26

OVER

# DE BEWEGINGEN VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM

OP EEN

HORIZONTAAL VLAK.

OVER

# DE BEWEGINGEN VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM

OP EEN

## HORIZONTAAL VLAK.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

**DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,**

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

MR. J. E. GOUDSMIT,

Hoogleeraar in de Faculteit der Rechtsgeleerdheid,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

**op Vrijdag den 24sten Juni 1870, des namiddags te 3 ure,**

DOOR

**GERRIT SCHOUTEN,**

GEBOREN TE OUDSHOORN.

Kampen — G. Ph. ZALSMAN. — 1870.

AAN MIJN OUDERS.

*Bij de beoefening van de mechanica trok vooral de theorie van de beweging der lichamen mijn aandacht. Onder de „Problèmes de mécanique rationnelle" van* JULLIEN *vond ik er eenige, waarin de beweging werd nagegaan van lichamen, die onder zekere voorwaarden gesteld waren; zoo als b. v. van een omwentelingslichaam om een vast punt, gelegen op de figuur-as, en van een tol op een horizontaal vlak, dat geen wrijving aanbiedt. Dit gaf mij aanleiding, tot oefening voor mijzelven, mijn krachten te beproeven aan het beantwoorden van het meer algemeene vraagstuk: hoe de beweging zal zijn van een willekeurig omwentelingslichaam op een horizontaal vlak. De zeer eenvoudige, doch voor mijn doel belangrijke betrekking, uitgedrukt op bl.* 19 *van de verhandeling, stelde mij weldra daartoe in staat.*

*Nadat ik van mijn hooggeschatten Promotor vernomen had, dat dit onderwerp nog niet behandeld was geworden, besloot ik, dit in mijn proefschrift te doen. Hoewel* *mijn hoofddoel was, meer in 't bijzonder het geval te behandelen, dat aan het lichaam een snelle rotatie om de figuur-as wordt gegeven, had ik toch gaarne op aanwijzing van mijn hooggeschatten Promotor nagegaan, in hoeverre de grondformulen* (III) *op bl.* 21 *tot elliptische functies herleid kunnen worden, zoo ik daartoe slechts den tijd had kunnen vinden.*

*Alvorens tot het behandelen van mijn onderwerp over te gaan, voel ik mij gedrongen openlijk een woord van dank en hulde te brengen aan allen, die mij bij mijn academische studie door hun onderwijs en hun raad hebben bijgestaan.*

*Ofschoon het mij tot mijn groot leedwezen niet vergund was, Hooggeschatte Promotor* VAN GEER, *Uw lessen bij te wonen, heb ik toch overvloedige redenen om U hier openlijk mijn hartelijken dank te betuigen voor de bereidwilligheid, waarmede Gij mij hebt willen bijstaan in het bewerken van mijn proefschrift.*

*Hooggeleerde* BIERENS DE HAAN, *U ben ik zeer veel verplicht voor Uw uitnemend onderwijs en voor de talrijke bewijzen van hartelijke belangstelling en welwillendheid, zoowel gedurende mijn verblijf in de academie-stad als elders van U ontvangen. Steeds zal ik dat onderwijs en die welwillendheid in dankbaar aandenken houden.*

*Ook U, Hooggeleerde* RIJKE, *ben ik zeer veel verplicht; ontvang mijn hartelijken dank voor Uw uitmuntend, helder onderwijs, en de bereidwilligheid, waarmede Gij mij altijd hebt ter zijde gestaan, wanneer ik Uw hulp verlangde.*

*Hooggeleerde* KAISER, *met weemoed denk ik er aan, hoe ontijdig ik van Uw leiding verstoken werd; ik gevoel dit verlies te sterker, omdat ik mij nog levendig herinner met welk genoegen ik Uw lessen in de sterrekunde en de hoogere algebra heb bijgewoond. Ontvang mijn hartelijken dank zoowel voor dit onderwijs als voor de bewijzen van welwillendheid, die ook Gij mij niet hebt onthouden.*

*Ook aan U, Hooggeleerde Heeren* VAN DER BOON MESCH *en* SURINGAR, *betuig ik mijn dank voor het genoten onderwijs in de wetenschappen, door U aan de academie vertegenwoordigd.*

*Hoe smart het mij bij deze gelegenheid geen woord te kunnen zeggen tot mijn ontslapen leermeesters* VERDAM *en* VAN DER HOEVEN. *Nimmer zal ik het degelijke en heldere onderwijs vergeten, dat ik van hen mocht ontvangen. Hunner nagedachtenis breng ik de warmste hulde!*

*En gij, mijn academie-vrienden, in wier gezelschap ik een zoet vermaak mocht scheppen, en wier vriendschap mij ook na mijn vertrek uit de academie-stad ten volle is gebleken, vaartwel, blijft mijner gedenken zooals ik Uwer immer gedachtig zal blijven.*

# INHOUD.

## EERSTE HOOFDSTUK.



## TWEEDE HOOFDSTUK.



## DERDE HOOFDSTUK.

—

VIERDE HOOFDSTUK.

## EERSTE HOOFDSTUK.

### § 1. *Algemeene beschouwingen omtrent een omwentelingslichaam, en bepaling van zijn stand.*

---

In het volgende zal nagegaan worden, hoedanig de beweging zal zijn van een omwentelingslichaam, dat in willekeurigen stand op een onbeweeglijk horizontaal vlak geplaatst, door een gegeven stelsel van krachten in beweging gebracht en daarna aan zich zelf overgelaten wordt.

De wrijving tusschen het lichaam en het vlak, zoowel als de weerstand van de lucht, zal buiten rekening gelaten worden.

Zal die beweging geleidelijk, dat wil zeggen zonder schokken of botsingen plaats hebben, welke ook de toestand zij, waarin het lichaam bij 't begin van de beweging verkeert, dan zijn we genoodzaakt den vorm van het omwentelingslichaam te beperken, en dien zoodanig te onderstellen, dat een plat vlak het lichaam te gelijkertijd slechts in één punt kan raken, of wat hetzelfde is, dat de beschrijvende lijn overal haar holle zijde naar de as heeft gekeerd.

Verder blijkt bij het opmaken van de vergelijkingen voor de beweging van zulk een omwentelingslichaam, dat we ook een voorwaarde moeten stellen omtrent de wijze, waarop de stof in het lichaam verdeeld is. Die verdeeling zullen we zoodanig onderstellen, dat de omwentelings-as tevens een der natuurlijke assen van inertie is.

Aan deze voorwaarde zal het lichaam voldoen, wanneer het homogeen is, of ook, wanneer de cirkelvormige doorsneden loodrecht op de as, hetzij homogeen, hetzij uit concentrieke homogene deelen bestaan.

Dan zullen tevens de momenten van inertie om elk der beide andere natuurlijke assen onderling gelijk zijn, en deze willekeurig genomen kunnen worden in het vlak, dat door het zwaartepunt loodrecht op de as van omwenteling wordt gebracht.

Nemen we in dat vlak twee van die natuurlijke assen die loodrecht op elkander staan, dan hebben we in deze twee, vereenigd met de omwentelings-as van het lichaam, een stelsel van drie onderling rechthoekige coördinatenassen, dat we met het lichaam vast verbonden willen denken, dus in de beweging van het lichaam deelt. De stand van deze assen met dien van het zwaartepunt bepaalt volkomen den stand van het lichaam.

De richting van deze beweeglijke assen zullen we bepalen door middel van een tweede rechthoekig coördinaten-stelsel, welks oorsprong evenzeer in het zwaartepunt gelegen is, en welks assen een onveranderlijke richting in de ruimte behouden.

Fig. 1. De + OZ-as van dit stelsel, dat met betrekking tot het zwaartepunt vast is, zal in een richting genomen worden tegengesteld aan die van de zwaartekracht, terwijl de OX- en de OY-as willekeurig genomen worden in het horizontale vlak, dat door het zwaartepunt gaat.

De assen van het beweeglijke stelsel noemen we $OX_1$, $OY_1$ en $OZ_1$, terwijl we die richting van de $OZ_1$-as als de positieve aannemen, welke bij 't begin der beweging met de + OZ-as een scherpen hoek maakte.

Zij $NN_1$ de doorsnede van de beide coördinaten-vlakken XY en $X_1Y_1$; deze zal loodrecht staan zoowel op de OZ- als op de $OZ_1$-as, derhalve ook op het verticale vlak, dat door de omwentelings-as bepaald wordt; van de beide tegengestelde richtingen ON en $ON_1$ nemen we die als de positieve, welke als as van wenteling beschouwd, door een positieve wenteling $\theta$ de + OZ-as op de

+ $OZ_1$-as doet vallen; door een positieve wenteling zulk een verstaande, die plaats heeft van links naar rechts.

De stand van de beweeglijke assen wordt volkomen bepaald:

1° door den hoek $\theta$ tusschen de $OZ$- en de $OZ_1$-as;

2° door den hoek $\psi$, dien $ON$ met $OX$ vormt, positief gerekend in den zin, die overeenkomt met een positieve wenteling om de $OZ$-as;

3° door den hoek $\varphi$, dien $OX_1$ met $ON$ vormt, positief gerekend in den zin, die overeenkomt met een positieve wenteling om de $OZ_1$-as.

Zijn we in staat de grootte van elk dier hoeken $\theta$, $\psi$ en $\varphi$ voor ieder oogenblik te bepalen, dan is ook de stand van het lichaam ten opzichte van het zwaartepunt voor elk oogenblik bekend.

Eer we de vergelijkingen gaan stellen, welke die grootheden bepalen, willen we vooraf aan het lichaam een bepaalden stand op het horizontale vlak geven, dus de hoeken $\theta$, $\psi$ en $\varphi$ als bekend aannemen.

Zij in Fig. 1 $ABC$ de verticale meridiaan voor dien stand; dan zal het raakpunt $R$ van het lichaam met het horizontale vlak, waarop de beweging plaats heeft, gelegen zijn in dien meridiaan; de doorsnede $SQ$ van het vlak van dien meridiaan met het horizontale vlak zal samenvallen met de raaklijn aan den meridiaan in het punt R. Zoowel het snijpunt S van de omwentelings-as met het horizontale vlak als de voet Q der loodlijn uit het zwaartepunt op dat vlak neergelaten, zal op die doorsnede gelegen zijn.

Zij de vergelijking van het oppervlak van het omwentelingslichaam op de natuurlijke assen:

$$z_1 = F\,(x_1^2 + y_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

dan wordt het raakvlak van het punt R, welks coördinaten we $x_1$, $y_1$ en $z_1$ noemen, voorgesteld door:

$$\zeta - z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}\left(\xi - x_1\right) + \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\left(\eta - y_1\right),$$

als $\xi$, $\eta$ en $\zeta$ de loopende coördinaten van dit vlak zijn. Daar dit vlak horizontaal is, maakt de normaal op dit vlak met de $OX_1$-, $OY_1$- en $OZ_1$-assen hoeken, wier cosinussen resp. zijn: $\sin\theta \sin\phi$, $\sin\theta \cos\phi$ en $\cos\theta$; dit vlak wordt dus ook voorgesteld door:

$$\sin\theta \sin\phi\,(\xi - x_1) + \sin\theta \cos\phi\,(\eta - y_1) + \cos\theta\,(\zeta - z_1) = o.$$

Deze twee uitdrukkingen voor hetzelfde vlak geven door onderlinge vergelijking:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = -\operatorname{tg}\theta \sin\phi; \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_1} = -\operatorname{tg}\theta \cos\phi \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

De vergelijkingen (a) en (b) bepalen de coördinaten van het raakpunt. Daardoor is ook OR of $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ bekend. De lengte van de loodlijn OQ, uit den oorsprong op het vlak neergelaten, is:

$$OQ = (x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) \sin \theta + z_1 \cos \theta . \quad . \quad . \quad (c)$$

De hoek tusschen OQ en OR, dien we door (OQ. OR) zullen aanduiden, wordt gegeven door:

$$\cos (OQ.\ OR) = \frac{OQ}{OR},$$

en de afstand RQ van het raakpunt tot den voet der loodlijn door:

$$RQ = OQ \operatorname{tg} (OQ.\ OR).$$

De grootheden OQ, OR en RQ zijn onafhankelijk van de hoeken $\psi$ en $\varphi$, en moeten bij gevolg als functies van $\theta$ alleen beschouwd worden. Immers wanneer we de $OZ_1$-as een rechten cirkelvormigen kegel laten beschrijven, waarvan OZ de as is, zullen gedurende die beweging deze grootheden niet van waarde veranderen. Wentelen we bij deze beweging te gelijker tijd het lichaam om zijn as, dan heeft dit slechts ten gevolge, dat het raakpunt zich ten opzichte van het lichaam over een parallelcirkel beweegt, waardoor evenmin die grootheden een verandering ondergaan. Slechts een verandering van $\theta$ heeft een verandering van OQ, OR en RQ ten gevolge, met uitzondering alleen van het geval, dat het lichaam een homogene bol is.

Hetzelfde resultaat geven ook de formulen. Immers $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi$ is niets anders dan de projectie van RS op het $X_1Y_1$-vlak, dus $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$= RS \cos\theta$, en daar zoowel *RS* als $z_1$ enkel afhangt van $\theta$, blijkt het dadelijk, dat bedoelde grootheden slechts functies van $\theta$ zijn.

De loodlijn RD, uit R op $OZ_1$ neergelaten, is gelijk $RS \cos\theta = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, terwijl $OD = z_1$ is. Stellen we kortheidshalve $OQ = h$, $OR = l$ en $RQ = d$, dan zijn zoowel $h$, $l$ en $d$ als RD en OD slechts functies van $\theta$, en wel eindige en doorloopende, omdat de meridiaan overal zijn holle zijde naar de as heeft gekeerd; zij $RD = F(\theta)$ en $OD = \psi(\theta)$.

Fig. 2. Laat in deze figuur de meridiaan afzonderlijk voorgesteld worden. Hierin is:

$RQ = d = \psi(\theta) \sin\theta - F(\theta) \cos\theta$;

$OQ = h = \psi(\theta) \cos\theta + F(\theta) \sin\theta$, derhalve

$$\frac{dh}{d\theta} = -\psi(\theta)\sin\theta + F(\theta)\cos\theta + (\psi'(\theta)\cos\theta + F'(\theta)\sin\theta)$$

$$= -d + \psi'(\theta) \cos\theta + F'(\theta) \sin\theta.$$

Onderstellen we, dat het lichaam gedurende een oneindig klein tijddeel aan de werking van de zwaartekracht gehoor geeft, dan zal, wanneer het lichaam niet in evenwicht verkeert, het zwaartepunt tot de raaklijn naderen en de hoek $\theta$ veranderen. Die verandering $d\theta$ van den hoek $\theta$ kan zoowel positief als negatief zijn, hetgeen afhangt van de betrekkelijke ligging der punten Q, R en S. Het raakpunt R zal bij die verandering een boogje $ds$ afleggen naar den kant van het voetpunt Q der loodlijn. Bevindt zich R tusschen Q en S, dan zal $d\theta$ positief zijn; ligt echter Q tusschen R en S, dan zal $d\theta$ negatief zijn. Nemen we het eerste geval, dan is F $(\theta)$ met *GE* toegenomen, en $\psi$ $(\theta)$ met GR verminderd, dus is

$$F'(\theta) = \frac{GE}{d\theta} \text{ en } \psi'(\theta) = -\frac{GR}{d\theta}.$$

Laten we uit G een loodlijn GF op RE of $ds$ vallen, dan is:

$$GE \sin\theta = GR \cos\theta$$

$$\text{en } GE \cos\theta + GR \sin\theta = ds,$$

of na substitutie:

$$F'(\theta) \sin\theta + \psi'(\theta) \cos\theta = 0$$

$$\text{en } F'(\theta) \cos\theta - \psi'(\theta) \sin\theta = \frac{ds}{d\theta} = \rho,$$

als $\rho$ den kromtestraal voorstelt van den meridiaan in het punt R. Omdat de meridiaan ondersteld wordt zijn holle zijde naar de as te keeren, kan hij geen buigpunt bevatten, zoodat $\rho$ altijd een eindige waarde zal hebben.

Onze vergelijking voor $\frac{dh}{d\theta}$ wordt dus:

$$\frac{dh}{d\theta} = -d.$$

Verder is:

$$\frac{d^2h}{d\theta^2} = -\psi(\theta)\cos\theta - F(\theta)\sin\theta - \left(\psi'(\theta)\sin\theta - F'(\theta)\cos\theta\right)$$

$$= \rho - h.$$

Op dezelfde wijze zouden we in het tweede geval, dat n. l. $\theta$ met d$\theta$ afneemt, als $h$ met d$h$ vermindert, gevonden hebben:

$$\frac{dh}{d\theta} = + d \text{ en } \frac{d^2h}{d\theta^2} = \rho - h.$$

We mogen dus hieruit het besluit trekken, dat het differentiaal-quotient $\frac{dh}{d\theta}$ altijd gelijk $d$ is, daar uit den zin der verandering van $\theta$ en van $h$ van zelf volgt, of $d$ met het positieve of met het negatieve teeken moet genomen worden; verder, dat $\frac{d^2h}{d\theta^2}$ altijd gelijk $\rho - h$ is.

---

# TWEEDE HOOFDSTUK.

## § 2. *De vergelijkingen voor de beweging.*

---

Daar we de wrijving en den tegenstand van de lucht buiten rekening laten, zal het omwentelingslichaam, eenmaal door het gegeven stelsel van krachten in beweging gebracht, bij zijn volgende beweging onderworpen zijn aan de werking van twee krachten, die van buiten aangrijpen. Vooreerst: de zwaartekracht, wier resultante aangrijpt in het zwaartepunt van het lichaam, en in een richting werkt loodrecht op het horizontale vlak, met een intensiteit gelijk $Mg$, als M de massa van het lichaam, en $g$ de versnelling van de zwaartekracht op de plaats van beweging voorstelt.

Ten tweede: de reactie van het vlak, aangrijpende in het punt, wâarmede het lichaam op het horizontale vlak rust, en werkende in tegengestelden zin van de eerste kracht, met een intensiteit, die in 't algemeen van de beweging zelve afhangt. We zullen haar voortaan door $R$ aanduiden.

Brengen we deze twee krachten in rekening, dan kunnen we het lichaam als vrij beschouwen.

Uit de omstandigheid, dat deze twee krachten werken in een richting loodrecht op het horizontale vlak, leiden we af, dat het zwaartepunt zich in horizontale projectie moet bewegen volgens een rechte lijn met eenparige snelheid, welke richting en snelheid enkel afhangen van het stelsel van krachten, dat het lichaam in beweging bracht.

Immers volgens het beginsel van de beweging van het zwaartepunt moet dit zich bewegen op dezelfde wijze als het geval zou zijn, wanneer het de massa van het lichaam in zich concentreerde, en zich bewoog onder de werking zoowel van de krachten, welke de beweging veroorzaakten, als van die, welke van buiten op het lichaam blijven werken, onveranderd in richting en grootte daarin overgebracht.

Ten gevolge van het eerste stelsel van krachten zal het zwaartepunt een eenparige en rechtlijnige beweging aannemen, en daar de krachten, die op het lichaam blijven werken, geen horizontale componenten hebben, zullen ze dus de horizontale beweging niet kunnen wijzigen.

De verticale beweging van het zwaartepunt, die zonder de werking van de uitwendige krachten ook eenparig en rechtlijnig zou zijn, wordt echter door deze gewijzigd. Het zwaartepunt wordt met een kracht $R - Mg$ *van* het vlak verwijderd, zoodat de beweging wel rechtlijnig, maar niet eenparig blijft.

