OVER

DE METHODEN TER BEPALING

VAN DE

AANTREKKING EENER ELLIPSOIDE

OP EEN WILLEKEURIG PUNT.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT

DOOR

MOZES COHEN PARAIRA.

AMSTERDAM,
GEBROEDERS BINGER.
1879.

~~211.~~
~~F. 3.~~

OVER

DE METHODEN TER BEPALING

VAN DE

AANTREKKING EENER ELLIPSOIDE

OP EEN WILLEKEURIG PUNT.

OVER

DE METHODEN TER BEPALING

VAN DE

AANTREKKING EENER ELLIPSOIDE

OP EEN WILLEKEURIG PUNT.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. H. KERN,

HOOGLEERAAR IN DE FAKULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE.

VOOR DE FAKULTEIT TE VERDEDIGEN

op Maandag den 29sten September 1879, te 12 ure,

DOOR

MOZES COHEN PARAIRA,

GEBOREN TE AMSTERDAM.

AMSTERDAM,

GEBROEDERS BINGER.

1879.

Gedrukt bij Gebroeders Binger, Amsterdam.

INHOUD.

VOORWOORD.

Bij het uitgeven van dit proefschrift is het mij eene aangename taak, een welgemeend woord van dank te richten tot allen, die mij bij mijne studie behulpzaam zijn geweest.

In de eerste plaats geldt dit mijne vroegere leermeesters, de Hooggel. Heeren C. J. MATTHES, C. A. J. A. OUDEMANS, J. W. GUNNING *en* W. BERLIN, *Hoogleeraren te Amsterdam, in de tweede plaats de hoogleeraren der wis- en natuurkundige fakulteit te Leiden, die, al mocht ik hunne lessen niet ontvangen, mij toch steeds bereidwillig de behulpzame hand hebben geboden, waar ik die behoefde. Ook de welwillendheid, mij door mijn hooggeschatten Promotor, Prof.* VAN GEER, *bij het vervaardigen van dit proefschrift betoond, zal bij mij steeds in dankbare herinnering blijven.*

INLEIDING.

Het behoort tot de niet ongewone verschijnselen op wetenschappelijk gebied dat de studie van eene theorie van algemeenen aard voert tot meer bizondere vraagstukken, wier oplossing voor de verdere ontwikkeling noodzakelijk is, doch die later, hetzij door moeilijkheid, hetzij door gewicht, ook voor andere deelen der wetenschap, als op zich zelf staande problemen eene belangrijkheid verkrijgen, welke hun oorsprong uit het oog doet verliezen en hen niet alleen eene eigene ontwikkelingsgeschiedenis verschaft, maar ook aanleiding doet zijn tot vorderingen in de wetenschap in het algemeen.

Een der meest treffende voorbeelden daarvan is het vraagstuk van de aantrekking door eene ellipsoïde op een willekeurig gelegen punt uitgeoefend.

De sterrekundigen der oudheid (Thales, Pythagoras, Aristoteles, Eratosthenes, Hipparchus e. a.) hadden als hoogste resultaat hunner waarnemingen vastgesteld dat de aarde een volkomen bol was, en dat de loopbanen der in hun tijd bekende planeten den vorm van cirkels hadden. Deze meening bleef met allerlei wijzigingen en bijvoegingen bestaan, ook nog nadat door Copernicus in 1542 het stelsel van Ptolemeus ter zijde gesteld en door het naar hem genoemde vervangen was. Eerst in de

17e eeuw werd de onwaarheid daarvan aangetoond, deels door Keppler die, op grond der waarnemingen door Tycho Brahé aangaande de planeet Mars gedaan, de loopbanen der planeten voor ellipsen verklaarde, deels door Picard en Huigens die, ingevolge de metingen van Snellius in 1615 en van Picard in 1671, het vermoeden uitspraken dat de aarde geen volkomen bol, maar aan de polen afgeplat was. Dit laatste was ook de meening van Newton die, uit de verbinding zijner theorie der zwaartekracht, met die van Copernicus omtrent de rotatie der aarde, afleidde dat de verschijnselen aan hare oppervlakte niet te verklaren waren zonder haar eene aan de polen afgeplatte gedaante toe te kennen, een denkbeeld dat hij bevestigd vond, toen Richer in 1672 te Cayenne zijn secondeslinger korter maken moest dan te Parijs. Kort daarna evenwel werd door J. Cassini, Joh. Bernouilli en anderen, op grond van door de beide Cassini's, la Hire en Maraldi verrichte metingen, aangenomen dat de aarde niet de gedaante eener afgeplatte, maar wel die van eene verlengde omwentelings-ellipsoïde had, waaruit een heftige strijd ontstond, die niet eindigde voordat de nieuwe metingen door Bouguer en La Condamine van 1735—1741 in Peru en door Maupertuis en Clairault van 1736—1737 in Lapland gedaan, de vraag ten gunste van Newton's meening deden beslissen.

Intusschen echter waren, ten gevolge der nieuwe denkbeelden, de in de oudheid door Apollonius en Archimedes behandelde, later bijna geheel vergeten kegelsneden, en de daaruit ontstaande omwentelingslichamen weder onderwerp van studie geworden en had men, vooral met behulp der analytische methode van Descartes, hare theorie niet onbelangrijk uitgebreid, eensdeels ten einde daarop de resultaten der metingen te kunnen toepassen, anderdeels om op theoretisch physische gronden de gedaante te bepalen welke de vloeibaar gedachte aarde onder den invloed van hare aantrekking op hare eigene deelen en van hare rotatie moest aannemen.

Dit maakte echter ook eene verdere uitbreiding van de theorie der aantrekking noodig, vooral de bepaling van de kracht welke eene rotatie-ellipsoïde uitoefent op een binnen, op of buiten haar oppervlak gelegen punt. Al spoedig gelukte het, de beide eerste vragen volledig te beantwoorden, maar het laatste gedeelte stelde langen tijd aan de oplossing onoverkomelijke bezwaren in den weg. Het bestuderen daarvan voerde Maclaurin in 1740 tot de ontdekking van eene stelling, wier karakter anderen deed vermoeden, dat zij ook in meer algemeenen vorm gelden moest, bij de aantrekking, door eene drieassige ellipsoïde op een willekeurig gelegen punt buiten hare oppervlakte uitgeoefend en alsdan tot de volkomen oplossing van dit vraagstuk zou leiden.

De langs allerlei wegen aangewende pogingen om die algemeene stelling te bewijzen, mislukten echter langen tijd en eerst Laplace mocht er in 1782 in slagen een betoog daarvan te geven. Toen nu eenmaal hiermede het begeerde eindresultaat verkregen was, ontstond eene reeks van opvolgers, welke zich beijverden, hetzij de punten van twijfel op te heffen welke tengevolge der door Laplace gebezigde methode waren ontstaan, hetzij een meer eenvoudigen weg te zoeken om de eindformules te verkrijgen, hetzij eindelijk de synthetische methode welke de eerste ontdekkers bij hun onvoltooid onderzoek hadden gebezigd, te volmaken

Het kon daarbij niet uitblijven dat een vraagstuk hetwelk als dit, nog tot in de nieuwere tijden, door de grootste wiskundigen werd bestudeerd, aanleiding moest geven tot de uitvinding van nieuwe theorien op wiskundig of mechanisch gebied en dat wederkeerig het ontstaan van deze dikwijls gelegenheid gaf tot het vinden van meer rechtstreeksche of meer algemeene oplossingen. Zoo zijn bijv. de theoriën van de potentiaal, van de substitutie van nieuwe veranderlijke in veelvoudige integralen, van de partieele differentiaalvergelijkingen, van den discontinuïteitsfaktor, zoo al niet geheel haar ontstaan, dan toch zeker een harer eerste toepassingen aan de studie van dit probleem verschuldigd.

Het is dus blijkbaar, dat dit vraagstuk, aanvankelijk een deel der theoretische sterrekunde, later zelf een grooten invloed op den vooruitgang der wiskunde in het algemeen heeft uitgeoefend en dat zijne geschiedenis een belangrijk deel uitmaakt van die der wetenschap. Men vindt dan ook steeds bij den aanvang van de uiteenzetting dier theorie eene min of meer volledige opgave der litteratuur over dit vraagstuk. Het kwam mij dus voor, dat eene samenstelling van de hoofdgedeelten daarvan, en eene kritische vergelijking der verschillende methoden van oplossing, een niet ongeschikt onderwerp voor een akademisch proefschrift zou zijn, vooral omdat de studie der bronnen zelve vele bezwaren oplevert, ten gevolge van de groote verscheidenheid der methoden en de dikwijls onduidelijke of onvolledige wijze van voorstellen daarvan. Ik heb dan ook getracht deze zoo veel mogelijk uit den weg te ruimen. Evenwel was de omvang der litteratuur zóó groot, dat ik mij strikt heb moeten bepalen tot de hoofdpunten aangaande de aantrekking der ellipsoïde, zonder te treden in de verschillende onderdeelen daarvan, zoodat bijv. alles is voorbijgegaan, wat betrekking heeft op de spheroïde, welke zeer weinig van een bol verschilt, eene benadering welke natuurlijk, ten gevolge van de aanleiding tot het ontstaan van het vraagstuk, dikwijls een afzonderlijk onderwerp van studie heeft uitgemaakt.

HOOFDSTUK I.

EERSTE POGINGEN TOT MEETKUNDIGE OPLOSSING.

De eerste wiens naam bij dit onderwerp behoort genoemd te worden, is NEWTON. In zijn onsterfelijk werk »Philosophiae naturalis Principia mathematica" waarvan de eerste druk in 1687 te Londen verscheen, heeft hij de eerste schrede gedaan tot de synthetische oplossing van het vraagstuk der aantrekking van de ellipsoïde. Na in de 12e afdeeling van het eerste boek de aantrekking te hebben behandeld, welke op eenig punt uitgeoefend wordt door een homogenen of uit homogene lagen bestaanden bol of door een bolvormig segment, gaat hij in de 13e afdeeling over tot de studie der aantrekking van niet bolvormige en daaronder van spheroïdische lichamen. Hetgeen aldaar meer bepaaldelijk betreffende dit laatste punt te vinden is, resumeert zich tot het volgende, waarbij tevens alles is opgenomen wat noodig was tot het bewijs van de waarheid die later, onder den naam van Stelling van Newton, den grondslag der verdere synthetische behandeling heeft uitgemaakt.

PROPOS. 72. **Wanneer van elk der punten van een bolvormig lichaam naar alle richtingen krachten uitgaan, wier intensiteiten op gegeven afstanden van haar uitgangspunt omgekeerd evenredig zijn met de tweede machten dier afstanden; wanneer verder gegeven zijn de dichtheid van den bol en de verhouding van zijn middellijn tot den afstand tusschen zijn middelpunt en een on-**

eindig klein lichaampje, zal de kracht waarmede dit door den bol wordt aangetrokken evenredig zijn met diens straal. (1)

Men stelle zich namelijk voor, twee geheel gelijke lichaampjes, elk door een bol aangetrokken en van de middelpunten verwijderd op afstanden, evenredig aan de middellijnen, en denke zich de bollen verdeeld in gelijkvormige deeltjes op gelijke wijze geplaatst ten opzichte der lichaampjes. Dan zullen de aantrekkingen van het eerste lichaampje naar de enkele deelen van den eersten bol, zich verhouden tot die van het tweede lichaampje naar de overeenkomstige deeltjes van den anderen bol, in rechte rede van de deeltjes en in omgekeerde rede van de tweede machten hunner afstanden tot de lichaampjes. Maar de deeltjes verhouden zich als de bollen, dus als de derde machten der stralen en de afstanden als de middellijnen of stralen, zoodat de bovenstaande verhouding, samengesteld uit eene rechte verhouding als de derde machten en eene omgekeerde als de tweede machten der stralen, ten slotte die van de eerste machten der stralen is.

Gevolg 3. Wanneer van elk der punten van twee willekeurige lichamen die gelijkvormig en van gelijke dichtheid zijn, naar alle richtingen krachten uitgaan, wier intensiteiten dezelfde wet volgen als boven, zullen de krachten waarmede geheel gelijke lichaampjes, ten opzichte dier lichamen op gelijke wijze geplaatst, worden aangetrokken, zich verhouden als de middellijnen der lichamen. (2)

PROPOS. 90. **Wanneer van de punten van eenigen cirkel in alle richtingen krachten uitgaan, welke toe- of afnemen in een of andere rede van de afstanden, vraagt men de kracht te vinden waarmede een lichaampje, gelegen in de loodlijn, in het middelpunt van den cirkel op zijn vlak opgericht, aangetrokken wordt.**

---

(1) Newton. Ph. N. Pr. M. Ed. I. Londini 1687. Fol. 195. Ed. Leseur & Jacquier. Genevae 1739. Tom. I. Fol. 468.

(2) Merkwaardig is het dat in de eerste druk dit gevolg ontbreekt, hoewel er naar verwezen wordt in het 3e gevolg van Prop. 91 waarvan het juist het hoofdbestanddeel uitmaakt. Het bewijs is geheel overeenkomstig met dat der stelling. Alleen komt het mij vreemd voor, dat aan het einde het woord „diametri", middellijnen, voorkomt, hoewel het hier toch ook lichamen geldt welke geene middellijnen hebben, en waarvoor dus de naam „afmetingen" beter zou geweest zijn.

Uit het middelpunt A (fig. 1), met een straal AD, zij in een vlak, waarop de lijn AP loodrecht staat, een cirkel beschreven, zoo moet de kracht gezocht worden, waarmede een lichaampje in P wordt aangetrokken. Men verbinde een willekeurig punt E met het aangetrokken lichaam P, neme in PA, $PF = PE$ en richte eene loodlijn FK op, evenredig met de kracht waarmede E het lichaampje P aantrekt. Zij dan IKL de meetkundige plaats van het punt K, (3) L haar ontmoetingspunt met het vlak des cirkels. Men neme verder in PA, $PH = PD$ en richte een loodlijn HI op, welke de kromme lijn in I ontmoet, zoo zal de aantrekking van het punt naar den cirkel samengesteld evenredig zijn met het oppervlak $AHIL$ en den afstand AP. Men neme toch in AE een oneindig klein lijntje Ee, trekke Pe en neme op PE en PA, $PC = Pf = Pe$. Daar dan de kracht, waarmede een punt van den oneindig smallen ring, uit het punt A met AE als straal in het genoemde vlak beschreven, het punt P aantrekt, evenredig ondersteld is met FK, is de kracht in de richting naar A, evenredig met $\frac{AP \times FK}{PE}$ en die waarmede de geheele ring het punt P naar A trekt, samengesteld evenredig met den ring en de grootheid $\frac{AP.\ FK}{PE}$; maar de ring is evenredig met $AE.Ee$ of met $PE.CE$ of $PE.Ff$ en dus de laatstgenoemde kracht evenredig met $PE.\ Ff.\ \frac{AP.\ FK}{PE}$ of met $Ff.\ FK.\ AP.$ of met $FKkf.\ AP.$ Derhalve is de som der krachten waarmede al de ringen van den cirkel met den straal AD uit A beschreven, het lichaam P naar A trekken, samengesteld evenredig met het oppervlak $AHIKL$ en den afstand AP.

Gevolg 1. Indien dus de krachten omgekeerd evenredig zijn met de tweede machten der afstanden, d: i: indien FK evenredig is met $\frac{1}{PF^2}$, is het oppervlak $AHIKL = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ en dus de aantrekking van P naar den cirkel evenredig met $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PD - PA}{PD}$.

(3) Indien alle opgerichte loodlijnen aan elkander evenwijdig zijn. Deze voorwaarde is in het origineel niet gesteld.

PROPOS. 91. **De aantrekking te bepalen, uitgeoefend op een punt gelegen in de as van een omwentelingslichaam, van welks punten in alle richtingen gelijke krachten uitgaan, afnemend in willekeurige rede van de afstanden.**

Laat het lichaampje P (fig. 2) worden aangetrokken door het lichaam $DECG$ in welks as AB het gelegen is. Een cirkel RFS, loodrecht op die as, moge het lichaam snijden, en in diens straal FS, gelegen in eenig vast vlak $PALKB$ door de as gaande, een stuk FK genomen zijn, evenredig met de kracht, waarmede het lichaam P door dien cirkel wordt aangetrokken. Heeft dan het punt K tot meetkundige plaats eene kromme lijn LKI, welke de vlakken der uiterste cirkels in L en I snijdt, zoo zal de aantrekking van het lichaampje P naar het lichaam evenredig zijn met den inhoud van het vlak $LABI$.

Gevolg 2. Hieruit kan ook de kracht gevonden worden, waarmede eene spheroïde $AGCB$ (fig. 3) een willekeurig lichaampje, daarbuiten in de as AB gelegen, aantrekt. Zij $NKRM$ eene kegelsnede zoo gelegen in het meridiaanvlak $AGBC$, dat haar ordinaat ER loodrecht op PE, steeds gelijk is aan de lengte PD van P naar het punt D, waar ER de spheroïde snijdt. Uit de toppen A en B der spheroïde mogen loodlijnen $AK = AP$ en $BM = BP$ op AB opgericht zijn, welke dus de kegelsnede in K en M snijden; verbindt men dan M met K, en is S het middelpunt en SC de grootste middellijn der spheroïde, zoo staat de kracht waarmede de spheroïde het lichaampje P aantrekt, tot die waarmede het zou aangetrokken worden door een bol met de middellijn AB als $\dfrac{AS.\,CS^2 - PS.\,KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ tot $\dfrac{AS^3}{3\,PS^2}$ (4)
Op dezelfde wijze zou men de aantrekking kunnen vinden van een segment der spheroïde.

---

(4) Hiervan wordt door Newton zelf geen verder bewijs gegeven. Daar echter dit betoog niet zoo zeer gemakkelijk is, moge hier het volgende bijgevoegd worden, hetgeen gedeeltelijk overeenkomt met het bewijs dat in de Editie van Leseur en Jacquier gegeven wordt.

Volgens Prop. 90, Gev. 1 is de aantrekking van den cirkel ED op het punt P evenredig met $1 - \frac{PE}{PD}$; volgens Prop. 91 is dus de aantrekking F der geheele spheroïde evenredig met het oppervlak beschreven door een ordinaat

Uit de propositie zelve volgt, dat wanneer een lichaampje binnen eene spheroïde in eene willekeurige middellijn gelegen is, de aantrekking evenredig zal zijn aan zijn afstand van het middelpunt. Echter wordt deze waarheid gemakkelijker op de volgende wijze afgeleid.

Zij $AGOF$ (fig. 4) de aantrekkende spheroïde, S haar middelpunt, P het aangetrokken lichaam. Door P mogen gaan, eene halve middellijn SPA en twee rechte lijnen DE en FG, die de spheroïde ontmoeten in D en E, F en G. Laat verder PCM en HLN de oppervlakken zijn van twee binnen $AGOF$ gelegene, daarmede gelijkvormige en gelijkmiddelpuntige spheroïden, wier assen langs die van $AGOF$ vallen, en waarvan de eerste door P gaat, terwijl de lijnen DE en FG de eerste in B en C, de tweede in H en I, K en L snijden. Men heeft dan $DP = BE$, $FP = CG$, $DH = IE$ en $FK = LG$, omdat DE, HI en PB zoowel als FG, KL en PC in één punt middendoor gedeeld worden. Stellen nu DPF en EPG tegenover elkander gelegen kegels voor, beschreven met de oneindig kleine tophoeken DPF en EPG, en

---

van die waarde, wanneer E van B tot A gaat. Dit oppervlak kan in dit geval uitgedrukt worden door middel der kromme lijn KMR, zijnde volgens haar ontstaan eene kegelsnede, hetgeen daaruit blijkt dat

$$ER^2 = SP^2 + SC^2 - 2\,SP.\,SE + SE^2.\frac{SA^2 - SC^2}{SA^2}$$

is. Voor $SC = SA$, dus indien de spheroïde een bol is, wordt deze kegelsnede een parabool. Dit geval uitsluitend, ziet men licht in, dat indien $OS = \frac{SP.\,SA^2}{SC^2 - SA^2}$ genomen wordt, O het middelpunt is van de kegelsnede wier vergelijking dan is

$$\frac{ER^2}{\frac{SC^2\,(SC^2 - SA^2 + SP^2)}{SC^2 - SA^2}} + \frac{OE^2}{\frac{SA^2.\,SC^2\,(SC^2 - SA^2 + SP^2)}{(SC^2 - SA^2)^2}} = 1.$$

Stellen wij kortheidshalve $ON = \frac{SA.\,SC}{SC^2 - SA^2}\sqrt{SC^2 - SA^2 + SP^2} = a_1$ $OT = SC\sqrt{\frac{SC^2 - SA^2 + SP^2}{SC^2 - SA^2}} = a_2$, $OE = x_1$, $ER = x_2$, zoo wordt deze vergelijking $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$, waarin a_1 imaginair kan zijn. Nu is $1 - \frac{PE}{PD} = 1 - \frac{OP}{PD} + \frac{OE}{PD}$ of daar $PD = ER = x_2 = \frac{a_2}{a_1}\sqrt{a_1^2 - x_1^2}$ is, $1 - \frac{PE}{PD} = 1 + \frac{x_1}{\frac{a_2}{a_1}\sqrt{a_1^2 - x_1^2}} - \frac{OP}{x_2}$. Nu ziet men gemakkelijk dat zijn DH en EI oneindig klein, zoo zullen de stukken $DHKF$ en $GLIE$, van de kegels afgesneden door de oppervlakken der spheroïden, wegens de gelijkheid van DH en EI zich verhouden als de tweede machten hunner afstanden van het lichaam P en daarom dit even sterk aantrekken. Verdeelt men de ruimten DPF en $EGCB$ in deeltjes, door middel van oneindig vele spheroïdale oppervlakken alle gelijkvormig, gelijkmiddelpuntig en gelijk gerichte assen hebbend met $AGOF$, zoo zullen deze allen het lichaam P even sterk in tegengestelde richting trekken. De krachten waarmede de kegel DPF en het kegelvormig segment $EGCB$ het lichaampje aantrekken, zullen dus gelijk zijn en elkander opheffen, en hetzelfde geldt ook voor de krachten, uitgaande van de geheele materie buiten de binnenste spheroïde $PCBM$. Het lichaampje P wordt dus alleen door deze laatste aangetrokken en derhalve (volgens gevolg 3 van Prop. 72) staat die kracht tot die waarmede een lichaam in A door de geheele spheroïde aangetrokken wordt, als PS tot AS.

---

de aangroeïïng van den sector $KOMR$ is $\frac{a_2^2\, dx_1}{2x_2} = \frac{a_2^2}{2\, OP} \times \frac{OP}{x_2} dx_1$, waaruit volgt $1 - \frac{PE}{PD} = 1 - \frac{2\, OP}{a_2^2}$ aangr. $KOMR + \frac{x_1}{\frac{a_2}{a_1}\sqrt{a_1^2 - x_1^2}}$, hetgeen nu door integratie van $x_1 = OB$ tot $x_1 = OA$ geeft:

$$OA - OB + \frac{a_1}{a_2}\sqrt{a_1^2 - OB^2} - \frac{a_1}{a_2}\sqrt{a_1^2 - OA^2} - \frac{2\, OP}{a_2^2}.KOMR =$$
$$AB + \frac{a_1^2}{a_2^2}(BM - AK) - \frac{2\, OP}{a_2^2}(\triangle\, POM - \triangle\, POK + KMRK) =$$
$$\frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2} AB - \frac{2\, OP}{a_2^2}(\tfrac{1}{2}\, BM.\, OP - \tfrac{1}{2}\, AK.\, OP + KMRK) =$$
$$\frac{a_1^2 + a_2^2 - OP^2}{a_2^2} AB - \frac{2\, OP}{a_2^2} KMRK.$$

Stelt men nu hierin voor a_1 en a_2 weder hare waarden, zoo wordt deze uitdrukking, indien men ook OP door $OS + SP$ vervangt, $\frac{AB.\, SC^2 - 2\, SP.\, KMRK}{SC^2 - SA^2 + SP^2}$.

Ingeval nu $CS = AS$ is, wordt de kegelsnede een parabool en $KMRK = \frac{2AS^3}{3PS}$ zooals men licht ziet. Door substitutie van deze waarde en van $CS = AS = \frac{1}{2} AB$ gaat bovenstaande uitdrukking dan over in $\frac{2\, AS^3}{3\, PS^2}$, zoodat de verhouding van de aantrekkingen door de spheroïde en den bol met AB tot middellijn uitgeoefend, wordt:

$$\frac{AS.\, SC^2 - SP.\, KMRK}{SC^2 - SA^2 + SP^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}.$$

Hierin liggen dus de beide waarheden opgesloten:

1°. dat een lichaampje besloten binnen eene schil welke door twee gelijkvormige, gelijkmiddelpuntige spheroïde-oppervlakken met gelijk gerichte assen begrensd is, geene aantrekking van de schil ondervindt:

2°. dat twee punten gelegen in de massa van eene spheroïde op eene zelfde middellijn, daardoor aangetrokken worden met krachten die evenredig zijn met hunne afstanden van het middelpunt.

Deze waarheid wordt gewoonlijk de **stelling van Newton** genoemd, en is, zooals wij later zullen zien, het uitgangspunt geworden van de synthetische oplossing van het algemeene vraagstuk. Behalve de ontdekking daarvan komt Newton ook de verdienste toe, de aantrekking te hebben bepaald, welke eene omwentelingsellipsoïde uitoefent op een punt dat in het verlengde harer as gelegen is, hetgeen een zeer bizonder geval is van dat gedeelte van het vraagstuk dat juist de grootste zwarigheden oplevert.

Op dit standpunt bleef nu de zaak, totdat Maclaurin de vraag weder opnam, ter gelegenheid zijner beantwoording van de prijsvraag, uitgeschreven door de Académie royale des Sciences, welke in het jaar 1740 onder den titel: »de caussa fluxus et refluxus maris" verscheen en uitgegeven is in het 4e deel van de »Recueil de pièces qui ont remporté le Prix de l'Académie". Ook in zijn werk »Treatise on fluxions" komt zijne behandeling van het vraagstuk der aantrekking voor, waarvan wij in het volgende weder opgenomen hebben al wat betrekking heeft op het hier bedoelde onderwerp.

§ 628 [5]. Laat de aantrekking door een deeltje op een ander uitgeoefend, omgekeerd evenredig zijn met de tweede macht van hun onderlingen afstand. Zijn dan $PAEa$ en $PBFb$ (fig. 5) gelijkvormige kegels samengesteld uit gelijke deeltjes, en gesloten door bolvormige grondvlakken AEa en BFb wier middelpunt

[5] Maclaurin. Treatise of fluxions. Edinb. Ruddimans 1742. 2d vol. pag 522 of ook Maclaurin, Traité des fluxions. Ed. Pezenas, Paris 1749, Tome II page 104.

P is, zoo zullen de aantrekkingen op P uitgeoefend door $PAEa$ en $PBFb$ zich verhouden als $PA:PB$, dus als de gelijkstandige zijden van deze gelijkvormige lichamen. Want zij MNm een oppervlak, gelijkvormig met AEa en insgelijks zijn middelpunt in P hebbende; dan zullen de aantrekkingen naar AEa en naar MNm zich verhouden recht als de oppervlakken (dus als PA^2: PM^2) en omgekeerd als $PA^2:PM^2$, dat is, zij zullen gelijk zijn; is dus de aantrekking naar $AEa = A$ zoo is die naar het lichaam $PAEa = A.PA$ en die naar $PBFb = A.PB$, zoodat zij zich verhouden als $PA:PB$; evenzoo is $A.AM$ de aantrekking van den geknotten kegel $AamM$. Het is klaar dat al zijn de oppervlakken AEa en MNm van anderen aard, de laatste rede der aantrekkingen op P uitgeoefend door de kegelvormige of piramidale lichamen $PAEa$ en $PMNm$ zal zijn $PA:PM$ en dat als aQ en mq loodlijnen zijn op HP, de krachten in de richting PH zich zullen verhouden als $PQ:Pq$.

§ 629. De krachten waarmede deeltjes, gelijkelijk gelegen ten opzichte van twee gelijkvormige homogene lichamen, door dezen worden aangetrokken, verhouden zich als hunne afstanden tot gelijkstandige punten dier lichamen of als de gelijkstandige ribben van deze. Immers men kan die lichamen verdeeld denken in gelijkvormige kegels of afgeknotte kegels, allen met de toppen in die deeltjes liggende, als wanneer de aantrekkingen naar die kegels of afgeknotte kegels allen diezelfde verhouding zullen hebben. (Newton. Prop. 72. Gev. 3).

§ 630. Een deeltje, geplaatst binnen een hol lichaam dat ontstaat door de omwenteling van twee concentrische cirkels of gelijkvormige ellipsen $ADBE$ en $adbe$, wordt daardoor niet aangetrokken. Want zij P' (fig. 6) zulk een deeltje, $P'z$ eene rechte lijn door P' die den binnensten en buitensten cirkel of ellips in x' en r', x en r snijdt; deelt dan het punt z de lijn xr midden door, zoo doet het dit ook met $x'r'$, omdat de figuren gelijkvormig en gelijk geplaatst zijn. Derhalve is $xx' = rr'$, en de aantrekkingen van P' naar tegengestelde kegelvormige deelen van het lichaam, die naar P' convergeren, zullen steeds gelijk zijn en elkander opheffen. (Newton Prop. 91, Gev. 3).

§ 631. Daaruit volgt dat de aantrekking op een deeltje p' in de middellijn CP door den bol of omwentelingsellipsoïde uitgeoefend tot die op P staat als Cp' tot CP, omdat de aantrekking uitgeoefend door het ringvormige lichaam begrepen tusschen APB en $ap'b$, geene uitwerking doet op p', zoodat de aantrekking op p' door het geheele lichaam, gelijk is aan die door het lichaam $adbe$, die volgens § 629 tot die op P door $ADBE$ staat als Cp' tot CP. (Newton, ibid).

§ 632. Laten $PMKI$ en $PNLI$ (fig. 7) twee vlakken zijn die, elkander in PI snijdende, een deel van een lichaam insluiten bestaande uit deelen die elkander op boven onderstelde wijze aantrekken; laat P en G twee punten van de snijlijn zijn; veronderstelt GK steeds evenwijdig aan PM en laat de vlakken PMN en GKL, loodrecht op $PMKI$, het vlak PNI in PN en GL snijden; de kracht welke P trekt naar een piramidaal lichaam $PMmnN$ ontstaan door de beweging van PNM om P, zal tot die waarmede $GKklL$, ontstaan door de beweging van GKL om G, dit punt aantrekt, in laatste rede staan als PM tot GK, wanneer de hoek der vlakken en de gelijkblijvende hoeken MTm en KGk tot in het oneindige afnemen. Want daar PM en GK steeds evenwijdig zijn, zal ten slotte $MN : KL = PM : GK$ en $\angle PMN = \angle KGL$ zijn, en dus omdat $\angle MPm = \angle KGk$ blijft, zal de aantrekking van P naar $PMmnN$ tot die van G naar $GKklL$ staan als $PM : GK$. (§ 628).

§ 634. Wordt de aantrekking op een deeltje van een bol of van eene spheroïde in twee krachten ontbonden, de eene loodrecht op de as, de andere op den aequator, zoo zullen alle deeltjes die even ver van de as liggen met gelijke krachten naar deze, en alle deeltjes die even ver van den aequator liggen met gelijke krachten naar dat vlak worden aangetrokken, hetzij zij aan het oppervlak of binnen het lichaam gelegen zijn. Ook zullen de krachten, uitgeoefend op deeltjes die verschillend ver van de as liggen, evenredig met die afstanden zijn, en evenzoo is het met de krachten, waarmede zij naar den aequator worden getrokken. Voor den bol blijkt dit gemakkelijk uit het bewezene in § 631, en wordt het dus hier alleen voor analogie aangehaald. Zij nu P (fig. 6) een punt in het oppervlak der spheroïde, $APDBE$ eene doorsnede door de as AB gaande, Pf

eene loodlijn op AB in f, Pd eene op den aequator in d; wordt dan de aantrekking in P naar het lichaam ontbonden, in eene kracht in de richting Pf en ééne in de richting Pd, zoo zal de eerste gelijk zijn aan de aantrekking op d en de tweede aan die op f uitgeoefend door het lichaam. Zij $abde$ eene spheroïde gelijkvormig met $ADBE$, met hetzelfde middelpunt en met haar as ab langs de as van de buitenste spheroïde. De doorsneden van de beide lichamen met een vlak gaande door PdI zullen gelijkvormige, concentrische, gelijk gelegene ellipsen zijn, en de aantrekking op P in de richting Pf loodrecht op AB uitgeoefend door den sector door twee dergelijke vlakken uit het buitenste lichaam gesneden, zal gelijk zijn aan die op d uitgeoefend in de richting dC door een sector welke door dezelfde vlakken uit het binnenste lichaam gesneden wordt. Om dit te bewijzen mogen $PMNIG$ en $PmnIg$ (fig. 8) de doorsneden van het buitenste, $dKLd$ en $dkld$ die van het binnenste lichaam met die beide vlakken zijn. Zij KL eene ordinaat in V op de in het aequatorvlak des lichaams gelegene as de der binnenste ellips; trek dan dK en dL alsmede PM en PN uit P respective evenwijdig met dK en dL. Laat de vlakken PMm, PNn, dKk, dLl, loodrecht op $PMNIG$, het vlak $PmnIg$ ontmoeten in de lijnen Pm, Pn, dk en dl en laat die vlakken zóó om P en d wentelen dat steeds $PM \parallel dK$ en $PN \parallel dL$ blijft, terwijl V de lijn de beschrijft. De krachten waarmede P en d worden getrokken naar de piramidale lichamen, door die vlakken beschreven, zullen in laatste rede tot elkander staan als de lijnen PM, PN, dK en dL (§ 632); en wanneer $PP' \parallel de$, MQ en NR in Q en R loodrecht op PP' zijn, zullen, indien deze krachten ontbonden worden in de richtingen PP' en de, en in richtingen loodrecht op die lijnen, de eerste componenten zich verhouden als PQ, PR, dV en dV. Maar $PR \mp PQ$ is steeds $= 2\,dV$;(6) derhalve is de aantrekking

(6) Immers indien de assen van $dKeL$ zijn a_1 en a_2, dus die van $GPNI$ na_1 en na_2 en men $\angle VdL = \omega$ stelt is

$$dV = \frac{2\,a_2^2\,a_1\,\cos^2\omega}{a_2^2\,\cos^2\omega + a_1^2\,\sin^2\omega},$$

$$PR = \frac{2\,a_1\,a_2\,(a_2\,\cos\omega - a_1\sqrt{n-1}\,\sin\omega)\cos\omega}{a_2^2\,\cos^2\omega + a_1^2\,\sin^2\omega}.$$

op P in de richting PP', afkomstig van de beide lichamen door PMm en PNn beschreven, gelijk aan die op d in de richting de, afkomstig van de lichamen door dKk en dLl beschreven. En daar dit altijd plaats heeft zoolang V de lijn de beschrijft en de vlakken de deelen des lichaams tusschen $PMNIG$ en $PmnIg$ doen ontstaan, zal de geheele aantrekking op P in de richting PP' uitgeoefend door de sectoren tusschen $PMNIG$ en $PmnIg$, gelijk zijn aan die op d in de richting de door de sectoren uit het binnenste lichaam door diezelfde vlakken gesneden, zoodra de hoek dier vlakken oneindig klein is. Denkt men zich nog andere sectoren van de lichamen, besloten tusschen vlakken welke door PdI gaan, en met het vlak $APDB$ (fig. 6) aan de andere zijde gelijke hoeken maken, en de deeltjes in P en d aantrekken, zoo zal men zien dat de aantrekkingen op P en d naar de as der spheroïde, afkomstig van de vereenigde aantrekkingen van die sectoren, gelijk zijn. En daar dit plaats heeft in al de deelen der lichamen door dergelijke vlakken ingesloten, volgt daaruit dat de kracht, waarmede P naar de as AB getrokken wordt door de werking der geheele spheroïde, gelijk is aan die waarmede d door het binnenste, dus volgens § 631 o.k door het geheele lichaam aangetrokken wordt. De aantrekking op een deeltje p (fig. 6) gelegen in de lijn Pd naar de spheroïde $ADBE$ is volgens § 631 gelijk aan die naar eene concentrische, gelijkvormige, gelijk gelegene spheroïde, welke Cp tot halfdiameter heeft, en bijgevolg is de aantrekking in de richting loodrecht op AB gelijk aan die van d naar het geheele lichaam volgens hetgeen bewezen is. Derhalve zullen alle deeltjes op denzelfden afstand van de as gelegen, met dezelfde kracht daarheen getrokken worden, en omdat de aantrekking in d tot die in D staat als $CD : Cd$ volgens § 631, volgt daaruit dat de aantrekking van P naar de as tot die van D naar de spheroïde

---

Neemt men hierin $\omega = -\omega$ zoo blijft de eerste waarde onveranderd, terwijl de tweede die van PQ wordt, tot dat PM de richting der raaklijn in P heeft. Wordt $\angle QPM$ grooter, zoo valt Q beneden P en moet binnen de haakjes $\omega = 180° - \omega$ gesteld worden. In het eerste geval ziet men dat $2\,dV = PR + PQ$ in het tweede $2\,dV = PR - PQ$ is.

staat als $Pf : DC$. Op dezelfde wijze betoogt men dat de aantrekking van P naar het vlak des aequators gelijk is aan die in f naar de spheroïde $ADBE$, en dat zij zich tot die van A naar de spheroïde verhoudt als fC of $Pd : AC$.

§ 635. Om dus de richting te vinden waarin de spheroïde een deeltje P (fig. 6) op het oppervlak of binnen het lichaam gelegen, aantrekt en de grootte van die aantrekking, zij A de aantrekking aan de pool A en D die in een punt des aequators; zij verder Pd in d loodrecht op het vlak des aequators; men neme dan op dC in de richting van d naar C een stuk dQ zóó dat $dQ : dC = D \times CA : A \times CD$ is en trekke PQ. De aantrekking naar de spheroïde zal dan de richting PQ hebben en door de lengte van PQ gemeten worden. Want daar de aantrekking naar de spheroïde in de richting Pd tot A staat als $Pd : AC$, en die in de richting Pf of CD tot D als $dC : DC$ (§ 634), zal de aantrekking op P in de richting Pd staan tot die in de richting Pf als $A \times \frac{Pd}{AC} : D \times \frac{dC}{DC} = A.\ CD.\ Pd : D.AC.dC$ $= dC.\ Pd : dQ.\ dC = Pd : dQ$ en dus is PQ de richting der aantrekking in P; en indien men de aantrekking in A voorstelt door AC zal die in P in de richting Pd worden voorgesteld door Pd en die in P naar de spheroïde door PQ. Op dezelfde wijze zal, wanneer men fq op de as van f naar C zoodanig neemt dat $fq : fC = A.\ CD : D.\ CA$ is, Pq weder de richting en de maat voorstellen van de aantrekking in P naar de spheroïde, wanneer DC die in D voorstelt.

§ 642. Zij $ADda$ (fig. 9) eene doorsnede van een lichaam van standvastige dichtheid met een vlak gaande door een gegeven punt P, en PC, PH twee in richting gegeven lijnen van dat vlak. Laat eene lijn PM door P gaande, de figuur $ADda$ in M en m en den cirkel met gegeven straal PC in N ontmoeten; laten verder MQ en mq steeds in Q en q loodrecht staan op PC en NR loodrecht op PH in R; neem op RN een stuk $RK = PQ - Pq$ en laat dan de ordinaat RK, steeds op deze wijze bepaald, de figuur GKg vormen, terwijl PM om P draait uit den stand PE naar PL. Denken wij ons dat een tweede vlak door de lijn PH gaande insgelijks het lichaam snijdt, zoo zal de aantrekking welke het deeltje P ondervindt van den sector van het lichaam, tusschen die vlakken gelegen en $ADda$ tot grondvlak hebbende, in de richting PC ontbonden, evenredig zijn met $\frac{GKg}{PC}$, wanneer men zich voorstelt dat de hoek der beide vlakken tot in het oneindige afneemt. Men denke zich eene andere, oneindig dicht bij PM gelegen lijn PS, die de figuur $ADda$ in S en s snijdt en den cirkel bNB in n, verder MZ en nr loodrecht op PH in Z en r; laat een cirkel uit P met PM als straal beschreven, PS in O ontmoeten, terwijl MX en OU in X en U loodrecht staan op het tweede door PH gaande vlak. Indien het punt P buiten de figuur $ADda$ ligt, zal de aantrekking in P naar het piramidaal lichaam $PMOUX$, ten slotte evenredig zijn met $Mm. \frac{MO.\ MX}{PM^2}$ (§ 628) of (omdat MX evenredig is met MZ) ook met $Mm. \frac{MO.\ MZ}{PM^2}$, dat wil zeggen, omdat $MO : Nn = PM : PN = MZ : NR$ en dus $MO.\ MZ : Nn.\ NR = PM^2 : PC^2$ is, ook met $Mm. \frac{Nn.\ NR}{PC^2}$ of daar $Nn.\ NR = Rr.\ PC$ is, met $\frac{Mm.\ Rr}{PC}$ en de ontbondene dier aantrekking in de richting PC zal evenredig zijn met $Qq. \frac{Rr}{PC}$ of met $RK. \frac{Rr}{PC}$. Maar $RK.Rr$ is juist de differentiale aangroeiing van GKR; dus zal de aantrekking welke P in de richting PC door den geheelen lichaamssector op de basis $ADda$ ondervindt, ten slotte evenredig zijn met $\frac{GKg}{PC}$, wanneer de standhoek der beide vlakken die den sector vormen, steeds afneemt. Ligt het punt P tusschen M en m dan moet toch $RK = PQ - Pq$ genomen worden en dan heeft de aantrekking dezelfde maat.

Uit deze hulpstelling blijkt, wanneer men zich voorstelt dat figuur $ADda$ om de as PH wentelt, en aldus een lichaam vormt, terwijl men tevens PC met PH laat samenvallen, dat alsdan de aantrekking van P naar dat geheele lichaam evenredig zal zijn met $\frac{GKg}{PC}$. Is P zoodanig gelegen ten opzichte der figuur $ADda$, dat de loodlijnen uit verschillende punten M, PC aan verschillende kanten van P snijden, zoo zal de aantrekking in

P in de richting PC, bepaald worden door het verschil der vlakte inhouden, gevormd door de ordinaat RK.

§ 643. Laat een deeltje in P (fig. 10) aangetrokken worden door den bol, voortgebracht door de wenteling van den halven cirkel ADB om de as AB, welke dus C tot middelpunt heeft; laat eene rechte lijn PM den halven cirkel in m en M en den cirkel CNH, uit P met PC beschreven, in N snijden. Is dan CL loodrecht op Mm in L, zoo zal vooreerst $mL = LM$ en verder $LM^2 = PL^2 - PM.\ Pm = PR^2 - PA.\ PB$ en dus de differentiale aangroeiingen van ML^2 en PR^2 gelijk zijn, zoodat die van PR tot die van ML zal staan als $LM : PR$ en daar nu $KR = Qq$ en $Qq : 2\ LM = PR : PN = PR : PC$ is, is de differentiaal van het vlak, doorloopen door KR, in dit geval gelijk aan den rechthoek, welks zijden zijn $\frac{2LM^2}{PC}$ en de differentiaal van LM. Derhalve wordt de inhoud $IRK = \frac{2LM^3}{3PC}$ en is de aantrekking naar het deel van den bol, voorgebracht door het segment MDm, evenredig met $\frac{2\ LM^3}{3\ PC^2}$ en dus met de derde macht van LM en omgekeerd met de tweede macht van den afstand van het deeltje tot het middelpunt. Dus is de aantrekking van P naar den geheelen bol evenredig met de derde macht van zijn middellijn of, bij constante dichtheid, met zijne massa en omgekeerd evenredig met de tweede macht van PC, dus hetzelfde alsof de geheele massa in het middelpunt lage.

Hetzelfde geldt voor de totale aantrekking door een willekeurig aantal bollen met gemeenschappelijk middelpunt, waaruit volgt dat, hoe ook de dichtheid van een bol op verschillende afstanden van het middelpunt moge veranderen, als zij slechts overal op denzelfden afstand dezelfde is, de aantrekking op een buiten den bol gelegen deeltje, evenredig zal zijn met de massa van den bol en omgekeerd evenredig met de tweede macht van den afstand van het deeltje tot het middelpunt. Men ziet uit het bewezene dat de geheele vlakte-inhoud $IKGC = \frac{2AC^3}{3PC}$ is en dat de aantrekking van A door den bol $ADBE$, gemeten wordt door $^2/_3\ AC$ (§ 642).

§ 644. Zij nu $ABDE$ (fig. 11) eene spheroïde van gelijkmatige dichtheid, ontstaande door de omwenteling van de halve ellips ADB om de as AB; zij verder AM eene lijn, door de pool A gaande en de ellips in M, den cirkel CNH in N snijdend; laat MQ en NR loodlijnen op AB zijn; neem steeds op RN stukken $RK = AQ$ en laat RK het vlak $AKGC$ vormen, terwijl AM, om A draaiend, de halve ellips ADB vormt; de laatste ordinaat CG is dan blijkbaar gelijk aan AB. De aantrekking in den pool A naar de spheroïde zal dan volgens § 642, gemeten worden door $\frac{AKGC}{AC}$ en zich verhouden tot de aantrekking in A naar den bol op de middellijn AB (welke, volgens § 643, gemeten wordt door $^2/_3\ AC$) als $AKGC : {}^2/_3\ AC^2$.

§ 645. De aantrekking in D, aan den omtrek des aequators verhoudt zich tot die naar den bol met CD tot straal, als $2\,AC^2 - AKGC : {}^4/_3\ AC^2$ en tot die aan den pool A als $2\,AC^2 - AKGC : 2\,AKGC . \frac{CD}{CA}$.

Want onderstellen wij dat de beide elliptische doorsneden $DBEA$ en $Dbea$ loodrecht zijn op het vlak des aequators en elkander snijden in de lijn hDg die haar beiden in D raakt. Laat dan eene lijn Dm, uit D getrokken, de ellips $DBEA$ in m en den in haar vlak gelegen cirkel cnh met een straal $Dc = AC$, in n snijden, terwijl twee loodlijnen mq en nr uit m en n op DE en Dh neergelaten, elkander in k snijden; indien dan Dm, om D draaiend, de halve ellips DBE beschrijft, moge rk het vlak $hkED$ vormen. De aantrekking in D naar den sector van de spheroïde, tusschen de vlakken $DBEA$ en $Dbea$, zal ten slotte gemeten worden door $\frac{hkED}{Dc}$, wat ook de hoek der vlakken mag zijn. Maar indien het verlengde van RK, de lijn $GI \parallel AC$ in x ontmoet, en de lijnen AM en Dm zoodanig om A en D draaien dat steeds $\angle hDm = \angle BAM$ is, zal, omdat $Dn = AN$ en $\angle rDn = \angle RAN$ is, ook steeds $Dr = AR$ en $hr = CR = Gx$ zijn. Omdat verder $qm^2 : Dq.qE = AQ.QB : QM^2$ en de driehoeken Dqm en QMA gelijkvormig zijnde, ook $qm : Dq = AQ : MQ$ is, zal $qm : qE = QB : QM$ en $Dq : qE = QB : AQ$ zijn; DE en BA zullen dus in q en Q in dezelfde verhouding verdeeld zijn, zoodat $Dq : QB$ of $rK : xK = DE : AB$. Daar nu de bases hr en Gx steeds gelijk zijn, zal dus het oppervlak hrk tot GxK steeds in de verhouding $DE : AB$ en ook $hkED : GKAI = CD : CA$ zijn.

Wanneer $ADBE$ een cirkel is met DE tot middellijn, is (volgens § 643) $AKGC = {}^2/_3\ CD^2$ en $GKAI = {}^4/_3\ CD^2$. Dus is (volgens § 642) de aantrekking in D naar den sector der spheroïde tusschen de vlakken $DBEA$ en $Dbea$, in rede tot die naar den sector van den bol op de middellijn DE tusschen dezelfde vlakken als

$$\frac{hkED}{Dc} : {}^4/_3 CD = \frac{(2\ CA^2 - AKGC)\ CD}{CA^2} : {}^4/_3\ CD = 2\ CA^2 \text{-} AKGC : {}^4/_3 CA^2.$$

De aantrekking in D naar de spheroïde staat tot die naar den bol in dezelfde rede, omdat de doorsnede van de spheroïde met een vlak, loodrecht op den aequator, altijd eene ellips is gelijkvormig met $EDBA$, en die van den bol met datzelfde vlak altijd een cirkel, welks middellijn gelijk is aan de in den aequator gelegen as dier ellips; de aantrekking in D naar den elliptischen sector tusschen twee dergelijke vlakken, is altijd in dezelfde verhouding tot die naar de cirkelvormige doorsnede tusschen dezelfde vlakken. Derhalve zal de aantrekking in D naar de spheroïde $ADBE$ zich verhouden tot die naar den bol op de middellijn des aequators, als $2CA^2 - AKGC : {}^4/_3 CA^2$. Maar de aantrekking in D naar dien bol staat tot die in A naar den bol op de as AB, als $CD : CA$ en deze laatste tot die in A naar de spheroïde als ${}^2/_3 CA^2 : AKGC$ (§ 643). Dus zal de aantrekking in D naar de spheroïde tot die in A staan als $2\ CA^2 - 2\,AKGC : 2\,AKGC . \dfrac{CA}{CD}$. Men ziet ook dat als de aantrekking in A naar een bol op AB door ${}^2/_3\ CA$ voorgesteld wordt, volgens § 644, de aantrekking in A naar de spheroïde door $\dfrac{AKGC}{AC}$ en die in D door $\dfrac{2\ CA^2 - AKGC}{2\ CA^2} . CD$ of door $CD - \dfrac{AKGC}{2\,CA} . \dfrac{CD}{CA}$ zal gemeten worden.

§ 646. Om nu het vlak $AKGC$ te meten, zij F het brandpunt van $ADBE$; omdat dan $AQ : QM = AR : RN$ en $QM^2 : AQ . QB = CD^2 : CA^2$ is, volgt daaruit dat $QM : QB =$

$AR.\ CD^2 : RN.CA^2$ dus $AQ : QB = AR^2.CD^2 : RN^2.CA^2$ en omdat $RN^2 = CA^2 - AR^2$ is, ook $AQ : AB = RK : AB$ $= AR^2.\ \frac{CD^2}{CA^2} : CA^2 \pm \frac{CF^2}{CA^2}.\ AR^2$ naar gelang de spheroïde afgeplat of gerekt is; indien men derhalve op CF een stuk Cf neemt zoodat $Cf : AR = CF : AC$, zal in het eerste geval $AQ : AB = \frac{Cf^2.\ CD^2}{CF^2} : Af^2$, in het tweede $AQ : AB = \frac{Cf^2.\ CD^2}{CF^2}$ $: CA^2 - Cf^2$ zijn.

Indien dan in het eerste geval Af en AF den cirkel CNH in s en S ontmoeten, zal de differentiaal van $Cf - Cs$ zich verhouden tot die van Cf als $Cf^2 : Af^2$, dat is als $RK.\ CF^2 : AB.\ CD^2$ en tot die van AR als $RK.\ CF^3 : 2\ CA^2.\ CD^2$ (7).

Derhalve zal de aangroeiing van de oppervlakte ARK zich verhouden tot die van $2\ CA\ (Cf - Cs)$ als $CA.\ CD^2 : CF^3$ dus in constante verhouding, waaruit dus volgt dat ook $\frac{ARK}{2\ CA\ (Cf - Cs)} =$ $\frac{CA.\ CD^2}{CF^3}$ en $AKGC = \frac{2\ CA^2.\ CD^2}{CF^3}\ (CF - CS)$ is. Wanneer derhalve de aantrekking in A naar den bol op de middellijn AB wordt voorgesteld door $^2/_3 AC$, zal die in A naar de spheroïde voorgesteld worden door $\frac{2\ CA.\ CD^2}{CF^3}\ (CF - CS)$ en die in D door $CD - \frac{CD^3}{CF^3}\ (CF - CS) = \frac{CD}{CF^3}\ (CD^2.CS - CA^2.CF)$ en de aantrekking in A zal tot die in D staan als $2\ CA.\ CD\ (CF - CS) :$ $(CD^2.CS - CA^2.CF)$ of, indien een boog uit A met AF als straal beschreven, CB in O ontmoet, als $CD\ (CF - CS)$: segm. FCO.

§ 647. Wanneer, al het overige onveranderd blijvende, $CA > CD$ en dus de spheroïde gerekt is, neme men op CA (fig. 12) een stuk

---

(7) In onze tegenwoordige schrijfwijze komen deze evenredigheden overeen met

$$\frac{d\left(\frac{Cf}{AC} - \operatorname{arctan} \frac{Cf}{AC}\right)}{d\ \frac{Cf}{AC}} = \frac{Cf_2}{AC^2 + Cf^2}.$$

en met

$$\frac{d\left\{\frac{CF}{AC}.\ AR - AC \operatorname{arctan} \frac{CF.\ AR}{AC^2}\right\}}{d.\ AR} = \frac{CF^3.\ AR^2}{AC\ (AC^4 + CF^2.AR^2)} = \frac{CF^3.\ RK}{2\ CA^2.CD^2}$$

CL gelijk aan den logarithmus van de verhouding $\frac{CD}{AF}$, of van $\sqrt{\frac{BF}{AF}}$ voor den modulus AC; dan zal de aantrekking aan de pool A tot die in D staan als $2\ CA.\ CD.\ LF : CA^2.\ CF - CD^2.\ CL$. Want in dat geval vonden wij boven $RK : AB = Cf^2.\frac{CD^2}{CF^2} : CA^2 - Cf^2$; indien men dus op CA neemt een stuk Cl gelijk aan den logarithmus van $\sqrt{\frac{CA + Cf}{CA - Cf}}$ voor den modulus AC, zal de aangroeiing van $Cl - Cf$ tot die van Cf staan als $Cf^2 : CA^2 - Cf^2 = RK.\ CF^2 : AB.\ CD^2$ en tot die van AR als $RK.\ CF^3 : 2\ CA^2.\ CD^2$(8). De aangroeiing van ARK staat dus tot die van $2CA\ (Cl - Cf)$ als $CA.\ CD^2 : CF^3$ en dus heeft men ook $ARK : 2CA\ (Cl - Cf) = CA.\ CD^2 : CF^3$ en derhalve tevens $AKGC : 2\ CA\ (CL - CF) = CA.\ CD^2 : CF^3$, waaruit volgt $AKGC = \frac{2\ CA^2.\ CD^2}{CF^3}.\ LF$. Wij zien dus dat de aantrekking in A naar de gerekte spheroïde $ADBE$ wordt voorgesteld door $\frac{2\ CA.\ CD^2}{CF}.\ LF$, die in D door $CD - \frac{CD^3}{CF^3}.\ LF = CD.\ \frac{CA^2.\ CF - CD^2.\ CL}{CF^3}$, zoodat die in A tot die in D staat als $2\ CA.\ CD.\ LF : CA^2.\ CF - CD^2.\ CL$.

De aantrekking in eenig ander punt P (fig. 6) wordt dan bepaald door het gevondene in § 635, waar men moet nemen $dQ : dC = DC^2.\ CS - CA^2.\ CF : 2\ CD^2\ (CF - CS)$, opdat PQ de kracht mete en de richting daarvan aanwijze.

De aantrekking op elken afstand in de as der spheroïde of in het uitgebreide vlak der aequators, kan ook nauwkeurig bepaald worden zonder eenige nieuwe berekening, door middel van de volgende hulpstelling, gevoegd bij het tot nu toe gevondene.

§ 648. Laat ADB en Pdp (fig. 13) twee halve ellipsen zijn, welke

---

(8) Deze eerste verhouding zou men thans schrijven

$$\frac{d.\left\{CA.\log\sqrt{\frac{CA + Cf}{CA - Cf}} - Cf\right\}}{d\ Cf} = \frac{Cf^2}{CA^2 - Cf^2};$$

de tweede volgt uit deze door vermenigvuldiging met $\frac{dCf}{dAR} = \frac{CF}{AC}$ (§ 646).

het middelpunt C en het brandpunt F gemeen hebben. Zij dan PmM eene rechte lijn die de binnenste ellips in m en M, Px eene die de buitenste ellips in x snijdt, zoodanig dat de loodlijn CL, uit C op Px neergelaten, tot CR (de loodlijn uit C op PM) staat als $Cd : CD$; dan zal ook $Mm : Px = CA : CP$ zijn. Want zijn Pyp en AvB twee halve cirkels, beschreven op Pp en AB; laten mv en MV, beide evenwijdig met CD, den cirkel AvB in v en V, en xy, insgelijks evenwijdig met CD, den cirkel Pyp en y snijden; verlengt men dan mv en xy tot zij Pp in q en I ontmoeten, en laat Cr en Cl respective loodrecht neder op Pv en Py, zoo is $Pm^2 : PC^2 = qm^2 : CR^2$ en $Px^2 : PC^2 = Ix^2 : CL^2$ dus ook $Pm^2 : Px^2 = \frac{qm^2}{CR^2} : \frac{Ix^2}{CL^2} = \frac{qm^2}{CD^2} : \frac{Ix^2}{Cd^2}$ (volgens de onderstelling) of omdat ook $qm^2 : qm^2 - qv^2 = CD^2 : CF^2$ en $Ix^2 : Ix^2 - Iy^2 = Cd^2 : CF^2$ is, $Pm^2 : Px^2 = qm^2 - qv^2 : Ix^2 - Iy^2 = Pm^2 - Pv^2 : Px^2 - Py^2$, dus ook $Pm^2 : Pv^2 = Px^2 : Py^2$ of $Pm : Pv = Px : Py$. Daar nu $qv : qm = CA : CD$ en $Iy : Ix = CP : Cd$ derhalve $\frac{qv}{CA} : \frac{Iy}{CP} = \frac{qm}{CD} : \frac{Ix}{Cd} = Pm : Px = Pv : Py$ is, zal ook $\frac{qv}{Pv} : \frac{Iy}{Py} = CA : PC$ en omdat $Cr : Cl = \frac{qv}{Pv} . PC : \frac{Iy}{Py} . PC$ is, ook nog $Cr : Cl = CA : CP = Cv : CP$ zijn. Dit leert dus dat de driehoeken Crv en ClP gelijkvormig zijn en dat $2rv : 2Pl = vV : Py = CA : CP$ is. Maar $Mm : Vv = Pm : Pv = Px : Py$ dus ook ten slotte $Mm : Px = Vv : Py = CA : CP$.

§ 649. De ellipsen Pdp en ADB (fig. 14), die hetzelfde middelpunt C en hetzelfde brandpunt F hebben, mogen nu ondersteld worden om de as PCp te wentelen en spheroïden van gelijke dichtheid te vormen. Alsdan zullen de aantrekkingen in P naar deze lichamen zich verhouden als de massae daarvan, dus als $Cd^2 . CP : CD^2 . CA$. Want zij PmM eene rechte lijn die de binnenste ellips in m en M, en den uit P met PC tot straal beschreven cirkel CNH in N snijdt, Px eene tweede die de buitenste ellips in x, den cirkel in L snijdt. Laat verder mq, MQ, xI, NR en LZ loodrecht neder op Pp, en neem op RN steeds $RK = qQ$ en op LZ, $Zk = PI$, zoo zal de aantrekking in P naar het binnenste lichaam tot die naar het buitenste staan als de vlakte, gevormd door RK tot die welke door Zk gevormd wordt. Zij nu steeds $LZ : NR = Cd : CD$, dan zal volgens het voorgaande ook steeds $Mm : Px = CA : CP$ zijn. Maar $Qq : Mm = PR : PN = PR : PC$ en $PI : Px = PZ : PC$ dus $Qq : PI = Mm.\ PR : Px.\ PZ$, en de aangroeiing van $CRKG$ staat tot die van $CZkg$ in samengestelde rede van Qq tot PI en van de aangroeiing van PR tot die van PZ, d. i. in samengestelde reden van Mm tot Px en de aangroeiing van PR^2 tot die van PZ^2 (of de aangroeiing van NR^2 tot die van LZ^2) en derhalve in samengestelde verhouding van $CA.\ CD^2 : CP.\ Cd^2$; en daar deze constant is, heeft men dan ook $CRKG : CZkg = CA.\ CD^2 : CP.Cd^2$, waaruit volgt dat de aantrekking van P naar het stuk der binnenste spheroïde gevormd door $AmMB$, tot die naar het stuk der buitenste, gevormd door Pxp, zich verhoudt als $CA.\ CD^2 : CP.\ Cd^2$ en dat de aantrekkingen naar de geheele spheroïden dezelfde verhouding zullen hebben, omdat Px de halve ellips Pdp beschrijft, terwijl Mm de halve ellips ADB vormt.

§ 650. Aldus wordt de aantrekking naar de afgeplatte spheroïde $ADBE$, in elk punt P van de buiten A verlengde as, gemeten door de grootheid $\frac{2\,CA.\ CD^2}{CF^3}(CF - CS)$, wanneer men onderstelt dat PF den cirkel CNH in S snijdt; omdat de aantrekking in P naar het buitenste lichaam PDp gemeten wordt door $\frac{2\,CP.\ Cd^2}{CF^3}\ (CF - CS)$ (§ 646).

Op dezelfde wijze zal de aantrekking in P naar eene gerekte spheroïde (fig. 12) gemeten worden door $\frac{2\,CA.\ CD^2}{CF^3}.\ LF$, wanneer CL de logarithmus is van de verhouding $\frac{Cd}{PF}$ voor den modulus PC. Daar de aantrekking in P naar eene spheroïde $ADBE$, wier middelpunt in C en brandpunt in F is, en wier as AB kleiner dan Pp is, evenredig is met de massa van de spheroïde, volgt daaruit dat indien de densiteit van het lichaam $PDpe$ verandert, zoodanig dat zij constant is op het oppervlak eener spheroïde als $ADBE$, de aantrekking in dit geval zich verhouden zal tot die bij constante dichtheid, als de massa die zij in het eerste geval bevat tot die in het tweede.

§ 651. Zij nu P (fig. 15) een punt in den omtrek van den aequator van de buitenste spheroïde *adbe;* dan zal de aantrekking in P naar de binnenste spheroïde $ADBE$ zich verhouden tot die naar de buitenste als $CA.CD^2 : Ca.Cd^2$ of als de massae der spheroïden, in de onderstelling dat de beide ellipsen waaruit zij ontstaan zijn, weder concentrisch en confocaal zijn. Om dit te bewijzen, veronderstellen wij PC loodrecht op het meridiaanvlak $ADBE$ en den aequator DpE van het binnenste lichaam in p ontmoetend, terwijl de doorsneden PZC en pVC loodrecht op het vlak *abde*, het doorsnijden in CZ en CV, zoodanig dat Zr en VR loodrecht op Cd steeds in dezelfde verhouding staan als Ca tot CA; dan zullen de elliptische doorsneden PZC en pCV dezelfde excentriciteit hebben; d. i. $CD^2 - CV^2$ zal gelijk $Cd^2 - CZ^2$ zijn. Want indien Zr en RV bij verlenging de cirkels dgh en DGH in g en G ontmoeten, zal $Cd^2 - CZ^2 = gZ\ (Zr + gr)$ zijn, terwijl $gZ\ (Zr + gr) : ha\ (aC + hC) = Zr^2 : Ca^2 = Cd^2 - CZ^2 : Cd^2 - Ca^2$. Op dezelfde wijze vindt men $CD^2 - CV^2 : CD^2 - CA^2 = VR^2 : CA^2$. Maar daar volgens onderstelling $Cd^2 - Ca^2 = CD^2 - CA^2$ en $Zr^2 : Ca^2 = VR^2 : CA^2$ is, wordt $Cd^2 - CZ^2 = CD^2 - CV^2$. Wanneer nu de doorsneden PCZ en pCV bewegen en in PCz en pCv overgaan, volgt uit het bewezene in § 650 dat de aantrekking in P naar den sector, begrepen tusschen de vlakken PZC en PzC tot die naar den sector $VvpC$ in laatste rede zich verhouden, samengesteld als $CZ^2.CP : CV^2.Cp$ en $\angle ZCz : \angle VCv$ of (omdat de oppervlakken CZz en CVv zich zamengesteld verhouden als de vierkanten der stralen en als de hoeken) als $CZz.\ CP : CVv.\ Cp$. Maar omdat steeds $Zr : VR = Ca : CA$ is, heeft men tevens achtereenvolgens:

$$Cr^2 : CR^2 = CZ^2 - Zr^2 : VC^2 - VR^2 =$$
$$PC^2 - (PC^2 - CZ^2) - Zr^2 : Cp^2 - (Cp^2 - VC^2) - VR^2 =$$
$$(^9)\ Cd^2 - \frac{Cd^2 - Ca^2}{Ca^2} Zr^2 - Zr^2 : CD^2 - \frac{CD^2 - CA^2}{CA^2} VR^2 - VR^2 =$$

(9) Omdat $PC^2 - CZ^2 = Cd^2 - Cr^2 - Zr^2 = (Cd + Cr)\,(Cd - Cr) - Zr^2 = gr^2 - Zr^2 = \frac{Cd^2}{Ca^2} Zr^2 - Zr^2$ is, enz.

$\frac{Cd^2}{Ca^2}(Ca^2 - Zr^2) : \frac{CD^2}{CA^2}(CA^2 - VR^2) = Cd^2 : CD^2$ of ook

$Cr : CR = Cd : CD$, waaruit dan volgt dat

$CaZr : CAVR = Ca. Cd : CA. CD$ of daar insgelijks

$\triangle CZr : \triangle CVR = Ca.Cd : CA.CD$ is, $CaZ : CAV = Ca.Cd : CA.CD$ en dus eindelijk $CZz : CVv = Ca.Cd : CA.CD$. Dus zijn de aantrekkingen in P naar de sectoren $PZzC$ en $PVvC$ in rede als $Ca.Cd^2 : CA.CD^2$ en die naar het geheele buitenste en naar het geheele binnenste lichaam in rede als de massae der beide lichamen.

§ 652. Om derhalve de aantrekking naar een afgeplat lichaam $ADBE$ van homogene dichtheid te meten in een punt dat op den afstand CP van het middelpunt in het uitgebreide aequatorvlak gelegen is, zij F het brandpunt eener meridiaan; beschrijf dan uit F als middelpunt met een straal CP, een boog die de as in a snijdt, vervolgens uit a met denzelfden straal den boog FO, die CB in O snijdt; de aantrekking in P naar de spheroïde $ADBE$ zal dan gemeten worden door $\frac{2\, CA.CD^2}{CF^3} \times \frac{FCO}{CP}$, omdat zij zich verhoudt tot die in P naar het buitenste lichaam $adbe$ (die zelve volgens § 646 gemeten wordt door $\frac{2\, Ca.Cd^2}{CF^3} \times \frac{FCO}{CP}$) als $CA.CD^2 : Ca.Cd^2$. Verder verhoudt zij zich, volgens § 650, tot die in a naar $ADBE$ als $FCO : CP\ (CF - CS)$. En indien men aanneemt dat de dichtheid van $adbe$ verandert van het oppervlak naar het middelpunt, maar zóó dat zij hetzelfde is in alle punten gelegen op een met $adbe$ concentrisch en confocaal oppervlak, zal de aantrekking aan den aequator van $adbe$ zich verhouden tot die aan de pool op dezelfde wijze als bij constante dichtheid.

§ 653. Laat men alles blijven zooals in § 651, behalve dat men Cp grooter of kleiner dan CD aanneemt, maar zóó dat het verschil der vierkanten van CP en Cd, steeds gelijk zij aan dat van Cp^2 en CD^2, opdat de doorsneden DpC en dPC confocale concentrische ellipsen blijven; onderstelt men verder dat de doorsneden PCZ en pCV steeds ellipsen zijn die PC en CZ, pC en Cv tot assen hebben, zoo zullen de afstanden harer brandpunten tot het middelpunt steeds even als te voren gelijk zijn; men zal dan op dezelfde wijze kunnen betoogen dat de aantrekking in P naar het buitenste lichaam tot die naar het binnenste zich verhoudt als $Ca.\ Cd.\ CP : CA.\ CD.\ Cp.$ (10)

§ 654. Is x een willekeurig punt op het oppervlak der spheroïde $adbe$, gevormd even als te voren door eene met $ADBE$ concentrische en confocale ellips, zoo zullen de aantrekkingen in x naar het binnenste en buitenste lichaam nauwkeurig of zeer nabij zich verhouden als $CA.\ CD^2 : Ca.\ Cd^2$ dus als de massae der lichamen, wanneer deze zeer weinig van bollen verschillen. Wanneer x aan den pool of aan den omtrek van den aequator der spheroïde ligt, volgt het uit het gezegde van §§ 650 en 651, in andere gevallen kan het uit de laatste paragraaf worden afgeleid.

§ 668. Zij $ADBE$, (fig. 16) weder eene doorsnede van eene spheroïde, met een vlak gaande door hare as AB, F het brandpunt van $ADBE$, en FO een cirkelboog met A tot middelpunt, snijdend AB in O; zij verder $adbe$ eene ellips gelijkvormig en concentrisch met $ADBE$, f haar brandpunt, fZ eene lijn evenwijdig met AB, den cirkel in Z snijdend, eindelijk ZV eene loodlijn op de as. Laat de dichtheid steeds eene waarde d hebben op het oppervlak gevormd door omwenteling van $adbe$ om ab, doch overigens verschillend van die op andere dergelijke oppervlakken. Neemt men dan VK op VZ zóó dat $VK : VZ = d : CD$ en vormt alsdan de ordinaat VK het vlak $OKHC$, wanneer f van C tot F beweegt, zoo zal de aantrekking in D naar de spheroïde $ADBE$ gemeten worden door $\frac{2\ CD^2.\ CA}{CF^3}.\ OKHC$. Want zij $lmnr$ eene andere ellips, gelijkvormig en concentrisch met $adbe$, x haar brandpunt; indien dan xz evenwijdig met ab den boog FO in z ontmoet, en zv loodrecht op AB is, zal de aantrekking in D naar het lichaam, voortgebracht door den ring tusschen adb en lmn, bij wenteling om ab, en begaafd met eene dichtheid d, volgens § 652 gemeten worden door $\frac{2CD^2.\ CA.d}{CF^3}.\ \frac{ZVvz}{CD}$, hetgeen,

(10) Nader betoog hiervan zou geheel overbodig zijn. Men behoeft inderdaad slechts het gezegde in § 651 onder de in deze paragraaf gestelde voorwaarden te herhalen.

wanneer al tot nul nadert, overgaat in

$$\frac{2\,CD^2.\ CA.\ d}{CF^3} : \frac{ZV.vV}{CD} = \frac{2\ CD^2.\ CA}{CF^3}.\ VK.\ Vv,$$

volgens de onderstelling. Dientengevolge zal de aantrekking in D naar de geheele spheroïde gemeten worden door $\frac{2CD^2.CA}{CF^3} \times OKHC$ en verhoudt zij zich tot die bij constante dichtheid D als $OKHC.\ CD : FCO.\ D.$(11)

Is bijvoorbeeld de dichtheid in eenig punt d van den straal CD omgekeerd evenredig met Cd, zoo zal de aantrekking in D staan tot die bij constante dichtheid gelijk aan die in D, als $CF.\ CO : FCO$, omdat, indien D de dichtheid in D voorstelt, $VK : D = VZ : Cd = Cf : Cd = CF : CD$ en het vlak $OKHC = \frac{D.\ CF.\ CO}{CD}$ is.

