Gedwongen beweging van een punt langs een voorgeschreven vaste kromme lijn.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

DOOR

J. G. RINGELING.

LEIDEN,
S. C. VAN DOESBURGH.
1879.

GEDWONGEN BEWEGING VAN EEN PUNT LANGS EEN VOORGESCHREVEN VASTE KROMME LIJN.

LEIDEN, BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIPTERIK HZ.

Gedwongen beweging van een punt langs een voorgeschreven vaste kromme lijn.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. H. KERN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Dinsdag, den 30sten September 1879, des voormiddags te 11 uren,

DOOR

JAN GERRIT RINGELING,

GEBOREN TE 'S HERTOGENBOSCH.

LEIDEN,
S. C. VAN DOESBURGH.
1879.

EERSTE HOOFDSTUK.

Over de vergelijkingen, waarin de oplossing van het vraagstuk der gedwongen beweging langs een kromme lijn is opgesloten.

§ 1. Indien X, Y, Z voorstellen de componenten van de resultante der versnellingen, welke op een punt werken, is de baan te bepalen, welke door het punt wordt beschreven, zoomede de snelheid in ieder punt dier baan.

Uit de vergelijkingen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

volgen door integratie de waarden van $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, bepalende grootte en richting der snelheid voor ieder punt der baan, waarbij de daarin voorkomende constanten door richting en grootte der initiale snelheid (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) kunnen worden bepaald.

Eene tweede integratie zal opleveren x, y, z, als functiën van t, na bepaling der voorkomende constanten, door gebruik te maken van den gegeven initialen stand van het punt (x_0, y_0, z_0).

Eliminatie van t uit de alsnu gevondene vergelijkingen:

$$x = \Phi_1(t), \quad y = \Phi_2(t), \quad z = \Phi_3(t)$$

geeft de vergelijkingen van de beschreven baan.

De bij dit vraagstuk voorkomende moeielijkheid is voornamelijk gelegen in de integratie der genoemde vergelijkingen, welke tot eenig resultaat zal voeren, in geval de bekende beginselen van de levendige kracht of der sectoren van toepassing zijn.

Men kan zich evenwel de omgekeerde vraag stellen en aannemende, dat het punt gedwongen is, een gegeven baan te doorloopen met een gegeven veranderlijke snelheid, vragen naar de versnelling, welke die beweging zou kunnen veroorzaken.

Zij in dit geval de beweging gegeven door de vergelijkingen:

$$x = \Phi_1(t), \quad y = \Phi_2(t), \quad z = \Phi_3(t),$$

dan volgt uit:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

dat het voldoende is, tweemaal te differentieeren, om de componenten der versnelling te verkrijgen.

Is gegeven de kromme lijn door de vergelijkingen:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{en} \quad f_2(x, y, z) = 0$$

en de snelheid door

$$v = f_3(t),$$

dan valt het gemakkelijk daaruit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$ en door nadere differentiatie X, Y en Z te bepalen.

Dit eerste en eenvoudigste geval van beweging langs een voorgeschreven baan kan evenwel algemeener worden opgevat, door aan te nemen dat op het punt, dat aan een bepaalde gedwongen beweging moet deelnemen, reeds versnellingen werkzaam waren. Het geeft dan aanleiding tot het volgende vraagstuk:

Gegeven eene bepaalde kromme lijn, die door een punt met een gegeven veranderlijke snelheid moet worden doorloopen, terwijl op dat punt reeds gegeven versnellingen werkzaam zijn. Welke zijn de versnellingen, die alsnog op het punt moeten werken, om de bedoelde beweging te verkrijgen?

Zij alsdan de voorgeschreven beweging gegeven door de vergelijkingen:

$$x = \Phi_1(t), \quad y = \Phi_2(t), \quad z = \Phi_3(t),$$

en zijn de componenten van de resultante der gegeven versnellingen X, Y en Z, terwijl de componenten van de resultante der bijkomende versnellingen door X_1, Y_1, Z_1, worden voorgesteld, dan zal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1,$$

waarin slechts voorkomen als onbekenden X_1, Y_1, Z_1, die hieruit bepaald kunnen worden en zoo de grootte en richting der bijkomende versnelling geven.

Is de beweging weer gegeven door de vergelijkingen der kromme lijn, en de snelheid als functie van den tijd, dan wordt de oplossing gewijzigd als in het voorgaande geval.

In de beide aangehaalde gevallen was het vraagstuk bepaald, en daar de beweging zelve vooraf reeds gegeven was, bleef er niets te bepalen over dan de versnelling in het eerste en de bijkomende versnelling in het tweede geval.

§ 2. Nemen we evenwel als voorwaarde, waaraan het punt is genoodzaakt te voldoen, slechts aan, dat het zich moet bewegen langs een gegeven kromme lijn, zonder dat gegeven is de snelheid, waarmede die beweging moet plaats hebben, dan is het vraagstuk onbepaald, en weer de gevallen onderscheidende, dat het punt al of niet reeds aan de inwerking van gegeven versnellingen onderworpen is, komen we tot de vraagstukken:

1°. Indien gegeven is de kromme lijn, waarlangs een punt gedwongen is, zich te bewegen, wordt gevraagd naar de versnellingen, welke daartoe op het punt moeten werken.

2°. Indien gegeven is, dat een punt, waarop bepaalde versnellingen werkzaam zijn, een gegeven kromme lijn moet beschrijven, welke zijn dan de versnellingen, die aan de gegevene moeten worden toegevoegd?

Aangezien het eerste dezer gevallen als bijzonder geval uit het tweede kan worden afgeleid, zullen we ons in het vervolg uitsluitend met dit laatste bezig houden, zijnde het vraagstuk der gedwongen beweging in zijn meest algemeenen vorm.

Zijn weer

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad (1) \qquad \text{en} \qquad f_2(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

de vergelijkingen der gegeven kromme lijn, en zijn X, Y, Z de componenten van de resultante der gegevene, X_1, Y_1, Z_1 die van de resultante der nog toe te voegen versnellingen, dan zal:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + X_1 \quad (3), \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + Y_1 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + Z_1 \quad (5).$$

Hierin komen voor zes onbekenden x, y, z, X_1, Y_1, Z_1, terwijl ter bepaling daarvan slechts aanwezig zijn vijf vergelijkingen.

Om het vraagstuk bepaald te doen zijn, zal dus omtrent de bijkomende versnellingen nog iets gegeven moeten zijn, dat zich laat uitdrukken door ééne vergelijking, die als zesde bij de gegevene gevoegd, de oplossing der gevraagde grootheden mogelijk maakt. We kunnen dan in de eerste plaats eene bepaalde waarde voor X_1, Y_1, Z_1, dat is de bijkomende versnelling naar grootte en richting vinden, ten tweede x, y, z als functiën van t bepalen, zoodat ook de beweging in de baan volkomen bekend is.

Het is duidelijk, dat de baan van het punt, onder den invloed der gegeven versnellingen alleen, in het algemeen een andere zal zijn dan de voorgeschrevene, en dat de bijkomende versnellingen dus den dwang uitoefenen, welke het punt op de baan houdt. Deze dwang kan al naar de wijze, waarop het punt zich gedwongen beweegt, een ondervonden weerstand zijn, een door een koord uitgeoefende spanning of anderszins. We zullen in het vervolg steeds de resultante van die bijkomende versnellingen den weerstand noemen.

Omtrent die voorwaarde, waaraan de bijkomende versnellingen zullen moeten gehoorzamen, kunnen we nu verschillende veronderstellingen maken, waaronder we opmerken:

I. De resultante der bijkomende versnellingen maakt een standvastigen hoek met de kromme lijn.

Zij die hoek μ, dan verkrijgen we als zesde vergelijking:

$$Cos.\ \mu = \frac{X_1}{R_1}\frac{dx}{ds} + \frac{Y_1}{R_1}\frac{dy}{ds} + \frac{Z_1}{R_1}\frac{dz}{ds} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

als $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ is.

Ter oplossing van dit vraagstuk zijn nu inderdaad gegevens genoeg voorhanden.

De na de integratie voorkomende constanten kunnen bepaald worden, door voor $t = 0$, de snelheid en de plaats van het bewegende punt aan te geven.

Bijzondere gevallen hiervan worden verkregen:

1°. door $\mu = \frac{\pi}{2}$ te stellen. De bijkomende versnelling moet dan normaal zijn tot de kromme lijn, welk geval zich voordoet, indien de beweging plaats heeft zonder wrijving langs een baan, die door haren aard zelf eene afwijking van het punt daarvan verhindert.

Wordt bijv. een punt gedwongen een uit vaste stof vervaardigde buis of goot te doorloopen, zóó dat er geen wrijving plaats vindt, dan zal de vastheid der stof ieder oogenblik op het punt eene drukking veroorzaken, normaal tot de kromme lijn.

2°. door $\mu = 0$ te stellen. De bijkomende versnelling is dan volgens de raaklijn gericht, welk geval zich voordoet, indien het punt zich beweegt in een weerstandbiedende middenstof.

Het beschouwde geval zelf komt voor, wanneer een punt gedwongen is een uit vaste stof bestaande buis of goot, in het algemeen een baan te doorloopen, die uit haren aard zich tegen iedere afwijking daarvan verzet en bij die beweging wrijving moet overwinnen. De standvastige hoek μ stelt alsdan voor het complement van den wrijvingshoek.

II. De bijkomende versnellingen hebben eene resultante, die door een vast punt gaat.

Zijn de coördinaten van dat punt a, b en c, dan wordt deze voorwaarde uitgedrukt door de vergelijkingen:

$$\frac{x-a}{r} = \frac{X_1}{R_1},\quad \frac{y-b}{r} = \frac{Y_1}{R_1},\quad \frac{z-c}{r} = \frac{Z_1}{R_1},$$

waarvan de laatste afhankelijk is van de beide eerste. Behalve de vijf bekende vergelijkingen hebben we er dus nog twee, d. i. één te veel gegeven.

De oplossing van het vraagstuk in deze veronderstelling is dus in het algemeen onmogelijk, wat zich ook zeer goed laat inzien, daar de resultante der bijkomende versnellingen in het algemeen niet in één plat vlak zal zijn gelegen met de resultante der gegeven versnellingen en de hoofdnormaal, wat toch een vereischte is voor de oplosbaarheid.

Ten einde het vraagstuk voor oplossing vatbaar te maken, zullen we dus de voorwaarde meer algemeen moeten stellen. Nemen we bijv. aan, dat de bijkomende versnelling moet gaan door een gegeven kromme lijn, waarvan de vergelijkingen zijn:

$$x' = \varphi(z'),\qquad y' = \psi(z'),$$

dan zal, na eliminatie van z' tusschen twee der vergelijkingen:

$$\frac{\varphi(z') - a}{r} = \frac{X_1}{R_1},\quad \frac{\psi(z') - b}{r} = \frac{Y_1}{R_1},\quad \frac{z' - c}{r} = \frac{Z_1}{R_1}$$

éene betrekking tusschen X_1, Y_1, Z_1 overblijven, die het vraagstuk bepaald maakt.

In de onderstelling dat de kromme lijn, waarlangs het punt zich moet bewegen, eene vlakke is, vervalt de zooeven opgemerkte onoplosbaarheid, voor het geval de resultante der bijkomende versnellingen door een vast punt in het vlak der lijn gaat.

Immers deze voorwaarde wordt alsdan uitgedrukt door slechts éène vergelijking:

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{y - b}{x - a},$$

Als laatst en meest algemeen geval merken we op:

III. De resultante der bijkomende versnellingen maakt een in het algemeen veranderlijken hoek met de kromme lijn, waarvan de grootte afhankelijk is van den aard der verbindingen, die het punt noodzaken de voorgeschreven baan af te leggen.

Dit geval doet zich voor, wanneer het punt zijn baan beschrijft ten gevolge van het bestaan van zekere verbindingen (liaisons), die de beweging van het punt beperken. 't Is duidelijk dat we niet vooraf in het algemeen kunnen aangeven, welke zesde vergelijking hier bij de vijf bekende moet worden gevoegd, aangezien die afhankelijk is van den aard dier verbindingen.

Kan de van de verbindingen afhangende voorwaarde, waaraan de bijkomende versnellingen moeten voldoen, door éene vergelijking

$$\chi(X_1, Y_1, Z_1) = 0$$

worden uitgedrukt, dan is het vraagstuk evenals de beide voorgaande bepaald.

Ten slotte zij opgemerkt, dat in het in deze § behandelde geval niet alleen de bijkomende versnelling moet worden bepaald, maar ook de snelheid in de baan, daar deze laatste alleen vooraf gegeven is.

§ 3. Nadat aldus is aangegeven, hoe alle vraagstukken betreffende gedwongen beweging zouden kunnen worden opgelost, zullen we, aangezien de opgestelde vergelijkingen bij de integratie en eliminatie vele moeielijkheden zullen

opleveren, deze brengen onder een voor het gebruik meer geschikten vorm.

Denken we ons daartoe de gegeven versnelling F en den weerstand R ontbonden in F_1, F_2, F_3 en R_1, R_2, R_3 resp. volgens drie loodrecht op elkander staande assen, waarvan de eerste samenvalt met de raaklijn, terwijl de beide andere de richting van hoofdnormaal en normaal op het kromtevlak hebben, dan stellen $F_1 + R_1$, $F_2 + R_2$, $F_3 + R_3$ de volgens die assen ontbondenen voor der resultante van R en F. Deze kunnen ook langs anderen weg gevonden worden. Immers $X + X_1$, $Y + Y_1$, $Z + Z_1$ stellen de componenten voor der zelfde resultante volgens de drie coördinatenassen; bij gevolg zal:

$$F_1 + R_1 = (X + X_1)\frac{dx}{ds} + (Y + Y_1)\frac{dy}{ds} + (Z + Z_1)\frac{dz}{ds}$$

$$F_2 + R_2 = (X + X_1)\rho\frac{d^2x}{ds^2} + (Y + Y_1)\rho\frac{d^2y}{ds^2} + (Z + Z_1)\rho\frac{d^2z}{ds^2},$$

waarin $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ voorstellen de cosinussen der richthoeken van de raaklijn,

$\rho\frac{d^2x}{ds^2}$, $\rho\frac{d^2y}{ds^2}$, $\rho\frac{d^2z}{ds^2}$ die der richthoeken van de hoofdnormaal.

Merken we nu op dat de vergelijkingen:

$$X + X_1 = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y + Y_1 = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z + Z_1 = \frac{d^2z}{dt^2},$$

daar $\frac{dx}{dt} = v\frac{dx}{ds}$,

dus $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(v\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\,v = v^2\frac{d^2x}{ds^2} + v\frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds},$$

en evenzoo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{ds^2} + v\frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = v^2\frac{d^2z}{ds^2} + v\frac{dz}{ds}\frac{dv}{ds},$$

geschreven kunnen worden in den vorm:

$$X + X_1 = v^2\frac{d^2x}{ds^2} + v\frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds},$$

$$Y + Y_1 = v^2\frac{d^2y}{ds^2} + v\frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds},$$

$$Z + Z_1 = v^2\frac{d^2z}{ds^2} + v\frac{dz}{ds}\frac{dv}{ds},$$

dan blijkt dat, aangezien:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

en

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \left(\frac{dz}{ds}\right)\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right) = 0$$

$$F_1 + R_1 = v\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}$$

wordt.

