DE LEER

VAN DE BOTSING VAN LICHAMEN

GESCHIEDKUNDIG ONTWIKKELD EN TOEGELICHT.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

VAN

H. P. J. STENFERT KROESE.

ARNHEM,
W. H. STENFERT KROESE.
1879.

DE LEER

VAN DE BOTSING VAN LICHAMEN GESCHIED-KUNDIG ONTWIKKELD EN TOEGELICHT.

DE LEER
VAN DE BOTSING VAN LICHAMEN
GESCHIEDKUNDIG ONTWIKKELD EN TOEGELICHT.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

MR. A. E. I. MODDERMAN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op Zaterdag den 5den April 1879, des namiddags te 3 uren,

DOOR

HERMAN PETRUS JOHANNES STENFERT KROESE,

GEBOREN TE SPANBROEK.

ARNHEM,
W. H. STENFERT KROESE.
1879.

Aan de nagedachtenis van mijnen Vader

en

aan mijne Moeder.

Aan het einde van mijne academische studiën gekomen, is het mij eene behoefte een woord van dank te richten tot hen, die tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

U, Hooggeleerde VAN GEER, Hooggeachte Promotor, breng ik dien dank bovenal, zoo voor de belangrijke wenken, die Gij mij bij de samenstelling van mijn proefschrift hebt gegeven, als voor de blijken van welwillendheid, die ik van U heb ondervonden. Wees van mijne erkentelijkheid verzekerd.

Hij, die mijne eerste schreden in de wetenschap leidde, die mij door Zijn degelijk onderwijs in staat stelde de academische lessen te volgen, mijn Vader, Hij is helaas! niet meer; Hij kan de woorden van diep gevoelde dankbaarheid niet hooren, die ik hier gaarne openlijk had uitgesproken.

Zijne nagedachtenis zal ik steeds in eere houden!

INLEIDING.

Wanneer twee lichamen elkander ontmoeten, zullen zij drukkingen tegen elkander uitoefenen, elkander vervormen en hunne snelheden veranderen — zij *botsen* dan tegen elkander.

Hetgeen er bij een dergelijke botsing geschiedt, is voor verschillende beroemde wis- en natuurkundigen van den tijd, toen Galileï leefde, tot heden een punt van onderzoek geweest; men vindt de uitkomsten, waartoe zij kwamen, in hun werken, maar dikwijls verspreid onder andere onderwerpen.

Voor zoo ver mij bekend is, zijn ze door niemand bijeenverzameld; althans is er, naar ik meen, geen werk, waar ze aaneengevoegd zijn op een wijze, als dit in een geschiedkundig overzicht dient te geschieden.

Dit was de aanleiding, dat ik het trachtte te doen.

Mijn stuk bestaat uit vier afdeelingen.

In het eerste gedeelte heb ik behandeld den tijd van Galileï tot het begin van de 17de eeuw, toen door de onderzoekingen en berekeningen van WALLIS, WREN en HUYGHENS de eerste juiste botsingwetten bekend waren geworden. Het tweede hoofdstuk omvat het tijdvak, waarin JOHANNES BERNOULLI zijn strijd over de maat der krachten voerde; in het derde vindt men de uitkomsten, die D'ALEMBERT, LAGRANGE en CARNOT verkregen; terwijl het laatste de nieuwere beschouwingen over de botsing, naar aanleiding voornamelijk van de beschouwingen van STURM, DUHAMEL en CORIOLIS bevat.

I.

Tot aan het einde van de 16^{de} eeuw was men nog weinig bekend met de eigenschappen van de beweging. In de werken van Archimedes, waarin men vinden kan, hetgeen den ouden van de wetenschappelijke mechanica bekend was, is alleen sprake van de statica; van den band, die dit gedeelte aan de dynamica verbindt, is bij hem niets te bespeuren. Hierdoor konden de eigenlijke grondbeginselen van de mechanica in dien tijd nog geen rol spelen; deze toch hebben zoowel op evenwichts- als op bewegingstoestanden betrekking. Om ze te kennen, had men eenige kennis van de dynamica noodig. Eerst Galileï (1564—1642) legde den grondslag van deze nieuwe wetenschap. Uit zijn klassiek werk: »Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze," dat in 1638, dus eerst vier jaren vóór zijn dood, het licht zag, blijkt dat Galileï met recht de grondlegger van de dynamica genoemd mag worden.