Dit is hetgeen door MACLAURIN aangaande de aantrekking naar spheroïden is geschreven. Het is licht intezien dat daarin eene groote schrede vooruit is gedaan. Wel heeft nog verreweg het meeste alleen betrekking op omwentelings-spheroïden, maar voor dezen is dan ook geheel en al richting en grootte der aantrekking voor een inwendig punt en voor een punt op het oppervlak bepaald (§ § 634-5 en 644-647), terwijl dit insgelijks verricht is voor een punt, gelegen buiten de spheroïde in het verlengde der as of in het uitgebreide aequatorvlak (§ § 649-652). Bovendien is echter door MACLAURIN de stelling bewezen: **„dat de krachten waarmede twee confocale ellipsoïden met ongelijke assen (§ § 652 en 653) een uitwendig punt in eene harer assen gelegen, aantrekken, evenredig zijn met hare massae".**

Uit § 654 blijkt duidelijk dat MACLAURIN niet vermoedde dat deze stelling voor elk willekeurig gelegen uitwendig punt doorgaat. Evenwel heeft men terecht later aan de stelling, in den

---

(11) Volgens § 652 had men eigenlijk door elk der punten f en x een cirkel moeten brengen, wiens middelpunt op AB ligt en wiens straal de lengte CD heeft. De maat der aantrekking zou dan zijn het produkt van $\frac{2CD^2.CA.d}{CF^3.\ CD}$ met het verschil der vlakken, begrensd door CD en AB met elke dier cirkels. Daar nu echter die vlakken respective gelijk zouden worden aan ZVO en zvO, is dit verschil zonder verwaarlozing gelijk aan $ZVvz$.

laatsten zin opgevat, den naam van **„Stelling van Maclaurin"** gegeven, omdat de ontdekking daarvan toch zeker een gevolg geweest is van zijne werkzaamheid.

Hoofdzakelijk met het oog op de theoretische bepaling van de gedaante der aarde, heeft ook D'ALEMBERT zich herhaalde malen bezig gehouden met het vraagstuk der aantrekking.

In zijne »Recherches sur différens points importans du système du monde, 3e partie, Paris 1756", handelt hij echter alleen over de spheroïde die zeer weinig van een bol verschilt, en wijdt uitvoerig uit over de integratie der daarbij voorkomende formules. Maar in het 6e deel zijner »Opuscules mathématiques, Paris, 1773, pag. 177", vindt men eene bepaling van de aantrekking door eene drieassige ellipsoïde met halfassen a_i, a_k, a_l, op het uiteinde P der as a_l uitgeoefend. Hij gebruikt daartoe drie verschillende methoden.

Bij de eerste verdeelt hij de ellipsoïde in oneindig dunne lagen, begrensd door vlakken, gebracht door het punt P, loodrecht op het vlak der assen a_k en a_l. De doorsneden dier vlakken met de ellipsoïde, zijn dan ellipsen wier ééne halfas a', gelegen in het vlak van a_k en a_l, tot waarde heeft:

$$\frac{a_k^2 \cos z}{a_l \left\{ 1 + \left(\frac{a_k^2}{a_l^2} - 1 \right) \cos^2 z \right\}}$$

waarin z den standhoek voorstelt van het vlak met dat der assen a_l en a_i. Stelt men dan de andere as voor door $\frac{a'}{\upsilon}$ zoo is

$$\upsilon^2 = \frac{a_k^2}{a_i^2 \left\{ 1 + \left(\frac{a_k^2}{a_l^2} - 1 \right) \cos^2 z \right\}}.$$

Voor de bepaling der aantrekking door zulk eene laag op P uitgeoefend, kan men dan blijkbaar de formulen bezigen, door MACLAURIN in § § 645—6 ontwikkeld, waardoor men voor de aantrekking naar de laag in de richting der as a' vindt:

$$\frac{4\, a_k^2 \cos z\, dz}{a_l \left\{ 1 + \left(\frac{a_k^2}{a_l^2} - 1 \right) \cos^2 z \right\}} \left\{ \frac{\upsilon^2}{(\upsilon^2-1)^{3/2}} \operatorname{arctan} (\upsilon^2-1)^{1/2} - \frac{1}{\upsilon^2-1} \right\}.$$

Projecteert men dit op de as a_l, door vermenigvuldiging met $\cos z$, integreert naar z van 0 tot $\frac{\pi}{2}$, en verdubbelt de uitkomst, zoo verkrijgt men voor de aantrekking door de geheele ellipsoïde op P uitgeoefend:

$$\frac{8a_k^2}{a_l}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 z}{1+\left(\frac{a_k^2}{a_l}-1\right)\cos^2 z}\left\{\frac{\upsilon^2}{(\upsilon^2-1)^{3/2}}\arctan(\upsilon^2-1)^{1/2}-\frac{1}{\upsilon^2-1}\right\}dz.$$

waarin nu nog z door υ kan vervangen worden.

Daartoe stelt D'ALEMBERT $\upsilon^2=\frac{1}{\upsilon'^2}$; $\frac{a_k^2}{a_i^2}=\frac{1}{\beta^2}$; $\frac{a_k^2}{a_l^2}-1=\alpha^2$;

$$\text{zoodat } \upsilon'^2=\beta^2(1+\alpha^2\cos^2 z) \text{ dus } \cos^2 z=\frac{\upsilon'^2-\beta^2}{\alpha^2\beta^2},$$

$$\sin z=\frac{(\alpha^2\beta^2-\upsilon'^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha\beta}.$$

$$\cos^2 z\,dz=\cos z\,d\sin z=-\frac{(\upsilon'^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\upsilon'\,d\upsilon'}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2\beta^2-\upsilon'^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

wordt; terwijl men voor de grenzen der integratie vindt $\frac{a_i}{a_l}$ en $\frac{a_i}{a_k}$, waardoor dus voor de aantrekking verkregen wordt:

$$-\frac{8a_k^2}{a_l}\int_{\frac{a_i}{a_l}}^{\frac{a_e}{a_k}} \frac{(\upsilon'^2-\beta^2)\,d\upsilon'}{\alpha^2(1-\upsilon'^2)(\alpha^2\beta^2-\upsilon'^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{(1-\upsilon'^2)^{\frac{1}{2}}}\arctan\frac{(1-\upsilon'^2)^{\frac{1}{2}}}{\upsilon'}-\upsilon'\right\}$$

eene integraal wier eerste gedeelte, zooals D'ALEMBERT zulks zegt, afhangt van de rectificatie der kegelsneden, terwijl het tweede deel door logarithmen of cirkelbogen kan worden uitgedrukt.

Zijne beide andere methoden bestaan in het verdeelen der ellipsoïde in sectoren, door vlakken, gaande door de as a_l, of in schijven, door vlakken loodrecht op die as. Beide voeren hem echter tot vormen, nog veel meer samengesteld dan de bovenstaande, zoodat hij geen van beiden afmaakt; alleen merkt hij nog op, dat de aantrekking op het punt P, den vorm heeft $\frac{4\pi a_l}{3}\times\varphi$, zijnde φ eene functie, alleen afhangend van de verhoudingen $\frac{a_i}{a_l}$ en $\frac{a_i}{a_k}$ zooals uit den gevonden vorm blijkt. Het overige dier verhandeling is dan weder gewijd aan benaderingen, voor gevallen waarin de assen onderling weinig verschillen.

In zijn 48e Memoire, pag. 232 van hetzelfde deel der Op. Math., knoopt hij dan de afgebroken redenering weder aan, met het doel, zich door berekening te overtuigen van de waarheid van hetgeen door MACLAURIN gezegd wordt van § 649 tot § 653.

Stelt men daartoe in fig. 13 $AC = a_l$, $CD = a_k$, $CP = \delta$, $PM = x_1$, $Pm = x_2$, $\angle MPQ = z$, zoo is klaarblijkelijk

$$Mm = x_1 - x_2 = \frac{2\, a_l \sqrt{\left\{ 1 + \frac{a_l^2 - a_k^2 - \delta^2}{a_k^2} \sin^2 z \right\}}}{\frac{a_l^2 - a_k^2}{a_k^2} \sin^2 z + 1}$$

Laat men dan de halve ellips ADB, om AB als as, een oneindig klein hoekje dZ beschrijven, zoo is het element van de aantrekking, door den oneindig dunnen sector, in de richting AB op P uitgeoefend, gelijk aan $Mm \times \sin z \cos z \cdot dz\, dZ$ en dus die van den geheelen sector $dZ \int mM \sin z \cos z\, dz$.

Stelt men dan $\sin^2 z = - \frac{a_k^2}{a_l^2 - a_k^2 - \delta^2} \sin^2 \zeta$ (hetgeen geoorloofd is omdat $\delta > a_l$ is) zoo is

$$\sin z \cos z\, dz = - \frac{a_k^2 \sin \zeta \cos \zeta\, d\zeta}{a_l^2 - a_k^2 - \delta^2},$$

$$mM = \frac{2\, a_l \cos \zeta}{1 + \frac{a_k^2 - a_l^2}{a_l^2 - a_k^2 - \delta^2} \sin^2 \zeta}$$

en dus de aantrekking

$$2\, a_l\, a_k^2\, dZ. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \zeta \cos^2 \zeta\, d\zeta}{\delta^2 - (a_l^2 - a_k^2) \cos^2 \zeta}$$

eene formule die gemakkelijk te integreren is en waaruit de stelling door MACLAURIN in § 649 ontwikkeld, onmiddelijk volgt. Indien toch

A_l, A_k, de halfassen CP en Cd zijn der door P gaande omwentelingsellipsoïde, zal de aantrekking van den sector van deze op P voorgesteld worden door $2\,A_l\,A_k^2\,dZ \int_0^{\zeta''} \frac{\sin\zeta\cos^2\zeta\,d\zeta}{\delta^2-(A_l^2-A_k^2)\cos^2\zeta}$, waarin $\zeta'' = \arccos\frac{\sqrt{A_l^2-\delta^2}}{A_k}$ is; hetgeen onmiddellijk leert dat zoodra $A_l^2 - A_k^2 = a_l^2 - a_k^2$ en $A_l = \delta$ is, de beide aantrekkingen zich verhouden als $a_l\,a_k^2 : A_l\,A_k^2$, zoodat dit ook met die der geheele omwentelingsellipsoïden het geval is.

Is echter de aantrekkende ellipsoïde geen omwentelingslichaam en dus niet $a_i = a_k$, zoo mag a_k niet meer constant genomen worden, maar moet, opdat $dZ.\int mM\sin z\cos z\,dz$ de aantrekking van een willekeurigen sector voorstelle, a_k^2 daarin blijkbaar vervangen worden door $a'^2_k = \frac{a_k^2}{1+\frac{a_k^2-a_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z}$ zijnde Z de hoek van den sector met het vlak der assen a_k en a_l. Zij nu weder voor de buitenste ellipsoïde $A_l^2 - A_k^2 = a_l^2 - a_k^2$ en $A_l = \delta$. Stelt men dan $\frac{A_k^2}{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'} = A'^2_k$ en bepaalt steeds Z' en z' zóó dat $a_l^2 - a'^2_k = A_l^2 - A'^2_k$ en $\frac{\sin^2 z'}{A'^2_k} = \frac{\sin^2 z}{a'^2_k}$ is, zoo ziet men gemakkelijk dat de aantrekkingen der aldus bepaalde elementen van twee dergelijke sectoren zich verhouden als: $a_l\,dZ\ \sin z\ \cos z\,dz : A_l\,dZ'\ \sin z'\ \cos z'\ dz'$ $= a_l\sin^2 z\,dZ : A_l\sin^2 z'\,dZ' = a_l\,a'^2_k\,dZ\ :\ A_l\,A'^2_k\,dZ'$; terwijl uit $a_l^2 - a'^2_k = A_l^2 - A'^2_k$ volgt:

$$A_l^2 - \frac{A_k^2}{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'} = a_l^2 - \frac{a_k^2}{1+\frac{a_k^2-a_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z}. \quad (a)$$

In het bizonder geval waarin $a_k = a_l$, dus ook $A_k = A_l$ en bovendien $A_l^2 - A_i^2 = a_l^2 - a_i^2$ is, zoodat beide ellipsoïden omwentelingslichamen zijn, wier aequatorvlakken door P gaan, terwijl de meridianen confocaal zijn, volgt dan uit (a):

$$\frac{a_l^2 . \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z}{1 + \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z} = \frac{A_l^2 . \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'}{1 + \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'}$$

of
$$\frac{\sin Z'}{\sqrt{\left\{1 + \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'\right\}}} : \frac{\sin Z}{\sqrt{\left\{1 + \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z'\right\}}} = \frac{a_l}{a_i} : \frac{A_l}{A_i}$$

waaruit men licht afleidt,

$$\frac{\cos Z}{\sqrt{\left\{1 + \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z\right\}}} = \frac{\cos Z'}{\sqrt{\left\{1 + \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'\right\}}}$$

hetgeen door differentiatie geeft:

$$\frac{a_l \sin Z dZ}{a_i \left\{1 + \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z\right\}^{3/2}} : \frac{A_l \sin Z' dZ'}{A_i \left\{1 + \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'\right\}^{3/2}} = \frac{A_l}{A_i} : \frac{a_l}{a_i}$$

terwijl bij de gemaakte onderstellingen

$$a'^2_k : A'^2_k = \frac{a_l^2}{1 + \dfrac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin^2 Z} : \frac{A_l^2}{1 + \dfrac{A_l^2 - A_i^2}{A_i^2} \sin^2 Z'}$$

is. Vermenigvuldigt men eindelijk deze drie evenredigheden term voor term en verkleint zooveel mogelijk, zoo vindt men daaruit $a_l a'^2_k dZ : A_l A'^2_k dZ' = a_i a_l^2 : A_i A_l^2$, zijnde de stelling door MACLAURIN in § 651 bewezen.

De pogingen welke D'ALEMBERT daarop laat volgen om op dergelijke wijze het meer algemeene vervat in § 653 van MACLAURIN te bewijzen, lijden echter alle schipbreuk, zoodat hij eindigt met te zeggen dat hij aan de waarheid daarvan twijfelt, ofschoon hij er uitdrukkelijk bijvoegt »het is slechts een twijfel welke ik hier uitspreek, daar ik het gezegde van MACLAURIN, dat ook hij niet verder bewijst, niet genoegzaam heb onderzocht.''

HOOFDSTUK II.

EERSTE POGINGEN TOT ANALYTISCHE OPLOSSING.

De grootendeels meetkundige weg langs welke MACLAURIN zijne resultaten verkregen had, was een steen des aanstoots voor de bevorderaars der analyse, wie het onaangenaam was dat het hen niet gelukte diezelfde waarheden zuiver door berekening te bewijzen. Wel konden zij de waarden van de elementaire aantrekkingen in algemeene vorm geven, maar de integratie dier formules scheen langen tijd, zelfs voor de zeer bizondere, door MACLAURIN behandelde liggingen van het aangetrokken punt, onoverkomelijke hinderpalen te ontmoeten.

Hoezeer in die dagen de voorstanders der analytische en die der synthetische methoden van onderzoek tegenover elkander stonden, blijkt onder anderen uit de inleiding van het eerste geschrift dat door den voornaamsten analyticus van de 18e eeuw, LAGRANGE, over dit onderwerp in de Mémoires de l'Academie de Berlin voor 1773, pag. 121, onder den titel van »Memoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques" is openbaar gemaakt, waarin hij zegt:

„Ik stel mij voor in dit stuk aantetoonen, dat verre van daar dat het onderhavige vraagstuk ongeschikt zou zijn voor analyse, het door dit middel, zoo niet eenvoudiger, dan toch meer rechtstreeks en algemeener dan door de synthese kan worden opgelost, hetgeen dienen zal om een der hoofdargumenten te ont-

zenuwen, welke de vijanden der analyse aanvoeren, om haar te verlagen en de meerderheid van de synthese der ouden aantewijzen."

In bovengenoemd geschrift en een vervolg daarop, te vinden in dezelfde Mémoires van het jaar 1775, pag. 273, heeft LAGRANGE dan ook inderdaad voor het eerst, langs analytischen weg, nagenoeg alles bewezen, wat vroeger door MACLAURIN was ontdekt. De inhoud van deze geschriften is derhalve het eerste dat zich thans aan ons ter onderzoeking voordoet. Wij zullen dien dus hier teruggeven, hoewel in geheel anderen dan den oorspronkelijken vorm, daar deze ingericht was naar de behoefte van een tijd, waarin vele analytische problemen, welke thans algemeen eigendom zijn geworden, nog als nieuwe ontdekkingen moesten worden behandeld en uiteengezet. Dit geldt bijvoorbeeld van de substitutie van nieuwe veranderlijken in drievoudige of veelvoudige integralen, welke in het eerste der bovengenoemde geschriften van LAGRANGE, en later ook in een der te behandelen stukken van LEGENDRE, geheel en al als een nieuw denkbeeld wordt aangegeven, terwijl het ten slotte nog eens in de Mécanique céleste van LAPLACE, juist naar aanleiding van de aantrekking der ellipsoïden, wordt ontvouwd. Deze en meer herhalingen van dien aard, zullen wij ons veroorloven weg te laten, om niet tot te groote wijdloopigheid te vervallen.

Zie hier dus in hoofdzaak den inhoud van de hierop betrekking hebbende geschriften van LAGRANGE.

PROBLEEM 1. **De algemeene uitdrukking te vinden van de aantrekking, welke een lichaam van gegeven gedaante uitoefent op een willekeurig punt, in de onderstelling dat de kracht, waarmede elk deeltje van het lichaam het punt aantrekt, eene willekeurige functie is van hun afstand.**

Men noeme p_1, p_2, p_3, de drie rechthoekige coördinaten van het gegeven punt P, ten opzichte van drie willekeurige assen; x_1, x_2, x_3, die van een deeltje dM van het lichaam, ten opzichte derzelfde assen; dan is het duidelijk, dat de afstand r van P tot dM is, $r = \sqrt{\Sigma (x_i - p_i)^2}$. . . . . (1)

Stelt men dus door R voor, de functie van r, waarmede de aantrekking evenredig is, zoo zal RdM de aantrekking zijn, door het deeltje dM, in de richting r uitgeoefend.(12) Om dan deze aantrekking te ontbinden, volgens de richting van de as der x_i, behoeft men ze slechts met $\frac{x_i - p_i}{r}$ te vermenigvuldigen, terwijl het deeltje dM kan worden voorgesteld door het oneindig klein parallelopipedum $dx_1 . dx_2 . dx_3$, zoodat men voor de elementaire aantrekking dF_i in die richting heeft:

$$dF_i = \frac{R\,(x_i - p_i)}{\sqrt{\Sigma\,(x_i - p_i)^2}}\; dx_1\, dx_2\, dx_3 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

welke uitdrukking nu slechts behoeft geïntegreerd te worden, over al de punten van het lichaam, waarna voor de kracht gevonden wordt:

$$F_i = \int\!\!\int\!\!\int \frac{R\,(x_i - p_i)}{\sqrt{\Sigma\,(x_i - p_i)^2}}\; dx_1\, dx_2\, dx_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Voor de integratie zal men beginnen met éène der coördinaten, bijv. x_i, te laten veranderen, en deze integraal uitstrekken tot de uiterste waarden van x_i, welke door de vergelijking van het oppervlak des lichaams, in functie van x_k en x_l, moeten geleverd worden; de tweede integratie, naar x_k, zal dan moeten geschieden tusschen grenzen, welke gevonden worden door de uiterste waarden, welke x_k in de vergelijking kan hebben voor constante x_l en veranderlijke x_i, terwijl ten slotte de grenzen voor x_l zullen zijn, de uiterste waarden, welke voor deze, bij veranderlijke x_i en x_k, door de vergelijking van het oppervlak worden geleverd.

PROBLEEM 2. **Gesteld dat men de differentiaal $Pdx_1\, dx_2\, dx_3$, waarin P eene functie van x_1, x_2 en x_3 is, driemaal moet integreren op de wijze als in het vorige probleem, vraagt men x_1, x_2 en x_3 te vervangen door drie nieuwe veranderlijken y_1, y_2 en y_3, welke gegeven functiën der eerste zijn.**

---

(12) Natuurlijk is hier ondersteld dat de, in het aangetrokken punt aanwezige massa als eenheid wordt aangenomen, hetgeen echter door LAGRANGE niet gezegd wordt. Evenzeer is de kracht, waarmede twee massa-eenheden op den afstand 1 elkander aantrekken, als eenheid aangenomen. Beide onderstellingen zullen wij gemakshalve in het vervolg volhouden.

Ter oplossing hiervan dient de redenering, welke men thans in elk leerboek van integraalrekening vinden kan, doch die bij deze gelegenheid, naar het schijnt, voor de eerste maal is openbaar gemaakt. Wij zullen haar hier niet herhalen.

In een gevolg van dit probleem wordt dan echter meer bizonder de transformatie verricht van het coördinatenstelsel $x_1\, x_2\, x_3$ tot een poolcoördinatenstelsel, met een voerstraal r, den hoek φ welke deze vormt met de richting der x_i as, en den hoek ϑ gevormd door de projectie van r op het vlak der x_k en x_l assen, met de x_k as.

Indien dan π_i de coördinaten in het stelsel x_i zijn, van het punt P', waarvan de voerstraal uitgaat, heeft men:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\{(x_k-\pi_k)^2+(x_l-\pi_l)^2\}}}{r},\ \sin\vartheta = \frac{x_l-\pi_l}{\sqrt{\{(x_k-\pi_k)^2+(x_l-\pi_l)^2\}}}$$

en dus:

$$\left.\begin{aligned} x_i - \pi_i &= r \cos\varphi \\ x_k - \pi_k &= r \sin\varphi \cos\vartheta \\ x_l - \pi_l &= r \sin\varphi \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

waaruit Lagrange dan, door differentiatie en substitutie in de formulen van het algemeen probleem, vindt:

$$dM = dx_1\, dx_2\, dx_3 = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

hetgeen, zooals hij trouwens zelf opmerkt, gemakkelijk rechtstreeks te vinden is.

Onderstelt men nu dat men een lichaam hebbe van eindige en continue vorm, welks oppervlak voorgesteld is door eene vergelijking tusschen de coördinaten x_i, die men gemakkelijk omvormt in eene andere tusschen den voerstraal r en de hoeken φ en ϑ, en dat vervolgens de differentiaal PdM moet geintegreerd worden over de geheele massa van het lichaam, zoo zal men achtervolgens de grootheden r, φ en ϑ laten variëren en naar elke daarvan integreren; daarbij moet men echter twee gevallen onderscheiden, naar gelang het uitgangspunt P' der voerstralen buiten of binnen het lichaam ligt.

1°. Wanneer het uitgangspunt P' buiten het lichaam gelegen is, is het duidelijk dat de hoeken φ en ϑ slechts kunnen variëren tusschen grenzen, welke men vinden zal, door de punten te zoeken, waar de straal r het oppervlak des lichaams raakt, d. i.

waar $\frac{dr}{d\varphi} = \infty$ en $\frac{dr}{d\vartheta} = \infty$ is. In het algemeen is het zichtbaar dat, omdat de straal r het geheele lichaam doorloopt, de vergelijking van het oppervlak des lichaams, voor elke waarde van φ en ϑ binnen de behoorlijke grenzen gelegen, twee waarden van r (13) oplevert, die wij zullen aanduiden door r' en r'' en die behooren bij twee punten van het oppervlak, welke in eene rechte lijn liggen met P'. Men zal dus beginnen met de differentiaal PdM te integreren naar r, van r' tot r'', d. i. men zal het verschil nemen van de waarden der integraal, behoorende bij $r = r''$ en $r = r'$.

Nu is het klaar dat de punten, waar de straal r het oppervlak raakt, die zijn, waar de beide wortels r' en r'' gelijk worden; door dus $r' = r''$ te stellen, zal men eene vergelijking krijgen tusschen φ en ϑ, welke de ruimte aangeeft, waarbinnen de beide hoeken mogen variëren, en waaruit men twee waarden van φ, in functie van ϑ, verkrijgt, welke wij door φ' en φ'' aanduiden; men zal dus op nieuw integreren voor veranderlijke φ van φ', tot φ''; eindelijk zal men $\varphi' = \varphi''$ stellen, hetgeen eene vergelijking in ϑ alleen geeft, welke insgelijks twee wortels ϑ' en ϑ'' zal hebben. Integreert men eindelijk voor de derde maal naar ϑ tusschen de grenzen ϑ' en ϑ'', zoo zal men de geheele integraal gevonden hebben. Alleen moet men opmerken, dat het gebeuren kan, dat de vergelijking $\varphi' = \varphi''$, die de grenzen van ϑ moet leveren, onmogelijk is, of ϑ niet bevat; in dat geval zal ϑ alle mogelijke waarden moeten verkrijgen en men zal dus integreren van $\vartheta = 0$ tot $\vartheta = \pi$. Bovendien zullen, ingeval φ' en φ'' onafhankelijk zijn van ϑ, de beide integratiën naar φ en ϑ van elkander onafhankelijk zijn, omdat dan zoowel φ' en φ'' als ϑ' en ϑ'' absolute, gegevene waarden hebben; zoodat het, in dit geval, onverschillig is of men het eerst naar φ of naar ϑ integreert, en men dus

(13) Men merke op dat, hoewel in den aanvang gesproken wordt van een willekeurig lichaam, bij de uitwerking blijkbaar alleen gedacht wordt aan een, dat door een oppervlak van den tweeden graad begrensd is. In het algemeen zou deze discussie veel meer onderzoek vorderen, hetgeen wij hier achterwege laten, omdat het hier toch juist om oppervlakken van den tweeden graad te doen is.

kan beginnen, op de wijze die de bewerking het gemakkelijkst maken zal.

2^0. Ligt P' binnen het lichaam, zoo zal men aan φ en ϑ alle mogelijke waarden moeten geven, omdat de straal r in elken stand het oppervlak snijdt; verder is het duidelijk, dat dezelfde straal, bij verlenging, het lichaam aan beide zijden van P' ontmoet; men zal die beide waarden r' en r'' van r vinden, door de oplossing van de vergelijking van het oppervlak tusschen r, φ en ϑ; het is dan licht te begrijpen, dat, om hier de volledige integraal van PdM te verkrijgen, het genoeg is eerst naar r alleen te integreren van $r = 0$ tot $r = r'$ en van $r = 0$ tot $r = r''$ en de som dezer beide integralen te nemen, terwijl men daarna naar φ en ϑ integreert, voor beide tusschen de grenzen 0 en π. Daar de integratiën naar φ en ϑ hier altijd onafhankelijk van elkander zijn, zal het blijkbaar onverschillig zijn met welke men begint.

Men ziet dus dat er een groot verschil is, tusschen de gevallen, waarin P' buiten of binnen het lichaam ligt; dat dit laatste gemakkelijker op te lossen is dan het andere en dat het dus wenschelijk is, altijd de vraag tot dit geval terug te brengen, hetgeen trouwens altijd kan geschieden, daar de ligging van P' willekeurig is.

Er zou nu eigenlijk nog een geval zijn dat eene bijzondere discussie zou verdienen, omdat het tusschen de beide anderen inligt, namelijk dat, waarin P' op het oppervlak des lichaams zou liggen. Men kan echter dit geval tot het vorige terugbrengen en het op dezelfde wijze behandelen, door op te merken dat men steeds slechts ééne waarde van r zal hebben, terwijl de andere nul wordt en dat men dus, na voor r geintegreerd te hebben, slechts die integratie zal hebben uittestrekken van 0 tot de waarde van r in functie van φ en ϑ, welke de vergelijking van het oppervlak geeft, waarna men ten opzichte der volgende integratiën, dezelfde voorwaarden heeft te vervullen als bij het vorige geval.

PROBLEEM 3. **De waarde te bepalen van de aantrekking, uitgeoefend door een lichaam, begrensd door een oppervlak van den tweeden graad, op een (stoffelijk) punt P, binnen of op het oppervlak; de aantrekkende kracht omgekeerd evenredig ondersteIlend met de tweede machten der afstanden.**

Ingevolge de notatie van het 1e probleem, is hier $R = \frac{1}{r^2}$ en de elementaire aantrekking $\frac{dM}{r^2}$ derhalve $dF_i = \frac{x_i - p_i}{r^3} dM$.

Voeren wij dus, op de wijze van het 2e probleem, de coördinaten r, φ en ϑ in, met het punt P zelf tot uitgangspunt der stralen, zoodat $\pi_i = p_i$ is, zoo gelden de formulen (4) en (5) en men heeft:

$$\left.\begin{aligned} dF_i &= \sin\varphi \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta. \\ dF_k &= \sin^2\varphi \cos\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta. \\ dF_l &= \sin^2\varphi \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

of

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \int\!\!\int_0^\pi \!\int \sin\varphi \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ F_k &= \int\!\!\int_0^\pi \!\int \sin^2\varphi \cos\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ F_l &= \int\!\!\int_0^\pi \!\int \sin^2\varphi \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Men zal nu beginnen met naar r te integreren, en indien men r' en r'' de waarden van r noemt, welke men vindt door de oplossing der vergelijking van het oppervlak, zoo is:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \int\!\!\int_0^\pi (r' + r'') \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \\ F_k &= \int\!\!\int_0^\pi (r' + r'') \sin^2\varphi \cos\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ F_l &= \int\!\!\int_0^\pi (r' + r'') \sin^2\varphi \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Daar nu de eindige oppervlakken van den tweeden graad allen tot vergelijking hebben $\Sigma \alpha_i^2 x_i^2 = 1$, waarbij de assen van het lichaam tot coördinaatassen zijn aangenomen, zoo vindt men voor de vergelijking tusschen r, φ en ϑ,

$$\alpha_i^2 (p_i + r\cos\varphi)^2 + \alpha_k^2 (p_k + r\sin\varphi\cos\vartheta)^2 + \alpha_l^2 (p_l + r\sin\varphi\sin\vartheta) = 1$$

of naar r gerangschikt:

$$\begin{aligned} &(\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta)\, r^2 + \\ &+ 2\,(\alpha_i^2 p_i \cos\varphi + \alpha_k^2 p_k \sin\varphi \cos\vartheta + \alpha_l^2 p_l \sin\varphi \sin\vartheta)\, r + \\ &+ \Sigma \alpha_i^2 p_i^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9) \end{aligned}$$

waaruit men dadelijk vindt:

$$r' + r'' = -\frac{2\,(\alpha_i^2 p_i \cos\varphi + \alpha_k^2 p_k \sin\varphi\cos\vartheta + \alpha_l^2 p_l \sin\varphi\sin\vartheta)}{\alpha_i^2\cos^2\varphi + \alpha_k^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}$$

hetgeen nu in de formulen (8) moet gesubstitueerd worden.

Stelt men nu ter bekorting den noemer van den vorm voor $r' + r''$ door N voor, en verder:

$$\alpha_i^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = A_i;\quad \alpha_k^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = A_k;$$

$$\alpha_l^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = A_l;$$

$$\alpha_i^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = B_i;\quad \alpha_k^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = B_k;$$

$$\alpha_l^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = B_l;$$

$$\alpha_i^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = C_i;\quad \alpha_k^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = C_k;$$

$$\alpha_l^2\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = C_l;$$

zoo is:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= -2p_i A_i - 2p_k A_k - 2p_l A_l \\ F_k &= -2p_i B_i - 2p_k B_k - 2p_l B_l \\ F_l &= -2p_i C_i - 2p_k C_k - 2p_l C_l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Gevolg 1. Het is klaar dat de grootheden A_i, A_k, enz. alleen afhangen van de verhoudingen van twee der coëfficienten α_i^2 tot de derde, en niet van de absolute waarden dezer constanten, noch van de coördinaten p_i van het aangetrokken punt. Daaruit mag men afleiden:

1⁰. dat wanneer de coördinaten van een punt p_i, p_k, p_l, die van een ander $\lambda p_i, \lambda p_k, \lambda p_l$ zijn, terwijl beide punten binnen het oppervlak van het lichaam gelegen zijn, de aantrekkingen op die beide punten zich zullen verhouden als $1 : \lambda$, omdat F_i, F_k en F_l bij vervanging van p_i door λp_i enz., overgaan in λF_i enz. Daar nu twee dusdanige punten liggen op eene rechte lijn, die door het middelpunt des lichaams gaat, en hunne afstanden van het middelpunt zich verhouden als 1 : λ kan men zeggen: dat de componenten der aantrekkingen en dus de aantrekkingen zelve, welke het lichaam uitoefent op twee punten eener middellijn, gelijk gericht en evenredig zijn met hunne afstanden van het middelpunt. (Zie MACLAURIN § 631).

2°. dat de aantrekking op een gegeven punt binnen of op het oppervlak des lichaams gelegen, niet verandert, zoolang de verhoudingen van twee der grootheden $\varkappa$ tot de derde, dezelfde blijven, en daar alle oppervlakken in wier vergelijkingen die verhoudingen gelijk zijn, met elkander gelijkvormig zijn en gelijk gerichte assen hebben, zullen alle gelijkvormige, concentrische spheroïden, met gelijk gerichte assen, dezelfde aantrekking uitoefenen, op een punt, binnen of op hun oppervlak gelegen. Daaruit verkrijgt men dan dadelijk de stelling, dat de aantrekking van een hol lichaam, met gelijkvormige, spheroïdische binnen- en buiten oppervlakken, op een punt van het binnen oppervlak, nul is, omdat de aantrekking van het geheele lichaam dezelfde is als die van het deel dat de holte besluit. (Zie NEWTON Prop. 91 gev. 3. MACLAURIN § 630).

GEVOLG 2. Beschouwt men nu de vergelijkingen (10) meer nauwkeurig, zoo komt alles aan op de waarden der integralen A_i, B_i enz.

Nu weet men dat wanneer in eene integraal $\int_0^\pi P \cos x \, dx$, P eene functie is van sin x en cos ${}^2x$, de waarden van $P \cos x$ voor x tusschen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ gelijk, doch van tegengesteld teeken zijn met die voor x tusschen $\frac{1}{2}\pi$ en π, zoodat de waarde der integraal nul is. Hieruit volgt dan dat $A_k = A_l = B_i = B_l = C_i = C_k = 0$ is, omdat dit, of bij de integratie naar φ, of bij die naar ϑ het geval wordt. Derhalve heeft men nu:

$$F_i = -2p_i A_i; \quad F_k = -2p_k B_k; \quad F_l = -2p_l C_l. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

zoodat deze componenten respective slechts één der coördinaten p_i, p_k en p_l bevatten. Daar deze bovendien evenwijdig zijn aan de assen van het lichaam, is het duidelijk dat zij tevens de afstanden voorstellen, van het aangetrokken punt tot de drie vlakken, door deze assen gaande. Dus is de aantrekking op een willekeurig punt van het lichaam, in de richting van een der assen, evenredig met den afstand van het punt, tot het vlak gaande door de beide andere assen; derhalve worden alle punten van het lichaam, die op gelijken afstand van een dier vlakken liggen, in de richting van de normaal op dat vlak, met gelijke krachten aangetrokken. (Maclaurin § 634).

Gevolg 3. Zijn in de vergelijking $\Sigma\, \alpha_i^2 x_i^2 = 1$ de drie coefficienten $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l$ reëel maar ongelijk, zoo stelt zij een ellipsoïde voor; maar zijn twee daarvan, bijv. α_k en α_l gelijk, zoo wordt het oppervlak eene spheroïde, gevormd door de omwenteling van eene ellips, wier vergelijking is $\alpha_i^2 x_i^2 + \alpha_k^2 x_k^2 = 1$, om de as α_i. In beide gevallen is echter, volgens het voorgaande, de aantrekking, welke het lichaam uitoefent op een zijner punten P in de richting van een zijner assen, gelijk aan die, welke eene gelijkvormige, gelijk geplaatste ellipsoïde, gaande door het voetpunt P' van de loodlijn uit P op die as, op dat punt P' uitoefent; welke aantrekking steeds evenredig is met den afstand van P' tot het middelpunt. (Maclaurin § 634).

Gevolg 4. Men behoeft nu nog slechts de waarden van A_i, B_k en C_l te bepalen, dus de integralen

$$\int\!\!\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{N},\quad \int\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N},\quad \int\!\!\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N},$$

waarin $N = \alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta$ is.

Men kan hierbij twee gevallen onderscheiden, naar gelang $\alpha_k = \alpha_l$ is of niet.

1°. Zij $\alpha_k = \alpha_l$, dus het oppervlak eene omwentelings-ellipsoïde. Alsdan is $N = \alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi$, zoodat ϑ uit den noemer verdwijnt.

Integreert men dus eerst naar ϑ, zoo vindt men gemakkelijk (daar $\int_0^\pi \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \int_0^\pi \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ is),

$$\int\!\!\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{N} = \pi \int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{N}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\int\!\!\int_{o}^{\pi} \frac{\sin^3\varphi \cos^2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{N} = \int\!\!\int_{o}^{\pi} \frac{\sin^3\varphi \sin^2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{N} = \tfrac{1}{2}\pi \int_{o}^{\pi} \frac{\sin^3\varphi \, d\varphi}{N} \quad (13)$$

Om dan verder naar φ te integreren, stelle men $\cos\varphi = u$; dan is:

$$N = \alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2, \quad \frac{\sin^3\varphi \, d\varphi}{N} = -\frac{(1-u^2)\,du}{\alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2}$$

$$\frac{\sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{N} = -\frac{u^2\,du}{\alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2};$$

vervolgens zij $\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_k^2} = m^2$ [14] en $u = \dfrac{t}{m}$, zoo wordt:

$$\frac{(1-u^2)\,du}{\alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2} = \frac{\left(1 - \frac{t^2}{m^2}\right)\frac{dt}{m}}{\alpha_k^2\left(1 + m^2 . \frac{t^2}{m^2}\right)} = \frac{(m^2 - t^2)\,dt}{\alpha_k^2\, m^3\,(1+t^2)} =$$

$$\frac{1+m^2}{\alpha_k^2\, m^3} . \frac{dt}{1+t^2} - \frac{dt}{\alpha_k^2\, m^3}$$

en $$\frac{u^2 du}{\alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2} = \frac{t^2 dt}{\alpha_k^2\, m^3\,(1+t^2)} = \frac{dt}{\alpha_k^2\, m^3} - \frac{dt}{\alpha_k^2\, m^3\,(1+t^2)}$$

Daar nu de grenzen voor φ zijn 0 en π, zullen die voor t zijn $+m$ en $-m$, zoodat de beide integralen (12) en (13) worden:

$$\int_{o}^{\pi} \frac{\sin^3\varphi \, d\varphi}{N} = -\int_{-m}^{m} \frac{dt}{\alpha_k^2\, m^3} + \frac{1+m^2}{\alpha_k^2\, m^3}\int_{-m}^{m} \frac{dt}{1+t^2} =$$

---

[14] LAGRANGE vergeet hier onderscheid te maken tusschen de beide gevallen waarin $\alpha_i > \alpha_k$ en $\alpha_i < \alpha_k$ is. De formulen (14) behooren, volgens de voor m^2 gestelde waarde, bij het eerste geval, zijnde dat eener afgeplatte spheroïde. Voor het tweede geval stelle men $\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_k^2} = -m^2$ en $u = \dfrac{1-t}{m\,(1+t)}$, dan wordt daardoor:

$$\frac{(1 - u^2\, du)}{\alpha_k^2 + (\alpha_i - \alpha_k^2)\,u^2} = \frac{\left\{1 - \frac{(1-t)^2}{m^2\,(1+t)^2}\right\} - \frac{2\,dt}{m\,(1+t)^2}}{\alpha_k^2\left\{1 - m^2 \frac{(1-t)^2}{m^2\,(1+t)^2}\right\}}$$

$$= -\frac{m^2 - 1 + 2\,(m^2+1)\,t + (m^2-1)\,t^2}{2\alpha_k^2\, m^3\,(1+t)^2 t}\,dt = \left\{-\frac{m^2-1}{2\alpha_k^2 m^3 t} - \frac{2}{\alpha_k\, m^3\,(1+t)^2}\right\} dt.$$

en $$\frac{u^2\,du}{\alpha_k^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\,u^2} = -\frac{(1-t)^2\,dt}{2\alpha_k^2 m^3 t (1+t)^2} = \left\{-\frac{1}{2\alpha_k^2 m^3 t} + \frac{2}{\alpha_k^2\, m^3\,(1+t)^2}\right\} dt.$$

terwijl de grenzen voor t hier zijn $\dfrac{1-m}{1+m}$ en $\dfrac{1+m}{1-m}$, zoodat, in dit geval

$$= -\frac{2}{\alpha_k^2\, m^2} + \frac{2\,(1+m^2)}{\alpha_k^2\, m^3}\arctan m$$

$$\text{en} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, \cos^2\varphi d\varphi}{N} = \int_{-m}^{m} \frac{dt}{\alpha_k^2 m^3} - \frac{1}{\alpha_k^2 m^3} \int_{-m}^{m} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\frac{2}{\alpha_k^2 m^2} - \frac{2}{\alpha_k^2 m^3}\arctan m,$$

zoodat ten slotte, na vervanging van m door zijn waarde, verkregen wordt:

$$F_i = -\frac{4\,p_i\,\pi\alpha_i^2\,\alpha_k}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k} - \arctan\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}$$

$$F_i = \frac{2\,p_k\,\pi\,\alpha_i^2\,\alpha_k}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{\alpha_k\,(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2} - \arctan\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}$$

$$F_l = \frac{2\,p_l\,\pi\,\alpha_i^2\,\alpha_k}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{\alpha_k\,(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2} - \arctan\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{m^2-1}{2\,\alpha_k^2 m^3} \int_{\frac{1-m}{1+m}}^{\frac{1+m}{1-m}} \frac{dt}{t} + \frac{2}{\alpha_k^2 m^3} \int_{\frac{1-m}{1+m}}^{\frac{1+m}{1-m}} \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$\frac{m^2-1}{\alpha_k^2 m^3}\log\frac{1+m}{1-m} + \frac{2}{\alpha_k^2 m^2} = -\frac{2\,\alpha_i^2}{\alpha_k\,(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{3/2}}\log\frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha_k}{\alpha_i} + \frac{2}{\alpha_k^2-\alpha_i^2}$$

$$\text{en} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi}{N} = \frac{1}{2\,\alpha_k^2 m^3} \int_{\frac{1-m}{1+m}}^{\frac{1+m}{1-m}} \frac{dt}{t} - \frac{2}{\alpha_k^2 m^3} \int_{\frac{1-m}{1+m}}^{\frac{1+m}{1-m}} \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$\frac{1}{\alpha_k^2 m^3}\log\frac{1+m}{1-m} - \frac{2}{\alpha_k^2 m^2} = -\frac{2\alpha_k}{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{3/2}}\log\frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha_k}{\alpha_i} - \frac{2}{\alpha_k^2-\alpha_i^2};$$

let men nu op de waarden van A_i, B_k en C_l, alsmede op de vergelijkingen (11) en (12) en voert ook hier de massa M der spheroïde in, zoo vindt men voor het geval der gerekte spheroïde.

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3\,p_i\,\alpha_i^3\,\alpha_k^3\,M}{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha_k}{\alpha_i} - \frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\} \\
F_k &= \frac{3\,p_k\,\alpha_i^3\,\alpha_k^3\,M}{2\,(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha_k}{\alpha_i} - \frac{\alpha_k(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2}\right\} \\
F_l &= \frac{3\,p_l\,\alpha_i^3\,\alpha_k^3\,M}{2\,(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha_k}{\alpha_i} - \frac{\alpha_k(\alpha_k^2-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (14^a)$$

of, wanneer men door M de massa $\frac{4\pi}{3\alpha_i\alpha_k^2}$ der spheroïde voorstelt:

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3p_i\alpha_i^3\alpha_k^3M}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}-\operatorname{arctan}\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}\\
F_k &= \frac{3p_k\alpha_i^3\alpha_k^3M}{2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{\alpha_k(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2}-\operatorname{arctan}\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}\\
F_l &= \frac{3p_l\alpha_i^3\alpha_k^3M}{2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{3/2}}\left\{\frac{\alpha_k(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i^2}-\operatorname{arctan}\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_k}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Uit den vorm van de vergelijking der spheroïde is duidelijk dat $\frac{1}{\alpha_i}=a_i$ de halve omwentelingsas en $\frac{1}{\alpha_k}=a$ de straal van den aequator is; voert men deze waarden in de formulen (14) en (14^a) in, zoo verkrijgt men:

voor de afgeplatte spheroïde: $(a_i < a)$

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3p_iM}{(a^2-a_i^2)^{3/2}}\left\{\frac{(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}-\operatorname{arctan}\frac{(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}\right\}\\
F_k &= \frac{3p_kM}{2(a^2-a_i^2)^{3/2}}\left\{\frac{a_i(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}-\operatorname{arctan}\frac{a_i(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}\right\}\\
F_l &= \frac{3p_lM}{2(a^2-a_i^2)^{3/2}}\left\{\frac{a_i(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}-\operatorname{arctan}\frac{a_i(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad..(15)$$

voor de gerekte spheroïde: $(a_i > a)$

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3p_iM}{(a_i^2-a^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+a_i}{a}-\frac{(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}\right\}\\
F_k &= \frac{3p_kM}{2(a_i^2-a^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+a_i}{a}-\frac{a_i(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}\right\}\\
F_l &= \frac{3p_lM}{2(a_i^2-a^2)^{3/2}}\left\{\log\frac{(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+a_i}{a}-\frac{a_i(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}\right\}
\end{aligned}\right\}.\quad(15a)$$

terwijl eindelijk aan deze formulen nog eene andere gedaante kan gegeven worden, door invoering van de excentriciteit e der elliptische meridiaandoorsnede, welke in het eerste geval $\frac{(a^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$ in het tweede $\frac{(a_i^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}$ is.

Men verkrijgt daardoor voor de afgeplatte spheroïde:

$$
\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3p_i M}{a^3 e^3}\left\{\frac{ae}{a_i} - \arctan\frac{ae}{a_i}\right\} \\
\frac{F_k}{p_k} &= \frac{F_l}{p_l} = \frac{3M}{2a^3 e^3}\left\{\frac{ae}{a_i} - \arctan\frac{ae}{a_i}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)
$$

en voor de gerekte spheroïde:

$$
\left.\begin{aligned}
F_i &= -\frac{3p_i M}{2a_i^3 e^3}\left\{\log\frac{a_i(e+1)}{a} - e\right\} \\
\frac{F_k}{p_k} &= \frac{F_l}{p_l} = \frac{3M}{2a_i^3 e^3}\left\{\log\frac{a_i(e+1)}{a} - \frac{a_i^2 e}{a^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16'')
$$

2°. Indien α_k verschillend van α_l en dus het oppervlak eene ellipsoïde met ongelijke assen is, bevat de noemer N den hoek ϑ en zal men slechts ééne integratie en wel die naar φ, kunnen uitvoeren. Daar toch de beide integratiën tusschen constante grenzen moeten geschieden, en men dus ook met die naar φ kan aanvangen, terwijl alsdan ϑ als constant moet beschouwd worden, zal men voor $\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi\, d\varphi}{N}$ en $\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{N}$ dezelfde uitdrukkingen krijgen als boven, mits men voor α_k^2 de grootheid $\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta$ substitueert. Onderstelt men daarbij dat α_i grooter dan α_k en α_l, dus de as a_k de kleinste is, zoo verkrijgt men:

$$
F_i = -4p_i\alpha_i^2\int_0^\pi \frac{(\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}\left\{\left(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta}{\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} - \arctan\left(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta}{\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} . \, d\vartheta
$$

$$
F_k = 4p_k\alpha_k^2\int_0^\pi \left\{\frac{1}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha_i^2\arctan\left(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta}{\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}(\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}\right\}\cos^2\vartheta\, d\vartheta
$$

$$
F_l = 4p_l\alpha_l^2\int_0^\pi \left\{\frac{1}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha_i^2\arctan\left(\frac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta}{\alpha_k\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta}\right)}{(\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}(\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}\right\}\sin^2\vartheta\, d\vartheta. \quad (17)
$$

Opmerking. Al hetgeen tot nu toe gevonden is, is geheel overeenkomstig met hetgeen door Maclaurin was ontdekt. Er zou nu alleen overblijven de absolute waarden van F_i, F_l en F_k te bepalen, ook voor het geval eener ellipsoïde met ongelijke assen; maar men ziet licht in dat de integratiën die nog te verrichten blijven, aan alle tot nu toe bekende methoden ontsnappen. (15)

PROBLEEM 4. **Onder dezelfde omstandigheden als in probleem 3, de aantrekking te bepalen, indien P buiten het oppervlak gelegen is.**

De redeneringen, gevoerd bij de behandeling van Probleem 2 doen zien, dat men hier, in plaats der formulen (7) zal hebben:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_{r'}^{r''} \sin\varphi\cos\varphi\, d\,r\, d\,\varphi\, d\vartheta \\ F_k &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_{r'}^{r''} \sin^2\!\varphi \sin\vartheta\, d\,r\, d\,\varphi\, d\,\vartheta \\ F_l &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_{r'}^{r''} \sin^2\!\varphi \sin\vartheta\, d\,r\, d\,\varphi\, d\,\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

en dus in plaats van (8):

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} (r''-r')\sin\varphi\cos\varphi\, d\,\varphi\, d\,\vartheta \\ F_k &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} (r''-r')\sin^2\!\varphi\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta \\ F_l &= \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} (r''-r')\sin^2\!\varphi\sin\vartheta\, d\varphi\, d\,\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

---

(15) Aldus drukt zich Lagrange daaromtrent uit. Wij zullen later zien dat, bij meer doelmatige behandeling, de formulen (17) blijken van elliptische integralen aftehangen, welke grootheden echter in dien tijd nog niet aan meer nauwkeurige studie waren onderworpen.

Hierin zijn r' en r'' weder de wortels der vergelijking (9), zoodat, indien wij stellen:

$$\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta = N,$$

$$\alpha_i^2 p_i \cos\varphi + \alpha_k^2 p_k \sin\varphi \cos\vartheta + \alpha_l^2 p_l \sin\varphi \sin\vartheta = I,$$

$$1 - \Sigma\, \alpha_i^2 p_i^2 = h \text{ en } I^2 + hN = R,$$

$$r'' - r' = \sqrt{\left\{ (r'' + r')^2 - 4\, r'' r' \right\}} = \frac{2\sqrt{I^2 + hN}}{N} = \frac{2\sqrt{R}}{N} \text{ is,}$$

waaruit dus door substitutie in (19) verkregen wordt:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= 2 \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{R}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{N} \\ F_k &= 2 \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{R}\sin^2\varphi\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} \\ F_l &= 2 \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{R}\sin^2\varphi\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{N} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Uit den aard van het coördinatenstelsel is duidelijk, dat φ' en φ'' de hoeken zijn, gevormd door de richting der x_i as met de twee raaklijnen, welke, in een vlak behoorende bij eenige waarde van ϑ, uit P aan het oppervlak kunnen getrokken worden, waaruit volgt dat zij gevonden worden, door, bij constante ϑ, $r'' = r'$ of $R = 0$ te stellen. Evenzoo zijn de grenzen voor ϑ, de hoeken ϑ' en ϑ'', gevormd door het vlak der x_i en x_k assen, met de raakvlakken, welke door de x_i as aan de ellipsoïde kunnen gebracht worden; en daar in deze vlakken de hoeken φ' en φ'' samenvallen, zullen ϑ' en ϑ'' de waarden van ϑ zijn, voor welke de vergelijking $R = 0$ twee gelijke waarden voor φ oplevert.

Gevolg. Zij $p_k = p_l = o$, dat wil zeggen, laat het punt P in de as a_i der ellipsoïde gelegen zijn.

Men onderstelle dan weder:

1°: $\alpha_k = \alpha_l$. Alsdan is:

$I = \alpha_i^2 p_i \cos\varphi$, $h = 1 - \alpha_i^2 p_i^2$, $N = \alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi$,

zoodat de vergelijking $R = 0$ den hoek ϑ niet bevat, waardoor men voor φ de constante grenzen $\varphi' = -\arcsin \frac{\alpha_i}{\sqrt{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2 + \alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i^2)}}$

$$\varphi'' = \arcsin \frac{\alpha_i}{\sqrt{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2 + \alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i^2)}}$$

vindt, ([16]) terwijl de grenzen voor ϑ onbepaald blijven en dus de integratie van 0 tot π moet uitgestrekt worden.

Uit den waarden van φ' en φ'' blijkt nu dadelijk, dat $F_k = F_l = 0$ zal zijn, daar de differentialen alleen $\sin^2\varphi$ bevatten, en dus bij de hier onderstelde ligging van P, voor de grenzen ook mag genomen worden 0 en φ'', en 0 en 2π, zoodat elementen waarin ϑ waarden heeft die π verschillen, elkander opheffen.

Om verder de waarde van F_i te vinden, welke nu tevens de geheele kracht F voorstelt, merke men op, dat, daar de beide integratien van elkander onafhankelijk zijn, men zal hebben:

$$F = F_i = 2\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\{\alpha_i^2 - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2 + \alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i^2)\sin^2\varphi\}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{\alpha_i^2 - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\sin^2\varphi}$$

$$= 2\pi \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{\{\alpha_i^2 - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2 + \alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i^2)\sin^2\varphi\}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\alpha_i^2 - (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\sin^2\varphi}.$$

Stelt men daarin $\sin^2\varphi = \frac{\alpha_i^2 - t^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 + \alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i^2}$ (hetgeen blijkens de waarden van φ' en φ'' steeds geoorloofd is), zoo wordt:

$$F = 2\pi \int - \frac{t^2\, dt}{\alpha_i^4 \alpha_k^2 p_i^2 + (\alpha_i^2 - \alpha_k^2)\, t^2} =$$

$$-\frac{2\pi}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\int \left\{ 1 - \frac{\frac{\alpha_i^4 \alpha_k^2 p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}}{t^2 + \frac{\alpha_i^4 \alpha_k^2 p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}} \right\} dt.$$

([16]) Men merke op dat φ' en φ'' nooit imaginair kunnen zijn, daar de wortelgrootheid in den noemer reëel is, zoolang $p_i^2 > \frac{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}{\alpha_i^2 \alpha_k^2}$ of $p_i^2 > a_i^2 - a_k^2$, en de noemer grooter dan de teller, zoolang $\alpha_i^2 p_i^2 > 1$ of $p_i^2 > a_i^2$ is, aan welke beide voorwaarden voldaan is, omdat P in het verlengde der as a_i ligt.

Wat de grenzen voor t aangaat, merke men op, dat voor $\varphi = \varphi'$, $t = 0$, voor $\varphi = 0$, $t = \pm\, \alpha_i$, voor $\varphi = \varphi''$ weder $t = 0$ is, zoodat t van $-\,\alpha_i$ tot 0 en van 0 tot $+\,\alpha_i$ moet genomen worden, zoodat, daar de differentiaal alleen t^2 bevat,

$$F = -\frac{4\pi}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\int_0^{\alpha_i}\left\{1 - \frac{\dfrac{\alpha_i^4\,\alpha_k^2\,p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}}{t^2 + \dfrac{\alpha_i^4\,\alpha_k^2\,p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}}\right\}dt$$

$$= -\frac{4\pi}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\left\{\alpha_i - \frac{\alpha_i^2\,\alpha_k^2\,p_i}{\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}}{\alpha_i\,\alpha_k\,p_i}\right\}$$

$$= -\frac{4p_i\,\pi\,a^2\,a_i}{(a^2 - a_i^2)^{3/2}}\left\{\frac{(a^2 - a_i^2)^{1/2}}{p_i} - \arctan\frac{(a^2 - a_i^2)^{1/2}}{p_i}\right\}$$

$$= -\frac{3p_i\,M}{a^3\,e^3}\left\{\frac{a\,e}{p_i} - \arctan\frac{a\,e}{p_i}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Deze formulen gelden voor het geval waarin $a > a_i$ en dus de spheroïde afgeplat is. De vorm welke zij aannemen indien $a < a_i$ en dus de spheroïde gerekt is, wordt weder door Lagrange niet opgegeven.

Alsdan echter is $\alpha_i^2 - \alpha_k^2$ negatief; stelt men dus:

$t = \dfrac{\alpha_i^2\,\alpha_k\,p_i}{\sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}} \times \dfrac{x-1}{x+1}$, zoo wordt:

$$F = \frac{4\pi}{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}\left\{\alpha_i - \frac{\alpha_i^2\,\alpha_k\,p_i}{2\,(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}\int_1^{\frac{\alpha_i\alpha_k p_i + \sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}}{\alpha_i\alpha_k p_i - \sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}}}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$= \frac{4p_i\,\pi\,\alpha_i^2\,\alpha_k}{(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{p_i\,\alpha_i\,\alpha_k} - \log\sqrt{\frac{\alpha_i\,\alpha_k\,p_i + \sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}}{\alpha_i\,\alpha_k\,p_i - \sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_i^2}}}\right\}$$

$$= \frac{4p_i\,\pi\,a^2\,a_i}{(a_i^2 - a^2)^{3/2}}\left\{\frac{(a_i^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{p_i} - \log\sqrt{\frac{p_i + (a_i^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{p_i - (a_i^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\}$$

$$= \frac{3p_i\,M}{a_i^3\,e^3}\left\{\frac{a_i\,e}{p_i} - \log\sqrt{\frac{p_i + a_i\,e}{p_i - a_i\,e}}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

2⁰. Zij α_k verschillend van α_p, dus het aantrekkend lichaam eene ellipsoïde met ongelijke assen. Men zal dan de orde der integratie niet mogen omkeeren, daar nu

$$\varphi' = -\arcsin \frac{\alpha_i}{\sqrt{\left\{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta + \alpha_i^2 p_i^2 (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)\right\}}}$$

$$\varphi'' = \arcsin \frac{\alpha_i}{\sqrt{\left\{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta + \alpha_i^2 p_i^2 (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)\right\}}}$$

is. Daar deze grenzen nooit gelijk kunnen worden tenzij beide nul zouden zijn, en daartoe de noemers oneindig moesten worden, hetgeen nooit het geval kan zijn, blijven de grenzen voor ϑ weder 0 en π, terwijl de integratie naar φ hetzelfde resultaat geeft als voor de formulen (21) en (22), mits men daarin α_k^2 door $\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta$ vervange.

Men ziet dus onmiddelijk dat ook hier $F_k = F_l = 0$ is, terwijl

$$F = F_i = -4 \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\alpha_i} \left\{ 1 - \frac{\dfrac{\alpha_i^4 (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta) p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta}}{t^2 + \dfrac{\alpha_i^4 (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta) p_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta}} \right\} dt.$$

Is nu $a_i < a_k$ en $< a_l$, zoo is $\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta$ steeds positief, terwijl deze functie steeds negatief is, wanneer $a_i > a_k$ en $> a_l$ is. Wanneer daarentegen a_i de middelste as, en dus bijvoorbeeld $a_k > a_i > a_l$ is, zoo is diezelfde functie positief van $\vartheta = 0$ tot $\vartheta = \arcsin \sqrt{\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}}$ en van $\vartheta = \pi - \arcsin \sqrt{\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}}$ tot $\vartheta = \pi$, negatief van $\vartheta = \arcsin \sqrt{\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}}$ tot $\vartheta = \pi - \arcsin \sqrt{\dfrac{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}}$. Men heeft dus:

1⁰. wanneer $a_i < a_k$ en $a_i < a_l$ is:

$$F = -4 \int_0^\pi \left\{ \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta} - \frac{\alpha_i^2 p_i (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)^{3/2}} \times \right.$$

$$\left. \times \arctan \frac{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2 \cos^2\vartheta - \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i p_i (\alpha_k^2 \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

2⁰. wanneer $a_i > a_k$ en $a_i > a_l$ is:

$$F = 4\int_0^{\pi}\left\{\frac{\alpha_i}{\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2}-\frac{\alpha_i^2 p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{3/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\log\sqrt{\frac{\alpha_i p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}+(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}-(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\} d\vartheta. \quad (23^a)$$

3^0. wanneer $a_k > a_i > a_l$ is:

$$F = -8\int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{\alpha_i^2-\alpha_k^2}{\alpha_l^2-\alpha_k^2}}}\left\{\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2-\alpha_k^2\cos^2\vartheta-\alpha_l^2\sin^2\vartheta}-\frac{\alpha_i^2 p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2\cos^2\vartheta-\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\arctan\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k^2\cos^2\vartheta-\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\right\} d\vartheta +$$

$$+8\int_{\arcsin\sqrt{\frac{\alpha_i^2-\alpha_k^2}{\alpha_l^2-\alpha_k^2}}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\alpha_i}{\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2}-\frac{\alpha_i^2 p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{3/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\log\sqrt{\frac{\alpha_i p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}+(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_i p_i(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}-(\alpha_k^2\cos^2\vartheta+\alpha_l^2\sin^2\vartheta-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\} d\vartheta. \quad (23_b)$$

Naar aanleiding van deze verhandeling van Lagrange, beproefde nu d'Alembert op nieuw het bewijs van de stelling van Maclaurin, zooals deze haar in § 653 had uitgesproken, en het gelukte hem ditmaal, op zeer gemakkelijke wijze uit zijne vergelijking (a) een betoog af te leiden, dat hij zeer kort mededeelt in een brief aan Lagrange, gedateerd 15 Sept 1775. Hij vermindert daartoe eerst het eene lid dier vergelijking met $A_l^2 - A_k^2$, het tweede met de daaraan gelijke grootheid $a_l^2 - a_k^2$, waardoor hij verkrijgt:

$$\frac{\sin Z}{\left\{1+\frac{a_k^2-a_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z\right\}^{\frac{1}{2}}} : \frac{\sin Z'}{\left\{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_i}{a_k\sqrt{(a_k^2-a_i^2)}} : \frac{A_i}{A_k\sqrt{(A_k^2-A_i^2)}},$$

vervolgens het eerste lid met $A_l^2 - A_i^2$, het tweede met het daaraan gelijke $a_l^2 - a_i^2$; hetgeen geeft:

$$\frac{(A_i^2-A_k^2)\cos^2 Z'}{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'} = \frac{(a_i^2-a_k^2)\cos^2 Z}{1+\frac{a_k^2-\alpha_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z},$$

waaruit weder door differentiatie gevonden wordt:

$$\frac{\sin Z' dZ'}{\left\{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'\right\}^{3/2}} : \frac{\sin Z dZ}{\left\{1+\frac{a_k^2-a_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z\right\}^{3/2}} = \frac{A_i^2}{A_k^2\sqrt{(A_k^2-A_i^2)}} : \frac{a_i^2}{a_k^2\sqrt{(a_k^2-a_i^2)}},$$

terwijl

$$A'^2_k : a'^2_k = \frac{A_k^2}{1+\frac{A_k^2-A_i^2}{A_i^2}\sin^2 Z'} : \frac{a_k^2}{1+\frac{a_k^2-a_i^2}{a_i^2}\sin^2 Z}$$

is. Door vermenigvuldiging der drie evenredigheden volgt dan hieruit $A'^2_k dZ' : a'^2_k dZ = A_i A_k : a_i a_k$, en dus $A_l A'^2_k dZ' : a_l a'^2_k dZ = A_i A_k A_l : a_i a_k a_l$, waarin het gezocht bewijs opgesloten ligt.

Acht dagen nadat Lagrange dezen brief van d' Alembert aan de Berlijnsche akademie had voorgelezen, deelde hij haar een eigen bewijs van dezelfde stelling mede afgeleid uit formule (23), waarbij het punt in de kleinste as ligt. ([17]) Het luidt aldus:

Merkt men op dat in (23) alleen $\sin^2\vartheta$ en $\cos^2\vartheta$ voorkomen, stelt $tg\ \vartheta = t$, dus $\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2\vartheta = \frac{t^2}{1+t^2}$, $d\vartheta = \frac{dt}{1+t^2}$, $\alpha_k^2\cos^2\vartheta + \alpha_l^2\sin^2\vartheta = \frac{\alpha_k^2+\alpha_l^2 t^2}{1+t^2}$, $\alpha_i^2 - \alpha_k^2\cos^2\vartheta - \alpha_l^2\sin^2\vartheta = \frac{\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2}{1+t^2}$ en stelt ten slotte $\alpha_i p_i = \frac{1}{g}$, zoo wordt

$$F = -8\int_0^\infty \frac{\alpha_i dt}{\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2}\left\{1-\frac{1}{g}\sqrt{\frac{\alpha_k^2+\alpha_l^2 t^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2}}\times\right.$$
$$\left.\times \operatorname{arctan} g\sqrt{\frac{\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2}{\alpha_k^2+\alpha_l^2 t^2}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Ingeval $p_i = a_i$ is, dat is ingeval P aan het uiteinde der as a_i ligt, wordt $g = 1$, dus de vorm voor F iets eenvoudiger. Men kan echter aan F steeds dien vorm geven, door middel der volgende substitutie. Men stelle namelijk:

([17]) Het is waar dat deze vorm ook die van (23^a) en (23^b) omvat, ingeval men bogen met imaginaire tangenten in aanmerking neemt. Nergens blijkt echter dat dit in Lagrange's bedoeling heeft gelegen. Bij de uitvoerige inkleeding zijner beschouwingen zou daarvan dan waarschijnlijk wel melding zijn gemaakt.

$$\frac{\alpha_k^2+\alpha_l^2 t^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2}=g^2\frac{\beta_k^2+\beta_l^2\delta^2}{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l^2)\delta^2},$$

zoodat:

$$t^2=\frac{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)\beta_k^2-\alpha_k^2(\beta_i^2-\beta_k^2)+\left\{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)\beta_l^2-\alpha_k^2(\beta_i^2-\beta_l^2)\right\}\delta^2}{\alpha_l^2(\beta_i^2-\beta_k^2)-g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)\beta_k^2+\left\{\alpha_l^2(\beta_i^2-\beta_l^2)-g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)\beta_l^2\right\}\delta^2}$$

is en bepale de drie willekeurige grootheden β_i, β_k en β_l door de vergelijkingen:

$$\beta_i^2\alpha_i^2 g^4=\left\{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)+\alpha_k^2\right\}\left\{g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)+\alpha_l^2\right\},$$

$$g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)\beta_k^2-\alpha_k^2(\beta_i^2-\beta_k^2)=0 \text{ of } \beta_k^2=\frac{\alpha_k^2\beta_i^2}{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)+\alpha_k^2},$$

$$g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)\beta_l^2-\alpha_l^2(\beta_i^2-\beta_l^2)=0 \text{ of } \beta_l^2=\frac{\alpha_l^2\beta_i^2}{g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)+\alpha_l^2}.$$

Daardoor wordt dan:

$$t^2=\frac{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)\beta_l^2-\alpha_k^2(\beta_i^2-\beta_l^2)}{\alpha_l^2(\beta_i^2-\beta_k^2)-g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)\beta_k^2}\delta^2=\frac{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)+\alpha_k^2}{g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)+\alpha_l^2}\delta^2=\frac{\alpha_k^2\beta_l^2}{\alpha_l^2\beta_k^2}\delta^2,$$

$$dt=d\delta.\sqrt{\frac{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)+\alpha_k^2}{g^2(\alpha_i^2-\alpha_l^2)+\alpha_l^2}},$$

$$\alpha_i^2-\alpha_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)t^2=\frac{(\alpha_i^2-\alpha_k)\alpha_l^2\beta_k^2+(\alpha_i^2-\alpha_l^2)\alpha_k^2\beta_l^2\delta^2}{\alpha_l^2\beta_k^2}=$$

$$=\frac{\alpha_l^2\frac{\alpha_k^2(\beta_i^2-\beta_k^2)}{g^2}+\alpha_k^2\frac{\alpha_l^2(\beta_i^2-\beta_l^2)}{g^2}\delta^2}{\alpha_l^2\beta_k^2}=\frac{\alpha_k^2}{g^2\beta_k^2}\left\{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l^2)\delta^2\right\}=$$

$$=\frac{g^2(\alpha_i^2-\alpha_k^2)+\alpha_k}{g^2\beta_i^2}\left\{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l)\delta^2\right\}.$$

Substitueert men nu dit alles in (24), zoo gaat deze over in:

$$F=-8\int_0^\infty\frac{\beta_i\,d\delta}{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l^2)\delta^2}\left\{1-\sqrt{\frac{\beta_k^2+\beta_l^2\delta^2}{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l^2)\delta^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{\beta_i^2-\beta_k^2+(\beta_i^2-\beta_l^2)\delta^2}{\beta_k^2+\beta_l^2\delta^2}}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \quad (25)$$

aan welke vorm die van (24) geheel gelijk wordt, indien daarin $g=1$ gesteld en α_i^2, α_k^2, α_l^2 door β_i^2, β_k^2, β_l^2 vervangen worden.

Dit leert, dat de aantrekking der ellipsoïde $\Sigma\,\alpha_i^2 x_i^2=1$ op een punt in het verlengde der as a_i, op den afstand p_i van het middelpunt gelegen, gelijk is aan die welke de ellipsoïde $\Sigma\, \beta_i^2 x_i^2 = 1$ uitoefent op een punt aan het uiteinde der as $\frac{1}{\beta_i}$ gelegen. Noemt men de halve assen dezer ellipsoide b_i, b_k, b_l, zoo vindt men:

$$b_i^2 = \frac{a_i^2 a_k^2 a_l^2}{(p_i^2 + a_k^2 - a_i^2)(p_i^2 + a_l^2 - a_i^2)},\ b_k^2 = \frac{a_i^2 a_k^2 a_l^2}{p_i^2 (p_i^2 + a_l^2 - a_i^2)},\ b_l^2 = \frac{a_i^2 a_k^2 a_l^2}{p_i^2 (p_i^2 + a_k^2 - a_i^2)}.$$

Denken wij ons nu eene ellipsoïde, gelijkvormig met deze laatste, doch waarvan de met b_i overeenkomende halfas de lengte p_i heeft en noemt de beide andere halfassen p_k en p_l, zoo is:
$p_k^2 = p_i^2 + a_k^2 - a_i^2$ en $p_l^2 = p_i + a_l^2 - a_i^2$, waaruit volgt:
$p_k^2 - p_i^2 = a_k^2 - a_i^2$, $p_l^2 - p_i^2 = a_l^2 - a_i^2$.

Indien dus deze ellipsoïde zoodanig geplaatst wordt, dat haar middelpunt met dat der eerste samenvalt en hare assen gelijk gericht zijn met de overeenkomstige assen der eerste, zullen zij confocale hoofddoorsneden hebben.

