenboven rechtstreeks op de punten aangrijpen. Bovendien nemen beiden als evident aan, dat wanneer een stelsel, onderworpen aan zekere verbintenissen, onder de werking van gegeven krachten in evenwicht is, diezelfde krachten elkaar nog in evenwicht houden als het stelsel aan andere verbintenissen onderworpen wordt, die dezelfde verplaatsingen toelaten.

Om tot het algemeene bewijs der genoemde stelling te geraken bewijst LAURENT haar eerst voor een enkel punt en STURM bovendien nog voor twee stoffelijke punten verbonden door eene „droite rigide."

Ook DUHAMEL (Zie diens „Cours de Méc." of „Des Méthodes etc. Quatrième partie") begint met haar aan te toonen voor een enkel punt, daarna voor een willekeurig onveranderlijk vrij stelsel, en vervolgens in 't geval van een buigzaam doch onrekbaar koord. Na deze voorbereidingen gaat hij tot het algemeene bewijs over, en vangt aan met het stelsel dat hij wenscht te beschouwen zoo algemeen mogelijk te omschrijven. Hierop neemt hij een willekeurig punt van het systeem, vervangt alle mogelijke verbintenissen van dat punt door krachten, en beschouwt het dan onder de werking dier verbindingskrachten en der onmiddellijk gegeven krachten als vrij. Dit punt moet nu in evenwicht zijn, bijgevolg is de som der virt. mom. van alle daarop aangrijpende krachten nul. Hetzelfde geldt voor alle andere punten en dus voor het geheele stelsel.

Na aangetoond te hebben dat uit de aldus verkregen vergelijking verschillende termen wegvallen, zegt DUHAMEL ten slotte: „Il résulte de cette discussion, que dans „la somme des premiers membres des équations fournies „par l'équilibre des diverses parties du système, il ne „reste que les moments virtuels des forces données ou des „forces mutuelles exercées par les points les uns sur les „autres suivant des lois données." Nu zegt de schrijver wel dat deze laatste verbintenissen, wier wetten bekend zijn, uitgedrukt kunnen worden in functie der coördinaten, doch daarmede zijn volstrekt de krachten nog niet bepaald welke die functies kunnen vervangen, zoodat hij geen recht heeft om ze te beschouwen als opgesloten te liggen in de gegeven krachten P, Q, enz.

Ik acht het niet noodig om het bewijs, waaraan blijkbaar veel zorg is besteed, verder in bizonderheden na te gaan; de reeds gemaakte opmerking doet zien dat Duhamel de systeem-punten niet als vrij en wij zijn bewijs niet als geslaagd mogen beschouwen.

Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte von Dr. W. Schell, 1870, pag. 594—622) waagt het niet een algemeen bewijs voor de stell. der virt. verpl. te geven. Hij betoogt haar wel in vele bizondere gevallen, met name in die waar de verbintenissen door krachten kunnen worden vervangen, doch laat al die gevallen, waarin dit niet mogelijk is of niet kan worden aangetoond, buiten beschouwing. Ten slotte drukt hij het zoogenoemde beg. der virt. snelh. uit als volgt: „Zum Gleichgewicht der „Kräfte an einem beliebigen veränderlichen System, wel„ches Bedingungen unterworfen ist, dass gewisse Punkte „feste oder bewegliche Flächen oder Curven nicht verlas„sen, dass gewisse Systemparthieen unveränderlich blei„ben, dass unveränderliche Systemtheile einander berühren „sollen und dergl., ist erforderlich und hinreichend, dass „die Summe der virtuellen Arbeiten des gegebenen Kräfte„systems für alle mit den Bedingungen verträglichen Ver„schiebungsarten Null oder negativ sei."

HOOFDSTUK V.

BESLUIT.

§ 1.

Al de rechtsteeksche bewijzen voor de stelling der virt. verpl. kunnen gevoegelijk in twee hoofdgroepen worden verdeeld. Tot de eerste groep brengen we die, waarin een bizonder stelsel als type van alle mogelijke stelsels wordt genomen, of wel een zeker aantal bizondere stelsels, die door hunne combinatie geacht worden alle stelsels te omvatten; tot de tweede groep brengen we die, waarin werkelijk een algemeen stelsel beschouwd wordt, waarvan al de andere slechts bizondere gevallen zijn.

Het is duidelijk dat de bewijzen der eerste groep alleen in bizondere meer of minder talrijke gevallen de waarheid der genoemde stelling kunnen aantoonen, doch nooit als algemeen geldige bewijzen mogen beschouwd worden.

Die der tweede groep stuiten echter, zooals uit het voorgaande blijkt, op zoo vele en velerlei bezwaren, dat geen hunner als volkomen afdoend mag worden beschouwd,

Veeleer is het ons uit de beschouwing van POINSOT omtrent deze zaak duidelijk geworden, dat het geheel overbodig mag genoemd worden, naar een rechtstreeks bewijs voor het zoogenaamde beg. der virt. snelh. te zoeken. Niet alleen toch is de benaming geheel onjuist, maar ook de daardoor aangeduide zaak bestaat in den grond in niets anders dan in het bepalen der algemeene evenwichtsvergelijkingen, hetwelk ons door POINSOT op eene rechtstreeksche wijze is geleerd.