Met hem vangt dan ook de geschiedenis van ons onderwerp aan.

Het is niet te ontkennen, dat Galileï zich groote moeite gegeven heeft om zich met het wezen van de botsing vertrouwd te maken. Hoewel hij niet tot de botsingwetten kwam, zijn toch enkele denkbeelden, die hierop betrekking hebben, juist, terwijl andere, hoewel zij niet tot een direct resultaat leidden, gediend hebben om anderen na hem tot een juist inzicht van de zaak te brengen.

Het uitvoerigst behandelt Galileï de botsing in de afdeeling: 6^{den} dag van bovengenoemd werk. Ook wijdt hij eenige bladzijden aan dit onderwerp in een geschrift na zijn dood uitgegeven en dat tot titel draagt: »Della scienza meccanica." Nog kan men in de afdeeling: 4^{den} dag van eerstgenoemd werk 't een en ander er over vinden. 't Merkwaardigst van dit gedeelte is de slotsom: dat de energie van de botsing, die van een lichaam uitgaat, ook afhankelijk is van 't andere lichaam; zij is evenredig aan 't verschil der snelheden; de kracht van de botsing zal 6 zijn, wanneer de snelheden in gelijke richting 10 en 4 zijn.

Galileï ontwikkelt dit alles uitvoeriger in den 6^{den} dag, waar dan ook het onderwerp meer tot zijn recht komt dan in de andere gedeelten. De meerdere snelheid is de oorzaak van de beweging van grootere massa's door kleinere; de intensiteit van de botsing is afhankelijk van snelheid en gewicht; ze is het grootst, wanneer de snelheden van de twee lichamen, die tegen elkander stooten, gelijk en tegengesteld zijn, daar men dan de dubbele snelheid in rekening moet brengen; de uitwerking van de botsing is in vergelijking van die van de drukking, die een voorwerp, dat in rust is, uitoefent, gelijk oneindig groot, daar het laatste in 't geheel geen snelheid heeft; van daar dat een kleine stoot tegen een steen b. v. zooveel meer veroorzaakt, dan alleen een drukking. Deze en nog eenige andere onderwerpen op de botsing betrekking hebbende, bespreekt hij in genoemden dag. 1)

Een geheel andere methode als Galileï volgt Descartes (1596—1650). Dit behoeft ons niet te verwonderen, als wij in aanmerking nemen, dat het volgens Descartes niet mogelijk is iets aangaande eenig onderwerp uit te maken, voor men zijn wezen in een begrip samengevat heeft, waaruit men dan al het overige, wat er betrekking op heeft, redeneerende moet ontwikkelen.

In zijn werk: »principia philosophiae" bespreekt Descartes de botsing. Even als met andere deelen van de mechanica, plaatst hij ook hier eenige grondbeginselen op den voorgrond en leidt hieruit redeneerende de botsingwetten af, zonder zich iets met de empirie te bemoeien. Hij doet dit evenwel zoo, dat Dühring te recht opmerkt: »Descartes fiel in seinen Aufstellungen über den Stoss der reinen Willkür und dem fast ausnahmslosen Irrthum anheim". 2)

Descartes leidt zijn wetten van botsing af uit twee beginselen. De eerste van deze is, dat bij de botsing altijd dezelfde hoeveelheid van beweging aanwezig blijft. Hij leidt dat af uit de goddelijke onveranderlijkheid: »Dieu", zegt hij, »ayant créé le monde avec une certaine quantité de mouvement, qu'il a établie comme le ressort de toutes

1) Een belangrijke beschouwing over Galileï's denkbeelden over de botsing vindt men in Dühring's: „Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik."