Noemen we, even als vroeger, den afstand van het zwaartepunt tot het horizontale vlak $h$, welken afstand we zullen rekenen van het vlak naar boven, dan is de bewegende kracht van het zwaartepunt $M \frac{d^2h}{dt^2}$, dus

$$R - Mg = M \frac{d^2h}{dt^2}, \text{ waaruit volgt:}$$

$$R = M \left(g + \frac{d^2h}{dt^2}\right)$$

waardoor R in functie van $h$ gegeven is.

Er blijft ons over na te gaan, hoe de beweging van het lichaam geschieden zal *om* zijn zwaartepunt. Want is die bekend, dan kennen we voor ieder oogenblik den stand van het lichaam ten opzichte van het zwaartepunt; brengen we voor dien stand een horizontaal raakvlak aan het lichaam, dan kennen we ook voor datzelfde oogenblik de hoogte van het zwaartepunt boven het horizontale vlak, terwijl we daarenboven door het gegeven stelsel van krachten, dat het lichaam in beweging bracht, in staat zijn de horizontale projectie van het zwaartepunt aan te wijzen. Daardoor is dus de stand van het lichaam voor dat oogenblik volkomen bekend.

Bij de beschouwing van de beweging *om* het zwaartepunt is ons de verplaatsing van dit punt in de ruimte volstrekt onverschillig, daar het oog uit dat punt de beweging op dezelfde wijze zal zien plaats grijpen, hetzij het zekere beweging heeft of in absolute rust is. Alle krachten dus, die slechts een verplaatsing van het zwaartepunt ten gevolge hebben, oefenen niet den minsten invloed op de betrekkelijke beweging, die we nu willen nagaan, en mogen in geen geval in rekening gebracht worden. Bij gevolg vervalt de werking van de zwaartekracht, terwijl de reactie van het horizontale vlak slechts in zooverre mag in rekening gebracht worden als zij bijdraagt tot de beweging van het lichaam om zijn zwaartepunt; m. a. w. van de reactie mogen we slechts beschouwen haar moment ten opzichte van het zwaartepunt. Deze toestand wordt geheel verwezenlijkt, als we in 't vervolg het zwaartepunt *vast* onderstellen.

We brengen nu door het zwaartepunt als oorsprong de beide rechthoekige coördinaten-stelsels OXYZ en $OX_1Y_1Z_1$, waarvan boven is gesproken. Het eerste stelsel is nu vast, omdat het zwaartepunt vast wordt ondersteld. We noemen

C het moment van inertie van het lichaam om de omwentelings-as;

A dat om elk der beide assen $OX_1$ en $OY_1$;

$\omega$ de hoeksnelheid van het lichaam om de oogenblikkelijke as;

$p$, $q$ en $r$ de componenten dier hoeksnelheid, resp. om de $OX_1$-, $OY_1$- en $OZ_1$-assen;

en schrijven nu de betrekkingen op, die door de formulen van EULER worden aangegeven.

Deze kunnen we aldus in woorden overbrengen:

Bij de beweging van een lichaam om een vast punt is het *versnellend koppel* om elk der hoofdassen van inertie ten opzichte van dit punt gelijk aan het koppel der middelpuntvliedende en dat der uitwendige krachten, ieder ontbonden volgens die assen.

Het koppel der middelpuntvliedende krachten geeft tot componenten volgens de

$$\begin{array}{ll} OX_1\text{-as:} & (A-C)\,qr \\ OY_1\text{-as:} & (C-A)\,rp \\ OZ_1\text{-as:} & o, \end{array}$$

terwijl men gemakkelijk inziet, dat het koppel, door $R$ in aanwezen geroepen, tot moment heeft $-\,R\,\frac{dh}{d\theta}$, terwijl de as van dit koppel samenvalt met de doorsnede $NN_1$ der XY- en $X_1Y_1$-vlakken. De componenten van dit koppel zijn dus volgens de

$$\text{OX}_1\text{-as: } - \text{R} \frac{dh}{d\theta} \cos \varPhi$$

$$\text{OY}_1\text{-as: } + \text{R} \frac{dh}{d\theta} \sin \varPhi$$

$$\text{OZ}_1\text{-as: } \quad \text{o},$$

zoodat de formulen van EULER in ons geval worden:

$$\left.\begin{aligned} \text{A} \frac{dp}{dt} &= (\text{A} - \text{C})\, qr - \text{R} \frac{dh}{d\theta} \cos \varPhi \\ \text{A} \frac{dq}{dt} &= (\text{C} - \text{A})\, rp + \text{R} \frac{dh}{d\theta} \sin \varPhi \\ \text{C} \frac{dr}{dt} &= \text{o}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{I})$$

Een tweede stelsel van vergelijkingen vinden we door op te merken, dat de componenten der hoeksnelheid $\omega$ om de oogenblikkelijke as volgens OZ, $\text{OZ}_1$ en ON respectievelijk gelijk zijn aan $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varPhi}{dt}$ en $\frac{d\theta}{dt}$, en dat we door elk dezer te projecteeren op de $\text{OX}_1$-, $\text{OY}_1$- en $\text{OZ}_1$-assen, in de som dier projecties op elk dezer assen weder de componenten $p$, $q$ en $r$ moeten terugvinden; we hebben derhalve, in 't oog houdende dat $\cos(\text{OZ}.\,\text{OX}_1) = \sin \theta \sin \varPhi$, en $\cos(\text{OZ}.\,\text{OY}_1) = \sin \theta \cos \varPhi$ is:

$$\left.\begin{aligned} p &= \sin \theta \sin \varPhi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varPhi \frac{d\theta}{dt} \\ q &= \sin \theta \cos \varPhi \frac{d\psi}{dt} - \sin \varPhi \frac{d\theta}{dt} \\ r &= \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varPhi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{II})$$

Daar R een bekende functie van $h$, dus ook van $\theta$ is, hebben we in de formulen (I) en (II) zes vergelijkingen ter bepaling van de zes onbekenden $p$, $q$ en $r$, $\psi$, $\varphi$ en $\theta$ in functie van den tijd.

De laatste van (I) geeft

$$r = \text{constant},$$

waaruit dus blijkt, dat gedurende de geheele beweging de hoeksnelheid om de omwentelings-as dezelfde blijft.

Uit de formulen (I) en (II) kunnen we twee differentiaal-vergelijkingen van den eersten graad afleiden, door toepassing van twee beginselen in de Dynamica: *dat der levendige krachten* en *dat der sectoren.*

Het eerste beginsel zegt, dat de aangroeiing der levendige kracht van alle punten eens lichaams, dat zich onder den invloed van zekere krachten beweegt, in zeker tijdsverloop gelijk is aan de algebraïsche som der hoeveelheden arbeid in hetzelfde tijdsverloop door dat stelsel van krachten verricht.

De som der levendige krachten op 't oogenblik, dat het lichaam met de hoeksnelheid $\omega$ om de oogenblikkelijke as wentelt, is $\frac{1}{2}\ \omega^2 J$, als $J$ het moment van inertie om die as voorstelt; en daar $J = A\,\frac{p^2}{\omega^2} + A\,\frac{q^2}{\omega^2} + C\,\frac{r^2}{\omega^2}$ is, zoo is de som der levendige krachten ook $= \frac{1}{2}\ A\,(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}\ Cr^2$. Stellen we de hoeksnelheden om de hoofdassen bij 't begin der beweging voor door $p_0$, $q_0$ en $r$; dan is op het tijdstip $t$ na dat begin de aangroeiing der levendige kracht gelijk

$$\tfrac{1}{2}\,A\,(p^2 + q^2) - \tfrac{1}{2}\,A\,(p_0^2 + q_0^2).$$

De arbeid, dien R in den tijd d$t$ verricht, is

$$R \sin (l.h).\, l\mathrm{d}\,(l.h),$$

of, daar $l$ gedurende d$t$ constant moet genomen worden:

$$-\,R\mathrm{d}\,(l \cos (l.h)) = -\,R.\mathrm{d}h.$$

Stelt $h_0$ den afstand voor van het zwaartepunt tot het horizontale vlak bij 't begin der beweging, dan is de arbeid, op het tijdstip $t$ door R verricht:

$$\int_{h_0}^{h} -R\,\mathrm{d}h = -M\int_{h_0}^{h}\left(\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} + g\right)\mathrm{d}h =$$

$$\tfrac{1}{2}\,M\left\{\left(\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} + Mg\,(h_0 - h),$$

en omdat R de eenige kracht is, die van buiten op het lichaam werkt, zoo geeft het bovengenoemde beginsel:

$$A\,(p^2 + q^2) - A\,(p_0^2 + q_0^2) =$$

$$M\left\{\left(\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} + 2\,Mg\,(h_0 - h),$$

of, daar $p^2 + q^2$ volgens (II) gelijk $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2$ is:

$$A\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} + M\left\{\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\,gh\right\} = \lambda$$

$$\lambda = \mathrm{A}\,(p_\circ^2 + q_\circ^2) + \mathrm{M}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}h_\circ}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\,gh_\circ\right\}.$$

Volgens het tweede beginsel moet de som der projecties op het XY-vlak van de sectoren, door de voerstralen naar de verschillende punten van het lichaam in de ruimte beschreven, elk vermenigvuldigd met de massa van het overeenkomstige punt, evenredig zijn met den tijd, waarin zij beschreven zijn.

Om die projecties te vinden, zullen we den sector, door elk der voerstralen in de ruimte beschreven, eerst op de $X_1Y_1$-, $Y_1Z_1$- en $X_1Z_1$-vlakken, en daarna ieder dezer partieele projecties op het XY-vlak projecteeren.

Fig. 3. Noemen we de coördinaten van het punt P ten opzichte van de natuurlijke assen van inertie, $x_1$, $y_1$, $z_1$, en de loodlijnen PA, PB en PC, uit dat punt op elk dezer assen neergelaten, resp. $l_{x_1}$, $l_{y_1}$ en $l_{z_1}$.

Door de rotatie $p$ om de $OX_1$-as beschrijft P in den tijd $dt$ een lijntje, of liever een boogje $pdt.\ l_{x_1}$. Dit boogje, evenwijdig loopende met het $Y_1Z_1$-vlak, wordt in zijn natuurlijke grootte op dit vlak geprojecteerd; de projecties op de beide andere coördinaten-vlakken $X_1Y_1$ en $X_1Z_1$ zijn rechte lijntjes, evenwijdig loopende resp. met de $OY_1$- en de $OZ_1$-as.

Het eerste dezer lijntjes heeft een lengte, die gevonden wordt door $pdt.\ l_{x_1}$ te vermenigvuldigen met de cosinus van den hoek, dien het boogje maakt met het $X_1Y_1$-vlak, of, wat hetzelfde is, met $\cos(Z_1 . l_{x_1})$; derhalve is de projectie op het $X_1Y_1$-vlak gelijk $pdt.\ l_{x_1} . \frac{z_1}{l_{x_1}} =$ $pdt.\ z_1$. Evenzoo is de lengte van de projectie op het $X_1Z_1$-vlak gelijk $pdt.\ y_1$.

In 't oog houdende, dat beide projecties in negatieven zin worden beschreven, vinden we voor de projectie van den sector, door den voerstraal naar het punt P in de ruimte beschreven, ten gevolge van de rotatie $p$:

Op het $Y_1Z_1$-vlak: $pdt.\ l_{x_1}\ \frac{1}{2}\ l_{x_1}$ of $\frac{1}{2}\ l^2_{x_1} .\ pdt$
„ „ $X_1Y_1$- „ : $-\ z_1 .\ pdt.\ \frac{1}{2}\ x_1$ „ $-\ \frac{1}{2}\ x_1z_1 .\ pdt$
„ „ $X_1Z_1$- „ : $-\ y_1 .\ pdt.\ \frac{1}{2}\ x_1$ „ $-\ \frac{1}{2}\ x_1y_1 .\ pdt$

Op dezelfde wijze vinden we voor de projectie op elk der coördinaten-vlakken der sectoren, ten gevolge van de beide andere rotaties $q$ en $r$ beschreven:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Op het } X_1Z_1\text{-vlak:} & & \frac{1}{2}\ l^2_{y_1} .\ qdt \\ \text{„ „ } X_1Y_1\text{- „ :} & - & \frac{1}{2}\ y_1z_1 .\ qdt \\ \text{„ „ } Y_1Z_1\text{- „ :} & - & \frac{1}{2}\ y_1x_1 .\ qdt \end{array}\right\}\ \text{rotatie } q.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{„ „ } X_1Y_1\text{- „ :} & & \frac{1}{2}\ l^2_{z_1} .\ rdt \\ \text{„ „ } X_1Z_1\text{- „ :} & - & \frac{1}{2}\ z_1y_1 .\ rdt \\ \text{„ „ } Y_1Z_1\text{- „ :} & - & \frac{1}{2}\ z_1x_1 .\ rdt \end{array}\right\}\ \text{rotatie } r.$$

Dus is de projectie van den sector, door den voerstraal naar P in de ruimte beschreven gedurende den tijd d$t$, op elk der coördinaten-vlakken:

Op het $X_1Y_1$-vlak: $\frac{1}{2}\, dt\, (r\, l^2_{z_1} - p x_1 z_1 - q y_1 z_1)$.

„ „ $X_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, dt\, (q\, l^2_{y_1} - p x_1 y_1 - r z_1 y_1)$.

„ „ $Y_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, dt\, (p\, l^2_{x_1} - q y_1 x_1 - r z_1 x_1)$.

Met d$m$ vermenigvuldigende en integreerende:

Op het $X_1Y_1$-vlak: $\frac{1}{2}\, dt\, (Cr - p \int x_1 z_1\, dm - q \int y_1 z_1\, dm)$.

„ „ $X_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, dt\, (Aq - p \int x_1 y_1\, dm - r \int z_1 y_1\, dm)$.

„ „ $Y_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, dt\, (Ap - q \int y_1 x_1\, dm - r \int z_1 x_1\, dm)$.

Omdat $OX_1$, $OY_1$ en $OZ_1$ de hoofdassen van inertie zijn, worden de overblijvende integralen ieder gelijk nul, en vinden we dus voor de som der projecties, ieder vermenigvuldigd met de massa van het overeenkomstige punt:

Op het $X_1Y_1$-vlak: $\frac{1}{2}\, Cr\, dt$.

„ „ $X_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, Aq\, dt$.

„ „ $Y_1Z_1$- „ : $\frac{1}{2}\, Ap\, dt$.

Projecteeren we eindelijk ieder van deze op het XY-vlak, daartoe de eerste vermenigvuldigende met cos $(Z_1.Z)$ of cos $\theta$, de tweede met cos $(Y_1.Z)$ of sin $\theta$ cos $\phi$, en de derde met cos $(X_1.Z)$ of sin $\theta$ sin $\phi$, dan vinden we voor de gezochte som:

$$\frac{1}{2}\, dt\, \{Cr \cos\theta + A \sin\theta\, (q \cos\phi + p \sin\phi)\}.$$

Het beginsel der sectoren leidt dus tot de volgende uitkomst:

$$Cr \cos\theta + A \sin\theta\,(p \sin\varphi + q \cos\varphi) = \text{Constant},$$

of ook, omdat volgens (II) $p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}$ is:

$$A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + Cr \cos\theta = \mu.$$

Door toepassing van beide beginselen zijn we dus neergekomen op twee nieuwe, doch van (I) afhankelijke betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{l} A\left\{\sin^2\theta\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} + M\left\{2\,gh + \left(\dfrac{dh}{dt}\right)^2\right\} = \lambda \\ A \sin^2\theta \dfrac{d\psi}{dt} + Cr\,(\cos\theta - \cos\theta_o) = \mu \\ \lambda = A\,(p^2_o + q^2_o) + M\left\{2\,gh_o + \left(\dfrac{dh_o}{dt}\right)^2\right\} \\ \mu = A \sin\theta_o\,(p_o \sin\varphi_o + q_o \cos\varphi_o). \end{array}\right\}\text{(III). (*)}$$

---

(*) Ook op zuiver analytischen weg hadden we de formulen (III) uit (I) en (II) kunnen afleiden.

De eerste van (I) met $p$, de tweede met $q$ vermenigvuldigende, en daarna optellende, geeft:

$$A\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt}\right) = R\frac{dh}{d\vartheta}\left(q \sin\varphi - p\cos\varphi\right),$$

of $A\,(p\,dp + q\,dq) = -\,R\,dh$; na integratie:

$$A\,(p^2 + q^2) = -\,M\left\{2\,gh + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right\} + \text{Const.}$$

die de eerste van (III) is.

Deze twee differentiaal-vergelijkingen bevatten slechts de differentiaal-quotienten $\frac{d\psi}{dt}$ en $\frac{d\theta}{dt}$, daar $\frac{dh}{dt}$ slechts een functie van $\theta$ en $\frac{d\theta}{dt}$ kan zijn. Ze zijn dus voldoende om $\theta$ en $\psi$ in $t$ uit te drukken; dan volgt uit de laatste

---

De eerste van (I) echter met sin $\varphi$, de tweede met cos $\varphi$ vermenigvuldigende, vindt men door optelling:

$$A\left(\frac{dp}{dt}\sin\varphi + \frac{dq}{dt}\cos\varphi\right) = (A - C)\,r\,(q\sin\varphi - p\cos\varphi)$$
$$= r\,(C - A)\frac{d\theta}{dt}.$$

Nu is volgens (II):

$$\frac{dp}{dt} = \sin\theta\sin\varphi\frac{d^2\psi}{dt^2} + \cos\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt} +$$
$$+ \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

en
$$\frac{dq}{dt} = \sin\theta\cos\varphi\frac{d^2\psi}{dt^2} + \cos\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt} -$$
$$- \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \sin\varphi\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

dus $A\left(\frac{dp}{dt}\sin\varphi + \frac{dq}{dt}\cos\varphi\right) =$

$$A\left(\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right),$$ derhalve:

$$\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = r\,\frac{C - A}{A}\frac{d\theta}{dt}$$ of

van (II) de waarde van $\phi$, en is dus de stand van het lichaam met $t$ bepaald.

Doch de strenge oplossing van dit probleem is niet mogelijk, omdat de integralen, waarop men neerkomt, te ingewikkeld zijn. Om benaderde waarde voor de onbekende grootheden te vinden, zijn we genoodzaakt de algemeenheid van ons vraagstuk door verschillende onderstellingen in zooverre te beperken, dat de formulen integrabel worden.

---

$$\mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}+\mathrm{A}\,\frac{d\theta}{dt}\left(r+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}-\frac{d\phi}{dt}\right)=\mathrm{C}r\,\frac{d\theta}{dt},$$

of omdat $r+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}-\frac{d\phi}{dt}$ volgens de laatste van (II) gelijk $2\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}$ is:

$$\mathrm{A}\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}+2\,\mathrm{A}\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}=\mathrm{C}r\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Beide leden met $\sin\theta$ vermenigvuldigende, geeft:

$$\mathrm{A}\,\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)+\mathrm{C}r\,\frac{d}{dt}(\cos\theta)=0,$$

dus na integratie:

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\mathrm{C}r\cos\theta=\mu,$$

de tweede van (III).

---

## § 3. *Het theorema van* Puiseux.

Eer we daartoe overgaan, zullen we, zoowel ter wille van de volledigheid als ter nadere kennismaking met de constanten, uit de formulen (III) een theorema afleiden, dat we aan Puiseux (*) zijn verschuldigd.