Nu leert verder formule (24), wanneer men daarin $g = 1$ neemt, dat de aantrekking, uitgeoefend op een punt aan het uiteinde der as a_i geplaatst, evenredig is met a_i zoolang de grootheden $\frac{a_k^2}{a_i^2}$ en $\frac{a_l^2}{a_i^2}$ dezelfde blijven, zoodat de aantrekkingen, door twee gelijkvormige ellipsoïden uitgeoefend, op twee punten aan de uiteinden van gelijkstandige assen gelegen, evenredig zijn met die assen. Noemen wij dus F' de kracht, waarmede de spheroïde met halfassen p_i, p_k, p_l het aan het uiteinde harer as p_i gelegen punt P aantrekt, zoo staat, volgens het zoo even gezegde:

$$F : F' = b_i : p_i = \frac{a_i a_k a_l}{p_k p_l} : p_i = a_i a_k a_l : p_i p_k p_l = M : M',$$

indien wij door M_i en M de massae der beide ellipsoïden aanduiden.

Maar F is niet alleen de kracht, waarmede de ellipsoïde $\Sigma\, \beta_i^2 x_i^2 = 1$ het punt aan het einde harer as aantrekt, maar ook die, waarmede de ellipsoïde $\Sigma\, \alpha_i^2 x_i^2 = 1$ het punt P aantrekt, zoodat uit $F = \frac{M}{M'} F'$ mag besloten worden:

De kracht waarmede eene ellipsoïde een punt aantrekt, dat

in het verlengde harer (kortste) as ligt, verhoudt zich tot die, waarmede het zelfde punt wordt aangetrokken, door eene, met de eerste confocale, door het punt gaande ellipsoïde, als de massae, of de produkten der drie assen der beide ellipsoïde.

De stelling van MACLAURIN, zooals die op pag. 28 is vermeld, is dan een onmiddelijk gevolg hiervan. Zij wordt echter door LAGRANGE niet in dier voege uitgesproken, hetgeen trouwens MACLAURIN zelf ook niet heeft gedaan.

Uit het bovenstaande ziet men klaar, dat, met uitzondering van de bepaling der aantrekking op een punt, dat in het uitgebreide aequatorvlak der omwentelings-ellipsoïde ligt, LAGRANGE in deze beide geschriften, in analytischen vorm, alles heeft bewezen wat MACLAURIN gevonden had.

In de Mém. de l'Ac. de Berlin voor 1792—93 heeft LAGRANGE ten derden male over de aantrekking der ellipsoïde geschreven. Daar echter de inhoud van dit stuk betrekking heeft op hetgeen intusschen door LAPLACE en LEGENDRE was verricht, zal het beter zijn den historischen gang te volgen en eerst de uiterst gewichtige onderzoekingen der beide genoemde wiskundigen nategaan.

Het eerste dan wat de aandacht treft, is een geschrift van A. M. LEGENDRE, getiteld: »Récherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes", aan de Fransche Akademie aangeboden, en opgenomen in de Mémoires des savans étrangers T. X, 1785, waarin hij, na eene korte inleiding, zegt, dat zijne methode van onderzoek hem alleen veroorloofde, de aantrekking op een uitwendig punt te bepalen voor omwentelingsspheroïden, doch dat hij reden heeft te gelooven, dat voor willekeurige ellipsoïden mag gezegd worden:

De aantrekking eener ellipsoïde op een daarbuiten gelegen punt, is gelijk aan die eener andere van dezelfde massa, wier hoofddoorsneden dezelfde brandpunten hebben en wier oppervlak door het aangetrokken punt gaat.

Daarna vervolgt hij aldus:

Zij $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ de vergelijking der ellipsoïde (fig. 17) wier halfassen $OA_i = a_i$, $OA_k = a_k$, $OA_l = a_l$ zijn en in het verlengde van wier as OA_i het punt P op een afstand $OP = p_i$ gelegen is. Men denke zich door P een vlak loodrecht op het vlak der assen a_k en a_i, dat de ellipsoïde snijdt volgens eene ellips, waarvan LMl de helft is. Trekt men dan in dit vlak twee oneindig dicht bij elkander gelegen voerstralen PMm en $PM'm'$, en laat het vlak eene oneindig kleine draaiing om de as $PQ \,//\, OA_k$ volbrengen, zoo zal de figuur $MM'm'm$ eene afgeknotte piramide beschrijven, wier aantrekking op het punt P zal voorgesteld worden door:

$$\int_{r=PM}^{r=Pm} \frac{dr.\, rdq.\, r\cos q\, dp.}{r^2} = (Pm - PM)\cos q\, dp\, dq = Mm \cos q\, dp\, dq$$

indien men $\angle OPL = p$, $\angle LPM = q$ stelt.

Deze kracht werkt echter in de richting PM, zoodat hare componente in de richting PO wordt: $Mm \cos^2 q \cos p\, dp\, dq$. Hierin de waarde van Mm substitueerend, welke men licht ([18]) uit de vergelijking der ellipsoïde afleidt, heeft men voor de elementaire aantrekking:

$$\frac{2\, a_i a_k a_l \cos^2 q \cos p \sqrt{\left\{(a_i^2 - p_i^2) a_l^2 \sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q (a_i^2 \sin^2 p + a_l^2 \cos^2 p - p_i^2 \sin^2 p\right\}}}{a_i^2 a_l^2 \sin^2 q + a_i^2 a_k^2 \cos^2 q \sin^2 p + a_k^2 a_l^2 \cos^2 q \cos^2 p}\, dp\, dq$$

welke formule nu nog tweemaal naar p en q zou moeten geïntegreerd worden.

Zij kan echter niet naar q, maar wel naar p worden geïntegreerd. Wij stellen daartoe:

$$\frac{2\, a_i a_k a_l \cos^2 q\, dq}{a_l^2 (a_i^2 \sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q)} = M, \quad \frac{a_k^2 (a_i^2 - a_l^2) \cos^2 q}{a_l^2 (a_i^2 \sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q)} = \alpha,$$

$$\left\{(a_i^2 - p_i^2)\sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q\right\} a_l^2 = A^2,\ a_k^2 \cos^2 q (p_i^2 - a_i^2 + a_l^2) = B^2.$$

([18]) Noemt men toch den overstraal uit P naar eenig punt der ellipsoïde ρ en vervangt dan in hare vergelijking x_i, x_k en x_l door hare waarden in ρ, p en q, zoo wordt zij:

$$\frac{(\rho \cos p \cos q - p_i)^2}{a_i^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 q}{a_k^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 p \cos^2 q}{a_l^2} = 1$$

waaruit $PM + Pm = \dfrac{2\, p_i\, a_k^2\, a_l^2 \cos p \cos q}{a_i^2\, a_l^2 \sin^2 q + a_i^2\, a_k^2 \cos^2 q \sin^2 p + a_k^2 a_l^2 \cos^2 p \cos^2 q}$,

$$PM \times Pm = \frac{(p_i^2 - a_i^2)\, a_k^2\, a_l^2}{a_i^2 a_l^2 \sin^2 q + a_i^2 a_k^2 \cos^2 q \sin^2 p + a_k^2 a_l^2 \cos^2 q \cos^2 p},$$

dus $Mm = PM - Pm = \sqrt{(PM + Pm)^2 - 4\, PM.\, Pm.}$

Daar de uiterste waarden van p die zijn, waarvoor $Mm = 0$, dus $\sin^2 p = \frac{A^2}{B^2}$ wordt, zoo is de te bepalen integraal, waarin alleen de tweede macht van $\sin p$ voorkomt, blijkbaar:

$$2\int_o^{\arcsin \frac{A}{B}} \frac{M\cos p}{1+\alpha\sin^2 p}\sqrt{A^2 - B^2\sin^2 p}\, dp,$$

of, indien nog $\sin p = \frac{A}{B}\sin\zeta$ gesteld wordt:

$$2\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{MA^2}{B}\cdot\frac{\cos^2\zeta}{1+\frac{A^2\alpha}{B^2}\sin^2\zeta}\,d\zeta = MA^2 B\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\zeta}{B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta}d\zeta,$$

waarvoor men door de bekende methoden (19) vindt:

$$\pi\frac{MB}{\alpha}\left\{\sqrt{1+\frac{A^2\alpha}{B^2}}-1\right\}$$

---

(19) Omtrent bovenstaande substitutien zij opgemerkt, dat naar behooren A^2 en B^2 steeds positief zijn, omdat steeds $p_i > a_i$ en, zoolang PM de ellipsoïde snijdt, $(p_i^2 - a_i^2)\,tg^2 q < a_k^2$ of $a_k^2\cos^2 q + (a_i^2 - p_i^2)\sin^2 q > 0$ is, terwijl $\frac{A^2}{B^2} = \frac{a_l^2\{a_k^2 + (a_i^2 - p_i^2)\,tg^2 q\}}{a_k^2(p_i^2 - a_i^2 + a_l^2)} = 1 - \frac{(p_i^2 - a_i^2)(a_k^2 + a_l^2\,tg^2 q)}{a_k^2(p_i^2 - a_i^2 + a_l^2)} < 1$ is, omdat $p_i > a_i$ is.

Wat nu de integratie betreft, heeft men:

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\zeta}{B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta}\,d\zeta = \int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\zeta}{B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta}\,d\zeta =$$

$$=\int_o^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{A^2\alpha}+\frac{B^2+A^2\alpha}{A^2\alpha(B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta)}\right\}d\zeta = -\frac{\pi}{2A^2\alpha}+\frac{B^2+A^2\alpha}{A^2\alpha}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\zeta}{B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta}$$

en hierin stellend $tg\,\zeta = x$, zoodat de grenzen worden 0 en ∞, komt er:

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\zeta}{B^2+A^2\alpha\sin^2\zeta} = \int_o^{\infty}\frac{dx}{B^2+(B^2+A^2\alpha)x^2}.$$

Nu ziet men licht in dat steeds

$$B^2 + A^2\alpha = \frac{a_k^2 p_i^2\cos^2 q}{a_i^2\sin^2 q + a_k^2\cos^2 q}(a_k^2\cos^2 q + a_l^2\sin^2 q) > 0$$

of, na wederinvoering der waarden van M, A, B en α,

$$\frac{2\pi a_i a_l p_i}{a_i^2 - a_l^2}\left\{\sqrt{\frac{a_l^2 \sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q}{a_i^2 \sin^2 q + a_k^2 \cos^2 q}} - \sqrt{\frac{p_i^2 - a_i^2 + a_l^2}{p_i^2}}\right\}\cos q\, dq,$$

hetgeen nu nog naar q zou moeten geïntegreerd worden en wel tusschen grenzen, welke men vindt door de vorm voor Mm aan nul gelijk te stellen, na daarin $p = 0$ te hebben genomen. Daar die grenzen zijn

$$\sin q = \pm \frac{a_k}{\sqrt{p_i^2 - a_i^2 + a_k^2}}$$

stelle men:

$$\sin q = \frac{a_k \sin \vartheta}{\sqrt{p_i^2 - a_i^2 + a_k^2}}$$

zoodat de grenzen voor ϑ worden $\pm \frac{\pi}{2}$,

en de geheele aantrekking F wordt voorgesteld door:

$$F = \frac{2\pi a_i a_k a_l p_i}{(a_i^2 - a_l^2)\sqrt{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sqrt{\frac{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2 + (a_l^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2 + (a_i^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{p_i^2 + a_l^2 - a_i^2}{p_i^2}}\right\}\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

of, indien men $\frac{4\pi a_i a_k a_l}{3} = M$ (de massa der ellipsoïde) stelt en in aanmerking neemt, dat alle elementen voor negatieve waarden van ϑ, gelijk zijn aan die voor even groote positieve waarden, ten slotte:

$$F = \frac{3 M p_i}{(a_i^2 - a_l^2)\sqrt{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sqrt{\frac{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2 + (a_l^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}{p_i^2 + a_k^2 - a_i^2 + (a_i^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{p_i^2 + a_l^2 - a_i^2}{p_i^2}}\right\}\cos\vartheta\, d\vartheta.$$

---

zoodat

$$\int_o^\infty \frac{dx}{B^2 + (B^2 + A^2\alpha)x^2} = \frac{1}{B\sqrt{B^2 + A^2\alpha}} \int_o^\infty \frac{d\,\frac{\sqrt{B^2 + A^2\alpha}}{B}x}{1 + \frac{B^2 + A^2\alpha}{B^2}x^2} = \frac{\pi}{2B\sqrt{B^2 + A^2\alpha}}$$

dus $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\zeta}{B^2 + A^2\alpha \sin^2\zeta}\, d\zeta = -\frac{\pi}{2A^2\alpha} + \frac{\pi\sqrt{B^2 + A^2\alpha}}{2A^2 B\alpha}$, waaruit het in de tekst vermelde dadelijk volgt.

Deze integratie is nu wel is waar niet uitvoerbaar, tenzij ten minste twee der grootheden a_i, a_k, a_l gelijk zijn, zooals het geval is bij omwentelingsellipsoïden. Maar uit formule (26) volgt dadelijk, dat wanneer men de assen der ellipsoïde zoo laat veranderen, dat de brandpunten der hoofddoorsneden op hunne plaatsen blijven, de aantrekking verandert, in dezelfde verhouding als de massa M, daar de grootheden $\pm(a_i^2 - a_k^2)$ en $\pm(a_i^2 - a_l^2)$ onverandert blijven en dus in (26) alles hetzelfde blijft, behalve M.

Hierin nu bestaat juist de stelling van MACLAURIN, luidende:

Indien twee ellipsoïden confocale doorsneden hebben, zijn hare aantrekkingen op een punt, gelegen in het verlengde van eene harer assen, in rede als hare massae.

Om nu de absolute waarde der aantrekking te vinden, kan men aanvangen met in formule (26) $p_i = a_i$ te stellen, omdat het geval, waarin het punt op het oppervlak der ellipsoïde valt, tot de oplossing van alle anderen voert.

Men verkrijgt daardoor, deze aantrekking F' noemende,

$$F' = \frac{3\,Ma_i}{a_k(a_i^2 - a_l^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{\frac{a_k^2 + (a_l^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}{a_k^2 + (a_i^2 - a_k^2)\sin^2\vartheta}} - \frac{a_l}{a_i}\right\}\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

welke vorm echter een bezwaar oplevert, dat men behoort op te heffen, alvorens verder te gaan.

Daar namelijk a_i de halve as is, waarin het aangetrokken punt P ligt, moet het op de waarde der aantrekking geen invloed uitoefenen, of men in de formule daarvoor a_k en a_l permuteert. Dit blijkt echter uit bovenstaande vorm niet. Stelt men echter daarin $\sin\vartheta = x$, $\dfrac{a_i^2 - a_k^2}{a_i^2} = \beta_k$, $\dfrac{a_i^2 - a_l^2}{a_i^2} = \beta_l$, zoo wordt zij:

$$F = \frac{3\,M}{a_i^2\,\beta_l\sqrt{1-\beta_k}}\int_0^1\left\{\sqrt{\frac{(1-\beta_k) + (\beta_k - \beta_l)\,x^2}{(1-\beta_k) + \beta_k x^2}} - \sqrt{1-\beta_l}\right\}dx,$$

en indien dan nog de laatste term werkelijk geïntegreerd en $\dfrac{x^2}{1-\beta_k+\beta_k x^2} = z^2$ wordt gesteld:

$$F' = \frac{3\,M}{a^2\,\beta_l}\left\{\int_0^1 \frac{(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}}\,dz - \sqrt{\frac{1-\beta_l}{1-\beta_k}}\right\}.$$

Integreert men echter $\int \frac{(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}}$ partieel, zoo is:

$$\int \frac{(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}}dz = (1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}} - \int \left\{ \frac{-\beta_l z\,dz}{(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}} \int \frac{dz}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}} \right\} =$$

$$\frac{z(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta_k z^2)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{\beta_l z^2\,dz}{\sqrt{(1-\beta_k z^2)(1-\beta_l z^2)}},$$ en dus

$$\int_0^1 \frac{(1-\beta_l z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta_k z^2)^{3/2}}\,dz = \sqrt{\frac{1-\beta_l}{1-\beta_k}} + \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-\beta_k z^2)(1-\beta_l z^2)}}$$

zoodat de formule voor de aantrekking wordt:

$$F' = \frac{3M}{a_i^2} \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-\beta_k z^2)(1-\beta_l z^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

waarin nu blijkbaar β_k en β_l, dus ook a_k en a_l vrij kunnen verwisseld worden.

Volgens de stelling van MACLAURIN zal men nu uit (27) de aantrekking verkrijgen, welke de ellipsoïde, wier vergelijking is $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ uitoefent, op een punt dat in het verlengde harer as a_i ligt, op een afstand p_i van het middelpunt, door a_i te vervangen door p_i, doch zonder $a_i^2 - a_k^2$ en $a_i^2 - a_l^2$ te veranderen. Daardoor wordt dan $\beta_k = \frac{a_i^2 - a_k^2}{p_i^2}$ en $\beta_l = \frac{a_i^2 - a_l^2}{p_i^2}$ en de geheele aantrekking:

$$F' = \frac{3M}{p_i^2} \int_0^1 \frac{z^2\,dz.}{\sqrt{\left\{1 - \frac{a_i^2 - a_k^2}{p_i^2} z^2\right\}\left\{1 - \frac{a_i^2 - a_l^2}{p_i} z^2\right\}}} \quad (28)$$

In deze zeer eenvoudige vorm is deze integratie, zoolang de drie assen ongelijk zijn, alleen uitvoerbaar, door de functie in eene oneindige reeks te ontwikkelen. Men verkrijgt alsdan, indien weder β_k en β_l ingevoerd worden:

$$F = \frac{3M}{p_i^2} \int_0^1 z^2dz \left(1 + \frac{1}{2}\beta_k z^2 + \frac{1.3}{2.4}\beta_k^2 z^4 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\beta_l z^2 + \frac{1.3}{2.4}\beta_l^2 z^4 + \ldots\right)$$

en daar een willekeurige term van de differentiaal den vorm aanneemt:

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\beta_k^m \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\beta_l^n z^{2m+2n+2},$$

zal de integraal tusschen 0 en 1 van dien term zijn:

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\beta_k^m \beta_l^n}{2m+2n+3},$$

zoodat

$$F = \frac{3M}{p_i}\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\beta_k^n + \beta_l^n}{2n+3} + \right.$$

$$\left.\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6..2m} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6..2n} \cdot \frac{\beta_k^m \beta_l^n + \beta_k^n \beta_l^m}{2m+2n+3}\right\} \quad . \quad . \quad (29)$$

Wanneer echter de ellipsoïde een omwentelingslichaam is, dan wordt de formule (28) in eindigen vorm integreerbaar.

Neemt men bijv. $a_l = a_i = a$, als wanneer het punt P in het aequatorvlak ligt, zoo vindt men:

$$F = \frac{3M}{p_i^2}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - a_k^2}{p_i^2} z^2\right)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Is hierin $a > a_k$, dus de spheroïde afgeplat, zoo vindt men door

$$z\sqrt{\frac{a^2 - a_k^2}{p_i^2}} = \sin\vartheta \text{ en } \sqrt{\frac{a^2 - a_k^2}{p_i^2}} = \sin\vartheta_1$$

te stellen:

$$F = \frac{3Mp_i}{(a^2 - a_k^2)^{3/2}}\int_0^{\vartheta_1}\sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{3Mp_i}{4(a^2 - a_k^2)^{3/2}}\left(2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_1\right) =$$

$$\frac{3M}{2p_i^2} \cdot \frac{\vartheta_1 - \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{\sin^3\vartheta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30^a)$$

Is daarentegen de spheroïde gerekt en dus $a < a_k$, zoo stelle men

$$z\sqrt{\frac{a_k^2 - a_2}{p_i^2}} = tg\vartheta \text{ en } \sqrt{\frac{a_k^2 - a^2}{p_i^2}} = tg\vartheta_1,$$

waardoor men vindt:

$$F = \frac{3Mp_i}{(a_k^2 - a^2)^{3/2}}\int_0^{\vartheta_1}\frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{\cos^3\vartheta} = \frac{3Mp_i}{4(a_k^2 - a^2)^{3/2}}\left(\frac{2\sin\vartheta_1}{\cos^2\vartheta_1} + \log\frac{1 - \sin\vartheta_1}{1 + \sin\vartheta_1}\right) =$$

$$= \frac{3M}{2p_i^2} \cdot \frac{\cos^3\vartheta_1 \log tg\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\vartheta_1) + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{\sin^3\vartheta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30^b)$$

Neemt men daarentegen $a_k = a_l = a$ zoodat P in het verlengde der as a_i ligt, zoo is

$$F = \frac{3\,M}{p_i^2}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{1 - \frac{a_i^2 - a^2}{p_i^2}z^2} \qquad \qquad (31)$$

Is hier $a_i < a$, dus de ellipsoïde afgeplat, zoo vindt men dadelijk

$$F = \frac{3Mp_i}{(a^2 - a_i^2)^{3/2}}\int_0^{\vartheta_1} tg^2\,\vartheta\,d\vartheta = \frac{3\,M}{p_i^2}\cdot\frac{tg\,\vartheta_1 - \vartheta_1}{tg^3\vartheta_1} \qquad (31^a)$$

waarin $z\sqrt{\frac{a^2 - a_i^2}{p_i^2}} = tg\,\vartheta$ en $\sqrt{\frac{a^2 - a_i^2}{p_i^2}} = tg\,\vartheta_1$ is.

Is daarentegen $a_i > a$, dus de spheroïde gerekt, zoo vindt men:

$$F = \frac{3\,M}{p_i^2\beta^3}\left\{ -\beta + \log\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right\} \qquad (31^b)$$

waarin $\beta = \frac{\sqrt{a_i^2 - a^2}}{p_i}$.

Vervangt men in (30^a), (30^b), (31^a) en (31^b) de grootheden ϑ_1 en β door hare waarden, voert de excentriciteit e van de hoofddoorsnede de spheroïde in en schrijft in (30^b) a_i voor a_k, opdat overal de as der spheroïde a_i heete, zoo verkrijgen zij de vorm:

$$F = \frac{3\,p_i\,M}{2\,a^3\,e^3}\left\{ \arcsin\frac{ae}{p_i} - \frac{ae\sqrt{p_i^2 - a^2e^2}}{p_i^2}\right\} \qquad (30^a)$$

$$F = \frac{3\,p_i\,M}{2\,a_i^3\,e^3}\left\{ \frac{a_i e\sqrt{p_i^2 + a_i^2e^2}}{p_i^2} + \log\frac{\sqrt{p_i^2 + a_i^2e^2} - a_i e}{p_i}\right\} \qquad (30^b).$$

$$F = \frac{3\,p_i\,M}{a^3\,e^3}\left\{ \frac{ae}{p_i} - \arctan\frac{ae}{p_i}\right\} \qquad (31^a)$$

$$F = \frac{3\,p_i\,M}{a_i^3\,e^3}\left\{ -\frac{a_i e}{p_i} + \log\sqrt{\frac{p_i + a_i e}{p_i - a_i e}}\right\} \qquad (31_b)$$

waarvan de beide laatsten overeenkomen met die, welke op pag. 51 gevonden zijn, behalve het teeken, waarvan de oorzaak is, dat hier de krachten in tegengestelde richting van de assen zijn aangenomen.

Ook ziet men licht in, dat deze formules geheel in overeenstemming zijn met hetgeen door Maclaurin voor de maat der aantrekking wordt gegeven, en hetwelk overal het $\frac{1}{2\pi}^{\text{de}}$ gedeelte van F bedraagt. (Zie pag. 39 en 42).

Na deze ontwikkelingen, welke, zooals men ziet, een zeer fraai bewijs van de stelling van MACLAURIN bevatten, en op veel gemakkelijker wijze de formules leveren dan zulks bij LAGRANGE het geval was, gaat LEGENDRE in dier voege over tot het eigenlijk doel zijner verhandeling, te weten de bepaling van de aantrekking van omwentelingslichamen, onverschillig wat de vorm der meridiaan zij, mits deze door den aequator in twee congruente deelen wordt verdeeld.

Zij BA (fig. 18) het een vierde deel der meridiaan, in wier vlak het aangetrokken punt P ligt, BC de as der spheroïde. AC de straal des aequators. Laat men dan uit eenig punt M der spheroïde, eene loodlijn MQ op het vlak ABC neder, brengt door deze de vlakken MQR en MQO, loodrecht op CB en CP, en stelt $CP = R$, $CM = \rho$, $\angle BCP = \omega$, $\angle BCM = \varphi$, $\angle MRQ = \vartheta$, $\angle MCP = \mu$, $PM = r$, zoo is:

$$r^2 = R^2 - 2R\rho \cos \mu + \rho^2,$$

$$\cos \mu = \cos \omega \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi \cos \vartheta.$$

De componenten van de aantrekking, door het massaelement in M op P uitgeoefend, volgens de richtingen PC en $PV \parallel QO \perp PC$, zullen dan zijn

$$dP = \frac{PO}{PM^3} dM = \frac{R - \rho \cos \mu}{(R^2 - 2R\rho\cos\mu + \rho^2)^{3/2}} dM,$$

$$dQ = \frac{QO}{PM^3} dM = \frac{\rho(\cos\varphi \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi \cos\vartheta)}{(R^2 - 2R\rho\cos\mu + \rho^2)^{3/2}} dM,$$

terwijl de derde component MQ, steeds wordt opgeheven door eene, die even groot, maar tegengesteld van richting is.

Voor de integratie dezer formules is dan het meest geschikt, voor dM aan te nemen de vorm: $dM = \rho^2\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta \sin\varphi$, en vervolgens te integreren naar ρ, van het middelpunt aan beide zijden tot aan het oppervlak, daarna naar ϑ en φ van 0 tot π, waarbij dan blijken zal, dat de beide integratiën naar ρ en ϑ kunnen verricht worden, zonder de vorm der meridiaan nader te bepalen.

Men ontwikkele nu vooreerst de grootheid

$$\frac{(R-\rho\cos\mu)\,\rho^2\,d\rho}{(R^2-2R\rho\cos\mu+\rho^2)^{3/2}}=\frac{\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\mu\right)\frac{\rho^2}{R^2}\,d\rho}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\mu+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}}=P'$$

in eene reeks, naar de opklimmende machten van $\frac{\rho}{R}$; zoo verkrijgt men, met weglating van de termen met oneven machten (welke toch reeds bij de integratie naar ρ zouden wegvallen, omdat daarbij steeds twee even groote termen met tegengestelde teekens voorkomen, tengevolge der symmetrie van de meridiaan):

$$P'=\frac{\rho^2}{R^2}\,d\rho\left\{1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\,A_n\,\frac{\rho^{2n}}{R^{2n}}\right\},$$

waarin nu

$$A_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+3)\ldots(4n+2k-1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;n}\times\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,k}\cos^{2(n-k)}\mu$$

is. [20]

---

[20] Bij Legendre vindt men slechts de eerste waarden van A_n opgegeven en het bewijs ontbreekt, dat deze vorm algemeen is. Men kan dit aldus aantoonen.

Zij $\frac{\rho}{R}=s$, zoo is de vorm tusschen accolades de ontwikkeling van $f(s)=$ $(1-s\cos\mu)(1-2s\cos\mu+s^2)^{-3/2}$, zijnde $f(s)=f(o)+\frac{f'(o)}{1}s+\frac{f''(o)}{1.2}s^2+$ enz., terwijl blijkbaar $f(o)=1$ is, zoodat

$$A_n=\frac{f^{2n}(o)}{1.2.3\ldots2n}:(2n+1)=\frac{f^{2n}(o)}{1.2.3\ldots(2n+1)}\text{ is.}$$

Stellen wij nu nog: $1-s\cos\mu=u$ en $(1-2s\cos\mu+s^2)^{-3/2}=v$, zoo is $f(s)=uv$, dus $f^{2n}(s)=u\frac{d^{2n}v}{ds^{2n}}+\frac{2n}{1}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{d^{2n-1}v}{ds^{2n-1}}+\ldots$

Maar $\frac{du}{ds}=-\cos\mu$, $\frac{d^2u}{ds^2}=0$ dus is $f^{2n}(s)=(1-s\cos\mu)\frac{d^{2n}v}{ds^{2n}}-2n\cos\mu\frac{d^{2n-1}v}{ds^{2n-1}}$.

Volgens eene bekende formule (zie bijv. Schlömilch. Uebungsbuch z. höh. Anal. 1. pag. 34) is nu echter

$$\frac{d^{2n}v}{ds^{2n}}=\frac{-{}^3/_2\,.\,-{}^5/_2\,.\,-{}^7/_2\ldots\ldots-\frac{4n+1}{2}}{(1-2s\cos\mu+s^2)^{2n+{}^3/_2}}\,.\,2^{2n}(s-\cos\mu)^{2n}(1+\beta_1^{2n}q+\beta_2^{2n}q^2\ldots+\beta_n^{2n}q^n)$$

$$\frac{d^{2n-1}v}{ds^{2n-1}}=\frac{-{}^3/_2\,.\,-{}^5/_2\ldots\ldots-\frac{4n-1}{2}}{(1-2s\cos\mu+s^2)^{2n+{}^1/_2}}2^{2n-1}(s-\cos\mu)^{2n-1}(1+\beta_1^{2n-1}q+\beta_2^{2n-1}q^2\ldots+\beta_{n-1}^{2n-1}q^{n-1})$$

waarin $q=\frac{1-2s\cos\mu+s^2}{4(s-\cos\mu)^2}$, $\beta_k^m=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2k+1)\times(-2)^k}{1.2\ldots k(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2k+3)}$.

De integraal van deze reeks naar ρ en wel van $\rho = -CN$ tot $\rho = +CN$ zal nu zijn:

$$\frac{2\rho^3}{R^2}\left\{ {}^1/_3 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2n+3} A_n \frac{\rho^{2n}}{R^{2n}} \right\}.$$

Daardoor wordt dan:

$$f^{2n}(s) = \frac{-{}^3/_2 . -{}^5/_2 . -{}^7/_2 \ldots - \frac{4n+1}{2}}{(1-2s\cos\mu+s^2)^{2n+{}^3/_2}} 2^{2n}(1-s\cos\mu)(s-\cos\mu)^{2n}(1+\beta_1^{\;2n} q + \ldots \beta_n^{\;2n} q^n)$$

$$-\frac{-{}^3/_2 . -{}^5/_2 . -{}^7/_2 \ldots - \frac{4n-1}{2}}{(1-2s\cos\mu+s^2)^{2n+{}^1/_2}} 2^{2n-1}\, 2n\cos\mu\,(s-\cos\mu)^{2n-1}(1+\beta_1^{2n-1} q + \ldots + \beta_{n-1}^{2n-1} q^{n-1})$$

dus

$$f^{2n}(o) = 3.5.7\ldots(4n+1)\cos^{2n}\mu \left\{ 1 + \beta_1^{\;2n}\frac{1}{4\cos^2\mu} + \beta_2^{\;2n}\left(\frac{1}{4\cos^2\mu}\right)^2 + \ldots \beta_n^{\;2n}\left(\frac{1}{4\cos^2\mu}\right)^n \right\}$$

$$-3.5.7\ldots(4n-1).2n\cos^{2n}\mu \left\{ 1 + \beta_1^{2n-1}\frac{1}{4\cos^2\mu} + \beta_2^{\;2n-1}\left(\frac{1}{4\cos^2\mu}\right)^2 + \ldots \beta_{n-1}^{2n-1}\left(\frac{1}{4\cos^2\mu}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 3.5.7\ldots(4n-1)\left\{ (2n+1)\cos^{2n}\mu + \sum_{k=1}^{k=n}\left[(4n+1)\beta_k^{2n} - 2n\,\beta_k^{2n-1} \right]\frac{\cos^{2(n-k)}\mu}{2^{2k}} \right\}.$$

De laatste term, overeenkomend met $k = n$, bestaat wel is waar niet uit de som van twee termen, maar kan toch onder het teeken Σ worden opgenomen omdat $B_n^{\;2n-1}$ van zelf 0 wordt. Nu is echter:

$$(4n+1)\beta_k^{\;2n} - 2n\,\beta_k^{\;2n-1} =$$

$$= (-2)^k \left\{ \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2k+1)}{1.2\ldots k \times (4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+3)} - \frac{2n(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k)}{1.2\ldots k \times (4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+1)} \right\}$$

$$= (-2)^k . \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2k+1)}{1.2\ldots k \times (4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+3)} . \frac{2n+1}{4n-2k+1},$$

dus

$$f^{2n}(o) = 3.5.7\ldots(4n-1).(2n+1) \times$$

$$\times \left\{ \cos^{2n}\mu + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-2k+1)}{1.2\ldots k \times (4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+1)} . \frac{\cos^{2(n-k)}\mu}{(-2)^k} \right\}.$$

Maar voor $k = 0$ wordt $\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2k+1)}{1.2\ldots k(4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+1)} = 1$, als zijnde de teller een produkt van $2k$ dus 0 factoren en de noemer een produkt van twee k tallen factoren. Voor $k = 0$ verschijnt dus de 1° term, zoodat ook

$$f^{2n}(o) = 3.5.7\ldots(4n-1)(2n+1)\sum_{k=o}^{k=n}(-1)^k \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-2k+1)}{2^k.1.2\ldots k(4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+1)}\cos^{2(n-k)}\mu$$

dus $A_n = \frac{f^{2n}(o)}{1.2\ldots(2n+1)} =$

$$= \frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{1.2.3\ldots 2n}\sum_{k=o}^{k=n}(-1)^k \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2k+1)}{2^k.1.2\ldots k(4n-1)(4n-3)\ldots(4n-2k+1)}\cos^{2(n-k)}\mu =$$

$$= \sum_{k=o}^{k=n}(-1)^k \frac{1.3.5\ldots\ldots(4n-2k-1)}{2^k.1.2.3\ldots(2n-2k).1.2\ldots k}\cos^{2(n-k)}\mu.$$

Vervolgens moet nu de grootheid

$$\frac{2\rho^3}{R^2}\left\{{}^1/_3+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,A_n\,\frac{\rho^{2n}}{R^{2n}}\right\}\sin\varphi\,d\varphi\,d\vartheta$$

naar ϑ geïntegreerd worden. Daar echter ρ enkel van φ afhangt, op eene wijze, welke door de vorm der meridiaan bepaald wordt, behoeft men slechts de integralen $\int_0^\pi d\vartheta=\pi$ en $\int_0^\pi A^n\,d\vartheta$ te bepalen. Men substituere daartoe in A_n voor $\cos\mu$, hare waarde $\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos\vartheta$, stelle $\cos\omega\cos\varphi=a$, $\sin\omega\sin\varphi=b$,

$$\sum_{x=0}^{x=m}\frac{2\,m\,(2\,m-1)\ldots(2\,m-2\,x+1)}{2^2.\quad 4^2\quad\ldots\ldots\quad(2\,x)^2}\,a^{2(n-x)}\,b^{2x}=P_m\,.\quad.\quad.\quad(32)$$

$$\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{r-m}\frac{(2\,m+1)(2\,m+3)\ldots(2\,m+2\,n-1)}{1.\,2\ldots m.\,1.\,2\ldots\ldots(n-m)}\,P_m=A'_n,\;(33)$$

zoo is $\int_0^\pi A_n\,d\vartheta=\pi\,A'_n$,

zoodat de gezochte integraal is:

$$\frac{2\,\pi\,\rho^3}{R^2}\left\{{}^1/_3+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,A'_n\,.\,\frac{\rho^{2n}}{R^{2n}}\right\}\sin\varphi\,d\varphi.\;(^{21})$$

---

of daar

$$\frac{1.3.5\ldots.(4n-2k-1)}{2^k.1.2\ldots(2n-2k).1.2\ldots k}=\frac{1.3.5\ldots(2n-2k-1)(2n-2k+1)\ldots.(4n-2k-1)}{2^k.1.3.5\ldots(2n-2k-1).2.4.6\ldots(2n-2k).1.2\ldots k}\times$$

$$\times\frac{(2n-2k+2)(2n-2k+4)\ldots 2n}{(2n-2k+2)(2n-2k+4)\ldots 2n}=\frac{(2\,n-2\,k+1)\,(2\,n-2\,k+3)\ldots(4\,n-2k-1)}{2.\,4.\,6\ldots\ldots.2\,n}\times$$

$$\times\frac{n\,(n-1)\ldots.\,(n-k+1)}{1.\,2\ldots.k}:\frac{2k}{2k}$$

is,

$$A_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+3)\ldots(4n-2k-1)}{1.\qquad 2\ldots\ldots\ldots.n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots.k}\cos^{2(n-k)}\mu,$$

zijnde de algemeene uitdrukking van de vorm waarin LEGENDRE A_1, A_2, A_3 en A_4 (bij hem A, B, C en D) opgeeft.

(21) Aldus vindt men de integratie bij LEGENDRE, met dat verschil dat niet de algemeene vormen van P_m en A'_n, maar slechts de eerste waarden, voor m of $n=1, 2, 3$ enz. opgegeven worden. Daar echter de wezenlijke uitvoering hiervan wel eenige toelichting behoeft, moge hier het volgende bijgevoegd worden. Volgens het bovenstaande is:

$$\int_0^\pi A_n\,d\vartheta=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n}\left\{(-1)^k\frac{(2\,n-2\,k+1)\,(2\,n-2\,k+3)\ldots(4\,n-2k-1)}{1.\qquad 2.\;.\;.\;.\;.\;n}\cdot\frac{n(n-1).(n-k+1)}{1.2\ldots.k}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\pi(a+b\cos\vartheta)^{2(n-k)}\,d\vartheta\right\}.$$

Ten einde nu de laatste integratie te vereenvoudigen, neme men in aanmerking, dat de grootheden A'_n op de volgende wijze kunnen ontbonden worden, in factoren, die alleen functien van ω of φ zijn, t. w:

$$A'_n = \frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\cos^{2m}\omega \times$$

$$\times \frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\cos^{2m}\varphi, \quad (34)$$

welke stelling later zal bewezen worden.

Stellen wij nu nog de beide factoren van A'_n door Ω_n en Φ_n voor en verder, $4\pi\int_o^{\frac{\pi}{2}}\rho^3 d\varphi\sin\varphi = 3M$,

---

Nu is $\int_o^{\pi}\cos^{2p+1}\vartheta d\vartheta = 0,$

$$\int_o^{\pi}\cos^{2p}\vartheta d\vartheta = \int_o^{\pi}\cos^{2p-2}\vartheta d\vartheta - \int_o^{\pi}\cos^{2p-2}\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta = \int_o^{\pi}\cos^{2p-2}\vartheta d\vartheta +$$

$$\left\{\frac{\sin\vartheta\cos^{2p-1}\vartheta}{2p-1}\right\}_{\vartheta=\pi} - \left\{\frac{\sin\vartheta\cos^{2p-1}\vartheta}{2p-1}\right\}_{\vartheta=0} - \frac{1}{2p-1}\int_o^{\pi}\cos^{2p}\vartheta d\vartheta,$$

dus $\int_o^{\pi}\cos^{2p}\vartheta d\vartheta = \frac{2p-1}{2p}\int_o^{\pi}\cos^{2p-2}\vartheta d\vartheta = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi,$

derhalve

$$\int_o^{\pi}A_n d\vartheta = \frac{\pi}{2^n}\sum_{k=o}^{k=n}\left\{(-1)^k\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+3)\ldots(4n-2k-1)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.\ 2\ldots\ldots k}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{x=o}^{x=n-k}\left[\frac{2(n-k)(2n-2k-1)\ldots(2n-2k-2x+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots .2x.}\times\frac{(2x-1)(2x-2)\ldots\ldots 1}{2x.\ (2x-2)\ldots\ldots 2}a^{2n-2k-2x}b^{2x}\right]\right\}$$

of, indien $n-k=m$ gesteld en tevens eenige licht blijkbare vereenvoudigingen aangebracht worden:

$$\int_o^{\pi}A_n d\vartheta = \frac{\pi}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}\left\{(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-m)}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{x=o}^{x=m}\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-2x+1)}{2^2.\ 4^2\ldots\ldots(2x)^2}a^{2(m-x)}b^{2x}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots m.\ 1.\ 2.\ 3\ldots(n-m)}P_m = \pi A'_n,$$

$$4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{2n+3}\, d\varphi \sin\varphi . \Phi_n = 3\, M \alpha_n,$$

zoo zal de aantrekking in P, naar het middelpunt der spheroïde, de volgende eenvoudige vorm verkrijgen:

$$P = \frac{3M}{R^2} \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\,n+1}{2\,n+3} \frac{\Omega_n \alpha_n}{R^{2n}} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

waarin nu α_n alleen van de vorm der meridiaan afhangt.

Op dezelfde wijze zou men nu de kracht Q kunnen vinden, maar men bereikt dit doel eenvoudiger op de volgende wijze ([22]) Zij V de som van de deeltjes des lichaams gedeeld door hunne afstanden van het aangetrokken punt:

$$V = \int \frac{d\,M}{(R^2 - 2\,R\,\rho \cos\mu + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

zoo is:

$$-\frac{\delta V}{\delta R} = \int \frac{(R - \rho \cos\mu)\, d\,M}{(R^2 - 2\,R\,\rho \cos\mu + \rho^2)^{3/2}} = P,$$

en daar

$$\frac{d \cos\mu}{d\,\omega} = -\sin\omega \cos\varphi + \cos\omega \sin\varphi \cos\vartheta$$

is,

$$-\frac{1}{R} \cdot \frac{\delta V}{\delta\omega} = \int \frac{\rho\,(\sin\omega \cos\varphi - \cos\omega \sin\varphi \cos\vartheta)}{(R^2 - 2\,R\,\rho \cos\mu + \rho^2)^{3/2}}\, d\,M = Q.$$

Door dus $-\frac{\delta V}{\delta R}$ gelijktestellen aan de voor P gevonden waarde, vindt men:

$$V = \frac{3\,M}{R} \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2\,n+3} \cdot \frac{\Omega_n \alpha_n}{R^{2n}} \right\}$$

dus

$$Q = -\frac{3\,M}{R^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha_n}{(2\,n+3)\,R^{2n}} \frac{\delta\,\Omega_n}{\delta\,\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

terwijl

$$\frac{\delta\Omega_n}{\delta\omega} = \frac{\sin 2\omega}{2^n} \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^{n-m+1} \frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots(n-m)} \cos^{2m-2}\omega.$$

([22]) Hierbij verklaart Legendre dat de hier gebruikte eigenschappen der grootheid V (later potentiaal genaamd) hem door Laplace zijn medegedeeld.

Neemt men in Ω_n voor ω de waarde 0 aan, zoo wordt

$$\Omega_n = 1\ ^{(23)},\ Q = 0 \text{ en } P = \frac{3\,M}{R^2}\left\{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\,n+1}{2\,n+3} \cdot \frac{\alpha_n}{R^{2n}}\right\}.$$

Maar voor $\omega = 0$ ligt het aangetrokken punt in de as der spheroïde, en daar de grootheden α_n en M onveranderd blijven, volgt hieruit de stelling:

Men kan de aantrekking, uitgeoefend op eenig punt door een, ten opzichte van zijn aequator, symmetrisch omwentelingslichaam vinden uit die, welke wordt uitgeoefend op een punt, dat in de as, even ver van het middelpunt gelegen is.

Wil men liever de aantrekking op eenig punt ontbinden in twee krachten X_i en X, evenwijdig aan de as en aan den aequator der spheroïde, zoo zal men de waarden voor P en Q moeten substitueren in de formulen

$$X_i = P \cos\omega - Q \sin\omega \text{ en } X = P \sin\omega + Q \cos\omega,$$

waardoor men vinden zal, na een gemakkelijke herleiding:

$$\left.\begin{aligned}
X_i = \frac{3\,M\cos\omega}{R^2}\Bigg\{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\Bigg[&\frac{2\,n+1}{2^n\,(2\,n+3)}\cdot\frac{\alpha_n}{R^{2n}} \times \\
&\times \sum_{m=o}^{m=n} (-1)^{n-m}\,\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\cos^{2m}\omega\Bigg]\Bigg\} \\
X = \frac{3\,M\sin\omega}{R^2}\Bigg\{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\Bigg[&\frac{1}{2^n\,(2\,n+3)}\cdot\frac{\alpha_n}{R^{2n}} \times \\
&\times \sum_{m=o}^{m=n} (-1)^{n-m}\,\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\cos^{2m}\omega\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Gebruik makende van de formulen (31^a) en (31^b) kan men nu, door middel van het hier gevondene, de aantrekking bepalen, welke eene omwentelingsellipsoïde op een willekeurig, buiten haar gelegen punt uitoefent. Indien men toch de grootheid uit (31^a), $\frac{ae}{p_i} - \arctan\frac{ae}{p_i}$, als functie van $\frac{ae}{p_i}$, volgens het theorema van MACLAURIN ontwikkelt, vindt men:

---

(23) Hierop berust de geheele volgende redenering. LEGENDRE zegt dat men het langs verschillende wegen kan aantoonen, maar doet zulks niet. Het is mij niet gelukt, een algemeen bewijs te vinden. Voor $n = 1, 2, 3$ enz. kan men de waarheid natuurlijk gemakkelijk inzien.

$$F = \frac{3M}{p_i^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{ae}{p_i}\right)^{2n-2}$$

of indien men p_i door R vervangt, den eersten term buiten het teeken Σ brengt en n door $n+1$ vervangt,

$$F = \frac{3M}{R^2} \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3} \left(\frac{ae}{R}\right)^{2n} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

zoodat $\alpha_n = (-1)^n \frac{(ae)^{2n}}{2n+1}$ is.

Hieruit vindt men dus voor de componenten X_i en X, evenwijdig met de as en het aequatorvlak, van de aantrekking, door eene afgeplatte omwentelingsellipsoïde op een willekeurig buiten haar gelegen punt uitgeoefend:

$$\left.\begin{aligned} X_i = & \frac{3M\cos\omega}{R^2} \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{2^n(2n+3)} \left(\frac{ae}{R}\right)^{2n} \times \right.\right. \\ & \left.\left. \times \sum_{m=o}^{m=n} (-1)^{n-m} \frac{(2m+3)(2m+5...)(2m+2n+1)}{1..2...m.1.2...(n-m)} \cos^{2m}\omega \right] \right\}, \\ = & \frac{3M\sin\omega}{R^2} \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{2^n(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{ae}{R}\right)^{2n} \times \right.\right. \\ & \left.\left. \times \sum_{m=o}^{m=n} (-1)^{n-m} \frac{(2m+1)(2m+3)...(2m+2n+1)}{1.2...m.1.2...(n-m)} \cos^{2m}\omega \right] \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Behandelt men de formule 31*b* op dezelfde wijze, zoo vindt men voor de ontwikkeling van F hetzelfde als in (39), met weglating alleen van den factor $(-1)^n$, zoodat, voor het geval der gerekte spheroïde de formulen (40) onveranderd blijven, met uitzondering van de weglating van $(-1)^n$ onder het eerste sommatieteeken.

Daar nu de formulen (40) van de ellipsoïde alleen de massa en de excentriciteit der beschrijvende ellips bevatten, volgt daaruit de volgende uitbreiding van de stelling van Maclaurin:

Wanneer een zelfde punt wordt aangetrokken door twee omwentelingsellipsoïden, wier beschrijvende ellipsen confocaal zijn, zijn de aantrekkingen gelijk gericht en evenredig met de massae der ellipsoïden.

Van deze stelling en die, welke Maclaurin in § 634 heeft bewezen, maakt LEGENDRE nu gebruik, om de formulen (40) door anderen, van eindigen vorm, te vervangen.

Indien immers de meridiaan AB van fig. (19) eene ellips is, kan deze nu worden veranderd, in eene, welke door P gaat en met de eerste confocaal is. De componenten der aantrekking in P, evenwijdig aan BC en AC zijn dan (MACL. § 634) gelijk aan die in de uiteinden der overeenkomstige assen der nieuwe ellips, resp. vermenigvuldigd met het quotient van de coördinaat van P en de as der nieuwe ellips.

Is dus weder a_i de as, a de aequatorstraal der gegeven ellipsoïde, en noemen wij A_i en A dezelfde grootheden, voor die, welke door P gaat, zoo is, omdat de coördinaten van P zijn, $R \cos \omega$ en $R \sin \omega$,

$$\left.\begin{aligned} A_i^2 &= \frac{R^2 \mp c^2 + \sqrt{R^4 \pm 2\, R^2 c^2 \cos 2\omega + c^2}}{2} \\ A^2 &= \frac{R^2 \pm c^2 + \sqrt{R^4 \pm 2\, R^2 c^2 \cos 2\omega + c^2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

waarin c de lineaire excentriciteit der meridiaan, dus bij de afgeplatte spheroïde de grootheid ae, bij de gerekte $a_i e$ voorstelt, waaruit tevens volgt, dat de bovenste teekens bij het eerste, de onderste bij het tweede geval behooren.

Noemt men nu k_i en k de aantrekkingen, door de nieuwe spheroïde in hare pool en in een punt van den omtrek des aequators uitgeoefend, zoo is:

$$X_i = k_i \frac{R \cos \omega}{A_i}, \qquad X = k\, \frac{R \sin \omega}{A}$$

terwijl volgens de formulen (31^a) en (30^a) bij de afgeplatte spheroïde:

$$k_i = \frac{3\, A_i M}{c^3}\left(\frac{c}{A_i} - \operatorname{arctan} \frac{c}{A_i}\right), k = \frac{3AM}{2c^3}\left(\operatorname{arcsin} \frac{c}{A} - \frac{cA_i}{A^2}\right)$$

is, zoodat hier

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{3\, MR \cos \omega}{c^3}\left(\frac{c}{A_i} - \operatorname{arctan} \frac{c}{A_i}\right) \\ X &= \frac{3\, MR \sin \omega}{2c^3}\left(\operatorname{arcsin} \frac{c}{A} - \frac{cA_i}{A^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

is. Op dezelfde wijze vindt men voor de gerekte spheroïde, uit (31_b) en ($30b$):

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{3\,MR\cos\omega}{c^3}\left(-\frac{c}{A_i}+\log\frac{A_i+c}{A}\right) \\ X &= \frac{3\,MR\sin\omega}{2c^3}\left(\frac{cA_i}{A^2}-\log\frac{A_i+c}{A}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42^a)$$

Wil men eindelijk deze formulen in dezelfde vormen brengen als de formulen (16) en (16^a), zoo ziet men licht in dat

$$R^2 = \Sigma p_i^2,\ R\cos\omega = p_i,\ R\sin\omega = \sqrt{p_k^2+p_l^2},$$

$$F_i = X_i,\ \frac{F_k}{p_k} = \frac{F_l}{p_l} = \frac{X}{\sqrt{p_k^2+p_l^2}}$$

is, zoodat men heeft:

voor de afgeplatte spheroïde:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \frac{3p_i M}{a^3 e^3}\left(\frac{ae}{A_i}-\operatorname{arctan}\frac{ae}{A_i}\right) \\ \frac{F_k}{p_k} &= \frac{F_l}{p_l} = \frac{3\,M}{2a^3e^3}\left(\operatorname{arctan}\frac{ae}{A_i}-\frac{ae\,A_i}{A^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

voor de gerekte spheroïde:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \frac{3p_i M}{a_i^3 e^3}\left(\log\frac{A_i+a_ie}{A}-\frac{a_ie}{A_i}\right) \\ \frac{F_k}{p_k} &= \frac{F_l}{p_l} = \frac{3\,M}{2\,a_i^3e^3}\left(\frac{a_ie\,A_i}{A^2}-\log\frac{A_i+a_ie}{A}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43^a)$$

Ter volmaking van het hier behandelde, blijft nu nog alleen over, het bewijs van de door formule (34) voorgestelde eigenschap.

Om hiertoe te geraken, stelle men:

$$\cos^2\omega = \frac{\omega^2}{1+\omega^2},\ \sin^2\omega = \frac{1}{1+\omega^2},\ \cos^2\varphi = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2},\ \sin^2\varphi = \frac{1}{1+\varphi^2},$$

zoo is:

$$a^2 = \frac{\omega^2\varphi^2}{(1+\omega^2)(1+\varphi^2)},\ b^2 = \frac{1}{(1+\omega^2)(1+\varphi^2)}$$

$$P_m = \frac{1}{\{(1+\omega^2)(1+\varphi^2)\}^m}\sum_{k=o}^{k=m}\frac{2m(2m-1)..(2m-2x+1)}{2^2\ 4^2\ \ldots\ (2x)^2}(\omega\varphi)^{2(m-x)}$$

$$A'_n = \frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{n=m}\left[(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.\,2..m.\,1.\,2\ldots(n-m)}\cdot\frac{1}{\{(1+\omega^2)(1+\varphi^2)\}^m}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=o}^{k=m}\frac{2m(2m-1)..(2m-2x+1)}{2^2\,.\,4^2\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (2x)^2}(\omega\varphi)^{2(m-x)}\right] =$$

$$=\frac{1}{\{2(1+\omega^2)(1+\varphi^2)\}^n}\sum_{m=o}^{m=n}\Bigg[(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\times$$

$$\times\{(1+\omega^2)(1+\varphi^2)\}^{n-m}\sum_{x=o}^{x=m}\frac{2m(2m-1)..(2m-2x+1)}{2^2.\;\;4^2\;\;...\;\;(2x)^2}(\omega\varphi)^{2(m-x)}\Bigg],$$

$$\Omega_n=\frac{1}{2^n(1+\omega^2)^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)..(2m+2n-1)}{1.2..m.1.2\ldots(n-m)}(1+\omega^2)^{n-m}\omega^{2m},$$

$$\Phi_n=\frac{1}{2^n(1+\varphi^2)^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)..(2m+2n-1)}{1.2..m.1.2\ldots(n-m)}(1+\varphi^2)^{n-m}\varphi^{2m}.$$

Men stelle nu verder:

$\omega\varphi=p$, en $(1+\omega^2)(1+\varphi^2)=q$,

$$\sum_{n=o}^{n=m}\frac{2m(2m-1)\ldots.(2m-2x+1)}{2^2.\;\;4^2\;\;....\;\;(2x)^2}p^{2(m-x)}=P'_m,$$

$$\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2..m.1.2\ldots(n-m)}q^{n-m}P'_m=A''_n,$$

$(1+\omega^2)^n\,\Omega_n=\Omega'_n$, en $(1+\varphi^2)^n\,\Phi_n=\Phi'_n$

zoo is het verlangde bewijs herleid tot dat der vergelijking

$$A''_n=\Omega'_n\,\Phi'_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34^a)$$

Men voere nu eenige nieuwe grootheden Q'_m, B''_n, ω'_n, φ'_n, als volgt gedefinieerd, in:

$$Q'_m=\sum_{x=o}^{x=m}\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(2m-2x+2)}{2^2\;.\;4^2\;.\;6^2\;....\;(2x)^2}p^{2(m-x)+1},$$

$$B''_n=\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n+1)}{1.\;2\;..\;m.1.2...\;(n-m)}q^{n-m}Q'_m,$$

$$\omega'_n=\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)(2m+5)\;..\;(2m+2n+1)}{1.2\;..\;m.\;1.\;2...\;(n-m)}(1+\omega^2)^{n-m}\omega^{2m+1},$$

$$\varphi'_n=\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)(2m+5)\;..\;(2m+2n+1)}{1.2...m.1.2.\;..\;(n-m)}(1+\varphi^2)^{n-m}\varphi^{2m+1}.$$

Alsdan is:

$$\frac{\delta p}{\delta\omega}=\varphi;\;\frac{\delta p}{\delta\varphi}=\omega;\;\frac{\delta q}{\delta\omega}=2\omega(1+\varphi^2);\;\frac{\delta q}{\delta\varphi}=2\varphi(1+\omega^2);$$

$$\frac{\delta P'_m}{\delta p}=2\,m\,Q'_{m-1};\;\frac{\delta Q'_m}{\delta p}=(2\,m+1)\,P'_m;$$

waaruit volgt:

$$\frac{\delta^2 q^{n-m}P'_m}{\delta\omega\,\delta\varphi}=q^{n-m}\frac{\delta^2 P'_m}{\delta\omega\,\delta\varphi}+\frac{\delta q^{n-m}}{\delta\varphi}\cdot\frac{\delta P'_m}{\delta\omega}+\frac{\delta q^{n-m}}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta P'_m}{\delta\varphi}+P'_m\cdot\frac{\delta^2 q^{n-m}}{\delta\omega\,\delta\varphi}=$$

$$=q^{n-m}\{2\,m\,Q'_{m-1}+2\,m\,(2\,m\text{-}1)\,P'_{m-1}\,\omega\,\varphi\}+$$

$$+2mQ'_{m-1}\varphi(n-m)q^{n-m-1}.2\varphi(1+\omega^2)+2mQ'_{m-1}\omega(n-m)q^{n-m-1}.2\omega(1+\varphi^2)+$$
$$+P'_m\{4(n-m)q^{n-m-1}\omega\varphi+4(n-m-1)(n-m)q^{n-m-2}\omega\varphi(1+\omega^2)(1+\varphi^2)\}=$$
$$=2mq^{n-m}\{Q'_{m-1}+(2m-1)pP'_{m-1}\}+4m(n-m)(p^2+q-1)q^{n-m-1}Q'_{m-1}+$$
$$+4(n-m)^2pq^{n-m-1}P'_m=$$
$$=2m(2n-2m+1)q^{n-m}Q'_{m-1}+p\{2m(2m-1)q^{n-m}P'_{m-1}+4(n-m)^2q^{n-m-1}P'_m\}+$$
$$+2.2m(n-m)(p^2-1)q^{n-m-1}Q'_{m-1}\quad\dots\dots\quad(p)$$

en evenzoo:

$$\frac{\delta^2q^{n-m}Q'_m}{\delta\omega\,\delta\varphi}=(2m+1)(2n-2m+1)q^{n-m}P'_m+$$
$$+p\{(2m+1)2mq^{n-m}Q'_{m-1}+4(n-m)^2q^{n-m-1}Q'_m\}$$
$$+2(2m+1)(n-m)(p^2-1)q^{n-m-1}P'_m\quad\dots\dots\quad(q)$$

Nu is:

$$\frac{4m+1}{2m+1}pP'_m=\sum_{x=0}^{x=m}\frac{2m(2m-1)\dots(2m-2x+1)}{2^2..4^2\dots\dots(2x)^2}\cdot\frac{4m+1}{2m+1}p^{2m-2x+1}=$$
$$=\frac{4m+1}{2m+1}p^{2m+1}+\sum_{x=1}^{x=m-1}\frac{2m(2m-1)\dots(2m-2x+1)}{2^2.4^2\dots\dots(2x)^2}\cdot\frac{4m+1}{2m+1}p^{2m-2x+1}+$$
$$+\frac{2m(2m-1)..1}{2^2.4^2..(2m)^2}\cdot\frac{4m+1}{2m+1}p,$$

$$\frac{2m}{2m+1}(p^2-1)Q'_{m-1}=\sum_{x=0}^{x=m-1}\frac{2m(2m-1)\dots(2m-2x)}{(2m+1).2^2.4^2..(2x)^2}(p^{2m-2x+1}-p^{2m-2x-1})=$$
$$=\sum_{x=1}^{x=m-1}\frac{2m(2m-1)\dots.(2m-2x)}{(2m+1)2^2.4^2\dots(2x)^2}p^{2m-2x+1}+\frac{2m}{2m+1}p^{2m+1}-$$
$$-\sum_{x=1}^{x=m-1}\frac{2m(2m-1)\dots(2m-2x+2)}{(2m+1)2^2.4^2\dots(2x-2)^2}p^{2m-2x+1}-\frac{2m(2m-1)\dots4.3.2}{(2m+1)2^2.4^2\dots(2m-2)^2}p,$$

dus:

$$\frac{4m+1}{2m+1}pP'_m-\frac{2m}{2m+1}(p^2-1)Q'_{m-1}=p^{2m+1}+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=m-1}\frac{(2m+1)2m..(2m-2x+2)}{2^2.\ 4^2\ .\ .\ .\ (2x)^2}p^{2m-2x+1}+\frac{(2m+1)2m\dots.1.}{2^2.\quad 4^2\ .\ .\ (2m)^2}p,$$

of, daar de beide bijgevoegde termen juist de waarden zijn van de vorm onder het teeken Σ, voor $x=0$ en $x=m$,

$$\frac{4m+1}{2m+1}pP'_m-\frac{2m}{2m+1}(p^2-1)Q'_{m-1}=\sum_{x=0}^{x=m}\frac{(2m+1)2m..(2m-2x+2)}{2^2.\quad 4^2\ .\ .\ (2x)^2}p^{2(m-x)+1}=Q'_m$$

dus:

$$2m(p^2-1)\,Q'_{m-1} = (4m+1)\,p\,P'_m - (2m+1)\,Q'_m \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

Op gelijke wijze is:

$$\frac{4m+3}{2m+2}\,pQ'_m = \sum_{x=0}^{x=m} \frac{(2m+1)\,2m\ldots(2m-2x+2)}{2^2.\quad 4^2.\;.\;.\;.\;.\;(2x)^2} \cdot \frac{4m+3}{2m+2}\,p^{2m-2x+2},$$

$$\frac{2m+1}{2m+2}(p^2-1)\,P'_m = \sum_{x=0}^{x=m} \frac{(2m+1)2m\ldots(2m-2x+1)}{(2m+2)\;2^2.\;4^2\ldots.(2x)^2}\left(p^{2m-2x+2}-p^{2m-2x}\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{x=m} \frac{(2m+1)2m\ldots(2m-2x+1)}{(2m+2)2^2.\;4^2\ldots(2x)^2}\,p^{2m-2x+2} - \sum_{x=1}^{x=m+1} \frac{(2m+1)2m.(2m-2x+3)}{(2m+2)2^2.4^2\ldots(2x-2)^2}\,p^{2m-2x+2}$$

$$\frac{4m+3}{2m+2}\,p\,Q'_m - \frac{2m+1}{2m+2}\,(p^2-1)\,P'_m = p^{2m+2} +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=m} \frac{(2m+2)\,(2m+1)\ldots(2m-2x+3)}{2^2.4^2\ldots(2\,x)^2}\,p^{2m-2x+2} + \frac{(2m+2)\,(2m+1)\ldots1}{2^2.4^2\ldots(2m+2)^2} =$$

$$= \sum_{x=0}^{x=m+1} \frac{2m+2)(2m+1\ldots(2m-2x+3)}{2^2.4^2\ldots.\;(2\,x)^2}\,p^{2m-2x+2} = P'_{m+1}$$

dus: $(2m+1)(p^2-1)\,P'_m = (4m+3)pQ'_m - (2m+2)P'_m$ . . . . (s)

Substitueert men nu de resultaten, in (r) en (s) vervat, resp. in (p) en (q), zoo verkrijgt men:

$$\frac{\delta^2 q^{n-m} P'_m}{\delta\omega\,\delta\varphi} = 2m\,(2m-1)\,p\,q^{n-m}\,P'_{m-1} + 2m\,(2n-2m+1)\,q^{n-m}\,Q'_{m-1} +$$

$$+ 2\,(n-m)\,(2n+2m+1)\,p\,q^{n-m-1}\,P'_m - 2\,(n-m)\,(2m+1)\,q^{n-m-1}\,Q'_m,$$

$$\frac{\delta^2 q^{n-m}\,Q'_m}{\delta\omega\,\delta\varphi} = (2m+1)\,2m\,pq^{n-m}\,Q'_{m-1} + (2m+1)\,(2n-2m+1)\,q^{n-m}\,P'_m +$$

$$+ 2\,(n-m)\,(2n+2m+3)\,pq^{n-m-1}\,Q'_m - 2\,(n-m)\,(2m+2)\,q^{n-m-1}\,P'_{m+1},$$

waaruit verder volgt:

$$\frac{d^2 A''_n}{d\omega\,d\varphi} = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)\,(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1\,.\,2\ldots m\,.\,1\,.\,2\ldots.(n-m)}\Big\{2m(2m-1)pq^{n-m}P'_{m-1} +$$

$$+ 2m\,(2n-2m+1)\,q^{n-m}\,Q'_{m-1} + 2\,(n-m)\,(2n+2m+1)\,p\,q^{n-m-1}\,P'_m -$$

$$- 2\,(n-m)\,(2m+1)\,q^{n-m-1}\,Q'_m\Big\},$$

$$\frac{d^2 B''_n}{d\omega\,d\varphi} = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)\,(2m+5)\ldots(2m+2n+1)}{1\,.\,2\ldots m\ldots1\,.\,2\ldots.(n-m)}\Big\{(2m+1)2mpq^{n-m}Q'_{m-1} +$$

$$+ (2m+1)\,(2n-2m+1)\,q^{n-m}\,P'_m + 2\,(n-m)\,(2n+2m+3)\,pq^{n-m-1}\,Q'_m -$$

$$- 2\,(n-m)\,(2m+2)\,q_{n-m-1}\,P'_{m+1}\Big\}.$$

In beide vormen is de coëfficient vóór de accolade eindig, zoowel voor $m=0$ als voor $m=n$, zoodat men kan schrijven:

$$\frac{d^2A''_n}{d\omega\, d\varphi}=\frac{p}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m-1)(2m+1)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots\ldots(m-1)\ldots1\ldots2\ldots(n-m)}q^{n-m}P'_{m-1}$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots\ldots(n-m)}(2n-2m+1)q^{n-m}Q'_{m-1}$$

$$+\frac{p}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots\ldots\ldots(n-m-1)}q^{n-m-1}P'_m$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(1-)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots\ldots(n-m-1)}(2m+1)q^{n-m-1}Q'_m,$$

$$\frac{d^2B''_n}{d\omega\, d\varphi}=\frac{p}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots\ldots(n-m)}q^{n-m}Q'_{m-1}$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{m=1}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots\ldots m.1.2\ldots\ldots\ldots(n-m)}(2n-2m+1)q^{n-m}P'_m$$

$$+\frac{p}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n+3)}{1.2\ldots\ldots m.1.2\ldots(n-m-1)}q^{n-m-1}Q'_m$$

$$-\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m}\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n+1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots\ldots(n-m-1)}(4m+4)q^{n-m-1}P'_{m+1}.$$

In beide vormen heffen de eerste en derde termen elkander geheel op, zooals men licht ziet, door in den derden m door $m+1$ te vervangen.

Doet men dit bij de eerste vorm ook in den 2den term, vervangt bij de tweede in den vierden term m door $m-1$, telt in beide gevallen de twee termen bij elkander en merkt op dat bij de laatste vorm, de term, overeenkomend met $m=0$ dezelfde is als vóór de optelling in den tweeden term, zoo verkrijgt men:

$$\frac{\delta^2A''_n}{\delta\omega\,\delta\varphi}=\frac{(2n)^2}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m-1}\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m-1)}q^{n-m-1}Q'_m=(2n)^2B''_{n-1}$$

$$\frac{\delta^2B''_n}{\delta\omega\,\delta\varphi}=\frac{(2n+1)^2}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}q^{n-m}P'_m=(2n+1)^2A''_n$$

Differenteert men verder Ω'_n ten opzichte van ω en Φ'_n ten opzichte van φ, zoo is:

$$\frac{\delta\Omega'_n}{\delta\omega}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots\ldots(n-m-1)}(1+\omega^2)^{n-m-1}\omega^{2m+1}+$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots(n-m)}(1+\omega^2)^{n-m}\omega^{2m-1},$$

of, in den laatsten term m door $m+1$ vervangend en optellend,

$$\frac{\delta\Omega'_n}{\delta\omega}=\frac{2n}{2^{n-1}}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m-1}\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m-1)}(1+\omega^2)^{n-m-1}\omega^{2m+1}=2n\omega'_{n-1}$$

en evenzoo $\frac{\delta \Phi'_n}{\delta \varphi} = 2n\,\varphi'_{n-1}$, terwijl op gelijke wijze

$$\frac{\delta\omega'_n}{\delta\omega} = \frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n-1}(-1)^{n-m}\frac{2(2m+3)(2m+5)\dots(2m+2n+1)}{1.2\dots m.1.2\dots\dots(n-m-1)}(1+\omega^2)^{n-m-1}\omega^{2m+2} +$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\dots(2m+2n+1)}{1.2\dots\dots m.1.2\dots\dots\dots(n-m)}(1+\omega^2)^{n-m}\omega^{2m} =$$

$$=\frac{2n+1}{2^n}\sum_{m=o}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(2m+1)(2m+3)\dots(2m+2n-1)}{1.2..m.1.2\dots\dots(n-m)}(1+\omega^2)^{n-m}\omega^{2m} = (2n+1).\Omega'_n$$

$$\text{en } \frac{\delta\varphi'_n}{\delta\varphi} = (2n+1).\Phi'_n.$$

Neemt men nu aan dat $A''_n = \Omega'_n\,\Phi'_n$ ware en toch $B''_n = \omega'_n\,\varphi'_n + f(\omega.\varphi)$ kon zijn, zoo ware door differentiatie,

$$\frac{\delta^2 B''_n}{\delta\omega\delta\varphi} = \frac{\delta\omega'_n}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta\varphi'_n}{\delta\varphi} + \frac{\delta^2 f(\omega.\varphi)}{\delta\omega\,\delta\varphi}$$

of $(2n+1)^2 A''_n + (2n+1)^2\,\Omega'_n\,\Phi'_n + \frac{\delta^2 f(\omega.\varphi)}{\delta\omega\,\delta\varphi}$ of, volgens de onderstelling: $\frac{\delta^2 f(\omega.\varphi)}{\delta\omega\,\delta\varphi} = 0$, waaruit door integratie volgt $f(\omega.\varphi) = \psi(\omega) + \chi(\varphi)$ of, omdat ω en φ in B''_n, dus ook in $f(\omega.\varphi)$ symmetrisch moeten voorkomen en dus de functien ψ en χ van gelijken vorm moeten zijn,

$$f(\omega.\varphi) = \psi(\omega) + \psi(\varphi),\quad B''_n = \omega'_n\,\varphi'_n + \psi(\omega) + \psi(\varphi)$$

Maar voor $\omega = 0$ is $B''_n = 0$ en $\omega'_n = 0$, zoodat $\psi(0) + \psi(\varphi) = 0$ en dus zoowel $\psi(\omega)$ als $\psi(\varphi)$ constanten zijn, voorgesteld door $-\psi(0)$ en daar dan $\psi(0) + \psi(0) = 0$ is, volgt hieruit $B''_n = \omega'_n\,\varphi'_n$.

Kon nu verder $A''_{n+1} = \Omega'_{n+1}\,\Phi'_{n+1} + f(\omega.\varphi)$ zijn, zoo ware

$$(2\ n + 2)^2\ B''_n = (2n+2)^2\,\omega'_n\,\varphi'_n + \frac{\delta^2 f(\omega.\varphi)}{\delta\omega\,\delta\varphi}$$

of, weder om de zelfde redenen als boven,

$$A''_{n+1} = \Omega'_{n+1}\,\Phi'_{n+1} + \psi(\omega) + \psi(\varphi),$$

of ook, daar in A''_{n+1} alleen evene machten van ω en φ voorkomen,

$$A''_{n+1} = \Omega'_{n+1}\,\Phi'_{n+1} + \chi(\omega^2) + \chi(\varphi^2).$$

Voor $\omega^2 = -1$ is echter $A''_{n+1} = \Omega'_{n+1}\,\Phi'_{n+1}$ dus $\chi(-1) = \chi(\varphi^2)$, zoodat weder $\chi(\varphi^2)$ en $\chi(\omega^2)$ gelijk en constant en dus, omdat hunne som in één geval 0 is, beide nul zijn, waaruit dus algemeen volgt: $A''_{n+1} = \Omega'_{n+1}\,\Phi'_{n+1}$.