2) Dr. E. Dühring: Kritische Geschichte enz. pag. 110.

les opérations de la nature, il semble que son immutabilité consiste à en conserver la même quantité. D'ailleurs n'y auroit-il pas à craindre sans cela que le monde ne tombât dans une espèce d'engourdissement fatal à tous les êtres." Het tweede beginsel van hem is, dat een lichaam een kracht bezit om in den staat te blijven, waarin het zich bevindt, hetzij in die van beweging, hetzij in die van rust. Uit zijn beschouwingen blijkt, dat hij twee lichamen met gelijke maar tegengestelde snelheid niet voor lichamen van tegengestelden toestand houdt; zoo meende hij, dat wanneer men een lichaam, dat in beweging is, een tegengestelde beweging wilde geven, men niets anders te doen had, dan 't beweegbare lichaam tegen te houden.

Neemt men dit in aanmerking, als ook dat Descartes geen onderscheid maakt tusschen een veerkrachtigen en niet veerkrachtigen stoot, dat hij zijn regels zoo algemeen mogelijk stelt, dan behoeft het ons niet te verwonderen, dat zijn botsingwetten weinig meer waarde hebben dan om te doen uitkomen, dat men met metaphysica alleen geen theorie van de mechanica kan opstellen.

Eerst wanneer men onderscheid maakt tusschen veerkrachtige en niet veerkrachtige lichamen zijn twee wetten van Descartes waar. Gelijke lichamen, die met gelijke maar tegengestelde snelheden tegen elkander aankomen, worden zoo terug geworpen, dat beide hun snelheid behouden. Deze wet gaat alleen door voor veerkrachtige lichamen. De andere wet, die na toevoeging van de noodige vooronderstellingen, waar is, heeft betrekking op de botsing van niet veerkrachtige lichamen. Wanneer een grooter lichaam stoot tegen een kleiner, dat in rust is, dan zullen beide vereenigd zich denzelfden kant uit voortbewegen met een snelheid, die staat tot de snelheid van het botsende lichaam, als de massa van dit staat tot de som van beide massa's. Deze wet is een bijzonder geval van een algemeene wet, welke leert, dat het product van de som der massa's en de nieuwe snelheid gelijk moet zijn aan de som der producten van elk der massa's met haar snelheid. Daar Descartes niet tot deze algemeene wet kwam, zoo heeft hij niet eens uit zijn eerste beginsel (behoud van de hoeveelheid van beweging) dat afgeleid, wat er gemakkelijk uit af te leiden was. De andere botsingwetten zijn geheel en al in strijd met de waarheid en gaan zelfs niet door, wanneer men onderscheid maakt tusschen de twee gevallen als boven.

Uit 't voorafgaande blijkt, dat Descartes de mechanica wat de beweging en als onderdeel hiervan de botsing betreft, niet veel verder gebracht heeft. Twee zijner tijdgenooten waren even ongelukkig. Fabri, die in zijn verhandeling: »de motu" over de botsing schrijft, stapelde dwaling op dwaling, wat te begrijpen is, als men weet, dat hij een tegenstander van Galileï was en de meeste van zijn ontdekkingen bestreed. Borelli besprak dit onderwerp in: »de vi percussionis," maar daar ook hij geheel onjuiste begrippen over de beweging had, zijn de meeste der door hem gegeven botsingwetten geheel onjuist.