De constanten $p_0$, $q_0$, $r$, $\psi_0$, $\varphi_0$ en $\theta_0$ zijn willekeurig, en geven den toestand aan, waarin zich het lichaam bij 't begin der beweging bevindt. Omdat het horizontale vlak het lichaam raakt, zal ook $h_0$ bekend zijn. Maar ook $\frac{dh_0}{dt}$ is dan bekend. Immers $dh_0$ stelt voor de aangroeiing van $h_0$ in den tijd $dt$ na 't begin van de beweging, en de stand van het lichaam aan 't eind van $dt$ is volkomen bepaald door de rotaties $p_0\,dt$, $q_0\,dt$ en $r\,dt$, en door de voorwaarde, dat het horizontale vlak het lichaam raakt; de afstand van het zwaartepunt tot dit vlak is dan $h_0 + dh_0$, derhalve $\frac{dh_0}{dt}$ bekend. We kunnen hierbij voegen, dat $\frac{dh_0}{dt}$ onafhankelijk van $r$ moet zijn, omdat $h$ niet verandert door een rotatie om de omwentelings-as, waaruit alleen volgt, dat het raakpunt zich ten opzichte van het lichaam over een parallel-cirkel beweegt.

(*) Journal de Liouville, Tome XIII.

Hieruit leiden we af, dat de beide constanten $\lambda$ en $\mu$ niet alleen bepaald, maar ook onafhankelijk van $r$ zijn.

Door eliminatie van $\frac{d\psi}{dt}$ uit (III) verkrijgen we

$$A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+M\left\{2gh+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right\}=\lambda-\frac{\{\mu-Cr(\cos\theta-\cos\theta_0)\}^2}{A\sin^2\theta}.$$

Daar $h$ immer positief moet blijven, is het eerste lid uit zijn aard positief, en dus ook het tweede; waaruit volgt:

$$\lambda > \frac{\{\mu - Cr(\cos\theta - \cos\theta_0)\}^2}{A\sin^2\theta},$$

of $\sin\theta\sqrt{A\lambda} > \mu - Cr(\cos\theta - \cos\theta_0) > -\sin\theta\sqrt{A\lambda}$.

Nemen we $r$ positief, dan is

$$\frac{\mu - \sin\theta\sqrt{A\lambda}}{Cr} < \cos\theta - \cos\theta_0 < \frac{\mu + \sin\theta\sqrt{A\lambda}.}{Cr}$$

Daar $\lambda$ en $\mu$ onafhankelijk zijn van $r$, zullen de tellers van de breuken voortdurend eindige waarden hebben, hoe groot ook de hoeksnelheid $r$ genomen wordt.

Noemen we $\mu'$ de volstrekte waarde van $\mu$, (daar $\mu$ zoowel positief als negatief kan zijn, wat enkel afhangt van $\frac{d\psi_0}{dt}$), en $\varepsilon$ een positieve waarde, zoo klein als men wil, dan zullen we zeker zijn, dat als $r > \frac{\mu' + \sqrt{A\lambda}}{C\varepsilon}$

genomen wordt, de volstrekte waarde van $\cos\theta - \cos\theta_0$ immer beneden $\epsilon$ zal blijven.

Hieruit mogen we dus tot het volgende theorema besluiten:

*Van welken aard voor 't overige het stelsel van krachten moge zijn, waardoor een omwentelingslichaam, welks as een natuurlijke as van inertie is, op een volkomen glad horizontaal vlak in beweging wordt gebracht, indien slechts de rotatie om de omwentelings-as, door genoemde stelsel veroorzaakt, groot genoeg zij, zal de helling van de as met de verticaal altijd minder dan eenige grootheid, hoe klein ook, van haar oorspronkelijke waarde verschillen.*

---

## DERDE HOOFDSTUK.

Beginnen we met de algemeenheid van ons vraagstuk te beperken door aan te nemen, dat het stelsel van krachten, hetwelk het lichaam in beweging brengt, slechts bestaat uit een koppel, welks vlak loodrecht staat op de omwentelings-as.

Dan zijn niet alleen $p_\circ$ en $q_\circ$ ieder gelijk nul, maar ook $\frac{dh_\circ}{dt}$, zooals blijkt uit hetgeen in de vorige paragraaf is gezegd; zoodat de constanten $\lambda$ en $\mu$ op bl. 21 voor dit geval overgaan in $\lambda = 2\,\mathrm{M}\,gh_\circ$ en $\mu = o$. De formulen (III) worden dan:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}\left\{\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} + \mathrm{M}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2\,\mathrm{M}g\,(h_\circ - h) \\ \mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \mathrm{C}r\,(\cos\theta_\circ - \cos\theta). \end{array}\right\}\mathrm{(IV)}.$$

Uit de eerste volgt, dat gedurende de beweging immer $h_\circ \geqq h$ moet blijven, daar het eerste lid uit zijn aard positief zijnde, dit ook moet plaats hebben met het tweede lid. De beweging zal dus zoodanig plaats grijpen, dat $h$ òf voortdurend gelijk $h_0$ blijft, òf als ze verandert, nimmer grooter dan $h_0$ kan worden.

In het eerste geval zou uit de gelijkheid van $h$ met $h_0$ voortvloeien, dat zoowel $\frac{d\theta}{dt}$ als $\frac{d\psi}{dt}$ voortdurend gelijk nul zijn; derhalve volgens (II) $p = o$ en $q = o$, en $\frac{d\psi}{dt} = r$. Het lichaam zal dus geen andere beweging aannemen dan een constante rotatie om de omwentelings-as. Dit geval zal zich voordoen bij ieder omwentelingslichaam, wanneer de stand, waarin het vóór de beweging op het horizontale vlak geplaatst wordt, een evenwichts-stand is; want dan vervalt de werking der reactie, de eenige kracht, die van buiten op het lichaam werkende, in rekening komt, zoodat het lichaam, eenmaal om de omwentelings-as, die tevens een natuurlijke as van inertie is, draaiende, die wenteling onveranderd zal blijven behouden.

Verandert $h$ echter, dan moet ze onmiddelijk na het begin van de beweging kleiner worden, zoodat het zwaartepunt van het lichaam het horizontale vlak nadert. Daardoor verandert ook $\theta$, die zoowel grooter als kleiner kan worden, wat alleen afhangt van den vorm van het lichaam en den stand, waarin het op het vlak geplaatst wordt. We moeten dus in 't vervolg twee gevallen onderscheiden, waarbij voor $h < h_0$, òf $\theta < \theta_0$, òf $\theta > \theta_0$ is. Het geval, dat $\theta$ voortdurend gelijk $\theta_0$ blijft, zullen we voortaan uitsluiten.

Uit de laatste formule van (IV) volgt verder, dat $\frac{d\psi}{dt}$ in 't eerste geval in *tegengestelden*, in 't tweede geval in *gelijken* zin van de rotatie $r$ zal plaats grijpen.

---

## § 4. *Eerste geval*, $\theta \geqq \theta_0$.

Uit de formulen (IV) $\frac{d\psi}{dt}$ geëlimineerd, in 't oog houdende dat we voor $\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$ kunnen schrijven $\left(\frac{dh}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ of $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 d^2$, geeft:

$$(A + Md^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,Mg\,(h_0 - h) - \frac{C^2 n^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{A \sin^2\theta},$$

voor $r$ een constant getal $n$ nemende.

Het eerste lid van nature positief zijnde, moet dit ook het geval zijn met het tweede lid, waaruit terstond volgt, dat $\theta$ nimmer de waarde $\pi$ zal kunnen bereiken, daar voor die waarde van $\theta$ het tweede lid $-\infty$ wordt. Daar nu het tweede lid ook niet $+\infty$ kan worden, moet er noodzakelijk een waarde $\theta_1$ voor $\theta$ bestaan, gelegen tusschen $\theta_0$ en $\pi$, die het tweede, dus ook het eerste lid gelijk nul maakt. Volgens onze onderstelling begint $\theta$ aan te groeien; zij kan niet beginnen te verminderen, zonder dat $\frac{d\theta}{dt}$ nul wordt; derhalve zal $\theta$ van $\theta_0$ tot $\theta_1$ toenemen, om daarna weder in hetzelfde tijdsverloop van $\theta_1$ tot $\theta_0$ af te nemen. De tijd T, waarin elk dier afwisselende veranderingen van $\theta$ plaats grijpt, wordt aangegeven door de integraal

$$T = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{A + M d^2}{2 Mg (h_0 - h) - \frac{C^2 n^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{A \sin^2\theta}}}\, d\theta.$$

De omwentelings-as zal derhalve in het verticale vlak, dat door haar bepaald wordt, isochronische schommelingen maken, wier amplitudines $\theta_1 - \theta_0$ zijn.

Te gelijker tijd wordt dit vlak in denzelfden zin van de rotatie $n$ om de verticaal gevoerd met een hoeksnelheid, die door $\frac{d\psi}{dt}$ wordt aangegeven; deze hoeksnelheid is veranderlijk, doch, daar ze enkel afhangt van $\theta$, zal de rondvoering van het vlak op dezelfde wijze plaats hebben gedurende elke schommeling van de omwentelings-as.

De hoeksnelheid $\omega$ om de *oogenblikkelijke as* wordt gegeven door $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + n^2}$; ze zal dus haar minimum-waarde $n$ verkrijgen voor $p^2 + q^2 = 0$ of $\sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$, waaraan slechts voldaan kan worden door $\frac{d\psi}{dt} = 0$ en $\frac{d\theta}{dt} = 0$, dus bij 't begin van elke schommeling van de omwentelings-as. Haar grootste waarde bereikt zij te gelijk met $p^2 + q^2$, en, daar we volgens (IV) hiervoor kunnen schrijven $\frac{M}{A}\left\{2g\,(h_0 - h) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 d^2\right\}$, zien we, dat $\omega$ maximum zal zijn, wanneer het zwaartepunt zijn laagsten stand bereikt; want dan is $h_0 - h$ het grootst, en $\left(\frac{d\theta}{dt}\right) d = 0$. Haar waarde bedraagt in dat geval $\sqrt{n^2 + \frac{2\,Mg}{A}(h_0 - h_1)}$. Bereikt het lichaam bij de schommeling van de omwentelings-as den evenwichtsstand, waarheen het zich beweegt, niet, dan zal $\omega$ die maximum-waarde bij de grootste afwijking tusschen as en verticaal bereiken; gaat het echter door dien stand heen, dan zal $\omega$ op het oogenblik van den doorgang maximum zijn.

Zien we nu, welke de opvolgende standen der oogenblikkelijke assen zullen zijn.

Fig. 4. Zij $\vartheta$ de hoek, dien de oogenblikkelijke as op zeker tijdstip, waarin de hoeksnelheden om de natuur-

lijke assen van inertie zijn $p$, $q$ en $n$, met de omwentelings-as maakt; dan blijkt onmiddelijk uit de figuur:

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{n^2}}.$$

Derhalve valt voor $\theta = \theta_0$ de oogenblikkelijke as samen met de omwentelings-as; daarop verwijdert ze zich van deze, om haar grootste afwijking te verkrijgen als $p^2 + q^2$ het grootst is, of, zooals we boven zagen, als het zwaartepunt zijn laagsten stand heeft ingenomen.

Denken we ons het vlak, dat voortdurend door de omwentelings- en de oogenblikkelijke as gaat, dan zal de laatste in dit vlak schommelingen maken, isochronisch met die, welke de omwentelings-as zelve in het verticale vlak maakt. Die schommelingen zullen samengesteld zijn, d. w. z. dat de as haar maximum-afwijking zal verkrijgen vóór zij een halve schommeling heeft volbracht, wanneer het lichaam door den evenwichts-stand heengaat, waarnaar het zich bij 't begin van elke schommeling begeeft.

Noemen we $\delta_1$ de amplitudo van de schommelingen der oogenblikkelijke as, dan is

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{M}g}{\mathrm{A}\,n^2}(h_0 - h_1)}.$$

De amplitudo $(\theta_1 - \theta_0)$ der schommelingen, die de omwentelings-as in het verticale vlak volbrengt, moet voldoen aan de vergelijking

$$2\,\mathrm{M}g\,(h_\circ - h_1) = \frac{\mathrm{C}^2 n^2 (\cos\theta_\circ - \cos\theta_1)^2}{\mathrm{A}\sin^2\theta_1},$$

waaruit volgt:

$$\frac{2\,\mathrm{M}g}{\mathrm{A}\,n^2}(h_\circ - h_1) = \frac{\mathrm{C}^2 (\cos\theta_\circ - \cos\theta_1)^2}{\mathrm{A}^2\sin^2\theta_1},$$

dus
$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,\frac{\cos\theta_\circ - \cos\theta_1}{\sin\theta_1},$$

welke vergelijking de betrekking aangeeft, die er tusschen de amplitudines $(\theta_1 - \theta_\circ)$ en $\vartheta_1$ der beide schommelingen bestaat.

Het vlak, dat door beide assen gaat, heeft zelf ook een beweging; die, welke het heeft ten opzichte van de omwentelings-as, zullen we nu bepalen.

Fig. 4. Zij daartoe $\mu_1$ de hoek, dien de projectie van de oogenblikkelijke as op het $\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1$-vlak met $\mathrm{OX}_1$ maakt, positief genomen, als hij beschreven wordt in den zin, die overeenkomt met $n$; dan is

$$\operatorname{tg}\mu_1 = \frac{q}{p};$$

gedifferentieerd ten opzichte van $t$:

$$\frac{1}{\cos^2\mu_1}\,\frac{d\mu_1}{dt} = \frac{p\,\dfrac{dq}{dt} - q\,\dfrac{dp}{dt}}{p^2};$$

of omdat $p^2 = (p^2 + q^2)\cos^2\mu_1$ is:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = \frac{p\,\dfrac{dq}{dt} - q\,\dfrac{dp}{dt}}{p^2 + q^2};$$

Volgens de formulen (I) is:

$$A\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)=(C-A)\,rp^2-(A-C)\,rq^2+R\frac{dh}{d\theta}(p\sin\varphi+q\cos\varphi),$$

en volgens (II):

$$p\sin\varphi+q\cos\varphi=\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},\ \text{dus:}$$

$$A\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)=r\,(C-A)\,(p^2+q^2)+R\sin\theta\frac{dh}{d\theta}\,\frac{d\psi}{dt};$$

derhalve $r = n$ nemende, is

$$\frac{d\mu_1}{dt}=n\,\frac{C-A}{A}+R\,\frac{dh}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)}.$$

Omdat de hoek $\mu_1$ van de $OX_1$-as gerekend wordt, en deze zelve rond de omwentelings-as gevoerd wordt met constante hoeksnelheid $n$, volgt er uit, dat de hoeksnelheid, waarmede het vlak rond de omwentelings-as wordt gevoerd, en die we $\frac{d\mu}{dt}$ zullen noemen, gegeven wordt door:

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{Cn}{A}+R\,\frac{dh}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)}.$$

De laatste term dezer vergelijking is negatief, zoolang het lichaam den evenwichts-stand, waarheen het zich begeeft, niet bereikt, omdat dan de factor $\frac{dh}{d\theta}$ negatief is. Voor $\theta = \theta_0$ wordt die term onbepaald; zoeken we zijn waarde voor $\theta = \theta_0$; volgens (IV) is:

$$\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\frac{Cn\,(\cos\theta_0-\cos\theta)}{A\sin\theta},$$

en $A\,(p^2+q^2)=2\,Mg\,(h_0-h)-M\left(\frac{dh}{dt}\right)^2;$

$$\text{dus}\ \frac{\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)}=\frac{Cn}{AM}\,\frac{\cos\theta_0-\cos\theta}{\sin\theta\left\{2g\,(h_0-h)-\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right\}};$$

teller en noemer ten opzichte van $\theta$ gedifferentieerd, en daarna $\theta=\theta_0$ gesteld, geeft:

$$\frac{\sin\theta_0\,\frac{d\psi_0}{dt}}{A\,(p_0^2+q_0^2)}=\frac{Cn}{AM}\,\frac{1}{-2\,\frac{dh_0}{d\theta}\left(g+\frac{d^2h_0}{dt^2}\right)}=-\frac{Cn}{2A}\,\frac{1}{R\,\frac{dh_0}{d\theta}},$$

derhalve $$\frac{d\mu_0}{dt}=\frac{Cn}{A}-\frac{Cn}{2A}=\frac{Cn}{2A}.$$

De hoeksnelheid, waarmede het beschouwde vlak bij 't begin van elke schommeling om de omwentelings-as begint te wentelen, is gelijk $\frac{Cn}{2A}$, heeft dus in denzelfden zin plaats als de rotatie $n$, en is slechts van $n$ afhankelijk.

---

## § 5. *Tweede geval*, $\theta \leqq \theta_0$.

Is de stand, waarin het lichaam op het horizontale vlak geplaatst wordt, zoodanig, dat de hoek tusschen omwentelings-as en verticaal kleiner wordt, zoodra men het lichaam loslaat, dan zal ook de hoek $\theta$, in geval aan het lichaam een rotatie om de omwentelings-as wordt medegedeeld, gedurende de volgende beweging nimmer grooter dan $\theta_o$ kunnen worden.

Ook voor dit geval geldt de formule van de vorige paragraaf:

$$(A + M\,d^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,Mg\,(h_o - h) - \frac{C^2 n^2 (\cos\theta - \cos\theta_o)^2}{A \sin^2\theta}.$$

We zien er uit, dat $\theta$ nimmer nul kan worden; dat er een waarde $\theta_1$ bestaat, gelegen tusschen o en $\theta_o$, die het tweede lid, derhalve ook $\frac{d\theta}{dt}$ gelijk nul maakt. Derhalve zal ook in dit geval de omwentelings-as in het verticale vlak, dat door haar bepaald wordt, isochronische schommelingen maken, waarvan de amplitudo $\theta_o - \theta_1$ is, en waarvan de duur 2T gegeven wordt door:

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_o} \sqrt{\frac{A + M\,d^2}{2\,Mg\,(h_o - h) - \dfrac{C^2 n^2 (\cos\theta - \cos\theta_o)^2}{A \sin^2\theta}}}\, d\theta.$$

Het verticale vlak zelf wentelt om de verticaal met een hoeksnelheid $\frac{d\psi}{dt}$ of $\frac{\cos\theta - \cos\theta_o}{\sin^2\theta} . \frac{Cn}{A}$ in *tegengestelden* zin van de rotatie $n$. Die hoeksnelheid is nul bij 't begin van elke oscillatie, neemt daarna toe, en bereikt op de helft van elke schommeling haar maximum-waarde $\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_1} \cdot \frac{Cn}{A}$.

Evenzoo als in het eerste geval bereikt $\omega$ of de hoeksnelheid om de oogenblikkelijke as haar minimum-waarde $n$ bij 't begin van elke schommeling, en haar maximum-waarde op 't oogenblik, dat het zwaartepunt van het lichaam zijn laagsten stand inneemt, of, wat hier hetzelfde is, op de helft van elke oscillatie.

De hoek $\delta$ tusschen de oogenblikkelijke en de omwentelings-as is gelijk nul bij 't begin, en het grootst op 't midden van elke oscillatie.

Het vlak, gaande door de omwentelings-as en de oogenblikkelijke as, wordt om de eerste rondgevoerd met een hoeksnelheid $\frac{d\mu}{dt}$, gegeven door:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{Cn}{A} + R \frac{dh}{d\theta} \frac{\sin \theta \frac{d\psi}{dt}}{A(p^2 + q^2)}.$$

De laatste term is ook hier negatief, omdat $\frac{d\psi}{dt}$ negatief en $R \frac{dh}{d\theta}$ positief is. Bij 't begin van elke oscillatie is die hoeksnelheid ook gelijk $\frac{Cn}{2A}$, dus in denzelfden zin als $n$, en enkel van deze grootheid afhankelijk.