In verband met:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

en de tweede der zoo even gebruikte betrekkingen, wordt:

$$F_2 + R_2 = \frac{v^2}{\rho},$$

waarin ρ den kromtestraal voorstelt.

De derde ontbondene $F_3 + R_3$ zouden we als de beide voorgaande kunnen vinden, door gebruik te maken van de cosinussen der hoeken, welke de normaal op het kromtevlak met de assen maakt. Eenvoudiger is het, gebruik te maken van de identieke vergelijking:

$$(F_3 + R_3)^2 + (F_2 + R_2)^2 + (F_1 + R_1)^2 = (X + X_1)^2 + (Y + Y_1)^2 + (Z + Z_1)^2,$$

welke, na substitutie van de ons bekende waarden overgaat in:

$$(F_3 + R_3)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + v^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + v^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

gevende:

$$F_3 + R_3 = 0$$

welk laatste resultaat niets bevreemdends heeft, aangezien de resultante van F en R, als zijnde de versnelling, die alleen de plaats hebbende beweging zou kunnen veroorzaken, met twee opeenvolgende elementen in één plat vlak d. i. in het kromtevlak moet liggen, en bijgevolg hare ontbondene volgens de normaal op het kromtevlak gelijk nul moet wezen.

De alzoo verkregen vergelijkingen, welke ook langs rechtstreekschen weg waren af te leiden, zijn, hoewel identiek met de eerst afgeleide, die, welke een voor het verder gebruik meer geschikten vorm bezitten.

§ 4. Zijn dan, bij terugkeer tot het in § 2 aangeduide geval, gegeven, behalve de vergelijkingen:

$$F_1 + R_1 = v\frac{dv}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$F_2 + R_2 = \frac{v^2}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$F_3 + R_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

de vergelijkingen:

$$f_1(x,y,z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\text{en } f_2(x,y,z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

der kromme lijn, dan zal, gelijk reeds vroeger is aangetoond, nog een voorwaarde moeten bestaan, waaraan de weerstand moet voldoen, uitgedrukt door ééne vergelijking

$$\chi(R_1, R_2, R_3)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en blijft de vraag, hieruit R_1, R_2, R_3 zoomede x, y, z als functiën van t te bepalen.

De meerdere of mindere eenvoudigheid der betrekking $\chi(R_1, R_2, R_3)=0$ bepaalt nu het gemak waarmede vraagstukken van dezen aard kunnen worden opgelost.

Zeker is het evenwel dat de hier gebruikte vergelijkingen zich zeer goed leenen tot eliminatie van R_1 en R_3 waardoor eene vergelijking overblijft, waaruit R_2 kan worden opgelost.

Uit (3) volgt namelijk: $R_3=-F_3$

en daar volgens (2):

$$v^2=\rho(F_2+R_2),$$

dus:

$$v\frac{dv}{ds}=\tfrac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds},$$

is:

$$F_1+R_1=\tfrac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds}$$

of:

$$R_1=\tfrac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds}-F_1$$

Substitutie van deze waarden in (6) geeft:

$$\chi\left(\frac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds}-F_1,\ R_2,\ -F_3\right)=0 \quad . \quad . \quad , \quad (6)$$

zijnde in het algemeen eene differentiaalvergelijking der eerste orde.

Heeft men hieruit R_2 bepaald, dan wordt R_1 berekend uit:

$$R_1=\tfrac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds}-F_1, \quad \text{terwijl } R_3=-F_3.$$

Richting en grootte van den weerstand zijn dus bekend.

De snelheid in de baan volgt dan uit (2).

$$v^2=\rho(F_2+R_2)$$

waaruit, in verband met de gegeven vergelijkingen der kromme lijn, des verkiezende nog x, y en z als functiën van t kunnen worden afgeleid.

Uit het voorgaande blijkt dus dat het zoeken van den weerstand, bijgevolg de oplossing van het meest algemeene geval van gedwongen beweging langs eene lijn neerkomt op het oplossen eener differentiaalvergelijking van de eerste orde.

Vergelijking van de wijze waarop we, gebruik makende van het tweede stel vergelijkingen, tot de uitdrukking voor den weerstand gekomen zijn met die, welke het eerste stel vergelijkingen zou vereischen, doet terstond den eersten weg als veel eenvoudiger kennen.

§ 5. Het zal nu moeten worden nagegaan, in hoeverre de vergelijking (6) in de verschillende in § 2 aangenomene onderstellingen oplosbaar is.

Beschouwen we eerst het geval:

I. De beweging heeft plaats met wrijving.

De betrekking $\chi(R_1, R_2, R_3)=0$ wordt in dit geval

$$R_1=f\sqrt{R_2^2+R_3^2}$$

waarin f voorstelt den wrijvings-coëfficient.

Substitutie van de hiervoor aangegeven waarden van R_1 en R_3 geeft:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds}-F_1=f\sqrt{R_2^2+F_3^2},$$

waaruit blijkt dat in dit geval het vraagstuk op eene in het algemeen nog onoplosbare differentiaalvergelijking wordt terug gebracht en dus de weerstand bij de gedwongen beweging met wrijving in het algemeen niet zal kunnen worden bepaald.

De vergelijking zal echter lineair en dus oplosbaar worden, in geval R_2 van onder het wortelteeken in het tweede lid kan worden gebracht. Dit zal plaats hebben :

a. Indien wij het vraagstuk beperken tot het platte vlak.

Alsdan is $F_3 = 0$ en gaat de vergelijking over in:

$$\tfrac{1}{2} \frac{d \,.\, \rho (F_2 + R_2)}{ds} - F_1 = f R_2$$

of: $$\frac{d \,.\, \rho F_2}{ds} + \rho \frac{d \,.\, R_2}{ds} + R_2 \frac{d\rho}{ds} - 2 F_1 = 2 f R_2$$

$$\frac{d \,.\, R_2}{ds} + R_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{2f}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d \,.\, \rho F_2}{ds} - 2 F_1 \right) = 0$$

gevende tot oplossing:

$$R_2 = \frac{e^{2f \int \frac{ds}{\rho}}}{\rho} \left[C - \int \left(\frac{d \,.\, \rho F_2}{ds} \right) ds \, e^{-2f \int \frac{ds}{\rho}} \right]$$

b. Indien de op het punt werkende versnelling in het kromtevlak is gelegen.

Daar ook hier $F_3 = 0$, verkrijgen we dezelfde differentiaalvergelijking, die evenwel in het voorgaande geval na uitwerking eenvoudiger resultaat zal geven, door de aanwezigheid van slechts twee coördinaten.

In alle andere gevallen stuiten we op eene in het algemeen onoplosbare vergelijking.

In twee bijzondere gevallen kan het vraagstuk worden opgelost. Is 1°. $f = 0$, heeft dus de beweging zonder wrijving plaats $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right)$,

dan wordt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d R_2}{ds} + R_2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d \,.\, \rho F_2}{ds} - 2 F_1 \right) = 0,$$

zijnde weder eene lineaire, waarvan de oplossing is:

$$R_2 = e^{-\int \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds} \left[C - \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{d \,.\, \rho F_2}{ds} - 2 F_1 \right) ds \, e^{\int \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds} \right]$$

of, na herleiding:

$$R_2 = \frac{C}{\rho} - F_2 + \frac{2 \int F_1 \, ds}{\rho},$$

waaruit:

$$R = \sqrt{F_3^2 + \left[\frac{C}{\rho} - F_2 + \frac{2 \int F_1 \, ds}{\rho} \right]^2} =$$
$$= \sqrt{F_3^2 + \left[\frac{C + 2 \int F_1 \, ds}{\rho} - F_2 \right]^2}$$

terwijl:

$$v^2 = \rho [F_2 + R_2] = C + 2 \int F_1 \, ds.$$

Hierin wordt C gevonden, door op te merken dat voor $t = 0$, $s = s_0$ en $v = v_0$, bijgevolg is:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \int_{s_0}^{s} F_1 \, ds.$$

De gevonden waarde van C moet nog in R worden gesubstitueerd, om den weerstand geheel bepaald te verkrijgen.

Voor $C + 2 \int F_1 \, ds$, v^2 substitueerende, kan R gebracht worden in een anderen vorm

$$R = \sqrt{\left[\frac{v^2}{\rho} - F_2 \right]^2 + F_3^2},$$

welke beide laatste vergelijkingen voor dit bijzondere geval geldende, later langs eenvoudiger weg zullen worden gevonden. Is 2°. $\mu = 0$, d. w. z. is de weerstand gericht volgens de raaklijn en dus slechts afkomstig van een weerstandbiedende middenstof, dan wordt eveneens het vraagstuk eenvoudiger.

Aangezien in dit geval R_2 en R_3 gelijk 0 zijn, volgt uit (3) in § 4, $F_3 = 0$, zoodat de werkende versnelling in dit geval in het kromtevlak gelegen moet zijn.

Overigens valt dit gemakkelijk te verklaren, daar, indien de resultante van twee versnellingen F en R in het kromtevlak ligt en dit ook met één van beiden R het geval is, de andere versnelling F eveneens in het kromtevlak zal moeten gelegen zijn.

De waarde van R_1 volgt uit de boven gevonden betrekking:

$$R_1 = \tfrac{1}{2} \frac{d.\rho\,(F_2 + R_2)}{d\,s} - F_1 \text{ voor } R_2 = 0,$$

dus:

$$R_1 = \tfrac{1}{2} \frac{d.\rho\, F_2}{d\,s} - F_1.$$

en de snelheid uit $v^2 = \rho\, F_2$,

zoodat in dit geval het vraagstuk zeer eenvoudig wordt opgelost.

Het voorgaande kortelijk samenvattende zien we, dat het vraagstuk steeds oplosbaar is voor gedwongen beweging zonder wrijving, en voor een zoodanige beweging in een weerstandbiedende middenstof; bovendien voor gedwongen beweging met wrijving, wanneer we ons beperken tot het platte vlak of wanneer de versnelling in het kromtevlak gelegen is.

II. De weerstand is steeds gericht naar één punt.

Uit § 2 is ons bekend, dat we voor dit geval ons slechts hebben te bepalen tot het platte vlak.

De te gebruiken vergelijkingen uit § 4, worden hier:

$$F_1 + R_1 = v \frac{d\,v}{d\,s}$$

$$F_2 + R_2 = \frac{v^2}{\rho}$$

bovendien de vergelijking $f(x, y) = 0$ der kromme lijn, terwijl de betrekking $\chi(R_1, R_2) = 0$ wordt:

$$R_1 = R_2\, tg.\, \beta$$

waarin β voorstelt den hoek tusschen de normaal in een punt der kromme lijn en de lijn, die dit punt met het vaste punt verbindt.

Men houde hierbij in het oog, dat de positieve richting van R_2 met den kromtestraal, die van R_1 met de positieve richting van s samenvalt. Is de laatste eens vastgesteld, dan is daardoor ook de positieve draaiingsrichting voor den hoek β bepaald; zij komt overeen met een wenteling over een hoek van 90° van R_2 naar R_1. Wanneer wij nu het vaste punt tot pool kiezen, hetzij van een rechthoekig, hetzij van een poolcoördinatenstelsel, zullen wij aannemen, dat in het eerste geval eene wenteling van de x- naar de y-as, in het tweede geval eene wenteling, waardoor de anomalie ϑ toeneemt, tegengesteld is aan de positieve draaiingsrichting van β. Men verkrijgt dan

$$tg.\beta = \frac{x\,dx + y\,dy}{y\,dx - x\,dy}, \qquad R_1 = R_2 \frac{x\,dx + y\,dy}{y\,dx - x\,dy},$$

of, in verband met:

$$R_1 = \tfrac{1}{2} \frac{d.\rho\,(F_2 + R_2)}{d\,s} - F_1,$$

$$\rho \frac{d\,R_2}{d\,s} + R_2\left[\frac{d\,\rho}{d\,s} - 2\,\frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{y\,d\,x - x\,d\,y}\right] + \frac{d.\rho\,F_2}{d\,s} - 2\,F_1 = 0,$$

zijnde, daar ρ, x, y krachtens de betrekking $f(x, y) = 0$ als functiën van s kunnen bepaald worden, eene lineaire diff. vergelijking, die dus tot eene eenvoudige integraal kan teruggevoerd worden.

R_2 gevonden zijnde, is $R = \frac{R_2}{cos.\ \beta}$,

terwijl:

$$v^2 = \rho\,(F_2 + R_2).$$

De richting van den weerstand wordt door de oplossing zelf gegeven.

Onder meer geschikten vorm komt deze differentiaal vergelijking, indien we r tot onafhankelijk veranderlijke aannemen.

In aanmerking nemende dat:

$$x\,d\,x + y\,d\,y = r\,d\,r$$
$$y\,d\,x - x\,d\,y = -\,r^2\,d\,\vartheta$$

verkrijgen we:

$$\rho \frac{d\,R_2}{d\,r}\frac{d\,r}{d\,s} + R_2\left[\frac{d\,\rho}{d\,r}\,\frac{d\,r}{d\,s} + 2\,\frac{d\,r}{r\,d\,\vartheta}\right] + \frac{d.\rho\,F_2}{d\,r}\frac{d\,r}{d\,s} - 2\,F_1 = 0$$

of:

$$\frac{d\,R_2}{d\,r} + R_2\left[\frac{1}{\rho}.\frac{d\,\rho}{d\,r} + \frac{2}{\rho}\,\frac{d\,s}{r\,d\,\vartheta}\right] + \frac{d\,.\,\rho\,F_2}{\rho\,d\,r} - \frac{2\,F_1}{\rho}\,\frac{d\,s}{d\,r} = 0.$$

Bij verdere herleiding lette men op het teeken van $\frac{d\,s}{d\,\vartheta}$ en $\frac{d\,s}{d\,r}$. Wanneer, zooals wij zullen aannemen, het vaste punt aan de holle zijde der kromme lijn ligt volgt uit het

reeds vastgestelde, dat $\frac{d\,s}{d\,\vartheta}$ positief is. Daarentegen kan $\frac{d\,s}{d\,r}$ nog positief of negatief zijn. Hierop hebben de dubbele teekens in de volgende vergelijkingen betrekking; het bovenste geldt als r en s gelijktijdig toenemen.

De differentiaalvergelijking wordt nu:

$$\frac{d\,R_2}{d\,r} + R_2\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{d\,\rho}{d\,r} + \frac{2}{\rho}\sqrt{1 + \left(\frac{d\,r}{r\,d\,\vartheta}\right)^2}\,\right] + \frac{1}{\rho}\,\frac{d.\rho\,F_2}{d\,r} \mp$$
$$\mp \frac{2\,F_1}{\rho}\sqrt{1 + \left(\frac{r\,d\,\vartheta}{d\,r}\right)^2} = 0,$$

waaruit na herleiding:

$$R_2 = \frac{e^{-2\int \frac{d\,r}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{d\,r}{r\,d\,\vartheta}\right)^2}}}{\rho}\left[C - \int\left[\frac{d\,.\,\rho\,F_2}{d\,r} \mp\right.\right.$$
$$\left.\left.\mp\, 2\,F_1\sqrt{1 + \left(\frac{r\,d\,\vartheta}{d\,r}\right)^2}\,\right]d\,r\; e^{2\int \frac{d\,r}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{d\,r}{r\,d\,\vartheta}\right)^2}}\right]$$

waaruit R_2 en dus ook R als functie van r gevonden wordt, indien behalve de versnelling de vergelijking der lijn op poolcoördinaten door $r = \phi\,(\vartheta)$ is gegeven.