Aan de »royal society" te Londen hebben wij in zeker opzicht de eerste juiste wetten over de botsing der lichamen te danken. Nadat dit onderwerp verscheidene malen in hare vergadering behandeld was, droeg zij het op aan die leden, die 't meest met de mechanica vertrouwd waren, hen uitnoodigende het afzonderlijk te onderzoeken en hun resultaten mede te deelen. Drie onderzoekers: Wallis, Wren en Huyghens voldeden aan deze uitnoodiging. Kort na elkander dienden zij bij genoemde vereeniging hun geschriften in; Wallis 't eerst, vervolgens Wren en kort daarna Huyghens. 1) De laatste, wonende op het vaste land, heeft eerst kennis kunnen maken met het werk van zijn collega's, nadat hij het zijne had ingediend. Men weet zelfs, dat hij ze had kunnen voorkomen en dat zij de eer van de ontdekking met hem deelen, omdat hij talmde zijn resultaten bekend te maken; zoo is het gebleken, dat hij reeds in 1663 zijn onderwerp machtig was.

Wij zijn verplicht, vóór wij 't een en ander mededeelen uit de geschriften van deze drie geleerden, gewag te maken van een geneesheer te Praag, J. Marc Marci de Crowland, een beoefenaar van de mathematische en physische wetenschap. Deze gaf in 1639 een werk uit getiteld: »de proportione motus seu regula sphymica;" hierin bespreekt hij ook de botsing en geeft er verscheidene juiste wetten van op. Dit boek is jaren lang onopgemerkt gebleven. Marci verdeelt de lichamen in: weeke, breekbare en harde; deze laatste noemt hij zulke, die na de botsing hun vorm behouden, met deze houdt hij zich bijna alleen bezig. Dat hij een goed gezicht op de zaak had, zal blijken, wanneer wij eenige van zijn wetten mededeelen.

Zoo zegt hij: »wanneer een lichaam botst tegen een even groot, dat in rust is, dan zal het zijn beweging verliezen, terwijl het andere een

---

1) Wallis 26 Nov., Wren 17 Dec. 1668 en Huyghens 4 Jan. 1669.

beweging zal krijgen, gelijk aan die, welke het botsende had; als twee gelijke lichamen met gelijke maar tegengestelde snelheden in botsing komen, zullen beide achteruit geworpen worden en met dezelfde snelheid dan hun weg voortzetten; als een lichaam een ander inhaalt, dan zal het zijn weg vervolgen of stil blijven staan of terug geworpen worden, dit zal afhangen van de betrekking tusschen de twee massa's, welke verhouding hij opgeeft; wanneer men naast een lichaam een tweede, dat even groot is, plaatst en men brengt het eerste in botsing met een even groot lichaam, dat met zekere snelheid er tegen aankomt, dan zal het eerste in rust blijven, terwijl het tweede een beweging zal verkrijgen en een snelheid, gelijk aan die van 't lichaam, dat de botsing veroorzaakt." Dit laatste geeft hem aanleiding tot de vraag: »hoe kan men maken, dat b. v. een kanonskogel, rustende op een horizontaal vlak, terwijl een andere even groote kogel tegen hem aankomt, in rust blijft?" Men moet aan de andere zijde, van waar de schok komt, een tweeden gelijken kogel plaatsen; deze zal na de botsing in beweging komen, terwijl de eerst geplaatste in rust zal blijven.

Wij zouden nog meer uit dit werk kunnen aanhalen, wat op dit onderwerp betrekking heeft, maar 't medegedeelde is voldoende om te doen uitkomen, dat Marci een juist denkbeeld had van hetgeen er plaats heeft bij botsing van veerkrachtige lichamen. Daar zijn boek eerst meer algemeen bekend is geworden, nadat Huyghens zijn theorie over de botsing medegedeeld had, heeft het nooit die waarde verkregen, die het gehad zou hebben, als 't eerder de algemeene aandacht tot zich getrokken had.