---

## § 6. *Algemeen overzicht.*

Laat ons nu kortelijk nagaan tot welke resultaten we door bovenstaande beschouwingen gekomen zijn omtrent de beweging van een omwentelingslichaam, welks as van omwenteling een der natuurlijke assen van inertie is, op een horizontaal plat vlak, dat geen wrijving aanbiedt, wanneer de oorspronkelijke beweging slechts bestaat uit een rotatie om de omwentelings-as.

Zal deze beweging een geleidelijk verloop hebben, welke ook de stand zij, waarin het lichaam op het horizontale vlak geplaatst wordt, dan moeten we den vorm zoodanig onderstellen, dat het lichaam een plat vlak slechts in één punt te gelijker tijd kan raken.

Wordt zulk een lichaam zóó op 't vlak geplaatst, dat het in standvastig of onstandvastig evenwicht verkeert, dan zal het met de oorspronkelijke hoeksnelheid om de omwentelings-as blijven draaien, terwijl deze onveranderlijk denzelfden stand behoudt.

Is het lichaam echter vóór 't begin der beweging niet in evenwicht, en wordt vervolgens om de as een rotatie $n$ aangebracht, dan zal het zwaartepunt onmiddelijk na het intreden van de beweging dalen.

Het gevolg hiervan is, dat de helling van de as met de verticaal verandert, en het hangt van den stand af, waarin het lichaam op het horizontale vlak wordt geplaatst, of die helling *grooter* dan wel *kleiner* wordt.

Stellen we vooreerst, dat de oorspronkelijke rotatie om de as nul is; dan zal in beide gevallen het lichaam isochronische schommelingen maken. Denken we ons het verticale vlak, dat door de omwentelings-as gaat, dan blijft dit vlak gedurende de beweging van het lichaam onveranderlijk, en de schommelingen van de omwentelings-as in dit vlak geschieden om die lijn als evenwichtsstand, volgens welke de as gericht is, als het zwaartepunt zijn laagsten stand heeft ingenomen; die lijn zal in 't tweede geval de verticaal zijn. Bij 't begin van elke schommeling verkeert het lichaam in denzelfden toestand als die, waarin het bij 't begin der beweging verkeerde.

Het zwaartepunt maakt op de verticaal isochronische schommelingen, waarvan de duur juist de helft bedraagt van dien der schommelingen van de as. Het bereikt het hoogste punt op de verticaal bij 't begin van elke halve schommeling van de omwentelings-as, en het laagste punt, wanneer het lichaam door den evenwichts-stand gaat.

De beweging van het lichaam wordt geheel anders, wanneer de oorspronkelijke beweging wordt veroorzaakt door een koppel, gelegen in een vlak loodrecht op de omwentelings-as.

Denken we ons weer de verticaal van het zwaartepunt en het verticale vlak door de omwentelings-as, dan maakt deze weer isochronische schommelingen in dit vlak; bij 't begin van elk dier schommelingen neemt ze denzelfden stand met betrekking tot de verticaal in, om gedurende de eene helft der schommeling grootere of kleinere hoeken met deze te maken, zonder er echter mede samen te vallen. Hoe grooter de rotatie om de as is, des te kleiner worden de amplitudines dezer schommelingen.

Het zwaartepunt maakt op de verticaal schommelingen, isochronisch met die, welke de as maakt. In 't tweede geval zullen deze schommelingen altijd enkelvoudig zijn, en het zwaartepunt zijn hoogsten stand innemen bij 't begin, zijn laagsten stand op de helft van elke schommeling. In 't eerste geval kunnen die oscillaties van het zwaartepunt samengesteld wezen, wat afhangt van de grootte der oorspronkelijke rotatie.

Te gelijker tijd wordt het verticale vlak om de verticaal gevoerd, in 't eerste geval in *gelijken*, in 't tweede geval in *tegengestelden* zin van de rotatie *n*. De hoeksnelheid, waarmede deze wenteling geschiedt, is veranderlijk met den tijd, maar voor denzelfden hoek van afwijking tusschen as en verticaal dezelfde, waaruit volgt, dat gedurende elke schommeling van de as die wenteling op gelijke wijze plaats heeft; ze is gelijk nul bij 't begin van elke oscillatie.

Ook de oogenblikkelijke as maakt ten opzichte van de omwentelings-as schommelingen. Denkt men een vlak door deze beide assen, dan maakt de oogenblikkelijke as in dit vlak schommelingen, isochronisch met die, welke de omwentelings-as in het verticale vlak maakt; beide schommelingen gaan op 't zelfde oogenblik van denzelfden stand uit en zijn van dezelfde soort.

Het vlak, dat voortdurend door de omwentelings- en de oogenblikkelijke as gaat, wordt rond de eerste gevoerd met veranderlijke hoeksnelheid, die echter gedurende elke schommeling op dezelfde wijze verloopt. Bij 't begin van elk dier schommelingen heeft die hoeksnelheid hetzelfde teeken als $n$, en hangt slechts van deze grootheid af.

De hoeksnelheid om de oogenblikkelijke as is gelijk aan $n$ bij 't begin van elke schommeling, en het grootst als het zwaartepunt den laagsten stand heeft ingenomen.

We kunnen ons van deze beweging een meer aanschouwelijke voorstelling geven, door ons den bol voor te stellen, die uit het zwaartepunt van het lichaam met de eenheid als straal beschreven is, en dien bol met betrekking tot het zwaartepunt als vast te beschouwen.

Het middelpunt van dezen bol zal derhalve in de verticale schommelingen van het zwaartepunt deelen.

Fig. 6 en 7. De pool van de omwentelings-as beschrijft op den bol een kromme lijn, die uit gelijke en gelijkvormige deelen bestaat, en geheel gelegen is tusschen twee kleine cirkels, waarvan de vlakken loodrecht staan op de verticaal, en de stralen sin $\theta_o$ en sin $\theta_1$ zijn. Elk dezer deelen staat loodrecht op den eersten, en raakt den tweeden cirkel. Immers, de verhouding $\frac{d\theta}{d\psi}$

of $\sqrt{\frac{A}{A + Md^2}} \sin\theta \sqrt{\frac{2\,AMg \sin^2\theta\,(h_o - h)}{C^2 n^2 (\cos\theta_o - \cos\theta)^2} - 1}$

wordt voor $\theta = \theta_o$ oneindig groot; want de breuk onder 't wortelteeken wordt dan wel onbepaald, doch door teller en noemer ten opzichte van $\theta$ te differentieeren en daarna $\theta = \theta_o$ te stellen, komt er voor de waarde van dien breuk:

$$\frac{MAgd_o \sin\theta_o}{C^2 n^2 (\cos\theta_o - \cos\theta_o)} = + \infty.$$

De verhouding tusschen de verwijdering der pool van den omtrek des cirkels en hare beweging langs dien cirkel is oneindig groot, dus geschiedt de beweging voor $\theta = \theta_o$ loodrecht op den eersten cirkel.

Voor $\theta = \theta_1$ is deze verhouding gelijk nul, daar alsdan $\frac{d\theta}{dt} = 0$ is en $\frac{d\psi}{dt}$ een bepaalde waarde heeft, zoodat dan de pool zich volgens de raaklijn aan den tweeden cirkel beweegt.

Daar de vorm dezer deelen slechts van de grootheden $d\theta$ en $d\psi$ afhangt, en deze gedurende de beide helften der schommelingen van de as voor denzelfden hoek $\theta$ de zelfde waarde hebben, de eerste op het teeken na, volgt er uit, dat elk dezer deelen symetrisch gelegen zijn ten opzichte van den meridiaan van het raakpunt.

Elk dezer deelen wordt door den pool op identiek dezelfde wijze doorloopen en in denzelfden zin als die der rotatie *n*.

---

## VIERDE HOOFDSTUK.

*Behandeling van 't geval, dat* n *zeer groot is.*

---

't Valt niet te ontkennen, dat het denkbeeld, tot hiertoe van de beweging van het lichaam verkregen, verre van volledig is, omdat we niet weten in welke verhoudingen de beschouwde grootheden tot elkander staan. Immers weten we niet, hoe de duur van de beschouwde oscillaties in betrekking staat tot de grootte van $n$, en in hoeverre $n$ den tijd wijzigt, waarin de beschouwde vlakken een volle omwenteling volbrengen. De oorzaak hiervan is gelegen in de omstandigheid, dat de waarden der integralen niet konden bepaald worden.

Het theorema van Puiseux zegt, dat we $n$ zóó groot kunnen nemen, dat de amplitudo $\theta_1 - \theta_0$ der schommelingen, die de omwentelings-as in het verticale vlak maakt, zoo klein wordt als men slechts verkiest.

We zullen nu $n$ zoo groot onderstellen, dat we de tweede en hoogere machten van $\theta_1 - \theta_o$ kunnen verwaarloozen.

De formule voor $\frac{d\theta}{dt}$ geeft de betrekking aan, die er bestaat tusschen de grootte van $n$ en de grootte van de amplitudo $\pm (\theta_1 - \theta_o)$. Immers $\theta_1$ moet voldoen aan de vergelijking:

$$2\,Mg\,(h_o - h_1) = \frac{C^2\,n^2\,(\cos\theta_o - \cos\theta_1)^2}{A\,\sin^2\theta_1}, \text{ dus}$$

$$n^2 = \frac{2\,MAg}{C^2}\,\frac{\sin^2\theta_1}{(\cos\theta_o - \cos\theta_1)^2}\,(h_o - h_1);$$

waaruit op nieuw blijkt, dat wanneer $n$ zeer groot is, $\cos\theta_o - \cos\theta_1$ zeer klein moet wezen, daar $(h_o - h_1)$ altijd eindig is, en wij onderstellen dat $\frac{2\,MAg}{C^2}$ een eindige waarde heeft.

---

## § 7. *Eerste geval; $\theta - \theta_o$ een zeer kleine positieve grootheid.*

Nemen we dan aan, dat $n$ zóó groot genomen wordt, dat de tweede en hoogere machten van $\theta - \theta_o$ verwaarloosd kunnen worden. Stellen we kortheidshalve $\theta - \theta_o = u$, dan is volgens onze onderstelling:

$$h = h_o + u\,\frac{dh_o}{d\theta} \text{ of } h = h_o - u\,d_o;$$

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{dh_o}{d\theta} + u\,\frac{d^2h_o}{d\theta^2} \text{ of } d = d_o - u\,(\rho_o - h_o);$$

$$\sin\theta = \sin\theta_o + u\cos\theta_o;$$

$$\cos\theta = \cos\theta_o - u\sin\theta_o;$$

$$\frac{\cos\theta_o - \cos\theta}{\sin\theta} = u.$$

De formule voor $\frac{d\theta}{dt}$ wordt dan na substitutie:

$$dt = \pm\, du \sqrt{\frac{A + M\,\{d_o^2 - 2\,u\,d_o\,(\rho_c - h_o)\}}{2\,Mg\,u\,d_o - \frac{C^2 n^2}{A}\,u^2}}$$

$$= \pm\,\frac{du}{\sqrt{u}}\sqrt{\frac{A + M\,d_o^2}{2\,Mg\,d_o - u\left(\frac{C^2 n^2}{A} - 4g\,M^2 d_o^2\,\frac{\rho_o - h_o}{A + Md_o^2}\right)}}.$$

Stellen we ter bekorting:

$$\frac{Cn}{A} = k'; \quad \sqrt{\frac{\frac{C^2 n^2}{A} - 4g\,M^2 d_o^2\,\frac{\rho_c - h_o}{A + M\,d_o^2}}{A + M\,d_o^2}} = k$$

en $$\frac{Mg\,d_o}{k^2\,(A + M\,d_o^2)} = u_1; \text{ dan is:}$$

$$kt = \pm\int_0^u \frac{du}{\sqrt{u\,(2\,u_1 - u)}}; \text{ of integreerende:}$$

$$kt = \pm \text{ bg. } \cos\frac{u_1 - u}{u_1};$$

waaruit: $u = u_1 (1 - \cos kt)$,

$$\theta = \theta_0 + u_1 (1 - \cos kt) = \theta' - u_1 \cos kt;$$

als $\theta_0 + u_1 = \theta'$ gesteld wordt.

De constanten $k$ en $k'$ zijn van dezelfde orde als $n$, en $u_1$ van dezelfde orde als $u$.

Voor $\frac{d\psi}{dt}$ vinden we nu:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{A} \cdot \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k' u}{\sin \theta};$$

of sin $\theta$ in deze breuk door sin $\theta'$ vervangende, waardoor we $uu_1$ verwaarloozen:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{k' u_1}{\sin \theta'} (1 - \cos kt);$$

derhalve: $$\psi = \psi_0 + \frac{k' u_1}{k \sin \theta'} (kt - \sin kt),$$

als $\psi_0$ de aanvangshoek van $\psi$ is.

Eindelijk geeft de laatste van (II):

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos \theta \frac{d\psi}{dt};$$

of voor $\cos \theta \frac{d\psi}{dt}$ de waarde $\cos \theta' \frac{d\psi}{dt}$ stellende, waardoor $u_1^2$ verwaarloosd wordt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos \theta' \frac{d\psi}{dt}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \left(n - \frac{k' u_1}{\operatorname{tg} \theta'}\right) t + \frac{k' u_1}{k \operatorname{tg} \theta'} \sin kt,$$

waarin $\Phi_o = \text{Const.} - \psi_o \cos \theta' =$ de aanvangshoek van $\Phi$ is.

Omdat $\theta_1 = \theta_o + 2\,u_1$ is, wordt de bovengevondene waarde van $n^2$:

$$n^2 = \frac{2\,\mathrm{MA}g}{\mathrm{C}^2} \frac{\sin^2 \theta_1}{(\cos \theta_o - \cos \theta_1)^2} (h_o - h_1),$$

door substitutie van:

$$h_1 = h_o - 2\,u_1\,d_o$$
$$\cos \theta_1 = \cos \theta_o - 2\,u_1 \sin \theta_o$$
$$\text{en } \sin \theta_1 = \sin \theta_o + 2\,u_1 \cos \theta_o:$$

$$n^2 = \frac{2\,\mathrm{MA}g}{\mathrm{C}^2} \frac{2\,u_1\,d_o}{4\,u_1{}^2}$$

waaruit:
$$u_1 = \frac{\mathrm{MA}g\,d_o}{\mathrm{C}^2\,n^2};$$

deze waarde van $u_1$ met de bovengestelde vergeleken, geeft:

$$k^2 = \frac{\dfrac{\mathrm{C}^2\,n^2}{\mathrm{A}}}{\mathrm{A} + \mathrm{M}\,d_o{}^2};$$

waaruit blijkt, dat we in de waarde, die we voor $k$ gesteld hebben, de uitdrukking $4g\,\mathrm{M}^2\,d_o{}^2\,\dfrac{\rho_o - h_o}{\mathrm{A} + \mathrm{M}\,d_o{}^2}$ ten opzichte van $\dfrac{\mathrm{C}^2\,n^2}{\mathrm{A}}$ kunnen verwaarloozen.

Voor het geval, dat we nu behandelen, hebben we het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \theta' - u_1 \cos kt \\ \psi &= \psi_\circ + \frac{k' u_1}{\sin\theta'}\, t - \frac{k' u_1}{k \sin\theta'} \sin kt \\ \varphi &= \varphi_\circ + (n - k' u_1 \cot\theta')\, t + \frac{k'}{k} u_1 \cot\theta' \sin kt\end{aligned}\right\} \text{(V)}.$$

waarin: $\theta' = \theta_\circ + u_1$; $k' = \dfrac{Cn}{A}$;

$$k = \frac{Cn}{\sqrt{A(A + M d_\circ^2)}};\ u_1 = \frac{Mg\, d_\circ}{k^2 (A + M d_\circ^2)};$$

dus: $\dfrac{k'}{k} = \sqrt{1 + \dfrac{M}{A} d_\circ^2}$;

$$k\sqrt{u_1} = \sqrt{\frac{Mg\, d_\circ}{A + M d_\circ^2}};\ k'\sqrt{u_1} = \sqrt{\frac{Mg\, d_\circ}{A}}.$$

Uit deze formulen blijkt, dat $\theta$ periodiek is, en in den tijd $\frac{\pi}{k}$ van $\theta_\circ$ tot $\theta_\circ + 2u_1$ aangroeit, om in de daaropvolgende periode $\frac{\pi}{k}$ weder van $\theta_\circ + 2u_1$ tot $\theta_\circ$ af te nemen. De as maakt dus in het verticale vlak, dat door haar bepaald wordt, in den tijd $\frac{2\pi}{k}$ een volle schommeling, terwijl in dien zelfden tijd dit vlak in den zin van de rotatie $n$ om de verticaal wordt gevoerd en een hoek $\frac{k' u_1}{k \sin\theta'}\pi$ beschrijft. De hoeksnelheid, waarmede die rondwenteling geschiedt, is bij 't begin van elke periode $\frac{2\pi}{k}$ gelijk nul, en het grootst, n. l. gelijk $2\frac{k' u_1}{\sin\theta'}$, op het midden van elk dier perioden, dus als de as haar grootste afwijking van de verticaal bereikt.

Dit alles stemt volkomen overeen met hetgeen we in 't algemeene geval gevonden hebben. Maar nu zijn we in staat de beweging nauwkeurig voor te stellen.

Fig. 8. Denken we ons weer een bol met de eenheid als straal uit het zwaartepunt van het lichaam als middelpunt beschreven, en met betrekking tot dit zwaartepunt onveranderlijk.

Dan zal het middelpunt van dien bol op de verticaal schommelingen maken, die $\frac{2\pi}{k}$ duren, en wier amplitudo gelijk $2\,u_1\,d_0$ is.

Verbeelden we ons een as, waarvoor we altijd hadden: $\theta = \theta'$ en $\psi = \psi_0 + \frac{k' u_1}{\sin\theta'}\,t$: deze denkbeeldige as zal dan met eenparige beweging om de verticaal als as een rechten cirkelvormigen kegel beschrijven, welks halve tophoek $\theta'$ is. Het snijpunt van deze as met den bol, dat we *middelbare pool* zullen noemen, zal zich over een kleinen cirkel bewegen, welks vlak loodrecht staat op de verticaal, en welks straal $\sin\theta'$ is. Die beweging is eenparig, en geschiedt met een snelheid $\frac{k' u_1}{\sin \theta'} \times \sin \theta'$ of $k' u_1$ in den zin van de rotatie $n$.

De omwentelings-as zal zich om deze denkbeeldige as bewegen, en wel volgens de vergelijkingen:

$$(\theta - \theta') = - u_1 \cos kt;$$

$$\left\{\psi - \left(\psi_\circ + \frac{k' u_1}{\sin \theta'} t\right)\right\} = - \frac{k' u_1}{k \sin \theta'} \sin kt.$$

Daar de afstand van de middelbare pool tot die van de omwentelings-as, welke we *ware pool* zullen noemen, van dezelfde orde is als $u$, kunnen we bij de beschouwing van haar betrekkelijke beweging het bolvormig oppervlak vervangen door het raakvlak aan de middelbare pool.