Indien dus de vergelijking (34^a) voor eene waarde van n geldig is, geldt zij ook voor de volgende, en dus is zij algemeen waar, omdat zij, zooals men licht ziet, doorgaat voor $n = 1$.

Hiermede is dus de waarheid van vergelijking (34) bewezen.[24]

---

[24] Het in de tekst geleverde bewijs is niet geheel overeenkomstig met dat van LEGENDRE. Hij vangt aan, met optemerken dat de ontbinding der grootheden A'_n, indien zij mogelijk is, niet op andere wijze kan geschieden. Want, zegt hij, aangenomen dat zij splitsbaar zijn in twee functien, de een van ω, de ander van φ, zoo zullen deze gelijk zijn, omdat ω en φ op gelijke wijze in P_m voorkomen. Bovendien hebben zij dan de vorm der grootheden Ω_n en Φ_n, want voor $\cos\varphi = 1$ wordt bijv. $A'_3 = \Omega_3$. Deze grootheid moet dus een faktor zijn van A'_3, waaruit dan de andere faktor volgt. Nu blijft nog aantetoonen dat het produkt dezer faktoren juist A'_3 geeft en dat het niet nog met eene constante moet vermenigvuldigd worden. Hiervan verzekert men zich licht, alsmede van de juistheid van het produkt, door de opmerking, dat de grootheid $\frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6}.\,3 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\,3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}$, verkregen door $\cos\omega = \cos\varphi = 1$ te nemen, en alle anderen van die vorm, de waarde 1 hebben, zooals boven gezegd is.

Deze *m. i.* zeer onvolledige redenering, kan op de volgende wijze meer algemeen worden gemaakt, altijd indien het besprokene in noot (23) als bewezen wordt beschouwd. Neemt men aan dat de ontbinding van A'_n kan geschieden zóó dat $A'_n = c\,f(\cos\omega)\,f(\cos\varphi)$ is, zoo stelle men eerst $\cos\varphi = 1$ dus $\sin\varphi = 0$ daarna ook $\cos\omega = 1$, zoo wordt in beide gevallen $b = 0$, $P_m = a^{2m}$, terwijl, in het eerste geval $a = \cos\omega$, in het tweede $a = \cos\varphi$ wordt, en dus A'_n beurtelings overgaat in Ω_n en Φ_n. Men heeft dus: $\Omega_n = c\,f(1)\,f(\cos\omega)$, $\Phi_n = c\,f(\cos\varphi)\,f(1)$. Maar voor $\cos\omega = 1$ wordt $\Omega_n = 1$, voor $\cos\varphi = 1$ ook $\Phi_n = 1$, dus is $1 = c\,f(1)\,f(1)$ derhalve ook $A'_n = c\,f(\cos\omega)\,f(\cos\varphi) = c\,\frac{\Omega_n}{c\,f(1)}\,\frac{\Phi_n}{c\,f(1)} = \frac{\Omega_n\,\Phi_n}{c\,f(1)\,f(1)} = \Omega_n\,\Phi_n$. Indien dus de ontbinding mogelijk is, moeten de faktoren ook de grootheden Ω_n en Φ_n zonder constante c zijn.

Deze voorrede heeft, ofschoon LEGENDRE zulks niet zegt, blijkbaar ten doel zonder bewijs de grootheden Ω_n en Φ_n te mogen vervangen door anderen die gemakkelijker te behandelen zijn. Immers, na nog eens duidelijk de beteekenis van vergelijking (34^a) geheel in dezelfde vorm te hebben geposeerd, bewijst hij plotseling dat $A''_n = \omega_n\,\varphi_n$ is, zijnde $\omega_n = \sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x . \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2x+1)}{2^2\;4^2\ldots\ldots(2x)^2}\,\omega^{2(n-x)}$ en $\varphi_n =$ enz., voert dezelfde grootheden P'_m en Q'_m in als boven en stelt $\omega'_n = \sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x . \frac{(2n+1)\,2n\ldots(2n-2x+2)}{2^2\;4^2\ldots\ldots(2x)^2}\,\omega^{2(n-x)+1}$ en $\varphi'_n =$ enz., zonder aantetoonen dat deze grootheden identisch zijn met Ω'_n en Φ'_n enz. Het eenige daarin gelegen voordeel is, dat men eenigzins gemakkelijker inziet dat $\frac{d\omega_n}{d\omega} = 2n\,\omega'_{n-1}$ en $\frac{d\varphi_n}{d\omega} = 2n\,\varphi'_{n-1}$, alsmede $\frac{d\,\omega'_n}{d\,\omega} = (2n+1)\,\omega_n$, $\frac{d\,\varphi'_n}{d\varphi} = (2n+1)\,\varphi_n$ is. Het overige van het betoog wordt er niets eenvoudiger door.

Men zal opmerken, dat door LEGENDRE in dit stuk wel eene schrede vooruit gedaan was, al is het waar, dat tegen zijn betoogtrant in dit geschrift de boven vermelde aanmerkingen kunnen gemaakt worden en men dus de verkregen resultaten, hoezeer zij nauwkeurig zijn, niet als streng afgeleid mag beschouwen. Immers de vergelijkingen (43) en (43^a) leveren de componenten der aantrekking, op een willekeurig punt buiten eene omwentelingsellipsoïde door dit lichaam uitgeoefend, terwijl tevens de stelling van MACLAURIN, voor een dergelijk lichaam, voor alle uitwendige punten bewezen was geldig te zijn.

Het vraagstuk betreffende de ellipsoïde met ongelijke assen was daarmede echter in geen enkel opzicht gebaat, daar, zooals LEGENDRE zelf verklaart, zijne methode daarvoor niets kon opleveren. Evenwel geeft hij, zooals boven gezegd is, reeds in dit geschrift te kennen, dat hij redenen heeft om te meenen, dat de stelling van MACLAURIN geheel algemeen geldt.

Blijkbaar zelfs was hij reeds toen bezig naar het bewijs daarvan te zoeken. Hij moest zich evenwel ten dien opzichte de palm zien ontnemen door LAPLACE, wien de roem toekomt, de eerste te zijn geweest, die door deze stelling te bewijzen, het middel leverde om de aantrekking, welke eene willekeurige ellipsoïde uitoefent, op een punt buiten haar oppervlak gelegen, door eene enkelvoudige integraal voortestellen.

Ware nu in deze vorm zoo gemakkelijk intezien dat $A''_{n+1} = \omega_{n+1} \varphi_{n+1}$ ware voor $\omega^2 = -1$. zoo zou de verandering van vorm eenig voordeel geven. Men ziet echter gemakkelijk dat de waarheid hiervan berust op die der vergelijking

$$\sum_{x=0}^{x=n+1} (-1)^x \frac{(2n+2)(2n+1)..(2n-2x+3)}{2^2 \;.\; 4^2 \;, \ldots .\; (2x)^2} = \frac{(2n+3)(2n+5)...(4n+3)}{2 \;.\; 4 \ldots 2(n+1)}$$

welke even moeilijk algemeen te bewijzen schijnt als die waarop de identiteit van ω_n en Ω'_n berust. Ook in deze gedaante blijft dus het betoog onvolledig, even als in de tekst, waar insgelijks het bewijs der vergelijking $A''_{n+1} = \Omega'_{n+1} \Phi'_{n+1}$ voor $\omega^2 = -1$ ontbreekt. Daar derhalve geen voordeel schijnt te liggen in den onbewezen overgang van de vormen Ω'_n tot ω_n enz., heb ik de voorkeur gegeven aan het in de tekst vervatte bewijs dat, hoewel even onvolledig, een meer geregelden loop volgt.

HOOFDSTUK III.

ANALYTISCHE OPLOSSINGEN MET BEHULP DER STELLINGEN VAN MACLAURIN EN IVORIJ.

Laplace deelde zijne resultaten voor het eerst mede in de Mémoires de l'Académie des Sciences van het jaar 1782 en herhaalde die later in het derde boek zijner Mécanique céleste. Hij behandelt daarin zoowel het geval van een inwendig als dat van een uitwendig gelegen punt.

Na op ongeveer dezelfde wijze als Lagrange de vergelijkingen (11) en (20) te hebben verkregen, gaat hij eerst over tot de verdere ontwikkeling der vergelijkingen (11). Daar echter Laplace de kracht in tegengestelde richting neemt met de assen, even als zulks bij Legendre het geval was, heeft de eerste vergelijking de gedaante:

$$F_i = 2p_i \alpha_i^2 \int\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\vartheta d\varphi}{\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}.$$

In plaats van nu, zooals Lagrange, voor het algemeenste geval naar φ te integreren, voert Laplace de integratie naar ϑ uit, hetgeen aldus kan geschieden.

Men stelle

$$\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi = m^2, \quad \alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_l^2 \sin^2\varphi = n^2$$

zoo is

$$F_i = 4 p_i \alpha_i^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{m^2 \cos^2\vartheta + n^2 \sin^2\vartheta}$$

Maar

$$\int \frac{d\vartheta}{m^2\cos^2\vartheta + n^2\sin^2\vartheta} = \int \frac{\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}}{m^2 + n^2 tg^2\vartheta} = \frac{1}{mn}\int \frac{d.\frac{n}{m}\,tg\,\vartheta}{1+\frac{n^2}{m^2}tg^2\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{mn}\ \text{arctan}\left(\frac{n}{m}\,tg\,\vartheta\right)$$

dus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{m^2\cos^2\vartheta + n^2\sin^2\vartheta} = \frac{\pi}{2mn} = \frac{\pi}{2\sqrt{(\alpha_i^2\cos^2\varphi + \alpha_k^2\sin^2\varphi)(\alpha_i^2\cos^2\varphi + \alpha_l^2\sin^2\varphi)}}$$

waardoor, indien men de halfassen a_i, a_k, a_l en de massa $M = \frac{4}{3}\pi a_i a_k a_l$ der ellipsoïde invoert,

$$F_i = \frac{3p_i M}{2a_i}\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\{a_i^2 + (a_k^2 - a_i^2)\cos^2\varphi\}\{a_i^2 + (a_l^2 - a_i)\cos^2\varphi\}}}$$

wordt. Stelt men hierin $\cos\varphi = t$, zoo worden de grenzen -1 en 1 en dus

$$F_i = \frac{3p_i M}{2a_i}\int_{-1}^{1} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\{a_i^2 + (a_k^2 - a_i^2)t^2\}\{a_i^2 + (a_l^2 - a_i^2)t^2\}}} =$$

$$= \frac{3p_i M}{a_i}\int_0^{1} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\{a_i^2 + (a_k^2 - a_i^2)t^2\}\{a_i^2 + (a_l^2 - a_i^2)t^2\}}} \cdot \quad (44).$$

Deze formule levert de component in de richting der as a_i, in veel eenvoudiger vorm, dan die door LAGRANGE in de formulen (17) was gevonden. Door achtervolgens aan i de waarden 1, 2 en 3 te geven, vindt men daaruit de drie componenten, zonder dat het noodig is de tweede en derde der vergelijkingen (11) afzonderlijk te integreren. Onderstelt men nu dat a_i de grootste, a_k de middelste, a_l de kleinste halfas der ellipsoïde is, noemt vervolgens de excentriciteiten $\sqrt{\frac{a_i^2 - a_k^2}{a_i^2}}$ en $\sqrt{\frac{a_i^2 - a_l^2}{a_i^2}}$ resp. e_k en e_l, zoo verkrijgt men:

$$F_i = \frac{3\,p_i\,M}{a_i^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1 - e_k^2 t^2)(1 - e_l^2 t^2)}},$$

$$F_k = \frac{3\,p_k\,M}{a_k}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\{a_k^2 - a_i^2(e_l^2 - e_k^2)t^2\}\{a_k^2 + a_i^2 e_k^2 t^2\}}},$$

$$F_l = \frac{3\, p_l\, M}{a_l} \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\{a_l^2 + a_i^2\, e_l^2\, t^2\}\{a_l^2 + a_i^2\, (e_l^2 - e_k^2)\, t^2\}}}.$$

Stelt men echter in de waarde van F_k voor t in de plaats

$\dfrac{a_k\, x}{a_i \sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)}}$, zoo wordt $dt = \dfrac{a_k\, dx}{a_i \sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)^3}}$,

$a_k^2 - a_i^2 (e_l^2 - e_k^2)\, t^2 = a_k^2 \dfrac{1 - e_l^2\, x^2}{1 - e_k^2\, x^2}$, $a_k^2 + a_i^2 e_k^2 t^2 = \dfrac{a_k^2}{1 - e_k^2 x^2}$, dus

$$\frac{t^2\, dt}{\sqrt{\{a_k^2 + a_i^2 (e_l^2 - e_k^2) t^2\}\{a_k^2 + a_i^2 e_k^2 t^2\}}} = \frac{a_k\, x^2\, dx}{a_i^3 \sqrt{(1 - e_k^2 x^2)^3 (1 - e_l^2 x^2)}}.$$

Stelt men evenzoo in F_l, $t = \dfrac{a_l\, x}{a_i \sqrt{(1 - e_l^2\, x^2)}}$ en vervangt ook in F_i, t door x, zoo verkrijgt men ten slotte:

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= \frac{3\, p_i\, M}{a_i^3} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)\,(1 - e_l^2\, x^2)}} \\
F_k &= \frac{3\, p_k\, M}{a_i^3} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)^3\,(1 - e_l^2\, x^2)}} \\
F_l &= \frac{3\, p_l\, M}{a_i^3} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)\,(1 - e_l^2\, x^2)^3}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (45)$$

Stelt men eindelijk nog

$$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)\,(1 - e_l^2 x^2)}} = q. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

zoo is

$$\frac{\delta . e_k q}{\delta e_k} = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2 x^2)^3 (1 - e_l^2 x^2)}}, \quad \frac{\delta . e_l q}{\delta e_l} = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2\, x^2)(1 - e_l^2 x^2)^3}} (\delta)$$

en dus

$$F_i = \frac{3 p_i M}{a_i^3} q;\ F_k = \frac{3 p_k M}{a_i^3} . \frac{\delta\, e_k q}{\delta\, e_k};\ F_l = \frac{3\, p_l\, M}{a_i^3} . \frac{\delta e_l q}{\delta\, e_l} \; . \; . \; . \; (47)$$

Hierdoor zijn dus de drie componenten uitgedrukt door middel van de integraal q, welke tot de elliptische integralen behoort en dus in het algemeen niet door andere transcendenten kan worden voorgesteld.

De formulen (45) of (47) zijn dan ook de eenvoudigste vormen, waarin de componenten der aantrekking op een inwendig punt kunnen worden verkregen. Blijkbaar gelden zij ook nog, wanneer het punt oneindig dicht bij, dat wil zeggen, op het oppervlak der ellipsoïde gelegen is.

Na aldus het geval van een inwendig gelegen punt te hebben afgehandeld, gaat LAPLACE nu over tot de beschouwing van de formules (20), en zegt dat ook die, door behoorlijke substitutiën, van het wortelteeken in den teller bevrijd en dan verder tot enkelvoudige integralen zouden kunnen herleid worden. Hij doet dit echter niet, maar slaat den volgenden weg in.

Zij V de som van een oneindig aantal oneindig kleine grootheden, elk bestaande uit een massaelement der ellipsoïde, gedeeld door den afstand daarvan tot het aangetrokken punt, zoodat:

$$V = \int \frac{d\,M}{r} = \frac{d\,M}{\sqrt{\Sigma(p_i - x_i)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

is. Strekt men dan deze integratie uit over de geheele ellipsoïde en differentieert deze grootheid partieel naar eene der coördinaten p_i, zoo is (zie pag. 39, met inachtneming van tegengesteld teeken),

$$-\frac{\delta\,V}{\delta\,p_i} = \int \frac{(p_i - x_i)\,d\,M}{\{\Sigma\,(p_i - x_i)^2\}^{3/2}} = F_i,$$

zoodat, indien de grootheid V [25] bepaald kan worden, de componenten der aantrekking daaruit door differentiatie kunnen verkregen worden.

Voert men nu voor $d\,M$ weder de waarde $r^2 \sin\varphi\, d\,\varphi\, d\,\vartheta\, dr$ in, zoo is:

$$V = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \int_{r'}^{r''} r \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} (r''^2 - r'^2) \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi,$$

of indien men hierin voor $r''^2 - r'^2$ hare waarde $\frac{4\,I\sqrt{R}}{N^2}$ (zie bl. 49) in de plaats zet:

$$V = 2\int_{\varphi'}^{\varphi''} \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \frac{I\sqrt{R}.\sin\varphi\, d\,\vartheta\, d\,\varphi}{N^2}.$$

---

[25] Deze grootheid V is dezelfde welke op bl. 70 door LEGENDRE is gebruikt, om de component Q uit P afteleiden. Het is hier de plaats niet, en het zou ook overbodig zijn, de eigenschappen der potentiaal verder te ontwikkelen. Waar die in het vervolg noodig zijn, worden zij bekend ondersteld.

Bij de grenzen der integratie voor V, F_i, F_k en F_l worden r' en r'' gelijk en moet dus $\sqrt{R} = 0$ zijn. Wanneer men derhalve de eerste differentialen dier grootheden neemt ten opzichte van p_i of a_i, behoeft men daarbij geen acht te slaan op de variatie der grenzen, zoodat b. v:

$$\frac{\delta V}{\delta p_i} = 2\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_{\vartheta'}^{\vartheta'} \frac{\delta \frac{I\sqrt{R}}{N^2}}{\delta p_i} . \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi$$

is. (26)

Noemt men nu de hoeken welke de richting r met de assen x_i, x_k, x_l maakt, $\varphi_i, \varphi_k, \varphi_l$, zoo is $\varphi = \varphi_i$; $\cos\varphi_k = \sin\varphi\cos\vartheta$; $\cos\varphi_l = \sin\varphi\sin\vartheta$; en is dan verder $\alpha_i^2 = \frac{c_i}{c}, \alpha_k^2 = \frac{c_k}{c}, \alpha_l^2 = \frac{c_l}{c}$, zoo is: $I = \frac{1}{c}\Sigma p_i c_i \cos\varphi_i$, $N = \frac{1}{c}\Sigma c_i \cos^2\varphi_i$, $R = I^2 + \left(1 - \frac{\Sigma p_i^2 c_i}{c}\right)N$, waaruit dan volgt, in verband met (20)

$$\left.\begin{aligned}
V &= 2\int\int \sin\varphi_i \sin\varphi_k \sec\varphi_l . \frac{I\sqrt{R}}{N^2} . d\varphi_i\, d\varphi_k \;\; . \;\; . \\
F_i &= 2\int\int \sin\varphi_i \cos\varphi_i \sin\varphi_k \sec\varphi_l \frac{\sqrt{R}}{N}\, d\varphi_i\, d\varphi_k \\
F_k &= 2\int\int \sin\varphi_i \cos\varphi_k \sin\varphi_k \sec\varphi_l \frac{\sqrt{R}}{N}\, d\varphi_i\, d\varphi_k \\
F_l &= 2\int\int \sin\varphi_i \cos\varphi_l \sin\varphi_k \sec\varphi_l \frac{\sqrt{R}}{N}\, d\varphi_i\, d\varphi_k
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (49)$$

De uitdrukking $\sin\varphi_i \sin\varphi_k \sec\varphi_l\, d\varphi_i\, d\varphi_k$, welke in al deze integralen voorkomt, kan nu aldus vereenvoudigd worden. Is (fig. 19) $OP = 1$, $\angle POX_i = \varphi_i$, $\angle POX_k = \varphi_k$, $\angle POX_l = \varphi_l$,

(26) Algemeen toch ware:

$$\frac{1}{2} . \frac{\delta V}{\delta p_i} = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin\varphi d\varphi \left\{ \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \frac{\delta \frac{I\sqrt{R}}{N^2}}{\delta p_i} d\vartheta + \left[\frac{I\sqrt{R}}{N^2}\right]_{\vartheta=\vartheta''} \frac{\delta\vartheta''}{\delta p_i} - \left[\frac{I\sqrt{R}}{N^2}\right]_{\vartheta=\vartheta'} \frac{\delta\vartheta'}{\delta p_i} \right\}$$

$$+ \left[\int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \frac{I\sqrt{R}}{N^2}\, d\vartheta\right]_{\varphi=\varphi''} . \frac{\delta\vartheta''}{\delta p_i} - \left[\int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \frac{I\sqrt{R}}{N^2}\, d\vartheta\right]_{\varphi=\varphi'} \frac{\delta\vartheta'}{\delta p_i}$$

doch alle termen waarin de grenzen moeten gesubstitueert worden, vervallen wegens het nulworden van $\sqrt{R}$ dus $\frac{I\sqrt{R}}{N^2}$ bij die substitutie (zie o. a. Dienger Diff. u. Int. Rechnung. 1er th. pag. 442).

$M_i N_i = - dx_i$, $M_k N_k = - dx_k$, zoo is: $M_i N_i = -\sin\varphi_i\, d(90\text{-}\varphi_i) = \sin\varphi_i\, d\varphi_i$, $M_k N_k = \sin\varphi_k\, d\varphi_k$, dus $QRST = \sin\varphi_i \sin\varphi_k\, d\varphi_i\, d\varphi_k$, zoodat $\sin\varphi_i \sin\varphi_k \sec\varphi_l\, d\varphi_i\, d\varphi_k$ een oppervlakte element is, waarvan $QRST$ de projectie is en welks normaal met OX_l een hoek φ_l maakt, dus het grondvlak van een elementaire kegel met OP tot beschrijvende lijn. Noemt men dit $d\,s$, zoo kunnen V en F_i ook geschreven worden in de vormen:

$$\left.\begin{aligned} V &= 2\int \frac{I\sqrt{R}}{N^2}\, d\,s, \\ F_i &= 2\int \frac{\sqrt{R}}{N} \cos\varphi_i\, d\,s. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Stelt men nu nog $\Sigma\, p_i\, F_i = S$, zoo bestaat tusschen de grootheden F_k, F_l, S en V de volgende betrekking:

$$(c_i \Sigma p_i^2 - c)\frac{\delta(V-S)}{\delta c} + V - S + \frac{c_k - c_i}{c_k} p_k \left\{\frac{\delta S}{\delta p_k} - \frac{1}{2}\frac{\delta V}{\delta p_k} - F_k\right\} +$$
$$+ \frac{c_l - c_i}{c_l} p_l \left\{\frac{\delta S}{\delta p_l} - \frac{1}{2}\frac{\delta V}{\delta p_l} - F_l\right\} - (c_k - c_i)\frac{\delta S}{\delta c_k} - (c_l - c_i)\frac{\delta S}{\delta c_l} = 0 \text{ [27]} . \; . \quad (51)$$

---

[27] Om in te zien dat deze betrekking waar is, hetgeen door LAPLACE alleen wordt gezegd, kan men haar in deze vorm schrijven:

$$\left\{-c\frac{\delta(V-S)}{\delta c} + V - S + \Sigma\, p_i\left[\frac{\delta S}{\delta p_i} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta V}{\delta p_i} - F_i\right] - \Sigma\, c_i \frac{\delta S}{\delta c_i}\right\} +$$
$$+ c_i\, \Sigma \left\{p_i^2 \frac{\delta(V-S)}{\delta c} - \frac{p_i}{c_i}\left[\frac{\delta S}{\delta p_i} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta V}{\delta p_i} - F_i\right] + \frac{\delta S}{\delta c_i}\right\} = 0$$

Elke der tusschen accolades geplaatste gedeelten is nu symmetrisch ten opzichte der assen, doch de wijze waarop zij verbonden zijn mist deze eigenschap. Dit doet vermoeden dat, indien de vergelijking waar is, zulks het gevolg daarvan is, dat elk der beide deelen op zich zelf nul wordt door invoering der waarden van V, F_i en S.

Om dit voor het eerste gedeelte te bewijzen, merke men op, dat V homogeen en van den graad 0 is, ten opzichte van c, c_i, c_k en c_l en homogeen van den 2den graad, ten opzichte van $\sqrt{c}$, p_i, p_k en p_l zoodat

$$c\frac{\delta V}{\delta c} + \Sigma\, c_i \frac{\delta V}{\delta c_i} = 0 \text{ en } 2c\frac{\delta V}{\delta c} + \Sigma p_i \frac{\delta V}{\delta p_i} = 2\,V$$

is of, omdat $S = -\Sigma\, p_i \dfrac{\delta V}{\delta p_i}$ is, $S = -2V + 2c\dfrac{\delta V}{\delta c}$; verder is dan echter ook S homogeen van den graad 0 ten opzichte van c, c_i, c_k en c_l, zoodat ook $c\dfrac{\delta S}{\delta c} + \Sigma\, c_i \dfrac{\delta S}{\delta c_i} = 0$ is. Bedenkt men nu nog dat $F_i = -\dfrac{\delta V}{\delta p_i}$ is, zoo wordt het eerste gedeelte achtereenvolgens:

welke, door voor F_i en S hare waarden $-\frac{\delta V}{\delta p_i}$ en $-\Sigma p_i \frac{\delta V}{\delta p_i}$

$$-c\frac{\delta V}{\delta c}+2c\frac{\delta S}{\delta c}+V-S+\Sigma p_i\frac{\delta(S+\frac{1}{2}V)}{\delta p_i}=$$

$$=-c\frac{\delta V}{\delta c}+2c\frac{\delta S}{\delta c}+V-S+\left\{-2\,\Sigma p_i\frac{\delta V}{\delta p_i}+2c\,\Sigma p_i\frac{\delta^2 V}{\delta c\delta p_i}+\tfrac{1}{2}\Sigma p_i\frac{\delta V}{\delta p_i}\right\}=$$

$$=-c\frac{\delta V}{\delta c}+2c\frac{\delta S}{\delta c}+V-S-1\tfrac{1}{2}\Sigma p_i\frac{\delta V}{\delta p_i}+2c\frac{\delta\,\Sigma p_i\frac{\delta V}{\delta p_i}}{\delta c}=$$

$$=-c\frac{\delta V}{\delta c}+2c\frac{\delta S}{\delta c}+V-S+1\tfrac{1}{2}S-2c\frac{\delta S}{\delta c}=\tfrac{1}{2}S+V-c\frac{\delta V}{\delta c}=0.$$

Het eerste gedeelte der vergelijking is dus identisch nul, enkel wegens de homogeniteit van V.

Voor het tweede gedeelte stelle men:

$$V'=2\frac{I\sqrt{R}}{N^2},\quad F'_i=2\frac{\sqrt{R}}{L}\cos\varphi_i,\quad S'=\Sigma p_i\,F'_i,$$

zoo wordt, zooals men licht inziet:

$$\frac{\delta V'}{\delta c}=\frac{I}{cN\sqrt{R}};\quad \frac{\delta S'}{\delta c}=\frac{\Sigma p_i\cos\varphi_i}{c\sqrt{R}};\quad \frac{\delta S'}{\delta p_i}-F'_i=\frac{2c_i\,\Sigma p_i\cos\varphi_i}{cN\sqrt{R}}(I\cos\varphi_i-p_iN);$$

$$\frac{\delta V'}{\delta p_i}=2\frac{R+I^2}{cN^2\sqrt{R}}\,c_i\cos\varphi_i-\frac{2\,Ip_ic_i}{cN\sqrt{R}};$$

$$\frac{\delta S'}{\delta c_i}=\left\{\frac{2\,Ip_i\cos\varphi_i}{cN\sqrt{R}}-\frac{(R+I^2)\cos^2\varphi_i}{cN^2\sqrt{R}}-\frac{p_i^2}{c\sqrt{R}}\right\}\Sigma p_i\cos\varphi_i;$$

dus:

$$\Sigma p_i^2\frac{\delta(V'-S')}{\delta c}=\frac{\Sigma p_i^2}{c\sqrt{R}}\left(\frac{I}{N}-\Sigma p_i\cos\varphi_i\right);$$

$$\Sigma\frac{p_i}{c_i}\left(\frac{\delta S'}{\delta p_i}-F'_i\right)=\frac{2I(\Sigma p_i\cos\varphi_i)^2}{cN\sqrt{R}}-\frac{2\,\Sigma p_i^2}{c\sqrt{R}}\Sigma p_i\cos\varphi_i;$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\frac{p_i}{c_i}\frac{\delta V'}{\delta p_i}=\frac{R+I^2}{cN^2\sqrt{R}}\Sigma p_i\cos\varphi_i-\frac{\Sigma p_i^2}{c\sqrt{R}}\cdot\frac{I}{N};$$

$$\Sigma\frac{\delta S'}{\delta c_i}=\frac{2I(\Sigma p_i\cos\varphi_i)^2}{cN\sqrt{R}}-\frac{R+I^2}{cN^2\sqrt{R}}\Sigma p_i\cos\varphi_i-\frac{\Sigma p_i^2}{c\sqrt{R}}\Sigma p_i\cos\varphi_i;$$

dus:

$$\Sigma p_i^2\frac{\delta(V'-S')}{\delta c}-\Sigma\frac{p_i}{c_i}\left(\frac{\delta S'}{\delta p_i}-\tfrac{1}{2}\frac{\delta V'}{\delta p_i}-F'_i\right)+\Sigma\frac{\delta S'}{\delta c_i}=0$$

waaruit in verband met hetgeen te voren is opgemerkt omtrent de differentiatie van V en F_i ook mag afgeleid worden:

te schrijven, eene partiele differentiaal vergelijking van V alleen wordt.

Men stelle nu $V = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 v = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{c^3}{c_1 c_2 c_3}}\,.\,v = Mv$, en vervange in v de veranderlijken c_k en c_l door twee nieuwen ε_k en ε_l, zoodanig dat $\varepsilon_k = \frac{c_i - c_k}{c_i c_k}c$ en $\varepsilon_l = \frac{c_i - c_l}{c_i c_l}c$ is en dus $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$ de lineaire excentriciteiten der ellipsoïde zijn, indien voor a_i de kleinste as gekozen wordt. Alsdan is door partieele differentiatie:

$$c\frac{\delta V}{\delta c} = cv\frac{\delta M}{\delta c} + cM\left\{\frac{\delta v}{\delta c} + \frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k}\cdot\frac{\delta \varepsilon_k}{\delta c} + \frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l}\cdot\frac{\delta \varepsilon_l}{\delta c}\right\};$$

$$\frac{\delta V}{\delta c_k} = v\frac{\delta M}{\delta c_k} + M\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k}\cdot\frac{\delta \varepsilon_k}{\delta c_k}\ ;\ \frac{\delta V}{\delta c_l} = v\frac{\delta M}{\delta c_l} + M\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l}\cdot\frac{\delta \varepsilon_l}{\delta c_l};$$

of, omdat $\frac{\delta M}{\delta c_k} = -\frac{M}{2c_k}$, $\frac{\delta M}{\delta c_l} = -\frac{M}{2c_l}$,

$$\frac{\delta M}{\delta c} = \frac{3M}{2c}\ ,\ c\frac{\delta \varepsilon_k}{\delta c} = \varepsilon_k\ ,\ c\frac{\delta \varepsilon_l}{\delta c} = \varepsilon_l\ ,\ \frac{\delta \varepsilon_k}{\delta c_k} = -\frac{c}{c_k^2}\ ,\ \frac{\delta \varepsilon_l}{\delta c_l} = -\frac{c}{c_l^2}$$

is,

$$c\frac{\delta V}{\delta c} = M\left(\frac{3}{2}v + c\frac{\delta v}{\delta c} + \varepsilon_k\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k} + \varepsilon_l\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l}\right)$$

$$\frac{\delta V}{\delta c_k} = -\frac{M}{c_k}\left(\tfrac{1}{2}v + \frac{c}{c_k}\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k}\right);\ \frac{\delta V}{\delta c_l} = -\frac{M}{c_l}\left(\tfrac{1}{2}v + \frac{c}{c_l}\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l}\right).$$

Zij nu nog $s = \Sigma\, p_i\frac{\delta v}{\delta p_i}$ zoo is $S = -Ms$, en men zal de waarden van $c\frac{\delta S}{\delta c}$, $\frac{\delta S}{\delta c_k}$, $\frac{\delta S}{\delta c_l}$ vinden door eenvoudig in $c\frac{\delta V}{\delta c}$ enz. v door $-s$ te vervangen. Daar nu V en S homogeen van den 2den graad zijn, ten opzichte van p_i, $\sqrt{c}$, $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$, zullen v en s homogeen van den graad -1 zijn, zoodat:

$$\Sigma\, p_i\frac{\delta v}{\delta p_i} + 2\varepsilon_k\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k} + 2\varepsilon_l\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l} + 2c\frac{dv}{\delta c} = -v \text{ of } 2\varepsilon_k\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k} + 2\varepsilon_l\frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l} + 2c\frac{\delta v}{\delta c} = -v - s$$

en

$$\Sigma\, p_i\frac{\delta s}{\delta p_i} + 2\varepsilon_k\frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k} + 2\varepsilon_l\frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l} + 2c\frac{\delta s}{\delta c} = -s \text{ of } c\frac{\delta s}{\delta c} = -\tfrac{1}{2}\Sigma\, p_i\frac{\delta s}{\delta p_i} - \tfrac{1}{2}s - \varepsilon_k\frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k} - \varepsilon_l\frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l}$$

is.

$$\Sigma\left\{p_i^2\frac{\delta(V-S)}{\delta c} - \frac{p_i}{c_i}\left[\frac{\delta S}{\delta p_i} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta V}{\delta p_i} - F_i\right] + \frac{\delta S}{\delta c_i}\right\} = 0.$$

Substitueert men dit nu in (51) voor V, S en hare differentiaal-quotienten, zoo gaat zij over in:

$$\Sigma p_i^2 \left(v + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \Sigma p_i \frac{\delta s}{\delta p_i}\right) + \varepsilon_k^2 \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k} + \varepsilon_l^2 \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l} - \frac{c^2 \delta s}{c_i \delta c} + \frac{1}{2} (\varepsilon_k + \varepsilon_l) s +$$

$$+ \varepsilon_k p_k \frac{\delta s}{\delta p_k} + \varepsilon_l p_l \frac{\delta s}{\delta p_l} - \frac{1}{2} \varepsilon_k p_k \frac{\delta v}{\delta p_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_l p_l \frac{\delta v}{\delta p_l} = 0 \text{ [28]} \quad . \quad . \quad (51^a)$$

---

[28] Nu toch is:

$$\frac{\delta V}{\delta c} = \frac{M}{2c} \left(2c \frac{\delta v}{\delta c} + 2\varepsilon_k \frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k} + 2\varepsilon_l \frac{\delta v}{\delta \varepsilon_l} + 3v\right) = \frac{M}{2c} (2v - s),$$

$$\frac{\delta S}{\delta c} = -\frac{M}{2c} \left(2c \frac{ds}{dc} + 2\varepsilon_k \frac{ds}{d\varepsilon_k} + 2\varepsilon_l \frac{ds}{\delta \varepsilon_l} + 3s\right) = -\frac{M}{2c} \left(2s - \Sigma p_i \frac{\delta s}{\delta p_i}\right),$$

$$\frac{\delta S}{\delta c_k} = \frac{M}{c_k} \left(\frac{1}{2} s + \frac{c}{c_k} \frac{\delta v}{\delta \varepsilon_k}\right), \quad \frac{\delta S}{\delta c_l} = \frac{M}{c_l} \left(\frac{1}{2} s + \frac{c}{c_l} \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l}\right),$$

$$\frac{\delta S}{\delta p_k} - \frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta p_k} - F_k = \frac{\delta \left(S + \frac{1}{2} V\right)}{\delta p_k} = M \frac{\delta \left(\frac{1}{2} v - s\right)}{\delta p_k},$$

$$\frac{\delta S}{\delta p_l} - \frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta p_l} - F_l = \frac{\delta \left(S + \frac{1}{2} V\right)}{\delta p_l} = M \frac{\delta \left(\frac{1}{2} v - s\right)}{\delta p_l},$$

waaruit door substitutie in (51) volgt:

$$\left(c_i \Sigma p_i^2 - c\right) \frac{M}{2c} \left(2v + s - \Sigma p_i \frac{\delta s}{\delta p_i}\right) + M(v+s) - \frac{c_i \varepsilon_k p_k M}{c} \cdot \frac{\delta \left(\frac{1}{2} v - s\right)}{\delta p_k} -$$

$$- \frac{c_i \varepsilon_l p_l M}{c} \cdot \frac{\delta \left(\frac{1}{2} v - s\right)}{\delta p_l} + \frac{c_i \varepsilon_k M}{c} \left\{\frac{s}{2} + \left(\frac{c}{c_i} + \varepsilon_k\right) \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k}\right\} +$$

$$+ \frac{c_i \varepsilon_l M}{c} \left\{\frac{s}{2} + \left(\frac{c}{c_i} + \varepsilon_l\right) \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l}\right\} = 0$$

of, na vermenigvuldiging met $\frac{c}{Mc_i}$ en rangschikking:

$$\Sigma p_i^2 \left(v + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \Sigma p_i \frac{\delta s}{\delta p_i}\right) + \varepsilon_k^2 \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k} + \varepsilon_l^2 \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l} -$$

$$- \frac{c}{c_i} \left\{- \frac{1}{2} \Sigma p_i \frac{\delta s}{\delta p_i} - \frac{1}{2} s - \varepsilon_k \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_k} - \varepsilon_l \frac{\delta s}{\delta \varepsilon_l}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\varepsilon_k + \varepsilon_l) s + \varepsilon_k p_k \frac{\delta s}{\delta p_k} + \varepsilon_l p_l \frac{\delta s}{\delta p_l} - \frac{1}{2} \varepsilon_k p_k \frac{\delta v}{\delta p_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_l p_l \frac{\delta v}{\delta p_l} = 0$$

hetgeen identisch is met (51^a) aangezien de vorm tusschen accolades volgens de tekst gelijk aan $c \frac{\delta s}{\delta c}$ is.

Men denke zich nu de functie v ontwikkeld in eene reeks, naar de opklimmende machten van $\sqrt{c}$, $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$, welke de afmetingen der ellipsoïde bepalen; deze reeks zal dan tevens naar de afdalende machten van p_i gerangschikt zijn, tengevolge der homogeniteit van v ten opzichte van p_i, $\sqrt{c}$, $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$. Stellen wij derhalve,

$$v = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mu_m,$$

zoo zullen de termen niet alleen homogeen en van den graad -1 zijn, maar ook afzonderlijk homogeen ten opzichte van p_i en ten opzichte van $\sqrt{c}$, $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$, omdat de machten der eerste grootheden steeds afdalen, die der laatste toenemen.

Indien dus β_m de graad is van μ_m ten opzichte van $\sqrt{c}$, $\sqrt{\varepsilon_k}$, $\sqrt{\varepsilon_l}$ en dus $-\beta_m - 1$ die ten opzichte der grootheden p_i, zoo is steeds $\sum_i p_i \frac{\delta\mu_m}{\delta p_i} = -(\beta_m + 1)\,\mu_m$. Vervangt men dus in (51[a]) v door deze reeks, zoo wordt de vergelijking:

$$\frac{1}{2}\sum_i p_i^2 \times \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_m(\beta_m+3)\mu_m = \frac{c^2}{c_i}\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\frac{\delta\mu_m}{\delta c} - \varepsilon_k^2\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_k}$$
$$-\varepsilon_l^2\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_l} - \frac{1}{2}(\varepsilon_k+\varepsilon_l)\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\mu_m - \varepsilon_k p_k \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\beta_m+\frac{3}{2}\right)\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k} -$$
$$-\varepsilon_l p_l \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\beta_m+\frac{3}{2}\right)\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l} \quad (29) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51^b)$$

(29) Nu toch is $s = \sum_i p_i \frac{\delta v}{\delta p_i} = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(p_i\frac{\delta\mu_m}{\delta p_i} + p_k\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k} + p_l\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l}\right) = -\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\mu_m$

dus $\sum p_i\frac{\delta s}{\delta p_i} = -\sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)\left(p_i\frac{\delta\mu_m}{\delta p_i} + p_k\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k} + p_l\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l}\right) = \sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m+1)^2\mu_m$,

zoodat $\left(v + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sum p_i\frac{\delta s}{\delta p_i}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=\infty}\beta_m(\beta_m+3)\mu_m$

terwijl $\varepsilon_k p_k\left(\frac{\delta s}{\delta p_k} - \frac{1}{2}\frac{\delta v}{\delta p_k}\right) = -\varepsilon_k p_k \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\beta_m + {}^3/_2\right)\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k}$ is, en evenzoo

$\varepsilon_l p_l\left(\frac{\delta s}{\delta p_l} - \frac{1}{2}\frac{\delta v}{\delta p_l}\right) = -\varepsilon_l p_l \sum_{m=0}^{m=\infty}(\beta_m + {}^3/_2)\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l}$, door substitutie van welke waarden (51[a]) gemakkelijk in (51[b]) overgaat.

Stelt men hierin aan elkander gelijk de termen, die aan beide zijden van het gelijkteeken van denzelfden graad zijn, hetgeen geoorloofd is, omdat de vergelijking identisch waar is, zoo geeft dit:

$$\tfrac{1}{2}\sum_i p_i^2.\beta_{m+1}(\beta_{m+1}+3)\mu_{m+1}=\left\{\frac{c^2}{c_i}\cdot\frac{\delta\mu_m}{\delta c}-\varepsilon_k^2\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_k}-\varepsilon_l^2\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_l}-\tfrac{1}{2}(\varepsilon_k+\varepsilon_l)\mu_m\right\}\times$$

$$\times(\beta_m+1)-\left(\varepsilon_k p_k\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k}+\varepsilon_l p_l\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l}\right)(\beta_m+{}^3/_2).\ ^{(30)}$$

waaruit volgt:

$$\mu_{m+1}=\frac{(\beta_m+1)\left\{\frac{c^2}{c_i}\cdot\frac{\delta\mu_m}{\delta c}-\varepsilon_k^2\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_k}-\varepsilon_l^2\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_l}-\frac{1}{2}(\varepsilon_k+\varepsilon_l)\mu_m\right\}-(\beta_m+{}^3/_2)\left(\varepsilon_k p_k\frac{\delta\mu_m}{\delta p_k}+\varepsilon_l p_l\frac{\delta\mu_m}{\delta p_l}\right)}{\tfrac{1}{2}\beta_{m+1}(\beta_{m+1}+3)\Sigma p_i^2} \quad (52).$$

Ontwikkelt men nu echter

$$V=\int\frac{d\,M.}{\sqrt{\Sigma(p_i-x_i)^2}}$$

in eene reeks, zoo vindt men voor den eersten term

$$\int\frac{dM}{\sqrt{\Sigma p_i^2}}=\frac{M}{\sqrt{\Sigma p_i^2}}$$

waaruit volgt:

$$\mu_0=\frac{1}{\sqrt{\Sigma p_i^2}},$$

---

(30) Beschouwt men namelijk de vorm van $\frac{I\sqrt{R}}{MN^3}$, zijnde:

$$\frac{3\,\Sigma p_i\,c_i\cos\varphi_i\left\{(\Sigma p_i\,c_i\cos\varphi_i)^2+(c-\Sigma p_i^2 c_i)\,\Sigma\,c_i\cos^2\varphi_i\right\}^{\frac{1}{2}}(c_1\,c_2\,c_3)^{\frac{1}{2}}}{4\,\pi\,c\sqrt{c}\,(\Sigma\,c_i\,\cos^2\varphi_i)^2}$$

zoo blijkt licht dat bij de ontwikkeling in eene reeks, welke alleen betrekking heeft op de vorm tusschen accolades, twee opvolgende termen ééne graad ten opzichte van c, c_k of c_l zullen verschillen, zoodat twee opvolgende termen van de reeks voor v, twee graden ten opzichte van $\sqrt{c}$ enz. zullen verschillen. Omdat nu μ_m homogeen van den graad β_m is, ten opzichte van $\sqrt{c}, \sqrt{\varepsilon_k}$, $\sqrt{\varepsilon_l}$, is $2c\,\frac{\delta\mu_m}{\delta c}+2\,\varepsilon_k\,\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_k}+2\,\varepsilon_l\,\frac{\delta\mu_m}{\delta\varepsilon_l}=\beta_m\,\mu_m$, waaruit blijkt dat alle termen ter rechterzijde in de vergelijking (51^b) voor eenige waarde van m van den graad β_m+2 zijn en dus van denzelfden graad als μ_{m+1}, waardoor vergelijking (52) gewettigd is.

zoodat door middel der vergelijking (52) de achtereenvolgende termen μ_1, μ_2 enz. kunnen gevonden worden. Daarbij is het nu van gewicht, dat geene der termen c zal bevatten, omdat zij niet in μ_o voorkomt en dus $\frac{\delta \mu_o}{\delta c} = 0$ is, waardoor c ook uit μ_1 verdwijnt, enz. Hieruit volgt dat c evenmin in v voorkomt en dus $\frac{\delta v}{\delta c} = 0$ is. Daar nu de vergelijking der ellipsoïde is $\Sigma c_i x_i^2 = c$, zijn alle ellipsoïden waarin alleen c verschilt, doch ε_k en ε_l hetzelfde zijn, confocaal. De waarden van v en $-\frac{\delta v}{\delta p_i}$ zijn dus dezelfde voor alle ellipsoïden met confocale hoofddoorsneden. Derhalve, daar $F_i = -M\frac{\delta v}{\delta p_i}$ is, zullen ook de resulterende aantrekkingen, door alle dergelijke ellipsoïden op hetzelfde punt uitgeoefend, evenredig zijn met hare massae.

Maakt men gebruik van de opmerking, dat $\beta_o = 0$ en $\beta_{m+1} = \beta_m + 2$ is en stelt dus $\beta_m = 2\,m$ zoo wordt $\varepsilon_k \frac{\delta \mu_m}{\delta \varepsilon_k} + \varepsilon_l \frac{\delta \mu_m}{\delta \varepsilon_l} = m\mu_m$, waardoor vergelijking (52) overgaat in:

$$\mu_{m+1} = \frac{(2m+1)\left[\varepsilon_k(\varepsilon_l - \varepsilon_k)\frac{\delta \mu_m}{\delta \varepsilon_k} - \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_k + (2m+1)\varepsilon_l\right\}\mu_m\right] - \left(2m+\frac{3}{2}\right)\left(\varepsilon_k p_k \frac{\delta \mu_m}{\delta p_k} + \varepsilon_l p_l \frac{\delta \mu_m}{\delta p_l}\right)}{(m+1)(2m+5)\Sigma p_i^2}$$

waaruit men de waarde van v kan verkrijgen, uitgedrukt door eene reeks die zeer sterk convergeert, zoodra de excentriciteiten $\sqrt{\varepsilon_k}$ en $\sqrt{\varepsilon_l}$ zeer klein, of de afstand $\sqrt{\Sigma p_i^2}$ zeer groot is, ten opzichte der afmetingen van de ellipsoïde. Voor een bol vindt men door $\sqrt{\varepsilon_l} = \sqrt{\varepsilon_k} = 0$ te nemen, $V = \frac{M}{\sqrt{\Sigma p_i^2}}$.

De eigenschap der functie v, van onafhankelijk van c te zijn, levert het middel om haar in de eenvoudigste gedaante te verkrijgen, want daar men dan c kan laten veranderen hoe men wil, mits slechts ε_k en ε_l onveranderd blijven, zal men c zoo kunnen nemen dat de ellipsoïde oneindig afgeplat is, of door het aangetrokken punt P gaat. In beide gevallen wordt het onderzoek eenvoudiger, doch daar de aantrekking door eene ellipsoïde op een punt harer oppervlakte reeds door de formulen (47) gegeven is, is de laatste onderstelling de meest doelmatige.

Noemen wij dus voor deze hulpellipsoïde C en C_i, hetgeen voor de oorspronkelijke c en c_i was, zoo geeft de voorwaarde dat zij door P gaat en met de eerste confocaal is,

$$\Sigma\, C_i p_i^2 = C,\ \varepsilon_k = \frac{C_i - C_k}{C_i C_k} C,\ \varepsilon_l = \frac{C_i - C_l}{C_i C_l} C,$$

waaruit volgt:

$$C_k = \frac{CC_i}{C_i \varepsilon_k + C},\ C_l = \frac{CC_i}{C_i \varepsilon_l + C},$$

dus ook

$$C_i p_i^2 + \frac{CC_i}{C_i \varepsilon_k + C} p_k^2 + \frac{CC_i}{C_i \varepsilon_l + C} p_l^2 = C$$

of, indien wij de halfassen der hulpellipsoïde A_i noemen, zoodat $\frac{C_i}{C} = \frac{1}{A_i^2}$ is,

$$\frac{p_i^2}{A_i^2} + \frac{1}{\varepsilon_k + A_i^2} p_k^2 + \frac{1}{\varepsilon_l + A_i^2} p_l^2 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

welke vergelijking voor A_i^2 steeds ééne en nooit meer dan ééne positieve waarde geeft [31], waaruit dan, door tusschenkomst van ε_k en ε_l de beide andere halfassen A_k en A_l berekend kunnen worden.

Is nu $M' = \frac{4}{3} \pi A_i A_k A_l$ de massa dezer ellipsoïde, F'_i de componente in de richting der as x_i, welke zij op het punt

---

[31]) Rangschikt men toch de vergelijking naar A_i^2, zoo wordt de bekende term $- p_i^2 \varepsilon_k \varepsilon_l$ negatief, zoodat er ééne positieve waarde voor A_i^2 bestaat. Er kunnen echter geene andere reëele waarden voor A_i zijn, welke de functie links nul maken, omdat haar differentiaalquotient ten opzichte van A_i^2, zijnde:

$$-\left\{ \frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{(A_i^2 + \varepsilon_k)^2} + \frac{A_l^2}{(A_i^2 + \varepsilon_l)^2} \right\},$$ steeds negatief is.

P uitoefent, en stelt men $\frac{\sqrt{A_i^2 - A_k^2}}{A_i} = E_k$, $\frac{\sqrt{A_i^2 - A_l^2}}{A_i} = E_l$ en

$$\int_0^1 \frac{x^2\, dx.}{\sqrt{(1 - E_k^2 x^2)(1 - E_l^2 x^2)}} = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

zoo is volgens (46)

$$F'_i = \frac{3\, p_i\, M'}{A_i^3} Q\,;\; F'_k = \frac{3\, p_k\, M'}{A_i^3} \frac{\delta\, E_k\, Q}{\delta\, E_k}\,;\; F'_l = \frac{3\, p_l\, M'}{A_i^3} \frac{\delta\, E_l\, Q}{\delta\, E_l}$$

en daar nu in het voorgaande bewezen is dat $F_i : F'_i = F_k : F'_k = F_l : F'_l = M : M'$ is, zoo is

$$F_i = \frac{3\, p_i\, M}{A_i^3} Q\,;\; F_k = \frac{3\, p_k\, M}{A_i^3} \frac{\delta\, E_k\, Q}{\delta\, E_k}\,;\; F_l = \frac{3\, p_l\, M}{A_i^3} \frac{\delta\, E_l\, Q}{\delta\, E_l} \,. \quad (55)$$

Deze waarden gelden nu voor alle buiten de ellipsoïde gelegen punten. Stelt men daarin A_i weder $= a_i$, zoo gaan ook E_k en E_l in e_k en e_l, dus Q in q (formule 46) en dus (55) in (47) over.

Het blijkt dus uit deze resultaten, dat de bepaling van de aantrekking, zoowel voor uitwendige als voor inwendige punten, van een elliptische integraal afhangt en dat dus de waarden der componenten niet door eindige algebraische vormen, noch door goniometrische of logarithmische functien kunnen worden voorgesteld.

De vormen (47) en (55) zijn dus de eenvoudigste, waarin die waarden kunnen gebracht worden.

Is de ellipsoïde een omwentelingslichaam zoo is $E_l = E_k$, terwijl deze grootheid de excentriciteit E voorstelt, indien de spheroïde gerekt is. Bij afgeplatte spheroïden is daarentegen: $E = -\frac{A_i^2}{A^2} E_k^2$, indien A de straal des aequators van de hulpspheroïde voorstelt.

In het eerste geval wordt dus

$$Q = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1 - E^2 x^2} = \frac{1}{E^3}\left(- E + \log \sqrt{\frac{1 + E}{1 - E}}\right)$$

waardoor men vindt, bedenkend dat $a_i e = A_i E$ is,

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \frac{3\, p_i\, M}{a_i^3 e^3}\left(\log \frac{A_i + a_i e}{A} - \frac{a_i e}{A_i}\right) \\ \text{terwijl } \frac{F_k}{p_k} &= \frac{F_l}{p_l} = \frac{3\, M}{2\, a_i^3 e^3}\left(\frac{a_i e\, A_i}{A^2} - \log \frac{A_i + a_i e}{A}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (43^a)$$

wordt, welke waarden echter niet uit de formulen (55) kunnen verkregen worden, maar wel uit de daarmede geheel identische, welke men uit (45) verkrijgt, op dezelfde wijze als (55) uit (47) verkregen zijn. De oorzaak daarvan is dat verg. (δ) pag. 84 niet meer waar is, wanneer $e_l = e_k$ genomen wordt. Op geheel gelijke wijze vindt men voor de afgeplatte spheroïde uit (55) de formulen (43) terug; terwijl uit beiden de formulen (16) en (16'') voor inwendige punten verkregen worden, door $A_i = a_i$, dus ook $A = a$ te nemen.

LAPLACE heeft derhalve aanspraak op de eer van het eerst het vraagstuk van de aantrekking eener homogene ellipsoïde op een willekeurig punt, in zijne meest algemeene gedaante te hebben opgelost.

Gaat men nu den gang daarvan na, zoo ziet men, dat het gedeelte dat betrekking heeft op een inwendig punt, of een punt op de oppervlakte gelegen, niets te wenschen overlaat, daar de eindformules door rechtstreeksche integratie uit de oorspronkelijken zijn afgeleid en hare eenvoudigste gedaante hebben. In dit gedeelte is dan ook later geene verandering van beteekenis gebracht. Waar het echter een punt geldt, dat buiten het oppervlak ligt, is het meest wezenlijke gedeelte der oplossing, het vinden der vergelijking (51), wier bestaan, volgens LAPLACE's eigene woorden, en naar het schijnt, ook volgens het oordeel van Prof. CAYLEY, (32) niet anders dan a posteriori, door differentiatie kan bewezen worden. De geheele methode krijgt daardoor het karakter van alleen door een gelukkig toeval te zijn ontdekt en is derhalve weinig bevredigend. Bovendien berust de verdere bewerking, op de ontwikkeling van de grootheid V in eene oneindige reeks, en de toepassing op deze van de eigenschappen der identieke vergelijkingen.

Geen wonder dus, dat, hoezeer door LAPLACE het eigenlijke doel, het vinden der formules (47) en (55) was bereikt, men toch de vraag niet liet rusten, maar pogingen aanwendde om, hetzij op meer rechtstreeksche, hetzij op meer eenvoudige wijze die resultaten te verkrijgen.

In de Mémoires de l'Ac. Roy. des Sc. van 1788 komt onder

(32) Quarterly Journal. T I, pag. 287.

den titel „Mémoire sur les Intégrales doubles", een geschrift van LEGENDRE voor, waarin hij de substitutie van nieuwe veranderlijken (die hij zegt zelf daarbij ontdekt en later identisch te hebben bevonden, met hetgeen LAGRANGE reeds vroeger had bekend gemaakt) aanwendt, om de derde der formulen (20) te vereenvoudigen.

Alvorens hiertoe echter overtegaan, behandelt hij eerst het bizondere geval, waarin de coördinaat $p_i = 0$ is, en dus het aangetrokken punt in het vlak der beide assen a_k en a_l ligt, hetgeen eene uitbreiding is van de theorie der omwentelings-ellipsoïden, waar het punt steeds ligt in een vlak, dat door de omwentelingsas en eene middellijn des aequators gaat.

In dit geval wordt namelijk, indien ter bekorting

$\frac{\alpha_k^2}{\alpha_l^2} = m$, $\frac{\alpha_i^2}{\alpha_l^2} = n$ gesteld wordt,

$$N = \alpha_l^2 \,(n \cos^2\varphi + m \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta),$$

$$I = \alpha_l^2 \sin\varphi \,(m p_k \cos\vartheta + p_l \sin\vartheta),$$

$$h = 1 - \alpha_l^2 \,(m\, p_k^2 + p_l^2),$$

$$R = \alpha_l^2 \Big\{ \sin^2\varphi \sin^2\vartheta (\alpha_l^2 p_l^2 + h + nh\cot^2\varphi) + 2\sin^2\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta\, a_l^2 m p_k p_l +$$
$$+ \sin^2\varphi \cos^2\vartheta\, (\alpha_l^2 m^2 p_k^2 + mh + nh \cot^2\varphi) \Big\}.$$

Men voere nu, in plaats van ϑ, eene nieuwe veranderlijke ϑ' in, bepaald door de vergelijkingen

$$\vartheta = \beta + \vartheta', \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 p_k p_l}{a_l^2 - a_k^2 - p_l^2 + p_k^2},$$

zoo wordt, indien men let op de waarde van h:

$$R = \alpha_l^2 \sin^2\varphi \Big[\sin^2(\beta + \vartheta')(1 - \alpha_l^2 m p_k^2 + nh \cot^2\varphi) +$$
$$+ 2 \sin(\beta + \vartheta') \cos(\beta + \vartheta')\, \alpha_l^2 m p_k p_l +$$
$$\Big\{1 - \sin^2(\beta + \vartheta')\Big\}(m - \alpha_l^2 m p_l^2 + nh \cot^2\varphi)\Big] =$$
$$= \alpha_l^2 \sin^2\varphi \Big\{ m\, \alpha_l^2 \sin^2(\beta + \vartheta') . (a_k^2 - a_l^2 - p_k^2 + p_l^2) +$$
$$+ 2\, m\, \alpha_l^2 p_k p_l \sin(\beta + \vartheta') \cos(\beta + \vartheta') +$$
$$+ m\, \alpha_l^2 (a_k^2 - p_k^2 + 2 p_k p_l \cot 2\beta) + n\, h \cot^2\varphi \Big\} =$$
$$= \alpha_l^4 m p_k p_l \sin^2\varphi \Big[2\cos(\beta + \vartheta') . \Big\{ \sin(\beta + \vartheta') + \cot 2\beta \cos(\beta + \vartheta') \Big\}$$
$$+ \frac{a_k^2 - p_k^2}{p_k p_l} + \frac{nh \cot^2\varphi}{\alpha_l^2 m p_k p_l} \Big] =$$

$$= \frac{\alpha_l^4 m p_k p_l \sin^2\varphi}{\sin\beta \cos\beta}\left[\cos^2\beta - \sin^2\vartheta' + \left(a_k^2 - p_k^2 + \frac{nh\cot^2\varphi}{\alpha_l^2 m}\right)\frac{\sin\beta\cos\beta}{p_k p_l}\right]$$

of indien μ de waarde van ϑ' is, waarvoor $R = o$ is,

$$R = \frac{\alpha_l^4 m p_k p_l \sin^2\varphi.}{\sin\beta \cos\beta}(\sin^2\mu - \sin^2\vartheta'),$$

waarin dan $\sin^2\mu = \cos^2\beta + \left(a_k^2 - p_k^2 + \frac{nh\cot^2\varphi}{\alpha_l^2 m}\right)\frac{\sin\beta\cos\beta}{p_k p_l}$ is.

Op dezelfde wijze wordt

$$N = \alpha_l^2 \sin^2\varphi \left\{ n\cot^2\varphi + m\cos^2(\beta+\vartheta') + \sin^2(\beta+\vartheta') \right\} =$$
$$= \alpha_l^2 \sin^2\varphi \left\{ \lambda_i \sin^2\vartheta' + \lambda_k \sin\vartheta' \cos\vartheta' + \lambda_l \cos^2\vartheta' \right)$$

zijnde ter bekorting gesteld

$$\lambda_i = \cos^2\beta + m\sin^2\beta + n\cot^2\varphi,$$
$$\lambda_k = 2(1-m)\sin\beta\cos\beta,$$
$$\lambda_l = \sin^2\beta + m\cos^2\beta + n\cot^2\varphi.$$

Door al deze substitutien gaat de te integreren functie van formule (20), 3 over in:

$$\frac{\sqrt{m p_k p_l (\sin^2\mu - \sin^2\vartheta')}\,\sin\varphi\sin(\beta+\vartheta')\,d\varphi\,d\vartheta'}{(\lambda_i \sin^2\vartheta' + \lambda_k \sin\vartheta'\cos\vartheta' + \lambda_l\cos^2\vartheta')\sqrt{\sin\beta\cos\beta}}$$

of indien $\sin\delta = \frac{tg\,\vartheta'}{tg\,\mu}$ is,

$$\sqrt{\frac{m p_k p_l}{\sin\beta\cos\beta}}\sin\mu\,\mathrm{tg}\,\mu\frac{\sin\varphi.\cos^2\delta(\sin\beta + \mathrm{tg}\mu\cos\beta\sin\delta)\,d\varphi\,d\delta}{(1+\mathrm{tg}^2\mu\sin^2\delta)(\lambda_i\mathrm{tg}^2\mu\sin^2\delta + \lambda\mathrm{tg}\mu\sin\delta + \lambda_l)}.$$

Uit de waarden van δ en μ blijkt nu licht, dat bij de integratie naar δ, de grenzen zijn $\pm\frac{\pi}{2}$ dus constant, zoodat men kan beginnen met naar δ te integreren, hoewel dit bij de opmaking der formule (20) niet was ondersteld.

Voor de uitvoering dier integratie, is nu

$$\frac{(1-\sin^2\delta)(\sin\beta \pm \mathrm{tg}\,\mu\cos\beta\sin\delta)}{(1+tg^2\mu\sin^2\delta)(\lambda_i\,\mathrm{tg}^2\mu\sin^2\delta \pm \lambda_k\,\mathrm{tg}\mu\sin\delta + \lambda_l)} = \frac{A \pm B\,\mathrm{tg}\,\mu\sin\delta}{1+\mathrm{tg}^2\mu\sin\delta} +$$
$$\frac{C \pm D\,\mathrm{tg}\,\mu\sin\delta}{\lambda_i\,\mathrm{tg}^2\mu\sin^2\delta \pm \lambda_k\,\mathrm{tg}\,\mu\sin\delta + \lambda_l}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

waarin, zooals men licht op de gewone wijze vindt,

$$A = \frac{\sin\beta}{(1-m)\sin^2\mu},\; B = \frac{\cos\beta}{(m-1)\sin^2\mu},\; C = \sin\beta\left\{1 - \frac{\lambda_l}{(1-m)\sin^2\mu}\right\}$$
$$D = -\cos\beta\left\{\cot^2\mu - \frac{\lambda_i}{(1-m)\sin^2\mu}\right\}.$$

Verder is nu klaarblijkelijk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{A + B \operatorname{tg} \mu \sin \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu \sin^2 \delta} d\delta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A\, d\delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu \sin^2 \delta} = A \pi \cos \mu = \frac{\pi \sin \beta \cos \mu}{(1 - m) \sin^2 \mu}.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C + D\, tg\, \mu \sin \delta}{\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu \sin^2 \delta + \lambda_k \operatorname{tg} \mu \sin \delta + \lambda_l} d\delta = \frac{C(\lambda_l + \lambda_i tg^2 \mu + E) - D \lambda_k tg^2 \mu}{E \sqrt{\{(E + \lambda_l)^2 - \lambda_i^2 \operatorname{tg}^4 \mu\}}} \mu.$$

zijnde $E = \sqrt{\{(\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu)^2 - \lambda_k^2 \operatorname{tg}^2 \mu\}}$, [33]

---

[33] Stelt men n.l. $\sin \delta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, zoo wordt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(C + D \operatorname{tg} \mu \sin \delta)\, d\delta}{\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu \sin^2 \delta + \lambda_k \operatorname{tg} \mu \sin \delta + \lambda_l} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\{(C + D \operatorname{tg} \mu) x^2 + (C - D \operatorname{tg} \mu)\}\, dx}{(\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu + \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l) x^4 - 2(\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_l) x^2 + (\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l)}$$

$$= 2(C + D \operatorname{tg} \mu) \int_0^\infty \frac{dx}{(\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l) x^4 - 2(\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_l) x^2 + (\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu + \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l)} +$$

$$+ 2(C - D \operatorname{tg} \mu) \int_0^\infty \frac{dx}{\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu + \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l) x^4 - 2(\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_l) x^2 + (\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l)}$$

zijnde de eerste dezer integralen, het resultaat van de vervanging van x^2 door $\frac{1}{x^2}$, in de door den eersten term van den teller gevormde integraal. Beide integralen verschillen nu alleen door het teeken van μ, zoodat slechts een van beiden behoeft bepaald te worden.

Stelt men nu $\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu - \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l = a$, $2(\lambda_l - \lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu) = 2b$ $\lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu + \lambda_k \operatorname{tg} \mu + \lambda_l = c$ zoo is $a c > b^2$, en $\sqrt{ac} = E$ en dus (zie bijv. Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, zweiter theil. pagg. 17 en 130)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a x^4 + 2 b x^2 + c} = \frac{\pi}{2\sqrt{2c(E + b)}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{c x^4 + 2 b x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{2a(E + b)}},$$

zoodat de gezochte waarde is,

$$\pi \left\{ \frac{C + D \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{2c(E + b)}} + \frac{C - D \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{2a(E + b)}} \right\} = \frac{C(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - D \operatorname{tg} \mu (\sqrt{c} - \sqrt{a})}{E \sqrt{2(E + b)}} \pi =$$

$$\frac{C(a + c + 2\sqrt{ac}) - D \operatorname{tg} \mu (c - a)}{E \sqrt{2(E + b)(a + c \times 2\sqrt{ac}}} \pi = \frac{C(\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2 \mu + E) - D \lambda_k \operatorname{tg}^2 \mu}{E \sqrt{\{(E + \lambda_l)^2 - \lambda_i^2 \operatorname{tg}^4 \mu\}}} \pi$$

zoodat alleen nog in deze laatste vorm de substitutien behoeven te worden verricht. Houdt men daarbij in het oog, dat men slechts het verschil behoeft, van de waarden dier vorm voor $\vartheta = \pm\mu$ en dat bij de grenswaarden $I^2 + hN = 0$ dus $N = -\frac{I^2}{h}$ is, zoo kan deze substitutie op de volgende wijze zeer gemakkelijk geschieden.

Door de invoering der waarden toch vindt men:

$$N = (\lambda_l \pm \lambda_k \operatorname{tg}\mu + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu)\,\alpha_l^2 \sin^2\varphi \cos^2\mu,$$

$$I = \{(mp_k \cos\beta + p_l \sin\beta) \pm (p_l \cos\beta - mp_k \sin\beta)\, tg\,\mu\}\,\alpha^2 \sin\varphi \cos\mu,$$

of indien men stelt

$$mp_k \cos\beta + p_l \sin\beta = a', \qquad p_l \cos\beta - mp_k \sin\beta = b',$$

$$I = (a' \pm b'\, tg\,\mu)\,\alpha_l^2 \sin\varphi \cos\mu,$$

zoodat

$$\lambda_l \pm \lambda_k \operatorname{tg}\mu + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu = -\frac{\alpha_l^2 (a' \pm b' \operatorname{tg}\mu)^2}{h} = -P^2_{\pm}$$

$$\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu = -\frac{P^2_+ + P^2_-}{2},\ \lambda_k \operatorname{tg}\mu = -\frac{P^2_+ - P^2_-}{2},$$

$$E = -P_+ P_-,\ \lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu + E = -\frac{(P_+ + P_-)^2}{2}$$

$$\frac{C(\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu + E) - D\,\lambda_k \operatorname{tg}^2\mu}{E\sqrt{\{E + \lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu\}\{E + \lambda_l - \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu\}}} = \frac{(C + D\operatorname{tg}\mu)P_- + (C - D\operatorname{tg}\mu)P_+}{P_+ P_- \sqrt{-2(E + \lambda_l - \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu)}}.$$

Stelt men echter in de identische formule (i) $\sin\delta = 1$, zoo leert zij dat: $C \pm D \operatorname{tg}\mu = (A \pm B \operatorname{tg}\mu)\, P^2_{\pm} \cos^2\mu$, en dus

$$\frac{(C + D\operatorname{tg}\mu)P_- + (C - D\operatorname{tg}\mu)P_+}{P_+ P_-} = \cos^2\mu\{(A + B\operatorname{tg}\mu)P_+ + (A - B\operatorname{tg}\mu)P_-\} =$$

$$= \frac{2\alpha_l}{(1-m)\sqrt{h}}(a' \sin\beta \cot^2\mu - b' \cos\beta).$$

Verder is identisch

$$E + \lambda_l - \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu = E + \lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu - 2\sin^2\mu(\lambda_i - \lambda_l) - 2\sin^2\mu(\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu)$$

en $\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu + E = -\frac{2\alpha_l^2 a'^2}{h}$, $\lambda_l + \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu = -\frac{\alpha_l^2(a'^2 + b'^2 \operatorname{tg}^2\mu)}{h}$,

$$\lambda_i - \lambda_l = \lambda_k \cot 2\beta = -\frac{\alpha_l^2 a' b' (\cot\beta - \operatorname{tg}\beta)}{h},$$

derhalve

$$\sqrt{-2(E + \lambda_l - \lambda_i \operatorname{tg}^2\mu)} = -\frac{2\alpha_l \cos\mu}{\sqrt{h}}\sqrt{(a' + b' \operatorname{tg}^2\mu \operatorname{tg}\beta)(a' - b' \operatorname{tg}^2\mu \cot\beta)}.$$

dus ten slotte:

$$\frac{C(\lambda_l+\lambda_i \mathrm{tg}^2\mu+E)-D\lambda_k \mathrm{tg}^2\mu}{E\sqrt{\{(E+\lambda_l)^2-\lambda_i^2 \mathrm{tg}^4\mu\}}}\pi=\frac{\pi\cos\mu\sqrt{\sin\beta\cos\beta}}{(m-1)\sin^2\mu}\sqrt{\frac{a'\sin\beta\cos^2\mu-b'\cos\beta\sin^2\mu}{a'\cos\beta\cos^2\mu+b'\sin\beta\sin^2\mu}}.$$

Uit de waarden van a', b', $\sin^2\mu$ en $\cos^2\mu$ vindt men nu licht:

$$a'\sin\beta\cos^2\mu-b'\cos\beta\sin^2\mu=\frac{\sin 2\beta}{2p_k}\left\{mp_k^2+p_k^2-a_k^2-\frac{nh\cot^2\varphi}{\alpha_l^2 m}-2p_k p_l\cot 2\beta\right\},$$

$$a'\cos\beta\cos^2\mu+b'\sin\beta\sin^2\mu=\frac{\sin 2\beta}{2p_l}\left\{p_l^2-ma_k^2+mp_k^2-\frac{nh\cot^2\varphi}{\alpha_l^2}\right\},$$

waaruit volgt, indien men let op de waarden van $\cot 2\beta$, m, n, en h:

$$\sqrt{\frac{\sin\beta\cos\beta(a'\sin\beta\cos^2\mu-b'\cos\beta\sin^2\mu)}{a'\cos\beta\cos^2\mu+b'\sin\beta\sin^2\mu}}=\sqrt{\frac{p_l\sin\beta\cos\beta}{p_k}\cdot\frac{a_i^2+a_k^2\cot^2\varphi}{a_i^2+a_l^2\cot^2\varphi}}.$$

Brengt men eindelijk de beide waarden voor de deelen des integraals daarin over, zoo verkrijgt men, na eenige kleine, zeer ligt merkbare transformatiën,

$$F_l=\frac{3Mp_l}{2a_i(a_l^2-a_k^2)}\int_{-\varphi'}^{\varphi'}\left\{\sqrt{\frac{a_i^2+a_k^2\cot^2\varphi}{a_i^2+a_l^2\cot^2\varphi}}-\sqrt{\frac{p_k\,tg\,\beta}{p_l}}\right\}\sin\varphi\,d\varphi$$

daar uit de ligging van het punt P, in het vlak der beide assen a_k en a_l, volgt dat de beide grenzen der laatste integratie gelijk en van tegengesteld teeken zijn. Deze grens, welke men verkrijgt door $\sin\mu=0$ te stellen, wordt dus gegeven door de vergelijking:

$$\cos^2\varphi'=\frac{a_i^2}{a_i^2-a_l^2+p_l^2+p_k p_l\cot\beta}\quad\cdots\cdots\cdots,\qquad(\varphi')$$

welke gemakkelijk uit de oorspronkelijke vorm voor $\sin^2\mu$ verkregen wordt.