In 't geschrift, dat Wallis (1616—1703) aan de royal society aanbood, behandelt hij alleen de botsing van lichamen, die niet in staat zijn tot hun oorspronkelijken vorm terug te keeren. 1) Hij gaat van de stelling uit, dat een kracht, die een lichaam beweging geeft, het een snelheid zal geven, zooveel minder, dan het grooter is. Dan ook veronderstelt hij, dat een lichaam dat een schok ontvangt van het botsende lichaam zooveel beweging vernietigt als hetzelf krijgt. Veronderstel, zegt Wallis, dat een lichaam, dat een zekere snelheid heeft, komt tegen een, dat in rust is, dan wordt dezelfde kracht, die het botsende lichaam de beweging gaf, nu gebruikt om beide

1) Philos. Trans. 1668 p. 864.

lichamen te bewegen; de gemeenschappelijke snelheid is dat deel van de snelheid van het botsende lichaam, wat de massa van dit lichaam is van de som der beide massa's. Is de massa van het botsende lichaam 't dubbel van die van 't andere, dan zal de gemeenschappelijke snelheid het $^2/_3$ gedeelte zijn van de snelheid, die het botsende lichaam had.

Nadat Wallis aangetoond heeft, dat de grootte van de kracht gemeten wordt door 't product van snelheid en massa, vraagt hij: »wat zal er gebeuren, als een lichaam in botsing komt met een ander, dat even groot is en dat het inhaalt?" Het botsende lichaam zal invloed uitoefenen op het andere door de meerdere snelheid, die het heeft. 't Verschil in snelheid vermenigvuldigd met de massa van het botsende lichaam drukt de kracht uit, waarmede het botsende op het andere invloed uitoefent. Na de botsing zullen beide lichamen met gelijke snelheid zich voortbewegen en deze gemeenschappelijke snelheid wordt verkregen door het product te nemen van de massa van 't botsende lichaam en 't verschil der twee snelheden, dit product te deelen door de som van de massa's en dit te voegen bij de snelheid, die 't lichaam had, dat den schok ontving of af te trekken van die, welke 't botsende lichaam had.

Gaan twee lichamen naar elkander, dan zal 't lichaam, dat de grootste kracht heeft, alles vernietigen van hetgeen 't tweede lichaam hiervan bezit, maar ook zelf zooveel verliezen. Met het overblijvende zal het werken op 't andere alsof dit in rust is, het zal het medesleepen, terwijl de snelheid zooveel minder wordt, als de massa is toegenomen. Deze gemeenschappelijke snelheid zal gelijk zijn aan het verschil van de beide krachten gedeeld door de som van de beide massa's.

Op gelijke wijze behandelt Wallis andere gevallen van botsing. 1)

In een werk, dat in 1670 verscheen en getiteld is: »de Motu," behandelt Wallis de botsing van veerkrachtige lichamen. Zijn methode is dezelfde als die, welke men in 't geschrift vinden kan, 't welk hij naar de Engelsche vereeniging zond.

In de verhandeling, die Wren (1632—1723) inzond, is even als in die van Huyghens alleen sprake van veerkrachtige lichamen. Zijn uit-

---

1 J. F. Montucla: Hist. des Mathem.

Dr. E. Dühring: Kritische Geschichte der Algem. Princ. der Mechanik.

eenzetting van de botsingwetten is vooral merkwaardig door haar kortheid en algemeenheid. 1)

Stel, zegt Wren, *A* en *B* bewegen zich (fig. 1), het eerste met de snelheid en in de richting *AD*, het tweede met de snelheid en in de richting *BD*. Laat *C* hun zwaartepunt zijn; maak $CE = CD$, 't lichaam *A* zal na de botsing zich bewegen met de snelheid *EA* en in de richting van *E* naar *A*, 't lichaam *B* met de snelheid *EB* van *E* naar *B*. Het is gemakkelijk in te zien, dat deze voorstelling alle denkbare gevallen in zich sluit. Is *D* geplaatst tusschen *A* en *B*, dan heeft men 't geval, dat de twee lichamen naar elkander gaan: ligt het buiten *AB*, dan haalt 't eene lichaam 't andere in en valt het met *A* of *B* samen, dan is een van beide in rust. De plaats van *E* bepaalt de richting en grootte van de beweging na de botsing. Ligt het tusschen *A* en *B*, dan gaan beide van elkander af, ligt het buiten *AB*, dan volgen de lichamen elkander en valt het met een van beide samen b. v. met *A*, dan zal *A* na de botsing in rust zijn.