Denken we ons in het raakvlak een rechthoekig coördinaten-stelsel, met den oorsprong in de middelbare pool; de $+ O\xi$-as gericht volgens de raaklijn aan den meridiaan van de middelbare pool en naar de verticaal gekeerd, de $+ O\eta$-as volgens de raaklijn aan den parallelcirkel van de middelbare pool, gericht naar die zijde, welke tegengesteld is aan de beweging, welke de middelbare pool op dien parallelcirkel heeft, dan zijn de coördinaten van de ware pool:

$$\xi = u_1 \cos kt;$$

$$\eta = \frac{k' u_1}{k \sin \theta'} \sin kt \sin \theta' = \frac{k'}{k} u_1 \sin kt.$$

De baan, die de ware pool rond de middelbare zal beschrijven, wordt dus gevonden door $t$ uit deze vergelijkingen te elimineeren, hetgeen geeft:

$$\frac{\xi^2}{u_1^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{k'}{k}u_1\right)^2}=1,$$

derhalve een ellips, wier halve assen $u_1$ en $\frac{k'}{k}u_1$ zijn; de laatste, die gericht is volgens de raaklijn aan den parallelcirkel van de middelbare pool, is de grootste, terwijl de excentriciteit dezer ellips is

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{k'}{k}u_1\right)^2-u_1^2}}{\frac{k'}{k}u_1}=\sqrt{1-\frac{k^2}{k'^2}}=\sqrt{\frac{Md_0^2}{A+Md_0^2}}.$$

De excentriciteit is derhalve het grootst, wanneer $d_0$ het grootst is, m. a. w. hoe verder de stand, waarin het lichaam op het horizontale vlak geplaatst wordt, verwijderd is van den evenwichts-stand.

Om de richting te vinden, waarin de ware pool haar baan om de middelbare pool beschrijft, noemen we $r$ de voerstraal, die van de middelbare naar de ware pool gaat, en $m$ de hoek, dien $r$ met de $+$ $O\xi$-as maakt, positief genomen als hij beschreven is in den zin van de rotatie om de omwentelings-as; dan is

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} m;$$

gedifferentieerd ten opzichte van $t$:

$$\frac{\xi \dfrac{d\eta}{dt} - \eta \dfrac{d\xi}{dt}}{\xi^2} = \frac{\dfrac{dm}{dt}}{\cos^2 m},$$

of omdat $\xi = r \cos m$ is:

$$r^2 \frac{dm}{dt} = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt};$$

nu is $\dfrac{d\xi}{dt} = - k\, u_1 \sin kt$, en $\dfrac{d\eta}{dt} = k'\, u_1 \cos kt$, dus

$$r^2 \frac{dm}{dt} = k'\, u_1^2 \cos^2 kt + k'\, u_1^2 \sin^2 kt = k'\, u_1^2;$$

$\dfrac{dm}{dt}$ is positief, derhalve beschrijft de ware pool haar baan om de middelbare in denzelfden zin als die van de rotatie om de omwentelings-as.

Die hoeksnelheid $\dfrac{dm}{dt}$ of $\dfrac{k'\, u_1^2}{r^2}$ is het grootst $(= k')$, als de ware pool den meridiaan van de middelbare pool passeert, dus op 't oogenblik, dat de omwentelings-as haar grootste en haar kleinste afwijking van de verticaal heeft, terwijl ze het kleinst $\left(= \dfrac{k^2}{k'}\right)$ is bij de tusschenstanden.

De vlakte door den voerstraal in de eenheid van tijd beschreven, bedraagt $\frac{1}{2}\, r.\, \dfrac{r\, dm}{dt} = \frac{1}{2}\, k'\, u_1^2$, dus constant; en daar de inhoud van de ellips $\pi . \frac{k'}{k} u_1^2$ is, zoo wordt de geheele vlakte door den voerstraal beschreven in den tijd $\pi . \frac{k'}{k} u_1^2 : \frac{1}{2} k' . u_1^2 = \frac{2\pi}{k}$, zooals boven reeds gezegd is.

De snelheid $s$, waarmede de ware pool haar ellips beschrijft, wordt gegeven door:

$$s^2 = \left(r \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Nu is $r \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{k' u_1^2}{r}$, en $r^2 = u_1^2 \left(1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin^2 kt\right)$,

dus $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k u_1^2 . \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \frac{\sin kt \cos kt}{r},$$

derhalve:

$$s^2 = \left(\frac{k' u_1^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{k u_1^2}{r}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin kt \cos kt\right)^2$$

$$= \left(\frac{k u_1^2}{r}\right)^2 \left\{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 + \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin kt \cos kt\right)^2\right\}$$

$$= k^2 u_1^2 \frac{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin^2 kt + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \cos^2 kt \left(1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin^2 kt\right)}{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \sin^2 kt}$$

$$= k^2 u_1^2 \left(1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \cos^2 kt\right);$$

derhalve: $$s = k u_1 \sqrt{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_o^2 \cos^2 kt};$$

Ze is dus het grootst, als de ware pool den meridiaan van de middelbare pool passeert ($= k' u_1$), en het kleinst in de tusschenstanden ($= k u_1$).

De hoek $m$, door den voerstraal in den tijd $t$ beschreven, wordt gevonden uit:

$$m = k' u_1^2 \int \frac{dt}{r^2}$$

$$= k' \int \frac{dt}{1 + \frac{M}{A} d_o^2 \sin^2 kt}$$

$$= \operatorname{bg\,tg} \left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} kt\right);$$

geen constante aanbrengende, omdat $m$ en $t$ te gelijker tijd beginnen.

In navolging van de sterrekundigen kunnen we de eenparige beweging van de denkbeeldige as *praecessie*, en de beweging van de ware om de denkbeeldige as *nutatie* noemen.

De periode, waarin de praecessie een volle omwenteling volbrengt, volgt uit $\frac{k' u_1}{\sin \theta'} t = 2\pi$, dus

$$t = \frac{2\pi}{k'} \frac{\sin \theta'}{u_1};$$

die, waarin de nutatie geschiedt, bedraagt

$$t' = \frac{2\pi}{k};$$

de verhouding tusschen die twee perioden:

$$\frac{t}{t'} = \frac{k}{k'} \frac{\sin \theta'}{u_1};$$

dus zeer groot, wanneer $\theta_0$ niet zeer klein is.

Om de meetkunstige plaats te vinden van de standen der opvolgende oogenblikkelijke assen, denken we ons het vlak, dat door de omwentelings- en de oogenblikkelijke as gaat. Deze zal, zoo als boven reeds gezegd is, isochronische schommelingen in dit vlak maken. Voor den hoek $\delta$, dien ze met de omwentelings-as maakt, vonden we:

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\sin \theta \frac{d\psi}{dt}\right)^2};$$

Nu is in ons geval:

$$\frac{d\theta}{dt} = k\, u_1 \sin kt;$$

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{k' u_1}{\sin \theta'} (1 - \cos kt) (\sin \theta' - u_1 \cos \theta' \cos kt)$$
$$= k' u_1 (1 - \cos kt);$$

derhalve

$$p^2 + q^2 = k^2 u_1{}^2 \sin^2 kt + k'^2 u_1{}^2 (1 - \cos kt)^2$$
$$= k^2 u_1{}^2 \left\{\sin^2 kt + \left(1 + \frac{M}{A} d_0{}^2\right) (1 - \cos kt)^2\right\}$$
$$= k^2 u_1{}^2 \left\{2 (1 - \cos kt) + \frac{M}{A} d_0{}^2 (1 - \cos kt)^2\right\}$$

$$= 4\,k^2\,u_1^2 \sin^2\frac{kt}{2}\left(1 + \frac{M}{A}\,d_\circ^2 \sin^2\frac{kt}{2}\right),$$

dus: $$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\,k\,u_1}{n}\sin\frac{kt}{2}\sqrt{1 + \frac{M}{A}\,d_\circ^2\sin^2\frac{kt}{2}},$$

of ook, omdat $\operatorname{tg}\delta$ van dezelfde orde is als $u_1$:

$$\delta = \frac{2\,k\,u_1}{n}\sin\frac{kt}{2}\sqrt{1 + \frac{M}{A}\,d_\circ^2\sin^2\frac{kt}{2}}.$$

Eer we de veranderingen van $\delta$ verder nagaan, zullen we vooraf onderzoeken, welke beweging het vlak heeft, dat door de omwentelings-as en de oogenblikkelijke as gaat.

Voor 't algemeene geval vonden we:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{Cn}{A} + R\,\frac{dh}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)};$$

nu is $$\frac{\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)} = \frac{k'}{k^2\,u_1}\,\frac{1}{2\,A + M\,d_\circ^2\,(1-\cos kt)};$$

$$R = M\left(g + \frac{d^2h}{dt^2}\right) = M\,(g - k^2\,u_1\,d_\circ\cos kt)$$

dus: $$R\,\frac{\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)} = \frac{k'}{2\,A + M\,d_\circ^2\,(1-\cos kt)}\left(\frac{Mg}{k^2\,u_1} - M\,d_\circ\cos kt\right),$$

of omdat $$\frac{Mg}{k^2\,u_1} = \frac{A + M\,d_\circ^2}{d_\circ}$$ is:

$$R\,\frac{\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}}{A\,(p^2+q^2)} = k'\,\frac{A + M\,d_\circ^2\,(1-\cos kt)}{2\,A + M\,d_\circ^2\,(1-\cos kt)} : d_\circ.$$

Verder is $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = - d_o + u(\rho_o - h_o)$, dus:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = k' - k' \frac{A + M d_o^2 (1 - \cos kt)}{2A + M d_o^2 (1 - \cos kt)} \left(1 - \frac{u(\rho_o - h_o)}{d_o}\right)$$

$$= \frac{k' A}{2A + M d_o^2 (1 - \cos kt)} \left\{1 + \frac{u}{d_o}(\rho_o - h_o)\left(1 + \frac{M}{A} d_o^2 (1 - \cos kt)\right)\right\}$$

$$= \frac{Cn}{2A + M d_o^2 (1 - \cos kt)} \left\{1 + \frac{u}{d_o}(\rho_o - h_o)\left(1 + \frac{M}{A} d_o^2 (1 - \cos kt)\right)\right\}.$$

Wanneer $d_o = o$ is, dus de stand, waarin het lichaam op het horizontale vlak geplaatst wordt, een evenwichtsstand is, dan zal de oogenblikkelijke as ieder oogenblik samenvallen met de omwentelings-as, en deze onveranderlijk denzelfden stand behouden. Voor dit geval moet dus $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = o$ zijn. Laat ons zien, of dit ook door onze formule bevestigd wordt.

Is $d_o = o$, dan is ook $u_1 = o$, bijgevolg ook $u$; de breuk $\frac{u}{d_o}$ wordt dan onbepaald, zijn waarde is die, welke de breuk $\frac{\theta - \theta_o}{d}$, of volgens de notatie in het eerste hoofdstuk gebruikt, $\frac{\theta - \theta_o}{\sin\theta\,\psi(\theta) - \cos\theta\,F(\theta)}$ verkrijgt voor $\theta = \theta_o$; teller en noemer ten opzichte van $\theta$ gedifferentieerd, en daarna $\theta = \theta_o$ gesteld, geeft:

$$\frac{u}{d} = \frac{1}{\cos\theta_o\,\psi(\theta_o) + \sin\theta_o\,F(\theta_o) + \sin\theta_o\,\psi'(\theta_o) - \cos\theta_o\,F'(\theta_o)} = \frac{1}{h_o - \rho_o};$$

derhalve $\qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{Cn}{2A}(1-1) = o,$

zooals vereischt werd.

Is $d_o$ niet gelijk nul, maar toch zeer klein, dan volgt uit de constanten dat ook $u$ zeer klein moet zijn, welke waarde $n$ ook moge hebben, zoodat onze formulen voor willekeurige $n$ gelden, wanneer het lichaam op det horizontale vlak wordt geplaatst in een stand, die zeer weinig verschilt van den stand van onstandvastig evenwicht.

Heeft eindelijk, zooals we ondersteld hebben, $n$ een zeer groote waarde, zoodat $u$ in allen gevalle zeer klein is, en heeft $d_o$ een eindige waarde, dan moet ook $\frac{u}{d_o}(\rho_o - h_o)$ een zeer kleine waarde hebben, die we kunnen verwaarloozen, zoodat de formule overgaat in

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{Cn}{2A + Md_o^2(1-\cos kt)};$$

dus $\qquad \mu = Cn\int\frac{dt}{2A + Md_o^2(1-\cos kt)};$

$$= \text{Const.} + \frac{Cn}{k\sqrt{A(A+Md_o^2)}}\,\text{bg tg}\left(\sqrt{1+\frac{M}{A}d_o^2}\,\text{tg}\frac{kt}{2}\right);$$

of ook, daar volgens de constanten op bl. 49:

$$\frac{Cn}{k\sqrt{A(A+Md_o^2)}} = 1 \text{ en } \sqrt{1+\frac{M}{A}d_o^2} = \frac{k'}{k} \text{ is:}$$

$$\mu = \text{Const.} + \text{bg tg}\left(\frac{k'}{k}\,\text{tg}\,\frac{kt}{2}\right).$$

Voor de bepaling van de standen der opvolgende oogenblikkelijke assen hebben we het volgende stelsel van formulen:

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= \text{bg tg}\left(\frac{k'}{k}\,\text{tg}\,\frac{kt}{2}\right) + \text{Const.} \\
\frac{d\mu}{dt} &= \tfrac{1}{2}\,\frac{Cn}{A + M\,d_o^2 \sin^2\frac{kt}{2}} \\
\vartheta &= 2\,\frac{C u_1}{A} \sin\frac{kt}{2}\sqrt{1 - \frac{M\,d_o^2}{A + M d_o^2}\cos^2\frac{kt}{2}} \\
\text{en}\qquad \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{k^2 u_1}{n\sqrt{A}}\cos\frac{kt}{2}.\,\frac{A + 2\,M d_o^2 \sin^2\frac{kt}{2}}{\sqrt{A + M d_o^2 \sin^2\frac{kt}{2}}}.
\end{aligned}\right\}\text{(VI)}.$$

De waarde dezer vier grootheden voor bepaalde tijdstippen zoekende, gemakshalve de constante bij $\mu$ weglatende, vinden we:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Voor $t = o$ | $\vartheta = o$ | $\mu = o$ | $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k^2}{n} u_1$ | $\frac{d\mu}{dt} = \frac{Cn}{2A} = \frac{k'}{2}$ |
| $t = \frac{\pi}{k}$ | $\vartheta = \frac{2C}{A} u_1$ | $\mu = \frac{\pi}{2}$ | $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ | $\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{Cn}{A + M d_o^2} = \frac{k^2}{2k'}$ |
| $t = \frac{2\pi}{k}$ | $\vartheta = o$ | $\mu = \pi$ | $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k^2}{n} u_1$ | $\frac{d\mu}{dt} = \frac{k'}{2}$ |
| $t = \frac{3\pi}{k}$ | $\vartheta = -\frac{2C}{A} u_1$ | $\mu = \frac{3\pi}{2}$ | $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ | $\frac{d\mu}{dt} = \frac{k^2}{2k'}$ |
| $t = \frac{4\pi}{k}$ | $\vartheta = o$ | $\mu = 2\pi$ | $\frac{d\vartheta}{dt} = +\frac{k^2}{n} u_1$ | $\frac{d\mu}{dt} = \frac{k'}{2}$ |

Hieruit blijkt, dat $\vartheta$ na verloop van een even aantal tijdperioden, ieder van $\frac{\pi}{k}$, nul wordt, en na verloop van een oneven aantal dier perioden maximum wordt $\left(= \pm \frac{2\,C}{A}\,u_1\right)$; dat de maximum- en de minimum-waarde van $\frac{d\vartheta}{dt}$ invalt te gelijker tijd met de minimum- en de maximum-waarde van $\vartheta$ zelve; eindelijk, dat $\frac{d\mu}{dt}$ altijd positief is en nimmer gelijk nul kan worden, dat derhalve de verhouding $\frac{d\vartheta}{d\mu}$ na een oneven aantal perioden $\frac{\pi}{k}$, wanneer $\vartheta$ haar maximum bereikt, gelijk nul is.

Dit is voldoende om den weg na te gaan, dien de oogenblikkelijke pool rond de ware pool beschrijft.

Fig. 9. Zij P de ware pool, en PA de doorsnede van het vlak, dat door de omwentelings- en de oogenblikkelijke as gaat, met het raakvlak aan den bol in het punt P, op 't oogenblik dat de beweging begint.

In den tijd $\frac{\pi}{k}$, dat de doorsnede PA een rechten hoek beschrijft en in den stand PB gekomen is, heeft de oogenblikkelijke pool zich op die doorsnede voortbewogen en haar grootsten afstand $\frac{2\,C}{A}\,u_1$ van de ware pool bereikt; in de daaropvolgende periode $\frac{\pi}{k}$ beschrijft de doorsnede andermaal een rechten hoek, en bevindt zich na den tijd $\frac{2\pi}{k}$ in het verlengde PA′ van PA, terwijl de oogenblikkelijke pool op dat oogenblik met de ware pool samenvalt. In de daaropvolgende periode beschrijft de doorsnede den rechten hoek A′ PY; terwijl gedurende dien tijd de oogenblikkelijke pool zich op het verlengde van PY voortbeweegt en weer denzelfden weg aflegt, dien ze gedurende de eerste periode heeft doorloopen. Valt eindelijk na verloop van $\frac{4\pi}{k}$ de doorsnede weder samen met haar stand bij 't begin van de beweging, dan valt de oogenblikkelijke pool weer samen met de ware.

Terwijl dus de doorsnede in den tijd $\frac{4\pi}{k}$ een volle omwenteling om P volbrengt, doorloopt de oogenblikkelijke pool tweemaal denzelfden weg. Deze zal den cirkel, uit P als middelpunt met $2\,\frac{C u_1}{A}$ als straal beschreven, raken en symetrisch gelegen zijn ten opzichte van den straal van het raakpunt.

De vergelijking van deze baan verkrijgen we in polaire coördinaten, door $t$ te elimineeren uit de vergelijkingen voor $\vartheta$ en $\mu$, hetgeen geeft:

$$\mathfrak{z} = 2\,C\,u_1 \frac{\sin\mu}{A + M d_o^2 \cos^2\mu},$$

waarin $\mathfrak{z}$ den voerstraal, en $\mu$ den hoek tusschen de as PA en den voerstraal voorstelt.

Noemen we $\tau$ de hoek, dien de raaklijn aan eenig punt van deze kromme met de as maakt, dan is

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{d\mathfrak{z}}{d\mu}\operatorname{tg}\mu + \mathfrak{z}}{\frac{d\mathfrak{z}}{d\mu} - \mathfrak{z}\operatorname{tg}\mu}$$

$$= 2\sin 2\mu \frac{A + M d_o^2}{(2A + M d_o^2)\cos 2\mu + M d_o^2};$$

waaruit blijkt, dat wanneer $\mu$ van $o$ tot $\frac{\pi}{2}$ wast, $\tau$ van $o$ tot $\pi$ aangroeit, en voor den hoek $\mu_1$, welke voldoet aan $\cos 2\mu_1 = -\frac{M d_o^2}{2A + M d_o^2}$, gelijk $\frac{\pi}{2}$ wordt. De kromme heeft dus haar holle zijde naar de ware pool gekeerd, en raakt de as.