In plaats dus van naar het beg. der virt. snelh. te zoeken, heeft men zich het volgende algemeene vraagstuk te stellen: gegeven een aantal punten, de krachten, die er op werken en de verbintenissen die er tusschen bestaan, dan wordt gevraagd onder welke omstandigheden er evenwicht zal zijn.

Men moet echter niet uit het oog verliezen, dat het vervangen der verbintenissen door krachten die dezelfde uitwerking hebben, slechts dan mogelijk is, wanneer die verbintenissen in vergelijkingen kunnen worden uitgedrukt. Alleen in dat geval kunnen dan ook de evenwichtsvergelijkingen worden opgemaakt en is dus de formule der virt. snelh. geldig.

Kunnen echter de verbintenissen niet dan onnauwkeurig of in 't geheel niet in wetten worden uitgedrukt, dan is eenewetenschapelijke behandeling der zaak onmogelijk - aangezien men die onbekende verbintenissen niet in ver, gelijkingen kan brengen en hun invloed derhalve niet kan bepalen.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Il ne faut pas dire que le théorème des vitesses virtuelles est le principe de la Statique; il n'en est que le résumé.

(Sturm.)

II.

So sehr es in der Ordnung ist, dass bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Belehrung des Individuums das Leichtere dem Schwerern, das Einfachere dem Verwickeltern, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpunkte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine.

(Gauss.)

III.

Het beginsel der virtueele snelheden moet uit de leerboeken der Mechanica verbannen worden.

IV.

Bij het verschijnsel dat twee op elkaar gelegde vlakke platen slechts door krachtsinspanning weer gescheiden kunnen worden, heeft men met een hydrodynamisch verschijnsel, niet met adhesie te doen.

V.

Ook in de lagere wiskunde wordt van onbepaald-kleine grootheden gebruik gemaakt.

VI.

De volzin voorkomende op pag. 71 en 72 van „Lobatto, lessen over de Hoogere Algebra, 2de druk" is niet algemeen genoeg. Op pag. 72, reg. 2 v. b. behoorde tusschen haakjes te staan: het getal ± 1 en het ondeelbare getal zelf uitgezonderd.

VII.

De in vele leerboeken voorkomende bepaling dat de Physica de natuurverschijnselen leert kennen voor zoo ver de samenstelling der lichamen daarbij niet wezentlijk verandert, is onjuist.

VIII.

La Physique n'est plus ou ne sera bientôt plus qu'une Mécanique rationnelle.

(JAMIN.)

IX.

De wetten van BOYLE, GAY-LUSSAC en DALTON gelden niet, wanneer de gassen aan sterke drukkingen onderworpen zijn.

X.

De hypothese, dat kometen enkel uit meteoren zouden bestaan, is onhoudbaar.

XI.

De Photometrie is eigenlijk geene meting, doch slechts eene vergelijking van het licht.

XII.

De benaming „sterrekundige aardrijkskunde" verdient de voorkeur boven die van „wiskundige aardrijkskunde."

XIII.

De zoogenoemde bewijzen van RICCIOLI voor de bolvormige gedaante der aarde zijn onvoldoende.

XIV.

't Is onjuist te zeggen dat het spectrum uit zeven kleuren bestaat; het bestaat uit een oneindig aantal die men in zeven hoofdgroepen heeft verdeeld.

XV.

Het beginsel van de standvastigheid (Erhaltung) der kracht is reeds in 1837 door FRIEDRICH MOHR in een opstel „Ueber die Natur der Wärme" (Baumgartner's und v. Holger's Zeitschrift für Physik) uitgesproken.

XVI.

Het uitroeien der bosschen in bergachtige streken is af te keuren.

XVII.

Il faut toujours se défier d'uue démonstration nouvelle qu'on veut donner d'une vérité déjà bien connue et bien démontrée, surtout quand la nouvelle démonstration paraît plus simple et plus rapide; et même, si elle a été plus longue et plus laborieuse, il y a encore une illusion à craindre: c'est que la longueur et l'ennui du voyage font souvent croire qu' on doit être arrivé.

(POINSOT.)

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Inleiding . . . . bladz. 1.

HOOFDSTUK II.

Oorsprong en Geschiedenis van het beginsel der virtueele snelheden tot en met LAGRANGE . „ 5.

HOOFDSTUK III.

Nadere beschouwingen van het beginsel der virt. snelh. en Geschiedenis van dit beginsel in de 19-de eeuw . . . . „ 23.

HOOFDSTUK IV.

Over de verschillende manieren waarop men de stelling der virtueele verplaatsingen heeft bewezen of trachten te bewijzen . . . . . „ 52.

HOOFDSTUK V.

Besluit . . . . „ 100.

Stellingen . . . . „ 105.

Gedrukt bij J. J. Groen, te Leiden