De nog in § 2 gemaakte veronderstelling dat de weerstand, in geval de baan eene kromme lijn in de ruimte is, door de verschillende punten eener andere kromme lijn moet gaan, zal eene differentiaalvergelijking:

$$\chi\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{d.\rho\,(F_2 + R_2)}{d\,s} - F_1, R_2, -F_3\right) = 0$$

opleveren, welke geheel van den aard dier kromme lijn afhankelijk is.

III. De weerstand is veranderlijk met den aard der verbindingen.

Aangezien de betrekking $\chi(R_1, R_2, R_3) = 0$ hier eene willekeurige is, welke afhangt van den aard der verbindingen, kunnen we omtrent de differentiaalvergelijking der eerste orde:

$$\chi\left(\frac{1}{2}\frac{d.\rho(F_2+R_2)}{ds} - F_1, R_2, -F_3\right) = 0$$

slechts oordeelen wanneer we met den aard dier verbindingen bekend zijn.

§ 6. Het is duidelijk dat zich naast het tot nu toe besproken vraagstuk, waarbij de weerstand gevraagd werd, noodig om een punt, dat aan de werking van bepaalde versnellingen is onderworpen, een vooraf gegeven baan te doen beschrijven, de beide volgende laten behandelen:

Indien vooraf gegeven is de baan en de weerstand, waarmede deze wordt doorloopen, welke moet dan de op het punt werkende versnelling zijn?

Indien vooraf gegeven is de versnelling, welke op het punt werkt en de weerstand, welke bij de beweging moet voorkomen, welke zal dan de door het punt te beschrijven baan zijn?

Aangezien het eerste dezer vraagstukken eigenlijk geheel hetzelfde is als het behandelde en het tweede neerkomt op een vraagstuk der vrije beweging, zullen we de beschouwing daarvan achterwege laten.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Beweging van een punt langs een kromme lijn zonder wrijving.

§ 7. In § 4 hebben we gezien dat de oplossing der vraagstukken hiertoe betrekking hebbende steeds werd teruggebracht tot de vergelijkingen:

$$R = \sqrt{\left[\frac{v^2}{\rho} - F_2\right]^2 + F_3^2} \quad (1),$$ waaruit de weerstand, en:

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} F_1\,ds \quad (2),$$ waaruit de snelheid werd bepaald.

Voor we van deze uitdrukkingen een verder gebruik maken, zullen we aantoonen dat ze voor dit bijzonder geval langs rechtstreekschen weg meer eenvoudig gevonden kunnen worden.

Denken we ons daartoe weer de gegeven versnelling ontbonden volgens de richtingen van raaklijn, hoofdnormaal en normaal tot het kromtevlak in F_1, F_2, F_3, dan zal de resultante van deze drie versnellingen en de versnelling van den weerstand R, die in dit geval in het normaalvlak moet gelegen zijn, opleveren de versnelling, die alleen de werkelijk plaats hebbende beweging zou te voorschijn roepen.

Ontbinden we die in eene volgens de hoofdnormaal $\frac{v^2}{\rho}$ en eene volgens de raaklijn $= \frac{d\,v}{d\,t}$, dan zal de componente $\frac{v^2}{\rho}$ de resultante zijn van de drie in het normaalvlak liggende versnellingen F_2, F_3 en R, dus:

$$\frac{v^2}{\rho} = Res.\,[F_2, F_3, R].$$

Daar nu F_2 reeds de richting van de hoofdnormaal heeft, zal de resultante van F_3 en R gelijk aan $\frac{v^2}{\rho} - F_2$ en volgens de hoofdnormaal moeten gericht zijn. De richting van F_3 en de hoofdnormaal staan evenwel loodrecht op elkander, zoodat:

$$R^2 = \left[\frac{v^2}{\rho} - F_2\right]^2 + F_3^2$$

of:

$$R = \sqrt{\left[\frac{v^2}{\rho} - F_2\right]^2 + F_3^2}$$

De alleen overblijvende componente F_1 zal moeten gelijk zijn aan de tangentiale componente der versnelling, bijgevolg:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = F_1$$

of

$$\frac{v\,d\,v}{d\,s} = F_1$$

$$\tfrac{1}{2}\,d\,v^2 = F_1\,ds.$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1\,d\,s.$$

zijnde de uitdrukking voor het in dit geval geldende beginsel der levendige kracht, waarvan de geldigheid gemakkelijk uit de bewegingsvergelijkingen van § 1 zal kunnen worden afgeleid.

Er blijft nog over de richting van den weerstand te bepalen; deze zal, in het normaalvlak gelegen, met de hoofdnormaal maken een hoek ϑ, die gegeven is door:

$$F_3 = \left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\} tg\,\vartheta$$

$$tg\,\vartheta = \frac{F_3}{\frac{v^2}{\rho} - F_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Begeert men, wat dikwijls te verkiezen is, de richting van den weerstand te kennen door de hoeken, die hij maakt met de coördinatenassen, ten opzichte waarvan de vergelijking der kromme lijn is gegeven, dan gaat men volgenderwijze te werk.

Gelijk zooeven is opgemerkt, is $\frac{v^2}{\rho}$ de volgens de hoofdnormaal gerichte resultante van R, F_2 en F_3, of, wanneer we voor de resultante van F_2 en F_3 de in het normaalvlak gelegen componente:

$$F_n = \sqrt{F_2^2 + F_3^2}$$

in de plaats stellen:

$$\frac{v^2}{\rho} = Res.\,(R, F_n).$$

Ook weten we dat daaruit kan worden afgeleid:

$$\frac{v^2}{\rho} - F_2 = Res.\,(F_3, R)$$

Noemen we nu ξ', η' de coördinaten van het uiteinde van den weerstand R ten opzichte van de hoofdnormaal en de normaal op het kromtevlak als assen, dan zal ten gevolge van den loodrechten stand van resultante en F_3, ξ' of de projectie van R op de hoofdnormaal gelijk aan de resultante zelf, d. i. $\frac{v^2}{\rho} - F_2$, y' of de projecteerende lijn gelijk aan $- F_3$ zijn.

We verkrijgen dus:

$$\xi' = \frac{v^2}{\rho} - F_2$$

$$\eta' = - F_3.$$

Wanneer we nu voor het bedoelde punt van deze coördinaten overgaan op de oorspronkelijke, waarin de vergelijkingen der gegeven kromme lijn staan uitgedrukt, zullen we, gebruik makende van de welbekende transformatie-vergelijkingen:

$$x' = a + x \cos.(x x') + y \cos.(y x') + z \cos.(z x')$$
$$y' = b + x \cos.(x y') + y \cos.(y y') + z \cos.(z y')$$
$$z' = c + x \cos.(x z') + y \cos.(y z') + z \cos.(z z')$$

waarin thans moet gesteld worden:

$$a = x,\ x = \xi',\ \cos.(x x') = \rho \frac{d^2 x}{d s^2},\ \cos.(y x') = $$
$$= \rho \frac{d y\, d^2 z - d z\, d^2 y}{d s^3},\ \cos.(z x') = \frac{d x}{d s}$$

$$b = y,\ y = \eta',\ \cos.(x y') = \rho \frac{d^2 y}{d s^2},\ \cos.(y y') = $$
$$= \rho \frac{d z\, d^2 x - d x\, d^2 z}{d s^3},\ \cos.(z y') = \frac{d y}{d s}$$

$$c = z,\ z = 0,\ \cos.(x z') = \rho \frac{d^2 z}{d s^2},\ \cos.(y z') = $$
$$= \rho \frac{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}{d s^3},\ \cos.(z z') = \frac{d z}{d s}$$

voor de coördinaten van dat punt verkrijgen:

$$x' = x + \xi' \rho \frac{d^2 x}{d s^2} + \eta' \rho \frac{d y\, d^2 z - d z\, d^2 y}{d s^3}$$

$$y' = y + \xi' \rho \frac{d^2 y}{d s^2} + \eta' \rho \frac{d z\, d^2 x - d x\, d^2 z}{d s^3}$$

$$z' = z + \xi' \rho \frac{d^2 z}{d s^2} + \eta' \rho \frac{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}{d s^3}$$

of, na substitutie der waarden van ξ' en η':

$$x' - x = \left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 x}{d s^2} - F_3 \rho \frac{d y\, d^2 z - d z\, d^2 y}{d s^3}$$

$$y' - y = \left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 y}{d s^2} - F_3 \rho \frac{d z\, d^2 x - d x\, d^2 z}{d s^3} \quad (4)$$

$$z' - z = \left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 z}{d s^2} - F_3 \rho \frac{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}{d s^3}$$

waaruit, indien λ, μ, ν de gevraagde hoeken voorstellen:

$$\cos.\lambda = \frac{x' - x}{R} = \frac{\left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 x}{d s^2} - F_3 \rho \frac{dy\, d^2 z - dz\, d^2 y}{d s^3}}{\sqrt{\left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\}^2 + F_3^2}}$$

$$\cos.\mu = \frac{y' - y}{R} = \frac{\left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 y}{d s^2} - F_3 \rho \frac{dz\, d^2 x - dx\, d^2 z}{d s^3}}{\sqrt{\left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\}^2 + F_3^2}} \quad (5)$$

$$\cos.\nu = \frac{z' - z}{R} = \frac{\left(\frac{v^2}{\rho} - F_2\right) \rho \frac{d^2 z}{d s^2} - F_3 \rho \frac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{d s^3}}{\sqrt{\left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\}^2 + F_3^2}}$$

§ 8. Overgaande tot de verdere behandeling van dit vraagstuk met behulp van de boven aangegeven vergelijkingen, merken we in het voorbijgaan op, dat eliminatie van x, y en z uit de vergelijkingen (4) in verband met de vergelijkingen $f_1(x, y, z) = 0$ en $f_2(x, y, z) = 0$ der gegevene kromme lijn, ons zou achterlaten twee verg. $\Phi_1(x', y', z') = 0$ en $\Phi_2(x', y', z') = 0$, zijnde de vergelijkingen eener kromme lijn, welke bevat de uiteinden van alle normale weerstanden, gedurende den loop van het punt voorkomende. Deze kromme lijn zou, indien ze te bepalen was, eene afbeelding geven van de wijze, waarop de weerstand verandert, op dergelijke wijze als de hodograaf door grootte en richting harer voerstralen de grootte en richting van de snelheid levert.

Berekening van den afstand van het punt, waarvoor de weerstand bepaald moet worden, tot het snijpunt der genoemde kromme lijn met het normaalvlak voor dat punt, zou den weerstand geven.

De vergelijkingen zijn echter in het algemeen te samengesteld om eene eliminatie toe te laten. Gebruik makende van de afgeleide vergelijkingen kunnen we al wat omtrent de gedwongen beweging gevraagd wordt, bepalen.

Zoo is het gemakkelijk in ieder punt grootte en richting van den weerstand te bepalen en te vinden die punten, waar de weerstand een gegeven grootte heeft of een gegeven hoek maakt met een willekeurige rechte lijn bijv. een der coördinaatassen. Opmerking verdient, dat de bepaling der punten, waarin de weerstand een geheel gegeven richting zal hebben, slechts voor het platte vlak zal kunnen worden beantwoord.

Er kan ook omgekeerd worden gevraagd naar de kromme lijn of de kromme lijnen, die een punt, dat

zich daarlangs onder den invloed eener gegevene versnelling beweegt, een vooraf gegeven weerstand bieden.

Eigenlijk komt dit vraagstuk neer op het zoeken van de baan, welke een punt onder de werking van twee versnellingen, waarvan de eene is de gegevene en de andere de eveneens gegevene van den weerstand, zal afleggen.

Stellende als eerste voorwaarde, dat de weerstand moet zijn alleen van een gegeven grootte, dan is het vraagstuk bepaald, wanneer we ons beperken tot het platte vlak, aangezien ook de richting van den weerstand, als samenvallende met die van de normaal, alsdan gegeven is.

Zal de beweging plaats hebben in de ruimte, dan blijft het vraagstuk onbepaald, daar de richting van den weerstand, welke slechts normaal behoeft te zijn, hier niet is gegeven, en zal er door ieder punt een oneindig aantal kromme lijnen te trekken zijn, die aan de vraag voldoen, vormende te zamen een oppervlak, zóódat al deze daarop getrokken lijnen door het punt onder de werking der gegeven versnelling met den gegeven weerstand worden doorloopen.

De vergelijking dier kromme lijn of van dat oppervlak ligt opgesloten in:

$$R = \Phi(x, y, z)$$

of:

$$\sqrt{\left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\}^2 + F_3^2} = \Phi(x, y, z)$$

gevende een bepaalde kromme lijn, indien slechts twee der coördinaten; het oneindig aantal krommen, indien de drie coördinaten daarin voorkomen.

In de tweede plaats veronderstellende dat, behalve de grootte, ook de richting van den weerstand vooraf gegeven is, welk geval zich alleen zal kunnen voordoen in de ruimte, wordt het vraagstuk bepaald.

Gevende namelijk nog de grootte van een der hoeken λ, μ, ν uit (4) als functie van x, y, z, dan krijgen we behalve de bovenstaande vergelijking eene tweede, waardoor de kromme lijn, waarlangs het punt zich moet bewegen, bepaald is.

§ 9. 't Is duidelijk, dat zich nog tal van andere vraagstukken aan de voorgaande laten toevoegen, dat we, bij het behandelen van vraagstukken, dit geval betreffende, omtrent de op het punt werkende versnellingen een aantal onderstellingen kunnen maken, zoomede dat in verband met de voorgaande § het aantal vraagstukken met die verschillende versnellingen tot grondslag, onbepaald groot zal zijn.

We beginnen met te onderscheiden de gevallen dat het vraagstuk zich bepaalt tot het platte vlak en dat het betrekking heeft op de ruimte, niet alleen om de grootere moeielijkheden aan de oplossing in het laatste geval verbonden, maar ook omdat, gelijk uit § 8 bleek, bij sommige vraagstukken in die beide gevallen een verschillend resultaat moet worden verwacht.

Ons bepalende tot het platte vlak, zullen we gevoegelijk omtrent den aard der werkende versnellingen de volgende gevallen kunnen onderscheiden.

I. De resultante der op het punt werkende versnellingen is standvastig van grootte, en maakt een standvastigen hoek met de normaal.

II. De resultante der op het punt werkende versnellingen is standvastig van grootte, en maakt een veranderlijken hoek met de normaal.