We kunnen beter de gedaante nagaan, wanneer we de vergelijking in rechthoekige coördinaten overbrengen. Als PA de X-as en PY de Y-as voorstelt, dan vinden we, $\mathfrak{z}\cos\mu = x$ en $-\mathfrak{z}\sin\mu = y$ stellende:

$$(A + M d_o^2)\,x^2 + A\,y^2 + 2\,C\,u_1 . y = o.$$

Brengen we den oorsprong in O over, in het midden van PB, zoodat we voor y de waarde $y - \frac{C u_1}{A}$ moeten substitueeren, dan komt er:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{C u_1}{\sqrt{A(A + M d_o^2)}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{C u_1}{A}\right)^2} = 1,$$

of, daar $\frac{C}{\sqrt{A(A + M d_o^2)}} = \frac{k}{n}$ en $\frac{C}{A} = \frac{k'}{n}$ is:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k u_1}{n}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{k' u_1}{n}\right)^2} = 1.$$

De kromme is dus een ellips, wier halve assen $\frac{k' u_1}{n}$ en $\frac{k u_1}{n}$ zijn. De ware pool bevindt zich op een der uiteinden van de groote as.

Om de richting te vinden, waarin de oogenblikkelijke pool deze ellips beschrijft, moeten we de coördinaten $x$ en $y$ in functie van den tijd uitdrukken. We hebben:

$$x = \delta \cos \mu$$

$$y = \frac{C u_1}{A} - \delta \sin \mu.$$

Hierin de waarde van $\mu$ en van $\delta$ gesubstitueerd, geeft

$$x = \frac{k u_1}{n} \sin kt$$

$$y = \frac{k' u_1}{n} \cos kt.$$

Stel $v$ den hoek voor, dien de voerstraal $\rho_1$ van het punt D met de + OY-as maakt, dan is

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} v;$$

gedifferentieerd ten opzichte van $t$:

$$\frac{y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{y^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{\cos^2 v};$$

of omdat $y^2 = \rho_1^2 \cos^2 v$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\frac{k\,u_1}{n}\cos kt$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\frac{k'\,u_1}{n}\sin kt$ is:

$$\rho_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kk'\,\frac{k\,u_1^2}{n^2}.$$

In plaats van $\rho_1^2$ de waarde $\frac{u_1^2}{n^2}\left(k^2 \sin^2 kt + k'^2 \cos^2 kt\right)$ stellende:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k^2\,k'}{k^2 \sin^2 kt + k'^2 \cos^2 kt}$$

$$\text{dus } v = +\,k' \int \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} d_0^2 \cos^2 kt}$$

$$= +\,\frac{k'}{k} \operatorname{bg\,tg}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} kt\right);$$

geen constante aanbrengende, omdat $v$ en $t$ te gelijkertijd beginnen.

De snelheid $\sigma$, waarmede de oogenblikkelijke pool haar baan rond de ware beschrijft, wordt gevonden uit:

$$\sigma^2 = \left(\rho_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Nu volgt uit $\rho_1{}^2 = \frac{u_1{}^2}{n^2}(k^2 \sin{}^2 kt + k'^2 \cos{}^2 kt)$:

$$\rho_1 \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{u_1{}^2}{n^2}(k^3 - kk'^2) \sin kt \cos kt,$$

derhalve $\rho_1{}^2 \sigma^2 = \left(\rho_1{}^2 \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\rho_1 \frac{d\rho}{dt}\right)^2.$

Na substitutie en eenige herleidingen vindt men:

$$\sigma = \frac{k^2 u_1}{n} \sqrt{1 + \frac{M}{A} d_o{}^2 \sin{}^2 kt.}$$

De snelheid is derhalve het geringst, als de pool door de uiteinden van de groote as, en het grootst als ze door die van de kleine as gaat.

De vlakte, door $\rho_1$ in de eenheid van tijd beschreven,

$$\tfrac{1}{2} \rho_1 . \frac{\rho_1 dv}{dt} = \tfrac{1}{2} kk'. \frac{k u_1{}^2}{n^2};$$

de geheele vlakte van de ellips bedraagt $\pi \frac{kk' u_1{}^2}{n^2}$; derhalve bedraagt de omloopstijd $\frac{2\pi}{k}$, zooals reeds bekend was.

We hebben dus gevonden, dat terwijl de ware pool om de middelbare een ellips beschrijft, de oogenblikkelijke pool in denzelfden tijd een ellips beschrijft, die in een der toppunten, waarin de groote as eindigt, de ware pool bevat. Deze ellips wordt dus met de ware pool rondgevoerd om de middelbare pool.

Hieruit volgt, dat ook de oogenblikkelijke pool om de middelbare pool in den tijd $\frac{2\pi}{k}$ een gesloten kromme zal beschrijven; de gedaante dezer kromme zullen we nu gaan bepalen.

Vooreerst dienen we na te gaan, in welken stand de ellips van de oogenblikkelijke pool rond de middelbare wordt gevoerd.

Boven vonden we, dat de snelheid, waarmede de ware pool bij hare beweging om de middelbare den meridiaan van deze passeert, gelijk $k' u_1$ is; omdat de middelbare pool zich met constante snelheid $k' u_1$ over een parallelcirkel beweegt, en deze beweging evenwijdig loopt met die, welke de ware pool heeft als ze den meridiaan van de middelbare passeert, blijkt onmiddelijk, dat de absolute snelheid van de ware pool in A (zie fig. 8) gelijk $k' u_1 - k' u_1 = o$ is, terwijl ze bij C gelijk $k' u_1 + k' u_1 = 2 k' u_1$ is; hetgeen bevestigd wordt door de formule $\frac{d\psi}{dt} = \frac{k' u_1}{\sin \theta'} (1 - \cos kt)$. Die absolute snelheid van de ware pool wordt enkel veroorzaakt door de component $\sqrt{p^2 + q^2}$ van $\omega$; en daar deze component samenvalt met de projectie van de oogenblikkelijke as op het $X_1Y_1$-vlak, volgt er uit, dat, wanneer de ware pool zich in $C$ bevindt, de oogenblikkelijke pool zich moet bevinden op den meridiaan van de middelbare pool van C naar de verticaal gerekend, op een afstand van C langs dien meridiaan gelijk $2\,\frac{k'\,u_1}{n}$.

We weten derhalve, dat de ellips van de oogenblikkelijke pool haar groote as gericht heeft evenwijdig aan den meridiaan van de ware pool, en deze op dat uiteinde van de groote as is geplaatst, hetwelk het verst van de pool der verticaal is verwijderd.

Fig. 10. Zij O de middelbare pool, en het middelpunt van een ellips APCD, die de baan voorstelt van de ware pool, welker halve assen $OA = u_1$ en $OD = \frac{k'}{k}\,u_1$ zijn. Bevindt zich de ware pool in zeker punt P, dan zal de stand van de ellips, die de baan van de oogenblikkelijke pool voorstelt, zoodanig zijn, dat de groote as $PE = 2\,\frac{k'}{n}\,u_1$ evenwijdig is met OA. Zij PP′ de boog van deze ellips, die de oogenblikkelijke as doorloopen heeft in den tijd, dat de ware pool den boog AP heeft afgelegd.

Behouden we dezelfde notatie, en noemen we $x$ en $y$ de coördinaten van het punt P′ ten opzichte van de assen $O\xi$ en $O\eta$, dan geeft de figuur:

$$x = \xi + \delta \sin \mu$$

$$y = \eta - \delta \cos \mu.$$

Hierin gesubstitueerd:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= u_1 \cos kt \\ \eta &= u_1 \frac{k'}{k} \sin kt\end{aligned}\right\} \text{bl. 51 en}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta &= 2\frac{C u_1}{A}\sin\frac{kt}{2}\sqrt{1-\frac{M d_o^2}{A+M d_o^2}\cos^2\frac{kt}{2}} \\ \sin\mu &= \frac{k'\sin\frac{kt}{2}}{k\sqrt{1+\frac{M}{A}d_o^2\sin^2\frac{kt}{2}}} \\ \cos\mu &= \frac{\cos\frac{kt}{2}}{\sqrt{1+\frac{M}{A}d_o^2\sin^2\frac{kt}{2}}}\end{aligned}\right\} \text{form. (VI).}$$

dan komt er na eenige herleiding:

$$x = \frac{k' u_1}{n} + u_1\left(1 - \frac{k'}{n}\right)\cos kt$$

$$y = u_1\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{n}\right)\sin kt.$$

Brengen we den oorsprong O van ons coördinatenstelsel over in het punt O′ van de as O$\xi$, welks afstand van O is $\frac{k' u_1}{n}$, dus gelijk de halve groote as van de ellips, die de oogenblikkelijke pool om de ware beschrijft, en nemen we O′$\xi$ tot X-as, en O′Y, evenwijdig aan O$\eta$, tot Y-as, dan vinden we voor de coördinaten X en Y van het punt P op dit stelsel:

$$X = u_1 \left(1 - \frac{C}{A}\right) \cos kt$$

$$Y = u_1 \left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{n}\right) \sin kt,$$

of $\frac{k'}{k} - \frac{k}{n} = \alpha$ en $1 - \frac{C}{A} = \beta$ stellende:

$$X = \beta u_1 \cos kt \text{ en } Y = \alpha u_1 \sin kt.$$

De baan, die de oogenblikkelijke om de middelbare pool beschrijft, wordt dus voorgesteld door:

$$\frac{X^2}{\beta^2 u_1^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2 u_1^2} = 1.$$

Ze is een ellips, wier halve assen $\beta u_1$ en $\alpha u_1$ zijn, waarvan de eerste samenvalt met den meridiaan van de middelbare pool.

Wat de ligging dezer ellips betreft, zien we vooreerst, dat ze met die, welke de ware pool om de middelbare beschrijft, een toppunt gemeen heeft, en wel dat, hetwelk op den meridiaan het dichtst bij de verticaal is gelegen; verder, dat ze elkander in dit gemeenschappelijke toppunt raken.

Het hangt verder van de grootte der verhouding $\frac{C}{A}$ af, of de ellips *binnen* of *buiten* die van de ware pool gelegen is.

Is $\frac{C}{A} < 1$, dan valt ze er geheel *binnen* (zie fig. 10);

en omdat $1 < \frac{k'}{k}$ en $\frac{C}{A} > \frac{k}{n}$, derhalve $1 - \frac{C}{A} < \frac{k'}{k} - \frac{k}{n}$

of $\beta < \alpha$ is, zal de as, volgens den meridiaan gericht, de kleinste zijn.

Is $\frac{C}{A} = 1$, derhalve het moment van inertie om een lijn, gaande door het zwaartepunt, standvastig, dan wordt de as, die met den meridiaan samenvalt, gelijk nul, en de baan van de oogenblikkelijke pool om de middelbare gereduceerd tot een raaklijn aan den gemeenschappelijken top.

Voor $\frac{C}{A} > 1$ ligt de ellips geheel buiten die van de ware pool, en men ziet lichtelijk in, dat ze voor

$1 < \frac{C}{A} < \frac{k'}{k}$ een *ellips* is, wier as volgens den meridiaan de *kleinste* is;

$\frac{C}{A} = \frac{k'}{k}$ een *cirkel*, welks straal $\left(\frac{C}{A} - 1\right) u_1$ is;

$\frac{k'}{k} < \frac{C}{A} < \left(\frac{k'}{k}\right)^2$ een *ellips*, wier as volgens den meridiaan de *grootste* is;

$\frac{C}{A} = \left(\frac{k'}{k}\right)^2$ een *rechte lijn*, gelegen in den meridiaan;

$\frac{C}{A} > \left(\frac{k'}{k}\right)^2$ een *ellips*.

Daar, zooals bekend is, $\frac{C}{A}$ altijd $< 2$ moet zijn, zullen de laatste gevallen alleen kunnen plaats hebben, zoolang $\frac{k'}{k} < \sqrt{2}$, of volgens de constanten, $M d_0^2 < A$ is.

De voerstraal $r'$, die het middelpunt $O'$ met de oogenblikkelijke pool vereenigt, valt bij 't begin der beweging samen met de halve as $O'A$, volgens den meridiaan gericht; is $m'$ de hoek, door den voerstraal $r'$ in den tijd $t$ beschreven, dan is

$$\operatorname{tg} m' = \frac{Y}{X} = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} kt,$$

waaruit door differentiatie volgt:

$$r'^2 \frac{dm'}{dt} = k\, u_1^2\, \alpha\beta,$$

welke vergelijking aangeeft, dat $\frac{dm'}{dt}$ of de richting, waarin de oogenblikkelijke pool haar baan om de middelbare beschrijft, hetzelfde teeken heeft als $\alpha\beta$; in verband gebracht met hetgeen zoo even omtrent de ligging der ellips is gezegd, mogen we besluiten, dat die richting hetzelfde teeken heeft als de rotatie $n$.

Voor de snelheid $s'$ van de oogenblikkelijke pool in haar baan vinden we:

$$s'^2 = \left(r' \frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr'}{dt}\right)^2;$$

uit $r'^2 = X^2 + Y^2 = u_1^2\,(\alpha^2 \sin^2 kt + \beta^2 \cos^2 kt)$ volgt:

$$r'\,\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t} = k\,u_1^2\,(\alpha^2 - \beta^2)\sin kt \cos kt;$$

derhalve $r'^2 s'^2 = k^2 u_1^4\,\{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin^2 kt \cos^2 kt\}$

of $$s' = k\,u_1 \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin^2 kt \cos^2 kt}{\alpha^2 \sin^2 kt + \beta^2 \cos^2 kt}}.$$

Beschrijft de oogenblikkelijke pool een cirkel, is dus $\alpha = \beta$, dan wordt $s' = k\,u_1\,\alpha$, derhalve eenparig; de geheele omtrek $2\,\pi\alpha\,u_1$ wordt afgelegd in den tijd $\frac{2\,\pi\alpha\,u_1}{k\,u_1\,\alpha} = \frac{2\,\pi}{k}$, zooals reeds bekend is.

Voor 't geval, dat de baan een rechte lijn wordt, dus $\alpha = 0$ of $\beta = 0$, wordt de snelheid

$$s' = k\,u_1\,\beta \sin kt,$$

of $$s' = k\,u_1\,\alpha \cos kt,$$

waaruit volgt, dat de oogenblikkelijke pool isochronische schommelingen op die lijn maakt, identiek met die van een mathematischen slinger, lang $\frac{g}{k^2}$, die een hoek $\beta\,u_1\,\frac{k^2}{g}$ met de verticaal makende, los gelaten wordt; en het is gemakkelijk in te zien, dat in 't algemeen *de beweging van de oogenblikkelijke pool ten opzichte van de middelbare dezelfde is als die eens mathematischen slingers van* $\frac{g}{k^2}$ *lengte, wanneer aan dezen, terwijl hij een hoek* $\beta\,u_1\,\frac{k^2}{g}$

*met de verticaal maakt, een snelheid* $k \varkappa u_1$ *wordt medegedeeld, loodrecht op het verticale vlak, waarin hij gelegen is.*

Hiermede zouden we gevoeglijk de beschouwingen over de beweging van het lichaam in dit bijzondere geval kunnen eindigen; alleen willen we nog nagaan, welke de meetkunstige plaats is der opvolgende raakpunten, zoowel op het horizontale vlak als op het lichaam.

Nemen we de projectie van het zwaartepunt op het horizontale vlak als oorsprong van een polair coördinaten-stelsel, waarvan de as gericht is volgens de doorsnede van de meridiaan-vlakte met het horizontale vlak bij 't begin der beweging, dan wordt de eerste meetkunstige plaats gegeven door de vergelijkingen:

$$d = d_o - u_1 (\rho_o - h_o)(1 - \cos kt)$$

$$\text{en } \psi = \frac{k' u_1}{k \sin \theta'} (kt - \sin kt),$$

waarin $d$ den voerstraal, en $\psi$ den hoek tusschen dezen en de as voorstelt.

Is $\rho_o - h_o = o$, dan is de meetkunstige plaats een cirkel.

Is $\rho_o - h_o = \varkappa$, door $\varkappa$ een positieve of negatieve grootheid voorstellende, dan is $d$ immer begrepen tusschen $d_o$ en $d_o - 2 \varkappa u_1$; de kromme zal derhalve geheel gelegen zijn tusschen twee concentrieke cirkels met de stralen $d_o$ en $d_o - 2 \varkappa u_1$, en samengesteld zijn uit gelijke en gelijkvormige deelen. Ieder dezer deelen staat loodrecht op den eersten, en raakt den tweeden cirkel. Immers,

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = -k' \varkappa u_1 \sin kt,$$

$$\text{en} \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{k' u_1}{\sin \theta'} (1 - \cos kt),$$

derhalve
$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{k}{k'} \varkappa \sin \theta' \frac{\sin kt}{1 - \cos kt};$$

deze verhouding wordt voor $t = 0,\ \frac{2\pi}{k},\ 2\frac{2\pi}{k}$ enz.

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\psi} = \infty,$$

en voor $t = \frac{\pi}{k},\ 3\frac{\pi}{k},\ 5\frac{\pi}{k}$, enz.

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\psi} = 0,$$

waardoor het gestelde bewezen is.

De snelheid $s$, waarmede het raakpunt deze kromme beschrijft, wordt aangegeven door:

$$s^2 = \left(d \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

of $$s^2 = \left(d_\circ \frac{k' u_1}{\sin \theta'} (1 - \cos kt)\right)^2 + (k \varkappa u_1 \sin kt)^2,$$

dus $$s = 2 u_1 \sin \frac{kt}{2} \sqrt{\varkappa^2 k^2 \cos^2 \frac{kt}{2} + k'^2 \frac{d_\circ^2}{\sin^2 \theta'} \sin^2 \frac{kt}{2}}.$$

Elk deel wordt derhalve in den zin van de rotatie $n$ van 't begin tot het midden met wassende, van 't midden tot het einde met afnemende snelheid doorloopen.

De hoek, gevormd door twee opvolgende grootste of kleinste voerstralen, bedraagt $\frac{2\pi}{k}\;\frac{k' u_1}{\sin\theta'}$; het aantal deelen, bij elke volle omwenteling van den voerstraal door het raakpunt afgelegd, is derhalve $\frac{k \sin\theta'}{k' u_1}$; is deze grootheid meetbaar, dan is het aantal deelen, waaruit de kromme bestaat, eindig; is ze onmeetbaar, dan is dit aantal oneindig groot.