Stelt men nu $x=\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$, $K=\frac{a_i}{\cos\varphi'}$ zoo gaat bovenstaande vorm over in

$$F_l=-\frac{3p_l M}{(a_l^2-a_k^2)K}\int_0^1\left\{\sqrt{\frac{K^2+(a_k^2-a_i^2)x^2}{K^2+(a_l^2-a_i^2)x^2}}-\sqrt{\frac{p_k\,\mathrm{tg}\,\beta}{p_l}}\right\}dx.$$

Daar nu zoowel K als $\mathrm{tg}\;2\beta$ en dus ook F_l, geene andere functien van a_i, a_k en a_l bevatten dan de verschillen $a_k^2-a_i^2$, $a_l^2-a_i^2$, ligt in deze formule de stelling van Maclaurin opgesloten, voor eene willekeurige ellipsoïde en een punt dat in het vlak van twee der assen ligt.

De waarde van F_l kan echter nog op de volgende wijze eenvoudiger worden voorgesteld. Men stelle

$$x^2 = \frac{K^2 y^2}{K^2 + a_l^2 - a_i^2 - (a_l^2 - a_i^2)\, y^2},$$

zoo ziet men licht in dat

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K^2 + (a_k^2 - a_i^2)x^2}{K^2 + (a_l^2 - a_i^2)x^2}} =$$

$$= \frac{K(a_l^2 - a_k^2)}{\sqrt{(K^2 + a_l^2 - a_i^2)}} \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{\{K^2 + a_l^2 - a_i^2 + (a_k^2 - a_l^2)y^2\}\{K^2 + a_l^2 - a_i^2 + (a_i^2 - a_l^2)y^2\}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{K^2 + a_k^2 - a_i^2}{K^2 + a_l^2 - a_i^2}}$$

is, waardoor men dan vindt:

$$F_l = -\frac{3 p_l M}{\sqrt{(K^2 + a_l^2 - a_i^2)}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{\{K^2 + a_l^2 - a_i^2 + (a_k^2 - a_l^2)y^2\}\{K^2 + a_l^2 - a_i^2 + (a_i^2 - a_l^2)y^2\}}} \quad (56)$$

waarin, zooals men door substitutie van de waarde van β in de vergelijking (φ') gemakkelijk vindt:

$$K^2 - a_i^2 = \tfrac{1}{2}[-a_l^2 - a_k^2 + p_l^2 + p_k^2 + \sqrt{\{(a_l^2 - a_k^2)^2 - 2(a_l^2 - a_k^2)(p_l^2 - p_k^2) + (p_l^2 + p_k^2)^2\}}]$$

is. ([34])

([34]) Aldus vindt men de omvorming van F_l bij Legendre behandelt. Hij toont echter geenszins aan, dat het tweede gedeelte $\int_0^1 -\sqrt{\frac{p_k tg\beta}{p_l}}\, dx$ opgeheven wordt door den term $\sqrt{\frac{K^2 + a_k^2 - a_i^2}{K^2 + a_l^2 - a_i^2}}$ van het eerste gedeelte. Om dit intezien, merke men op dat

$$\int_0^1 -\sqrt{\frac{p_k tg\,\beta}{p_l}}\, dx = -\sqrt{\frac{p_k tg\,\beta}{p_l}} = -\frac{p_k}{\sqrt{(K^2 + a_l^2 - a_i - p_l^2)}}$$

is, terwijl verder

$$K^2 + a_k^2 - a_i^2 - p_k^2 = \tfrac{1}{2}\Big[(p_l^2 - a_l^2) - (p_k^2 - a_k^2) + \sqrt{\{[(p_l^2 - a_l^2) - (p_k^2 - a_k^2)]^2 + 4p_k^2 p_l^2\}}\Big]$$

$$K^2 + a_l^2 - a_i^2 - p_l^2 = \tfrac{1}{2}\Big[(p_k^2 - a_k^2) - (p_l^2 - a_l^2) + \sqrt{\{[(p_l^2 - a_l^2) - (p_k^2 - a_k^2)]^2 + 4p_k^2 p_l^2\}}\Big]$$

dus:

$$(K^2 + a_k^2 - a_i^2 - p_k^2)(K^2 + a_l^2 - a_i^2 - p_l^2) = p_k^2 p_l^2$$

of:

$$(K^2 + a_k^2 - a_i^2)(K^2 + a_l^2 - a_i^2) - p_l^2(K^2 + a_k^2 - a_i^2) - p_k^2(K^2 + a_l^2 - a_i^2) = 0$$

is, waaruit de waarheid van het boven gezegde blijkt.

Door permutatie van de indices k en l vindt men dan verder

$$F_k = -\frac{3p_k M}{\sqrt{(K^2+a_k^2-a_i^2)}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{\{K^2+a_k^2-a_i^2+(a_l^2-a_k^2)y^2\}\{K^2+a_k^2-a_i^2+(a_i^2-a_k^2)y^2\}}} \quad (56_a)$$

terwijl blijkbaar $= 0$ is. omdat P in het vlak der assen a_k en a_l ligt.

Neemt men in deze formules $a_i = a_l$ of $a_i = a_k$, zoo kunnen zij geheel geïntegreerd worden, en gaan over in de formules voor omwentelings-ellipsoïden, zooals reeds vroeger is opgemerkt.

Na aldus de behandeling van dit meer bizondere geval te hebben afgewerkt, gaat Legendre terug tot het algemeene en stelt:

$$\frac{\alpha_k^2}{\alpha_l^2} = m_k, \ \frac{\alpha_i^2}{\alpha_l^2} = m_i, \ m_k p_k = \varkappa, m_i p_i = \iota, \ \cot\vartheta = y_k, \ \frac{\cot\varphi.}{\sin\vartheta} = y_i,$$

waardoor men verkrijgt:

$$F_l = 2\int\int \frac{\sqrt{\{(p_l+\iota y_i+\varkappa y_k)^2+ha_l^2(1+m_i y_i^2+m_k y_k^2)\}}}{(1+m_i y_i^2+m_k y_k^2)(1+y_i^2+y_k^2)^{3/2}}\,dy_i\,dy_k.$$

Men voere nu, in plaats van y_i eene nieuwe veranderlijke ω in, bepaald door de vergelijking

$$\omega = \sqrt{\frac{(p_l+\iota y_i+\varkappa y_k)^2+ha_l^2(1+m_i y_i^2+m_k y_k^2)}{1+y_i^2+y_k^2}}$$

of naar y_i gerangschikt:

$$(\omega^2-m_i ha_l^2-\iota^2)y_i^2 \iota(p_l+\varkappa y_k)y_i+\omega^2-ha_l^2+(\omega^2-m_k ha_l^2)y_k^2-(p_l+\varkappa y_k)^2=0.$$

Stelt men deze vergelijking voor door

$$F y_i^2 - 2\,G\,y_i + H = o$$

en differentieert haar voor constante y_k, zoo verkrijgt men:

Bepaalt men de vergelijking der ellipsoïde, welke door P gaande, met de gegevene confocaal is, zoo vindt men hare assen bepaald door de vergelijkingen

$$\frac{p_k^2}{A_i^2+a_k^2-a_i^2}+\frac{p_l^2}{A_i^2+a_l^2-a_i^2}=1,$$

$$A_k^2 = A_i^2+a_k^2-a_i^2, \ A_l^2 = A_i^2+a_l^2-a_i^2,$$

waaruit in verband met bovenstaande vergelijking volgt $K^2 = A^2$, zoodat de vergelijking (56) blijkt identisch te zijn met de derde van (55) voor $p_i = 0$.

$$(Fy_i - G)\,dy_i + (1 + y_i^2 + y_k^2)\,\omega d\omega = 0,$$

of daar $Fy_i - G = \sqrt{(G^2 - FH)}$ is,

$$dy_i = \frac{(1 + y_i^2 + y_k^2)\,\omega d\omega}{\sqrt{(G^2 - FH)}},$$

$$F_l = 2\int\int \frac{\omega^2\, d\omega\, dy_k}{(1 + m_i y_i^2 + m_k y_k^2)\sqrt{(G^2 - FH)}},$$

waarin nu y_i nog enkel in den term $m_i y_i^2$ voorkomt. Alvorens nu ook deze laatste eliminatie te verrichten, stelle men ter bekorting

$$\omega^2 - ha_l^2 = \lambda_l,\ \ \omega^2 - m_k ha_l^2 = \lambda_k,\ \ \omega^2 - m^i ha_l^2 = \lambda_i,$$

$$\lambda_i \lambda_k - \lambda_k \iota^2 - \lambda_i \varkappa^2 = A,\ p_l \varkappa \lambda_i = B,\ \ \lambda_l \lambda_i - \lambda_l \iota^2 - \lambda_i p_l^2 = C,$$

waardoor

$$F = \lambda_i - \iota^2,\ \ G = \iota\,(p_l + \varkappa y_k),\ \ H = \lambda_l + \lambda_k y_k^2 - (p_l + \varkappa y_k)^2$$

$$G^2 - FH = -A\, y_k^2 + 2\, B\, y_k - C.$$

wordt en vervange nu y_k door eene nieuwe veranderlijke ψ volgens de vergelijking

$$\cos\psi = \frac{A\, y_k - B}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{A\, y_k - B}{D}$$

zoodat $D^2 = B^2 - AC = F(p_l^2 \lambda_i \lambda_k + \varkappa^2 \lambda_l \lambda_i + \iota^2 \lambda_l \lambda_k - \lambda_i \lambda_k \lambda_l)$ is. Alsdan wordt

$$G^2 - FH = \frac{D^2}{A}\sin^2\psi,$$

$$y_k = \frac{B + D\cos\psi}{A},\ y_i = \frac{p_l \iota \lambda_k}{A} + \frac{\varkappa\iota D}{AF}\cos\psi + \frac{D}{F\sqrt{A}}\sin\psi$$

$$\frac{dy_k}{\sqrt{G^2 - FH}} = \frac{d\psi}{\sqrt{A}}$$

$$F_l = 2\int\int \frac{A^{3/2}\,\omega^2\, d\omega\, d\psi}{A^2 + m_k(B + D\cos\psi)^2 + m_i\left(p_l \iota \lambda_k + \frac{\varkappa\iota D}{F}\cos\psi + \frac{D\sqrt{A}}{F}\sin\psi\right)^2}$$

Voor de bepaling der grenzen dezer integratie, dient de beteekenis der volbrachte substitutie te worden onderzocht. Houdt men in het oog dat $y_i = \frac{\cot\varphi}{\sin\vartheta} = \frac{x_i - p_i}{x_l - p_l}$, $y_k = \cot\vartheta = \frac{x_k - p_k}{x_l - p_l}$ is,

zoo blijkt dat de vergelijking (ω) de gedaante heeft:

$$(\lambda_l - \iota^2)(x_i - p_i)^2 + (\lambda_k - \varkappa^2)(x_k - p_k)^2 + (\lambda_l - p_l^2)(x_l - p_l)^2 - 2\varkappa p_l (x_k - p_k)(x_l - p_l)$$
$$- 2 p_l \iota (x_l - p_l)(x_i - p_i) - 2\,\iota\varkappa (x_i - p_i)(x_k - p_k) = 0,$$

welke vergelijking nu, voor elke waarde van ω, een kegeloppervlak van den tweeden graad voorstelt, welks top in P ligt. Geeft men haar de vorm:

$$\left(\Sigma\frac{x_i^2}{a_i^2}-1\right)\left(\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2}-1\right)-\left(\Sigma\frac{p_i x_i}{a_i^2}-1\right)^2=\frac{\omega^2}{a_l^4}\Sigma\left(x_i-p_i\right)^2$$

zoo leert dit, dat de kegel behoorende bij $\omega=0$, de ellipsoïde raakt, terwijl bij andere waarden van ω slechts aan de vergelijking kan voldaan worden, door de coördinaten van punten welke binnen den raakkegel liggen, omdat alsdan de linkerzijde noodzakelijk positief moet worden. De opvolgende kegels, overeenkomend met aangroeiende waarden van ω, liggen dus allen binnen den raakkegel en snijden de ellipsoïde. Zoekt men nu op de gewone wijze het maximum van ω, als functie van y_i en y_k, zoo vindt men de daartoe vereischte waarden van y_i en y_k uit de vergelijkingen:

$(\lambda_i-\iota^2)\,y_i-\iota\varkappa\, y_k=\iota\, p_l$ en $(\lambda_k-\varkappa^2)\,y_k-\iota\varkappa\, y_i=\varkappa\, p_l$

waaruit volgt: $y_i=\dfrac{\iota\, p_l\lambda_k}{\lambda_k\lambda_i-\varkappa^2\lambda_i-\iota^2\lambda_k},\; y_k=\dfrac{\varkappa\, p_l\lambda_i}{\lambda_k\lambda-\varkappa^2\lambda_i-\iota^2\lambda_k}$

welke waarden door substitutie in (ω) geven:

$$\lambda_i\lambda_k\lambda_l-\iota^2\lambda_k\lambda_l-\varkappa^2\lambda_l\lambda_i-p_l^2\lambda_i\lambda_k=0 \text{ of } D=0.$$

Alsdan echter worden de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}-(\lambda_i-\iota^2)(x_i-p_i)+\iota\varkappa(x_k-p_k)+\iota p_l(x_l-p_l)&=0\\ \iota\varkappa(x_i-p_i)-(\lambda_k-\varkappa^2)(x_k-p_k)+\varkappa p_l(x_l-p_l)&=0\\ \iota p_l(x_i-p_i)+\varkappa p_l(x_k-p_k)-(\lambda_l-p_l^2)(x_l-p_l)&=0\end{aligned}\right\} . \quad (m)$$

welke dienen ter bepaling van het middelpunt des oppervlaks (ω), van elkander afhankelijk, zoodat voor het maximum van ω, het kegelvlak overgaat in de rechte lijn:

$$\frac{x_i-p_i}{\iota\lambda_k\lambda_l}=\frac{x_k-p_k}{\varkappa\lambda_l\lambda_i}=\frac{x_l-p_l}{p_l\lambda_i\lambda_k}$$

welke dan door de vergelijkingen m wordt voorgesteld.

De substitutie van ω bestaat dus in het verdeelen van de geheele ellipsoïde in oneindig dunne, kegelvormige lagen, wier gemeenschappelijke top in P ligt, en de integratie naar ω zal moeten uitgestrekt worden van $\omega=0$ (den raakkegel) tot $\omega=\omega'=$ maximum (de rechte lijn of oneindig dunne kegel), zijnde ω' te bepalen uit de vergelijking $D = 0$, welke daarvoor altijd ééne en nooit meer dan éene reëele waarde zal opleveren. Want indien men haar schrijft als derde machtsvergelijking in ω^2, zoo is de bekende term $-\dfrac{h^2\, a_l^{10}}{a_i^2\, a_k^2}$, dus tegengesteld van teeken met den coefficient van $(\omega^2)^3$, en schrijft men haar in den vorm

$$\frac{\iota^2}{\lambda_i} + \frac{\varkappa^2}{\lambda_k} + \frac{p_l^2}{\lambda_l} - 1 = 0$$

zoo ziet men dat zij twee wortels heeft, de een tusschen de waarden van ω waarvoor $\lambda_i = 0$ en $\lambda_k = 0$, de ander tusschen die waarvoor $\lambda_k = 0$ en $\lambda_l = 0$ worden, en daar deze waarden alle negatief zijn omdat h voor een buiten de ellipsoïde liggend punt P negatief is, levert de vergelijking dus eene positieve en twee negatieve wortels voor ω^2, zoodat voor ω' slechts ééne reëele waarde bestaat.

Zoekt men nu de doorsnede van den kegel, door (ω) voorgesteld, met het vlak $x_l = 0$, zoo heeft deze tot vergelijking

$$(\lambda_i - \iota^2)(x_i - p_i)^2 - 2\iota\varkappa(x_i - p_i)(x_k - p_k) + (\lambda_k - \varkappa^2)(x_k - p_k) +$$
$$+ 2p_l^2\,\iota(x_i - p_i) + 2p_l^2\varkappa(x_k - p_k)(+\lambda_l - p_l)p_l^2 = 0 \quad . \quad . \quad (\omega')$$

zoodat men voor de coördinaten x_i', x_k' van haar middelpunt vindt:

$$x_i' = p_i - \frac{\iota p_l^2 \lambda_k}{\lambda_i\lambda_k - \iota^2\lambda_k - \varkappa^2\lambda_i},\; x_k' = p_k - \frac{\varkappa p_l^2 \lambda_i}{\lambda_i\lambda_k - \iota^2\lambda_k - \varkappa^2\lambda_i} = p_k - \frac{p_l B}{A}$$

Voor eenig punt Q dier doorsnede is dus

$$x_k - x_k' = x_k - p_k + \frac{p_l B}{A} = -p_i y_k + \frac{p_l B}{A} = -p_l \frac{A y_k - B}{A} = -\frac{p_l D}{A}\cos\psi.$$

Men ziet nu licht uit de vergelijking der doorsnede, dat men' om over de geheele doorsnede te integreeren, dus om aan $x_k - x_k'$ alle mogelijke waarden te geven, deze grootheid alle waarden tusschen $-\dfrac{p_l D}{A}$ en $+\dfrac{p_l D}{A}$ tweemaal moet laten doorloopen, hetgeen dus vordert dat ψ van 0 tot 2π wisselt. Deze discussie leert dus dat men heeft:

$$F_l = 2\int_0^{\omega'} \omega^2\, d\omega \int_0^{2\pi} \frac{A^{3/2}\, d\psi}{A^2 + m_k(B + D\cos\psi)^2 + m_i\left(p_l\iota\lambda_k + \dfrac{\iota\varkappa D}{F}\cos\psi + \dfrac{D\sqrt{A}}{F}\sin\psi\right)^2}$$

De integratie naar ψ is dus in werkelijkheid eene, welke zich uitstrekt over eene der kegelvormige lagen, waarin de ellipsoïde door de substitutie van ω is verdeeld.

Alleen blijft nu nog over, dat bij de bewerking A positief is ondersteld, en wel omdat deze grootheid in gebroken macht voorkomt. Vervangt men echter de in A optredende grootheden door hare waarden, zoo is:

$$A = \omega^4 - a_l^4 \omega^3 \left(\frac{h}{a_i^2} + \frac{h}{a_k^2} + \frac{p_k^2}{a_k^4} + \frac{p_i^2}{a_i^4}\right) + \frac{h a_l^6}{a_i^2 a_k^2}\left(a_l^2 - p_l^2\right).$$

Opdat dus A positief zij, ook voor $\omega = 0$, moet $p_l > a_l$ zijn; a fortiori is zij het dan voor andere waarden van ω.

Men kan echter de bewerking vervolgen in de onderstelling dat $p_l > a_l$ is, en het eindresultaat zal onafhankelijk daarvan zijn. Want er kan slechts eene analytische formule zijn, die de waarde der aantrekking voorstelt en deze vordert alleen dat P buiten of op het oppervlak ligt, dat wil zeggen dat $h \leqq 0$ is. De formule welke men vindt voor $p_l > a_l$, kan dus niet van de algemeene verschillen. Deze opmerking kan men op vele andere vragen der analyse toepassen, waaruit volgt, dat de analytische formules dikwijls onafhankelijk zijn van de bij de afleiding gemaakte onderstellingen.([35])

([35]) Ten einde den loop der redenering niet te storen, oordeelde ik het beter, dit onderzoek naar de grenzen der nieuwe veranderlijken ω en ψ met de tekst te vereenzelvigen, ofschoon het geheel eigen onderzoek bevat, daar bij LEGENDRE enkel eenige zeer onvolledige aanduidingen te vinden zijn, omtrent de grenzen van ω, terwijl in het geheel geen reden wordt gegeven, waarom ψ steeds van 0 tot 2π moet worden genomen, hetgeen toch, naar het mij voorkomt, niet licht enkel uit de vergelijking, waardoor deze veranderlijke wordt ingevoerd, blijkt. Men ziet echter uit de vergelijking (ω') gemakkelijk, dat dit onafhankelijk is van het teeken van A (dus van het feit of (ω') eene ellips of hyperbool voorstelt), daar zij slechts vordert dat $\left(x_k - p_k + \frac{p_l B}{A}\right)^2 : \left(\frac{p_l D}{A}\right)^2 < 1$ zij, opdat x_i reëel blijve.

Ook het laatste gedeelte, betreffende de voorwaarde waaronder A voor alle waarden van ω positief blijft, dat geheel in die bewoordingen bij LEGENDRE te vinden is, vordert, naar het mij voorkomt, eenige studie. Wel wordt A voor $\omega = 0$ positief, wanneer $p_l > a_l$ is, maar geenszins blijkt zoo licht dat alsdan A ook voor andere waarden van ω positief is. Men kan echter aan A den vorm geven, Het komt er dus nu op aan de waarde te vinden van

$$\int_0^{2\pi} \frac{A^{3/2}\, d\psi}{A^2 + m_k (B + D\cos\psi)^2 + m_i \left(p_l \iota \lambda_k + \frac{\iota \varkappa D}{F}\cos\psi + \frac{D\sqrt{A}}{F}\sin\psi\right)^2}.$$

Vervangt men daarin ψ door $\psi + \varepsilon$, zoo kunnen de grenzen onveranderd blijven, daar $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$ en $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$ is. Bepaalt men nu ε zoo dat $tg\, \varepsilon = \frac{\iota\sqrt{A}}{\varkappa \lambda_i}$ is en stelt ter bekorting: $A = K^2$, $\frac{D^2}{F} = Q^2$, en $\lambda_i \lambda_k - A = P^2$, zoo gaat bovenstaande integraal achtervolgens over in:

$$\int_0^{2\pi} \frac{K^3\, d\psi}{K^4 + m_k\left[p_l \varkappa \lambda_i + \frac{D}{\sqrt{(\varkappa^2\lambda_i^2 + \iota^2 K^2)}}\left\{\varkappa\lambda_i\cos\psi - \iota K\sin\psi\right\}\right]^2 + \\ + m_i\left[p_l \iota \lambda_k + \frac{D}{F\sqrt{(\varkappa^2\lambda_i^2 + \iota^2K^2)}}\left\{(^2\varkappa\lambda_i + K^2)\iota\cos\psi + (\lambda_i - \iota^2)\varkappa K \sin\psi\right\}\right]}$$

of omdat volgens bovenstaande bekortingen:

$\sqrt{(\varkappa^2 \lambda_i^2 + \iota^2 K^2)} = P\sqrt{F}$, $\varkappa^2 \lambda_i + K^2 = \lambda_k F$, $\lambda_i - \iota^2 = F$ is,

$$\int_0^{2\pi} \frac{K^3\, d\psi}{K^4 + m_k\left(p_l\varkappa\lambda_i + \frac{Q}{P}\varkappa\lambda_i\cos\psi - \frac{Q}{P}\iota K\sin\psi\right)^2 + m_i\left(p_l\iota\lambda_k + \frac{Q}{P}\iota\lambda_k\cos\psi + \frac{Q}{P}\varkappa K\sin\psi\right)^2}.$$

De noemer van deze differentiaal moet nu in zijne reëele faktoren ontbonden worden. Ten einde dit op de kortste wijze te verrichten, stelle men tijdelijk

$$p_l + \frac{Q}{P}\cos\psi = x \text{ en } \frac{Q}{P}\sin\psi = y$$

waardoor de noemer wordt:

$$K^4 + m_k(\varkappa\lambda_i x - \iota K y)^2 + m_i(\iota\lambda_k x + \varkappa K y)^2,$$

$$\left\{\omega^2 - \frac{a_l^4}{2}\left(\frac{1}{a_i^2}\left[1 - \frac{p_k^2}{a_k^2} - \frac{p_l^2}{a_l^2}\right] + \frac{1}{a_k^2}\left[1 - \frac{p_i^2}{a_i^2} - \frac{p_l^2}{a_l^2}\right]\right)\right\}^2 - \frac{a_l^8}{4}\left\{\left(\frac{h}{a_i^2} - \frac{h}{a_k^2} + \frac{p_i^2}{a_i^4} - \frac{p_k^2}{a_k^4}\right) + \frac{^24 p_i^2 p_k^2}{a_i^4 a_k^4}\right\}$$

en alsdan ziet men dat voor $p_l^2 > a_l^2$ zoowel $1 - \frac{p_k^2}{a_k^2} - \frac{p_l^2}{a_l^2}$ als $1 - \frac{p_i^2}{a_i^2} - \frac{p_l^2}{a_l^2}$ negatief zijn en dus de eerste accolade aangroeit, bij het grooter worden van ω, zoodat inderdaad, wanneer A positief is voor $\omega = 0$, dit ook voor alle waarden van ω het geval is. Meetkunstig is het duidelijk, dat indien de raakkegel met het vlak $x_l = 0$ eene elliptische doorsnede geeft, de daar binnen gelegen kegels zulks insgelijks doen.

terwijl identisch $y^2 + x^2 - 2\,p_l\,x = \frac{Q^2}{P^2} - p_l^2 = (p_l^2 - \lambda_l)\frac{K^2}{P^2}$ is.

Onderstelt men nu dat de noemer kan gebracht worden in de gedaante $T\,(1 + px + qy)\,(1 + p'x - qy)$, zoo mag men, met invoering van een vijfden onbepaalden coefficient H aannemen dat identisch:

$$K^4 + m_k(\varkappa\,\lambda_i\,x - \iota\,Ky)^2 + m_i(\iota\,\lambda_k\,x + \varkappa\,Ky)^2 + H\,(p_l^2 - \lambda_l)\frac{K^2}{P^2} + 2p_l\,Hx - Hx^2 - Hy^2 =$$
$$= T\,(1 + p\,x + q\,y)\,(1 + p'\,x - q\,y)$$

is, waaruit ter bepaling van H, T, p, p' en q de vijf vergelijkingen volgen:

$$T = K^4 + (p_l^2 - \lambda_l)\,\frac{H\,K^2}{P^2},$$
$$T\,(p + p') = 2\,p_l\,H,$$
$$T\,q\,(p - p') = 2\,\iota\,\varkappa\,K\,(m_k\,\lambda_i - m_i\,\lambda_k),$$
$$T\,p\,p' = m_k\,\varkappa^2\,\lambda_i^2 + m_i\,\iota^2\,\lambda_k^2 - H,$$
$$T\,q^2 = H - (m_k\,\iota^2 + m_i\,\varkappa^2)\,K^2.$$

Stelt men nu nog:

$$m_i\frac{P^2\,K^2}{H} - \lambda_i = L_i,\; m_k\frac{P^2\,K^2}{H} - \lambda_k = L_k,\; \frac{P^2\,K^2}{H} - \lambda_l = L_l,$$

zoo vindt men voor de resulterende vergelijking in H, uit de vijf bovenstaande betrekkingen:

$$L_i\,L_k\,L_l + \iota^2\,L_k\,L_l + \varkappa^2\,L_l\,L_i + p_l^2\,L_i\,L_k = 0\ (^{36}) \quad . \;.\;.\;.\;. \quad (l)$$

Schrijft men deze vergelijking in de gedaante:

$$\frac{1}{\frac{m_i}{\iota^2}\left(\frac{P^2\,K^2}{H} - \frac{\lambda_i}{m_i}\right)} + \frac{1}{\frac{m_k}{\varkappa^2}\left(\frac{P^2\,K^2}{H} - \frac{\lambda_k}{m_k}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{p_l^2}\left(\frac{P^2\,K^2}{H} - \lambda_l\right)} + 1 = 0,$$

zoo blijkt dat de drie waarden van $\frac{P^2\,K^2}{H}$ welke daaraan voldoen, respective gelegen zijn tusschen $-\infty$ en de kleinste, de kleinste en de middelste, de middelste en de grootste der grootheden $\frac{\lambda_i}{m_i}$, $\frac{\lambda_k}{m_k}$ en λ_l, en dat alleen die waarde, welke tusschen de beide

---

(36) Men vindt deze gemakkelijk, door substitutie der bovenstaande waarden in de identiteit:

$$\frac{T^2\,(p + p')^2}{T} - \frac{T^2\,q^2\,(p - p')^2}{T\,q^2} - 4\,T\,p\,p' = 0.$$

kleinsten besloten is, eene der grootheden L positief en de beide anderen negatief maakt, zoodat steeds ééne waarde van H bestaat, waarvoor $\frac{L_l}{L_i L_k}$ positief en dus $\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}$ reëel is.

Onderstelt men dus deze waarde van H gevonden, zoo is dan verder:

$$T = \frac{K^2 H^2}{P^2}(p_l^2 + L_l),\quad p = \frac{p_l P^2 - \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{K^2(p_l^2 + L_l)}$$

$$p' = \frac{p_l P^2 + \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{K^2(p_l^2 + L_l)},\quad q = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{L_i L_k}{L_l}},$$

door substitutie waarvan de integraal nu overgaat in:

$$\int_o^{2\pi} \frac{\frac{P^2 K^5}{H(p_l^2 + L_l)}\, d\,\psi.}{\left\{K^2 + \frac{p_l P^2 - \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{p_l^2 + L_l}\left(p_l + \frac{Q}{P}\cos\psi\right) + \frac{KQ}{P}\sqrt{\frac{L_i L_k}{L_l}}\sin\psi\right\}\left\{K^2 + \frac{p_l P^2 + \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{p_l^2 + L_l}\left(p_l + \frac{Q}{P}\cos\psi\right) - \frac{KQ}{P}\sqrt{\frac{L_i L_k}{L_l}}\sin\psi\right\}}$$

Stelt men nu $A \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi = z$

$$K^2 + \frac{\left\{p_l P^2 - \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}\left(p_l + \frac{Q}{P}\right)}{p_l^2 + L_l} = M,$$

$$K^2 + \frac{\left\{p_l P^2 + \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}\left(p_l + \frac{Q}{P}\right)}{p_l^2 + L_l} = M',$$

$$K^2 + \frac{\left\{p_l P^2 - \iota\varkappa(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}\left(p' - \frac{Q}{P}\right)}{p_l^2 + L_l} = N,$$

$$K^2 + \frac{\left\{p_l P^2 - \alpha\,(\lambda_i L_k - \lambda_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}\left(p_l - \frac{Q}{P}\right)}{p_l^2 + L_l} = N',$$

$$\frac{KQ}{P}\sqrt{\frac{L_i L_k}{L_l}} = L,$$

zoo wordt de integraal eene, welke in twee deelen gesplitst moet worden, omdat, wanneer $\frac{1}{2}\psi$ van 0 tot π aangroeit, z eerst van 0 tot ∞, daarna van $-\infty$ tot 0 verandert. Vervangt men in dit laatste deel z door $-z$, verwisselt de grenzen en keert het teeken van de vorm om, zoo bestaat de geheele integraal nu uit

$$\int_0^\infty \frac{2\frac{P^2K^5}{H(p_l^2+L_l)}(1+z^2)\,dz}{(M+2Lz+Nz^2)(M'-2Lz+N'z^2)} + \int_0^\infty \frac{2\frac{P^2K^5}{H(p_l^2+L_l)}(1+z^2)\,dz}{(M-2Lz+Nz^2)(M'+2Lz+N'z^2)},$$

zoodat de tweede uit de eerste kan worden afgeleid, door het teeken van L, d. w. z. van $\sqrt{\frac{L_i L_k}{L_l}}$ te veranderen.

Men vindt dan voor de waarde der eerste integraal

$$\frac{P^2K^5}{H(p_l^2+L_l)}\left\{\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L}{\sqrt{MN-L^2}}}{\sqrt{MN-L^2}}\cdot\frac{2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+N+M'+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+M')} - \right.$$

$$-\frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{L}{\sqrt{M'N'-L^2}}}{\sqrt{M'N'-L^2}}\cdot\frac{2(N'-M')(M'N-MN')-4L^2(M+N+M'+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')} +$$

$$\left. + \frac{2L(N+N'-M-M')\log(M'N-MN')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')}\right\},$$

en voor de tweede, door L in $-L$ te veranderen:

$$\frac{P^2K^5}{H(p_l^2+L_l)}\left\{\frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{L}{\sqrt{MN-L^2}}}{\sqrt{MN-L^2}}\cdot\frac{2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+N+M'+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')} - \right.$$

$$-\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L}{\sqrt{M'N'-L^2}}}{\sqrt{M'N'-L^2}}\cdot\frac{2(N'-M')(M'N-MN')-4L^2(M+N+M'+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')} -$$

$$\left. - \frac{2L(N+N'-M-M')\log(M'N-MN')}{(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')}\right\},$$

zoodat men voor de som van beide, dus voor de volledige integraal verkrijgt:

$$\left\{\frac{\pi}{\sqrt{MN-L^2}}\cdot\frac{2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+M'+N+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(N+N')(M+M')}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{\sqrt{M'N'-L^2}}\cdot\frac{2(N'-M')(MN'-M'N)+4L^2(M'+M+N'+N)}{(MN'-M'N)^2+4L^2(N'+N)(M'+M)}\right\}\frac{P^2K^5}{H(p_l^2+L_l)}$$

welke beide deelen in elkander overgaan, wanneer M met M' en N met N' wordt verwisseld, hetgeen volgens de waarden dier grootheden, neerkomt op het veranderen van het teeken van $\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}$.

Substitueert men eindelijk hierin voor L, M, N, M' en N' hare waarden, drukt vervolgens K, P en Q in λ_i, λ_k en λ_l en eindelijk deze laatsten in L_i, L_k en L_l uit, zoo wordt: (37)

---

(37) De in de tekst aangeduide integratie kan gemakkelijk verricht worden, door op de gewone wijze, de in de differentiaal aanwezige breuk, in een verschil van twee anderen te ontbinden. De substitutie der waarden van L, M enz. vordert echter wel eenige oplettendheid. De uitvoering daarvan wordt door LEGENDRE zelf moeielijk genoemd, en eenigzins door hem aangegeven. Men kan ze aldus verrichten.

Indien kortheidshalve $\frac{P^2K^2}{H}=Z$ gesteld wordt, volgt uit de waarden van L, M, N, M', N', λ_i en λ_k,

$$N-M=-\frac{2Q\left\{p_lP^2-\iota\varkappa(m_iL_k-m_kL_i)Z\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}}{P(p_l^2+L_l)}$$

$$M'N-MN'=\frac{4\iota\varkappa K^2Q(m_iL_k-m_kL_i)Z\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}}{P(p_l^2+L_l)}$$

$$4L^2(M+M'+N+N')=\frac{16K^2Q^2L_iL_k(K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2)}{L_lP^2(p_l^2+L_l)}$$

$$MN-L^2=K^4+\frac{2p_lK^2\left\{p_lP^2-\iota\varkappa(m_iL_k-m_kL_i)Z\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}}{p_l^2+L_l}+$$

$$+\frac{(p_l^2P^2-Q^2)\left\{p_lP^2-\iota\varkappa(m_iL_k-m_kL_i)Z\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}^2}{P^2(p_l^2+L_l)^2}.$$

Merkt men nu op, dat volgens de waarden van P, Q en K, $p_l^2P^2-Q^2=K^2(Z-L_l-p_l^2)$ is, zoo verkrijgt men voor $MN-L^2$, door ontwikkeling

$$\sqrt{MN-L^2}=\frac{K^3P^2}{H(p_l^2+L_l)}\sqrt{\left\{m_im_k(p_l^2+L_l)^2-(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+\right.}$$

$$\left.+(p_l^2-L_l)(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)-2\iota\varkappa p_l(m_iL_k+m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}$$

---

van het daarin voorkomende kwadraat, weglating van eenige elkander opheffende termen, alsmede aftrekking en optelling van de vorm $\dfrac{K^2Z^2(m_iL_k+m_kL_i)}{p_l^2+L_l^2}$,

$$MN-L^2=\frac{K^2Z^2}{(p_l^2+L_l)^2}\left\{(p_l^2+L_l)^2m_im_k-(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)-2\iota\varkappa p_l(m_iL_k-m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}$$

$$+\frac{K^2}{(p_l^2+L_l)^2}\left[(p_l^2+L_l)^2(P^2L_l-Q^2)\frac{L_iL_k}{P^2L_l}-(p_l^2+L_i-Z)\left\{(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)Z+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\iota^2\varkappa^2Z^2L_l(m_iL_k-m_kL_i)^2}{P^2L_iL_k}\right\}+P^2(p_l^2Z-p_l^2L_l-L_l^2)\right].$$

De vorm welke nu in het tweede gedeelte hiervan als vermenigvuldiger van $\dfrac{K^2}{(p_l^2+L_l)^2}$ voorkomt, wordt nu nog aldus vereenvoudigd. Houdt men in het oog dat

$$P^2=(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z-\iota^2L_k-\varkappa^2L_i,\quad K^2=m_im_kZ^2-(m_iL_k+m_kL_i)Z+L_iL_k-P^2,$$

$$\frac{P^2L_l-Q^2}{P^2}=\frac{P^2p_l^2-Q^2-P^2p_l^2+P^2L_l}{P^2}=-\frac{(p_l^2+L_l-Z)\left\{m_im_kZ^2-(m_iL_k+m_kL_i)Z+L_iL_k\right\}}{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z-\iota^2L_k-\varkappa^2L_i}-$$

$$-Z+2L_l\frac{(p_l^2+L_l)L_iL_k}{L_l}=-\iota^2L_k-\varkappa^2L_i=P^2-(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z$$

(zie verg. (e)), dus ook, zooals licht te zien is,

$$\frac{\iota^2\varkappa^2Z^2L_l(m_iL_k-m_kL_i)^2}{P^2L_iL_k}=-\frac{Z^2}{P^2}\left\{(p_l^2+L_l)(\iota^2m_k^2L_i+\varkappa^2m_i^2L_k)+(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)^2L_l\right\}$$

en $(m_iL_k+m_kL_i)P^2Z-(\iota^2m_k^2L_i+\varkappa^2m_i^2L_k)Z^2=(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)(m_im_kZ^2-m_iL_kZ-m_kL_iZ)$

is, zoo krijgt gemelde vorm achtervolgens de gedaanten:

$$\frac{(p_l^2+L_l-Z)\left\{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)L_lZ^2+L_iL_k(p_l^2+L_l)(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)\right\}}{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z-(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)}+(p_l^2+L_l)(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)(Z-2L_l)+$$

$$+\left\{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z-(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)\right\}(p_l^2Z-p_l^2L_l-L_l^2)=$$

$$=L_l(p_l^2+L_l-Z)\left\{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z+(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)\right\}+(p_l^2+L_l)(Z-2L)(\iota^2L_k+\varkappa^2L_l)-$$

$$-\left\{L_l(p_l^2+L_l)-p_l^2Z\right\}\left\{(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z-(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)\right\}=(p_l^2-L_l)(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)Z,$$

dus $MN-L^2=\dfrac{K^2Z^2}{(p_l^2+L_l)^2}\times$

$$\times\left\{m_im_k(p_l^2+L_l)^2-(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+(p_l^2-L_l)(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)-2\iota\varkappa p_l(m_iL_k-m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\right\}.$$

$$\frac{2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+M'+N+N')}{(M'N-MN')^2+4L^2(N+N')(M+M')}=$$

$$=\frac{(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+L_l(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)-\iota\varkappa p_l(m_iL_k-m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}}{K^2\{(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+L_l(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)+L_iL_k+\iota^2L_k+\varkappa^2L_i\}},$$

en dus de gezochte integraal (doordien voor het tweede gedeelte slechts het teeken van $\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}$ behoeft veranderd te worden):

Verder is nu

$$2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+M'+N+N')=\frac{16K^2Q^2}{P^2(p_l^2+L_l)^2}\Big\{-\iota\varkappa p_lP^2Z(m_iL_k-m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_lL_k}}+$$

$$+\iota^2\varkappa^2(m_iL_k-m_kL_i)^2Z^2\frac{L_l}{L_iL_k}+(p_l^2+L_l)(K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2)\frac{L_iL_k}{L_l}\Big\}.$$

Maar $K^2p_l^2+K^2L_l+p_l^2P^2=(p_l^2+L_l)(m_im_kZ^2-m_iL_kZ-m_kL_iZ+L_iL_k)-P^2L_l=$
$(p_l^2+L_l)\{m_im_kZ^2-Z(m_iL_k+m_kL_i)\}-(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)L_l\,Z$ en dus

$$\frac{(p_l^2+L_l)L_iL_k}{L_l}(K^2p_l^2+K^2L_l+p_l^2P^2)=m_im_kZ^2(p_l^2+L_l)(-\iota^2L_k\varkappa^2L_i)-\{P^2-(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)\,Z\}\times$$

$\times\{(m_iL_k+m_kL_i)(p_l^2+L_l)+(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)L_l\}Z$, derhalve in verband met het bovenstaande,

$$\iota^2\varkappa^2(m_iL_k-m_kL_i)^2Z^2\frac{L_l}{L_iL_k}+(p_l^2+L_l)(K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2)\frac{L_iL_k}{L_i}=$$

$$=-P^2Z\{(p_l^2+L_l)(m_lL_k+m_kL_i)+(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)L_l\}-$$

$$-Z^2\{(p_l^2+L_l)(\iota^2m_k^2L_i+\varkappa^2m_i^2L_k)+(\iota^2m_k+\varkappa^2m_l)^2L_l+$$

$$+m_im_k(p_l^2+L_l)(\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)-(m_iL_k+m_kL_i)(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)(p_l^2+L_l)-(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)^2L_l\}=$$

$=-P^2Z\{(p^2_l+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)L_l\}$, en dus:

$$2(N-M)(M'N-MN')+4L^2(M+M'+N+N')=\frac{16K^2Q^2Z}{(p_l^2+L_l)^2}\Big\{(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+$$

$$+L_l(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)+\iota\varkappa p_l(m_iL_k-m_kL_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_iL_k}}\Big\}.$$

Eindelijk is: $(M'N-MN')^2+4L^2(M+M')(N+N')=$

$$=\frac{16K^2Q^2}{P^2(p_l^2+L_l)^2}\Big\{\iota^2\varkappa^2(m_iL_k-m_kL_i)^2K^2Z^2\frac{L_l}{L_iL_k}+\frac{L_iL_k}{L_i}K^2(K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2)(p_l^2+L_l)+$$

$$+P^2p_l^2(K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2-Q^2)\frac{L_iL_k}{L_l};$$

maar volgens het voorgaande is $K^2p_l^2+K^2L_l+P^2p_l^2-Q^2=K^2Z$
en $p_l^2L_iL_k=-L_l(L_iL_k+\iota^2L_k+\varkappa^2L_i)$, zoodat men voor de geheele vorm verkrijgt,

$$-\frac{16K^4Q^2Z}{(p_l^2+L_l)^2}\{(p_l^2+L_l)(m_iL_k+m_kL_i)+L_l(\iota^2m_k+\varkappa^2m_i)+L_iL_k+\iota^2L_k+\varkappa^2L_i\}$$

$$\frac{\pi}{(p_l^2+L_l)(m_i L_k+m_k L_i)+L_l(\iota^2 m_k+\varkappa^2 m_i)+L_i L_k+\iota^2 L_k+\varkappa^2 L_i}\times$$

$$\times\left\{\frac{(p_l^2+L_l)(m_i L_k+m_k L_i)+L_l(\iota^2 m_k+\varkappa^2 m_i)+\alpha p_l(m_i L_k-m_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{\sqrt{\left\{m_i m_k (p_l^2+L_l)^2-(p_l^2+L_l)(m_i L_k+m_k L_i)+(p_l^2-L_l)(\iota^2 m_k+\varkappa^2 m_i)-2\alpha p_l(m_i L_k-m_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{+\ (p_l^2+L_l)(m_i L_k+m_k L_i)+L_l(\iota^2 m_k+\varkappa^2 m_i)-p\alpha_l(m_i L_k-m_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}}{\sqrt{\left\{m_i m_k (p_l^2+L_l)^2-(p_l^2+L_l)(m_i L_k+m_k L_i)+(p_l^2-L_l)(\iota^2 m_k+\varkappa^2 m_i)+2\alpha p_l(m_i L_k-m_k L_i)\sqrt{\frac{L_l}{L_i L_k}}\right\}}}\right\}$$

Stelt men den noemer vóór de accolade door W, de beide tellers binnen de accolade door X en X', de beide noemers door Y en Y' voor, zoo is nu

$$F_l = 2\pi \int_0^{\omega'} \frac{\omega^2\, d\omega}{W} \left\{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Deze formule zou uiterst samengesteld zijn, indien daarin de oorspronkelijke coördinaten door middel der vergelijking (ω) enz. moesten worden terug gebracht. In plaats daarvan zou men aanvankelijk L_i, L_k, L_l en ω door ééne nieuwe veranderlijke σ kunnen vervangen.

Men stelle n.l. $L_i = -\frac{\delta}{\beta_i}$, $L_k = -\frac{\delta}{\beta_k}$, $L_l = \frac{\delta}{\beta_i \beta_k}$, zoo is volgens vergelijking (l) $\delta = \iota^2 \beta_i + \varkappa \beta_k - p_l^2 \beta_l \beta_k$;

maar ook is,

$m_k L_l - L_k = \lambda_k - m_k \lambda_l = (1-m_k)\,\omega^2; m_i L_l - L_i = \lambda_i - m_i \lambda_l = (1-m_i)\,\omega^2$

dus $\omega^2 = \frac{\delta\,(m_k+\beta_i)}{(1-m_k)\,\beta_i\beta_k} = \frac{\delta\,(m_i+\beta_k)}{(1-m_i)\,\beta_i\beta_k}$, zoodat men kan stellen

$\omega^2 = \frac{\delta}{\beta_i\beta_k}\,\sigma$, $\beta_i = (1-m_k)\,\sigma - m_k$, $\beta_k = (1-m_i)\,\sigma - m_i$,

waardoor dan L_i, L_k, L_l en δ rationaal in σ uittedrukken zijn, terwijl $\frac{L_l}{L_i L_k} = \frac{1}{\delta}$ en $\frac{2\omega\, d\omega}{W} = \frac{d\sigma}{\delta}$ is. Zeker zou nu eene tweede substitutie de vorm in hare eenvoudigste gedaante brengen, maar zij vertoont zich niet zoo licht, en zonder haar zou uit deze uiterst samengestelde berekeningen bijna geen resultaat te putten zijn.

Eene nadere beschouwing van de vergelijking (x) leert echter, dat men op meer eenvoudige wijze, tot hetzelfde doel kan geraken. Daarin komt namelijk de grootheid $\frac{P^2K^2}{H}$ niet anders voor, dan voor zooverre zij in L_i, L_k en L_l vervat is. Daar nu

$$L_i = m_i \frac{P^2K^2}{H} - \lambda_i = m_i\left(\frac{P^2K^2}{H} + ha_l^2\right) - \omega^2,$$

$$L_k = m_k \frac{P^2K^2}{H} - \lambda_k = m_k\left(\frac{P^2K^2}{H} + ha_l^2\right) - \omega^2,$$

$$L_l = \frac{P^2K^2}{H} - \lambda_l = \left(\frac{P^2K^2}{H} + ha_l^2\right) - \omega^2$$

is, zal de vergelijking (l) welke ter bepaling van $\frac{P^2\,K^2}{H}$ dient, door substitutie hiervan, overgaan in eene derdemachtsvergelijking ten opzichte der grootheid $\frac{P^2\,K^2}{H} + ha_l^2$ en dus, volgens de vroeger gevoerde discussie, voor die grootheid en dus voor L_i, L_k en L_l en derhalve voor $\frac{1}{W}\left(\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}\right)$, ééne reëele waarde opleveren, welke geene andere veranderlijke dan ω en geene andere constanten, dan m_i, m_k, ι^2, p^2_l en $\varkappa^2$ zal bevatten; waaruit dus volgt, dat de functie $\frac{\omega^2 d\omega}{W}\left(\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}\right)$ onafhankelijk is van $h\,a^2_l$, dus dezelfde waarde heeft voor alle lagen, welke door kegels, wier vergelijkingen dezelfde ω bevatten, gesneden worden uit gelijkvormige ellipsoïden van gelijke dichtheid, met hetzelfde middelpunt en gelijk gerichte gelijkstandige assen.

Hieruit volgt dus dat men kan zeggen:

„Indien eenige gelijkvormige ellipsoïden, van gelijke dichtheid, met hetzelfde middelpunt en gelijk gerichte gelijkstandige assen op een zelfde uitwendig punt werken, zal de aantrekking van de kleinste gelijk zijn aan die van het ringvormig deel van elke der anderen, dat daarvan afgesneden wordt door het kegelvlak, in wiens vergelijking ω gelijk is aan het maximum van ω voor de kleinste," daar deze stelling voor elke der componenten en dus voor de geheele kracht geldt.

Omgekeerd zal men dus bij elke waarde van ω eene ellipsoïde kunnen vinden waarvoor deze waarde het maximum is, en men zal dus de aantrekking van den oneindig dunnen kegel voor die ellipsoïde kunnen bepalen en deze dan integreren van $\omega = 0$ tot $\omega = \omega'$. Men zal daartoe terugkeeren tot de formule *(f)* en daarin aan alle van ω afhangende grootheden, die waarden geven, welke ze verkrijgen voor $\omega = \omega'$, daarna de integratie naar ψ van 0 tot 2π en vervolgens die naar ω van 0 tot ω' uitstrekken.

Men ziet dan dat, daar $D = 0$ wordt:

$$F_l = 2\int_0^{\omega'}\int_0^{2\pi}\frac{A^{3/2}\omega^2\,d\omega\,d\psi}{A^2+m_k B^2+m_i p_l^2 t^2 \lambda_k^2} = 4\pi\int_0^{\omega'}\frac{A^{3/2}\omega^2\,d\omega}{A^2+m_k B^2+m_i p_l^2 t^2 \lambda_k^2}.$$

Ten einde nu daarin op de gemakkelijkste wijze aan A, B en λ_k de behoorlijke waarden te geven, behoorende bij de waarde welke voor ω verkregen wordt uit de voorwaarde $D = 0$ of

$$\lambda_i\lambda_k\lambda_l - m_i^2 p_i^2 \lambda_l \lambda_k - m_k^2 p_k^2 \lambda_i \lambda_l - p_l^2 \lambda_i \lambda_k = 0, \;.\;.\; (\lambda)$$

handele men analoog als bij vergelijking (x) is geschied. Men stelle dus:

$\lambda_i = \dfrac{\delta}{\beta_i}$, $\lambda_k = \dfrac{\delta}{\beta_k}$, $\lambda_l = \dfrac{\delta}{\beta_i\beta_k}$ zoo is volgens vergelijking (λ)

$$\delta = m_i^2 p_i^2 \beta_i + m_k^2 p_k^2 \beta_k + p_l^2 \beta_i \beta_k\,.$$

Maar uit de waarden van λ_i, λ_k en λ_l volgt:

$$m_k\lambda_l - \lambda_k = (m_k-1)\omega^2 = \frac{\delta(m_k-\beta_i)}{\beta_i\beta_k},\quad m_i\lambda_l - \lambda_i = (m_i-1)\omega^2 = \frac{\delta(m_i-\beta_k)}{\beta_i\beta_k},$$

zoodat, indien men eene nieuwe constante A_l en eene nieuwe veranderlijke x invoert, volgens de vergelijkingen:

$$A_l^2 = \frac{a_l^2(\omega'^2 - h a_l^2)}{\omega'^2},\quad x^2 = \frac{A_l^2\omega^2}{a_l^2\lambda_l} = \frac{A_l^2\beta_i\beta_k}{a_l^2\delta}\,\omega^2,$$

vooreerst de grenzen der integratie naar x zullen zijn 0 en 1, terwijl verder:

$$\frac{m_k-\beta_i}{m_k-1} = \frac{m_i-\beta_k}{m_i-1} = \frac{a_l^2}{A_l^2}x^2,$$

dus

$$\beta_i = \frac{m_k A_l^2 - (m_k-1)a_l^2 x^2}{A_l^2} = \frac{a_l^2}{a_k^2}\left(1 - \frac{a_l^2 - a_k^2}{A_l^2}x^2\right),$$

$$\beta_k = \frac{m_i A_l^2 - (m_i-1)a_l^2 x^2}{A_l^2} = \frac{a_l^2}{a_i^2}\left(1 - \frac{a_l^2 - a_i^2}{A_l^2}x^2\right),$$

$$A=\lambda_i\lambda_k-\iota^2\lambda_k-\varkappa^2\lambda_i=\delta\left(\frac{\delta}{\beta_i\beta_k}-\frac{m_i^2p_i^2}{\beta_k}-\frac{m_k^2p_k^2}{\beta_i}\right)=p_l^2\delta, \beta=p_l\varkappa\lambda_i=\frac{m_kp_kp_l\delta}{\beta_i},$$

$$A^2+m_kB^2+m_ip_l^2\iota^2\lambda_k^2=p_l^2\delta^2\left(p_l^2+\frac{m_i^3p_i^2}{\beta_k^2}+\frac{m_k^3p_k^2}{\beta_i^2}\right)$$

is.

Verder is nu echter ook:

$$\omega^2=\frac{a_l^2}{A_l^2}\cdot\frac{\delta x^2}{\beta_i\beta_k}=\frac{a_l^2}{A_l^2}x^2\left(m_i^2p_i^2\beta_k^{-1}+m_k^2p_k^2\beta^{-1}+p_l^2\right),$$

dus

$$2\omega d\omega=\frac{a_l^2}{A_l^2}\Big[\left\{m_i^2p_i^2\beta_k^{-1}+m_k^2p_k^2\beta_i^{-1}+p_l^2\right\}2xdx+x^2\left\{m_i^2p_i^2\cdot\frac{(m_i-1)a_l^2}{A_l^2\beta_i^2}+\right.$$

$$\left.+m_k^2p_k^2\cdot\frac{(m_k-1)a^{l2}}{A_l^2\beta_i^2}\right\}2x\,dx\Big]=\frac{2a_l^2x\,dx}{A_l^2}\left(p_l^2+\frac{m_i^3p_i^2}{\beta_k^2}+\frac{m_k^3p_k^2}{\beta_i^2}\right).$$

Door substitutie van al deze waarden vindt men derhalve, indien men ook nog de massa M invoert:

$$F_l=\frac{3p_lM}{A_l^3}\int_0^1\frac{x^2\,dx\,.}{\sqrt{\left(1-\frac{a_l^2-a_i^2}{A_l^2}x^2\right)\left(1-\frac{a_l^2-a_k^2}{A_l^2}x^2\right)}}\quad.\quad(57)$$

terwijl A_l gevonden wordt door de vergelijking

$$A_l^2(A_l^2-a_l^2+a_i^2)(A_l^2-a_l^2+a_k^2)-p_i^2A_l^2(A_l^2-a_l^2+a_k^2)-$$
$$-p_k^2A_l^2(A_l^2-a_l^2+a_i^2)-p_l^2(A_l^2-a_l^2+a_i^2)(A_l^2-a_l^2+a_k^2)=0\quad.\quad(A)$$

welke men uit $D=0$ verkrijgt, door daarin ω' door A_l te vervangen. [38] Eene discussie, analoog aan die van vergelijking (l)

---

[38] Geeft men aan deze laatste vergelijking de vorm:

$$\frac{p_l^2}{A_l^2}+\frac{p_i^2}{A_l^2-a_l^2+a_k^2}+\frac{p_i^2}{A_l^2-a_l^2+a_i^2}=1,$$

zoo ziet men daaruit dat A_l de met a_l gelijkstandige halfas is, van eene ellipsoïde, welke door P gaat en confocaal is met de gegevene, zoodat $a_l^2-a_i^2=A_l^2-A_i^2$, $a_l^2-a_k^2=A_l^2-A_k^2$, dus ook $\frac{A_i^2-A_i^2}{A_l^2}$ en $\frac{A_l^2-A_k^2}{A_l^2}$, de grootheden zijn, waarin E_k en E_l uit (54) overgaan door permutatie van A_i en A_l, waaruit dus blijkt dat (57) inderdaad de vergelijking is, waarin de eerste der vergelijkingen (55) overgaat door diezelfde permutatie, zoodat Legendre's resultaat identisch is met dat van Laplace.

leert, dat de grootste der drie waarden voor A_l^2, welke deze vergelijking oplevert, daarvoor moet genomen worden. Uit de vergelijkingen (57) en (A) volgt, zoo als te verwachten was, de stelling van MACLAURIN onmiddelijk.

LEGENDRE besluit zijne verhandeling met de volgende woorden.

„Ofschoon in den aanvang de oplossing van dit vraagstuk vrij eenvoudig schijnt, ziet men echter, dat er vele kunstgrepen noodig waren om tot het eindresultaat te komen. Dit vraagstuk is waarschijnlijk een van die, waarop eene synthetische methode niet toepasselijk zou zijn. Want om de integratie mogelijk te maken, schijnt er geen ander middel te wezen dan, zooals wij gedaan hebben, de ellipsoïde te ontleden in kegelvormige lagen met constante (ω); de aantrekking van een dezer lagen moet dan door eene zeer moeilijke integratie gevonden worden, welke ver boven de macht der synthese gaat. Slechts na de integratie toont de verdwijning van ha^2_l, dat het resultaat veel eenvoudiger kan worden gemaakt."

De hoofdinhoud der hierin vervatte bewering is, zooals men later heeft ontdekt, geheel valsch; daar zooals men zal zien, de door NEWTON en MACLAURIN begonnen synthetische behandeling, door CHASLES op uitstekende wijze is voltooid. Van LEGENDRE's standpunt uitgaande, is een dergelijke beschouwing niet te verwonderen, daar de groote samengesteldheid zijner substitutiën hem natuurlijk daartoe leiden moest.

In weerwil van de moeilijkheid, welke aan het vinden dier substitutiën moet verbonden zijn geweest, komt mij LEGENDRE's methode ter verkrijging der vergelijking (57), verkieslijker voor dan die van LAPLACE, daar zij zeker meer rechtstreeks is. Opmerkelijk is het, dat daarbij van de stelling van MACLAURIN geen gebruik wordt gemaakt, maar dat deze uit het eindresultaat wordt afgeleid. In plaats daarvan treedt echter de stelling omtrent de gelijke aantrekking der verschillende kegelvormige lagen met dezelfde ω, zoodat men niet kan zeggen, dat vergelijking (57) langs zuiver analytischen weg uit formule (20) is verkregen. Ook is het zeker geenszins als verdienste aanterekenen, dat de in formule (j) ingevoerde grootheid A imaginair wordt, zoodra $p_l < a_l$ is, zonder dat aangetoond is dat het eindresultaat daaronder niet lijdt, hetgeen toch zeker niet geacht kan worden, bewezen te zijn, door de naar aanleiding daarvan gevoerde redenering.

Terecht zegt dan ook LAGRANGE ([39]) sprekende over de oplossingen, door LAPLACE en LEGENDRE gegeven, **„dat men die wel als meesterstukken van analyse moet beschouwen, maar toch een meer rechtstreekschen en eenvoudigen weg kan verlangen, waarop de voortdurende vorderingen der analyse recht geven te hopen."**

In hetzelfde geschrift ontwikkelt LAGRANGE, nog eenige formules, welke betrekking hebben op het hier behandelde vraagstuk, en die wij hier kort zullen opnemen, ten einde alles te hebben vermeld wat door hem daaromtrent is gedaan, hoewel ook door deze formules niet veel voordeel wordt verkregen.

Zij $\Sigma \alpha_i x_i^2 = 1$ de vergelijking der ellipsoïde, zoo stelle men weder $x_i = \rho \cos \varphi$, $x_k = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$, $x_l = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$; is dan r' de waarde van ρ voor eenig punt van het oppervlak, zoo is, indien nog $r' = \rho'^{-\frac{1}{2}}$ wordt gesteld, $\frac{1}{r'^2} = \rho' = \alpha_i \cos^2\varphi +$

$$+ \alpha_k \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (r')$$

$$\text{en } M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r'} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r'^3 \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi}{3} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi}{3 \rho'^{3/2}} . \quad (M).$$

Daar nu de grenzen dezer integratie onafhankelijk zijn van α_i, α_k en α_l, mag men zeggen:

$$\frac{\delta^{m+n+p} M}{\delta^m \alpha_l \, \delta^n \alpha_k \, \delta^p \alpha_l} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\delta^{m+n+p} \frac{\sin \varphi}{3 \rho'^{3/2}}}{\delta^m \alpha_i \, \delta^n \alpha_k \, \delta^p \alpha_l} \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Maar $\frac{\delta \rho'}{\delta \alpha_i} = \cos^2\varphi$, $\frac{\delta \rho'}{\delta \alpha_k} = \sin^2\varphi \cos^2\vartheta$, $\frac{\delta \rho'}{\delta \alpha_l} = \sin^2\varphi \sin^2\vartheta$

dus $\frac{\delta^{m+n+p} \rho'^{-3/2}}{\delta^m \alpha_i \, \delta^n \alpha_k \, \delta^p \alpha_l} =$

$$= \frac{(-1)^{m+n+p} 3.5 \ldots (2m+2n+2p+1) \sin^{2n+2p}\varphi \cos^{2m}\varphi \sin^{2p}\vartheta \cos^{2n}\vartheta}{2^{m+n+p} \rho'^{\frac{2m+2n+2p+3}{2}}}$$

([39]) Mém. de l' Ac. de Berlin 1792—93. Recherches sur plusieurs points d'analyse etc. Second Mémoire, pag. 258.

en $\dfrac{\delta^{m+n+p} M}{\delta^m \alpha_i \delta^n \alpha_k \delta^p \alpha_l} =$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(-1)^{m+n+p}.5.7...(2m+2n+2p+1)\sin^{2n+2p+1}\varphi\cos^{2m}\varphi\sin^{2p}\vartheta\cos^{2n}\vartheta}{2^{m+n+p}\,\rho'^{\frac{2m+2n+2p+3}{2}}}\,d\vartheta d\varphi.$$

Nu is volgens de bovenstaande waarden van x_i, x_k en x_l zooals bekend is, $dx_i\, dx_k\, dx_l = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi$, dus, indien men voor x_i enz. alsook voor $dx_i\, dx_k\, dx_l$ hare waarden substitueert:

$$x_i^{2m} x_k^{2n} x_l^{2p} dx_i\, dx_k\, dx_l = \rho^{2m+2n+2p+2} \sin^{2n+2p+1}\varphi\cos^{2m}\varphi\sin^{2p}\vartheta\cos^{2n}\vartheta\, d\rho\, d\vartheta d\varphi$$

of, aan beide zijden over de geheele ellipsoïde integrerend,

$$\iiint x_i^{2m} x_k^{2n} x_l^{2p}\, dx_i\, dx_k\, dx_l =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r'} \rho^{2m+2n+2p+2}\sin^{2n+2p+1}\varphi\cos^{2m}\varphi\sin^{2p}\vartheta\cos^{2n}\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n+2p+1}\varphi\cos^{2m}\varphi\sin^{2p}\vartheta\cos^{2n}\vartheta}{(2m+2n+2p+3)\rho'^{\frac{2m+2n+2p+3}{2}}}\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{(-2)^{m+n+p}}{5.7...(2m+2n+2p+3)} \times \frac{\delta^{m+n+p} M}{\delta^m \alpha_i \delta^n \alpha_k \delta^p \alpha_l}.$$

Zoo als bekend is volgt nu uit (M) gemakkelijk:

$$M = \frac{4}{3}\pi\alpha_i^{-\frac{1}{2}}\alpha_k^{-\frac{1}{2}}\alpha_l^{-\frac{1}{2}},$$

dus:

$$\frac{\delta^{m+n+p} M}{\delta^m \alpha_i \delta^n \alpha_k \delta^p \alpha_l} =$$

$$=(-1)^{m+n+p}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2p-1}{2}\alpha_i^{-\frac{2m+1}{2}}\alpha_k^{-\frac{2n+1}{2}}\alpha_l^{-\frac{2p+1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n+p}.1.3..(2m-1).1.3..(2n-1).1.3..(2p-1)M}{2^{m+n+p}\alpha_i^m\alpha_k^n\alpha_l^p},$$

waaruit volgt:

$$\iiint x_i^{2m} x_k^{2n} x_l^{2p}\, dx_i\, dx_k\, dx_l =$$

$$= \frac{1.3..(2m-1).1.3..(2n-1).1.2..(2p-1)}{5.7.9..(2m+2n+2p+3)} M a_i^{2m} a_k^{2n} a_l^{2p} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

terwijl men licht ziet, dat $\iiint x_i^{\mu} x_k^{\nu} x_l^{\pi}\, dx_i\, dx_k\, dx_l$, over de geheele ellipsoïde uitgestrekt, nul wordt zoodra μ, ν of π, een van allen oneven zijn, omdat dan steeds ééne der grootheden sin ϑ, cos φ of cos ϑ, in oneven macht voorkomt.

De formule (I) kan nu toegepast worden, op de ontwikkeling der potentiaalfunctie V (zie pagg. 70 en 85).

Zijn toch R, φ', ϑ', de waarden van ρ, φ en ϑ voor het aangetrokken punt P, zoo is

$$V = \int\int\int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{\sqrt{\Sigma (p_i - x_i)^2}} =$$

$$\int\int\int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{R\sqrt{\left\{\left(\cos\varphi' - \frac{x_i}{R}\right)^2 + \left(\sin\varphi' \cos\vartheta' - \frac{x_k}{R}\right)^2 + \left(\sin\varphi' \sin\vartheta' - \frac{x_l}{R}\right)^2\right\}}}$$

waarbij de integratie over de geheele massa der ellipsoïde moet uitgestrekt worden.

Men kan dan

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\cos\varphi' - \frac{x_i}{R}\right)^2 + \left(\sin\varphi' \cos\vartheta' - \frac{x_k}{R}\right)^2 + \left(\sin\varphi' \sin\vartheta' - \frac{x_l}{R}\right)^2\right\}}}$$

ontwikkelen in eene reeks van de vorm:

$$1 + \frac{F_1}{R} + \frac{F_2}{R^2} + \frac{F_3}{R^3} + \ldots \frac{F_n}{R^n} + \ldots .$$

waarin F_n eene homogene functie van den n^{den} graad in x_i, x_k, x_l zal zijn, omdat de functie welke men ontwikkelt homogeen en van den graad 0 is, ten opzichte van $\frac{x_i}{R}$ $\frac{x_k}{R}$ en $\frac{x_l}{R}$. Daardoor wordt

dan $V = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int\int\int F_n\, dx_i\, dx_k\, dx_l}{R^{n+1}}$.

De termen nu waarin n oneven is, even als die gedeelten der termen met even n, waarin eene der grootheden x_i in oneven macht voorkomt, zijn allen bij de integratie gelijk nul, zoodat men zal mogen stellen

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int\int\int F_{2n}\, dx_i\, dx_k\, dx_l}{R^{2n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

terwijl de grootheden F_2, F_4 enz. de vormen hebben:

$F_2 = Ax_i^2 + Bx_k^2 + Cx_l^2$,

$$F_4 = A'x_i^4 + B'x_k^4 + C'x_l^4 + D'x_i^2\,x_k^2 + E'x_i^2\,x_l^2 + F'x_k^2\,x_l^2.$$
$$F_6 = A''x_i^6 + B''x_k^6 + C''x_l^6 + D''x_i^4\,x_k^2 + E''x_i^4\,x_l^2 + F''x_i^2 x_k^4 +$$
$$+ G''x_i^2\,x_l^4 + H''x_k^4\,x_l^2 + I''x_k^2\,x_l^4 + K''x_i^2\,x_k^2\,x_l^2,$$

enz., zijnde de coëfficienten functiën van φ' en ϑ', welke men licht langs verschillende wegen zal kunnen bepalen.

Past men nu op vergelijking (v) de formule (I) toe, zoo ziet men dat:

$$\int\int\int F_2\,dx_i\,dx_k\,dx_l = \frac{M}{5}(Aa_i^2 + Ba_k^2 + Ca_l^2),$$
$$\int\int\int F_4 dx_i\,dx_k\,dx_l = \frac{M}{5.7}(3\,A'a_i^4 + 3\,B'a_k^4 + 3C'a_l^4 + D'a_i^2\,a_k^2 +$$
$$E'a_i^2\,a_l^2 + F'a_k^2\,a_l^2),$$
$$\int\int\int F_6\,dx_i\,dx_k\,dx_l = \frac{M}{5.7.9}(1.3.5\;A''a_i^6 + 1.3.5\;B''a_k^6 + 1.3.5\;C''a_l^6 +$$
$$+ 3\,D''a_i^4\,a_k^2 + 3\,E''a_i^4\,a_l^2 + 3\,F''a_i^2\,a_k^4 + 3\,G''a_i^2\,a_l^4 +$$
$$+ 3\,H''a_k^4\,a_l^2 + 3I''a_k^2\,a_l^4 + K''a_i^2\,a_k^2\,a_l^2), \text{ enz.}$$

Tusschen de coefficienten A, B enz. zullen nu echter betrekkingen bestaan, welke het gevolg zijn van de omstandigheid, dat de reeks door ontwikkeling van een gebroken is ontstaan. Gemakkelijker evenwel vindt men die, door toepassing van de bekende stelling, dat indien men $\frac{1}{\sqrt{\Sigma\,(p_i - x_i)^2}} = \mu$ stelt, $\frac{\delta^2\mu}{\delta x_i^2} + \frac{\delta^2\mu}{\delta x_k^2} + \frac{\delta^2\mu}{\delta x_l^2} = 0$ moet zijn, wat ook de waarden van p_i, p_k, p_l mogen zijn. Substitueert men dus voor μ de reeks zoo zal wegens de homogeniteit der functiën F_{2n},

$$\frac{\delta^2 F_{2n}}{\delta x_i^2} + \frac{\delta^2 F_{2n}}{\delta x_k^2}\;\frac{\delta^2 F_{2n}}{\delta x_l^2} = 0$$

zijn, voor elke functie afzonderlijk, en daar de differentiaal vergelijking bestaat, onafhankelijk van de waarden van x_i, x_k en x_l, zullen na de differentiatie, de gelijkslachtige deelen gelijk nul moeten worden gesteld. Op deze wijze volgt dan

uit $\frac{\delta^2 F_2}{\delta x_i^2} + \frac{\delta^2 F_2}{\delta x_k^2} + \frac{\delta^2 F_2}{\delta x_l^2} = 0$, $A + B + C = 0$.

uit $\frac{\delta^2 F_4}{\delta x_i^2} + \frac{\delta^2 F_4}{\delta x_k^2} + \frac{\delta^2 F_4}{\delta x_l^2} = 0$, $4.3\;A' + 2\,D' + 2\,E' = 0$,

$$4.3\,B' + 2\,D' + 2\,F' = 0,\quad 4.3\;C' + 2\,E' + 2\,F' = 0$$

$$\text{uit } \frac{\delta^2 F_6}{\delta x_i^2} + \frac{\delta^2 F_6}{\delta x_k^2} + \frac{\delta^2 F_6}{\delta x_l^2} = 0,\ 6.5\,A'' + 2.1\,D'' + 2.1\,E'' = 0,$$

$$6.5\,B'' + 2\,F'' + 2\,H'' = 0,\ \ 6.5\,C'' + 2\,G'' + 2\,I'' = 0,$$

$$4.3\,D'' + 4.3\,F'' + 2\,K'' = 0,\ \ 4.3\,E'' + 4.3\,G'' + 2\,K'' = 0,$$

$$4.3\,H'' + 4.3\,I'' + 2\,K'' = 0,$$

enz.