III. De resultante, zooeven genoemd, is veranderlijk van grootte en maakt een standvastigen hoek met de normaal.

IV. De resultante is veranderlijk van grootte en maakt een veranderlijken hoek met de normaal.

Alvorens over te gaan tot de oplossing van eenige hieronder behoorende gevallen, merken we op, dat de bepaling van de richting van den weerstand hier steeds terug komt op de bepaling van de richting van de normaal, en dus als bekend mag worden aangenomen, ten tweede dat als gevolg daarvan, de uitdrukking voor den weerstand is:

$$R = \frac{v^2}{\rho} \mp F_2,$$

waarbij het bovenste teeken moet worden aangenomen, in geval de versnelling werkt naar de zelfde zijde der kromme lijn als de kromtestraal, het onderste in het tegengestelde geval. Rekenende evenwel F_2 positief, indien die componente gericht is volgens de kromtestraal, negatief in geval ze tegengesteld daaraan is gericht, dan wordt:

$$R = \frac{v^2}{\rho} - F_2$$

waarin ook de algemeene formule:

$$R = \sqrt{\left\{\frac{v^2}{\rho} - F_2\right\}^2 + F_3^2}$$

bij beperking tot het platte vlak overgaat.

De uitdrukking $v^2 - v_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1\, ds$ blijft onveranderd.

§ 9. I. De resultante der versnellingen is standvastig van grootte, en maakt een standvastigen hoek met de normaal.

Zij G de grootte der standvastige versnelling en α de standvastige hoek, welken zij maakt met de normaal, dan wordt R:

$$R = \frac{v^2}{\rho} - G\,cos.\,\alpha$$

waarin:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,G\,sin.\,\alpha\,(s - s_0),$$

dus:

$$R = \frac{v_0^2 + 2\,G\,sin.\,\alpha\,(s - s_0)}{\rho} - G\,cos.\,\alpha$$

gevende den weerstand voor ieder punt van de baan, met behulp van de daaraan gegeven vergelijking:

$$f(x, y) = 0.$$

Nemen we aan voor $t = 0$, $s = 0$ en $v = 0$, zoodat de beweging zonder initiale snelheid bij het begin der kromme lijn aanvangt, dan wordt:

$$R = 2\,G\,sin.\,\alpha\,\frac{s}{\rho} - G\,cos.\,\alpha,$$

waaruit blijkt dat de verandering van den weerstand over het gansche verloop der kromme lijn slechts afhangt van de wijze waarop de kromtestraal met den boog verandert.

Ten einde dit verder na te gaan, zullen we drie gevallen onderscheiden:

1°. De kromming der lijn neemt voortdurend toe.
(ρ neemt af bij toename van s).

2°. De kromming der lijn neemt voortdurend af.
(ρ neemt toe bij toename s).

3°. De kromming der lijn neemt beurtelings toe en af.

1°. ρ neemt af bij toename van s.

Daar bij afnemende ρ voor $s = 0$, ρ niet gelijk nul kan zijn, is in:

$$R = 2\,G\,sin.\,\alpha\,\frac{s}{\rho} - G\,cos.\,\alpha$$

voor $s = 0$, de weerstand steeds $= - G\,cos.\,\alpha$ en, zooals uit het negatieve teeken blijkt, tegengesteld gericht aan den kromtestraal. Bij het zich voortbewegen van het punt zal met toename van den teller der breuk $\frac{s}{\rho}$, afname van den noemer gepaard gaan, zoodat de weerstand toeneemt en gelijk nul zal worden voor $s_1 = \frac{1}{2}\rho\,.\,cotg.\,\alpha$, d. i. in dat punt, waar de afgelegde boog gelijk is aan het stuk, dat wordt afgesneden van de loodlijn, in het midden van den kromtestraal voor dat punt opgericht, door de loodlijn in het punt op de richting van de versnelling getrokken.

Voor $s > s_1$ wordt de weerstand > 0, dus gericht met den kromtestraal en neemt voortdurend toe, tot hij ten slotte oneindig groot wordt.

Dat dit moet plaats hebben is duidelijk. Bij voortdurend toenemende kromming kunnen zich twee gevallen voordoen; de kromtestraal nadert tot 0 of tot eene bepaalde waarde P′.

In het eerste geval, dat b.v. voorkomt, indien:

$$\alpha.\ \rho = \sum_1^n a_\varkappa s^{-\lambda_\varkappa},\quad \beta.\ \rho = \sum_1^n a_\varkappa s^{-\lambda_\varkappa} + \sum_1^m a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa}$$

$$\gamma.\ \rho = P_1 - \sum_1^n a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa},\quad \delta.\ \rho = P - \sum_1^n a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa},$$

$$\text{als } Lim.\ \sum_1^n a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa} = P \text{ voor } Lim.\ s = \infty,$$

waarbij de coëfficienten $\lambda_\varkappa$ zoowel geheele als gebroken positieve getallen kunnen voorstellen, is ten slotte de breuk $\frac{s}{\rho}$, 't zij de teller oneindig groot of eindig wordt, steeds oneindig groot en bijgevolg ook de weerstand R.

De beide eerste opgenoemde vergelijkingen stellen voor het geval, dat de kromtestraal van ∞, voor $s = 0$, ten slotte gelijk aan nul wordt, onder α na een oneindigen weg te hebben afgelegd, onder β na een eindigen boog s_1 zijnde de eenige positieve bestaanbare wortel, die voldoet aan de vergelijking:

$$\sum_1^n a_\varkappa s^{-\lambda_\varkappa} + \sum_1^m a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa} = 0.$$

Het tweede paar vergelijkingen stelt voor het geval, dat de kromtestraal van de eindige waarde P of P_1 voor $s = 0$, tot de waarde 0 komt, onder γ na afgelegd te hebben een eindigen weg s_1, zijnde de eenige positieve bestaanbare wortel van $P_1 - \sum_1^n a_\varkappa s^{\lambda_\varkappa} = 0$, onder δ na verloop van een oneindigen boog.

In het tweede geval, als nl. *Lim.* ρ niet 0 is zou $\frac{s}{\rho}$ ten slotte nog slechts dan een eindige waarde kunnen verkrijgen, indien de eindige waarde P′ na verloop van een eindigen boog s werd bereikt. Dit is evenwel niet mogelijk, aangezien men in die veronderstelling de kromme lijn zou kunnen voortzetten, om óf eens tot een kromtestraal $= 0$ te komen, óf; zoo dit niet bereikbaar was, na een oneindigen boog tot een kleineren eindigen kromtestraal te geraken.

Dit geval heeft plaats indien:

$$\varepsilon.\ \rho = P' + \sum_1^n a_\varkappa s^{-\lambda_\varkappa}, \qquad \eta.\ \rho = P - \sum_1^n a_\varkappa s^{\lambda_\varkappa}$$

indien *Lim.* $\sum_1^n a_\varkappa s^{+\lambda_\varkappa} = P_1$ voor *Lim.* $s = \infty$, waarbij de eerste vergelijking voorstelt het geval, dat de kromtestraal van ∞, voor $s = 0$, nadert tot P′, na een oneindigen boog; de tweede vergelijking voorstelt het geval, waarin de verandering van P tot $P' = P - P_1$ plaats heeft.

Steeds is derhalve in dit eerste geval de weerstand aanvankelijk $-\,G \cos.\alpha$ en eindigt met, na voortdurende toename, oneindig groot te worden. Neemt men de initiale snelheid niet gelijk nul en evenmin den boog s ter plaatse waar de beweging aanvangt, dan blijkt uit:

$$R = 2\,G \sin.\alpha\,\frac{s - s_0}{\rho} - G \cos.\alpha + \frac{v_0^2}{\rho},$$

dat men steeds bij den weerstand zal moeten voegen een term $\frac{v_0^2}{\rho}$, waarin ρ voorstelt den veranderlijken kromtestraal.

't Is duidelijk dat daardoor slechts de grootte, maar niet het verloop van den weerstand zal worden gewijzigd.

2°. ρ neemt toe, bij toename van s.

De waarde van de breuk $\frac{s}{\rho}$ kan in dit geval grooter worden, standvastig blijven of kleiner worden, al naarmate de noemer in minder sterke, even sterke of sterkere verhouding toeneemt dan de teller. We zullen hier onderscheiden:

a. De kromming is bij den aanvang der beweging eindig. $\rho_0 = P$.

b. De kromming is bij den aanvang der beweging oneindig groot. $\rho_0 = 0$.

a. Zij $\rho = P + \Phi(s)$, waarin $\Phi(s)$ nul moet zijn voor $s = 0$ en moet toenemen voor $s > 0$, dus b.v. van den vorm:

$$\Phi(s) = \sum_1^n a_p s^{\frac{h_p}{k_p}}$$

waarin:

$$0 < \frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2} < \text{——} < \frac{h_n}{k_n}$$

dan is:

$$\frac{s}{\rho} = \frac{s}{P + \sum_1^n a_p s^{\frac{h_p}{k_p}}} = \frac{1}{\frac{P}{s} + \sum_1^n a_p s^{\frac{h_p}{k_p} - 1}}$$

en zal eene verandering ondergaan, die afhangt van den aard van $\Phi\ (s)$.

α. Zijn in $\Phi\ (s)$ alle waarden van $\frac{h}{k} > 1$, d. i. heeft de toename van den kromtestraal in sterkere verhouding plaats dan die van den boog, dan zijn de exponenten van alle in den vorm $\sum_1^n a_p\, s^{\frac{h_p}{k_p} - 1}$ voorkomende machten > 0; voor $s = 0$, zal $\frac{s}{\rho} = 0$ en $R = -$ G *cos.* α worden. Bij toenemende waarden van s zal $\frac{P}{s}$ van af ∞ afnemen, $\sum_1^n a_p\, s^{\frac{h_p}{k_p} - 1}$ van af 0 toenemen, bij gevolg zal de noemer der tweede waarde van $\frac{s}{\rho}$, voor eene zekere waarde $s = s_1$ zijn minimum en dus $\frac{s}{\rho}$ zijn maximum q bereiken, waarmede R zijn grootste waarde 2 G q *sin.* α — G *cos.* α verkrijgt; voor grootere waarden van s zal $\frac{s}{\rho}$ weer afnemen en voor $s = \infty$ naderen tot 0, waarbij R weer $= -$ G *cos.* α wordt.

De weerstand zal dus van af een minimum $= -$ G *cos.* α, gericht tegen den kromtestraal, tijdelijk toenemen tot een maximum en van daar voortdurend afnemen tot — G *cos.* α.

β. Zijn in $\Phi\ (s)$ alle waarden van $\frac{h}{k} < 1$, d. i. neemt de kromtestraal in minder sterke verhouding toe dan de boog, dan zijn in den noemer $\frac{P}{s} + \sum_1^n a_p\, s^{\frac{h_p}{k_p} - 1}$ alle exponenten < 0, bijgevolg zal voor $s = o$, $\frac{s}{\rho} = 0$ en $R = -$ G *cos.* α worden.

Bij toenemende waarden van s zal de noemer

$$\frac{P}{s} + \sum_1^n a_p\, s^{\frac{h_p}{k_p} - 1}$$

voortdurend af en de breuk $\frac{s}{\rho}$ voortdurend toenemen, tot dat voor $s = \infty$, $\frac{s}{\rho}$ en bijgevolg ook $R = \infty$ wordt. In dit geval zal dus de weerstand van — G *cos.* α in den aanvang voortdurend toenemen tot oneindig groot.

γ. Zijn in $\Phi\ (s)$,

$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2} < \dots < \frac{h_m}{k_m} < 1$ en $\frac{h_n}{k_n} > \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} > \dots > \frac{h_{m+1}}{k_{m+1}} > 1$,

d. i. heeft de toename van den kromtestraal nu eens in sterkere, dan eens in minder sterke verhouding plaats dan die van den boog zelven, dan zal in $\frac{s}{\rho}$ de noemer, behalve uit $\frac{P}{s}$, bestaan uit machten met deels positieve, deels negatieve exponenten. Voor $s = 0$ zal weer $R = -$ G *cos.* α zijn, voor toenemende s zal de som der negatieve machten in den noemer afnemen, de som der positieve toenemen. Voor eene zekere waarde $s = s_1$ zal die noemer weer een minimum, dus de breuk $\frac{s}{\rho}$ en bijgevolg ook R een maximum worden. Voor $s > s_1$ neemt R weer af tot voor $s = \infty$, R weer $= -$ G *cos.* α wordt. De verandering van den weerstand is dus als onder α.

b. Zij in dit geval $\rho = \Phi\ (s)$, waarbij weer $\Phi\ (s) = 0$ voor $s = 0$ en toenemende moet zijn voor toenemende s, dus den vorm:

$$\sum_1^n a_p\, s^{\frac{h_p}{k_p}},$$

dan is:

$$\frac{s}{\rho} = \frac{s}{\sum\limits_{1}^{n} a_p s^{\frac{h_p}{k_p}}} = \frac{1}{\sum\limits_{1}^{n} a_p s^{\frac{h_p}{k_p}-1}}.$$

α. Zijn nu alle waarden van $\frac{h}{k} > 1$, dan komen in $\sum\limits_{1}^{n} a_p s^{\frac{h_p}{k_p}-1}$ slechts positieve exponenten voor, zoodat voor $s = 0$, $\frac{s}{\rho} = \infty$ en derhalve ook $R = \infty$ wordt. Voor toenemende waarden van s wordt $\frac{s}{\rho}$ kleiner, zoodat ook R afneemt, terwijl voor $s = \infty$, $\frac{s}{\rho} = 0$ en de weerstand weer $= -G\,cos.\,\alpha$ wordt.

In dit geval neemt de weerstand af van ∞ in den aanvang tot $-G\,cos.\,\alpha$ op het einde der kromme lijn.

β. Zijn alle waarden van $\frac{h}{k} < 1$, dan komen in den noemer slechts negatieve exponenten voor, zoodat voor $s = 0$, $\frac{s}{\rho} = 0$ en $R = -G\,cos.\,\alpha$ wordt. Voor toenemende s neemt $\frac{s}{\rho}$ toe, tot voor $s = \infty$, $\frac{s}{\rho} = \infty$ en R weer gelijk ∞ wordt.

γ. Is

$$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2} < \cdots < \frac{h_m}{k_m} < 1 \text{ en } 1 < \frac{h_{m+1}}{k_{m+1}} < \cdots < \frac{h_n}{k_n},$$

dan zullen in den noemer de m eerste machten negatieve, de $(n-m)$ volgende positieve exponenten hebben, waaruit volgt dat, terwijl de weerstand voor $s = 0$, gelijk aan $-G\,cos.\,\alpha$ wordt, hij voor toenemende s toeneemt, voor

$s = s_1$ een maximum bereikt om voor $s > s_1$ weer af te nemen tot $-G\,cos.\,\alpha$ voor $s = \infty$.

Aan te nemen dat de initiale snelheid niet gelijk nul is zal in sommige gevallen eene geringe wijziging in het verloop van den weerstand opleveren.

3°. Bij toenemende s neemt ρ beurtelings toe en af.

Heeft men bepaald de punten der kromme lijn, waar eene toename van de kromming overgaat in eene afname en omgekeerd, dan zal men met behulp van het voorgaande gemakkelijk de verandering van den weerstand kunnen nagaan over de verschillende deelen der kromme lijn, door die punten begrensd. De bepaling der genoemde punten is gemakkelijk uit te voeren.

Na aldus te hebben onderzocht den weerstand, bij beweging langs een vooraf gegeven lijn optredende, blijft over te zoeken, hoe de kromme lijn moet wezen, opdat ze aan een zich daarlangs bewegend punt een vooraf gegeven weerstand biedt.