De kromme, op het lichaam gevormd door de opvolgende raakpunten, kunnen we als doorsnede denken van het lichaam met een kegel, waarvan de top in het zwaartepunt ligt, en het oppervlak beschreven wordt door de opvolgende lijnen $l$, die dit punt met de raakpunten vereenigen. Zoeken we eerst een uitdrukking voor den hoek $(l.z_1)$, dien $l$ met $oz_1$ maakt. In ons geval is $(l.z_1) = \theta - (l.h)$, dus

$$\operatorname{tg}(l.z_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(l.h)}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}(l.h.)} = \frac{\operatorname{tg}\theta - \frac{d}{h}}{1 + \frac{d}{h}\operatorname{tg}\theta} = \frac{h\operatorname{tg}\theta - d}{h + d\operatorname{tg}\theta};$$

hierin de waarde $\theta = \theta' - u_1 \cos kt$, $h = h' + d' u_1 \cos kt$ en $d = d' + u_1 (\rho' - h') \cos kt$ gesubstitueerd, waarin $h'$, $d'$ en $\rho'$ de waarden zijn van $h$, $d$ en $\rho$ voor den hoek $\theta'$, dan komt er na eenige herleiding:

$$\mathrm{tg}\,(l.z_1) = \mathrm{tg}\,(l'.z_1) - \frac{\rho'}{h'} \cdot \frac{1 + \mathrm{tg}\,\theta'\,\mathrm{tg}\,(l'z_1)}{1 + \mathrm{tg}\,\theta'\,\mathrm{tg}\,(l'h')}\, u_1 \cos kt$$

$$= \mathrm{tg}\,(l'.z_1) - \frac{\rho' \cos^2 (l'.h')}{h' \cos^2 (l'.z_1)}\, u_1 \cos kt\,;$$

nemen we kortheidshalve

$$\mathrm{tg}\,(l'.z_1) = i \text{ en } \frac{\rho' \cos^2 (l'.h')}{h' \cos^2 (l'.z_1)} = j, \text{ dan is}$$

$$\mathrm{tg}\,(l.z_1) = i - j\, u_1 \cos kt.$$

Terwijl de hoek tusschen $l$ en de omwentelings-as in het verticale vlak met den tijd verandert, wentelt het lichaam ten opzichte van dit vlak met constante hoeksnelheid $n$ om; het snijpunt van $l$ met het oppervlak van het lichaam vormt de begeerde lijn. In plaats van die lijn op deze wijze ontstaan te denken, zullen we het lichaam in rust onderstellen, en het vlak, dat $l$ en de omwentelings-as bevat, om deze rondvoeren met standvastige hoeksnelheid $-n$; dan zal natuurlijk de doorsnede van het lichaam met het kegeloppervlak, door $l$ beschreven, de begeerde meetkunstige plaats zijn. Als richtlijn van dit oppervlak nemen we diens doorsnede met een plat vlak, op een willekeurigen afstand $c$ van het zwaartepunt loodrecht op de omwentelings-as gebracht. Om haar vergelijking te vinden, nemen we het snijpunt van de omwentelings-as met dit vlak als oorsprong van een polair coördinaten-stelsel, waarvan de as evenwijdig loopt met de $OX_1$-as; is $r$ de voerstraal, en $\omega$ de hoek, dien $r$ met de as vormt, dan is

$$r = c \operatorname{tg} (lz_1) = c\,(i - j\,u_1 \cos kt),$$

en daar $\omega$ bij 't begin van de beweging gelijk $-\left(\psi_o + \frac{\pi}{2}\right)$ is:

$$\omega = -\left(nt + \psi_o + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hieruit blijkt, dat de richtlijn begrepen is tusschen twee cirkels, uit den oorsprong met de stralen $c\,(i - j u_1)$ en $c\,(i + j\,u_1)$ beschreven; dat ze deze cirkels raakt, omdat $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = cj\,ku_1 \sin kt$ en $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -n$ zijnde, de verhouding $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega}$ voor $kt = o,\ \pi,\ 2\pi$ etc. gelijk nul wordt; dat de hoek tusschen de voerstralen naar twee opvolgende raakpunten op een zelfden omtrek gelijk $\frac{n}{k}\,2\pi$ is; dat de richtlijn bestaat uit gelijke en gelijkvormige deelen, symetriek gelegen ten opzichte van de raakpunten, of ook, ten opzichte van den cirkel, uit den oorsprong met den straal $ci$ beschreven; dat het aantal dezer deelen eindig of oneindig groot is, naarmate $\frac{k}{n}$ meetbaar of onmeetbaar is.

Het kegeloppervlak zal dus bestaan uit gelijke en gelijkvormige golvingen, en volkomen ingesloten worden door twee cirkelvormige kegels, die de omwenteling-as tot gemeenschappelijke as en het zwaartepunt tot top hebben, terwijl de halve tophoeken gelijk $(l_o.z_1)$ en $(l_1.z_1)$ zijn.

Voor de vergelijking van het kegeloppervlak op de natuurlijke assen wordt gemakkelijk gevonden:

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2 \left\{ i - j\,u_1 \cos\frac{k}{n}\left(\text{bg tg}\,\frac{x_1}{y_1} - \psi_o\right)\right\}^2;$$

deze, verbonden met de vergelijking van het oppervlak:

$$z_1^2 = F\,(x_1^2 + y_1^2)$$

geeft de gevraagde meetkunstige plaats. Ze is een regelmatig gegolfde lijn, die tusschen twee parallel-cirkels, met de stralen $l_o \sin(l_o z_1)$ en $l_1 \sin(l_1 z_1)$, voortloopt; het aantal golvingen is eindig of oneindig, naarmate $\frac{k}{n}$ meetbaar of onmeetbaar is met betrekking tot de eenheid.

---

## § 8. *Tweede geval: $\theta_o - \theta$ een zeer kleine, positieve grootheid.*

We zullen nu nagaan, welke veranderingen de formulen van de vorige paragraaf ondergaan, wanneer het lichaam in zulk een stand op het horizontale vlak wordt geplaatst, dat de helling van de omwentelings-as met de verticaal vermindert, zoodra het lichaam losgelaten wordt.

Deelt men aan het lichaam een snelle rotatie $n$ om de omwentelings-as mede, dan zal $\theta$ of de helling van deze met de verticaal zeer weinig veranderen en nimmer *grooter* kunnen worden dan de oorspronkelijke helling $\theta_o$.

Stel $\theta = \theta_o - u$, $n$ zoo groot nemende, dat we de tweede en hoogere machten van $u$ verwaarloozen kunnen, dan is

$$\theta = \theta_o - u,$$
$$h = h_o - u\,d_o,$$
$$d = d_o - u\,(\rho_o - h_o),$$
$$\frac{\cos\theta_o - \cos\theta}{\sin\theta} = u.$$

Deze waarden in de oorspronkelijke formule gesubstitueerd, geeft:

$$dt = \mp \frac{du}{\sqrt{u}} \sqrt{\frac{A + M d_o^2}{2\,Mg\,d_o - u\left\{\frac{C^2 n^2}{A} - 4\,M^2 g\,d_o^2\,\frac{\rho_o - h_o}{A + M d_o^2}\right\}}},$$

dezelfde als de overeenkomstige in de voorgaande paragraaf, met dit onderscheid slechts, dat hier bij 't begin der beweging het negatieve teeken moet gebruikt worden.

Dezelfde constanten aannemende, vinden we achtereenvolgens:

$$\theta = \theta' + u_1 \cos kt,$$

$$\psi = \psi_o - \frac{k' u_1}{k \sin \theta'} (kt - \sin kt),$$

$$\varphi = \varphi_o + (n + k' u_1 \cot \theta') \, t - \frac{k' u_1}{k \operatorname{tg} \theta'} \sin kt.$$

Het zelfde stelsel formulen als (V), waarin $u_1$ in $-u_1$ veranderd is.

Men ziet gemakkelijk in, welke wijzigingen men aan de overige resultaten moet aanbrengen, om die van het tegenwoordige geval te verkrijgen.

Zonder die wijzigingen breedvoerig na te gaan, willen we ze kortelijk aanstippen bij het overzicht, dat we nu zullen geven van de resultaten, in de vorige paragraaf gevonden.

Een omwentelingslichaam, waarvan de as een natuurlijke as van inertie is, wordt zoodanig op een horizontaal vlak geplaatst, dat de helling $\theta_o$ van de as met de verticaal grooter (resp. kleiner) wordt, wanneer het aan zich zelf wordt overgelaten.

Daarna wordt aan dit lichaam een rotatie $n$ om de omwentelings-as gegeven.

We stellen $n$ zoo groot, dat de tweede en hoogere machten van de verandering $u$ van $\theta_o$ verwaarloosd kunnen worden.

Uit het zwaartepunt als middelpunt wordt met de eenheid als straal een bol beschreven; de doorsnede van een lijn, gaande door het zwaartepunt, met dezen bol noemen we *pool*.

Het middelpunt van den bol maakt op de verticaal isochronische schommelingen, waarvan de amplitudo $2\,u_1\,d_0$, en de duur $\frac{2\pi}{k}$ bedragen. Bij 't begin van elke schommeling neemt het zwaartepunt het hoogste punt op de verticaal in.

Denken we ons een *middelbare pool*, die met constante snelheid $k'\,u_1$ over een horizontalen kleinen cirkel beweegt, waarvan de straal sin $\theta'$ is, in een richting *gelijk* (resp. *tegengesteld*) aan die van de rotatie $n$.

De pool van de omwentelings-as of de *ware pool* beweegt zich in een ellips, waarvan de middelbare pool het middelpunt inneemt.

De kleine as, lang $2\,u_1$, is gericht volgens de raaklijn aan den meridiaan, de groote, lang $2\,\frac{k'}{k}\,u_1$, volgens die aan den parallel-cirkel van de middelbare pool.

De beweging begint in het uiteinde van de kleine as, dat het *minst* (resp. het *meest*) van de pool der verticaal verwijderd is.

Elke omwenteling geschiedt in den zin van de rotatie $n$, en duurt $\frac{2\pi}{k}$.

De snelheid van de beweging is het *grootst* in de uiteinden van de kleine as, en bedraagt $k' u_1$; daarna wordt ze allengs minder en is het *kleinst* ($= k u_1$) in de uiteinden van de groote as.

De pool van de oogenblikkelijke as of de *oogenblikkelijke pool* doorloopt ten opzichte van de ware pool een ellips, waarvan deze een der toppen inneemt.

De groote as, lang $2 \frac{k'}{n} u_1$, en de kleine as, lang $2 \frac{k}{n} u_1$, loopen evenwijdig, resp. aan de kleine en de groote as van de eerste ellips.

De ware pool bevindt zich in dat uiteinde van de groote as, hetwelk het *meest* (resp. het *minst*) van de pool der verticaal is verwijderd.

Elke omwenteling gaat van dit uiteinde uit, geschiedt in den zin van de rotatie $n$, en duurt $\frac{2\pi}{k}$.

De snelheid is het *geringst* ($= \frac{k^2}{n} u_1$), als de pool door de uiteinden van de groote as gaat, neemt daarna gestadig toe, en wordt het *grootst* ($= \frac{kk'}{n} u_1$), als de pool de kleine as passeert.

Ten opzichte van de middelbare pool beschrijft de oogenblikkelijke een andere ellips.

Het middelpunt dezer ellips ligt op den meridiaan van de middelbare pool, op een afstand $\frac{k'}{n} u_1$ van deze, gerekend naar den kant van de plaats, waaruit de ware pool haar beweging begint.

Deze ellips raakt die van de ware pool in het punt, waar deze zich bij 't begin van elke omwenteling bevindt.

In 't algemeen zal de beweging van de oogenblikkelijke ten opzichte van de ware pool dezelfde zijn, als die van een mathematischen slinger, lang $\frac{g}{k^2}$, die onder een hoek van uitwijking $\left(1 - \frac{k'}{n}\right) u_1 \frac{k^2}{g}$ met een snelheid $\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{n}\right) k\, u_1$ wordt voortbewogen in een richting, loodrecht op het verticale vlak, waarin hij gelegen is.

De meetkunstige plaats der raakpunten op het horizontale vlak is een kromme lijn, die samengesteld is uit een bepaald of oneindig groot aantal gelijke en gelijkvormige deelen, die loodrecht staan op den omtrek des cirkels, uit de projectie van het zwaartepunt als middelpunt met $d_o$ als straal beschreven, en een daarmede gelijkmiddelpuntigen cirkel met een straal $d_o -$ $- 2\, u_1 (\rho_o - h_o)$ raken.

Het aantal dier deelen is bepaald of oneindig groot, naarmate $\frac{k \sin \theta'}{k' u_1}$ met betrekking tot de eenheid meetbaar of onmeetbaar is.

De richting, waarin elk deel wordt afgelegd, is *dezelfde* als (resp. *tegengesteld* aan) die, welke overeenkomt met de rotatie $n$.

De snelheid, waarmede elk deel wordt afgelegd, neemt van 't begin tot het midden gestadig toe, om van daar tot het einde in dezelfde reden weer af te nemen.

De meetkunstige plaats der raakpunten op de oppervlakte van het lichaam bestaat uit een regelmatig gegolfde lijn, die tusschen twee parallel-cirkels, waarvan de stralen $l_o \sin l._o z_1)$ en $l_1 \sin (l_1.z_1)$ zijn, heenslingert, en deze raakt.

Het aantal golvingen is eindig of oneindig, naarmate $\frac{k}{n}$ meetbaar of onmeetbaar is.

---

## § 9. *Toepassing op de beweging voor een homogene ellipsoïde van omwenteling.*

Zij de vergelijking van de ellipsoïde van omwenteling ten opzichte van het natuurlijke assen-stelsel:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Dan wordt het raakvlak van het punt $x_1$, $y_1$ en $z_1$ voorgesteld door

$$\xi \frac{x_1}{a^2} + \eta \frac{y_1}{a^2} + \zeta \frac{z_1}{c^2} = 1,$$

waarin $\xi$, $\eta$ en $\zeta$ de loopende coördinaten voorstellen.

Stelt $h$ den afstand voor van den oorsprong tot dit raakvlak, welks vergelijking wij voorstellen door

$$\xi \frac{hx_1}{a^2} + \eta \frac{hy_1}{a^2} + \zeta \frac{hz_1}{c^2} = h,$$

dan zijn $\frac{hx_1}{a^2}$, $\frac{hy_1}{a^2}$ en $\frac{hz_1}{c^2}$ resp. gelijk aan de cosinussen der hoeken, die de normaal van het raakvlak maakt met de $OX_1$-, $OY_1$- en $OZ_1$- assen. Omdat die cosinussen in ons geval gelijk $\sin \theta \sin \varphi$, $\sin \theta \cos \varphi$ en $\cos \theta$ zijn, vinden we:

$$h \frac{x_1}{a} = a \sin \theta \sin \varphi,$$

$$h \frac{y_1}{a} = a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$h \frac{z_1}{c} = c \cos \theta;$$

de som der tweede machten der overeenkomstige leden dezer vergelijking geeft:

$$h^2 = a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta.$$

Verder is

$$\begin{aligned} h^2 l^2 &= (hx_1)^2 + (hy_1)^2 + (hz_1)^2 \\ &= a^4 \sin^2 \theta + c^4 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

derhalve $$l = \sqrt{\frac{a^4 \sin^2 \theta + c^4 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}.$$

Voor $d$ of $\sqrt{l^2 - h^2}$ vinden we bijgevolg:

$$d = \frac{\pm (a^2 - c^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}};$$

het teeken zoodanig nemende, dat $d$ positief is.

Stelt $\frac{z_1^2}{c^2} + \frac{\eta^2}{a^2} = 1$ den meridiaan voor, in het verticale vlak gelegen, dan zijn de coördinaten van het raakpunt:

$$z_1 = \frac{c^2 \cos \theta}{h},$$

$$\text{en } \eta = \left(x_1^2 + y_1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 \sin \theta}{h};$$

verder is $$\frac{d\eta}{dz_1} = -\frac{a^2}{c^2}\frac{z_1}{\eta} = -\cot \theta,$$

$$\frac{d^2\eta}{dz_1^2} = -\frac{h^3}{a^2 c^2 \sin^2 \theta},$$

derhalve de kromtestraal $\rho$ van den meridiaan in het raakpunt:

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{d\eta}{dz_1}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{dz_1^2}} = -\frac{a^2 c^2}{h^3}.$$

Bij het berekenen van den hoek $(l.z_1)$ moeten we twee gevallen onderscheiden; bij een verlengde ellipsoïde is $(l.z_1) = \theta - (l.h)$, bij een afgeplatte is $(l.z_1) = \theta + (l.h)$; dus is

voor $c > a$: $\operatorname{tg}(l.z_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(l.h)}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}(l.h)}$,

terwijl $\operatorname{tg}(l.h) = \frac{d}{h} = \frac{(c^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta}{h^2}$ is;

en voor $c < a$ $\operatorname{tg}(l.z_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}(l.h)}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}(l.h)}$,

terwijl $\operatorname{tg}(l.h) = \frac{d}{h} = \frac{(a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta}{h^2}$ is;

in beide gevallen is dus

$$\operatorname{tg}(l.z_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \frac{(a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta}{h^2}}{1 - \operatorname{tg}\theta\frac{(a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta}{h^2}}$$

$$= \frac{a^2}{c^2}\operatorname{tg}\theta.$$

In het eerste hoofdstuk vonden we, dat voor elk omwentelingslichaam $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \pm\, d$ en $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2} = \rho\text{-}h$ moet zijn; laat ons zien, of hieraan in ons geval voldaan wordt.

We vinden voor

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta}{h},$$

dus $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = +\, d$ voor $a > c$, of, wat hetzelfde is, voor een afgeplatte ellipsoïde; en $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = - d$ voor een verlengde.

Verder is $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{a^2 - c^2}{h^3}(c^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta)$;

derhalve $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2} + h = \frac{(a^2 - c^2)(c^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta) + h^4}{h^3}$

$$= \frac{a^2 c^2}{h^3} = \rho,$$

waaruit $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2} = \rho - h.$

De hoek $\vartheta$, waarvoor $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\theta^2}$ gelijk nul, dus $\rho = h$ wordt, moet voldoen aan de vergelijking

$$a^2 \sin^4 \vartheta = c^2 \cos^4 \vartheta,$$

waaruit volgt, $\vartheta$ tusschen $o$ en $\frac{\pi}{2}$ nemende:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{c}{a}};$$

voor $\theta = \vartheta$ wordt $\rho = h = \sqrt{ac}$.

Voor dezelfde waarde van $\theta$ wordt ook $d$ maximum. Immers, het maximum van $d$ zal plaats hebben voor die waarde $\vartheta_1$ van $\theta$, welke $\frac{\sin 2\theta}{h}$ maximum maakt; volgens den gewonen regel vindt men

$$\vartheta_1 = \operatorname{bg} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c}{a}},$$

derhalve $\vartheta_1 = \vartheta$;

en de waarde van $d$ wordt dan $\pm (a - c)$.

Wordt derhalve een ellipsoïde van omwenteling, waarvan de figuur-as $2c$, en de as van den aequator $2a$ is, op een vlak geplaatst, zoodanig, dat de omwentelings-as met de normaal van dit vlak een hoek bg tg $\sqrt{\frac{c}{a}}$ maakt, dan heeft de kromtestraal van den meridiaan in het raakpunt een lengte $\sqrt{ac}$, die gelijk is aan den afstand van het middelpunt der ellipsoïde tot het vlak; voor dien stand is tevens de afstand van het raakpunt tot den voet der loodlijn, uit het middelpunt op het vlak neergelaten, maximum $(= (a - c))$.

De constanten $\theta'$, $u_1$, $k$, $k'$, C, A, $i$ en $j$ worden nu gemakkelijk voor dit bijzondere geval bepaald.

Zooals bekend is, moet $C = M\frac{2a^2}{5}$ en $A = M\frac{a^2 + c^2}{5}$ genomen worden, daardoor is $k' = \frac{C}{A}n = \frac{2a^2}{a^2 + c^2}n$, dus onafhankelijk van $\theta$.

$$k = \frac{Cn}{A\sqrt{1 + \frac{M}{A}d_0^2}} = \frac{k'}{\sqrt{1 + \frac{5d_0^2}{a^2 + c^2}}}$$

$$= \frac{k'}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}\frac{(a^2 - c^2)^2}{a^2 + c^2}\cdot\frac{\sin^2 2\theta_0}{a^2\sin^2\theta_0 + c^2\cos^2\theta_0}}};$$

de kleinste waarde van $k$ valt samen met de grootste van $d_0$; dus is de kleinste waarde van $k$

$$k = \frac{k'}{\sqrt{1 + 5\,\frac{(a-c)^2}{a^2+c^2}}}.$$

Verder is

$$u_1 = \frac{Mg\,d_\circ}{k^2\,(A + M\,d_\circ^2)} = \frac{5\,g}{4\,n^2}.\ \frac{a^2+c^2}{a^4}.\ d_\circ,$$

derhalve haar maximum $= \pm\ \dfrac{5\,g}{4\,n^2}\,(a-c)\,\dfrac{a^2+c^2}{a^4}$,

$$i = \operatorname{tg}\,(l'.z_1) = \frac{a^2}{c^2}\operatorname{tg}\,\theta' = \frac{a^2}{c^2}\operatorname{tg}\,(\theta_\circ \pm u_1)$$

$$\text{en } j = \frac{\rho'\cos^2(l'.h')}{h'\cos^2(l'.z_1)} = \frac{a^2\,c^2}{h'^4}.\ \frac{h'^2}{l'^2}\,(1 + \operatorname{tg}^2(l'.z_1))$$

$$= \frac{a^2 c^2}{h'^2\,l'^2}\left(1 + \frac{a^4}{c^4}\operatorname{tg}^2\theta'\right) = \frac{a^2\,c^2}{\cos^2\theta'}.$$

De beweging, die een verlengde (resp. afgeplatte) homogene ellipsoïde van omwenteling zal aannemen, wanneer het op een volkomen effen horizontaal vlak geplaatst, en daarna snel om de omwentelings-as gedraaid wordt, kunnen we op de volgende wijze aanduiden:

Het middelpunt maakt isochronische schommelingen op de verticaal.