Daaruit volgt nu: $A = -B - C$;

$2.3\,A' = -D' - E'$; $2.3\,B' = -D' - F'$; $2.3\,C' = -E' - F'$;

$$3.5\,A'' = -D'' - E''; 3.5 B'' = -H'' - F'' = -H'' - \left(-D'' - \frac{K''}{2.3}\right) =$$

$$= -H'' + D'' - (H'' + I'') = -2\,H'' - I'' + D'';$$

$3.5.\,C'' = -I'' - G'' = -H'' - 2\,I'' + E''$;

$F'' = H'' + I'' - D''$; $G'' = H'' + I'' - E''$; $K'' = -2.3\,H'' - 2.3\,I''$;

enz., en door substitutie daarvan verkrijgt men dan:

$$\int\!\!\int\!\!\int F_2\, dx_i\, dx_k\, dx_l = \frac{M}{5}\left\{B\,(a_k^2 - a_i^2) + C\,(a_l^2 - a_i^2)\right\},$$

$$\int\!\!\int\!\!\int F_4 dx_i dx_k dx_l = \frac{M}{2.5.7}\left\{-D(a_k^2 - a_i^2)^2 - E'(a_l^2 - a_i^2)^2 - F'(a_l^2 - a_k^2)^2\right\},$$

$$\int\!\!\int\!\!\int F_6 dx_i dx_k dx_l = \frac{M}{5.7.9}\Big\{D''(a_k^2 - a_i^2)^3 + E''(a_l^2 - a_i^2)^3 - H''(a_l^2 - a_k^2)^3 -$$

$$-3H''(a_k^2 - a_i^2)(a_l^2 - a_k^2)^2 - I''(a_l^2 - a_k^2)^3 - 3I''(a_l^2 - a_i^2)(a_l^2 - a_k^2)^2\Big\} \text{ enz.}$$

Deze vormen leeren, dat deze integralen splitsbaar zijn in faktoren waarvan de eene alleen de massa, de andere alleen de excentriciteiten der ellipsoïde bevat. Kon men dus uit deze inductie een algemeen besluit trekken, zoo zou daaruit volgen dat V altijd kon worden gebracht in de vorm

$$V = a_i a_k a_l\, F(a_k^2 - a_i^2, a_l^2 - a_i^2).\ ^{(40)}$$

---

(40) Deze voorzichtige woorden van Lagrange steken scherp af bij die, welke door Legendre gebruikt worden, in zijn geschrift van 1785 (zie pag. 65—80) waar, bij alle bewijsvoeringen, de eerste waarden der vormen worden ontwikkeld en daarmede als algemeen bewezen beschouwd. Het komt mij dan ook vreemd voor, dat men dit stuk van Legendre in de door hem gegeven vorm, voor eene algemeene afleiding van de formules voor de daar behandelde omwentelingslichamen opneemt, daar, naar het mij voorkomt, aan de algemeene bewijsvoering niet weinig ontbreekt, hetgeen ik t. a. p. getracht heb aantevullen. En toch vindt men bij vele latere schrijvers gezegd, dat Legendre het eerst in gemeld geschrift, de theorie van de aantrekking der ellipsoïde met twee gelijke assen heeft volmaakt. (Biot. Mem. de l'Inst. T.VI, Ivorij, Phil. Trans. 1809 etc.)

Stelde men dus door V' voor, de waarde welke V verkrijgt, door a_i^2, a_k^2 en a_l^2 te vervangen door $a_i^2 + \varepsilon$, $a_k^2 + \varepsilon$, $a_l^2 + \varepsilon$, zoo ware

$$V' = \sqrt{(a_i^2 + \varepsilon)(a_k^2 + \varepsilon)(a_l^2 + \varepsilon)}\, F(a_k^2 - a_i^2, a_l^2 - a_i^2),$$

en $\dfrac{V'}{V} = \sqrt{\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{a_i^2}\right)\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{a_k^2}\right)\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{a_l^2}\right)}$,

zoodat, indien men de waarde van V' voor eenige waarde van ε kon vinden, men daaruit die van V zou kunnen afleiden.

Drukt men nu V uit in de grootheden r, φ en ϑ van bl. 37, zoo ziet men licht dat

$$V = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\int_{r'}^{r''} r \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} (r''^2 - r'^2) \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta$$

is, of indien men de functiën I, N en h van bl. 49 invoert, volgens welke $r''^2 - r'^2 = \dfrac{4 I \sqrt{I^2 + hN}}{N^2}$ is,

$$V = 2\int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{I\sqrt{I^2 + hN}}{N^2} \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta.$$

De hoofdoorzaak van de moeilijkheid der volgende integratie ligt in het wortelteeken. Dit verdwijnt echter indien $h = 0$ is, waartoe, ingevolge de beteekenis van h, ε moet gevonden worden, uit de vergelijking

$$\frac{p_i^2}{a_i^2 + \varepsilon} + \frac{p_k^2}{a_k^2 + \varepsilon} + \frac{p_l^2}{a_l^2 + \varepsilon} - 1 = 0.$$

Zijn dan M', I' en N', de waarden welke M en N aannemen door de substitutie van $a_i^2 + \varepsilon$ voor a_i^2 enz., zoo wordt:

$$V' = 2\int_{\vartheta'}^{\vartheta''}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{I'^2}{N'^2} \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (v').$$

Bovendien wordt dan de vergelijking ten bepaling van r' en r'', $Nr' - 2M' = 0$, zoodat de integratiën naar ϑ en φ beide van 0 tot π zullen moeten geschieden (zie pag. 38). Substitueert men dan in v voor I en N hare waarden, zoo is nu

$$V' = 2\int\int_0^{\pi} \frac{\left(\dfrac{p_i \cos\varphi}{a_i^2 + \varepsilon} + \dfrac{p_k \sin\varphi \cos\vartheta}{a_k^2 + \varepsilon} + \dfrac{p_l \sin\varphi \sin\vartheta}{a_l^2 + \varepsilon}\right)^2}{\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{a_i^2 + \varepsilon} + \dfrac{\sin^2\varphi \cos^2\vartheta}{a_k^2 + \varepsilon} + \dfrac{\sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{a_l^2 + \varepsilon}\right)^2} \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta,$$

hetgeen de meer eenvoudige gedaante aanneemt

$$V' = 2\int\int_{0}^{\pi} \frac{\left(\frac{p_i}{a_i^2+\varepsilon}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{p_k \cos\vartheta}{a_k^2+\varepsilon} + \frac{p_l \sin\vartheta}{a_l^2+\varepsilon}\right)^2 \sin^2\varphi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a_i^2+\varepsilon} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\vartheta}{a_k^2+\varepsilon} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}{a^2+\varepsilon}\right)^2} \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

omdat de termen van de vorm $Q \cos\varphi \, d\varphi$, waarin Q enkel functie van $\sin^2\varphi$ en $\cos^2\vartheta$ is, bij de integratie van 0 tot π wegvallen.

Men kan nu aanvangen met welke integratie men wil. Geen van beide geeft groote bezwaren, maar die naar ϑ verdient de voorkeur, omdat de integraal algebraïsch blijft. De tweede integratie, hangt echter dan van een elliptische integraal af.

Ten slotte merkt Lagrange nu op, dat datgene, wat door hem slechts bij induktie is opgemaakt, door Laplace en Legendre streng is bewezen en dat dus de gevolgtrekkingen voor de berekening van V, gerust mogen gebruikt worden.

Men merke op dat reeds nu de potentiaal functie meer en meer op den voorgrond treedt, en dat hare berekening van lieverlede die der componenten van de kracht gaat vervangen. Overigens komt het bepalen van de waarde van ε, waardoor $h = 0$ wordt neder, op het berekenen van V' voor de met de oorspronkelijke confocale ellipsoïde, welke door het aangetrokken punt P gaat.

In de Mémoires de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts van het jaar 1806, vindt men een geschrift van den physicus Biot, waarin hij gebruik maakt van de bekende eigenschap der potentiaal functie V dat $\frac{\partial^2 V}{\partial p_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial p_k^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial p_l^2} = 0$ . . . . (58) is; eene vergelijking, welke door Laplace het eerst in zijne »Mécanique céleste" was bekend gemaakt, en waarvan, zooals boven gebleken is, ook Lagrange zich bediend heeft om de betrekkingen tusschen de coëfficienten A, B enz. te vinden (zie bl. 23).

Na gewezen te hebben op de bekende eigenaardigheid eener partiëele differentiaal vergelijking, **dat hare algemeene uitwerking is, geheel de vorm eener functie te bepalen, ten opzichte van al de veranderlijken, wanneer die gegeven is met betrekking tot al de veranderlijken op éene na,** zoodat twee partiëele differentiaal vergelijkingen de vorm eener functie, ten opzichte van twee veranderlijken bepalen enz. gaat hij over tot de toepassing van deze eigenschap, ter bepaling van de vorm van V uit de vergelijking (58).

Ter bereiking van grooter algemeenheid zij

$$P_i = F_i(p_i p_k p_l),\ P_k = F_k(p_i p_k p_l),\ P_l = F_l(p_i p_k p_l). \quad (g)$$

zijnde dus P_i enz. willekeurige functien van p_i, p_k en p_l; echter moeten deze zoodanig zijn, dat daaruit p_i, p_k en p_l zonder onbepaaldheid in P_i, P_k en P_l kunnen worden uitgedrukt, opdat deze laatste grootheden door geene voorwaarden zullen gebonden zijn. Laat dus omgekeerd:

$$p_i = f_i(P_i P_k P_l), p_k = f_k(P_i P_k P_l), p_l = f_l(P_i P_k P_l) \dots (g')$$

zijn. Men heeft dan

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta V}{\delta p_i} &= \frac{\delta V}{\delta P_i}.\frac{\delta P_i}{\delta p_i} + \frac{\delta V}{\delta p_k}.\frac{\delta P_k}{\delta p_i} + \frac{\delta V}{\delta P_l}.\frac{\delta P_l}{\delta p_i} \\
\frac{\delta V}{\delta p_k} &= \frac{\delta V}{\delta P_i}.\frac{\delta P_i}{\delta p_k} + \frac{\delta V}{\delta p_k}.\frac{\delta P_k}{\delta p_k} + \frac{\delta V}{\delta p_i}.\frac{\delta P_l}{\delta p_k} \\
\frac{\delta V}{\delta p_l} &= \frac{\delta V}{\delta P_l}.\frac{\delta P_l}{\delta p_l} + \frac{\delta V}{\delta P_k}.\frac{\delta P_k}{\delta p_l} + \frac{\delta V}{\delta P_l}.\frac{\delta P_l}{\delta p_l}
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (\delta')$$

zijnde V ter linkerzijde als functie van p_i, p_k en p_l, ter rechterzijde als functie van P_i, P_k, P_l beschouwd.

Op dezelfde wijze kan men de uitdrukkingen voor $\frac{\delta^2 V}{\delta p_i^2}$ vormen en die in vergelijking (58) substitueren. Deze verkrijgt daardoor de gedaante

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta V}{\delta P_i}\left(\frac{\delta^2 P_i}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 P_i}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 P_i}{\delta p_l^2}\right) + \frac{\delta V}{\delta P_k}\left(\frac{\delta^2 P_k}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 P_k}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 P_k}{\delta p_l^2}\right) + \\
&\qquad + \frac{\delta V}{\delta P_l}\left(\frac{\delta^2 P_l}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 P_l}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 P_l}{\delta p_l^2}\right) + \\
&+ \frac{\delta^2 V}{\delta P_i^2}\left\{\left(\frac{\delta P_i}{\delta p_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_i}{\delta p_k}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_i}{\delta p_l}\right)^2\right\} + \frac{\delta^2 V}{\delta P_k^2}\left\{\left(\frac{\delta P_k}{\delta p_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_k}{\delta p_k}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_k}{\delta p_l}\right)^2\right\} + \\
&\qquad + \frac{\delta^2 V}{\delta P_l^2}\left\{\left(\frac{\delta P_l}{\delta p_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_l}{\delta p_k}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_l}{\delta p_l}\right)^2\right\} + \\
&\qquad + 2\frac{\delta^2 V}{\delta P_i \delta P_k}\left(\frac{\delta P_i}{\delta p_i}.\frac{\delta P_k}{\delta p_i} + \frac{\delta P_i}{\delta p_k}.\frac{\delta P_k}{\delta p_k} + \frac{\delta P_i}{\delta p_l}.\frac{\delta P_k}{\delta p_l}\right) + \\
&\qquad + 2\frac{\delta^2 V}{\delta P_k \delta P_l}\left(\frac{\delta P_k}{\delta p_i}.\frac{\delta P_l}{\delta p_i} + \frac{\delta P_k}{\delta p_k}.\frac{\delta P_l}{\delta p_k} + \frac{\delta P_k}{\delta p_l}.\frac{\delta P_l}{\delta p_l}\right) +
\end{aligned}$$

$$+2\frac{\delta^2 V}{\delta P_l \delta P_i}\left(\frac{\delta P_l}{\delta p_i}\cdot\frac{\delta P_i}{\delta p_i}+\frac{\delta P_l}{\delta p_k}\cdot\frac{\delta P_l}{\delta p_k}+\frac{\delta P_l}{\delta p_l}\cdot\frac{\delta P_l}{\delta p_l}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (58^a)$$

Deze is even als (58) eene lineaire partiëele differentiaal vergelijking van de tweede orde, waarin men door middel der vergelijkingen g en g', alles in P_i, P_k en P_l kan worden uitgedrukt, terwijl V als functie van diezelfde grootheden moet worden beschouwd. Men kan dus de integraal van deze vergelijking voorstellen door eene reeks van de vorm

$$V=\varphi+\frac{P_i}{1}\varphi_1+\frac{P_i^2}{1.2}\varphi_2+\frac{P_i^3}{1.2.3}\varphi_3+\dots\dots\dots \quad (h)$$

waarin φ, φ_1 φ_2 enz. functien van P_k en P_l, doch niet meer van P_i zijn.

Vormt men dan de differentiaal quotienten van V uit deze reeks, substitueert die in (58^a), nadat daarin alles door P_i enz. is uitgedrukt, en stelt de coëfficienten der termen, die bij rangschikking naar P_i ontstaan, gelijk 0, zoo zullen al de functien φ_2, φ_3, enz. kunnen uitgedrukt worden door middel der beide eersten φ en φ_1 [41], welke zelve onbepaald blijven en de willekeurige constanten der integratie vormen.

---

[41] Op dit gezegde berust de waarheid van de volgende stellingen geheel en al. Gold het daarbij de vergelijking (58) zoo ware de waarheid gemakkelijk te zien. Maar in (58^a) komen al de differentiaal quotienten voor, met coëfficienten, die zelve ook P_i zullen bevatten en wel in allerlei geheel onbepaalde machten, omdat de functien F_i enz. geheel willekeurig zijn. Het is dus, naar het mij voorkomt, wel noodig aan te toonen, dat in weerwil daarvan, altijd de beide éérste functien φ en φ_1 de arbitraire constanten kunnen worden. Dit kan, naar ik meen, aldus geschieden. Men heeft uit (h) $\frac{\delta^2 V}{\delta P_i^2}=\varphi_2+\frac{P_i}{1}\varphi_3+\frac{P_i^2}{1.2}\varphi_4+\dots$,

$$\frac{\delta^2 V}{\delta P^2}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta P_k^2}+\frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta^2\varphi_1}{\delta P_k^2}+\frac{P_i^2}{1.2}\cdot\frac{\delta^2\varphi_2}{\delta P_k^2}+\dots;\frac{\delta^2 V}{\delta P_l^2}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta P_l^2}+\frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta^2\varphi_1}{\delta P_k^2}+\frac{P_i^2}{1.2}\cdot\frac{\delta^2\varphi_2}{\delta P^2}+\dots;$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta P_i\delta P_k}=\frac{\delta\varphi_1}{\delta P_k}+\frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta\varphi_2}{\delta P_k}+\dots;\frac{\delta^2 V}{\delta P_i\delta P_l}=\frac{\delta\varphi_1}{\delta P_l}+\frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta\varphi_2}{\delta P_i}+\dots;$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta P_k\delta P_l}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta P_k\delta P_l}+\frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta^2\varphi_1}{\delta P_k\delta P_l}+\dots$$

Daaruit blijkt dat, wat ook de vorm der coëfficienten moge zijn, in verg. (58^a) de term P_i^n in haar coëfficient de functien $\varphi, \varphi_1\dots$ hoogstens tot φ_{n+2} zal

Door middel hiervan is het nu gemakkelijk, de algemeene vormen van $\frac{\delta V}{\delta p_i}$, $\frac{\delta V}{\delta p_k}$ en $\frac{\delta V}{\delta p_l}$ te vinden.

Vooreerst toch is volgens (h):

$$\frac{\delta V}{\delta P_i} = \varphi_1 + \frac{P_i}{1}\varphi_2 + \frac{P_i^2}{1.2}\varphi_3 + \ldots;\ \frac{\delta V}{\delta P_k} = \frac{\delta\varphi}{\delta P_k} + \frac{P_i}{1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta P_k} + \frac{P_i^2}{1.2}\cdot\frac{\delta\varphi_2}{\delta P_k} + \ldots;$$

$$\frac{\delta V}{\delta P_l} = \frac{\delta\varphi}{\delta P_l} + \frac{P_i}{1}\cdot\frac{\delta\varphi_1}{\delta P_l} + \frac{P_i^2}{1.2}\cdot\frac{\delta\varphi_2}{\delta P_l} + \ldots\ldots\ldots \quad (\delta'')$$

terwijl in de waarden van φ_2 enz., niet φ zelve, maar alleen hare partiëele differentiaal quotienten naar P_k en P_l voorkomen, hetgeen licht uit de vorm der vergelijkingen (δ'), (58″) en (δ'') volgt; zoodat de drie reeksen (δ'') geheel bekend zullen zijn, indien men hare eerste termen kent m. a. w, indien men de waarden van $\frac{\delta V}{\delta P_i}$, $\frac{\delta V}{\delta P_k}$ en $\frac{\delta V}{\delta P_l}$ kent, behoorende bij

$$P_i = F_i\,(p_i.p_k.p_l) = 0.$$

Nu zijn echter $\frac{\delta V}{\delta p_i}$ enz. met $\frac{\delta V}{\delta P_i}$ enz. steeds verbonden door de vergelijkingen (δ'), zoodat altijd het eene stelsel uit het andere kan verkregen worden.

Kent men dus de waarden van $\frac{\delta V}{\delta p_i}$, $\frac{\delta V}{\delta p_k}$, $\frac{\delta V}{\delta p_l}$ voor $P_i = 0$, zoo heeft men ook uit (δ') die van $\frac{\delta V}{\delta P_i}$ enz. voor $P_i = 0$, daaruit dan φ_1, $\frac{\delta\varphi}{\delta P_k}$ en $\frac{\delta\varphi}{\delta P_l}$, vervolgens uit dezen φ_2, φ_3 enz., daaruit weder de algemeene waarden van $\frac{\delta V}{\delta P_i}$ enz. volgens (δ'') en eindelijk weder uit (δ') de algemeene waarden van $\frac{\delta V}{\delta p_i}$, $\frac{\delta V}{\delta p_k}$ en $\frac{\delta V}{\delta p_l}$.

---

bevatten. De vergelijkingen gevormd door het gelijk nul stellen van de coëfficienten van de termen met $P_i^0, P_i^1, P_i^2 \ldots P_i^n$, leveren dan een stelsel van n + 1 vergelijkingen tusschen n + 3 grootheden $\varphi, \varphi_1 \ldots \varphi_{n+2}$, waaronder steeds de beide eersten kunnen gekozen worden, om door middel daarvan de anderen uit te drukken.

Maar de voorwaardelijke vergelijking: $F_i(p_i, p_k, p_l) = 0$, is die van een willekeurig te kiezen oppervlak, en de waarden van $\frac{\delta V}{\delta p_i}$ enz. in die onderstelling, zijn, met tegengesteld teeken genomen, de waarden van de componenten der aantrekkingen, door de spheroïde uitgeoefend op de punten van dat oppervlak. Men kan derhalve uit het voorgaande besluiten tot de zeer algemeene stelling:

Om te kennen de componenten van de aantrekking eener spheroïde op een willekeurig punt der ruimte, behoeft men slechts te kennen, de componenten van de aantrekking van dezelfde spheroïde, op alle punten van een willekeurig te kiezen oppervlak.

Men kan bijvoorbeeld voor $P_i = 0$ de vergelijking kiezen van het oppervlak der aantrekkende spheroïde zelve en ziet dan, dat de aantrekking op een willekeurig punt der ruimte bekend zal zijn, wanneer men kent die op de punten van het oppervlak van het aantrekkende lichaam zelf, zijnde dit de stelling waarvan Laplace in zijne methode heeft gebruik gemaakt.

Men kan ook $P_i = p_i$, $P_k = p_k$, $P_l = p_l$ nemen, waardoor uit (h) volgt, $V = \varphi + \frac{p_i}{1}\varphi_1 + \frac{p_i^2}{1.2}\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots \quad (h')$

zoodat (58) (waarmede nu (58$''$) identisch blijft),

wordt: $$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p_i^n}{1.\,2\ldots n}\left(\varphi_{n+2} + \frac{\delta^2\varphi_n}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2\varphi_n}{\delta p_l^2}\right) = 0.$$

Alsdan is dus algemeen $\varphi_{n+2} = -\left(\frac{\delta^2\varphi_n}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2\varphi_n}{\delta p_l^2}\right)$ zoodat al de functien van even rang φ_2, φ_4 enz. zullen afhangen van φ, die van oneven rang van φ_1, terwijl verder:

$$\frac{\delta V}{\delta p_i} = \varphi_1 - \frac{p_i}{1}\left(\frac{\delta^2\varphi}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta p_l^2}\right) - \frac{p_i^2}{1.2}\left(\frac{\delta^2\varphi_1}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2\varphi_1}{\delta p_l^2}\right) +$$

$$+ \frac{p_i^3}{1.2.3}\left(\frac{\delta^4\varphi}{\delta p_k^4} + 2\frac{\delta^4\varphi}{\delta p_k^2\delta p_l^2} + \frac{\delta^4\varphi}{\delta p_l^4}\right) + \frac{p_i^4}{1.2.3.4}\left(\frac{\delta^4\varphi_1}{\delta p_k^4} + 2\frac{\delta^4\varphi_1}{\delta p_k^2\delta p_l^2} + \frac{\delta^4\varphi_1}{\delta p_l^4}\right) - \text{enz.}$$

$$\frac{\delta V}{\delta p_k} = \frac{\delta\varphi}{\delta p_k} + \frac{p_i}{1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_k} - \frac{p_i^2}{1.2}\left(\frac{\delta^2\varphi}{\delta p_k^3} + \frac{\delta^3\varphi}{\delta p_k^2\delta p_l}\right) - \frac{p_i^3}{1.2.3}\left(\frac{\delta^3\varphi_1}{\delta p_k^3} + \frac{\delta^3\varphi_1}{\delta p_k^2\delta p_l}\right) + \ldots$$

$$\frac{\delta V}{\delta p_l} = \frac{\delta\varphi}{\delta p^l} + \frac{p_i}{1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_l} - \frac{p_i^2}{1.2}\left(\frac{\delta^3\varphi}{\delta p_k^2\delta p_l} + \frac{\delta^3\varphi}{\delta p_l^3}\right) - \frac{p_i^3}{1.2.3}\left(\frac{\delta^3\varphi_1}{\delta p_k^2\delta p_l} + \frac{\delta^3\varphi_1}{\delta p_k^3}\right) + \ldots$$

van welke vormen de wet der coëfficienten door het voorgaande volkomen gegeven is.

Daarbij zijn dan φ_1, $\frac{\delta \varphi}{\delta p_k}$, $\frac{\delta \varphi}{\delta p_l}$, de waarden van $\frac{\delta V}{\delta p_i}$ enz. voor punten, gelegen in het $x_k x_l$ vlak, omdat daarvoor $p_i = 0$ is.

Bij eindige spheroïden van de 2e orde, is het nu mogelijk deze waarden door onmiddelijke integratie te vinden, hetgeen zooals men weet door LEGENDRE is verricht (immers de F_k en F_l van de formules (56) en (56a) zijn de waarden van $-\frac{\delta V}{\delta p_k}$ en $-\frac{\delta V}{\delta p_l}$ in het bizondere geval $p_i = 0$); terwijl de daarvoor gevonden vormen leeren dat $\varphi_1 = 0$ en $\varphi = MU$ is, zijnde M de massa der ellipsoïde en U eene functie die alleen van de excentriciteiten en niet van de absolute grootte der assen afhangt.

Substitueert men dit dus in (h') zoo vindt men:

$$V = M\left\{ U - \frac{p_i^2}{1.2}\left(\frac{\delta^2 U}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta p_l^2}\right) + \frac{p_i^4}{1.2.3.4}\left(\frac{\delta^4 U}{\delta p_l^4} + \frac{\delta^4 U}{\delta p_k^2 \delta p_l^2} + \frac{\delta^4 U}{\delta p_l^4}\right) - \cdots \right\}$$

Voor eene tweede, met de eerste confocale ellipsoïde, wier massa M' ware, zou nu U onveranderd blijven, zoodat, indien daardoor V in V' overging, $V' : V = M' : M$ ware.

Dit leert dus, dat de functien V en dus ook de aantrekkingen van twee confocale ellipsoïden op hetzelfde uitwendige punt, zich verhouden als hare massae, waaruit dan, als bizonder geval, de uitbreiding volgt van de stelling van MACLAURIN, welke door LEGENDRE het eerst uitgesproken en door LAPLACE het eerst bewezen is (Zie pagg. 57 en 93).

Natuurlijk wordt al het voorgaande eenvoudiger, wanneer de ellipsoïde een omwentelingslichaam is. In dat geval toch, zullen alle punten, op dezelfde afstanden van de omwentelingsas a_i en van het aequatorvlak gelegen, op dezelfde wijze aangetrokken worden. V zal alsdan enkel eene functie zijn van $R^2 = p_k^2 + p_l^2$ en p_i zoodat

$$\frac{\delta^2 V}{\delta p_k^2} = \frac{p_l^2}{R^3} \cdot \frac{\delta V}{\delta R} + \frac{p_k^2}{R^2} \cdot \frac{\delta^2 V}{\delta R^2} \quad \text{en} \quad \frac{\delta^2 V}{\delta p_l^2} = \frac{p_k^2}{R^3} \cdot \frac{\delta V}{\delta R} + \frac{p_l^2}{R^2} \frac{\delta^2 V}{\delta R^2}$$

waardoor verg. (58) wordt: $\frac{1}{R} \cdot \frac{\delta V}{\delta R} + \frac{\delta^2 V}{\delta R^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta p_i^2} = 0$

en daar deze nog slechts twee veranderlijken R en p_i bevat, zullen alle stellingen, die voor willekeurige spheroïden ten opzichte van drie afmetingen gelden, bij omwentelingsspheroïden in twee afmetingen plaats hebben; derhalve zal de aantrekking eener omwentelingsspheroïde, op een willekeurig punt der ruimte, in het algemeen bepaald zijn, zoodra men de aantrekking kent, voor alle punten eener in het meridiaanvlak gelegen kromme lijn en dus in het bizonder voor alle punten der as; hetgeen de fraaie stelling is welke Legendre het eerst heeft bewezen. (Zie pag. 71).

Men ziet dat op deze wijze gemakkelijk de stelling van Maclaurin en die welke later door Legendre en Laplace zijn bewezen, uit de vergelijking (58) kunnen worden afgeleid; ware nu het bewijs van de eerste stelling, geheel onafhankelijk van het vroeger gevondene, zoo ware dit bewijs zeker veel eenvoudiger, doch daar het de toepassing der formulen (56) en (56$''$) vordert, om te kunnen besluiten tot den vorm der functie φ, waarop alles berust, is het door Biot gegeven bewijs niet gemakkelijker te noemen dan de voorgaanden.

Alle wegen welke tot nu toe gevolgd waren, ter verkrijging van de formulen voor de componenten der aantrekking, voor een punt buiten de ellipsoïde gelegen, berustten op het bewijzen van de stelling van Maclaurin in hare algemeenste vorm. Zelfs Legendre, wiens vergelijking (x) (zie pag. 115), eigenlijk reeds de verlangde enkelvoudige integraal voor de componenten bevatte, verkregen zonder van bovengemelde stelling gebruik te maken, heeft toch, wegens de enorme samengesteldheid van die vergelijking, niet anders kunnen doen, dan daaruit het bewijs der stelling van Maclaurin afleiden en deze dan op de gewone wijze toepassen, op het verkrijgen van de enkelvoudige integraal in hare eenvoudigste gedaante.

Op een geheel ander beginsel was daarentegen de oplossing gegrond, welke van het algemeene vraagstuk der aantrekking, door eene homogene ellipsoïde op een willekeurig punt uitgeoefend, werd gegeven door Ivorij. Het is te vinden in de Philosophical Transactions van het jaar 1809, pag. 345.

Onderstelt men voor de wet van aantrekking de gewone wet van Newton, neemt de constante dichtheid der ellipsoïde als eenheid van dichtheid, de in P aanwezige massa als massaeenheid, en de kracht, waarmede twee dergelijke eenheden elkander op een afstand gelijk de eenheid aantrekken, als eenheid van kracht aan, zoo vindt men [42] voor de component dF_i der elementaire aantrekking $d^3 F_i = -\frac{x_i - p_i}{r^3} d^3 M = -\frac{x_i - p_i}{r^3} dx_i\, dx_k\, dx_l$ waarin $r^2 = \Sigma\, (x_i - p_i)^2$ is.

Daaruit volgt dus

$$F_i = \int\int\int \frac{(p_i - x_i)\, dx_i\, dx_k\, dx_l}{\left\{\Sigma\, (x_i - p_i)^2\right\}^{3/2}}$$

waarbij de integratie over alle, tot de ellipsoïde behoorende waarden van x_i x_k en x_l moet worden uitgestrekt. De formule is integreerbaar ten opzichte van x_i', zoodat indien X_i en X'_i de beide uiterste waarden zijn, welke x_i bij constante x_k en x_l hebben kan, men zal hebben

$$F_i = \int\int \left\{ \frac{1}{\left\{(p_i - X_i)^2 + (p_k - x_k)^2 + (p_l - x_l)^2\right\}^{1/2}} - \frac{1}{\left\{(p_i - X_i')^2 + (p_k - x_k)^2 + (p_l - x_l)^2\right\}^{1/2}} \right\} dx_k\, dx_l$$

zijnde nu de differentiaal, de aantrekking welke een prisma van de materie der ellipsoïde, welks basis $= dx_k\, dx_l$ en welks lengte $X_i + X_i'$ is, op het punt P uitoefent, in de richting evenwijdig aan het prisma.

Neemt men nu de hoofddoorsneden der ellipsoïde voor coördinaatvlakken aan, zoo is $X_i' = -X_i$. Stelt men dus:

$$(p_i - X_i)^2 + (p_k - x_k)^2 + (p_l - x_l)^2 = \triangle^2$$

$$(p_i + X)^2 + (p_k - x_k)^2 + (p_l - x_l)^2 = \triangle'^2$$

zoo is

$$F_i = \int\int \left(\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'}\right) dx_k\, dx_l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

eene vorm waarin de integratie moet uitgestrekt worden over al de punten van de hoofddoorsnede in het $x_k x_l$ vlak, en waarin $\triangle$ en $\triangle'$ resp. voorstellen, de afstanden van de beide punten van het oppervlak, welke x_k en x_l tot coördinaten hebben, tot P.

---

[42] Indien voor de richting der kracht, de tegengestelde richting der as x_i als de positieve wordt aangenomen.

Zij nu weder $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ de vergelijking der ellipsoïde. Men kan dan x_k en x_l vervangen door twee nieuwe veranderlijken μ_k en μ_l, volgens de vergelijkingen:

$$x_k = a_k \sin \mu_k \cos \mu_l \quad , \quad x_l = a_l \sin \mu_k \sin \mu_l.$$

Alsdan volgt uit de vergelijking der ellipsoide:
$X_i^2 = a_i^2 \cos^2 \mu_k$, zoodat men heeft

$dx_k = a_k \cos \mu_k \cos \mu_l \, d\mu_k$; $x_l = \frac{a_l \, x_k}{a_k} \operatorname{tg}\mu_l$ en dus, daar bij de differentiatie van x_l, x_k als contant moet beschouwd worden:

$$d\, x_l = \frac{a_l x_k}{a_k \cos^2 \mu_l} \, d\mu_l = \frac{a_l \sin \mu_k}{\cos \mu_l} \, d\, \mu_l;$$

$$\triangle = \left\{ (p_i - a_i \cos\mu_k)^2 + (p_k - a_k \sin\mu_k \cos\mu_l)^2 + (p_l - a_l \sin\mu_k \sin\mu_l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\triangle' = \left\{ (p_i + a_i \cos\mu_k)^2 + (p_k - a_k \sin\mu_k \cos\mu_l)^2 + (p_l - a_l \sin\mu_k \sin\mu_l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

terwijl, omdat X_i van 0 tot a_i en x_k en x_l, voor $X_i = 0$, van $-a_k$ tot $+a_k$ en van $-a_l$ tot $+a_l$ moeten aangroeien, de grenzen der integratie naar μ_k en μ_l respectieve 0 en $\frac{\pi}{2}$ en 0 en 2π moeten zijn. Daardoor wordt dus

$$F_i = a_k a_l \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \mu_k \cos \mu_k \left(\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'} \right) d\,\mu_k \, d\,\mu_l.$$

Men stelle nu weder (even als op bl. 83) de excentriciteiten $\sqrt{\frac{a_i^2 - a_k^2}{a_i^2}}$ en $\sqrt{\frac{a_i^2 - a_l^2}{a_i^2}}$ door e_k en e_l voor (waarbij weder a_i als de grootste der drie halfassen is aangenomen) en noemen, even als boven, A_i, A_k, A_l, de met a_i, a_k, a_l gelijkstandige halfassen der met de gegevene confocale ellipsoïde, welke door P gaat (zie pagg. 94 en 95), zoo zal omdat $\Sigma \frac{p_i^2}{A_i^2} = 1$ is, mogen gesteld worden:

$p_i = A_i \cos m_k$, $p_k = A_k \sin m_k \cos m_l$, $p_l = A_l \sin m_k \sin m_l$,
terwijl $a_i^2 e_k^2 = A_i^2 - A_k^2 = a_i^2 - a_k^2$, $a_i^2 \; e_l^2 = A_i^2 - A_l^2 = a_i^2 - a_l^2$ (e) is.

Door substitutie hiervan wordt dan echter:

$$\triangle = \left\{ A_i^2 + a_i^2 - 2\,A_i\,a_i \cos m_k \cos \mu_k \right.$$
$$-2\,A_k\,a_k \sin m_k \sin \mu_k \cos m_l \cos \mu_l - 2A_l a_l \sin m_k \sin \mu_k \sin m_l \sin \mu_l -$$
$$- a_i^2\,e_k^2 (\sin^2 m_k \cos^2 m_l + \sin^2 \mu_k \cos^2 \mu_l)$$
$$\left. - a_i^2\,e_l^2 (\sin^2 m_k \sin^2 m_l + \sin^2 \mu_k \sin^2 \mu_l) \right\}^{1/2}$$
$$\triangle' = \left\{ A_i^2 + a_i^2 + 2\,A_i a_i \cos m_k \cos \mu_k - \right.$$
$$-2\,A_k\,a_k \sin m_k \sin \mu_k \cos m_l \cos \mu_l - 2A_l a_l \sin m_k \sin \mu_k \sin m_l \sin \mu_l -$$
$$- a_i^2\,e_k^2 (\sin^2 m_k \cos^2 m_l + \sin^2 \mu_k \cos^2 \mu_l)$$
$$\left. - a_i^2\,e_l^2 (\sin^2 m_k \sin^2 m_l + \sin^2 \mu_k \sin^2 \mu_l) \right\}^{1/2},$$

in welke beide vormen, ingevolge de vergelijkingen (e), blijkbaar de assen der eene ellipsoïde met die der andere kunnen verwisseld worden.

Zij dus P' een punt welks coördinaten zijn:

$$p_i' = a_i \cos m_k,\ p'_k = a_k \sin m_k \cos m_l,\ p'_l = a_l \sin m_k \sin m_l;$$

zoo is ook:

$$\triangle = \left\{ (p'_i - A_i \cos\mu_k)^2 + (p'_k - A_k \sin\mu_k \cos\mu_l)^2 + (p'_l - A_l \sin\mu_k \sin\mu_l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\triangle' = \left\{ (p'_i + A_i \cos\mu_k)^2 + (p'_k - A_k \sin\mu_k \cos\mu_l)^2 + (p'_l - A_l \sin\mu_k \sin\mu_l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

waaruit blijkt dat dezelfde waarden van $\triangle$ en $\triangle'$ ook voorstellen, de afstanden van een punt P', van het oppervlak der gegeven ellipsoïde, tot de beide punten van het oppervlak der tweede, wier coördinaten zijn $\pm\, A_i \cos \mu_k$, $A_k \sin \mu_k \cos \mu_l$, $A_l \sin \mu_k \sin \mu_l$. Laat men dus deze laatsten het geheele oppervlak der tweede ellipsoïde doorloopen, door ten opzichte van μ_k en μ_l resp. tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ en tusschen 0 en $2\,\pi$ te-integreren, zoo vindt men voor de component F'_i der aantrekking, welke de tweede ellipsoïde op het punt P' uitoefent,

$$F'_i = A_k\,A_l \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \mu_k \cos \mu_k \left(\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'}\right) d\,\mu_k\,d\,\mu_l,$$

waaruit volgt, daar dezelfde gevolgtrekkingen ook op gelijke wijze voor de andere componenten kunnen gemaakt worden:

$$F_i : F'_i = a_k\,a_l : A_k\,A_l;\ F_k : F'_k = a_l\,a_i : A_l\,A_i;\ F_l : F'_l = a_i\,a_k : A_i\,A_k.$$

Noemt men dus twee punten, zooals P en P', van de oppervlakken der beide ellipsoïden, wier overeenkomstige coördinaten zich verhouden, als de daarmede evenwijdige halfassen der ellipsoïden waarop zij gelegen zijn, »corresponderende punten" en houdt in het oog, dat de hoofddoorsneden waarop de componenten

F_i en F'_i loodrecht staan, zich verhouden als $a_k\, a_l : A_k\, A_l$ en evenzoo voor de anderen, zoo ligt in bovenstaande evenredigheid de stelling opgesloten:

Indien twee ellipsoïden van dezelfde homogene stof, dezelfde excentriteiten hebben en hare hoofddoorsneden in dezelfde vlakken liggen, zullen de met de assen evenwijdige componenten der aantrekking, welke de eerste ellipsoïde uitoefent op een punt van het oppervlak der tweede, zich verhouden tot die der aantrekking, welke de tweede uitoefent op het corresponderend punt van het oppervlak der eerste, als de oppervlakken der hoofddoorsneden, waarop de componenten loodrecht staan.

Daar nu twee confocale ellipsoïden geheel buiten elkander liggen, zal steeds P' binnen of buiten de tweede ellipsoïde liggen, naar gelang P buiten of binnen de gegevene lag, zoodat de gevonden stelling een gemakkelijk middel geeft, om de aantrekking op een buiten de ellipsoïde gelegen punt P te bepalen, uit die op het corresponderende punt P', gelegen binnen de met de eerste confocale, door P gaande ellipsoïde.

In de afleiding dezer stelling, welke blijkbaar die van Maclaurin kan vervangen en veel gemakkelijker te bewijzen is, ligt de hoofdverdienste van Ivorij's geschrift, zoodat men dan ook aan deze eigenschap terecht den naam van **Stelling van Ivorij** heeft gegeven.

Brengt men haar in verband met de wijze waarop Laplace de componenten der aantrekking voor een inwendig gelegen punt heeft bepaald, zoo levert zij daarmede een fraai geheel op. Men bepale namelijk eerst A_i, A_k en A_l uit de vergelijkingen

$$\Sigma \frac{p_i^2}{A_i^2} = 1,\ A_i^2 - A_k^2 = a_i^2 - a_k^2 \text{ en } A_i^2 - A_l^2 = a_i^2 - a_l^2,$$

daarna $p_i' = \dfrac{a_i p_i}{A_i}$, $p_k' = \dfrac{a_k p_k}{A_k}$, $p_l' = \dfrac{a_l p_l}{A_l}$;

is dan $Q = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-E_k^2 x^2)(1-E_l^2 x^2)}}$, $M' = \dfrac{4}{3}\pi A_i A_k A_l$, $M = \dfrac{4}{3}\pi a_i a_k a_l$,

zoo is volgens de vergelijkingen (47)

$$F_i' = \frac{3p_i' M'}{A_i^3} Q,\quad F_k' = \frac{3p_k' M'}{A_i^3} \cdot \frac{\delta E_k Q}{\delta E_k},\quad F_l' = \frac{3p_l' M'}{A_i^3} \cdot \frac{\delta E_l Q}{\delta E_l}$$

en dus volgens de stelling van IVORIJ:

$$F = \frac{3p_i M}{A_i^3} Q,\; F_k = \frac{3p_k M}{A_i^3} \cdot \frac{\delta E_k Q}{\delta E_k},\; F_l = \frac{3p_l M}{A_i^3} \cdot \frac{\delta E_l Q}{\delta E_l},$$

zijnde de vergelijkingen (55) van LAPLACE.

IVORY volgt echter dezen weg niet; maar bepaalt de waarde van F_i voor een inwendig punt uit vergelijking (59), op eene wijze, die zeker niet de voorkeur verdiend boven die van LAPLACE, waarvan hier evenwel, om der volledigheid wille, een kort overzicht moge volgen.

Men ziet licht, dat voor punten waarvoor $p_i = 0$ is, ook $\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'} = 0$ is en dat, zoolang p_k en p_l constant blijven, deze grootheid steeds eindig blijft, voor punten binnen de ellipsoïde gelegen, en dat de continuïteit der te integreren functie en dus die van F_i alleen verstoord wordt, wanneer P in het oppervlak ligt, omdat dan, voor punten oneindig dicht bij P gelegen, $\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'} = \infty$ is.

Men mag dus de vorm voor F_i in een reeks naar de opklimmende machten van p_i ontwikkelen, mits men dit alleen toepast op punten binnen de ellipsoïde. Stelt men dus

$$X_i^2 + (x_k - p_k)^2 + (x_l - p_l)^2 = a^2$$

zoo is

$$\triangle = \{a^2 + p_i(p_i - 2X_i)\}^{\frac{1}{2}},\; \triangle' = \{a^2 + p_i(p_i + 2X_i\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\triangle'} = \{a^2 + p_i(p_i - 2X_i\}^{-\frac{1}{2}} - \{a^2 + p_i(p_i + 2X_i)\}^{-\frac{1}{2}},$$

zoodat nu de algemeene $(n+1)^e$ term wordt:

$$\pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} \cdot \frac{p_i^n}{a^{2n+1}} \{(p_i + 2X_i)^n - (p_i - 2X_i)^n\},$$

waaruit blijkt, dat bij de ontwikkeling, de evene machten van p_i verdwijnen en dus $F_i = \Sigma A_{2n+1} p_i^{2n+1}$ zal zijn.

Nu is echter, zooals licht te bewijzen is:

$$\frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle}}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle}}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle}}{\delta p_l^2} = 0 \text{ en } \frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle'}}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle'}}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 \frac{1}{\triangle'}}{\delta p_l^2} = 0,$$

dus ook, omdat de grenzen bij de integratie van F_i onafhankelijk zijn van de coordinaten van P,

$$\frac{\delta^2 F_i}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 F_i}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 F_i}{\delta p_l^2} = 0,$$

waaruit, door voor F_i de reeks te substitueren, gemakkelijk blijkt dat algemeen

$$A_{2n+1} = -\frac{1}{2n(2n+1)}\left(\frac{\delta^2 A_{2n-1}}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 A_{2n-1}}{\delta p_l^2}\right)$$

is, terwijl even licht in te zien is dat

$$A_1 = \int\int \frac{2 X_i \, dx_k \, dx_l}{a^3}$$

wordt, zoodat de coëfficiënten der reeks gemakkelijk te verkrijgen zijn.

De vorm voor A_1 wordt echter eenvoudiger, door resp. voor x_k en x_l twee nieuwe veranderlijken p en q in te voeren volgens de vergelijkingen $p_k - x_k = a \sin p \cos q$ en $p_l - x_l = a \sin p \sin q$, waaruit volgt $X_i = a \cos p$ en met inachtneming dat bij differentiatie van x_k alleen p, bij die van x_l alleen q als veranderlijk beschouwd moet worden,

$$dx_k = -\left(\sin p \frac{da}{dp} + a \cos p\right) \cos q dp, \; dx_l = \frac{a \sin p dq}{\cos q}$$

Daarbij is nu de grootheid a de afstand van de voet der coordinaat p_i (dus een vast punt), tot het veranderlijk punt X in het oppervlak, welks coördinaten zijn X_i, x_k en x_l (zijnde X_i als functie van x_k en x_l te bepalen uit de vergelijking der ellipsoïde), p de hoek tusschen de richtingen van a en p_i en q de hoek welke het vlak van a en p_i maakt met het vlak van x_i en x_k. Nu moet de integratie, in de oorspronkelijke vorm van A_1, uitgestrekt worden over alle punten van de hoofdsnede der assen a_k en a_l en dus zal hier X eene der helften moeten doorloopen, waarin het oppervlak door die hoofdsnede wordt verdeeld. Daartoe moet dan p van 0 tot $\frac{\pi}{2}$, q van 0 tot 2π variëren, terwijl a uit de vergelijking der ellipsoïde kan bepaald worden, waartoe men de vergelijking verkrijgt:

$$N' a^2 - 2 P' a - h' = 0$$

zijnde $N' = \frac{\cos^2 p}{a_i^2} + \frac{\sin^2 p \cos^2 q}{a_k^2} + \frac{\sin^2 p \sin^2 q}{a_l^2}$,

$$l' = \frac{p_k \sin p \cos q}{a_k^2} + \frac{p_l \sin p \sin q}{a_l^2},\ h' = -\frac{p_k^2}{a_k^2} - \frac{p_l^2}{a_l^2} + 1,$$

zoodat $a = \dfrac{l' \pm \sqrt{l'^2 + N'h'}}{N'}$ is. Deze beide waarden zijn steeds reëel, omdat h' positief is, zoolang P binnen de ellipsoïde ligt. Elk stel waarden van p en q geeft dus, zooals te wachten was, twee waarden voor a; neemt men daarvan steeds die met hetzelfde teeken, zoo blijft X op eene der bovengenoemde helften. Daar het nu echter onverschillig is, welke daarvan door X doorloopen wordt, zal men voor A_1 ook de halve som kunnen nemen, van de beide waarden, welke die grootheid krijgt door substitutie der beide wortels. Noemt men deze dus a' en a'' zoo is:

$$A_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin p \left(\frac{\frac{da'}{dp}}{a'} + \frac{\frac{da''}{dp}}{a''} \right) + 2\cos p \right\} \sin p \cos p \, dp \, dq =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin p \frac{\frac{\delta a'a''}{\delta p}}{a'a''} + 2\cos p \right) \sin p \cos p \, dp \, dq$$

of daar $a'a'' = -\dfrac{h'}{N'}$, $\dfrac{\delta a'a''}{\delta p} = \dfrac{h'}{N'^2}\dfrac{\delta N'}{\delta p}$, $\dfrac{\frac{\delta a'a''}{\delta p}}{a'a''} = -\dfrac{\frac{\delta N'}{\delta p}}{N'}$ is,

$$A_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin p \frac{\frac{\delta N'}{\delta p}}{N'} + 2\cos p \right) \sin p \cos p \, dp \, dq.$$

Deze vorm leert dus dat A_1 alleen N', dus niet p_i, p_k en p_l, bevat, waaruit volgt dat al de overige coëfficienten der reeks weg vallen en dus $F_i = A_1 p_i$ is. Dit bewijst dus de stelling dat F_i dezelfde waarde heeft voor alle punten binnen de ellipsoide gelegen, in een vlak, evenwijdig aan de hoofdsnede loodrecht op F_i, zijnde het algemeen geval van de stelling, welke door MACLAURIN (§ 634) voor omwentelingslichamen was gevonden. Men mag dus in de oorspronkelijke gedaante van A_1 ook $p_k = p_l = 0$ nemen en vindt dan

$F_i = p_i \displaystyle\int\int \frac{2X_i dx_k dx_l}{(X_i^2 + x_k^2 + x_l^2)^{3/2}}$, waarin nu weder de integratie moet loopen over alle punten der hoofdsnede loodrecht op F_i.

Hierin kan weder nu even als bij den aanvang $x_k = a_k \sin\mu_k \cos\mu_l$, $x_l = a_l \sin\mu_k \sin\mu_l$, $X_i = a_i \cos\mu_k$ worden gesteld, waardoor men verkrijgt:

$$F_i = 2p_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_i a_k a_l \sin\mu_k \cos^2\mu_k d\mu_k d\mu_l}{(a_i^2\cos^2\mu_k + a_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l + a_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

Daar op dezelfde wijze ook

$$F_k = p_k \int\int \frac{2x_k dx_i dx_l}{(x_i^2+x_k^2+x_l^2)^{3/2}},\quad F_l = p_l \int\int \frac{2x_l dx_i dx_l}{(x_i^2+x_k^2+x_l^2)^{3/2}}$$

is, waarbij de integratiën uitgestrekt moeten worden over de beide andere hoofdsneden, ziet men dat ook

$$F_k = 2p_l a_i a_k a_l \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\mu_k \cos^2\mu_l d\mu_k d\mu_l}{(a_i^2\cos^2\mu_k + a_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l + a_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

$$F_l = 2p_l a_i a_k a_l \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\mu_k \sin^2\mu_l d\mu_k d\mu_l}{(a_i^2\cos^2\mu_k + a_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l + a_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

zoodat, door invoering der excentriciteiten:

$$F_i = \frac{2p_i a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\mu_k \cos^2\mu_k d\mu_k d\mu_l}{(1 - e_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l - e_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

$$F_k = \frac{2p_k a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\mu_k \cos^2\mu_l d\mu_k d\mu_l}{(1 - e_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l - e_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

$$F_l = \frac{2p_l a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\mu_k \sin^2\mu_l d\mu_k d\mu_l}{(1 - e_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l - e_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}}$$

is.

Stelt men nu $a_i e_k = \varepsilon_k, a_i e_l = \varepsilon_l$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\mu_k d\mu_k d\mu_l}{(a_i^2 - \varepsilon_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l - \varepsilon_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{1/2}}$$

zoo ziet men licht door differentiatie dat

$$F_i = 2\,p_i a_i a_k a_l \left\{\frac{1}{\varepsilon_k}\cdot\frac{\delta Q}{\delta\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_l}\frac{\delta Q}{\delta\varepsilon_l} - \frac{1}{a_i}\cdot\frac{\delta Q}{\delta a_i}\right\},$$

$$F_k = 2p_k a_i a_k a_l \cdot \frac{1}{\varepsilon_k}\cdot\frac{\delta Q}{\delta\varepsilon_k};\quad F_l = 2p_l a_i a_k a_l \cdot \frac{1}{\varepsilon_l}\cdot\frac{\delta Q}{\delta\varepsilon_l}$$

is, zoodat al de integralen uit Q kunnen gevonden worden. Nu is echter

$$\frac{\delta Q}{\delta a_i} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_i \sin\mu_k\, d\mu_k\, d\mu_l}{(a_i^2 - \varepsilon_k^2\sin^2\mu_k\cos^2\mu_l - \varepsilon_l^2\sin^2\mu_k\sin^2\mu_l)^{3/2}} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_l}{a_i^2 - \varepsilon_k^2 \cos^2\mu_l - \varepsilon_l^2 \sin^2\mu_l} = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mu_l}{a_k^2 \cos^2\mu_l + a_l^2 \sin^2\mu_l} =$$

$$= -\frac{2\pi}{a_k a_l} = -\frac{2\pi}{\sqrt{(a_i^2 - \varepsilon_k^2)(a_i^2 - \varepsilon_l^2)}}$$ (zie bladz. 83)

en dus, daar voor $a_i = \infty$, $Q = 0$ wordt,

$$Q = 2\pi \int_{a_i}^{\infty} \frac{d a_i}{\sqrt{(a_i^2 - \varepsilon_k^2)(a_i^2 - \varepsilon_l^2)}},$$

door middel waarvan dus nu F_i, F_k en F_l als enkelvoudige elliptische integralen kunnen worden voorgesteld.

Men ziet dat deze wijze van herleiden van de componenten der aantrekking voor een inwendig punt, zeker niet beter is dan die van LAPLACE, en dat de verdienste van IVORY bestaat, in het vinden der stelling welke zijn naam draagt, eene verdienste die zeker niet gering te schatten was, daar het voor dien tijd nog aan niemand gelukt was, de stelling van MACLAURIN eenvoudig te bewijzen, of de aantrekking op een uitwendig punt uitgeoefend, zonder behulp dier stelling te bepalen.

Kort na het verschijnen van IVORY's verhandeling, en wel in Maart 1816, werd door GAUSS, die toen, volgens zijne eigene verklaring, juist eerst kennis had gekregen van hetgeen door IVORY was gevonden, bij de Akademie van Göttingen een geschrift ingediend, waarin hij, door middel van eenige nieuwe stellingen van zeer algemeenen aard, voor het bizonder geval der ellipsoïde, de componenten der aantrekking op een willekeurig punt uitgeoefend, zeer gemakkelijk verkrijgt. Daar deze stellingen niet zoozeer bekend zijn, zullen wij die als inleiding tot GAUSS methode mededeelen.

Men denke zich een lichaam, van de oneindige ruimte afgescheiden door een of meer gesloten oppervlakken (wanneer het misschien een of meer holten bevatten mocht) wier geheel het oppervlak des lichaams uitmaakt. Zij ds een oneindig klein element van het oppervlak, X een punt van dit element, welks coördinaten X_i, X_k en X_l zijn; XY de naar buiten gerichte normaal op het oppervlak in het punt X, P het aangetrokken punt, hebbende tot coördinaten p_i, p_k en p_l, eindelijk de afstand $XP = r$ (steeds als positief beschouwd). De hoek welke XP met de positieve x_i as maakt, moge door ξ_i, die welke XY met diezelfde richting maakt door η_i, eindelijk de hoek PXY door p worden aangeduid. Waar sprake is van meer punten van het oppervlak, mogen dezen door ${}^1X . {}^2X . {}^3X \dots {}^nX$ worden voorgesteld, en alle daarmede overeenkomende grootheden door de toevoeging van dezelfde indices onderscheiden worden.

Men stelle zich nu voor, een vlak loodrecht op de x_i as, zóó gelegen dat, indien zijne vergelijking is $x_i = \alpha_i$, α_i kleiner zij dan de kleinste waarde welke de coördinaat x_i op het oppervlak des lichaams verkrijgt (zoodat het lichaam niet door het vlak gesneden wordt). Op dit vlak geprojecteerd, zal het lichaam eene gesloten projectiefiguur vormen, die ontbonden kan worden in elementen ds_i. In een punt van den omtrek van zulk een element, zij eene loodlijn op het vlak opgericht, die het oppervlak in ${}^1X, {}^2X \dots {}^{2n}X$ snijdt, zoo is het aantal dier snijpunten steeds even. De loodlijnen, aldus in alle punten van den omtrek van ds_i opgericht, vormen een oneindig smal cilindervlak, dat uit het oppervlak elementen ${}^1ds$, ${}^2ds \dots {}^{2n}ds$ snijdt, welke allen ds_i tot projectie hebben, terwijl voor al de elementen waarbij de cilinder (die gericht moge gedacht worden, gelijk met de positieve x_i as) in het lichaam intreedt, de hoek η_i stomp is, dus bij alle elementen met oneven indices; diezelfde hoek is scherp, waar de cilinder het lichaam weder verlaat. Men heeft dus $ds_i = (-1)^m \cos {}^m\eta_i {}^m ds$, en dus wegens het even aantal der elementen, $\Sigma \cos {}^m\eta_i {}^m ds = 0$. Handelt men evenzoo voor alle elementen ds_i, zoo volgt door optelling de

Stelling I. Bij integratie naar ds over het geheele oppervlak des lichaams, is $\int \cos \eta_i ds = 0$.

Het volumen van een cilindergedeelte, begrepen tusschen het vlak $x_i = \alpha_i$ en het element ${}^mX$, is $({}^mX_i - \alpha_i)\, ds_i$ en dus dat, begrepen tusschen twee elementen ${}^{2p-1}X$ en ${}^{2p}X$ (zoodat de cilinder bij het eerste in- bij het tweede uittreedt) $(-{}^{2p-1}X + {}^{2p}X)\, ds_i$, zoodat het deel dat door den cilinder uit het lichaam gesneden wordt, gelijk is aan $\Sigma\, (-1)^m\, {}^mX_i ds_i = \Sigma {}^mX_i \cos {}^m\eta_i {}^m ds$, waaruit weder, door optelling dezer grootheden voor alle elementen ds van het oppervlak, verkregen wordt:

Stelling 2. Het geheele volume van het lichaam wordt voorgesteld door $\int X_i \cos \eta_i \, ds$, uitgestrekt over het geheele oppervlak.

Men denke zich nu een der cilinders in elementaire volumina verdeeld, door oneindig dicht bij elkander gelegen vlakken. Zijn dan x_i, x_k, x_l, de coördinaten, behoorende bij een dier vlakken, zoo is de inhoud van het volumeelement $ds_i\, dx_i$ en zijn afstand tot P, $\rho = \sqrt{\Sigma_i (p_i - x_i)^2}$, zoodat indien $f(\rho)$ de kracht is, waarmede twee massa-eenheden elkander op den afstand ρ aantrekken, de aantrekking, door het volumeelement op P uitgeoefend, zal zijn $f(\rho).\, ds_i\, dx_i$ (waarbij de in P aanwezige massa als eenheid van massa en de homogeen gedachte dichtheid van den cilinder als eenheid van dichtheid genomen is). Daar nu bij den cilinder x_k en x_l constant zijn, is $\rho d\rho = -(p_i - x_i)\, dx_i$ en dus de aantrekking $-\frac{\rho f(\rho)\, ds_i\, d\rho}{p_i - x_i}$. Om de component daarvan in de richting, tegengesteld aan de x_i as te verkrijgen, moet men dan vermenigvuldigen met $\frac{p_i - x_i}{\rho}$ zoodat de component wordt $-f(\rho)\, d\rho\, ds_i$. Zij dus $\int f(\rho)\, d\rho = F(\rho)$, zoo heeft de aantrekking door den geheelen cilinder, van af de basis tot het punt waar de afstand van P de waarde ρ heeft, tot component in de richting, tegengesteld aan die der x_i as, $-\{F(\rho) - F(R_i)\}\, ds_i$, indien R_i den afstand van P tot ds_i voorstelt. Daaruit volgt echter voor de component van de aantrekking van al de, binnen het lichaam gelegen deelen des cilinders $-\Sigma(-1)^m F({}^m r) ds_i = -\Sigma F({}^m r) \cos {}^m\eta_i\, {}^m ds$, door uitbreiding waarvan over het geheele oppervlak men vindt, indien F_i weder dezelfde beteekenis heeft als vroeger:

Stelling 3. De component F_i wordt voorgesteld door $-\int F(r) \cos \eta_i \, ds$, uitgestrekt over het geheele oppervlak.

Laat verder uit P als middelpunt, een bol met een straal gelijk aan de lengte-eenheid beschreven en diens oppervlak in elementen $d\sigma$ verdeeld zijn. Zij Ξ een punt in het element $d\sigma$, en laat de straal $P\Xi$ het oppervlak des lichaams in de punten ${}^1X$, ${}^2X$, ... ${}^mX$ snijden, waarbij P, ingeval dit op het oppervlak des lichaams mocht gelegen zijn, niet medegerekend wordt. Het aantal dier punten zal dan even of oneven zijn, naarmate P

buiten of binnen het lichaam ligt, terwijl wanneer P zich juist op het oppervlak bevindt, dit geval tot de eerste of tweede omstandigheid moet gerekend worden, naar gelang de straal $P\Xi$ begint met het lichaam in of uittetreden. Denkt men zich nu stralen, getrokken uit P naar alle punten van den omtrek van $d\sigma$, zoo vormen deze een kegelvlak, dat uit het oppervlak des lichaams elementen ${}^1ds$, ${}^2ds, \ldots {}^m ds$ uitsnijdt. Laat men daarentegen de punten ${}^1X$, ${}^2X \ldots {}^mX$ bollen beschrijven met P tot middelpunt, zoo worden uit de oppervlakken daarvan door het kegelvlak elementen uitgesneden ${}^1d\sigma$, ${}^2d\sigma$, ${}^3d\sigma \ldots {}^m d\sigma$, verbonden door de betrekking $\frac{{}^k d\sigma}{{}^k r^2} = d\sigma$. Maar het element ${}^k d\sigma$ kan ook beschouwd worden als de projectie van ${}^k ds$ op een vlak dat $P\Xi$ tot normaal heeft, waardoor ${}^k d\sigma = \pm\, {}^k ds \cos {}^k p$ wordt en wel met het bovenste of onderste teeken naarmate ${}_k p$ scherp of stomp is, d. w. z. naarmate $P\Xi$ in ${}^kX$, het lichaam in- of uittreedt. Ligt nu P buiten het lichaam, zoo geschiedt het eerste bij de punten met oneven, het tweede bij de punten met even indices, terwijl het aantal punten even is, derhalve is dan ${}^{2n+1}ds \cos {}^{2n+1}p$ $= {}^{2n+1}r^2\, d\sigma, {}^{2n}ds \cos {}^{2n}p = -\, {}^{2n}r^2\, d\sigma$ dus $\Sigma \frac{{}^m ds \cos {}^m p}{{}^m r^2} = 0$.

Behandelt men alle elementen $d\sigma$ op dezelfde wijze en telt vervolgens alles te samen, zoo vormt zich links $\int \frac{\cos p}{r^2}\, ds$, uitgestrekt over het geheele oppervlak, rechts in het eerste geval 0, in het tweede het geheele oppervlak van den bol met de eenheid tot straal, doch met tegengesteld teeken, dus -4π. Ligt eindelijk P op het oppervlak des lichaams, zoo wordt de om P beschreven bol met den straal $= 1$, in twee gelijke helften verdeeld, door het vlak, dat in P het oppervlak des lichaams raakt. Voor alle stralen aan de eene zijde van dit vlak, moet dan P als inwendig, voor alle overigen als uitwendig punt behandeld worden, zoodat in dit geval, bij optelling, ter rechterzijde het halve boloppervlak met tegengesteld teeken, dus -2π optreedt; hieruit volgt dan

Stelling 4. De integraal $\int \frac{\cos p}{r^2}\, ds$, **uitgestrekt over het geheele oppervlak, heeft de waarde** 0, -2π, of -4π, **naarmate** P **binnen, op of buiten het oppervlak des lichaams gelegen is.**

Het volume van een deel des kegels, begrepen tusschen P en het punt ${}^kX$ is $\frac{1}{3}\,{}^kr\,{}^kd\sigma = \pm\frac{1}{3}\,{}^kr\cos{}^kp\,{}^kds$, met dezelfde bepaling voor de teekens als boven. Nu is echter, wanneer P buiten het lichaam ligt, elk stuk kegel dat binnen het lichaam valt, een verschil van twee stukken, waarvan het grootste van P tot een punt met even, het kleinste van P tot een punt met oneven index loopt, terwijl alles juist omkeert, wanneer P binnen het lichaam ligt. In beide gevallen wordt dus het gedeelte van het lichaam, ingesloten binnen den kegel, op $d\sigma$ als basis beschreven, voorgesteld door $-\frac{1}{3}\,\Sigma\,{}^mr\cos{}^mp\,{}^mds$, en op dezelfde wijze voor alle andere elementen handelend en sommerend, vinden wij

Stelling 5. Het volume van het geheele lichaam wordt voorgesteld door $-\frac{1}{3}\int r\cos p.\,ds$, uitgestrekt over het geheele oppervlak van het lichaam.

Laat nu het lichaam weder overal eene dichtheid $= 1$ hebben en $f(\rho)$ weder hetzelfde voorstellen als boven. Ware dan ook de geheele kegel op de basis $d\,\sigma$ met dezelfde materie gevuld en verdeelde men dien in oneindig kleine elementen, door oneindig dicht op elkander volgende boloppervlakken met P tot middelpunt, zoo ware de massa van zulks een element, op den afstand ρ van P verwijderd, $\rho^2\,d\,\rho\,d\,\sigma$ en de kracht waarmede het de massa-eenheid in P aantrekt, $\rho^2\,f\,(\rho)\,d\,\rho\,d\,\sigma$. Is dus $\int\rho^2 f(\rho)\,d\,\rho = \varphi(\rho)$, zoo is de aantrekking van het deel des kegels, begrepen tusschen twee boloppervlakken met stralen ρ en $\rho' > \rho$, $\{\varphi(\rho') - \varphi(\rho)\}\,d\sigma$. Het geheel van al de, binnen het lichaam gelegen deelen des kegels, oefent dus op P eene aantrekking uit, voorgesteld door de vorm $\{-\varphi({}^1r) + \varphi({}^2r) - \varphi({}^3r) \ldots\ldots + \varphi({}^{2n}r)\}\,d\sigma$ wanneer P buiten, door $\{-\varphi(0) + \varphi({}^1r) - \varphi({}^2r) + \ldots + \varphi({}^{2n+1}r)\}\,d\sigma$ wanneer P binnen het lichaam ligt, of ook, in het eerste geval door $\Sigma - \frac{\varphi({}^mr)\cos{}^mp\,{}^mds}{{}^mr^2}$ en in het tweede geval door dezelfde formule, met bijvoeging van $-\varphi(0)\,d\sigma$.

Vermenigvuldigt men deze vormen met $\cos\xi_i$, zoo verkrijgt men de component der aantrekking in de richting der negatieve x_i as.

Wanneer P dus buiten het lichaam ligt, zal de geheele component F_i worden voorgesteld door $-\int \frac{\varphi(r) \cos p \cos \xi_i}{r^2} ds$, uitgestrekt over het geheele lichaam, terwijl wanneer P binnen het lichaam ligt, daarbij moet gevoegd worden $-\varphi(0) \int \cos \xi_i \, d\sigma$, uitgestrekt over het geheele boloppervlak. Zonder bezwaar blijkt ook dat, indien P op het oppervlak ligt, diezelfde integraal zal moeten bijgevoegd worden, maar slechts uitgestrekt over die helft van den bol, die aan dezelfde zijde als het lichaam ligt, van het vlak dat het oppervlak des lichaams in P raakt.

Daar nu voor het boloppervlak, ξ_i blijkbaar dezelfde hoek is als η_i in Stelling 1, leert deze dat voor het geval dat P binnen het lichaam ligt, $\int \cos \xi_i \, d\sigma = 0$ is en dus de bijtevoegen term wegvalt. Om de waarde van die integraal over het halve bol-oppervlak te vinden, denke men zich dit gesloten door het platte meridiaanvlak. Is dan Q de waarde van $\int \cos \eta_i \, ds$ voor het daarin gelegen cirkelvlak, zoo is de waarde dier integraal, samenvallend met die van $\int \cos \xi_i \, d\sigma$ over het halve boloppervlak, blijkbaar volgens Stelling 1, gelijk $-Q$. Maar in het vlak heeft η_i eene constante waarde y_i en is dus $\int \cos \eta_i \, ds = Q = \cos y_i \int d\sigma = \pi \cos y_i$, daar de integratie over alle elementen $d\sigma$ van den cirkel, met de eenheid tot straal, moet uitgestrekt worden. Uit dit alles volgt dus:

Stelling 6. Voor een punt P binnen of buiten het lichaam gelegen, is $F_i = -\int \frac{\cos p \cos \xi_i \varphi(r)}{r^2} ds$, uitgestrekt over het geheele oppervlak, terwijl indien P op het oppervlak gelegen is, men heeft $F_i = -\int \frac{\cos p \cos \xi_i \varphi(r)}{r^2} ds - \pi \cos y_i \, \varphi(0)$, zijnde de integratie insgelijks over het geheele oppervlak te volvoeren en y_i de hoek van den, naar buiten gerichten normaal in het punt P, met de positieve x_i as.

Door deze zes stellingen is nu reeds, zoowel het volumen des lichaams, als de aantrekking welke het op P uitoefent, tot tweevoudige integralen teruggebracht. In elk bizonder geval moet men nu, uit de vergelijking van het oppervlak des lichaams, de waarden van ds, $\cos\eta_i$ enz. afleiden, terwijl $F(r)$ en $\varphi(r)$ moeten bepaald worden, uit de vorm welke men voor $f(\rho)$ aanneemt. Voor ons geval, de gewone wet van NEWTON, is $f(r) = \frac{1}{r^2}$, dus $F(r) = -\frac{1}{r}$, $\varphi(r) = r$.