Onderstellende dat die weerstand standvastig moet wezen komen we tot het vraagstuk:

Welke is de kromme lijn, die door het punt met standvastigen weerstand zal worden doorloopen?

Om een standvastigen weerstand te verkrijgen zal in:

$$R = 2\,G\,sin.\,\alpha\,\frac{s}{\rho} - G\,cos.\,\alpha$$

$$\frac{s}{\rho} = \text{Const.}$$

moeten zijn:

d. i. de kromtestraal zal evenredig moeten zijn aan den afgelegden boog, waaruit reeds volgt dat de kromme lijn er eene is van afnemende kromming.

Ten einde de vergelijking der kromme lijn te bepalen, schrijven wij:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{k}{s}$$

of, voor $\frac{1}{\rho}$ gebruikende $\dfrac{\frac{d^2 y}{d s^2}}{\frac{d x}{d s}}$, waarin s als onafhankelijk veranderlijke is aangenomen,

$$\frac{\frac{d^2 y}{d s^2}}{\frac{d x}{d s}} = \frac{k}{s}$$

en $\frac{d y}{d s} = y'$ stellende $\dfrac{\frac{d y'}{d s}}{\sqrt{1 - y'^2}} = \frac{k}{s}$

of: $$\frac{d y'}{\sqrt{1 - y'^2}} = \frac{k\, d s}{s}$$

$$Bg\ sin.' y' = k\, l\, s + C,$$

of, wanneer we de x - as evenwijdig nemen aan de raaklijn aan het punt der kromme lijn, waarvoor $s = q$,

$$0 = k\, l\, q + C;$$

bij gevolg:

$$Bg\ sin.\ y' = k\, l\left(\frac{s}{q}\right) = l\left(\frac{s}{q}\right)^k,$$

waaruit:

$$y' = \frac{d y}{d s} = sin.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k$$

en, daar:

$$\frac{d x}{d s} = \sqrt{1 - y'^2}$$

$$\frac{d x}{d s} = cos.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k$$

of, na integratie:

$$y = \int sin.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k d s + C'$$

$$x = \int cos.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k d s + C''.$$

Nu vindt men door substitutie van

$$l\left(\frac{s}{q}\right)^k = z$$

$$\int sin.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k ds = \frac{q}{k} \int e^{\frac{z}{k}} sin.\, z\, d z =$$

$$= q.\, \frac{e^{\frac{z}{k}} (sin.\, z - k\ cos.\, z)}{1 + k^2} =$$

$$= \frac{s}{1 + k^2} \left\{ sin.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k - k\ cos.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\},$$

$$\int cos.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k d s = \frac{q}{k} \int e^{\frac{z}{k}} cos.\, z\ d z =$$

$$= q\, \frac{e^{\frac{z}{k}} (k\ sin.\, z + cos.\, z)}{1 + k^2} =$$

$$= \frac{s}{1 + k^2} \left\{ k\ sin.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k + cos.\ l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\};$$

dus:

$$y = \frac{s}{1+k^2}\left\{ sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k - k\, cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\} + C'$$

$$x = \frac{s}{1+k^2}\left\{ k\, sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k + cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\} + C'',$$

of, wanneer voor $s = q$, tegelijkertijd $x = 0$ en $y = 0$ is:

$$0 = -\frac{kq}{1+k^2} + C', \qquad 0 = \frac{q}{1+k^2} + C''$$

dus: $\quad C' = \frac{kq}{1+k^2}, \qquad C'' = -\frac{q}{1+k^2},$

bij gevolg:

$$y = \frac{s}{1+k^2}\left\{ sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k - k\, cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\} + \frac{kq}{1+k^2}$$

$$x = \frac{s}{1+k^2}\left\{ k\, sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k + cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\} - \frac{q}{1+k^2},$$

waarin de beide laatste termen:

$$\frac{qk}{1+k^2} \quad \text{en} \quad -\frac{q}{1+k^2}$$

tevens de coördinaten voorstellen van het beginpunt der kromme lijn.

Ten einde hieruit de vergelijking dier kromme lijn op gewone coördinaten af te leiden, zouden we s moeten elimineeren.

Verplaats daartoe, door de substitutie:

$$x' = x + \frac{q}{1+k^2} \quad \text{en} \quad y' = y - \frac{kq}{1+k^2}$$

het coördinatenstelsel evenwijdig aan zich zelve, zóó dat de oorsprong in het beginpunt der kromme lijn komt, dan bekomen we:

$$y' = \frac{s}{1+k^2}\left\{ sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k - k\, cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\}$$

$$x' = \frac{s}{1+k^2}\left\{ k\, sin.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k + cos.\, l\left(\frac{s}{q}\right)^k \right\}.$$

Optelling der beide vergelijkingen na hunne leden tot de tweede macht te hebben verheven, geeft dan:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{s^2}{1+k^2},$$

of:

$$r^2 = \frac{s^2}{1+k^2}$$

d. i.

$$s = r\sqrt{1+k^2},$$

zijnde de vergelijking der logarithmische spiraal, waarin k voorstelt de tangens van den standvastigen scherpen hoek α', dien de richting der raaklijn met die van den voerstraal maakt.

Ten einde ons hiervan te overtuigen leiden we uit de laatste vergelijking af:

$$ds = dr\sqrt{1+k^2}$$

$$\sqrt{dr^2 + r^2\, d\vartheta^2} = dr\sqrt{1+k^2}$$

of:

$$r^2\, d\vartheta^2 = k^2\, dr^2$$

$$r\, d\vartheta = k\, dr$$

$$\frac{d\vartheta}{k} = \frac{dr}{r}$$

$$\frac{\vartheta}{k} = l\, r$$

$$r = e^{\frac{\vartheta}{k}} = e^{\frac{\vartheta}{tg.\, \alpha'}},$$

zijnde de vergelijking der logarithmische spiraal.

Wordt als bijzonder geval gevraagd de vergelijking der lijn, waarbij de weerstand standvastig gelijk nul is, dan moet voor k gesubstitueerd worden hare waarde uit:

$$0 = 2\,G\, sin.\, \alpha .\, k - G\, cos.\, \alpha$$

of:

$$k = \tfrac{1}{2}\, cot.\, \alpha,$$

waarmede
$$r = e^{2\vartheta\, tg.\,\alpha}\,.$$

Voor $R = -G\, cos.\,\alpha$ wordt $k = 0$; bij substitutie blijkt dat de vergelijkingen dan worden:
$$y = 0 \text{ en } x = s - q$$
d. i.
$$y = 0 \text{ en } s = q + x,$$
voorstellende de rechte lijn, wat ook vooraf was in te zien.

Onderstellende dat in het begin der beweging de snelheid eene eindige waarde v_0 heeft, gaat de betrekking, die den aard der gezochte kromme lijn aangeeft, over in
$$Const. = 2\,G\, sin.\,\alpha \frac{s}{\rho} - G\, cos.\,\alpha + \frac{v_0^2}{\rho}$$
$$\frac{2\,G\, sin.\,\alpha\,.\; s + v_0^2}{\rho} = k$$
of:
$$\rho = a + bs.$$
waarin
$$b = \frac{2\,G\, sin.\,\alpha}{k},\; a = \frac{v_0^2}{k}$$
of, na behandeling als in het voorgaande geval:
$$y = \int ds\, sin.\left(\frac{1}{b}\, l\, \frac{a + bs}{a + bq}\right) + C_1$$
$$x = \int ds\, cos.\left(\frac{1}{b}\, l\, \frac{a + bs}{a + bq}\right) + C_2$$
neerkomende op het vinden der integralen
$$\int ds\, cos.\left\{\frac{1}{b}\, l\,(a + bs)\right\} \text{ en } \int ds\, sin.\left\{\frac{1}{b}\, l\,(a + bs).\right\}$$

Het hier behandelde vraagstuk was een bijzonder geval van dat, waarbij gezocht wordt de kromme lijn, waarlangs een punt zich moet bewegen om een weerstand te ondervinden, waarvan de grootte aan een bepaalde wet gehoorzaamt.

Bij de behandeling hiervan stuiten we evenwel op integralen, die niet in eindigen vorm zijn te vinden.

Bijzondere gevallen van het voorgaande worden verkregen:

1°. voor $G = 0$. Het punt beweegt zich dan, zonder dat er eenige versnelling op werkt.

2°. voor $\alpha = 0$. Het punt beweegt zich onder de werking eener normaal gerichte versnelling.

3°. voor $\alpha = \frac{\pi}{2}$. De beweging heeft plaats onder den invloed eener volgens de raaklijn gerichte versnelling.

1°. $G = 0$.

Hiermede wordt:
$$v = v_0,$$
en
$$R = \frac{v_0^2}{\rho},$$
waaruit blijkt, dat de snelheid standvastig is en de weerstand omgekeerd evenredig aan den kromtestraal. De weerstand neemt dus toe over die deelen der baan, waar de kromming toeneemt, zoodat hij ter plaatse, waar eene toename van kromming overgaat in eene afname, een maximum, in punten, waar het tegenovergestelde het geval is, een minimum wordt.

De kromme lijn, waarlangs het punt zich met standvastigen weerstand zal bewegen, en die gevonden wordt uit:
$$\frac{v_0^2}{\rho} = k,$$
of:
$$\rho = \frac{v_0^2}{k} = Const.$$
is de rechte lijn of de cirkel. Voor de eerste lijn is de weerstand tevens standvastig gelijk nul.

Het zoeken der kromme lijn, waarlangs het punt zich met een vooraf gegeven veranderlijken weerstand zal bewegen, voert weer tot integralen, die niet in eindigen vorm te vinden zijn.

2⁰. $\alpha = 0$.

Ook in dit geval is:

$$v = v_0,$$

terwijl:

$$R = \frac{v_0^2}{\rho} - G,$$

zoodat voor de wijze, waarop de weerstand verandert, ongeveer hetzelfde geldt als in het voorgaande geval.

De kromme lijn, waarlangs het punt zich met standvastigen weerstand zal bewegen, is eveneens de cirkel of de rechte lijn.

3⁰. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

De weerstand wordt:

$$R = \frac{v^2}{\rho},$$

waarin:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,G\,s,$$

zoodat:

$$R = \frac{v_0^2 + 2\,G\,s}{\rho}$$

en hieruit voor de verandering van den weerstand dezelfde gevolgtrekkingen kunnen worden gemaakt als in het eerste geval.

Voor $v_0 = 0$ wordt de kromme lijn van standvastigen weerstand weer de logarithmische spiraal.

§ 11. II. De versnelling is van standvastige grootte doch maakt een veranderlijken hoek met den kromtestraal.

Aangezien we omtrent die veranderlijke richting met betrekking tot de kromme lijn een aantal verschillende

onderstellingen kunnen maken, bepalen we ons tot het geval, dat de absolute richting der versnelling onveranderlijk is en komen dan, door aan te nemen dat de richting dier versnelling tevens die der zwaartekracht is, tot het vraagstuk der

Bepaling van den weerstand, dien een zwaar punt ondervindt bij beweging zonder wrijving langs een gegeven kromme lijn.

Noem g de versnelling der zwaartekracht, waarvan de richting tot x - as is aangenomen en zij v_0 de snelheid van het punt bij het begin der beweging, welke we veronderstellen van uit den oorsprong plaats te hebben. Alsdan is:

$$R = \frac{v^2}{\rho} + g\frac{dy}{ds}$$

en:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,x,$$

dus:

$$R = \frac{v_0^2 + 2\,g\,x}{\rho} + g\frac{dy}{ds}$$

waarin voor $\frac{dy}{ds}$ en ρ hunne aan de gegeven vergelijking der kromme lijn ontleende waarden moeten gesubstitueerd worden.

Het is tot dit geval dat moeten worden teruggebracht tal van beroemde vraagstukken, waaraan mannen als Newton, Huygens, Leibnitz, Euler, de Bernoulli's en anderen hunne krachten hebben gewijd.

Onder deze merken we op:

1⁰. het vraagstuk der isochrone [1]), zijnde de kromme

1) Huygens, Nouvelles de la République des Lettres.
Leibnitz, Acta Erud., Lips. 1689, p. 196 en volgg.
Jac. Bernoulli, Acta Erud. 1690, p. 217.

lijn die de eigenschap bezit dat een zich daarlangs bewegend zwaar punt in gelijke tijden over gelijke hoogten daalt en voorgesteld door een parabool van den $\frac{3}{2}$den graad.

2°. Het vraagstuk der tautochrone [1]), zijnde de kromme lijn, waarlangs een zwaar punt zich moet bewegen, opdat de tijd, noodig omvan uit een punt dier lijn, waar het zich in den toestand van rust bevindt tot een tweede punt te geraken, onafhankelijk is van de plaats van het eerste.

3°. Het vraagstuk der synchrone [2]), zijnde de meetkunstige plaats van de uiteinden der bogen, die in den zelfden tijd worden afgelegd door een zwaar punt, dat zich van uit den rusttoestand beweegt langs verschillende door den aanvangsstand van het punt getrokken gelijkvorming lijnen.

4°. Het vraagstuk der brachistochrone [3]) bij versnelling der zwaartekracht, of der kromme lijn, waarlangs een zwaar punt zich moet bewegen tusschen twee gegeven punten zóódat de daartoe noodige tijd een minimum is.

Het omgekeerde vraagstuk, de **bepaling der krommelijn, waarlangs een zwaar punt zich met vooraf gegeven weerstand zal bewegen**, ligt opgesloten in de vergelijking:

---

1) Huygens, Horologium Oscillatorium, P. II, prop. 25.
Newton, Principia, Lib I, prop. 53.
Euler, Commentarii Petropolit., 1729.
Euler, Mechanica, t. II, p. 211.
2) Joh. Bernoulli, Acta Erud., Lips. 1696. p. 206.
Euler, Mechanica, t. II, p. 417.
3) Joh. Bernoulli, Acta Erud., Lips. 1696. p. 269; 1697, p. 207.
Leibnitz, Commercium epistolicum Leibn. et Berne epist. XXVIII.
Jac. Bernoulli. Acta Erud., Lips. 1697, p. 212.
l'Hôpital, Acta Erud. 1697, p. 217.
Newton, Philos. Transact., 1697, n° 224, p. 389.

$$\frac{v^2}{\rho} + g\frac{dy}{ds} = \Phi(x, y),$$

waarin Φ (x, y) de veranderlijke grootte voorstelt van den weerstand.

Bepalen we ons tot het geval dat de weerstand standvastig zal moeten zijn, dan komen we tot een vraagstuk, dat een zekere bekendheid heeft verkregen en waarvan de oplossing door l'Hôpital werd gegeven.