Bij 't begin van elke schommeling bevindt het punt zich 't hoogst op de verticaal.

De amplitudo dezer schommelingen bedraagt $2\,d_\circ\,u_1$, en de duur $\dfrac{2\,\pi}{k}$.

De *middelbare pool* beweegt zich over een horizontalen kleinen cirkel, waarvan de straal sin $\theta'$ is, met constante snelheid $k' u_1$, in een richting *gelijk* (resp. *tegengesteld*) aan die van de rotatie om de lichaams-as.

De *ware pool* doorloopt een ellips, waarvan de middelbare pool het middelpunt inneemt.

De kleine as, lang $2 u_1$, is gericht volgens de raaklijn aan den meridiaan, de groote as, lang $2 \frac{k'}{k} u_1$, volgens die aan den parallel-cirkel van de middelbare pool.

Elke omwenteling begint in het uiteinde van de kleine as, dat het *minst* (resp. het *meest*) van de pool der verticaal verwijderd is, geschiedt in den zin van de rotatie om de lichaams-as, en duurt $\frac{2\pi}{k}$.

De snelheid van de beweging is het *grootst* ($= k' u_1$) in de uiteinden van de kleine as, neemt van daar allengs af, en wordt het *kleinst* ($= k u_1$) in de uiteinden van de groote as.

De *oogenblikkelijke pool* beschrijft ten opzichte van de ware pool een ellips, waarvan deze een der toppunten inneemt.

De groote as, lang $2 \frac{k'}{n} u_1$, en de kleine as, lang $2 \frac{k}{n} u_1$, loopen resp. evenwijdig aan de kleine en de groote as van de vorige ellips.

De ware pool bevindt zich op het uiteinde der groote as, dat het *meest* (resp. het *minst*) van de pool der verticaal verwijderd is.

Elke omwenteling begint bij dit punt, geschiedt in den zin van de rotatie om de lichaams-as, en duurt $\frac{2\pi}{k}$.

De snelheid is het *geringst* $\left(= \frac{k^2}{n} u_1\right)$ in de uiteinden van de groote as, neemt van daar gestadig toe, en bereikt haar maximum $\left(= \frac{kk'}{n} u_1\right)$ in de uiteinden van $\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{n}\right) u_1$ (resp. kleine as.

Ten opzichte van de middelbare pool beschrijft de oogenblikkelijke pool een andere ellips.

Het middelpunt dezer ellips ligt op den meridiaan van de middelbare pool, op een afstand $\frac{k'}{n} u_1$ van deze, gerekend naar den kant van de plaats, waaruit de ware pool haar beweging begint, en is bijgevolg *binnen* (resp. *buiten*) de ellips van de ware pool gelegen.

De *kleine* (resp. *groote*) as, lang $2\left(1 - \frac{k'}{n}\right) u_1$ (resp. $2\left(\frac{k'}{n} - 1\right) u_1$), raakt den meridiaan van de middelbare pool, de *groote* (resp. *kleine*) is lang $2\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{n}\right) u_1$ (resp. $2\left(\frac{k}{n} - \frac{k'}{k}\right) u_1$).

Bijgevolg raakt de ellips die van de ware pool in het toppunt, waar zich deze bij 't begin van elke omwenteling bevindt, en zal geheel *binnen* (resp. *buiten*) die van de ware pool gelegen zijn.

De meetkunstige plaats der raakpunten op het horizontale vlak is een kromme lijn, die samengesteld is uit een bepaald of oneindig groot aantal gelijke en gelijkvormige deelen, die loodrecht staan op den omtrek eens cirkels, uit de projectie des zwaartepunts op het vlak als middelpunt met $d_0$ als straal beschreven, en den omtrek van een anderen daarmede concentrieken cirkel raken, met den straal $d_0 - 2\, u_1\, (\rho_0 - h_0)$ beschreven.

Voor $\theta_0 = \text{bg tg} \sqrt{\frac{c}{a}}$ vallen beide cirkels op elkander.

Voor $\theta_0 < \text{bg tg} \sqrt{\frac{c}{a}}$ valt de eerste *binnen* (resp. *buiten*) den tweeden.

Voor $\theta_0 > \text{bg tg} \sqrt{\frac{c}{a}}$ valt de eerste *buiten* (resp. *binnen*) den tweeden.

Het aantal deelen, waaruit de kromme lijn bestaat, is bepaald of oneindig groot, naarmate $\frac{k \sin \theta'}{k' u_1}$ met betrekking tot de eenheid meetbaar of onmeetbaar is.

De richting, waarin elk deel wordt afgelegd, is *dezelfde* als (resp. *tegengesteld* aan) die, welke overeenkomt met de rotatie $n$.

De snelheid van de beweging is bij 't begin van elk deel gelijk nul, neemt naar het midden sterk toe, om van daar tot het einde in dezelfde reden af te nemen.

De meetkunstige plaats der raakpunten op het lichaam is een regelmatig gegolfde lijn, die tusschen twee parallel-cirkels met de stralen $l_o \sin(l_o.z_1)$ en $l_1 \sin(l_1.z_1)$ heenslingert, en deze raakt.

Het aantal golvingen is beperkt of oneindig groot, naarmate $\frac{k}{n}$ een meetbare of onmeetbare grootheid is.

---

## NALEZINGEN EN VERBETERINGEN.

---

bl. 2 regel 14 v. b. *staat:* homogeen, *lees:* homogeen zijn,

„ 28 „ 7 „ „ „ $\frac{d\psi}{dt} = r$ „ $\frac{d\varphi}{dt} = r$.

„ 33 Substitueeren we in de formule

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{q}{p},$$

de waarden van $p$ en $q$, door (II) gegeven, dan komt er:

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{\sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}}{\sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}}$$

$$= \operatorname{tg}\left(\operatorname{bg\,tg} \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} - \Phi\right),$$

dus $$\mu_1 = \operatorname{bg\,tg}\left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta}\right) - \Phi.$$

De hoek $\mu$, dien de projectie van de oogenblikkelijke as op het $X_1 Y_1$-vlak beschrijft, wordt dus gegeven door:

$$\mu = \operatorname{bg\,tg}\left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta}\right) + nt - \Phi + \text{Const.}$$

de waarde van de constante afhangende van de plaats, van waar men den hoek $\mu$ begint te tellen.

Deze formule geeft door substitutie van

$\sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \frac{kt}{2}$ (zie bl. 56)

en $$\Phi = \Phi_0 + nt - \frac{k' u_1}{k \operatorname{tg} \theta'} (kt - \sin kt):$$

$$\mu = \operatorname{bg\,tg}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \frac{kt}{2}\right) + \frac{k' u_1}{k \operatorname{tg} \theta'} (kt - \sin kt) + \text{Const.}$$

Deze formule geldt, als $\theta'$ niet zeer klein is; maar dan mag de tweede term van het tweede lid tegen den eersten verwaarloosd worden, zoodat dan het resultaat van bl. 60 komt.

bl. 43 regel 8 v. b. *staat:* zijn, *lees:* is.

„ 65 „ 6 v. o. „ $\frac{k'}{k} \operatorname{bg\,tg}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} kt\right)$, *lees:* $\operatorname{bg\,tg}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{tg} kt\right)$;

„ 85 „ 5 „ „ „ voor „ van

# STELLINGEN.

I.

Te recht zegt POINSOT (théorie nouvelle de la rotation des corps, Journal de Liouville, année 1851, tome XVI, pag. 86):

„Le calcul n'est qu'un instrument, précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche, mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre, qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument."

II.

Het is volstrekt van geen belang ontbloot, een bewezen wiskunstige waarheid nog op andere wijze aan te toonen.

III.

De hoek tusschen twee lijnen mag niet anders bepaald worden dan als het verschil in richting.

IV.

Ten onrechte beweert prof. Huxley (Fortnightly review, Juni 1869), dat de Wiskunst niets ontleent aan de waarneming, niets aan de ervaring, niets aan de inductie.

V.

In een leerboek der rekenkunst mag de leer der evenredigheden niet ontbreken.

VI.

Het uitblijven van den donder na 't verschijnen van den bliksem moet niet altijd toegeschreven worden aan den te grooten afstand tusschen waarnemer en donderbui.

VII.

De hooge mate van verwarming, die een lichaam ondergaat, dat zich met groote snelheid door de lucht beweegt, wordt enkel veroorzaakt door de samenpersing der voortgestuwde lucht.

VIII.

De theorie van Govi omtrent de samenstelling van kaoetsjoek is valsch.

IX.

De beste wijze om de snelheid van treinen bij het dalen langs hellingen te matigen is die, waarbij gebruik wordt gemaakt van den stoom en het water in den ketel.

X.

De kunstmatige bereiding van alizarine, identisch met de uit meekrap verkregene, maakt het hoogst waarschijnlijk, dat eerlang ook andere gekristalliseerde plantenstoffen kunstmatig zullen bereid worden.

XI.

Tusschen de bewegingsverschijnselen bij de dieren en die bij de planten bestaat slechts een quantitatief onderscheid.

XII.

Het onderwijs in de Wiskunst zal in dezelfde mate beter zijn, als daarbij minder wordt gebruik gemaakt van de zoogenaamde *regels*.

XIII.

Het onderwijs in de Wiskunst moet aan de gymnasiën zoo theoretisch mogelijk zijn.

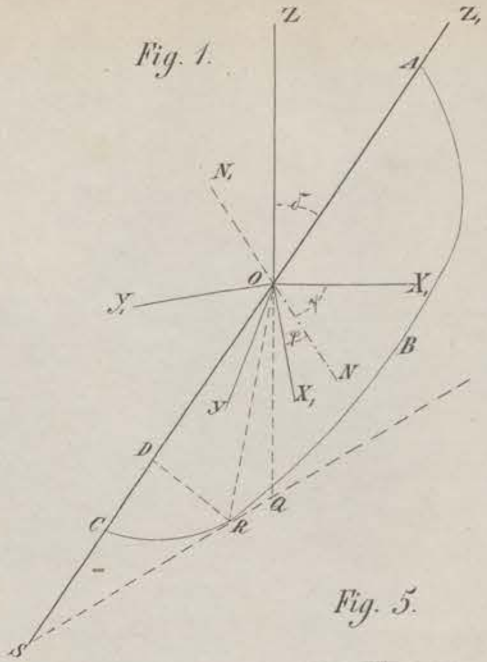

Fig. 1.

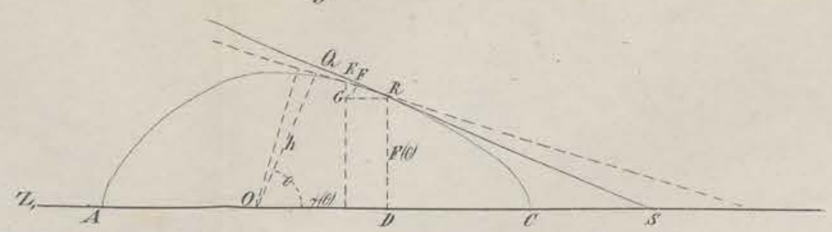

Fig. 2.

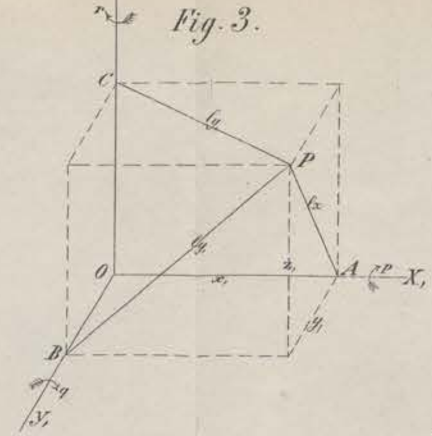

Fig. 3.

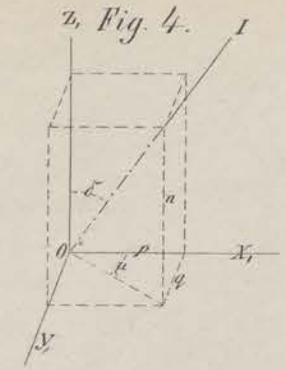

Fig. 4.

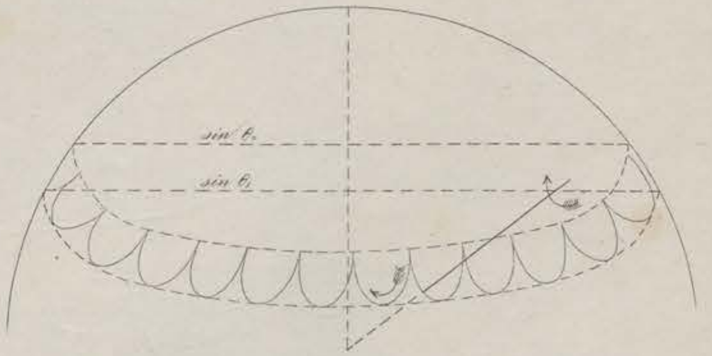

Fig. 5.

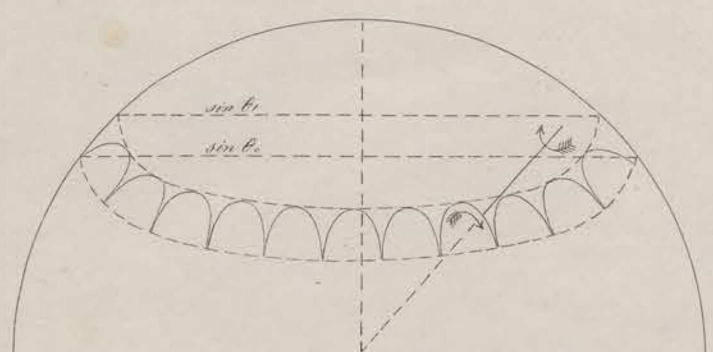

Fig. 6

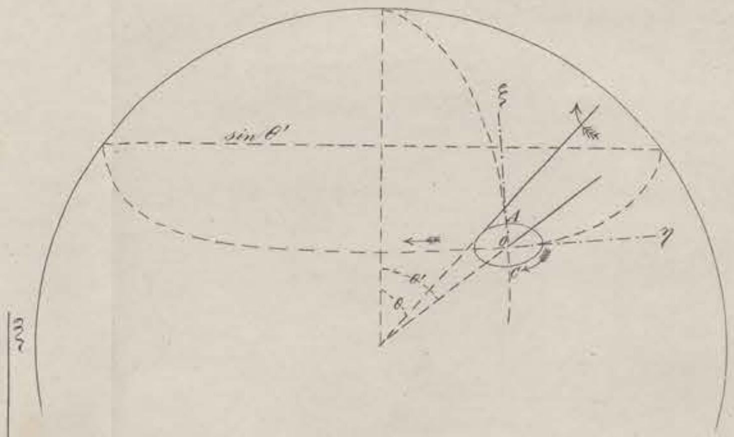

Fig. 7.

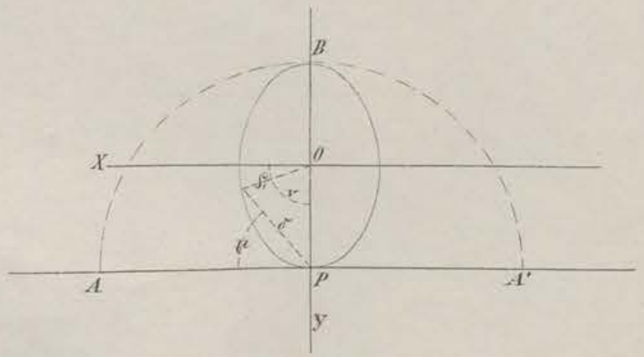

Fig. 8.

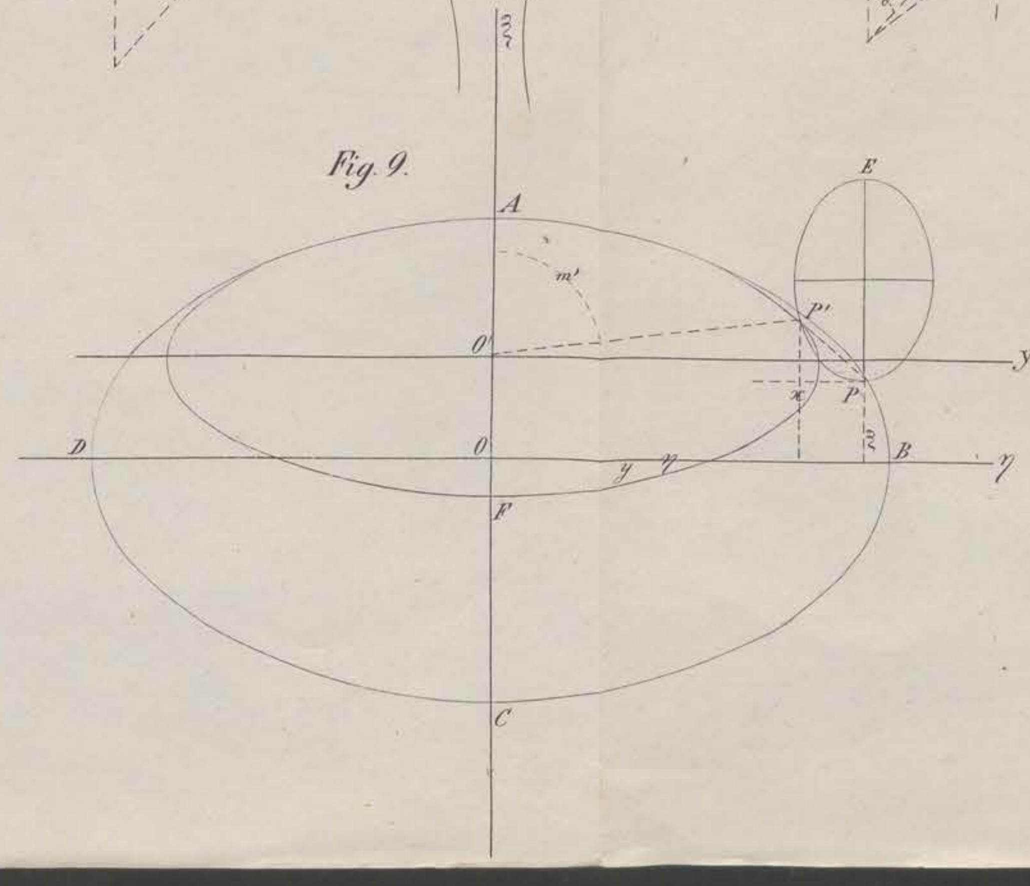

Fig. 9.