Zij dus weder $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0$ de vergelijking der ellipsoïde, zoo is, zooals men daaruit gemakkelijk vindt:

$$\cos\eta_i = \frac{a_i^{-2} x_i}{\sqrt{(a_i^{-4} x_i^2 + a_k^{-4} x_k^2 + a_l^{-4} x_l^2)}}, \quad \cos\xi_i = \frac{p_i - x_i}{r},$$

$$\cos p = \Sigma \cos\eta_i \cos\xi_i = \frac{\Sigma\, a_i^{-2} x_i (p_i - x_i)}{r\sqrt{(a_i^{-4} x_i^2 + a_k^{-4} x_k^2 + a_l^{-4} x_l^2)}},$$

$$ds^2 = \left\{(dx_i dx_k)^2 + (dx_k dx_l)^2 + (dx_l dx_i)^2\right\} = \frac{a_i^4}{x_i^2}\left\{a_i^{-4} x_i^2 + a_k^{-4} x_k^2 + a_l^{-4} x_l^2\right\} dx_k^2 dx_l^2$$

zijnde x_i als functie van x_k en x_l beschouwd, volgens de vergelijking van het oppervlak. Derhalve is

$$\cos\eta_i\, ds = dx_k\, dx_l; \quad \cos p\, ds = \frac{a_i^2\, dx_k\, dx_l}{r x_i} \Sigma \frac{x_i (p_i - x_i)}{a_i^2}.$$

Substitueert men nu voor x_k en x_l (even als op bl. 134) de beiden hoeken μ_k en μ_l, zoo wordt, volgens Stelling 3:

$$F_i = a_k a \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\mu_k \cos\mu_k}{r}\, d\mu_k\, d\mu_l \text{ [43]}.$$

dus indien men $\frac{F_i}{a_i a_k a_l} = F'_i$ stelt

$$F'_i = \frac{1}{a_i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\mu_k \cos\mu_k}{r}\, d\mu_k\, d\mu_l \quad \ldots\ldots (\beta)$$

terwijl volgens Stelling 6, men ook heeft:

$$F' = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\mu_k (p_i - x_i)\, \Sigma \frac{x_i (p_i - x_i)}{a_i^2}}{r^3}\, d\mu_k\, d\mu_l \quad \ldots (\beta')$$

[43] Waarbij de grens voor μ_k tweemaal zoo groot is als bij IVORIJ, omdat daar over het halve, hier over het geheele oppervlak moet geïntegreerd worden.

Volgens Stelling 2 is verder het volumen en dus ook, daar de dichtheid $= 1$ ondersteld is, de massa M,

$$M = a_i a_k a_l \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \mu_k \cos^2 \mu_k \, d\mu_k \, d\mu_l =$$

$$= 2\pi a_i a_k a_l \int_0^{\pi} \sin \mu_k \cos^2 \mu_k \, d\mu_k = \frac{1}{2} \pi a_i a_k a_l \int (\sin \mu_k + \sin 3\mu_k) d\mu_k =$$

$\frac{4}{3} \pi a_i a_k a_l$, zooals bekend is.

Eindelijk leert Stelling 4, dat

$$\int^{\pi 2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \mu_k \Sigma \frac{x_i(p_i - x_i)}{a_i^2}}{r^3} d\mu_k d\mu_l = 0 \text{ of } = -\frac{4\pi}{a_i a_k a_l} \quad \cdot \cdot (\gamma)$$

is, naar gelang P buiten of binnen de ellipsoïde ligt.

Beschouwt men nu a_i, a_k, a_l, als bizondere waarden van drie veranderlijken a'_i enz., zóó verbonden dat $a'^2_i - a'^2_k$ en $a'^2_i - a'^2_l$ constant zijn, zoo kan F'_i beschouwd worden als functie van éene dier grootheden. Men besluit dan licht uit (β) dat voor $a'_i = \infty$, $F'_i = 0$ is, omdat alle, zelfs de kleinste, waarden van r tot oneindig naderen. Schrijft men nu voor β

$$a'_i F'_i = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \mu_k \cos \mu_k}{r} d \mu_k \, d \mu_l$$

en differentiëert naar a'_i zoo geeft dit

$$a'_i \frac{\delta F'_i}{\delta a'_i} + F'_i = - \int^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \mu_k \cos \mu_k}{r^2} \frac{\delta r}{\delta a'_i} d \mu_k \, d \mu_l$$

Maar volgens de bovengestelde voorwaarden is

$$\frac{\delta a'_k}{\delta a'_i} = \frac{a'_i}{a'_k}, \; \frac{\delta a'_l}{\delta a'_i} = \frac{a'_i}{a'_l} \text{ terwijl } r^2 = (p_i - a'_i \cos \mu_k)^2 +$$

$$+ (p_k - a'_k \sin \mu_k \cos \mu_l)^2 + (p_l - a'_l \sin \mu_k \sin \mu_l)^2$$

waaruit volgt:

$$r \frac{\delta r}{\delta a'_i} = -(p_i - a'_i \cos \mu_k) \cos \mu_k - (p_k - a'_k \sin \mu_k \cos \mu_l) \times \frac{a'_i}{a'_k} \sin \mu_k \cos \mu_l -$$

$$-(p_l - a'_l \sin \mu_k \sin \mu_l) \times \frac{a'_i}{a'_l} \sin \mu_k \sin \mu_l = -a'_i \Sigma \frac{x_i(p_i - x_i)}{a'^2_i}.$$

Hierdoor wordt dus:

$$a_i'\frac{\delta F_i'}{\delta a_i'}+F_i'=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a_i'\sin\mu_k\cos\mu_k\,\Sigma\frac{x_i(p_i-x_i)}{a_i^2}}{r^3}d\mu_k d\mu_l=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x_i\sin\mu_k\,\Sigma\frac{x_i(p_i-x_i)}{a_i^2}}{r^3}d\mu_k\,d\mu_l$$

en dus lettend op (β')

$$a'_i\frac{\delta F_i'}{\delta a_i'}=p_i\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin p\,\Sigma\frac{x_i(p_i-x_i)}{a_i^2}}{r^3}d\mu_k d\mu_l=0\text{ of}=-\frac{4p_i\pi}{a_i'a_k'a_l'},$$

naar gelang P buiten of binnen de ellipsoïde ligt, volgens (ν), zoodat in het eerste geval $\frac{\delta F_i'}{\delta a_i'}=0$, in het tweede $\frac{\delta F_i'}{\delta a_i'}=\frac{4p_i\pi}{a_i'^2a_k'a_l'}$ is.

De eerste dezer vergelijkingen levert dadelijk de stelling van Maclaurin, omdat, voor een uitwendig punt, F_i' constant is voor alle confocale ellipsoïden, ook nog voor die welke door P zelf gaat, en dus F_i evenredig met $a_i\ a_k\ a_l$ of met M.

De tweede vergelijking kan ook geschreven worden:

$$\frac{dF_i'}{da_i'}=-\frac{4p_i\pi}{a_i'^2\sqrt{(a_i'^2-a_i^2+a_k^2)(a_i'^2-a_i^2+a_l^2)}},$$

of indien $\frac{a_i}{a_i'}=x$ dus $\frac{\delta a_i'}{\delta x}=-\frac{a_i}{x^2}$ gesteld wordt:

$$\frac{\delta F_i'}{\delta x}=\frac{4p_i\pi x^2}{a_i^3\sqrt{\left\{1-\left(1-\frac{a_k^2}{a_i^2}\right)x^2\right\}\left\{1-\left(1-\frac{a_l^2}{a_i^2}\right)x^2\right\}}}.$$

Voor de integratie naar x zijn daarbij de grenzen 0 en 1, omdat voor $x=0$, $a_i'=\infty$ dus $F_i'=0$ wordt, terwijl indien $a_i'=a_i$ zal zijn, $x=1$ moet zijn. Derhalve is

$$F_i'=\frac{4p_i\pi}{a_i^3}\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left\{1-\left(1-\frac{a_k^2}{a_l^2}\right)x^2\right\}\left\{1-\left(1-\frac{a_l^2}{a_i^2}\right)x^2\right\}}}$$

en dus

$$F_i = \frac{4 p_i \pi a_k a_l}{a_i^2} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left\{1-\left(1-\frac{a_k^2}{a_i^2}\right)x^2\right\}\left\{1-\left(1-\frac{a_l^2}{a_i^2}\right)x^2\right\}}} =$$

$$= \frac{3 p_i M}{a_i^3} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-e_k^2 x^2)(1-e_l^2 x^2)}}$$

zijnde dezelfde als de formule (45) van LAPLACE.

Het is nu natuurlijk overbodig, op nieuw uit te wijden over de wijze, waarop nu de beide overige componenten voor een inwendig, of de drie componenten voor een uitwendig punt kunnen verkregen worden. Er behoeft ook wel nauwelijks op gewezen te worden, hoe uiterst eenvoudig hier de weg is waarop de stelling van MACLAURIN afgeleid wordt. Wat dus betreft het verkrijgen van de componenten der aantrekking van eene ellipsoïde op een uitwendig gelegen punt, bleef niets te wenschen over, wanneer men zich tevreden kon stellen met het terugbrengen van dit vraagstuk, tot dat van een inwendig punt, daar men nu daartoe de beide stellingen van MACLAURIN en IVORIJ, beide zoo eenvoudig men maar verlangen kon bewezen, bezat.

HOOFDSTUK IV.

POISSON'S RECHTSTREEKSCHE OPLOSSING.

Van een theoretisch standpunt echter, was de integratie der formulen (19) of (20) een tweede doel, dat nog steeds niet onmiddelijk had kunnen bereikt worden, althans niet zonder eene samengesteldheid van bewerking, die van elke poging tot vereenvoudiging afschrikte (zie LEGENDRE's vergelijking (x) pag. 115). Het was voor POISSON weggelegd, ook dit deel van het vraagstuk tot een goed einde te brengen. De verhandeling waarin dit is bekend gemaakt, is getiteld »Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène" en is te vinden in de Mém. de l'Ac. Roijale des Sciences, Tome XIII, pag 497. Het is aan de Akademie ingediend den 7 October 1833.

POISSON behandelt daarin ook de aantrekking voor een inwendig punt. Hij komt daarin, hoewel op eenigzins anderen weg, tot de formules (11), welke door LAGRANGE waren gegeven. Na die te hebben geschreven in de gedaanten:

$$F_i = 8 p_i \alpha_i^2 \int\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\vartheta d\varphi}{\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}$$

$$F_k = 8 p_k \alpha_k^2 \int\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \cos^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}$$

$$F_l = 8 p_l \alpha_l^2 \int\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \sin^2\vartheta \, d\vartheta d\varphi}{\alpha_i^2 \cos^2\varphi + \alpha_k^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \alpha_l^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}$$

stelt hij daarin $\cos \varphi = x$, tg $\vartheta = v$, waardoor hij verkrijgt:

$$F_i = 8\,p_i\alpha_i^2 \int_0^1\int_0^\infty \frac{x^2\,dv\,dx}{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2},$$

$$F_k = 8p_k\alpha_k^2 \int_0^1\int_0^\infty \frac{(1-x^2)\,dv\,dx}{(1+v^2)\left\{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2\right\}},$$

$$F_l = 8p_l\alpha_l^2 \int_0^1\int_0^\infty \frac{(1-x^2)\,v^2\,dv\,dx}{(1+v^2)\left\{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2\right\}},$$

waarvan de beide laatsten omgevormd worden, door middel der identische vergelijkingen

$$\frac{(1-x^2)(\alpha_k^2-\alpha_l^2)}{(1+v^2)\left\{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2\right\}} =$$

$$= \frac{1}{1+v^2} - \frac{\alpha_i^2x^2+\alpha_l^2(1-x^2)}{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2},$$

$$\frac{(1-x^2)v^2(\alpha_l^2-\alpha_k^2)}{(1+v^2)\left\{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2\right\}} =$$

$$= \frac{1}{1+v^2} - \frac{\alpha_i^2x^2+\alpha_k^2(1-x^2)}{\alpha_i^2x^2(1+v^2)+\alpha_k^2(1-x^2)+\alpha_l^2(1-x^2)v^2}.$$

Alsdan kunnen allen gemakkelijk naar v geïntegreerd worden waardoor men vindt, tevens de assen invoerende:

$$F_i = 4\pi p_i a_k a_l \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left\{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2\right\}\left\{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2\right\}}},$$

$$F_k = \frac{4\pi p_k a_l^2}{a_l^2-a_k^2}\left(1-\frac{a_k}{a_l}\int_0^1\sqrt{\frac{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2}{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2}}\,dx\right),$$

$$F_l = \frac{4\pi p_k a_k^2}{a_k^2-a_l^2}\left(1-\frac{a_l}{a_k}\int_0^1\sqrt{\frac{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2}{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2}}\,dx\right);$$

of stellende:

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left\{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2\right\}\left\{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2\right\}}} = X,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left\{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2\right\}\left\{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2\right\}}} = X',$$

$$F_i = 4\pi p_i a_k a_l X,\quad F_k = \frac{4\pi p_k a_l^2}{a_l^2-a_k^2}\left\{1-\frac{a_k a_i^2}{a_l}X'+\frac{a_k(a_i^2-a_l^2)}{a_l}X\right\},$$

$$F_l = \frac{4\pi p_k a_k^2}{a_k^2-a_l^2}\left\{1-\frac{a_l a_i^2}{a_k}X'+\frac{a_l(a_i^2-a_k^2)}{a_k}X\right\},$$

zoodat alle drie waarden, van slechts twee integralen kunnen afhankelijk gemaakt worden.

Uit de wijze van afleiden, hier zoowel als overal elders, blijkt, dat elke der formulen voor F_i enz., geldig is voor welke as men wil, en dat dus slechts door permutatie van indices dezelfde formule op alle drie assen kan worden toegepast. Zij nu a_i weder de grootste, a_l de kleinste as, zoo heeft men ook

$$\left.\begin{aligned} F_i &= 4\pi p_i a_k a_l \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_i^2-(a_i^2-a_k^2)x^2\}\{a_i^2-(a_i^2-a_l^2)x^2\}}} \\ F_k &= 4\pi p_k a_l a_i \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_k^2-(a_k^2-a_i^2)x^2\}\{a_k^2-(a_k^2-a_l^2)x^2\}}} \\ F_l &= 4\pi p_l a_i a_k \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_l^2-(a_l^2-a_k^2)x^2\}\{a_l^2-(a_l^2-a_i^2)x^2\}}} \end{aligned}\right\}\ldots(60)$$

Stelt men dan in de eerste $x = \dfrac{a_i}{\sqrt{a_i^2-a_l^2}}\sin\xi$, en maakt terbekorting $\sqrt{\dfrac{a_i^2-a_k^2}{a_i^2-a_l^2}} = p$, $\arcsin\sqrt{\dfrac{a_i^2-a_l^2}{a_i^2}} = q$, zoo komt er

$$F_i = \frac{4\pi p_i a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_l^2)^{3/2}}\int_0^q \frac{\sin^2\xi\,d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}} =$$

$$= \frac{4\pi p_i a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_k^2)(a_i^2-a_l^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_0^q \frac{d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}} - \int_0^q \sqrt{1-p^2\sin^2\xi}\,d\xi\right\}.$$

Stelt men in de tweede $x = \dfrac{a_k\sin\xi}{\sqrt{a_k^2-a_l^2+(a_i^2-a_k^2)\cos^2\xi}}$, waarbij de grenzen ingelijks worden 0 en q, zoo komt er:

$$F_k = \frac{4\pi p_k a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_l^2)^{3/2}}\int_0^q \frac{\sin^2\xi\,d\xi}{(1-p^2\sin^2\xi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{4\pi p_i a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_k^2)(a_i^2-a_l^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_0^q \frac{d\xi}{(1-p^2\sin^2\xi)^{3/2}} - \int_0^q \frac{d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}\right\}$$

Maar $\dfrac{d\xi}{(1-p^2\sin^2\xi)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}{1-p^2}\,d\xi -$

$-\dfrac{p^2}{1-p^2}\,d\,\dfrac{\sin\xi\cos\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}$, terwijl bij de grens q, $\dfrac{\sin q\cos q}{\sqrt{1-p^2\sin^2 q}} =$

$$=\frac{a_l\sqrt{a_i^2-a_l^2}}{a_i a_k} \text{ is, derhalve wordt}$$

$$F_k=\frac{4\pi p_k a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_k^2)(a_i^2-a_l^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{a_i^2-a_l^2}{a_k^2-a_l^2}\int_0^q\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_0^q\frac{d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}\right\}-\frac{4\pi p_k a_l^2}{a_k^2-a_l^2}.$$

Eindelijk stelle men in de derde $x=\frac{a_l\operatorname{tg}\xi}{\sqrt{a_i^2-a_l^2}}$, zoo wordt

$$F_l=\frac{4\pi p_l a_i a_k a_l}{(a_i^2-a_l^2)^{3/2}}\int_0^q\frac{\operatorname{tg}^2\xi\,d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}$$

of daar

$$\frac{\operatorname{tg}^2\xi\,d\xi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}=\frac{d\operatorname{tg}\xi\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}{1-p^2}-\frac{\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}}{1-p^2}d\xi$$

en bij de grens q,

$$\operatorname{tg}q\sqrt{1-p^2\sin^2 q}=\frac{a_k\sqrt{a_i^2-a_l^2}}{a_i a_l} \text{ is,}$$

$$F_l=\frac{4\pi p_l a_k^2}{a_k^2-a_l^2}-\frac{4\pi p_l a_i a_k a_l}{(a_k^2-a_l^2)(a_i^2-a_l^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^q\sqrt{1-p^2\sin^2\xi}\,d\xi$$

Duidt men dus, zooals gewoonlijk, de elliptische integralen der eerste en tweede soort, met amplitude q en modulus p, aan door $F(p.\,q)$ en $E(p.\,q)$, zoo heeft men;

$$\left.\begin{aligned}
F_i&=\frac{3p_i M}{a_i^3 e_k^2 e_l}\Big\{F(p.q)-E(p.q)\Big\},\\
F_k&=\frac{3p_k M}{a_i^3 e_k^2 e_l}\left\{\frac{e_l^2}{e_l^2-e_k^2}E(p.q)-F(p.q)\right\}-\frac{4\pi p_k a_l^2}{a_k^2-a_l^2}\\
F_l&=\frac{4\pi p_l a_k^2}{a_k^2-a_l^2}-\frac{3p_l M}{a_i^3 e_k^2 e_l}E(p.q).
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (61).$$

Om voor het geval van een uitwendig gelegen punt P, de integralen in een gemakkelijk te behandelen gedaante te brengen, denke men zich, om P als middelpunt, een bol met de eenheid als straal beschreven en beschouwe P als top van een oneindig dun kegeltje, dat uit het oppervlak van den bol een element $d\sigma$ en uit dat der ellipsoïde twee elementen uitsnijdt, wier afstanden tot P, weder r'' en r' mogen heeten. Stelt men dan $\frac{a_i^2}{a_k^2} = m_k$, $\frac{a_i^2}{a_l^2} = m_l$, $a_i^2 = c$, zoo wordt de vergelijking der ellipsoïde $x_i^2 + m_k x_k^2 + m_l x_l^2 = c$, terwijl wanneer $\gamma_i, \gamma_k, \gamma_l$, de hoeken zijn van het kegeltje met de x_i, x_k, x_l assen en r de afstand van een punt daarin gelegen tot P, men heeft $\frac{p_i - x_i}{\cos \gamma_i} = \frac{p_k - x_k}{\cos\gamma_k} = \frac{p_l - x_l}{\cos\gamma_l} = r$, zoodat r'' en r' de wortels zijn van de vergelijking

$$(r \cos \gamma_i - p_i)^2 + m_k (r \cos \gamma_k - p_k)^2 + m_l (r \cos\gamma_l - p_l)^2 = 0$$

of $Nr^2 + 2\,Ir - h = 0$ indien $N = \cos^2\gamma_i + m_k \cos^2\gamma_k + m_l \cos^2\gamma_l$,

$I = -(p_i \cos\gamma_i + p_k m_k \cos\gamma_k + p_l m_l \cos\gamma_l)$, $h = -(p_i^2 + m_k p_k^2 + m_l p_l^2) + c$ is. Stelt men eindelijk nog $I^2 + h\,N = R^2$, hetgeen altijd geoorloofd is, omdat beide wortels reëel zijn, zoo is $r'' - r' = 2\,\frac{R}{N}$.

Een massaelement van de ellipsoïde, besloten tusschen het kegeltje en twee bolppervlakken, met P tot middelpunt en r en $r + dr$ tot stralen, heeft tot waarde $r^2\, dr\, d\sigma$ en werkt op P, met eene kracht $dr\, d\sigma$, zoodat het geheele deel der ellipsoïde, binnen het kegeltje gelegen, daarop de kracht $\int_{r'}^{r''} dr\, d\sigma = (r'' - r')\, d\sigma$ $= \frac{2\,R}{N}\, d\sigma$ uitoefent, welke, in de richtingen der assen ontbonden, geeft $\frac{2R}{N} \cos\gamma_i\, d\sigma$, zoodat $\frac{1}{2} F_i = \int\int \frac{R \cos\gamma_i}{N}\, d\sigma$ is, waarbij de integratie moet uitgestrekt worden, over het deel des boloppervlaks besloten binnen den kegel die, P tot top hebbende, de ellipsoïde raakt. Ligt P op het oppervlak, dan is dit deel dus het halve boloppervlak.

Nu bevat, van de functie onder het integraal teeken, alleen R de grootheid c. Differentieert men dus F_i naar c, zoo wordt: $\frac{\delta F_i}{\delta c} = \int\int \frac{\cos\gamma_i}{R}\, d\sigma$, daar $\frac{\delta R}{\delta c} = \frac{N}{2R}$ is, en om dezelfde rede als op bl. 86, niet op de variatiën der grenzen behoeft gelet te worden. Alsdan is $\frac{\delta F_i}{\delta c}\, dc$ de component der aantrekking, op P uitgeoefend, door de oneindig dunne laag, welke het verschil is tusschen de beide gelijkvormige ellipsoïden waarvoor a_i^2 de waarden c en $c + dc$ heeft; de integratie moet natuurlijk weder uitgestrekt worden, over dat deel des boloppervlaks, dat besloten is binnen den raakkegel uit P aan die laag. Voor een raaklijn uit P aan de ellipsoïde, is $r'' = r'$ dus $R = 0$, (daar N niet oneindig kan worden), waaruit volgt dat voor zulk een lijn, de groothedeu $\cos \gamma_i$ voldoen aan die betrekking, dus dat $r^2 R^2 = 0$ of

$$(p_i^2 + h)(p_i - x_i)^2 + m_k(p_k^2 m_k + h)(p_k - x_k)^2 + m_l(p_l^2 m_l + h)(p_l - x_l)^2 +$$
$$+ 2m_k p_i p_k (p_i - x_i)(p_k - x_k) + 2m_l p_i p_l (p_i - x_i)(p_l - x_l) +$$
$$+ 2m_k m_l p_k p_l (p_k - x_k)(p_l - x_l) = 0$$

de vergelijking van dien raakkegel is.

Daar nu in $\frac{\delta F_i}{\delta c}$ alleen R voorkomt, is het te zien, dat deze integraal de eenvoudigste gedaante aannemen zal, indien R en dus de vergelijking van den raakkegel zoo eenvoudig mogelijk gemaakt wordt.

Men verandere daartoe eerst den oorsprong der coördinaten en neme daarvoor het punt P, zoo gaat de vergelijking over in

$$(p_i^2+h)x'^2+(p_k^2 m_k+h)m_k x'^2_k+(p_l^2 m_l+h)m_l x'^2_l+2m_k p_i p_k x'_i x'_k+2m_l p_i p_l x'_i x'_l+2m_k m_l p_k p_l x'_k x'_l=0$$

welke men ter bekorting voorstelle door:

$$M'_i x'^2_i + M'_k k'^2_k + M'_l x'^2_l + 2N'_l x'_i x'_k + 2N'_k x'_i x'_l + 2N'_i x'_i x_l = 0. \;\ldots\ldots \quad (k')$$

Vervolgens vervange men het coördinatenstelsel door een ander, insgelijks rechthoekig, met assen PY_i, PY_k, PY_l, zoodanig dat ι_i. ι_k. ι_l, $\varkappa_i$. $\varkappa_k$. $\varkappa_l$, λ_i. λ_k. λ_l, de cosinussen zijn van de hoeken door PY_i, PY_k. PY_l met de drie assen van het oude stelsel gevormd; zooals men weet is dan:

$$\left.\begin{array}{c}
\iota_i^2+\iota_k^2+\iota_l^2=\varkappa_i^2+\varkappa_k^2+\varkappa_l^2=\lambda_i^2+\lambda_k^2+\lambda_l^2=\iota_i^2+\varkappa_i^2+\lambda_i^2=\iota_k^2+\varkappa_k^2+\lambda_k^2=\iota_l^2+\varkappa_l^2+\lambda_l^2=1\,; \\
\iota_i\varkappa_i+\iota_k\varkappa_k+\iota_l\varkappa_l=\varkappa_i\lambda_i+\varkappa_k\lambda_k+\varkappa_l\lambda_l=\iota_i\lambda_i+\iota_k\lambda_k+\iota_l\lambda_l=0\,; \\
\iota_i\iota_k+\varkappa_i\varkappa_k+\lambda_i\lambda_k=\iota_k\iota_l+\varkappa_k\varkappa_l+\lambda_k\lambda_l=\iota_l\iota_i+\varkappa_l\varkappa_i+\lambda_l\lambda_i=0\,; \\
\iota_i=\varkappa_k\lambda_l-\lambda_k\varkappa_l;\varkappa_i=\lambda_k\iota_l-\iota_k\lambda_l;\lambda_i=\iota_k\varkappa_l-\varkappa_k\iota_l;\iota_k=\varkappa_l\lambda_i-\lambda_l\varkappa_i; \\
\varkappa_k=\lambda_l\iota_i-\iota_l\lambda_i;\lambda_k=\iota_l\varkappa_i-\varkappa_l\iota_i;\iota_l=\varkappa_i\lambda_k-\lambda_i\varkappa_k;\varkappa_l=\lambda_i\iota_k-\iota_i\lambda_k;\lambda_l=\iota_i\varkappa_k-\varkappa_i\iota_k
\end{array}\right\} (c)$$

en kunnen deze grootheden steeds zóó bepaald worden, dat bij substitutie (k') overgaat in eene vergelijking van den vorm $M_i y_i^2 + M_k y_k^2 + M_l y_l^2 = 0$, m. a. w. dat de coördinaatassen samenvallen met de assen van den door (k) voorgestelden kegel.

Daar nu de vergelijkingen welke het verband tusschen de coördinaten x_i en y_i geven, zijn:

$$x'_i = \iota_i y_i + \varkappa_i y_k + \lambda_i y_l, \quad x'_k = \iota_k y_i + \varkappa_k y_k + \lambda_k y_l, \quad x'_l = \iota_l y_i + \varkappa_l y_k + \lambda_l y_l,$$

zal in de vergelijking

$$M_i y_i^2 + M_k y_k^2 + M_l y_l^2 + 2N_l y_i y_k + 2N_k y_i y_l + 2N_i y_k y_l = 0$$

die door substutie dier waarden uit (k') ontstaat,

$$\left.\begin{cases} M_i = M'_i \iota_i^2 + M'_k \iota_k^2 + M'_l \iota_l^2 + 2N'_l \iota_i \iota_k + 2N'_k \iota_i \iota_l + 2N'_i \iota_k \iota_l \\ M_k = M'_i \varkappa_i^2 + M'_k \varkappa_k^2 + M'_l \varkappa_l^2 + 2N'_l \varkappa_i \varkappa_k + 2N'_k \varkappa_i \varkappa_l + 2N'_i \varkappa_k \varkappa_l \\ M_l = M'_i \lambda_i^2 + M'_k \lambda_k^2 + M'_l \lambda_l^2 + 2N'_l \lambda_i \lambda_k + 2N'_k \lambda_i \lambda_l + 2N'_i \lambda_k \lambda_l \end{cases}\right\} \ldots\ldots\ldots (M')$$

$$\left.\begin{cases} N_l = M'_i \iota_i \varkappa_i + M'_k \iota_k \varkappa_k + M'_l \iota_l \varkappa_l + N'_l(\iota_i \varkappa_k + \iota_k \varkappa_i) + N'_k(\iota_l \varkappa_i + \iota_i \varkappa_l) + N'_i(\iota_k \varkappa_l + \iota_l \varkappa_k) = 0. \\ N_k = M'_i \lambda_i \iota_i + M'_k \lambda_k \iota_k + M'_l \lambda_l \iota_l + N'_l(\lambda_i \iota_k + \lambda_k \iota_i) + N'_k(\lambda_l \iota_i + \lambda_i \iota_l) + N'_i(\lambda_k \iota_l + \lambda_l \iota_k) = 0 \\ N_i = M'_i \varkappa_i \lambda_i + M'_k \varkappa_k \lambda_k + M'_l \varkappa_l \lambda_l + N'_l(\varkappa_i \lambda_k + \varkappa_k \lambda_i) + N'_k(\varkappa_l \lambda_i + \varkappa_i \lambda_l) + N'_i(\varkappa_k \lambda_l + \varkappa_l \lambda_k) = 0 \end{cases}\right\} (N')$$

moeten zijn. Uit deze zes vergelijkingen, in verband met de vergelijkingen (c) welke zooals bekend is, zes onafhankelijke betrekkingen voorstellen, kunnen dan de 12 grootheden $\iota_i, \varkappa_i, \lambda_i, \iota_k, \varkappa_k, \lambda_k, \iota_l, \varkappa_l, \lambda_l, M_i, M_k, M_l$, op de volgende wijze worden bepaald.

De beide eersten der vergelijkingen (N') kunnen tengevolge der betrekkingen $\iota_i \varkappa_i + \iota_k \varkappa_k + \iota_l \varkappa_l = \lambda_i \iota_i + \lambda_k \iota_k + \lambda_l \iota_l = 0$ ook geschreven worden:

$$(M'_k - M'_i)\iota_k \varkappa_k + (M'_l - M'_i)\iota_l \varkappa_l + N'_l(\iota_i \varkappa_k + i_k \varkappa_i) + N'_k(\iota_l \varkappa_i + \iota_i \varkappa_l) + N'_i(\iota_k \varkappa_l + \iota_l \varkappa_k) = 0$$

$$(M'_k - M'_i)\lambda_k \iota_k + (M'_l - M'_i)\lambda_l \iota_l + N'_l(\lambda_i \iota_k + \lambda_k \iota_i) + N'_k(\lambda_l \iota_i + \lambda_i \iota_l) + N'_i(\lambda_k \iota_l + \lambda_l i_k) = 0$$

of door beurtelingsche eliminatie van $M'_l - M'_i$ en $M'_k - M'_i$,

$$\{(M'_k - M'_i)\iota_k + N'_l \iota_i + N'_i \iota_l\}(\varkappa_k \lambda_l - \lambda_k \varkappa_l) = (N'_k \iota_l + N'_l \iota_k)(\varkappa_l \lambda_i - \lambda_l \varkappa_i)$$

$$\{(M'_l - M'_i)\iota_l + N'_k \iota_i + N'_i \iota_k\}(\varkappa_k \lambda_l - \lambda_k \varkappa_l) = (N'_k \iota_l + N'_l \iota_k)(\lambda_k \varkappa_i - \varkappa_k \lambda_i)$$

en dus met het oog op (c):

$$\left.\begin{array}{l} (M'_k - M'_i)\,\iota_k \iota_i = (N'_k \iota_k - N'_i \iota_i)\,\iota_l + N'_l(\iota_k^2 - \iota_i^2) \\ (M'_l - M'_i)\,\iota_l \iota_i = (N'_l \iota_l - N'_i \iota_i)\,\iota_k + N'_k(\iota_l^2 - \iota_i^2) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (y)$$

Maar indien men op de eerste der vergelijkingen M' de eerste der betrekkingen (c) toepast, wordt zij:

$$M_i - M'_i = (M'_k - M'_i)\iota_k^2 + (M'_l - M'_i)\iota_l^2 + 2N'_l \iota_i \iota_k + 2N'_k \iota_l \iota_i + 2N'_i \iota_k \iota_l$$

of door vermenigvuldiging met ι_i en substitutie der waarden van $(M'_k - M'_i)\,\iota_k \iota_i$ en $(M'_l - M'_i)\,\iota_l \iota_i$ uit (y),

$$(M_i - M_i')\iota_i = (N_k'\iota_k - N_i'\iota_i)\iota_k\iota_l + N_l'\iota_k(\iota_k^2 - \iota_i^2) + (N_l'\iota_l - N_i'\iota_i)\iota_k\iota_l + N_k'\iota_l(\iota_l^2 - \iota_i^2)$$
$$+ 2N_l'\iota_i^2\iota_k + 2N_k'\iota_l\iota_i^2 + 2N_i'\iota_i\iota_k\iota_l = N_k'\iota_l + N_l'\iota_k.$$

Op dezelfde wijze kan men uit de eerste vergelijking (M') ook ι_k^2 of ι_l^2 elimineren en door vermenigvuldiging met ι_k of ι_l en substitutie der waarden (y) en de daaruit volgende

$$(M'_k - M'_l)\iota_k\iota_l = (N'_k\iota_k - N'_l\iota_l)\iota_i + N'_i(\iota_k^2 - \iota_l^2),$$

twee dergelijke vormen verkrijgen, zoodat men heeft

$$(M_i - M_i')\iota_i = N'_k\iota_l + N'_l\iota_k;\quad (M_i - M'_k)\iota_k = N'_l\iota_i + N'_i\iota_l;$$
$$(M_i - M'_l)\iota_l = N'_i\iota_k + N'_k\iota_i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (y')$$

en dus

$$(M_i - M'_i)(M_i - M'_k)(M_i - M'_l)\iota_i\iota_k\iota_l = N'^2_i N'_k\iota_k\iota_l^2 + N'^2_i N'_l\iota_k^2\iota_l +$$
$$N'_i N'^2_k\iota_i\iota_l^2 + N'_i N'^2_l\iota_i\iota_k^2 + 2N'_i N'_k N'_l\iota_i\iota_k\iota_l + N'^2_k N'_l\iota_i^2\iota_l + N'_k N'^2_l\iota_k\iota_i^2.$$

Maar ook vindt men uit deze drie betrekkingen, door de eerste met $N_i'^2\iota_k\iota_l$, de tweede met $N_k'^2\iota_l\iota_i$, de derde met $N_l'^2\iota_i\iota_k$ te vermenigvuldigen en de produkten op te tellen,

$$\{N_i'^2(M_i - M'_i) + N_k'^2(M_i - M_k') + N_l'^2(M_i - M_l')\}\iota_i\iota_k\iota_l = N_i'^2 N'_k\iota_k\iota_l^2 +$$
$$+ N_i'^2 N_l'\iota_k^2\iota_l + N_i' N'^2_k\iota_i\iota_l^2 + N'_i N'^2_l\iota_i\iota_k^2 + N_k'^2 N'_l\iota_i^2\iota_l + N_i' N_l'^2\iota_i^2\iota_k,$$

hetgeen in verband met de vorige vergelijking oplevert:

$$(M_i - M'_i)(M_i - M'_k)(M_i - M'_l) - N'^2_i(M_i - M'_i) - N'^2_k(M_i - M'_k) -$$
$$- N_l'^2(M_i - M_l') - 2N'_i N'_k N'_l = 0, \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

welke nu nog alleen de onbekende M_i bevat. Nadat deze dan hieruit berekend is, vindt men vervolgens ι_i, ι_k en ι_l uit de vergelijkingen (y') welke, omdat $\iota_i^2 + \iota_k^2 + \iota_l^2 = 0$ is, geven:

$$\frac{\iota_i}{(M_i - M'_k)(M_i - M'_l) - N'^2_i} = \frac{\iota_k}{N_i'N'_k + N'_l(M_i - M'_l)} = \frac{\iota_l}{N'_i N_l' + N_k'(M_i - M'_k} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{[\{(M_i - M_k')(M_i - M'_l) - N'^2_i\}^2 + \{N'_i N'_k + N'_l(M_i' - M'_l)\}^2 + \{N'_i N'_l + N_k'(M_i - M'_k)\}^2]}}$$

Op volkomen gelijke wijze zou men uit de beide systemen vergelijkingen, gevormd door de tweede van (M') met de eerste en derde van (N') en door de derde van (M') met de tweede en derde van (N'), de beide systemen onbekenden M_k, $\varkappa_i$, $\varkappa_k$, $\varkappa_l$ en M_l, λ_i, λ_k, λ_l kunnen vinden. Dit behoeft echter niet uitgevoerd te worden, omdat het eerste systeem vergelijkingen uit het behandelde ontstaat door permutatie van ι met $\varkappa$ en i met k, en het tweede door permutatie van ι met λ en i met l. Daarbij blijft echter de vergelijking (m) geheel onveranderd, behalve dat M_i beurtelings in M_k en M_l overgaat, waaruit volgt dat M_i, M_k en M_l de drie wortels dier derde machtsvergelijking zijn, terwijl men verder heeft:

$$\frac{\varkappa_k}{(M_k-M_i')(M_k-M_l')-N_k'^2}=\frac{\varkappa_i}{N_k'N_i'+N_l'(M_k-M_l')}=\frac{\varkappa_l}{N_k'N_l'+N_i'(M_k-M_i')}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[\{(M_k-M_i')(M_k-M_l')-N_k'^2\}^2+\{N_k'N_i'+N_l'(M_k-M_l')\}^2+\{N_k'N_l'+N_i'(M_k-M_i')\}^2\right]}},$$

$$\frac{\lambda_l}{(M_l-M_k')(M_l-M_i')-N_l'^2}=\frac{\lambda_k}{N_l'N_k'+N_i'(M_l-M_i')}=\frac{\lambda_i}{N_l'N_i'+N_k'(M_l-M_k')}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[\{(M_l-M_k')(M_l-M_i')-N_i'^2\}^2+\{N_l'N_k'+N_i'(M_l-M_i')\}^2+\{N_l'N_i'+N'_k(M_l-M_k')\}^2\right]}},$$

waarmede de bepaling der onbekenden is afgeloopen. Alleen rest dan noch het onderzoek naar den aard der coëfficienten M_i, M_k en M_l. Vooreerst stelle men daartoe in (k'), $x'_k = x''_k \cos\varepsilon - x''_l \sin\varepsilon$, $x'_l = x''_k \sin\varepsilon + x''_l \cos\varepsilon$, zoo gaat de vergelijking over in eene andere

$$\mu_i x'^2_i+\mu_k x''^2_k+\mu_l x''^2_l+2\nu_l x'_i x''_k+2\nu_k x'_i x''_l+2\nu_i x''_k x''_l=0. \quad (\mu)$$

waarin

$$\mu_i=M'_i,\ \mu_k=M'_k\cos^2\varepsilon+M'_l\sin^2\varepsilon+2N'_i\sin\varepsilon\cos\varepsilon,$$
$$\mu_l=M'_k\sin^2\varepsilon+M'_l\cos^2\varepsilon-2N'_i\sin\varepsilon\cos\varepsilon,\ \nu_l=N'_l\cos\varepsilon+N'_k\sin\varepsilon,$$
$$\nu_k=-N'_l\sin\varepsilon+N'_k\cos\varepsilon,\ \nu_i=-(M'_k+M'_l)\sin\varepsilon\cos\varepsilon+N'_i(\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon).$$

Bepaalt men nu ε zóó, dat $\nu_i=0$ is, waartoe $\operatorname{tg} 2\varepsilon=\dfrac{2N'_i}{M'_k-M'_l}$ moet zijn en past dan op (μ) de bewerking toe welke met (k') is gedaan, zoo treedt in plaats van (m) nu

$$(M_i-\mu_i)(M_i-\mu_k)(M_i-\mu_l)-\nu_k^2(M_i-\mu_k)-\nu_l^2(M_i-\mu_l)=0$$

eene vergelijking wier eerste lid positief is voor $M_i=\infty$, negatief voor $M_i=$ de grootste, positief voor $M_i=$ de kleinste der grootheden μ_k en μ_l, negatief voor $M_i=-\infty$, zoodat hare drie wortels en dus ook die van (m), welke daarmede identisch zijn, steeds alle reëel zijn.

Vervangt men vervolgens in (m) de coefficienten door hare waarden in a_i, a_k, a_l, p_i, p_k en p_l, zoo gaat zij over in

$$M_i^3 - \frac{a_i^2}{a_k^2 a_l^2}\{a_k^2 a_l^2 + a_l^2 a_i^2 + a_i^2 a_k^2 - (a_k^2 + a_l^2)p_i^2 - (a_l^2 + a_i^2)p_k^2 - (a_i^2 +$$
$$+ a_k^2)p_l^2\} M_i^2 + \frac{h a_i^4}{a_k^2 a_l^2}(a_i^2 + a_k^2 + a_l^2 - p_i^2 - p_k^2 - p_l^2) M_i - \frac{h^2 a_i^6}{a_k^2 a_l^2} = 0 \ldots (m')$$

Zoolang nu de ellipsoïde geen bol is, is éene der assen bijv. a_i grooter dan de beide anderen. Alsdan is de som

$$(a_k^2 + a_l^2)(p_i^2 + p_k^2 + p_l^2 - a_i^2 - a_k^2 - a_l^2) + a_k^2 a_l^2 + a_l^2 a_i^2 + a_i^2 a_k^2 - (a_k^2 + a_l^2)p_i^2 -$$
$$-(a_l^2 + a_i^2)p_k^2 - (a_i^2 + a_k^2)p_l^2 = -(a_i^2 - a_k^2)p_k^2 - (a_i^2 - a_l^2)p_l^2 - a_k^4 - a_k^2 a_l^2 - a_l^4$$

steeds negatief, waaruit, met het oog daarop dat h steeds negatief is, volgt dat de coëfficienten der vergelijking een der volgende rijen van teekens opleveren $+ + - -$, $+ + + -$ of $+ - - -$, en de vergelijking dus steeds een positieve en twee negatieve wortels heeft.

Neemt men dus M_i voor de positieve, $-M_k$ en $-M_l$ voor de beide negatieve wortels aan, zoo is $M_i y_i^2 - M_k y_k^2 - M_l y_l^2 = 0$ de vergelijking van den raakkegel en dus, indien men nu $y_i = r \cos \vartheta$, $y_k = r \sin \vartheta \cos \omega$, $y_l = r \sin \vartheta \sin \omega$ stelt (waarbij dus r dezelfde grootheid is als bij den aanvang),

$$R^2 = M_i \cos^2 \vartheta - (M_k \cos^2 \omega + M_l \sin^2 \omega) \sin^2 \vartheta,$$

terwijl ϑ de hoek tusschen r en de y_i as, ω de hoek van het vlak dier beide lijnen met het coördinaten vlak $y_i\, y_k$ is. Men kan dus de integratie naar ϑ uitvoeren van de as des kegels, waarvoor $\vartheta = 0$ moet zijn, tot aan het oppervlak, waar ϑ de scherpe waarde ϑ' moet hebben, geleverd door de vergelijking

$$R^2 = 0 \text{ of } \operatorname{tg}^2 \vartheta' = \frac{M_i}{M_k \cos^2 \omega + M_l \sin^2 \omega}$$

en vervolgens die naar ω om de as heen, van 0 tot 2π. Daar in deze coördinaten uitgedrukt, $d\sigma = \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\omega$,

$$\cos \gamma_i = \frac{p_i - x_i}{r} = \frac{x_i'}{r} = \frac{\iota_i y_i + \varkappa_i y_k + \lambda_i y_l}{r} = \iota_i \cos\vartheta + \varkappa_i \sin\vartheta \cos\omega +$$
$$+ \lambda_i \sin \vartheta \sin \omega$$ is, heeft men dan ten slotte:

$$\frac{\delta F_i}{\delta c} = \iota_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta'} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{R}\, d\vartheta\, d\omega +$$
$$+ \varkappa_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta'} \frac{\sin^2\vartheta \cos\omega}{R}\, d\vartheta\, d\omega + \lambda_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta'} \frac{\sin^2\vartheta \sin\omega}{R}\, d\vartheta\, d\omega,$$

waaruit $\frac{\delta F_k}{\delta c}$ en $\frac{\delta F_l}{\delta c}$ verkregen worden, door den index i door k of l te vervangen. Omdat echter in R en ϑ' geene andere functien van ω dan $\cos^2\omega$ en $\sin^2\omega$ voorkomen, zullen de beide laatste integralen nul zijn, zoodat indien $\int_o^{2\pi}\int_o^{\vartheta'} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{R}\, d\vartheta d\omega = K$ gesteld wordt: $\frac{\delta F_i}{\delta c} = \iota_i K$, $\frac{\delta F_k}{\delta c} = \iota_k K$, $\frac{\delta F_l}{\delta c} = \iota_l K$ zal zijn.

Uit deze waarden volgt tevens, dat de kracht, welke de oneindig dunne laag op P uitoefent, gericht is volgens de as des kegels en tot waarde heeft $\sqrt{\left(\frac{\delta F_i}{\delta c}\right)^2+\left(\frac{\delta F_k}{\delta c}\right)^2+\left(\frac{\delta F_l}{\delta c}\right)^2}\, dc = K\, dc.$

Men vindt nu verder zeer gemakkelijk dat

$$K=\int_o^{2\pi} \frac{\sqrt{M_i}-\sqrt{\left\{M_i-(M_i+M_k\cos^2\omega+M_l\sin^2\omega)\sin^2\vartheta'\right\}}}{M_i+M_k\cos^2\omega+M_l\sin^2\omega}\, d\omega$$

$$=\int_o^{2\pi}\frac{\sqrt{M_i}\, d\omega}{M_i+M_k\cos^2\omega+M_l\sin^2\omega}=4\sqrt{M_i}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\mathrm{tg}\,\omega}{M_i+M_k+(M_i+M_l)\mathrm{tg}^2\omega}=$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{M_i}}{\sqrt{(M_i+M_k)(M_i+M_l)}}=\frac{2\pi M_i}{\sqrt{M_i^3+(M_k+M_l)M_i^2+M_i M_k M_l}},$$

of omdat volgens de vergelijking welke M_i, M_k en M_l levert:

$$M_i-M_k-M_l=(1+m_k+m_l)c-(m_k+m_l)p_i^2-(1+m_l)m_k p_k^2-(1+m_k)m_l p_l^2\,.$$

$$M_i M_k M_l = m_k m_l c h^2$$

is, $K=\frac{2\pi M_i}{H}$, indien

$$H^2=2M_i^3-\left\{(1+m_k+m_l)c-(m_k+m_l)p_i^2-(1+m_l)m_k p_k^2-(1+m_k)m_l p_l^2\right\}M_i^2+m_k m_l c h^2$$

$$=\left\{(1+m_k+m_l)c-(m_k+m_l)p_i^2-(1+m_l)m_k p_k^2-(1+m_k)m_l p_l^2\right\}M_i^2-$$

$$-2h\left\{(m_k m_l+m_k+m_l)c-m_k m_l(p_i^2+p_k^2+p_l^2)\right\}M_i+3m_k m_l c h^2$$

Eindelijk vindt men gemakkelijk:

$$\iota_i=\frac{1}{\triangle}\left\{M_i^2-(m_k^2p_k^2+m_l^2p_l^2+hm_k+hm_l)M_i+hm_k m_l(h+m_k p_k^2+m_l p_l^2)\right\}$$

$$\iota_k=\frac{m_k p_i p_k}{\triangle}(M_i-m_l h),\ \iota_l=\frac{m_l p_i p_l}{\triangle}(M_i-m_k h),$$

waarin $\triangle^2$ de som is van de tweede machten der coëfficienten van $\frac{1}{\triangle}$; zoodat ten slotte:

$$F_i = \int_0^c \iota_i K dc,\ F_k = \int_0^c \iota_k K dc,\ F_l = \int_0^c \iota_l K\, dc$$

is, waarin nu de componenten door enkelvoudige integralen zijn uitgedrukt.

Deze vormen echter zouden uiterst samengesteld en dus hoogst moeilijk te overzien zijn, wanneer men daarin alles in c wilde uitdrukken; het is dus noodig eene nieuwe veranderlijke intevoeren. Men stelle ten dien einde:

$$v = -\frac{h}{M_i} \text{ of } M_i = -\frac{h}{v}.$$

Door substitutie hiervan wordt vergelijking (m'),

$$p_i^2 + m_k p_k^2 + m_l p_l^2 - c - \left\{(1+m_k+m_l)c - (m_k+m_l)p_i^2 - \right.$$
$$\left. -(1+m_l)m_k p_k^2 - (1+m_k)m_l p_l^2\right\} v - \left\{(m_k m_l + m_k + m_l)c - \right.$$
$$\left. m_k m_l (p_i^2 + p_k^2 + p_l^2)\right\} v^2 - c\, m_k m_l v^3 = 0,$$

waaruit volgt:

$$c = \frac{p_i^2}{1+v} + \frac{m_k^2 p_k^2}{1+m_k v} + \frac{m_l^2 p_l^2}{1+m_l v} \quad \dots\dots\dots \quad (c)$$

en door differentiatie

$$dc = -\left\{\frac{p_i^2}{(1+v)^2} + \frac{m_k^2 p_k^2}{(1+m_k v)^2} + \frac{m_l^2 p_l^2}{(1+m_l v)^2}\right\} dv,$$

of indien men stelt,

$$(1+v)(1+m_k v)(1+m_l v) = V,$$

$$p_i^2(1+m_k v)^2(1+m_l v)^2 + m_k^2 p_k^2(1+m_l v)^2(1+v)^2 + m_l^2 p_l^2(1+v)^2(1+m_k v)^2 = Q^2,$$

ook $dc = -\frac{Q^2}{V^2}\, dv.$

Door dezelfde substitutie wordt dan, met het oog op de waarde van h en de bovenstaande vorm voor c,

$$\iota_i = -\frac{h p_i^2 (1+m_k v)(1+m_l v)}{v(1+v)\triangle};\ \iota_k = -\frac{h p_i p_k m_k (1+m_l v)}{v\triangle};\ \iota_l = -\frac{h\, p_i p_l m_l (1+m_k v)}{v\triangle}$$

terwijl de waarde van $\triangle$ hierin, bepaald kan worden door middel der betrekking $\iota_i^2 + \iota_k^2 + \iota_l^2 = 1$; deze toch geeft:

$$\triangle^2 = \frac{h^2 p_i^2}{v^2(1+v)^2}\left\{p_i^2(1+m_k v)^2(1+m_l v)^2 + m_k^2 p_k^2(1+m_l v)^2(1+v)^2 + \right.$$
$$\left. + m_l^2 p_l^2 (1+m_k v)^2 (1+v)^2\right\} = \frac{h^2 p_i^2 Q^2}{v^2(1+v)^2}$$

en dus $\triangle = -\dfrac{hp_iQ}{v(1+v)}$ [44]

$$\iota_i = \frac{p_i(1+m_kv)(1+m_lv)}{Q};\ \iota_k = \frac{m_kp_k(1+m_lv)(1+v)}{Q};\ \iota_l = \frac{m_lp_l(1+v)(1+m_kv)}{Q}$$

Door de substitutie der bovenstaande waarde van c wordt verder, zooals gemakkelijk te zien is:

$$H = -\frac{h\ Q}{v\sqrt{V}} \text{ en dus } \frac{M_i}{H} = \frac{\sqrt{V}}{Q}, \text{ derhalve}$$

$$K = \frac{2\pi\sqrt{V}}{Q},\ K\,d\,c = \frac{2\pi Q}{V\sqrt{V}}\,d\,v,$$

$$\iota_iKdc = \frac{2\pi p_i}{(1+v)\sqrt{V}}dv;\ \iota_kKdc = \frac{2\pi m_kp_k}{(1+m_kv)\sqrt{V}}dv;\ \iota_lKdc = \frac{2\pi m_lp_l}{(1+m_lv)\sqrt{V}}dv.$$

Eindelijk is licht uit vergelijking (c) te zien, dat daar v steeds positief is, bij elke positieve waarde van c ééne reëele waarde van v behoort, daar de som der drie positieve breuken afneemt van $p_i^2 + m_kp_k^2 + m_lp_l^2$ tot 0, wanneer v van 0 tot ∞ nadert. Is dus v' de waarde van v behoorend bij $c = a_i^2$, zoo is eindelijk:

$$F_i = 2\pi p_i\int_{v'}^{\infty}\frac{dv}{(1+v)\sqrt{V}};\quad F_k = 2\pi m_kp_k\int_{v'}^{\infty}\frac{dv}{(1+m_kv)\sqrt{V}};$$

$$F_l = 2\pi m_lp_l\int_{v'}^{\infty}\frac{dv}{(1+m_lv)\sqrt{V}}.$$

of, indien men V, m_k en m_l door hunne waarden vervangt,

$$\left.\begin{aligned} F_i &= 2\pi p_ia_ka_l\int_{v'}^{\infty}\frac{d\,v}{\sqrt{(1+v)^3(a_k^2+a_i^2v)(a_l^2+a_i^2v)}} \\ F_k &= 2\pi p_ka_i^2a_ka_l\int_{v'}^{\infty}\frac{d\,v}{\sqrt{(1+v)(a_k^2+a_i^2v)^3(a_l^2+a_i^2v)}} \\ F_l &= 2\pi p_la_i^2a_ka_l\int_{v'}^{\infty}\frac{d\,v}{\sqrt{(1+v)(a_k^2+a_i^2v)(a_l^2+a_i^2v)^3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (62)$$

Hiermede zijn nu de drie componenten in zeer eenvoudige integralen uitgedrukt en is dus eigenlijk de taak afgeloopen, welke daarin bestond deze grootheden in bruikbare vorm te verkrijgen, alleen door integratie en zonder toepassing van de,

[44] De rede waarom voor deze vorm het teeken — is geplaatst, is dat h negatief is en dus de verhouding der absolute waarden van Q en $\triangle$ positief wordt.

voor een inwendig gelegen punt geldende formules. Evenwel is het zeker goed nog aantetoonen, dat deze vormen (62) dezelfde zijn als die der formulen (55) van LAPLACE, en ze dan ten slotte in gedaanten te brengen, analoog van die der formulen (60) voor een inwendig punt.

Daartoe stelle men in F_i, $\frac{1+v'}{1+v} = x^2$, in F_k, $\frac{a_k^2 + a_i^2 v'}{a_k^2 + a_i^2 v} = x^2$, in F_l, $\frac{a_l^2 + a_i^2 v'}{a_l^2 + a_i^2 v} = x^2$, en in alle drie vormen $v' = \frac{s^2}{a_i^2}$; zoo worden de grenzen overal 1 en 0, welke echter omgekeerd kunnen worden, tegen weglating van het minusteeken, dat overal in de waarde van dv voorkomt. De formulen (61) gaan daardoor dan zeer licht over in:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \frac{4\pi p_i a_i a_k a_l}{\sqrt{a_i^2+s^2}} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_i^2+s^2-(a_i^2-a_k^2)x^2\}\{a_i^2+s^2-(a_i^2-a_l^2)x^2\}}} \\ F_k &= \frac{4\pi p_k a_i a_k a_l}{\sqrt{a_k^2+s^2}} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_k^2+s^2-(a_k^2-a_i^2)x^2\}\{a_k^2+s^2-(a_k^2-a_l^2)x^2\}}} \\ F_l &= \frac{4\pi p_l a_i a_k a_l}{\sqrt{a_l^2+s^2}} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\{a_l^2+s^2-(a_l^2-a_k^2)x^2\}\{a_l^2+s^2-(a_l^2-a_i^2)x^2\}}} \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

welke geheel analoog zijn met (60). Uit de beteekenis van v' volgt verder dat s^2 gevonden wordt uit de vergelijking,

$$\frac{p_i^2}{a_i^2+s^2} + \frac{p_k^2}{a_k^2+s^2} + \frac{p_l^2}{a_l^2+s^2} = 1.$$

waaruit dus blijkt dat $a_i^2 + s^2 = A_i^2$, $a_k^2 + s^2 = A_k^2$, $a_l^2 + s^2 = A_l^2$ is, wanneer A_i, A_k, A_l weder de halve assen zijn van de met de oorspronkelijke confocale ellipsoïde, die door P gaat. Ook gaat de formule voor F_i uit (63) volkomen in die uit (55) over, wanneer weder a_i en dus ook A_i, als de grootste as wordt aangenomen, en de grootheden E_k en E_l worden ingevoerd. Hierdoor is dus de identiteit der vormen (62) en (55) aangetoond.

De formulen (63) verschillen alleen daarin van (60), dat de grootheden a_i^2, a_k^2, a_l^2, alle met eene zelfde constante s^2 zijn vermeerderd; derhalve zullen zij door dezelfde bewerkingen, in elliptische integralen kunnen omgevormd worden; de modulus p is dezelfde als te voren, maar in plaats der amplitude q treedt eene andere q', zijnde $q' = \arcsin \sqrt{\frac{a_i^2 - a_l^2}{a_i^2 + s^2}}$, zoodat men nu vinden zal:

$$\left.\begin{aligned}
F_i &= \frac{4\pi p_i a_i a_k a_l}{(a_i^2 - a_k^2)\sqrt{a_i^2 - a_l^2}} \left\{ F(p.q') - E(p.q') \right\} \\
F_k &= \frac{4\pi p_k a_i a_k a_l}{(a_i^2 - a_k^2)\sqrt{a_i^2 - a_l^2}} \left\{ \frac{a_i^2 - a_l^2}{a_k^2 - a_l^2} E(p.q') - F(p.q') \right\} - \frac{4\pi p_k a_i a_k a_l \sqrt{a_l^2 + s^2}}{(a_k^2 - a_l^2)(a_i^2 + s^2)(a_k^2 + s^2)} \\
F_l &= \frac{4\pi p_l a_i a_k a_l \sqrt{a_k^2 + s^2}}{(a_k^2 - a_l^2)\sqrt{(a_i^2 + s^2)(a_l^2 + s^2)}} - \frac{4\pi p_l a_i a_k a_l}{(a_k^2 - a_l^2)\sqrt{a_i^2 - a_l^2}} E(p.q')
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Het is gemakkelijk te zien, dat voor $s = 0$ de formulen (63) en (64) overgaan in (60) en (61), zoodat alle vier systemen geldig zijn voor een punt, op het oppervlak der ellipsoïde gelegen, daar juist in dat geval $s = 0$ is, daar s^2 de grootheid is, welke bij de tweede macht van elke as der aantrekkende ellipsoïde moet gevoegd worden, om de tweede machten te verkrijgen, van de assen der met deze confocale ellipsoïde, welke door P gaat.

HOOFDSTUK V.

MEETKUNDIGE METHODE VAN CHASLES.

Terwijl de analytische behandeling van het probleem, schrede voor schrede, hare volmaking had bereikt, zoodat al wat daarvoor nog te doen zou zijn, kon bestaan in het vinden van een korteren weg voor het verkrijgen der formulen voor de componenten, had de meetkundige oplossing sedert MACLAURIN gerust en was zelfs de meening ontstaan, dat zij onmogelijk tot het einde toe, voor het algemeene geval zou kunnen worden doorgevoerd. Zooals wij boven zagen, had LEGENDRE dit gevoelen uitgesproken, en ook POISSON geeft (Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide, gelezen in de Academie des Sciences op 26 Mei 1834) als zijne meening te kennen, dat eenigzins moeilijke vraagstukken, alleen door analyse kunnen worden opgelost, terwijl de synthese daartoe niet in staat is, dat echter NEWTON's Principia daarop eene uitzondering maken, waarna hij vervolgt: **Men zou ook als zoodanig kunnen noemen, de fraaie stellingen van Maclaurin over de aantrekking eener ellipsoïde; maar al heeft bij dit vraagstuk de synthese aanvankelijk de analyse overtroffen, heeft deze weldra in handen van Lagrange hare overmacht teruggekregen, en is de volledige oplossing alleen volbracht door analitische omvormingen, welke men niet onmiddelijk heeft gevonden, en waarvoor de synthese niets had kunnen in de plaats stellen.**

Blijkbaar aangevuurd door dit laatste gezegde van den grooten POISSON, trachtte nu CHASLES, door wiens medewerking de synthetische meetkunde, die juist in dien tijd weder begon te worden beoefend, zoozeer was bevorderd, langs dien weg aantevullen, hetgeen door MACLAURIN was overgelaten. Dit gelukte hem volkomen, en op den 25 Juni 1838 verscheen in de Comptes rendus des séances de l'Ac : d. Sc. een stuk, dat later eenigzins gewijzigd, werd overgenomen in Liouville's Journal. T V. 1840.

De oplossing berust hoofdzakelijk op de stelling van NEWTON en vordert de kennis van eenige eigenschappen van die punten, welke door IVORIJ »corresponderende punten" worden genoemd.

Wanneer men twee ellipsoïden heeft, wier vergelijkingen zijn $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{b_i^2} = 1$ en p_i, p_k, p_l, de coördinaten zijn van eenig punt der eerste, zoo ligt het punt welks coördinaten zijn: $\frac{b_i p_i}{a_i}, \frac{b_k p_k}{a_k}, \frac{b_l p_l}{a_l}$ op de andere; immers uit $\frac{p_i^2}{a_i^2} + \frac{p_k^2}{a_k^2} + \frac{p_l^2}{a_l^2} = 1$ volgt dadelijk $\frac{\left(\frac{b_i p_i}{a_i}\right)^2}{b_i^2} + \frac{\left(\frac{b_k p_k}{a_k}\right)^2}{b_k^2} + \frac{\left(\frac{b_l p_l}{a_l}\right)^2}{b_l^2} = 1$. Daaruit volgt dat elk punt eener willekeurige ellipsoïde, een corresponderend punt bezit op elke andere ellipsoïde.

Heeft men twee gelijkvormige, en gelijk geplaatste ellipsoïden $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = n^2$, zoo kunnen deze resp. corresponderen met twee andere, gelijkvormige en gelijkgeplaatste $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = 1$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = n^2$.

Deze beide oppervlakken hebben alsdan de eigenschap, dat eenig deel van het tusschen haar besloten volume, zich tot het corresponderende deel van het, tusschen de eersten besloten volume verhoudt, als $a'_i\ a'_k\ a'_l : a_i\ a_k\ a_l$, daar uit de betrekking tusschen de coördinaten x_i, x_k, x_l en x'_i, x'_k, x'_l, van twee corresponderende punten dadelijk volgt $dx'_i\, dx'_k\, dx'_l = \frac{a'_i\, a'_k\, a'_l}{a_i\, a_k\, a_l}\, dx_i\, dx_k\, dx_l$.

Neemt men de beide oppervlakken $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$, $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = 1$ confocaal aan, zoo zijn dit ook de beide anderen $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = n^2$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = n^2$, daar voor beiden $a_i^2 - a'^2_i = a^2_k - a'^2_k = a_l^2 - a'^2_l$ zijn moet.

Zijn de beide oppervlakken $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = n^2$ oneindig dicht bij elkander gelegen, waartoe de grootheid n oneindig weinig van 1 moet verschillen, zoo sluiten zij eene oneindig dunne laag C in, wier buitenoppervlak A de eerste en wier binnenoppervlak B de tweede vergelijking moge hebben. Alsdan sluiten de beide anderen eene corresponderende oneindig dunne laag C' in, wier buitenoppervlak A' of binnenoppervlak B' resp. tot vergelijkingen hebben $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = 1$ en $\Sigma \frac{x_i^2}{a'^2_i} = n^2$.

De dikten der beiden lagen, in de richting van eene hoofdas, verhouden zich, als de in die richting loopende halfassen der buitenoppervlakken. Immers die dikten zijn $a_i - na_i$ en $a'_i - na'_i$, of $a_i\,(1 - n)$ en $a'_i\,(1 - n)$.

Zijn P en P' twee corresponderende punten op de oppervlakken A en A', M en M' twee anderen, zoo is steeds $P\,M' = P'\,M$, zoodra A en A' confocaal zijn. Immers zijn hunne coördinaten resp: p_i, p'_i, m_i, m'_i, zoo is $p'_i = \frac{a'_i}{a_i} p_i$, $m'_i = \frac{a'_i}{a_i} m_i$ en dus:

$$PM'^2 = (p_i - \frac{a'_i}{a_i} m_i)^2 + (p_k - \frac{a'_k}{a_k} m_k)^2 + (p_l - \frac{a'_l}{a_l} m_l)^2$$

$$P'M^2 = \left(\frac{a'_i}{a_i} p_i - m_i\right)^2 + \left(\frac{a'_k}{a_k} p_k - m_k\right)^2 + \left(\frac{a'_l}{a_l} p_l - m_l\right)^2,$$

$$PM'^2 - P'M^2 = \left(\frac{p_i^2}{a_i^2} - \frac{m_i^2}{a_i^2}\right)\left(a_i^2 - a'^2_i\right) + \left(\frac{p_k^2}{a_k^2} - \frac{m_k^2}{a_k^2}\right)\left(a_k^2 - a'^2_k\right) +$$
$$+ \left(\frac{p_l^2}{a_l^2} - \frac{m_l^2}{a_l^2}\right)\left(a_l^2 - a'^2_l\right)$$

of omdat $a_i^2 - a'^2_i = a_k^2 - a'^2_k = a_l^2 - a'^2_l$ en $\Sigma \frac{p_i^2}{a_i^2} = 1$, $\Sigma \frac{m_l^2}{a_i^2} = 1$ is

$$PM'^2 - P'M^2 = (a_i^2 - a'^2_i) \left\{ \left(\frac{p_i^2}{a_i^2} + \frac{p_k^2}{a_k^2} + \frac{p_l^2}{a_l^2} \right) - \left(\frac{m_i^2}{a_i^2} + \frac{m_k^2}{a_k^2} + \frac{m_l^2}{a_l^2} \right) \right\} = 0$$

dus $P\,M' = P'\,M$.

Volgens het voorgaande is nu, indien dv en dv' twee volume-elementen der lagen voorstellen, gelegen bij de punten M en M', $dv : dv' = a'_i a'_k a'_l : a_i a_k a_l$ en dus $\frac{dv}{P'M} : \frac{dv'}{PM'} = a_i a_k a_l : a'_i a'_k a'_l$. Stelt men zich dus voor dat, terwijl P en P' constant blijven, M en M' alle punten der lagen doorloopen, zoo is ook

$$\Sigma \frac{dv}{P'M} : \Sigma \frac{dv'}{PM'} = a_i a_k a_l : a'_i a'_k a'_l$$

Onderstelt men nu dat de geheele ellipsoïde bestaat uit oneindig vele, oneindig dunne lagen van constante dichtheid, besloten tusschen oppervlakken, die met het buitenoppervlak gelijkvormig en gelijk geplaatst zijn en noemt ρ en ρ' de dichtheden resp. van de lagen C en C', zoo is $\rho \Sigma \frac{dv}{P'M}$ de potentiaal van C in het punt P' en $\rho' \Sigma \frac{dv'}{PM'}$ die van C in het punt P. Neemt men dus aan dat $a_i > a'_i$ is, zoo ligt C buiten C', en dus P' binnen C. Daaruit volgt dan, volgens de stelling van Newton, dat de componenten der kracht, door C op P' uitgeoefend, d. w. z. de differentiaalquotienten van $\rho \Sigma \frac{dv}{P'M}$ naar de coördinaten van P', nul zijn en dus $\rho \Sigma \frac{dv}{P'M}$ dezelfde waarde behoudt zoolang P' binnen C ligt en dus ook voor alle punten van het oppervlak A'. Derhalve is dan echter ook de potentiaal $\rho' \Sigma \frac{dv}{PM'}$ van C' op P constant, zoolang P corresponderend blijft met een punt van A', en dus voor alle punten van het oppervlak A, zoodat men mag zeggen:

»De potentiaal van de oneindig dunne laag C', besloten tusschen twee concentrische, gelijkvormige, gelijk geplaatste ellipsoïde-oppervlakken, is constant voor alle punten van een buiten de laag gelegen ellipsoïde-oppervlak A dat met het buitenoppervlak der laag C' confocaal is. Hare waarde is $\frac{\rho' a'_i a'_k a'_l}{\rho a_i a_k a_l} V$, indien

V de waarde is, van de potentiaal der laag C, in een willekeurig punt binnen hare binnenoppervlakte gelegen."

Heeft men nu eene tweede laag C'' analoog met C', insgelijks binnen C gelegen en besloten tusschen oppervlakken A'' en B'' confocaal met A en B, zoo is, indien a_i'', a_k'', a_l'' de halfassen van A'' zijn, de potentiaal van C'' in eenig punt van het oppervlak A, $\frac{\rho'' a_i'' a_k'' a_l''}{\rho a_i a_k a_l} V$, zoodat indien V' en V'' de potentialen van C'' en C' op eenig punt van A voorstellen, $V' : V'' = \rho' a_i' a_k' a_l' : \rho'' a_i'' a_k'' a_l''$ = de massae der lagen, zoodat men ook kan zeggen:

»De potentialen van twee oneindig dunne lagen, elke besloten tusschen twee concentrische, gelijkvormige, gelijkgeplaatste ellipsoïde-oppervlakken, wier binnen en buiten oppervlakken rsp. confocaal zijn, in een buiten haar gelegen punt, verhouden zich als de massae der lagen."

Uit deze beide stellingen omtrent de potentiaal eener laag, volgt nu gemakkelijk, het voor de oplossing noodige, omtrent de componenten der kracht, welke zij op een uitwendig punt P uitoefent. De eerste toch leert dadelijk dat de richting der kracht loodrecht is op het oppervlak A. Volgens de bekende eigenschappen der potentiaal toch, is de component van de kracht in eenige richting, gelijk aan het quotient der oneindig kleine aangroeiing der potentiaal, ontstaan door eene oneindig kleine beweging van het punt in die richting en de lengte van den daartoe afgelegden, oneindig kleinen weg. Daar deze aangroeiing steeds nul is, voor elke beweging tangentiaal aan A, zijn de componenten in die richting nul en is dus de geheele kracht gericht, volgens de normaal op A in P. Men mag dus besluiten:

De evenwichtsoppervlakken voor de aantrekking der laag, zijn de ellipsoïdeoppervlakken, welke confocaal zijn met het buitenoppervlak. Eene daarvan is het buitenoppervlak zelf, en dus is de aantrekking eener laag op een punt van het buitenoppervlak, gericht volgens de normaal in het punt zelf,

en uit de tweede stelling, in verband met de boven aangehaalde eigenschap der potentiaal,

De gelijk gerichte componenten van de krachten welke de beide

lagen C' en C'' op hetzelfde punt P uitoefenen en dus ook die krachten zelve, verhouden zich als de massae der lagen. en de krachten hebben dezelfde richting. ([45])

Het laatste gedeelte volgt ook reeds uit de eerste stelling.

Er blijft dus alleen over, de aantrekking eener laag, op een uitwendig punt te bepalen. De richting dier kracht is reeds bekend en haar intensiteit kan, door middel der laatste stelling, afgeleid worden uit die, welke op datzelfde punt wordt uitgeoefend, door een andere laag, wier buitenoppervlakte door het punt gaat.

Chasles zegt nu dat men daarvoor zou kunnen gebruik maken van eene algemeene stelling van Laplace, welke zegt dat: **Wanneer eene oneindig dunne laag van willekeurige vorm, geen werking uitoefent op een punt dat binnen haar binnenoppervlak ligt, hare aantrekking op een punt van haar buitenoppervlak, de richting heeft van de normaal in dat punt op dat vlak, en tot waarde $4\pi\rho\varepsilon$, wanneer ρ de dichtheid der laag en ε haar dikte ter plaatse van het aangetrokken punt is;** doch dat de aantrekking van de hier te beschouwen laag, zoo gemakkelijk te bepalen is, dat men van die stelling geen gebruik behoeft te maken.