De bovengenoemde vergelijking gaat dan over in:

$$\frac{v^2}{\rho} + g\frac{dy}{ds} = Const. = k,$$

waaruit:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{k - g\frac{dy}{ds}}{v^2},$$

of daar:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{d s^2}}{\frac{d x}{d s}}$$

$$\text{en } v^2 = v_{02} + 2 g x,$$

na herleiding:

$$\frac{k}{\sqrt{v_0^2 + 2 g x}}\frac{d x}{ds} = \sqrt{v_0^2 + 2 g x}\,\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{g}{\sqrt{v_0^2 + 2 g x}}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds},$$

welke vergelijking tot integraal heeft:

$$\frac{k}{g}\sqrt{v_0^2 + 2 g x} = \frac{d y}{ds}\sqrt{v_0^2 + 2 g x} + Const.$$

Nemende nu de coördinatenassen zoodanig, dat de raaklijn in den oorsprong aan de kromme lijn getrokken een hoek α maakt met de y-as, dan zal voor $x = 0$;

$$\frac{k}{g} v_0 = v_0 \sin. \alpha + Const.$$

$$Const. = v_0 \left(\frac{k}{g} - \sin. \alpha\right)$$

waarmede:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} - \frac{v_0}{g} \frac{k - g \sin. \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}$$

of, na substitutie van:

$$\frac{k}{g} = \mathrm{A}, \frac{v_0}{g}(k - g \sin. \alpha) = \mathrm{B} \text{ en } v_0^2 + 2gx = z^2$$

en na ds in dy en dz te hebben uitgedrukt:

$$gdy = \frac{(\mathrm{A}z - \mathrm{B})\, z\, dz}{\sqrt{(1 - \mathrm{A}^2)\, z^2 + 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}\, z - \mathrm{B}^2}}$$

welke in eindigen vorm kan geintegreerd worden [1]).

---

1) Het vraagstuk der Curva „aequilibrationis", zooals deze lijn door Johannes Bernoulli werd genoemd, wordt door hem onder eenige andere vraagstukken, de gedwongen beweging betreffende, aangegeven in een brief aan Leibnitz voorkomende in Commercium epistolicum Leibnitzii et Bernoulli, epist. VII met vermelding dat de kromme lijn kan zijn transcendent of algebraisch. De oplossing wordt niet aldaar gegeven, maar is van l'Hôpital en komt voor in de Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1700, pag. 9.

DERDE HOOFDSTUK.

De gedwongen beweging wordt veroorzaakt door den weerstand der middenstof, waarin het punt zich beweegt.

§ 12. In deze veronderstelling komt de in § 5 gebruikte formule terug op de bekende vergelijking:

$$\mathrm{R}_1 + \mathrm{F}_1 = v \frac{dv}{ds},$$

terwijl:

$$v^2 = \rho\, \mathrm{F}_2 .$$

Bij deze vergelijkingen evenals bij alle voorgaande heeft men zich voor te stellen, dat de boog s in een bepaalde richting positief wordt gerekend en dat v, F_1 en

$$\mathrm{R}_1 = v \frac{dv}{ds} - \mathrm{F}_1 ,$$

als zij positief zijn, dezelfde richting hebben. Wil men liever den weerstand positief noemen als hij tegengesteld is aan eene positieve snelheid, dan moet men het teeken van R_1 omkeeren, en wordt dus

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{F}_1 - v \frac{dv}{ds}$$

De weerstand, dien een punt ondervindt van de middenstof, waarin het zich beweegt, is afhankelijk van de snelheid, die het punt bezit. 't Is evenwel duidelijk, dat het aannemen van een bepaalde wet, volgens welke de weerstand met de snelheid verandert, meestal niet toereikende zal zijn, om den weerstand R_1 op de door het vraagstuk vereischte wijze te doen veranderen. We zullen daartoe moeten aannemen, dat ook de dichtheid D der middenstof, waarin het punt zich beweegt, veranderlijk is. Onderstellende dat de weerstand evenredig is met het vierkant der snelheid en met de eerste macht van de dichtheid der middenstof, dus aannemende:

$$R_1 = \mu D v^2,$$

zal de hieruit berekende waarde

$$D = \frac{R_1}{\mu v^2}$$

of:

$$D = \frac{F_1 - \frac{1}{2}\frac{d.v^2}{ds}}{\mu v^2} = \frac{F_1}{\mu v^2}, - \frac{1}{2\mu}\frac{d.lv^2}{ds} = \frac{1}{\mu\rho}\frac{F_1}{F_2} - \frac{1}{2\mu}\frac{d.l\rho F_2}{ds}$$

de dichtheid voorstellen, die de middenstof moet bezitten, opdat het punt de voorgeschreven baan doorloopt.

Zij $F_2 = F \cos.\alpha$, waarin α voorstelt den hoek, gevormd door de richting der versnelling met die der normaal, dan is:

$$v^2 = \rho F_2 = \rho F \cos.\alpha$$

$$v^2 = F \rho \cos.\alpha = 2 F \tfrac{1}{2} \varkappa.$$

Hierin stelt $\varkappa = \rho \cos.\alpha$ de helft voor der koorde, welke door den kromtecirkel van de op het punt werkende versnelling wordt afgesneden.

Bij gevolg is de snelheid in ieder punt der baan gelijk aan die, welke verkregen wordt, door het punt onder de

werking der gegevene versnelling vrij te doen vallen over een afstand gelijk aan het vierde deel dier koorde.

Gebruik makende van deze uitdrukkingen, komen we bij twee verschillende onderstellingen omtrent de werkende versnelling tot de oplossing der volgende gevallen, voorkomende bij Newton en Joh Bernoulli [1]).

Vooraf merken we op, dat, zal een punt werkelijk de gegeven baan beschrijven, de initiale snelheid v_0 in een punt (x_0, y_0) aan het zich bewegende punt meegedeeld, zal moeten voldoen aan:

$$v^2 = \rho F_2$$

en de richting zal moeten hebben van de raaklijn in het beginpunt aan de gegeven kromme lijn getrokken.

§ 13. I. De op het punt werkende versnelling is standvastig van richting [2]).

Zij de y-as evenwijdig genomen aan de richting der versnelling en de grootte dezer laatste $= Y$, dan is:

$$F_1 = Y \frac{dy}{ds}$$

$$F_2 = Y \frac{dx}{ds},$$

waarmede:

$$v^2 = \rho Y \frac{dx}{ds},$$

1) Zeer uitvoerig is ook het onderwerp der beweging van een punt langs een gegeven lijn in een weerstandbiedende middenstof behandeld door Euler in zijne Mechanica, aldaar voorkomende in de uitgave van dr. J. Wolfers, pag. 211—418.

2) Newton, Principia, Lib. II prop. 10.

De hier voorkomende oplossing was niet juist; zij komt nader verbeterd voor in: Joh. Bernoulli, Opera, t. I, p. 515.

$$R_1 = Y\frac{dy}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{d\left(\rho Y \frac{dx}{ds}\right)}{ds}$$

of, na substitutie van:

$$\rho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$v^2 = \frac{Y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

en

$$R_1 = Y\frac{dy}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{Y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

$$R_1 = Y\frac{dy}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{dx}{ds}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

of, na herleiding:

$$R_1 = Y\frac{dy}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right) - Y\frac{\frac{d^2s}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

of, in verband met:

$$\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$R_1 = Y\frac{dy}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right) - Y\frac{dy}{ds}$$

$$R_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right).$$

Wenscht men ten slotte de dichtheid der middenstof te bepalen noodig om dien weerstand voort te brengen, dan vindt men:

$$D = \frac{R_1}{\mu v^2} = \frac{-\tfrac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{\mu\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dx}{ds}\frac{d\,l\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx}$$

§ 14. II. De op het punt werkende versnelling is afkomstig van een aantrekking, uitgaande van een vast punt [1]).

Zij de oorsprong van het poolcoördinatenstelsel aangenomen in het punt, waarheen de versnelling is gericht; zij verder P de lengte der loodlijn uit den oorsprong op de raaklijn neergelaten, dan zullen de vergelijkingen:

$$v^2 = \rho F_2$$

$$R_1 = F_1 - v\frac{dv}{ds},$$

daar:

$$F_1 = -F\frac{dr}{ds}$$

---

1) Newton, Principia, Lib. II, prop. 17, 18.
Joh. Bernoulli, Opera, t. IV, p. 347.

$$F_2 = F\frac{P}{r}$$

overgaan in:

$$v^2 = \rho F\frac{P}{r},$$

$$R_1 = -F\frac{dr}{ds} - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\rho F\frac{P}{r}\right)$$

of, daar:

$$\rho = r\frac{dr}{dP}$$

$$v^2 = FP\frac{dr}{dP}$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(FP\frac{dr}{dP}\right) - F\frac{dr}{ds}.$$

of, bij herleiding:

$$R_1 = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{P^2}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right) - F\frac{dr}{ds},$$

overgaande in:

$$R_1 = -\frac{1}{2P}\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right).$$

Zoo de dichtheid der middenstof verlangd wordt, vindt men

$$D = \frac{R_1}{\mu v^2} = \frac{-\frac{1}{2P^2}\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)}{\frac{\mu}{P}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)} = -\frac{1}{2\mu}\frac{d}{ds}l\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right).$$

't Is duidelijk, dat niet in alle veronderstellingen omtrent de werkende versnellingen en omtrent de gegeven kromme lijn eenvoudige resultaten worden verkregen.

Indien we voor het eerste geval, bij veronderstelling van eene standvastige versnelling, bijv. die der zwaartekracht, als gegevene kromme lijn aannemen een halven

cirkel, beschreven boven eene horizontale middellijn [1]), een hyperbool van de $n+1^e$ orde [2]), een parabool van de n^e orde, zijn de gevraagde waarden gemakkelijk te bepalen.

Nemen we in het tweede geval, bij veronderstelling eener versnelling, die omgekeerd evenredig is aan de n^0 macht van den afstand, als kromme lijn aan een cirkel, op wiens omtrek het punt ligt, van waar de krachtwerking uitgaat, of een logarithmische spiraal, in welker pool dit punt is gelegen [3]), dan verkrijgen we eveneens eenvoudige uitkomsten.

§ 15. We zullen de berekeningen uitvoeren voor het volgende geval.

Welke is de weerstand, die door een middenstof moet worden uitgeoefend, opdat een punt zich zal bewegen langs een logarithmische spiraal onder de werking eener aantrekkende versnelling, die gericht is naar de pool en omgekeerd evenredig is aan de n^e macht van den afstand tot die pool?

Zij de vergelijking der logaritmische spiraal

$$r = e^{\frac{\vartheta}{tg.\beta}},$$

waarin β voorstelt den standvastigen scherpen hoek tusschen raaklijn en voerstraal en waarin, voor positieve waarden van ϑ, r toeneemt van 1 tot ∞, voor negatieve waarden afneemt van 1 tot 0; zij verder s de boog naar de pool

[1]) Newton, Principia, lib. II, prop. 10, en 6.
[2]) Euler, Mechanica, 1. I, p. 400.
[3]) Newton, Principia, lib. II, prop. 15, 16.

toegerekend, zoodat de positieve bewegingsrichting eveneens daarheen is gericht. Substitutie van

$$F = \frac{p}{r^n},\quad F_1 = \frac{p}{r}\cos.\beta,\quad F_2 = \frac{p}{r^n}\sin.\beta$$

$$\rho = \frac{r}{\sin.\beta} \text{ en } P = r\sin.\beta$$

geeft:

$$v^2 = \rho F_2 = \frac{p}{r^{n-1}}$$

$$R_1 = -\frac{1}{2r^2\sin.^2\beta}\frac{d}{ds}\left(\frac{p\sin.^2\beta}{r^{n-3}}\right)$$

of, daar:

$$\frac{dr}{ds} = -\cos.\beta.$$

$$R_1 = -\frac{p(n-3)\cos.\beta}{2r^n}$$

en:

$$D = \frac{R_1}{\mu v^2} = -\frac{(n-3)\cos.\beta}{2\mu r},$$

waaruit blijkt, dat de weerstand moet wezen omgekeerd evenredig aan de n^e macht en de dichtheid der middenstof omgekeerd evenredig aan de 1^e macht van den afstand tot de pool, welke ook in dit laatste geval de waarde zij van n.

De voor de logarithmische spiraal geldende substitutie:

$$r = s'\cos.\beta,$$

waarin s' voorstelt den boog, geteld van af de pool, doet ons de zelfde wetten met betrekking tot den boog kennen.

Wij merken nog het volgende op, dat uit het omtrent de teekens vastgestelde volgt.

Wanneer de grootheid R_1 door de bovenstaande formule positief wordt gevonden, dus voor $n < 3$ zal zij een werke-

lijken weerstand voorstellen, als het punt zich naar de pool beweegt, terwijl dan voor de omgekeerde beweging een tangentiale versnelling in de bewegingsrichting gevorderd wordt. Wordt daarentegen $n > 3$, dus R_1 negatief, dan zal het omgekeerde plaats hebben, dus de beweging van de pool af een weerstand vereischen.

Uit de voorgaande uitdrukkingen blijkt:

1°. voor $n = 0$, d. i. bij een standvastige versnelling, wordt:

$$R_1 = 1\tfrac{1}{2}\,p\cos.\beta = 1\tfrac{1}{2}\,\kappa,$$

waarin κ voorstelt de tangentiale componente der versnelling. De weerstand is dan standvastig. Daar, om de voorgeschreven beweging te verkrijgen bij nadering tot de pool de weerstand anderhalf maal zoo groot moet zijn als de tangentiale versnelling, zal de snelheid van het punt moeten afnemen, wat ook blijkt uit:

$$v^2 = pr$$

tevens aantoonende dat het punt in de pool eene snelheid gelijk nul zou bezitten.

Omgekeerd kan men uit het voorgaande besluiten:

Indien een punt onderworpen is aan een standvastige versnelling p naar een vast punt gericht, en bovendien aan een steeds even grooten tangentialen weerstand R_1, dan zal het een logarithmische spiraal beschrijven, wanneer 1°. de beginsnelheid voldoet aan $v_0^2 = p\,r_0$, en 2°. die snelheid met r een hoek β vormt, bepaald door

$$\cos.\beta = \tfrac{2}{3}\frac{R_1}{p}.$$

2°. voor $n = 1$, zal:

$$v^2 = p$$

dus:

$$v = \sqrt{p}$$

d. i. standvastig worden,

terwijl:

$$R_1 = \frac{p}{r} \cos. \beta$$

dus standvastig gelijk aan de tangentiale componente der versnelling moet zijn, wat de standvastige snelheid ook doet verwachten.

VIERDE HOOFDSTUK.

De beweging heeft plaats met wrijving.

§ 16. Gelijk in § 5 is opgemerkt, komt de oplossing van dit geval neer op die eener differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$\tfrac{1}{2} \frac{d\,\rho\,(F_2 + R_2)}{d\,s} - F_1 = f \sqrt{R_2^{\,2} + F_3^{\,2}},$$

welke, in geval:

1⁰. dat het vraagstuk bepaald is tot het platte vlak,

2⁰. dat de versnelling in het kromtevlak is gelegen,

overgaat in eene lineaire, waarvan de oplossing is:

$$R_2 = \frac{e^{2f\int\frac{ds}{\rho}}}{\rho}\left[C' - \int\left(\frac{d\,\rho\,F_2}{d\,s} - 2\,F_1\right) d\,s\; e^{-2f\int\frac{ds}{\rho}}\right]$$

en waaruit zich dan op de eveneens aangegeven wijze laten bepalen R_1 en v.

1⁰. Het vraagstuk is beperkt tot het platte vlak.

Evenals in de beide voorgaande hoofdstukken kan men ook hier voor de logarithmische spiraal de berekeningen geheel uitvoeren. Wij zullen dus als toepassing der algemeene formules oplossen het

Vraagstuk. Indien gegeven is, dat een punt zich met wrijving moet bewegen langs een logarithmische spiraal, onder de werking eener versnelling, uitgaande van de pool en omgekeerd evenredig aan de n^e macht van den afstand tot die pool, wordt gevraagd naar den weerstand.

Zij de vergelijking der logarithmische spiraal

$$r = e^{\frac{\vartheta}{tg.\beta}}$$

en zij de boog, zoomede de tangentiale componente der versnelling positief gerekend in de richting, welke naar de pool is gekeerd, dan is:

$$F_1 = \frac{p}{r^n} \cos.\beta$$

$$F_2 = \frac{p}{r^n} \sin.\beta$$

en geeft hnnne substitutie, benevens die van:

$$\rho = \frac{r}{\sin\beta}, \quad ds = -\frac{dr}{\cos.\beta},$$

$$R_2 = e^{-2f\,tg.\beta \int \frac{dr}{r}} \frac{\sin.\beta}{r}\Bigg[C' - \int \Bigg(\frac{d\,\frac{p}{r^{n-1}}}{dr} - \cos.\beta - \frac{2p}{r^n}\cos.\beta \Bigg) \cdot \frac{-dr}{\cos.\beta} e^{+2f\,tg.\beta\int\frac{dr}{r}} \Bigg]$$

$$R_2 = r^{-2f\,tg.\beta - 1} \sin.\beta \Big[C + \int \Big(\frac{(n-1)p}{r^n} - \frac{2p}{r^n} \Big) dr\, r^{2f\,tg.\beta} \Big]$$

$$R_2 = C' \sin.\beta\, r^{-2f\,tg.\beta - 1} + $$

$$+ r^{-2f\,tg.\beta - 1} \sin.\beta \int \frac{(n-3)p}{r^n} dr\, r^{2f\,tg.\beta}$$

$$R_2 = C' \sin.\beta\, r^{-2f\,tg.\beta - 1} + \frac{(n-3)p \sin.\beta}{r^{2f\,tg.\beta + 1}} \frac{r^{2f\,tg.\beta - n + 1}}{2f\,tg.\beta - n + 1}$$

$$R_2 = C' \sin.\beta\, r^{-2f\,tg.\beta - 1} + \frac{(n-3)p \sin.\beta}{2f\,tg.\beta - n + 1} r^{-n}.$$

De hierin voorkomende constante C' wordt bepaald uit:

$$v^2 = \rho(F_2 + R_2).$$

Wij verkrijgen:

$$v^2 = \frac{p}{r^{n-1}} + C' r^{-2f\,tg.\beta} + \frac{(n-3)p}{2f\,tg.\beta - n + 1} \cdot \frac{1}{r^{n-1}}$$

dus:

$$v_0^2 = \frac{p}{r_0^{n-1}} + C' r_0^{-2f\,tg.\beta} + \frac{(n-3)p}{2f\,tg.\beta - n + 1} \cdot \frac{1}{r_0^{n-1}},$$

waaruit:

$$C' = \frac{v_0^2 - \frac{p}{r_0^{n-1}} - \frac{(n-3)p}{2f\,tg.\beta - n + 1}\,\frac{1}{r_0^{n-1}}}{r_0^{-2f\,tg.\beta}},$$

of:

$$C' = \frac{v_0^2 - \frac{2p}{r_0^{n-1}} \left(\frac{f\,tg.\beta - 1}{2f\,tg.\beta - n + 1} \right)}{r_0^{-2f\,tg.\beta}}$$

bijgevolg:

$$v^2 = \frac{p}{r^{n-1}} + \frac{(n-3)p}{2f\,tg.\beta - n + 1} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} +$$

$$+ \left\{ v_0^2 - \frac{2p}{r_0^{n-1}} \left(\frac{f\,tg.\beta - 1}{2f\,tg.\beta - n + 1} \right) \right\} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2f\,tg.\beta},$$

of:

$$v^2 = \frac{2\,p}{r^{n-1}}\left(\frac{f\,tg.\,\beta - 1}{2\,f\,tg.\,\beta - n + 1}\right) +$$

$$+\left\{v_0^2 - \frac{2\,p}{r_0^{\,n-1}}\left(\frac{f\,tg.\,\beta - 1}{2\,f\;tg.\,\beta - n + 1}\right)\right\}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\,f\,tg.\,\beta}$$

en:

$$R_2 = \frac{(n - 3)\,p\,sin.\,\beta}{2\,f\,tg.\,\beta - n + 1}\,\frac{1}{r^n} +$$

$$+\left\{\frac{v_0^2 - \frac{2\,p}{r_9^{\,n-1}}\left(\frac{f\,tg.\,\beta - 1}{2\,f\,tg.\,\beta - n + 1}\right)}{r_0}\right\} \times \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\,f\,tg.\,\beta - 1} sin.\,\beta\,,$$

waarmede ten slotte:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = R_2\sqrt{1 + f^2} =$$

$$= \sqrt{1 + f^2}\left[\frac{(n - 3)\,p\,sin.\,\beta}{2\,f\,tg.\,\beta - n + 1}\,\frac{1}{r^n} +\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{v_0^2 - \frac{2\,p}{r_0^{\,n-1}}\left(\frac{f\,tg.\,\beta - 1}{2\,f\,tg.\,\beta - n + 1}\right)}{r_0}\right\}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\,f\,tg.\,\beta - 1}\right]$$

Hier invoerende:

$f = \frac{R_1}{R_2} = tg.\,\alpha$, waarin α voorstelt den wrijvingshoek,

wordt:

$$v^2 = \frac{2\,p}{r^{n-1}}\left(\frac{tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - 1}{2\,tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - n + 1}\right) +$$

$$+\left\{v_0^2 - \frac{2\,p}{r_0^{\,n-1}}\left(\frac{tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - 1}{2\,tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - n + 1}\right)\right\}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\,tg.\,\alpha\,tg.\,\beta}$$

en:

$$R = \frac{(n - 3)\,p}{2\,tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - n + 1}\cdot\frac{sin.\,\beta}{cos.\,\alpha}\,\frac{1}{r^n} +$$

$$+\left\{\frac{v_0^2 - \frac{2\,p}{r_0^{\,n-1}}\left(\frac{tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - 1}{2\,tg.\,\alpha\,tg.\,\beta - n + 1}\right)}{r_0}\right\}\frac{sin.\,\beta}{cos.\,\alpha}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2tg.\,\alpha tg.\,\beta - 1}$$

De hier gevonden uitdrukkingen worden veel eenvoudiger indien $tg.\,\alpha\,tg.\,\beta = 1$, d. i. $\beta = 90^\circ - \alpha$. Alsdan wordt:

$$v^2 = v_0^2\,\frac{r_0^2}{r^2}$$

$$v = v_0\,\frac{r_0}{r}$$

en

$$R = -\frac{p}{r^n} + \frac{v_0^2}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-3} = -\frac{p}{r^n} + \frac{v_0^2\,r_0^2}{r^3}.$$

De beteekenis dezer uitkomst is duidelijk, wanneer men in het oog houdt, dat de positieve richting van R_2 die van den kromtestraal is, terwijl de positieve richting van R_1 met die van s samenvalt en dus naar de pool is toegekeerd. Daar $tg.\,\alpha = \frac{R_1}{R_2}$ is beteekent de vergelijking $\beta = 90^\circ - \alpha$, dat de weerstand R dezelfde richting heeft als de naar de pool gerichte versnelling.

De beweging wordt dus in dit geval eigenlijk voortgebracht door een centripetale versnelling gelijk aan de som van $\frac{p}{r^n}$ en R, dus $= \frac{v_0^2\,r_0^2}{r^3}$, zijnde een wel bekend resultaat [1]).

---

1) Newton, Principia, lib. I, prop. 9.

VIJFDE HOOFDSTUK.

De resultante der bijkomende versnellingen is steeds naar één punt gericht.

§ 17. Uit § 5 is ons bekend de formule:

$$\mathrm{R}_2 = \frac{e^{-2\int \frac{dr}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}}}{\rho}, \left\{ \mathrm{C}' - \int \left[\frac{d\rho\,\mathrm{F}_2}{dr} \mp 2\,\mathrm{F}_1 \sqrt{1+\left(\frac{r\,d\vartheta}{dr}\right)^2} \right] dr\, e^{2\int \frac{dr}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}} \right\},$$

gevende de normale componente van de resultante der bijkomende versnellingen, welke hier verondersteld is, naar den oorsprong der poolcoördinaten te zijn gericht.

De weerstand zelf volgt dan uit:

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{R}_2}{\cos.\,\mu},$$

waarin μ is de hoek tusschen de richting van de normaal en die van den voerstraal.

Daar $\cos.\,\mu = \pm \frac{1}{r}\frac{ds}{d\vartheta} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}$, indien s tegelijkertijd met ϑ toeneemt, waarbij het bovenste teeken moet worden genomen, ingeval het punt, waarheen de bijkomende versnelling is gericht, ligt aan dezelfde, het onderste, ingeval dat punt ligt aan de andere zijde der kromme lijn als de kromtestraal, wordt:

$$\mathrm{R} = \frac{e^{-2\int \frac{dr}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}}}{\pm\rho\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}} \left\{ \mathrm{C} - \int \left[\frac{d\rho\,\mathrm{F}_2}{dr} \mp 2\,\mathrm{F}_1 \sqrt{1+\left(\frac{r\,d\vartheta}{dr}\right)^2}\, dr\, e^{2\int \frac{dr}{\rho}\sqrt{1+\left(\frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)^2}} \right\}$$

terwijl:

$$v_0^2 = \rho\,(\mathrm{F}_2 + \mathrm{R}_2).$$

Ook hier zullen wij als gegevene kromme lijn de logarithmische spiraal aannemen en dan oplossen het

Vraagstuk. Een punt, dat onderworpen is aan eene gegevene, doch overigens willekeurige versnelling, moet eene logarithmische spiraal doorloopen. Welke zal daartoe de bijkomende, naar de pool gerichte versnelling moeten zijn?

Daar de vergelijking der logarithmische spiraal door

$$r = e^{\frac{\vartheta}{tg\,\beta}}$$

wordt voorgesteld en daarmede:

$$\rho = \frac{r}{sin.\beta}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{dr}{r d\vartheta}\right)^2} = \frac{1}{sin.\beta}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{r d\vartheta}{dr}\right)^2} = \frac{1}{cos.\beta},$$

is:

$$R_2 = e^{-2\int \frac{dr}{r}} \frac{sin.\,\beta}{r}\left\{C' - \int\left(\frac{1}{sin.\,\beta}\frac{d\,r\,F_2}{d\,r} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \mp 2\,F_1\frac{1}{cos.\,\beta}\right) d\,r\, e^{2\int \frac{dr}{r}}\right\}$$

$$R_2 = \frac{sin.\,\beta}{r^3}\left[C' - \int\left(\frac{1}{sin.\,\beta}\frac{d\,r\,F_2}{d\,r} \mp 2\,F_1\frac{1}{cos.\,\beta}\right) r^2\,d\,r\right]$$

$$R_2 = \frac{C'}{r^3}\ sin.\,\beta - F_2 + \frac{2}{r^3}\int F_2\,r^2\,d\,r \mp \frac{2\,tg.\beta}{r^3}\int F_1\,r^2\,d\,r$$

of, na verdere herleiding:

$$R_2 = \frac{C'}{r^3}\,sin.\,\beta + \frac{2}{r^3}\,[.\int F_2\,r^2\,d\,r \pm tg.\,\beta\int F_1\,r^2\,d\,r] - F_2.$$

Wanneer wij als positieve bewegingsrichting wederom die naar de pool toe kiezen moeten wij hier het onderste teeken nemen.

Verder is:

$$R = \frac{R_2}{sin.\,\beta} = \frac{C'}{r^3} + \frac{2}{r^3\,sin.\,\beta}\left[\int F_2\,r^2\,d\,r - \right.$$

$$\left. - tg.\,\beta\int F_1\,r^2\ d\,r\right] - \frac{F_2}{sin.\,\beta}$$

en:

$$v^2 = \rho\,(F_2 + R_2) = \frac{C'}{r^2} + \frac{2}{r^2\,sin.\,\beta}\left[\int F_2\,r^2\,d\,r - \right.$$

$$\left. - tg.\,\beta\int F_1\,r^2\,d\,r\right] - \frac{F_2}{sin.\,\beta}.$$

Voor $F_2 = 0$, d. i. indien er geene versnelling op het punt werkt of deze versnelling tangentiaal gericht is, is:

$$v^2 = \rho\,R_2 = \frac{r}{sin.\,\beta}\,.\,R\,sin.\,\beta = r\,R,$$

zoodat de snelheid alsdan middenevenredig is tusschen de lengte van den voerstraal en de bijkomende versnelling.

Uit $v = v_0$, voor $r = r_0$ volgt in verband met de vergelijking voor v^2, de waarde van C', welke dan nog gesubstitueerd moet worden.

Uit de boven ontwikkelde algemeene formules kan men nu weer de oplossing van verschillende bizondere gevallen afleiden. Stelt men bijv. $F_1 = F_2 = 0$, dan is de totale versnelling, die op het punt werkt, eenvoudig de weerstand, dus naar de pool gericht. Wij verkrijgen dan geheel dezelfde uitkomst als in Hoofdstuk IV, pag. 63, namelijk dat die versnelling omgekeerd evenredig moet zijn met de derde macht, de snelheid met de eerste macht van r.

In de tweede plaats kan men aannemen, dat de versnelling een standvastigen hoek vormt met de raaklijn en omgekeerd evenredig is met de n^e macht van den voerstraal.

Dan is:

$$F_1 = F\,cos.\,\alpha$$
$$F_2 = F\,sin.\,\alpha$$

en wordt:

$$R_2 = \frac{C'}{r^3}\ sin.\,\beta + \frac{2}{r^3}\left[sin.\,\alpha\int F\,r^2\,d\,r - \right.$$

$$\left. - tg.\,\beta\,cos.\,\alpha\int F\,r^2\,d\,r\ \right] - F\,sin\,\alpha$$

$$R_2 = \frac{C'}{r^3}\,sin.\,\beta + 2\,(sin.\,\alpha - tg.\beta\,cos.\,\alpha)\,\frac{\int F\,r^2\,dr}{r^3} - F\,sin.\,\alpha,$$

of:

$$R_2 = \frac{C'}{r^3}\,sin.\,\beta + \frac{2\,sin.\,(\alpha - \beta)}{r^3\,cos.\,\beta}\int F\,r^2\,d\,r - F\,sin.\,\alpha$$

terwijl:

$$R = \frac{C'}{r^3} + \frac{2\,sin.\,(\alpha - \beta)}{r^3\,sin.\,\beta\,cos.\,\beta}\int F\,r^2\,d\,r - F\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}$$

en:

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} + \frac{2\; sin.\, \alpha - \beta}{r^2\, sin.\, \beta\; cos.\, \beta} \int F\, r^2\, d\, r.$$

Bijzondere gevallen verkrijgt men door te stellen:

1. $\alpha = 0$, d. i. de versnelling is tangentiaal gericht.