([45]) Het is gemakkelijk hieruit een stelling afteleiden, welke die van Maclaurin in hare meest algemeene gedaante, als bizonder geval omvat. Laat namelijk E en E' twee confocale ellipsoïden zijn; zoo denke men zich elke daarvan ontbonden in oneindig dunne lagen, die elk tusschen twee, met het buitenoppervlak der ellipsoïde gelijkvormige oppervlakken besloten zijn; alsdan kan elke laag der eene ellipsoïde als overeenkomstig beschouwd worden, met een laag der andere, zóó dat voor beide lagen, de assen der begrenzende oppervlakken dezelfde verhouding hebben, tot die der ellipsoïden waartoe zij behooren; $a_i . a_k . a_l$, $a'_i . a'_k . a'_l$, mogen de halve assen der ellipsoiden; $na_i . na_k . na_l$; $na'_i . na'_k . na'_l$, die van twee overeenkomstige verdeelende oppervlakken zijn, zoo zullen alle paren overeenkomstige lagen evenzoo ten opzichte van elkander zijn, als de lagen C' en C''. Is nu voor de binnenoppervlakte dier lagen $n = m$, voor de buitenoppervlakte $n = m'$, zoo is het volume der eene laag $\frac{4}{3}\pi(m'^3 - m^3)\, a_i a_k a_l$, dat der andere $\frac{4}{3}\pi(m'^3 - m^3)\, a'_i a'_k a'_l$ en de verhouding der volumina dus constant. Sommeert men dus evenveel lagen van beide ellipsoïden, zoo is ook nog de stelling omtrent de componenten der krachten geldig voor lagen van eindige dikte, zoodra de dichtheid dier lagen dezelfde is voor elke twee, daartoe behoorende overeenkomstige oneindig dunne lagen.

De stelling van Maclaurin is blijkbaar hiervan het bizondere geval, waarin alle lagen der ellipsoïden gesommeerd worden (Chasles t. a. p.)

Men beschouwe namelijk (fig. 4) het punt P, gelegen op het buitenoppervlak der laag, als top van een oneindig dunnen kegel, zoo snijdt deze uit een bol, die den top tot middelpunt en de eenheid tot straal heeft, een oppervlakte-element σ uit, oneindig klein ten opzichte van ε. Uit een bol met een straal r, snijdt hij een element $r^2\sigma$; en derhalve kan het gedeelte van de laag, gelegen binnen den kegel, verdeeld gedacht worden in elementen $r^2\,\sigma\,d\,r$, die krachten $\rho\,\sigma\,d\,r$ leveren, wier resultante men verkrijgt door naar $d\,r$ tusschen behoorlijke grenzen te integreren. Zijn c, C' en C, de punten, waarin eene der beschrijvende lijnen des kegels het binnen- en buitenvlak snijdt, zoo geeft de integratie van P tot c en van C' tot C, voor die resultante de waarde $\rho\,\sigma\,(P\,c + C'\,C) = 2\,\rho.P\,c.\sigma$, omdat bij de ellipsoïde $Pc = C'\,C$ is.

Zij nu PN de normaal op de laag in het punt P, en N het punt, waar zij het binnenoppervlak voor de eerste maal snijdt; omdat dan PN oneindig klein is, heeft men $PN = Pc \cos cPN$. Daardoor wordt de resultante $2\rho\,\dfrac{PN.\sigma}{\cos cPN}$ en hare componente volgens de normaal $2\rho.\,PN.\sigma$. Om dan eindelijk de integraal dezer component voor de geheele laag te hebben, moet men deze uitdrukking naar σ integreren over het halve boloppervlak, waardoor dan voor de aantrekking der laag gevonden wordt $4\,\rho\,\pi.\,PN = 4\,\rho\,\pi\,\varepsilon$.

De dikte PN, die daarin voorkomt, kan gemakkelijk worden vervangen door eene meer geschikte grootheid. Laat men toch uit het middelpunt S eene loodlijn SQ op PN neder, zoo is, omdat PN oneindig klein is, $\triangle\ PNs'$ rechthoekig in N en dus gelijkvormig met $\triangle\ PSQ$, zoodat $PN = \dfrac{Ps'}{PS}\,PQ$ is; maar de laag is door gelijkvormige oppervlakken begrensd en derhalve is $\dfrac{Ps'}{PS} = \dfrac{dA_i}{A_i}$, indien A_i en $A_i - dA_i$ de corresponderende halfassen van buiten en binnenoppervlak zijn. Door substitutie hiervan vindt men dus voor de kracht $4\,\pi\,\rho\,\dfrac{dA_i}{A_i}\,PQ$.

Heeft men nu een oneindig dunne laag van constante dichtheid ρ_1, even als de eerste besloten tusschen gelijkvormige oppervlakken, terwijl binnen en buitenoppervlak resp. confocaal zijn met het binnen en buitenoppervlak der eerste, zoo zal, indien de tweede laag binnen de eerste ligt, en haar buitenoppervlak tot halfassen heeft b_i, b_k, b_l, de aantrekking dier laag op P volgens het voorgaande zijn $4\pi\rho_1 \frac{dA_i}{A_i} \cdot \frac{b_i b_k b_l}{A_i A_k A_l} PQ$, of omdat volgens het vroeger bewezene ook $dA_i : db_i = A_i : b_i$ is, $4\pi\rho_1 . \frac{b_i b_k b_l}{A_i A_k A_l} . PQ . \frac{db_i}{b_i}$.

Men ziet bovendien licht in, dat $PQ = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{A_k^4} + \frac{p_l^2}{A_l^4}\right)}}$

en dus de aantrekking ook $4\pi\rho_1 . \frac{b_k b_i}{A_i A_k A_l \sqrt{\left(\frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{A_k^4} + \frac{p_l^2}{A_l^4}\right)}} db_i$ is.

Om nu door middel van deze uitdrukking de aantrekking eener ellipsoïde $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ op een daarbuiten gelegen punt P, welks coördinaten p_i, p_k, p_l, zijn te bepalen, denke men zich weder de ellipsoide door oneindig dicht op elkander volgende, met het oppervlak gelijkvormige oppervlakken, verdeeld in lagen van denzelfden aard als de bovenstaanden. Daaruit volgt dan dat voor elke laag $b_k = b_i \frac{a_k}{a_i}$; $b_l = b_i \frac{a_l}{a_i}$; $A_k^2 = A_i^2 - e_k^2 b_i^2$; $A_l^2 = A_i^2 - e_l^2 b_i^2$ is, waarin e_k en e_l dezelfde beteekenis hebben, als vroeger, terwijl A_i^2 even als boven, de grootste wortel is van de vergelijking

$$\frac{p_i^2}{A_i^2} + \frac{p_k^2}{A_i^2 - e_k^2 b_i^2} + \frac{p_l^2}{A_i^2 - e_l^2 b_i^2} = 1 .$$

Is dan voor elke laag, de dichtheid ρ constant gegeven, als functie $f\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ van het quotient van de grootste as b_i der laag en de grootste as a_i der ellipsoïde, zoo wordt de geheele aantrekking, gericht volgens de normaal op het oppervlak $\Sigma \frac{x_i^2}{A_i^2} = 1$ in P,

$$F = \frac{4\pi a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{a_i} \frac{f\left(\frac{b_i}{a_i}\right) b_i^2 db_i}{A_i \sqrt{(A_i^2 - e_k^2 b_i^2)(A_i^2 - e_l^2 b_i^2)} \left(\frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{(A_i^2 - e_k^2 b_i^2)^2} + \frac{p_l^2}{(A_i^2 - e_l^2 b_i^2)^2}\right)}.$$

Nu is de cosinus van den hoek, welke de normaal in P op het oppervlak $\Sigma \frac{x_i^2}{A_i^2} = 1$ met de x_i as maakt, $\frac{p_i}{A_i^2 \triangle}$, waarin

$$\triangle^2 = \frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{A_k^4} + \frac{p_l^2}{A_l^4} = \frac{p_i^2}{A_i^4} + \frac{p_k^2}{(A_i^2 - e_k^2 b_i^2)^2} + \frac{p_l^2}{(A_i^2 - e_l^2 b_i^2)^2},$$

terwijl de cosinussen der hoeken met de x_k en x_l assen zijn

$$\frac{p_k}{A_k^2 \triangle} \text{ en } \frac{p_l}{A_l^2 \triangle} \text{ zoodat}$$

$$F_i = \frac{4\pi p_i a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{a_i} \frac{f\left(\frac{b_i}{a_i}\right) b_i^2 \, d b_i}{A_i^3 \triangle^2 \sqrt{(A_i^2 - e_k^2 b_i^2)(A_i - e_l^2 b_i^2)}} \text{ is.}$$

Deze uitdrukking wordt eenvoudiger, indien men b_i door eene nieuwe veranderlijke $x = \frac{b_i}{A_i}$ vervangt. Alsdan is $dx = \frac{A_i db_i - b_i dA_i}{A_i^2}$, terwijl uit de betrekking tusschen A_i en b_i volgt, $A_i \triangle^2 d A_i = \left(\frac{e_k^2 p_k^2}{A_k^4} + \frac{e_l^2 p_l^2}{A_l^4}\right) b_i \, d b_i$; zoodat $\frac{d b_i}{A_i^3 \triangle^2} = dx$ is. Substitueert men deze waarden in de uitdrukking voor F_i, zoo worden de grenzen 0 en $\frac{a_i}{A_i}$, waarin A_i de waarde dier grootheid is voor $b_i = a_i$ en dus:

$$F_i = \frac{4\pi p_i a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{\frac{a_i}{A_i}} \frac{\rho \, x^2 \, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2 x^2)(1 - e_l^2 x^2)}}.$$

Is hierin ρ over de geheele ellipsoïde constant, zoo is

$$F_i = \frac{4\pi p_i a_k a_l \rho}{a_i^2} \int_0^{\frac{a_i}{A_i}} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{(1 - e_k^2 x^2)(1 - e_l^2 x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

De betrekking tusschen b_i en A_i eindelijk levert:

$$\frac{b_i^2}{a_i^2} = x^2 \left\{ \frac{p_i^2}{a_i^2} + \frac{p_k^2}{a_i^2(1 - e_k^2 x^2)} + \frac{p_l^2}{a_i^2(1 - e_l^2 x^2)} \right\},$$

zoodat indien als boven $\rho = f\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ is, men verkrijgt

$$F_i = \frac{4\pi p_i a_k a_l}{a_i^2} \int_0^{\frac{a_i}{A_i}} \frac{f\left\{x\sqrt{\left(\frac{p_i^2}{a_i^2} + \frac{p_k^2}{a_i^2(1-e_k^2x^2)} + \frac{p_l^2}{a_l^2(1-e_l^2x^2)}\right)}\right\} x^2dx}{\sqrt{(1-e_k^2x^2)(1-e_l^2x^2)}} \tag{66}$$

terwijl uit beiden de vorm voor een laag van eindige dikte tusschen gelijkvormige oppervlakken besloten, verkregen wordt door de onderste grens 0 te vervangen door de verhouding van de grootste assen van het binnenoppervlak en het daarmede confocale oppervlak, dat door P gaat.

Gelijke uitdrukkingen zullen natuurlijk ook voor F_k en F_l gevonden worden. De vormen (65) gaan in (55) over, door $\rho = 1$ te stellen en x te vervangen door $\frac{a_i}{A_i}x$.

Op deze wijze is dus door Chasles de oplossing langs meetkundigen weg verricht. Tegen deze handelwijze is echter alleen in te brengen dat de berekening van de aantrekking door eene oneindig dunne ellipsoïdische laag op een punt van haar buitenoppervlak uitgeoefend, onzeker is door de wijze waarop zij door Chasles is gedaan. Immers de daar voorkomende vergelijking $PN = Pc \cos CPN$, waarop de geheele bewerking berust, is alleen klaar, zoo lang $\angle c\, PN$ klein is en wordt zeer twijfelachtig zoodra Pc in de nabijheid komt van den uit P aan de binnenoppervlakte getrokken raakkegel, daar voor de stralen van dien raakkegel zelve nagenoeg $PN = \frac{1}{2} Pc \cos CPN$ is, waarvan natuurlijk ook weinig afgeweken wordt voor stralen nabij den raakkegel. Een nauwkeurig bewijs van de waarheid der formule $4\pi\rho\varepsilon$, voor de waarde dier aantrekking. vindt men opgegeven bij Resal, in diens »Traité élémentaire de mécanique céleste." Daar dit echter minder in overeenstemming is met de meetkundige oplossingswijze van Chasles, willen wij liever het bewijs overnemen van de aangehaalde algemeene stelling van Laplace, zooals dit door Poisson (Mémoire sur la distribution de l' électricité à la surface des corps conducteurs, Mém. de l' Inst. 1811, pag. 30) wordt geleverd, in eenigzins meer algemeene vorm, dan het hem door Laplace was medegedeeld.

Men denke zich eene oneindig dunne, vaste of vloeibare laag van willekeurige vorm, en van eene dichtheid $= 1$, neme een punt P op het buitenoppervlak aan, en richte aldaar eene normaal op dat oppervlak op, welke het binnenoppervlak snijdt in een punt N, stelle door ε de dikte PN, door R en R' de componenten in de richting dier normaal voor, van de krachten door de laag uitgeoefend, op stoffelijke punten met eene dichtheid 1 in P en N gelegen, zoo is altijd $R—R' = 4\,\pi\,\varepsilon$. Om dit te bewijzen, brenge men door N een vlak loodrecht op PN, zoo verdeelt dit de laag in twee segmenten; dat waarin de pijl PN ligt, is oneindig klein ten opzichte van het andere, maar hunne werkingen in P of in N, zijn toch vergelijkbaar en van dezelfde orde. Men noeme S de werking van het groote, s die van het kleine segment op het punt N volgens de richting PN, en stelle ter meerdere bepaling, dat deze werkingen ontstaan, door de aantrekkingen van alle punten der laag op het punt N, zoodat dit punt van buiten naar binnen wordt getrokken, ten gevolge der overmaat $S—s$, zoodat men heeft, $R' = S—s$. Verwaarloost men dan oneindig kleinen, van de tweede orde met betrekking tot ε, zoo is de aantrekking van het groote segment op P gelijk aan die op N; met een weinig oplettendheid, overtuigt men zich, dat ook het verschil der krachten, door het kleine segment op P en N uitgeoefend, oneindig klein is ten opzichte dier krachten zelve, zoodat P van buiten naar binnen wordt getrokken, met eene kracht, gelijk aan de som van S en s, waaruit dus volgt $R = S + s$, en derhalve $R - R' = 2\,s$.

Er blijft dus slechts over de waarde van s te bepalen. Daartoe denke men zich op het verlengde van PN, aan de zijde van N, een willekeurig punt C, en beschrijve, uit dat punt als middelpunt, twee door P en N gaande boloppervlakken, zoo verkrijgt men eene spherische laag van constante dikte ε; hare aantrekking op het daar binnen gelegen punt N is nul, die op het buitengelegen punt P is dezelfde, alsof de geheele massa in C vereenigd ware, dus $= 4\,\pi\,\varepsilon$, zoodat voor die laag $R' = 0$, $R = 4\,\pi\,\varepsilon$ en derhalve indien s' voorstelt de aantrekking in P, uitgeoefend door het segment der bolvormige laag, gelegen om de pijl PN, $2\,s' = R—R' = 4\,\pi\,\varepsilon, s' = 2\,\pi\,\varepsilon$. Brengt men nu door de lijn PC een oneindig aantal vlakken, die het segment in oneindig vele deelen verdeelen, en noemt α de hoek van twee opvolgende vlakken, zoo is de aantrekking van het binnen den hoek α besloten deel, in de richting der normaal, in rede tot s' als $\alpha : 2\pi$ en heeft dus tot waarde $\alpha\,\varepsilon$; daar deze nu onafhankelijk is van den straal PC, volgt daaruit dat $s' = s$ zal zijn. Inderdaad zal men door de stralen voor de verschillende deelen van het bolvormig segment verschillend te nemen, elke daarvan kunnen doen samenvallen, met het overeenkomstige deel van het oorspronkelijke segment en zal dus de som hunner aantrekkingen, die van dit segment leeren kennen; doch daar de partiele aantrekkingen onafhankelijk zijn van deze variatiën van den straal, zal hare som steeds s' en dus $s = s' = 2\pi\varepsilon$ zijn.

Door substitutie daarvan in de vergelijking $R - R' = 2s$ vindt men vervolgens $R - R' = 4\pi\varepsilon$, en eindelijk, indien de dichtheid in de geheele laag ρ is, zal de kracht in P, $4\pi\rho\varepsilon$ zijn, zoodra $R' = 0$ is, m. a. w. zoodra de laag geene werking uitoefent op een binnen haar gelegen punt.

Door deze aanvulling is nu de meetkundige oplossing volledig, zoodat ook in dien zin niets meer te doen blijft, daar bezwaarlijk eene meer eenvoudige wijze van meetkundige behandeling te vinden zou zijn.

HOOFDSTUK VI.

METHODE VAN LEJEUNE-DIRICHLET.

Het eenige van groote beteekenis, dat nog na dien tijd voor dit vraagstuk is gedaan, is van Dirichlet afkomstig. Hem is het namelijk gelukt, eene analitische oplossing te vinden waarbij men, gedurende de herleiding van de integraalvormen niet er op behoeft te letten, of het punt binnen of buiten de aantrekkende ellipsoïde ligt. Dirichlet heeft deze methode bekend gemaakt in zijne beroemde verhandeling: »Ueber eine neue Methode, die Werthe vielfacher Integrale zu finden" (Abhandlungen der königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1839, of Liouville's Journal. Tome IV).

Hij behandelt daarin eene homogene ellipsoïde, maar eene kracht van aantrekking, welke omgekeerd evenredig is met de p^e macht van den afstand der elkander aantrekkende stoffelijke punten, zijnde $2 \leqq p \leqq 3$.

Behoudt men de vroeger gebruikte notatiën, zoo is in die onderstelling:

$$F_i = \int\int\int \rho \frac{x_i - p_i}{r} \cdot \frac{1}{r^p} dx_i dx_k dx_l ; \; F_k = \int\int\int \rho \frac{x_k - p_k}{r} \cdot \frac{1}{r^p} dx_i dx_k dx_l ,$$

$$F_l = \int\int\int \rho \frac{x_l - p_l}{r} \cdot \frac{1}{r^p} dx_i dx_k dx_l .$$

Stelt men nu $F = \frac{1}{p-1} \int\int\int \rho \frac{dx_i dx_k dx_l}{r^{p-1}}$, en strekt de integratien bij al de bovenstaande integralen over de geheele ellipsoïde uit, tengevolge waarvan de grenzen onafhankelijk blijvenvan p_i, p_k en p_l, zoo is, in het oog houdend dat steeds $r^2 = \Sigma (x_i - p_i)^2$ is,

$$F_i = \frac{\delta T}{\delta p_i},\ F_k = \frac{\delta T}{\delta p_k},\ F_l = \frac{\delta T}{\delta p_l},$$

hetgeen door enkele differentiatie in te zien is.

Men behoeft dus enkel de bepaling van de zoogenaamde krachtfunktie T (welke voor $p = 2$ samenvalt met de vroeger gebruikte potentiaal V) uitgestrekt over alle waarden van x_i, x_k en x_l voor welke $\Sigma \frac{x_i^2}{a_i^2} = \lambda < 1$ is.

Dirichlet's methode ter verkrijging van T bestaat nu daarin, dat men elk element van den integraal vermenigvuldigt met een zoogenaamden discontinuïteitsfaktor, die, van λ afhangend, de eigenschap heeft van voor $\lambda < 1$ de waarde 1 en voor $\lambda > 1$ de waarde 0 te hebben. Na die vermenigvuldiging mogen dan de veranderlijken x_i, x_k en x_l allen tusschen $-\infty$ en $+\infty$ variëren, omdat alsdan alle systemen van waarden welke $\lambda < 1$ zouden maken en die niet mogen worden medegerekend, van zelve wegvallen, wegens het verdwijnen van den discontinuïteitsfaktor.

Dirichlet neemt voor dezen den vorm aan $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\lambda\varphi\, d\varphi$, welke zooals men weet, voor $\lambda^2 < 1$ de waarde 1, voor $\lambda^2 = 1$ de waarde $\frac{1}{2}$, voor $\lambda^2 > 1$ de waarde 0 heeft. (46)

Door deze vermenigvuldiging wordt dan (47)

$$F = \frac{2\,p}{(p-1)\,\pi} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{r^{p-1}} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\lambda\varphi\, d\varphi.$$

In deze vorm is nu F nog niet gemakkelijker te behandelen. Zij wordt zulks echter wel, indien men gebruik maakt van de formule

(46) Zie Bierens de Haan. Tables d' Intégrales definies Table 150 No. 8.

(47) Voor $\lambda = 1$ is de discontinuiteitsfaktor wel is waar slechts $\frac{1}{2}$, maar omdat daarbij alleen één oneindig dunne laag der ellipsoide aan haar oppervlak behoort, heeft dit geen invloed op het eindresultaat.

$$\frac{1}{r^{p-1}} = \frac{e^{(1-p)\frac{\pi i}{4}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{r^2\psi i} \psi^{\frac{p-3}{2}} d\psi, \; 0 < \frac{p-1}{2} < 1, \; i = \sqrt{-1}.$$

welke het eerst in meer algemeene vorm door EULER bij inductie is afgeleid (Integral Rechnung Band 4) ([48]).

Bedenkt men daarbij dat $\frac{p-1}{2}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$ is, zoo is nu

$$T = \frac{e^{(1-p)\frac{\pi i}{4}} \rho}{\pi \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx_i dx_k dx_l \iint_0^\infty e^{r^2\psi i} \varphi^{\frac{p-3}{2}} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\lambda\varphi \, d\psi \, d\varphi$$

Men stelle nu hierin voor x_i in de plaats $a_i x_i$ enz. zoo wordt $r^2 = \Sigma (p_i - a_i x_i)^2$, $\lambda = \Sigma x_i^2$, en indien men in het oog houdt dat $\cos\lambda\varphi$ het reëele gedeelte van $e^{\lambda\varphi i}$ is, en kortheidshalve in plaats van $=$ met bijvoeging de woorden »het reëele deel van", het teeken $\underset{r}{=\!\!\!\!/}$ gebruikt:

$$T \underset{r}{=\!\!\!\!/} \frac{\rho a_i a_k a_l e^{(1-p)\frac{\pi i}{4}}}{\pi \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx_i dx_k dx_l \iint_0^\infty e^{(r^2\psi + \lambda\varphi) i} \psi^{\frac{p-3}{2}} \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\psi d\varphi$$

In deze vorm nu zijn de grenzen der integratien alle constant, en mag dus de orde daarvan omgekeerd worden.

Men integrere dus eerst naar x_i, x_k en x_l hetgeen de bepaling vordert van de integraal

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{\{\psi \Sigma (p_i - a_i x_i)^2 + \varphi \Sigma x_i^2\} i} dx_i \, dx_k \, dx_l = U.$$

Daartoe merkt men op dat:

$$e^{\{\psi \Sigma (p_i - a_i x_i)^2 + \varphi \Sigma x_i^2\} i} = e^{(p_i^2 + p_k^2 + p_l^2)\psi i} \times E_i \times E_k \times E_l$$

zijnde $E_i = e^{\{(a_i^2\psi + \varphi) x_i^2 - 2 p_i a_i \psi x_i\} i}$ enz.

en dus $U = e^{(p_i^2 + p_k^2 + p_l^2)\psi i} \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_i dx_i \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_k dx_k \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_l dx_l.$

([48]) Zie BIERENS DE HAAN. t. a. p. Table 81. No. 1 en 2.

$$\text{Maar} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i dx_i = \sqrt{\frac{\pi}{a_i^2\psi+\varphi}}\, e^{\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{p_i^2 a_i^2 \psi^2}{a_i^2\psi+\varphi}\right\} i} \quad \ldots\ldots (u)\text{[49]}$$

en dus

$$U = \frac{\pi^{3/2} e^{3/4 \pi i} e^{\sigma i}}{\sqrt{(a_i^2\psi+\varphi)(a_k^2\psi+\varphi)(a_l^2\psi+\varphi)}}$$

waarin

$$\sigma = p_i^2\psi - \frac{p_i^2 a_i^2 \psi^2}{a_i^2\psi+\varphi} + p_k^2\psi - \frac{p_k^2 a_k^2\psi^2}{a_k^2\psi+\varphi} + p_l^2\psi - \frac{p_l^2 a_l^2 \psi^2}{a_l^2\psi+\varphi} =$$

$$= \left\{ \frac{p_i^2}{a_i^2\psi+\varphi} + \frac{p_k^2}{a_k^2\psi+\varphi} + \frac{p_l^2}{a_l^2\psi+\varphi} \right\} \psi\varphi$$

is, zoodat men verkrijgt:

$$T \neq \frac{\rho a_i a_k a_l \sqrt{\pi}\, e^{(4-p)\frac{\pi i}{4}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int\!\!\int_0^\infty \frac{e^{\sigma i}\, \psi^{\frac{p-1}{2}} \sin\varphi}{\varphi \sqrt{(a_i^2\psi+\varphi)(a_k^2\psi+\varphi)(a_l^2\psi+\varphi)}}\, d\psi d\varphi.$$

Vervangt men nu hierin ψ door een nieuwe veranderlijke ϑ volgens de vergelijking $\psi = \frac{\varphi}{\vartheta}$, waardoor $d\psi = -\frac{\varphi\, d\vartheta}{\vartheta^2}$ en

$\sigma = \varphi \Sigma \frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta} = \varphi t$ wordt, zoo is na omkeering der grenzen ∞ en 0 van ϑ,

$$T \neq \frac{\rho a_i a_k a_l \sqrt{\pi}.e^{(4-p)\frac{\pi i}{4}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int\!\!\int_0^\infty \frac{e^{t\varphi i}\, \varphi^{\frac{p-3}{2}} \sin\varphi d\vartheta d\varphi}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1} \sqrt{(a_i^2+\vartheta)(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \quad \ldots (67)$$

$$\frac{\delta T}{\delta p_i} \neq \frac{2p_i \rho a_i a_k a_l \sqrt{\pi}\, e^{(4-p)\frac{\pi i}{4}}\, i}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int\!\!\int_0^\infty \frac{e^{t\varphi i} \varphi^{\frac{p}{2}-2} \sin\varphi d\vartheta d\varphi}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1} \sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}.$$

Maar ook is $\sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}$ en $e^{\pi i} = -1$, dus

---

([49]) Zie Bierens de Haan t. a. p, Table 28 No. 2.

$$\frac{\delta T}{\delta p_i} = \pm \frac{p_i \rho a_i a_k a_l \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{p\pi i}{4}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1} \sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty e^{(t+1)\varphi i} \varphi^{\frac{p-2}{2}-1} d\varphi - \int_0^\infty e^{(t-1)\varphi i} \varphi^{\frac{p-2}{2}-1} d\varphi \right\}$$

Nu is $t+1$ steeds positief en dus, volgens de reeds boven (bl. 181) aangehaalde formule,

$$\int_0^\infty e^{(t+1)\varphi i} \varphi^{\frac{p-2}{2}-1} d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}}\, e^{\frac{p-2}{4}\pi i},\quad 0 < \frac{p-2}{2} < 1;$$

$t-1$ echter, kan positief of negatief zijn en dus is, onder dezelfde voorwaarden voor p,

$$\int_0^\infty e^{(t-1)\varphi i} \varphi^{\frac{p-2}{2}-1} d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\left\{\pm(t-1)\right\}^{\frac{p-2}{2}}}\, e^{\pm\frac{p-2}{4}\pi i},\ t \gtrless 1$$

zoodat voor het verschil dier beide integralen gevonden wordt:

$$\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) e^{\frac{p-2}{4}\pi i} \left(\frac{1}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{1}{(t-1)^{\frac{p-2}{2}}}\right) \text{voor } t > 1$$

$$\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) \left(\frac{e^{\frac{p-2}{4}\pi i}}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{e^{-\frac{p-2}{4}\pi i}}{(1-t)^{\frac{p-2}{2}}}\right) \text{voor } t < 1.$$

Vermenigvuldigt men nu beide met den faktor $e^{-\frac{p\pi i}{4}}$ en bedenkt dat $e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$ en

$$e^{-\frac{p-2}{2}\pi i} = \cos\frac{p-1}{2}\pi - i\sin\frac{p-1}{2}\pi = \sin\frac{p\pi}{2} - i\sin\frac{p-1}{2}\pi$$

is, zoo gaan zij over in:

$$i\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\left(\frac{1}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{1}{(t-1)^{\frac{p-2}{2}}}\right) \text{ en}$$

$$\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\left(-\frac{i}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{e^{-\frac{p-2}{2}\pi i}}{(1-t)^{\frac{p-2}{2}}}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) \left\{ i\left(-\frac{1}{(t+1)^{\frac{p-2}{2}}} + \frac{\sin\frac{p-1}{2}\pi}{(1-t)^{\frac{p-2}{2}}}\right) - \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{(1-t)^{\frac{p-2}{2}}} \right\}.$$

Deze beide vormen leeren nu, dat het reëele gedeelte van $\frac{\delta T}{\delta p_i}$

alleen afkomstig is van zoodanige waarden van ϑ, voor welke $t < 1$ is, zoodat, indien de integratie uitgestrekt wordt tusschen zoodanige grenzen waarvoor zulks het geval is,

$$\frac{\delta T}{\delta p_i}=\frac{p_i \rho\, a_i a_k a_l \sqrt{\pi} \sin\frac{p\pi}{2}\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int\frac{\left(1-\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{p}{2}}d\vartheta}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}$$

is, of omdat voor $0 < a < 1, \Gamma(a).\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$ en dus

$$\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{p-2}{2}\pi}=-\frac{\pi}{\sin\frac{p\pi}{2}} \text{ is,}$$

$$\frac{\delta T}{\delta p_i}=-\frac{p_i\rho a_i a_k a_l \pi\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)}\int\frac{\left(1-\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{p}{2}}d\vartheta}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}$$

Bij de bepaling van de grenzen der integratie, naar de volgens haar ontstaan steeds positieve veranderlijke ϑ, is het nu voor het eerst noodig, onderscheid te maken, tusschen de standen van het punt, ten opzichte der ellipsoïde.

Ligt P toch binnen de ellipsoïde, zoo is $t < 1$, voor elke positieve waarde van ϑ en dus in dat geval:

$$F_i=-\frac{p_i\rho a_i a_k a_l \pi\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\left(1-\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{p}{2}}d\vartheta}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \quad (68)$$

Ligt daarentegen P buiten de ellipsoide zoo is $t=\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta}<1$ voor alle waarden van $\vartheta > s^2$, zijnde even als op bl. 164.

$s^2=A_i^2-a_i^2=A_k^2-a_k^2=A_l^2-a_l^2$,

waarin ook A_i, A_k, A_l, evenals vroeger, de halfassen zijn der ellipsoïde welke door P gaat en met de aantrekkende confocaal is. Voor dit geval wordt derhalve

$$F_i=-\frac{p_i\rho a_i a_k a_l \pi\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)}\int_{s^2}^\infty\frac{\left(1-\Sigma\frac{p_i^2}{a_i^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{p}{2}}d\vartheta}{\vartheta^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}$$

Stelt men daarin $\vartheta = s^2 + y$, zoo zijn de grenzen voor y nu 0 en ∞, terwijl $d\vartheta = dy$ is en dus

$$F_i = -\frac{p_i \rho a_i a_k a_l \pi \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \Sigma \frac{p_i^2}{(A_i^2+y)}\right)^{1-\frac{p}{2}} dy}{(s^2+y)^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(A_i^2+y)^3(A_k^2+y)(A_l^2+y)}} \qquad (69)$$

Men kan uit deze formule gemakkelijk een bewijs van de stelling van Ivory putten, waaruit dan tevens blijkt dat deze niet enkel voor $p = 2$ geldt. Men heeft namelijk

$$\frac{\left(1 - \Sigma \frac{p_i^2}{A_i^2+y}\right)^{1-\frac{p}{2}}}{(s^2+y)^{\frac{p}{2}-1}} = \left\{s^2 + y - \Sigma \frac{p_i^2\,(A_i^2 - a_i^2 + y)}{A_i^2 + y}\right\}^{1-\frac{p}{2}}$$

eene vorm die, door $\frac{a_i}{A_i} p_i = p'_i$ te stellen, waardoor $\Sigma \frac{p'^2_i}{a'^2_i} = 1$ is en p'_i de coördinaten zijn, van het met P corresponderende punt P' van de confocale aantrekkende ellipsoïde, overgaat in

$$\left\{\Sigma(A_i^2 - a_i^2)\frac{p_i^2}{A_i^2} + y - \Sigma \frac{p_i^2\,(A_i^2 - a_i^2 + y)}{A_i^2+y}\right\}^{1-\frac{p}{2}} =$$

$$= \left\{\Sigma p_i^2 - \Sigma p_i'^2 + y - \Sigma p_i^2 + \Sigma \frac{A_i^2\,p'^2_i}{A_i^2+y}\right\}^{1-\frac{p}{2}} = \left\{y - y\Sigma \frac{p_i'^2}{A_i^2+y}\right\}^{1-\frac{p}{2}} =$$

$$= y^{1-\frac{p}{2}}\left\{1 - \Sigma \frac{p'^2_i}{A_i^2+y}\right\}^{1-\frac{p}{2}}$$

zoodat nu

$$F_i = -\frac{A_i}{a_i}\frac{p_i' \rho a_i a_k a_l \pi \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left\{1 - \Sigma \frac{p_i'^2}{A_i^2+y}\right\}^{1-\frac{p}{2}} dy}{y^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{(A_i^2+y)^3(A_k^2+y)(A_l^2+y)}}$$

waaruit dus blijkt dat de aantrekking, door de ellipsoïde in de richting der as a_i uitgeoefend op het punt P, het produkt is van $\frac{A_i}{a_i}$ met de component in dezelfde richting, van de aantrekking van de ellipsoïde $\Sigma \frac{x_i^2}{A_i^2}$ 1 op het daar binnen gelegen punt P', zijnde juist de stelling door Ivorij ontdekt.

De formulen (68) en (69) gelden. ten gevolge der ingevoerde beperkingen, alleen voor waarden van p, welke 2 en 3 niet overschrijden.

Deze grenzen kunnen echter eenigzins uitgebreid worden, door optemerken dat men voor elke waarde van p heeft:

$$F_i = \frac{\rho}{p-1} \frac{\delta \int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{r^{p-1}}}{\delta p_i} = \frac{\delta \frac{\rho}{p-1} \int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{r^{p-1}}}{\delta p_i}.$$

Stelt men nu

$$\frac{1}{p-1} \int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{r^{p-2}} = v_{p-1} \text{ en } \frac{1}{p+1} \int \frac{dx_i\, dx_k\, dx_l}{r^{p+1}} = v_{p+1}$$

zoo ziet men gemakkelijk in dat steeds:

$$v_{p+1} = \frac{1}{(p-2)(p+1)} \left\{ \frac{\delta^2 v_{p-1}}{\delta p_i^2} + \frac{\delta^2 v_{p-1}}{\delta p_k^2} + \frac{\delta^2 v_{p-1}}{\delta p_l^2} \right\},$$

zoodat F_i, voor waarden van p, gelegen tusschen 4 en 5 enz. uit die voor p tusschen 2 en 3 kan worden afgeleid.

Voor $p = 2$ gaan de formulen (68) en (69) over in

$$F_i = -2 p_i \rho a_i a_k a_l \pi \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}$$

en

$$F_i = -2 p_i \rho a_i a_k a_l \pi \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{(A_i^2+y)^3 (A_k^2+y)(A_l^2+y)}}$$

welke respective door de substitutien $a_i^2 + \vartheta = \frac{a_i^2}{x^2}$ en $A_i^2 + y = \frac{A_i^2}{x^2}$, de vormen aannemen:

$$F_i = -4\pi \rho p_i a_k a_l \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\{a_i^2 - (a_i^2 - a_k^2)x^2\}\{a_i^2 - (a_i^2 - a_l^2)x^2\}}} \quad (70)$$

en

$$F_i = -\frac{4\pi \rho p_i a_i a_k a_l}{A_i} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\{A_i^2 - (A_i^2 - A_k^2)x^2\}\{A_i^2 - (A_i^2 - A_l^2)x^2\}}} =$$

$$= -\frac{4\pi \rho p_i a_i a_k a_l}{\sqrt{(a_i^2+s^2)}} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\{a_i^2 + s^2 - (a_i^2 - a_k^2)x^2\}\{a_i^2 + s^2 - (a_i^2 - a_l^2)x^2\}}} \quad (71)$$

welke voor $\rho = 1$, blijkbaar overeenkomen met de eersten der formulen (60) en (63).

Deze formulen voor $p = 2$ kunnen echter gemakkelijker verkregen worden ([50]) door onmiddelijk $p = 2$ te stellen en dan

([50]) Schlömilch, Attractionscalcul pag. 34. Halle 1851.

zelfs indien men ρ niet als constant beschouwt, maar onderstelt dat $\rho = f(\lambda)$ is, m. a. w, indien men de ellipsoïde weder denkt te bestaan uit homogene lagen, besloten tusschen oneindig dicht bij elkander gelegen oppervlakken, gelijkvormig met het buitenoppervlak.

Men kan dan namelijk in plaats van den vroeger gebruikten discontinuïteitsfaktor een anderen

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \lambda\, \varphi\, d\varphi \int_0^1 f(x) \cos \varphi\, x\, dx.$$

gebruiken, welke voor $\lambda > 1$ nul wordt, voor $\lambda = 1$ de waarde $\frac{1}{2} f(\lambda)$ en voor $\lambda < 1$ de waarde $f(\lambda)$ heeft. ([51])

Men ziet licht in, dat bij de toepassing daarvan, in formule (67) enkel de factor $\frac{\rho \sin \varphi}{\varphi}$ door $\int_0^1 f(x) \cos \varphi\, x\, dx$ (welke voor $f(x) = \rho$ daarin overgaat) vervangen en $p = 2$ gesteld behoeft te worden, waardoor zij de vorm verkrijgt.

$$T_l = \pm 2 a_i a_k a_l e^{\frac{\pi i}{2}} \overline{\int\int_0^\infty} \frac{e^{t\varphi i}\, d\vartheta\, d\varphi}{\varphi \sqrt{(a_i^2+\vartheta)(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \int_0^1 f(x) \cos \varphi x dx.$$

Hier is nu

$$e^{(t\varphi + \frac{\pi}{2})i} = \cos\left(t\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(t\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t\varphi + i \cos t\varphi$$

en dus met weglating van het imaginaire gedeelte

$$T = -2 a_i a_k a_l \overline{\int\int_0^\infty} \frac{\sin t\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{\varphi \sqrt{(a_i^2+\vartheta)(a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \int_0^1 f(x) \cos \varphi x dx$$

en derhalve

$$\frac{\delta T}{\delta p_i} = -4 a_i a_k a_l p_i \overline{\int\int_0^\infty} \frac{\cos t\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \int_0^\infty f(x) \cos \varphi x dx =$$

$$= -4 a_i a_k a_l p_i \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}} \left\{ \int_0^\infty \cos t\varphi\, d\varphi \int_0^1 f(x) \cos \varphi\, x\, dx \right\}$$

([51]) Zie Bierens de Haan. Exposé de la theorie des Integrales definies. pag. 51 en volg. Overigens geldt hier dezelfde opmerking als in Noot (47) omtrent de waarde voor $\lambda = 1$.

een vorm, waarin blijkbaar alle elementen waarin $t > 1$ is, wegvallen en dus de grenzen voor ϑ slechts behoeven uitgestrekt te worden over die waarden, waarvoor $t < 1$ is, en waarbij dan $\int_0^\infty \cos t\varphi d\varphi \int_0^1 (f(x) \cos \varphi x\, dx = f(t)$ wordt. Ligt dus P binnen de ellipsoïde, zoo zijn de grenzen weder 0 en ∞, en dus

$$F_i = -2\pi a_i a_k a_l p_i \int_0^\infty \frac{f(t)\, d\vartheta}{\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)(a_l^2+\vartheta)}}$$

terwijl de grenzen weder zijn s^2 en ∞, wanneer P buiten de ellipsoïde gelegen is, zoodat alsdan

$$F_i = -2\pi a_i a_k a_l p_i \int_{s^2} \frac{f(t)\, d\vartheta}{\sqrt{(a_i^2+\vartheta)^3 (a_k^2+\vartheta)^3 (a_l^2+\vartheta)}}$$

is.

Beide formulen kunnen natuurlijk op dezelfde wijze omgevormd worden als vroeger.

In het voorgaande zijn de voornaamste methoden onderzocht, door welke het vraagstuk der aantrekking eener ellipsoïde op een willekeurig gelegen punt, is opgelost. Het eindresultaat van het onderzoek is, dat de componenten steeds kunnen worden uitgedrukt door elliptische integralen, wier waarde, in bepaalde gevallen, door bekende benaderingsmethoden kan worden gevonden. Zijn twee assen der ellipsoïde gelijk, zoo kunnen de integratiën verricht en de componenten voorgesteld worden, door cyclometrische of logarithmische functien, naar gelang de derde as kleiner of grooter is dan de beide gelijken.

Zeer veel is nog over dit vraagstuk geschreven, echter meestal van aanvullenden aard, of met het doel de uitkomsten toe te passen op meer omvattende vraagstukken. Tot de aanvullingen behoort bijvoorbeeld, de ontwikkeling der verkregen eindformules in convergerende reeksen; de omvormingen daarvan voor niet homogene ellipsoïden, bij verschillende wetten van variatie der dichtheid enz. Als toepassingen doen zich natuurlijk vooral de problemen voor, welke in den aanvang als aanleidingen voor het ontstaan van dit vraagstuk zijn genoemd; waarbij nog vele anderen kunnen gevoegd worden, zoovals b.v. de theorie van het evenwicht der vloeistoffen, onder de inwerking der aantrekking harer eigen deelen en van uitwendige krachten, de aantrekkingen van twee ellipsoïden onderling, die der lichamen van het zonnestelsel, de invloeden daarvan op den loopbaan der maan, enz. enz. Het behoort natuurlijk niet in dit geschrift te huis, daarop ook maar in het minste integaan.

Alleen moge ten slotte nog een overzicht van den inhoud van het voorgaande gegeven worden.

Newton bewijst zijne stellingen geheel langs den weg van meetkundige verdeeling in oneindig kleine deeltjes en stelt alle integralen voor, in de vorm van inhouden van vlakke figuren, begrensd door kromme lijnen, die met de te berekenen grootheden op bepaalde wijze samenhangen. Zijne uitkomsten omvatten, het bewijs der naar hem genoemde stelling betreffende inwendig gelegen punten en de bepaling van de verhouding der aantrekking eener omwentelingsellipsoïde, op een punt, gelegen in het verlengde der as, tot die op hetzelfde punt uitgeoefend, door den bol, welke de as tot middellijn zou hebben.

Ook bij Maclaurin zijn nog alle integralen op dezelfde wijze voorgesteld. Zijne resultaten zijn echter reeds veel verder strekkend dan die van Newton. Immers voor omwentelingsellipsoïden heeft hij, voor willekeurige punten binnen of op het oppervlak gelegen, alsmede voor punten in het verlengde der as of in het uitgebreide aequatorvlak, richting en grootte der aantrekking gevonden, terwijl hij de zoo zeer gewichtige, later meer uitgebreide en naar hem genoemde stelling heeft bewezen, voor twee ellipsoïden met ongelijke assen en een punt in eene dier assen gelegen. Zijne onderzoekingen verdienen juist daarom des te meer bewonderd te worden, omdat hij langs een zeer moeilijken, veel scherpzinnigheid vorderenden weg, deze reeds vrij samengestelde eigenschappen heeft ontdekt.

d'Alembert heeft tot het hier behandelde vraagstuk eigenlijk niets bijgedragen, daar hij alleen eenige stellingen, door Maclaurin gegeven, op eenigszins andere wijze heeft bewezen.

Kort daarna vindt men dan bij Lagrange al dezelfde waarheden, langs analitischen weg afgeleid en de componenten der aantrekking, voor de bovengemelde gevallen, gegeven in de vorm van enkelvoudige integralen, ofschoon van uiterst samengestelde gedaante en niet herleid tot de later daaraan gegeven eenvoudige vormen. Het behoeft nauwlijks gezegd te worden, dat zij ook niet (zooals in den tekst gemakshalve gedaan is) geschreven zijn in de eerst later ingevoerde vorm van bepaalde integralen. Verder dan MACLAURIN heeft LAGRANGE de zaak eigenlijk niet gebracht. Alleen de inhoud van zijne verhandeling van 1792 (pag. 120) levert, met behulp van hetgeen intusschen door LAPLACE en LEGENDRE was verricht, eene methode ter bepaling van de potentiaalfunctie V.

Op veel fraaier wijze heeft LEGENDRE de stelling van MACLAURIN, voor punten op één der assen gelegen, bewezen. Ook heeft hij voor het eerst de formulen verkregen, voor de aantrekking, door een omwentelingsellipsoïde op een willekeurig punt uitgeoefend, hoewel zijne wijze van afleiding, naar het mij voorkomt, geen recht geeft tot de bewering, dat de waarheid dier formules door hem, op afdoende wijze algemeen is bewezen (zie pagg. 65—81 en de verschillende bij den tekst gevoegde noten).

De nu volgende methoden, ter verkrijging der formules voor de componenten der aantrekking, door eene willekeurige ellipsoïde op een willekeurig punt uitgeoefend, in de vorm eener enkelvoudige integraal, zijn van onderling geheel verschillenden aard.

De methoden van LAPLACE, LEGENDRE, BIOT en GAUSS, berusten allen op het bewijs der stelling van MACLAURIN, in hare meest algemeene gedaante. Het zwaartepunt van dit bewijs, ligt bij LAPLACE in de, op onbekende wijze verkregen partiëele differentiaalvergelijking (51), terwijl LEGENDRE, enkel door voortdurende substitutiën, geraakt tot de vergelijking (x), welke eigenlijk reeds eene enkelvoudige integraal voor F_i geeft, en waaruit hij de stelling van MACLAURIN afleidt. Ongetwijfeld is de laatste weg boven de eerste te verkiezen; en al moet dus aan LEGENDRE de eer ten deele ontzegd worden, die hem gewoonlijk ten opzichte van het vraagstuk der omwentelings-ellipsoïden wordt toegekend, komt hem daarentegen de verdienste toe, van de eerste te zijn geweest die, zij het dan ook op omslachtige wijze, enkel door substitutiën, het bewijs van de stelling van MACLAURIN heeft geleverd. Alleen valt nog daarbij op te merken, dat in LEGENDRE's methode, voor sommige gevallen, gebruik gemaakt wordt van imaginairen, zonder dat eigenlijk de geldigheid der afleidingen voor die gevallen, aangetoond wordt. Immers de redenering van pag. 107 kan moeilijk als toereikend daartoe worden aangemerkt. LEGENDRE heeft bovendien, in deze verhandeling, eene tweede theorie der omwentelings-ellipsoïden gegeven, veel korter en fraaier dan de eerste, zelfs al ware die volledig geweest, vooral ook, omdat zij hier de meer algemeene theorie omvat, van de aantrekking eener willekeurige ellipsoïde, op een punt, gelegen in het vlak van twee der assen.

Eindelijk zij er op gewezen, dat de omvorming der formules voor de componenten tot elliptische integralen, zooals die op pagg. 153 en 164 te vinden is, het eerst door LEGENDRE is verricht in diens Traité des fonctions elliptiques, T. 1, pag. 639, waar hij ook de geheele theorie der aantrekking herhaalt. Zij is hier bij POISSON's methode geplaatst, omdat hij alleen ze voegt, bij zijn eerste verhandeling over de aantrekking der ellipsoïde.

BIOT's methode, steunende op de vergelijking $\Sigma \frac{\delta^2 V}{\delta p_i^2} = 0$ van LAPLACE, levert een bewijs voor eene meer algemeene stelling dan die van MACLAURIN, doch behoeft bij de toepassing daarvan, dezelfde of analoge formules als LAPLACE en LEGENDRE hebben gevonden. Zij brengt dus het vraagstuk der ellipsoïde niet verder.

De methode van GAUSS daarentegen, is gegrond op een zestal hoogst algemeene stellingen, welke vervolgens uiterst gemakkelijk op de ellipsoïde kunnen worden toegepast, ten einde de stelling van MACLAURIN te bewijzen. Zij is zeker, van de vier genoemden, de fraaiste en kortste, vooral omdat een groot gedeelteder bewerking ook geldt, voor de aantrekking door andere lichamen, bij eene willekeurige wet van aantrekking, op een willekeurig punt uitgeoefend.

Tegenover deze allen staat IVORIJ's verhandeling, welke heeft doen inzien, dat de stelling van MACLAURIN niet onmisbaar was voor de afleiding der formulen voor een uitwendig punt, maar dat zij vervangen kon worden, door eene andere, die even algemeen, maar veel gemakkelijker te bewijzen was.

Het is dan ook niet te miskennen dat IVORY's arbeid veel heeft bijgedragen, tot het aanwijzen van den weg tot voltooiïng van de meetkundige behandeling van het vraagstuk, welke vroeger steeds rechtstreeks op het bewijs van de stelling van MACLAURIN gericht was. Wel valt daarbij optemerken, dat de intusschen ingevoerde potentiaalfunctie, op welke ook LAPLACE en BIOT hunne methoden hadden gegrond, ook bij de meetkundige afleiding der componenten een hoofdrol speelt, zoodat licht intezien is, dat MACLAURIN, met de hem ten dienste staande hulpmiddelen, bijna onmogelijk zijne theorie zou hebben kunnen voltooien.

Aan POISSON en DIRICHLET eindelijk is het gelukt, methoden te vinden, welke in staat stellen, de aantrekking op een uitwendig punt te bepalen, zonder ze terugtebrengen tot die, door eene andere ellipsoïde uitgeoefend, op een punt binnen of op haar oppervlak.

Beide wegen zijn echter zeer uiteenloopend en elke daarvan heeft zijne eigenaardige voordeelen. Ongetwijfeld is POISSON's methode de meest rechtstreeksche, niet alleen van deze beiden, maar ook over het algemeen. Zij vordert niets dan substitutien en eene transformatie van coördinaten. Deze laatste heeft veel overeenkomst met die van LEGENDRE, welke echter den waren weg niet heeft gevonden, omdat hij de vergelijking (ω) te algemeen heeft genomen en de ellipsoïde in kegelvormige lagen verdeeld, terwijl bij POISSON, elk kegelvlak eene oneindig dunne ellipsoïdische laag van het aantrekkende lichaam aanraakt.

DIRICHLET's methode is even rechtstreeksch, maar vordert daarentegen veel grooter hulpmiddelen uit de leer der bepaalde integralen, die alleen konden gevonden worden, in den tijd waarin de theorie dier grootheden zoo veel meer ontwikkeld was. Dat daarbij tijdelijk gebruik gemaakt wordt van imaginaire grootheden, is zeker geen rede tot verwijt, omdat steeds de imaginaire en reëele deelen, duidelijk van elkander gescheiden blijven en dus ten slotte daarmede volkomen zuiver kan worden rekening gehouden. Over het algemeen is zijne methode veel korter, maar minder helder dan die van POISSON, bij welke, stap voor stap, kan worden gevolgd, wat de verschillende omvormingen voorstellen. De verkregen formules hebben echter het voordeel, dat zij, voor alle standen van het punt, begrepen zijn in dezelfde onbepaalde integraal, welks grenzen steeds zijn, de kleinste positieve waarde van ϑ, welke $t < 1$ maakt en het oneindige.

STELLINGEN.

I.

Van alle methoden, ter verkrijging van de componenten der aantrekking eener ellipsoïde op een willekeurig punt, is die van DIRICHLET de meest algemeene en meest rechtstreeksche.

II.

LEGENDRE's eerste bepaling van de aantrekking van een, ten opzichte van zijn aequator symmetrisch omwentelingslichaam, mag niet als volledig worden beschouwd.

III.

Voor het oplossen van vraagstukken zijn synthese en analyse even machtig. Zelden echter geeft het volkomen zuiver gebruik van slechts één van beide, het meeste voordeel.

IV.

Bij het aanwenden van grootheden, die in sommige gevallen imaginair zijn, moet aangetoond worden, dat daardoor niet te kort gedaan wordt aan de algemeenheid der resultaten.

V.

Het gebruik der potentiaalfunctie ter bepaling van de kracht door eenig lichaam op een punt uitgeoefend, vordert groote omzichtigheid zoodra het punt een bizonderen stand ten opzichte van het lichaam heeft.

VI.

De „Geometrie des Maasses" is een deel van de „Geometrie der Lage."

VII.

Het is verkeerd, de goniometrische functiën te bepalen door middel van den rechthoekigen driehoek.

VIII.

Het is niet wenschelijk, de leer der harmonische verdeeling te behandelen, onafhankelijk van die der anharmonische verhouding.

IX.

Die allgemeinen Principien (der Analytischen Geometrie) bezeichnen allerdings den Weg, den man einschlagen kann, um zum gewünschten Resultate zu gelangen, nicht den einfacheren Weg, den man in einem gegebenen Falle wählen soll.

(Hesse. *Vorles. a. d. Anal. Geom. d. ger. Linie.*)

X.

De bewering van HESSE, dat wanneer $A = 0$ en $B = 0$ de vergelijkingen van twee punten zijn, alsdan $AB = 0$ „eine in eine gerade Linie ausgeartete Oberfläche darstellt, welche durch die beiden Punkte begrenzt ist" (*Anal. Geom. des Raumes*, pag. 139) is onjuist.

XI.

Het ware wenschelijk, de benaderingsformulen, voorkomende bij de breking van licht aan één bolvormig grensvlak van geringe opening, af te leiden op eene wijze, die, meer dan de gewone, toelaat, den graad harer naauwkeurigheid te bepalen.

XII.

De berekening van de ligging der hoofd- en knooppunten van een systeem van lenzen, kan veel gemakkelijker geschieden, dan zulks in de meeste gevallen gedaan wordt. (Zie bijv. WÜLLNER's *Dioptrik des Auges.*)

XIII.

Het ware beter, de strepen in het spectrum van licht, dat door gloeiende dampen heengegaan is, „lichtzwakke" dan „donkere" strepen te noemen.

XIV.

Het bestaan van isomere lichamen bewijst, dat de scheikundige eigenschappen eener stof niet enkel afhangen van de in hare molekulen aanwezige atomen, maar ook van de groepering daarvan.

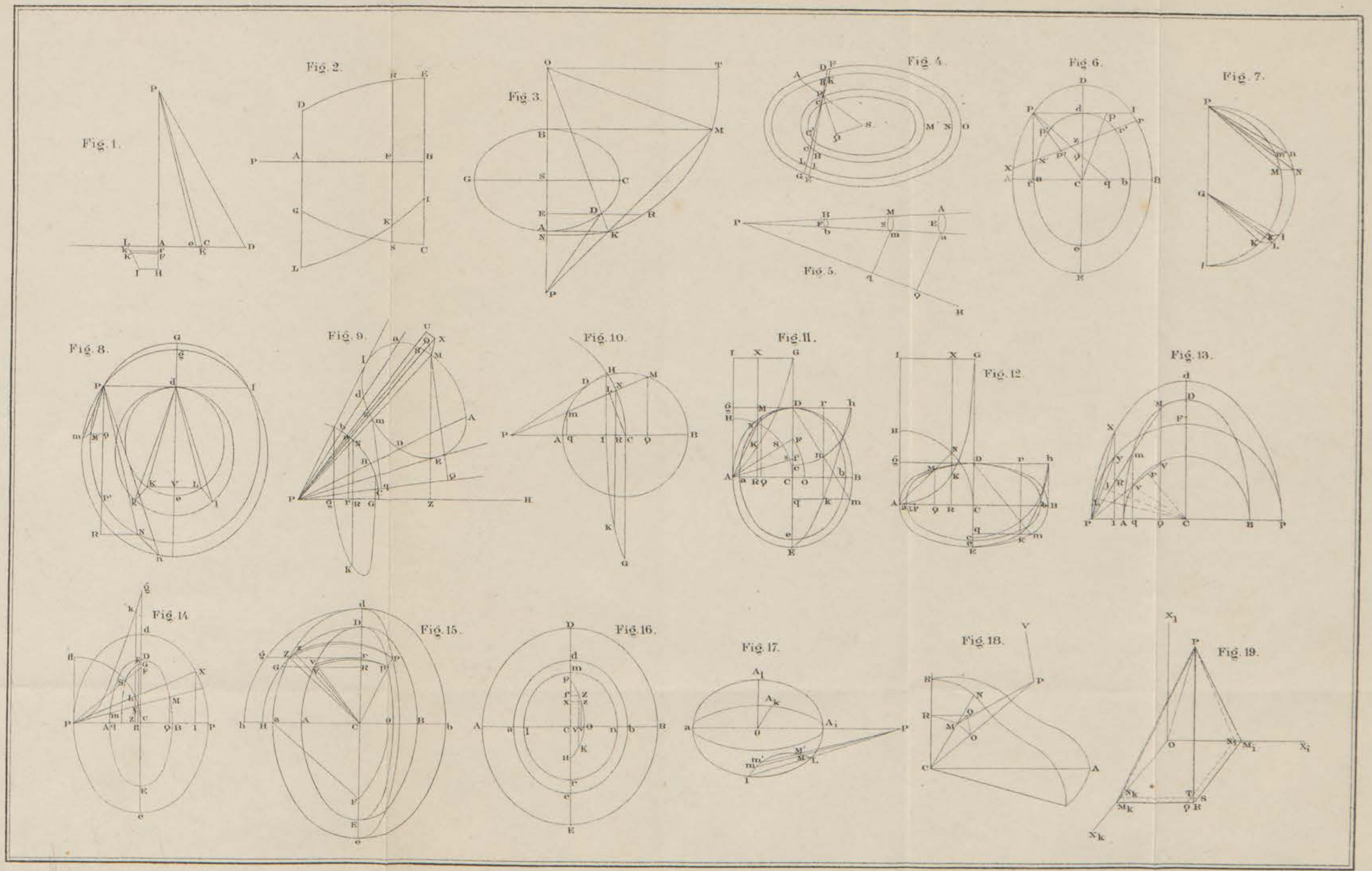
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

ERRATA.

Bladz.	4	regel	4	v. b.	*staat*	veranderlijke	*lees*	veranderlijken
„	10	„	15	„ o.	„	${}^2x_2$	„	$2x_2$
„	10	„	14	„ o.	„	aangr. $KOMR$	„	$\frac{\text{aangr. } KOMR}{dx_1}$
„	13	„	19	„ b.	„	MTm	„	MPm
„	22	„	14	„ „	„	CF	„	CF^3
„	„	„	19	„ „	*achter* „men" *bijtevoegen* „bijv. voor de afgeplatte spheroïde."			
„	30	„	5	„ „	*staat*	$\frac{a_k^2}{a_l}$	*lees*	$\frac{a_k^2}{a_l^2}$
„	30	„	11	„ „	„	a_c	„	a_i
„	33	„	6	„ „	„	$\frac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin {}^2Z'$	„	$\frac{a_l^2 - a_i^2}{a_i^2} \sin {}^2Z$
„	40	„	5	„ o.	„	$(p_l + r \sin \varphi \sin \vartheta)$	„	$(p_l + r \sin \varphi \sin \vartheta)^2$
„	43	„	13	„ b.	„	α_i	„	x_i
„	44	„	4	„ o.	„	$(1 - u^2 \, du)$	„	$(1 - u^2) \, du$
„	„	„	„	„ „	„	$- \frac{2\,dt}{m(1+t)^2}$	„	$\times - \frac{2\,dt}{m(1+t)^2}$
„	45	„	8	„ „	„	$\sin^2 \varphi$	„	$\sin \varphi$
„	46	„	11&12	„ b.	„	$\frac{a_i(a^2 - a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}$	„	$\frac{(a^2 - a_i^2)^{\frac{1}{2}}}{a_i}$
„	47	„	3	„ „	„	$\left\{ \frac{ae}{a_i} \right.$	„	$\left\{ \frac{a_i e}{a} \right.$
„	„	„	1	„ o.	bij de vorm in den teller de exponent $\frac{1}{2}$ bij te voegen.			
„	48	„	14	„ b.	„	$\sin \vartheta$	*lees*	$\cos \vartheta$
„	51	„	6	„ „	„	$\alpha_i^2 \alpha_k^2 p_i$	„	$\alpha_i^2 \alpha_k p_i$
„	„	„	4	„ o.	„	in den noemer $(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}$	„	$(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)^{3/2}$
„	55	„	12	„ b.	„	$(\alpha_i^2 - \alpha_k)$	„	$(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)$
„	„	„	8	„ o.	„	α_k	„	α_k^2

Bladz.	55	regel	8	v. o.	*staat*	$(\beta_i^2 - \beta_l)$	*lees*	$(\beta_i^2 - \beta_l^2)$
„	56	„	„	„ b.	„	p_i	„	p_i^2
„	„	„	7	„ o.	„	M_i	„	M'
„	58	„	7	„ o.	„	overstraal	„	voerstraal.
„	59	„	6	„ b.	„	$MA^2 B$	„	$2 MA^2 B$
„	60	„	5	„ o.	aan het einde *bijtevoegen* (26)			
„	61	„	1	„ „	*staat*	$\frac{3M}{a^2\beta_l}\left\{\int_o^l\right.$	*lees*	$\frac{3M}{a_i^2\beta_l}\left\{\int_o^1\right.$
„	62	„	4	„ b.	„	$z^2\,dz$	„	$\beta_l z^2\,dz$
„	64	„	12	„ „	„	de	„	der
„	65	„	2	„ „	„	39 en 42	„	24 en 26
„	69	„	6	„ o.	„ in den teller	$2x-2$	„	$2x-3$
„	72	„	12	„ b.	aan het begin *bijtevoegen* X			
„	74	„	3 & 1	„ o.	*staat*	$\sum_{k=o}^{k=m}$	„	$\sum_{x=o}^{x=m}$
„	„	„	2	„ „	„	$n=m$	„	$m=n$
„	77	„	5	„ „	„	$m\ldots1$	„	$m.1$
„	„	„	3	„ „	„	q_{n-m-1}	„	q^{n-m-1}
„	78	„	4	„ b.	„	(1—)	„	(—1)
„	79	„	9	„ „	„	$A''_n +$	„	$A''_n =$
„	„	„	4	„ o.	„	$\chi(\varphi^2)$	„	$-\chi(\varphi^2)$
„	85	„	13	„ b.	„	$\frac{dM}{\sqrt{\Sigma(p_i-x_i)^2}}$	„	$\int\frac{dM}{\sqrt{\Sigma(p_i-x_i)^2}}$
„	86	„	4	„ o.	„	$\frac{\partial\vartheta''}{\partial p_i}$ en $\frac{\partial\vartheta'}{\partial p_i}$	„	$\frac{\partial\varphi''}{\partial p_i}$ en $\frac{\partial\varphi'}{\partial p_i}$
„	92	„	11	„ „	„	MN^3	„	MN^2
„	93	„	13	„ b.	„	β_{m+4}	„	β_{m+1}
„	94	„	1	„ o.	„	A_l^2	„	p_l^2
„	98	„	5	„ o.	„	$\mathrm{tg}^2\mu\sin\delta$	„	$\mathrm{tg}^2\mu\sin^2\delta$
„	99	„	4	„ b.	„	μ	„	π
„	103	„	„	„ „	„	$=0$	„	$F_i=0$
„	„	„	10	„ o.	„	$y_i^{2\iota}$	„	$y_i^2-2\iota$
„	„	„	„	„ „	aan het einde bij te voegen (ω)			
„	104	„	7	„ „	„ „ „ „ „ (f)			
„	105	„	16	„ b.	*staat*	λ	*lees*	λ_i
„	106	„	„	„ „	„ aan het einde	(x_k-p_k)	„	$(x_k-p_k)^2$
„	„	„	17	„ „	„	$(+\lambda$	„	$+(\lambda$
„	107	„	7	„ „	„	ω^3	„	ω^2
„	108	„	9	„ b.	„	$({}^2\chi$	„	$(\chi^2$
„	„	„	8	„ o.	„	e	„	ι
„	„	„	7	„ „	„	$)+^2$	„	$)^2+$
„	109	„	1	„ b.	„	λ_l	„	$\lambda_l)$
„	110	„	4	„ o.	*weg te nemen* A.			

Bladz.	111	regel	1 „ b.	*staat*	$-\alpha$	*lees*	$+\alpha$
„	„	„	8 „ o.	„	$N + M'$	„	$N + N'$
„	113	„	4 „ b.	„	L_l^2	„	L_l
„	„	„	12 „ „	„	$2\,L_l$	„	$2\,L_{l'}$
„	114	„	6 „ „	„	$\frac{L_l}{L_l L_k}$	„	$\frac{L_l}{L_i\, L_k}$
„	„	„	10 „ „	„	$-\iota^2 L_k\, \varkappa^2 L_i$	„	$-\iota^2 L_k - \varkappa^2 L_i$
„	„	„	14 „ „	„	m_l	„	m_i
„	„	„	5 „ o.	„	$\frac{L_i\, L_k}{L_i}$	„	$\frac{L_i\, L_k}{L_l}$
„	115	„	2 „ b.	„	aan het einde $\times$	„	$+$
„	„	„	3 „ „	„	bij het begin $\times$	„	$+$
„	„	„	„ „ „	„	moet vooraan in den teller $+$ weggedacht worden.		
„	„	„	9 „ o.	„	$\varkappa$	*lees*	$\varkappa^2$
„	118	„	1 „ b.	„	β	„	B
„	„	„	5 „ „	„	β	„	β_i
„	„	„	7 „ „	„	β_i^2	„	β_k^2
„	„	„	8 „ o.	„	in den 2^{den} breuk p_i^2	„	p_k^2
„	„	„	5 „ „	„	$A_i^2 - A_i^2$	„	$A_l^2 - A_i^2$
„	120	„	6 „ „	„	$\partial^m \sigma_l$	„	$\partial^m \sigma_i$
„	122	„	9 „ „	„	$\frac{x_i}{R}, \frac{x_k}{R}$ en $\frac{x_l}{R}$	„	x_i, x_k, x_l en R.
„	123	„	8 „ „	„	$\frac{\partial^2 F_{2n}}{\partial x_k^2}\ \frac{\partial^2 F^{2n}}{\partial x_l^2}$	„	$\frac{\partial^2 F_{2n}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 F_{2n}}{\partial x_l^2}$
„	126	„	„ „ „	„	23	„	123
„	127	„	13 „ b.	„	rechts $\frac{\partial V}{\partial p_k}$ en $\frac{\partial V}{\partial p_l}$	„	$\frac{\partial V}{\partial P_k}$ en $\frac{\partial V}{\partial P_l}$
„	128	„	1 „ „	„	∂P_i	„	∂P_l
„	„	„	3 „ „	„	men	„	nu
„	„	„	5 „ o.	„	$\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}$	„	$\frac{\partial^2 V}{\partial P_k^2}$
„	„	„	4 „ „	„	$\frac{\partial \varphi_2}{\partial P_i}$	„	$\frac{\partial \varphi_2}{\partial P_l}$
„	130	„	2 „ o.	„	$\partial^2 \varphi$	„	$\partial^3 \varphi$
„	132	„	16 „ „	„	Zelfs	„	Alleen
„	132	„	13 tot 10 v. o.	*te lezen:*	had die verkregen zonder van bovengemelde stelling gebruik te maken, maar wegens hare samengesteldheid niet anders kunnen doen, dan daaruit het bewijs eener andere stelling afleiden en deze dan toepassen,		
„	133	„	11 v. b.	*staat*	x_i'	*lees*	x_i
„	134	„	„ „ „	„	$p_l - a_i$	„	$p_l - a_l$
„	140	„	3 „ „	„	$2x_l dx_i dx_l$	„	$2x_l dx_i dx_k$

—

Bladz.	140	regel	6	v. b.	*staat*	p_l	*lees*	p_k
„	144	tusschen regel 16 en 17 in te voegen: Ligt P binnen het lichaam, zoo is het aantal punten oneven en behoort bij de punten met oneven of even indices het onderste of bovenste teeken, zoodat men licht ziet dat nu $\Sigma \frac{{}^m ds \cos {}^m p}{{}^m r^2} = - d\tau$ is.						
„	147	„	7	„ o.	„	a	*lees*	a_l
„	„	„	3	„ „	„	F'	„	F'_i
„	148	„	4	„ b.	„	$\int$	„	$\int_0^{\pi}$
„	„	„	7	„ „	„	$\int^{\pi 2}$	„	$\int_0^{2\pi}$
„	„	„	„	„ o.	„	$\int^{2\pi}$	„	$\int_0^{2\pi}$
„	149	„	6	„ b.	„	(ν)	„	(γ)
„	153	„	13	„ „	„	$a_i^2 - a_i^2$	„	$a_i^2 - a_l^2$
„	156	„	14	„ o.	„	$k_k'^2$	„	$x_k'^2$
„	158	„	6	„ b.	„	$N'_{l\,t_i}$	„	$N'_{l\,t_l}$
„	„	„	9	„ o.	„	M_i'	„	M_i
„	159	„	11	„ „	„	$-(M_k'$	„	$(-M_k'$
„	160	„	4	„ „	„	$\varkappa$	„	$\varkappa_i$
„	162	„	14	„ b.	„	$m_k^2 p_k^2$ en $m_l^2 p_l^2$	„	$m_k p_k^2$ en $m_l p_l^2$
„	165	„	4	„ „	„	$(a_k^2 - a_l^2)(a_i^2 + s^2)$	„	$(a_k^2 - a_l^2)\sqrt{(a_i + s^2)}$
„	169	„	1	„ „	„	m_l	„	m_i
„	„	„	6	„ „	„	$de : de'$	„	$de' : de$
„	„	„	15	„ „	„	C	„	C'
„	173	„	10	„ „	„	$b_k b_i$	„	$b_k b_l$
„	178	„	1	„ o.	„	F	„	T
„	179	„	17	„ b.	„	$<$	„	$>$
„	179	„	3 en 2	„ o.	„	F	„	T
„	180	„	6	„ b.	„	$\varphi^{\frac{p-3}{2}}$	„	$\psi^{\frac{p-3}{2}}$
„	182	„	2	„ „	„	$(t+1)i$	„	$(t+1)\varphi i$
„	182	„	9	„ o.	„ in den laatsten breuk	$e^{\frac{p-2}{4}\pi i}$	„	$e^{-\frac{p-2}{4}\pi i}$
„	182		6	„ „	„	$\frac{p-2}{2}$	*lees*	$\frac{p-1}{2}$
„	182	„	3	„ „	„	$e^{\frac{p-2}{2}\pi i}$	„	$e^{-\frac{p-1}{2}\pi i}$
„	184	„	5	„ „	„	1	„	$= 1$
„	187	„	9	„ b.	„	$(a_k^2 + \vartheta)^3$	„	$(a_k^2 + \vartheta)$