Dan wordt:

$$R = \frac{C'}{r^3} - \frac{2}{r^3\, cos.\, \beta} \int F\, r^2\, d\, r$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} - \frac{2}{r^2\, cos.\, \beta} \int F\, r^2\, d\, r.$$

Is hierbij:

a. $F = Const. = p$

dan wordt:

$$R = \frac{C'}{r^3} - \frac{2\, p}{3\; cos.\, \beta}$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} - \frac{2\, p}{3\; cos.\, \beta}\, r$$

b. $F = \frac{p}{r^n}$

$$R = \frac{C'}{r^3} + \frac{2\, p}{(n-3)\; cos.\, \beta} \; \frac{1}{r^n}$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} + \frac{2\, p}{(n-3)\; cos.\, \beta} \; \frac{1}{r^{n-1}}.$$

De hier afgeleide vergelijkingen stellen eene beweging voor, die mogelijk is, welke waarde men ook aan de constante C' toekenne. Stelt men $C' = 0$, dan blijkt het, dat de weerstand geheel op dezelfde wijze van den voerstraal afhangt als de gegeven tangentiale versnelling. Het vraagstuk, dat dan is opgelost, is in den grond der zaak hetzelfde als dat van Hoofdstuk III. Daar hadden wij een centripetale versnelling en een tangentialen weerstand, hier een centripetalen weerstand en een tangentiale versnelling,

zoodat eenvoudig de namen van de beide componenten der totale versnelling zijn verwisseld.

De termen $\frac{C'}{r^3}$ en $\frac{C'}{r^2}$, die nog in de algemeene uitdrukkingen voor R en v^2 voorkomen, zijn niet anders dan de waarden van R eu v^2, die gelden als de totale versnelling naar de pool is gericht. (Verg. Hoofdst. IV, p. 63) Het optreden dezer termen zullen wij later nog nader verklaren.

2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. i. de versnelling is normaal.

Alsdan bekomt men:

$$R = \frac{C'}{r^3} + \frac{2}{r^3\, sin.\, \beta} \int F\, r^2\, d\, r - \frac{F}{sin.\, \beta}$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} + \frac{2}{r^2\, sin.\, \beta} \int F\, r^2\, d\, r.$$

Stelt men

a. $F = Const. = p,$

dan wordt:

$$R = \frac{C'}{r^3} + \frac{2\, p}{3\; sin.\, \beta} - \frac{p}{sin.\, \beta} = \frac{C'}{r^3} - \frac{p}{3\; sin.\, \beta}$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^3} + \frac{2\, p\, r}{3\; sin\, \beta}$$

b. Eveneens voor $F = \frac{p}{r^n}$

$$R = \frac{C'}{r^3} - \frac{2\, p}{(n-3)\; sin.\, \beta}\, \frac{1}{r^n} - \frac{p}{r^n\; sin.\, \beta} =$$

$$= \frac{C'}{r^3} - \frac{p}{r^n.\; sin.\, \beta}\, \frac{n-1}{n-3}$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} - \frac{2\, p}{(n-3)\; sin.\, \beta}\, \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Deze uitkomsten geven tot dergelijke opmerkingen aanleiding als die, welke wij onder 1 verkregen. Voor $C' = 0$ valt het opgeloste vraagstuk samen met dat van Hoofdstuk II.

3. Eveneens staan de uitkomsten, die men in het algemeene geval verkrijgt, wanneer α noch o, noch $\frac{1}{2}\pi$ is, in nauw verband met die van Hoofdstuk IV. Zij onderscheiden zich daarvan in den grond der zaak slechts door de bijkomende termen $\frac{C'}{r^3}$ en $\frac{C'}{r^2}$. Stelt men $C' = 0$, dan bestaat er tusschen het hier behandelde vraagstuk en dat van Hoofdstuk IV nog slechts een verschil in benaming. Daar hadden wij een centripetale versnelling en een weerstand, die een standvastigen hoek met de raaklijn vormt, hier een centripetalen weerstand, terwijl de hoek tusschen de versnelling en de raaklijn standvastig is.

Natuurlijk moet men, wanneer $\alpha = \beta$ is, weer het reeds besproken geval verkrijgen, dat de totale versnelling naar de pool is gericht. Dit blijkt dan ook uit onze formules, want voor $\alpha = \beta$ wordt

$$R = \frac{C'}{r^3} - F$$

$$v^2 = \frac{C'}{r^2}.$$

zoodat de totale versnelling hier $\frac{C'}{r^3}$ is. (verg. p. 63).

Als laatste veronderstelling omtrent de versnelling nemen wij aan, dat ze eęn veranderlijken hoek maakt met de bewegingsrichting.

Beschouwende hiervan het bijzondere geval, waarin richting en grootte der versnelling standvastig zijnen de gedwongen beweging dus kan worden aangenomen plaats te hebben onder den invloed der zwaartekracht, bekomen we:

$$F_1 = g \cos. \gamma_1$$

$$F_2 = -g \sin. \gamma_1,$$

waarin γ_1 voorstelt den hoek tusschen de richting der versnelling en de positieve bewegingsrichting.

Deze hoek is daarbij positief, wanneer een draaiing van de laatste richting naar de eerste overeenkomt met eene wenteling, waardoor de anomalie ϑ toeneemt.

Nemen wij nu aan, dat bij de logarithmische spiraal dé richting der standvastige versnelling samenvalt met die der polaire as, dan is

$$\gamma_1 = \pi - (\beta + \vartheta),$$

dus:

$$F_1 = -g \cos. (\beta + \vartheta) = -g \cos. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)$$

$$F_2 = -g \sin. (\beta + \vartheta) = -g \sin. (\beta + tg.\beta.\, l\, r),$$

waarmede:

$$R = \frac{C'}{r^3} + \frac{2g}{r^3 \sin.\beta} [-\int r^2 \sin. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)\, d\, r +$$

$$+ tg.\beta \int r^2 \cos. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)\, d\, r] +$$

$$+ \frac{g \sin. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)}{\sin.\beta}$$

en:

$$v^2 = \frac{C'}{r^2} + \frac{2g}{r^2 \sin\beta} [-\int r^2 \sin. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)\, d\, r +$$

$$+ tg.\beta \int r^2 \cos. (\beta + tg.\beta.\, l\, r)\, d\, r].$$

De hier voorkomende integralen kunnen gevonden worden. De substitutie $l\, r = z$ voert nl. tot de integralen

$$\int e^{3z} \cos. (z\, tg\, \beta)\, d\, z$$

en

$$\int e^{3z} \sin.(z \, tg \, \beta) \, dz,$$

waarvan de waarden bekend zijn.

Ten slotte blijven nog een paar zaken te bespreken over. In de eerste plaats hebben wij na te gaan, wat de reden is, dat bij de verschillende vraagstukken, die wij hebben opgelost, de logarithmische spiraal tot eenvoudige uitkomsten aanleiding gaf, die veelal eenige overeenkomst met elkaar vertoonden. Ten tweede verdient het optreden der termen $\frac{C'}{r^3}$ en $\frac{C'}{r^2}$ in Hoofdst. V, pp. 67–69 eene nadere beschouwing. Wat het eerste punt betreft, kan men aantoonen, dat de in het voorgaande behandelde vraagstukken met uitzondering van diè, waarin de richting en de grootte der versnelling constant waren (pp. 51 en 71), bijzondere gevallen uitmaken van een algèmeen vraagstuk over de beweging langs eene logarithmische spiraal. Dit luidt als volgt:

Een punt beweegt zich langs eene logarithmische spiraal, zoodanig dat de snelheid omgekeerd evenredig is met een zekere macht van den voerstraal; men vraagt de versnelling.

Bij dit vraagstuk (dat ook synthetisch zeer eenvoudig kan worden opgelost) is:

$$v = \frac{q}{r^n}.$$

De normale versnelling zal dus zijn:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{q^2}{r^{2n}} : \frac{r}{\sin.\beta} = \frac{q^2 \sin.\beta}{r^{2n+1}}$$

en de tangentiale versnelling:

$$\frac{dv}{dr} = v\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{dr} \times -\cos.\beta = \frac{q^2 n \cos.\beta}{r^{2n+1}}.$$

Daar blijkens deze uitkomsten beide componenten der versnelling omgekeerd evenredig zijn met r^{2n+1} blijft de verhouding tusschen beiden constant, dus ook de hoek, dien de totale versnelling met de bewegingsrichting vormt.

De grootte van dien hoek wordt bepaald uit:

$$tg.\Phi = \frac{\frac{v^2}{\rho}}{v\frac{dv}{ds}} = \frac{1}{n} tg.\beta,$$

terwijl de totale versnelling volgt uit:

$$F = \frac{q^2}{r^{2n+1}} \sqrt{\sin.^2\beta + n^2 \cos.^2\beta}.$$

Uit deze algemeene uitkomsten kan men nu verschillende bijzondere gevallen afleiden. Stelt men vooreerst $n = 1$, dan wordt

$$v = \frac{q}{r}, \qquad F = \frac{q^2}{r^3}, \qquad \Phi = \beta,$$

uit welke laatste vergelijking volgt, dat de versnelling dan naar de pool is gericht. Dit geval is het op p. 63 behandelde.

Voor $n = -\frac{1}{2}$ wordt de versnelling F constant en de standvastige hoek, dien zij met de bewegingsrichting vormt, wordt bepaald door

$$tg.\Phi = -2 \, tg.\beta.$$

Men kan nu in dit geval de constante versnelling op verschillende wijzen beschouwen als de resultante van twee eveneens standvastige componenten. Neemt men voor de eene daarvan eene naar de pool gerichte versnelling, dan kan men voor de andere een weerstand kiezen, die of normaal of tangentiaal is, of eindelijk een willekeurigen hoek met de bewegingsrichting vormt. Men komt dan terug tot de op p.p. 37, 57 behandelde vraagstukken.

Dat ook de meer algemeene vraagstukken van het tweede derde en vierde hoofdstuk, waarbij eene centripetale versnelling is aangenomen, die omgekeerd evenredig is aan eene zekere macht van r, in het hier behandelde algemeene probleem zijn begrepen behoeft wel geene nadere toelichting.

Hetzelfde geldt ook van het vraagstuk van p.p. 67—69, wanneer men daarin $C' = 0$ stelt.

Wij hebben nu echter nog te verklaren, hoe daar de termen $\frac{C'}{r^3}$ en $\frac{C'}{r^2}$ optreden.

Om dit te doen stellen we het volgende voorop:

Nemen wij aan dat men twee vraagstukken over de beweging van een punt langs een vaste kromme lijn heeft opgelost. Stel dat bij het eerste in eenig punt der kromme lijn de snelheid v_a zij (als functie van s) en de daarbij behoorende versnelling R_a, bij het tweede der bewegingsgevallen resp. v_b en R_b, dan zal bij een derde beweging indien de snelheid v daar gegeven wordt door:

$$v^2 = v_a^2 + v_b^2$$

de op het punt werkende versnelling moeten zijn de resultante van R_a en R_b.

Het bewijs hiervan ligt voor de hand.

Immers bij ontbinding der totale versnelling volgens raaklijn en normaal zijn

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{v_a^2}{\rho} + \frac{v_b^2}{\rho}$$

en

$$v\frac{dv}{ds} = v_a\frac{dv_a}{ds} + v_b\frac{dv_b}{ds}$$

de beide componenten.

Nu zijn $\frac{v_a^2}{\rho}$ en $v_a\frac{dv_a}{ds}$, $\frac{v_b^2}{\rho}$ en $v_b\frac{dv_b}{ds}$ resp. de componenten der beide oorspronkelijke versnellingen, waaruit volgt dat de totale versnelling R de resultante zal zijn der beide versnellingen R_a en R_b.

Hieruit blijkt, hoe men uit twee bewegingsgevallen langs eene vaste kromme lijn een derde kan samenstellen en van die samenstelling leveren nu de formules van pp. 67–69 een voorbeeld. Immers de termen in v^2 en R die C' bevatten, beantwoorden op zich zelve aan eene mogelijke beweging en eveneens de termen, waarin C' niet voorkomt.

Wij merken nog op dat de hier bewezen stelling zich laat uitbreiden tot het geval, waarin men uit meer dan twee bewegingsgevallen een nieuw afleidt, en dat men aldus uit de vraagstukken, die wij besproken hebben, andere meer samengestelde zal kunnen afleiden.

STELLINGEN.

I.

Zeer te recht zegt Boole van het oplossen eener differentiaalvergelijking van de eerste orde en van den eersten graad door middel van een integreerenden factor:

„that the peculiar advantage of the theory of integrating factors consists rather in its appropriateness for the investigation of conditions under which solution is possible than in the actual processes of solution, to which it leads."

Boole, Different. Equations, 1877, page 82.

II.

De algemeene oplossing eener differentiaalvergelijking van de eerste orde en van den n^{en} graad bestaat uit een produkt van n factoren, waarvan ieder bevat eene willekeurige standvastige. Ten onrechte wordt in vele handboeken nagelaten te bewijzen, dat die oplossing niets van hare algemeenheid verliest, zoo al die standvastigen gelijk genomen worden.

III.

De wijze, waarop Dühring de studie van bepaalde functiën beoordeelt:

„Wenn nun weiterhin die Ausspinnung von andern vereinzelten Functionen durch den späteren Nachwuchs Mode wurde und heute das Klauben an unpraktischen Singularitäten vorherrscht, so ist dies vollends ein Zeichen der Versandung,"

is geheel onjuist.

Dr. E Dühring, Principiën der Mechanik, 1877, p. 547.

IV.

In de hoofdwet der mechanische warmtetheorie — verlies aan warmte is aequivalent met de winst aan arbeid en omgekeerd — is de verwisseling van arbeid met levendige kracht niet geoorloofd.

V.

De zwemblaas der visschen is geen bewegingsorgaan, maar dient tot bewaring van het evenwicht.

VI.

Het is den plantenphysiologen nog niet gelukt, uit te maken, wat het eerste assimilatieprodukt is.

VII.

Chemisch onderzoek van drinkwater heeft geene waarde bij de vraag naar al of niet voor de gezondheid nadeelige eigenschappen.

VIII.

Het is af te keuren, bij het onderwijs in de eerste beginselen der meetkunde, zich bezig te houden met het geven van strenge bepalingen der grondslagen, waarop dit vak berust; beter is het, de voorstelling daarvan zooveel mogelijk te ontleenen aan de ervaring; wenschelijk ware het, dat ook de schrijvers van leerboeken voor het onderwijs, in dit opzicht, het laatste meer tot hun recht lieten komen.

IX.

De methode, door Liernur gevolgd, om de faecaliën productief te maken, verdient de voorkeur boven die van prof. Gunning.

X.

De aanwezigheid van zuurstof in de zon is niet overtuigend bewezen.

XI.

Het ware wenschelijk, dat, bij eene mogelijke uitbreiding van het leerplan der hoogere burgerscholen, de leer der coördinaten daarin werd opgenomen.

XII.

Het is goed te keuren, dat in de rekenkunde van de leer der evenredigheden in het geheel geen gebruik worde gemaakt.

XIII.

Bij vraagstukken betreffende de gedwongen beweging langs eene kromme lijn, is het tot het verkrijgen van resultaten verkieselijk gebruik te maken van de bewegingsvergelijkingen, waarbij de uitdrukkingen voor de tangentiale en normale componente der versnelling tot grondslag zijn aangenomen.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.