Veel algemeener dan Wallis en Wren heeft Christiaan Huyghens (1629—1695) 't onderwerp behandeld. Aan 't Engelsche gezelschap gaf hij de botsingwetten zonder bewijzen er voor aan te voeren. 2) In het werk van zijn hand, na zijn dood uitgegeven: »de motu corporum ex percussione" vindt men zijn methode.

Huyghens gaat van 't axioma uit: »komen twee gelijke veerkrachtige lichamen centraal tegen elkander aan, terwijl zij dezelfde snelheid hebben, dan worden ze zoo teruggeworpen, dat zij die snelheid behouden". (Hoewel hij nergens van volkomen veerkrachtige lichamen spreekt, blijkt uit 't axioma genoegzaam met welke soort van lichamen hij zich in 't vervolg bezig houdt.) Na dit op den voorgrond geplaatst te hebben, gaat hij na, wat er gebeuren zal, als die lichamen ongelijke snelheden hebben. Hiervoor stelle men zich voor, zegt Huyghens, iemand op een schip; in zijn eene hand een touw *aA* en in de andere *bB* (fig. 2), waaraan de lichamen *A* en B hangen. Terwijl 't schip een eenparige beweging heeft, worden deze lichamen naar elkander gebracht met gelijke snelheid, zij zouden ieder de helft van hun afstand $AC = BC$ doorloopen hebben, als 't schip onbewegelijk gebleven was. Nu echter zal *A* b. v. *AD* en *B* *BD* afgelegd hebben. Dit is hun ware

1) Philos. Trans. 1668 p. 867.

2) Philos. Trans. 1669 p. 925. Journal des Savants Mars 1669.

beweging, welke iemand op den oever staande gezien zou hebben. De lichamen A en B tegen elkander komende met gelijke snelheden ten opzichte van het schip, zullen in 't punt D tegen elkander botsen en terug geworpen worden ieder met zijn eigen snelheid. Als nu 't schip onbewegelijk gemaakt werd op 't oogenblik van botsing, dan zou A in F en B in H komen ($DF = DH = AC$). Maar daar 't schip gedurende dien tijd CD aflegt, zal A van D in G en B in I komen. ($HI = FG = CD$). Daar nu $DI = AD$ en $DG = BD$ is, volgt hieruit, dat de lichamen A en B hun snelheid omgewisseld hebben.

Wanneer nu 't schip een zoodanige beweging heeft, dat het de snelheid van het eene lichaam geheel opheft, zoo dat het van den oever gezien, in rust is, dan heeft het andere lichaam van uit datzelfde oogpunt des te meer beweging. Wij hebben hier 't geval, dat het eene lichaam rust, terwijl het andere er met zekere snelheid tegen aankomt. Na de botsing zullen op 't schip gezien de beide lichamen in tegenovergestelde richting van 't punt van samenkomst zich van elkander verwijderen. De nu verkregen snelheden zijn gelijk aan die, welke zij vóór de botsing hadden, terwijl de beweging voor ieder in tegengestelde richting plaats heeft. Hierdoor wordt van 't standpunt van den oever de beweging van dat lichaam door de beweging van 't schip opgeheven, dat vóór de botsing alleen beweging scheen te hebben, terwijl 't lichaam, dat eerst in rust scheen, de beweging zal hebben, die 't andere had. Hieruit leidt Huyghens af: komt een lichaam tegen een ander aan, dat in rust is, dan zal het aan dit zijn beweging overdoen en zelf tot rust komen. (Hij veronderstelt hierbij, dat een gemeenschappelijke beweging van de lichamen op de botsing geen invloed uitoefent).

Uit het op den voorgrond geplaatste axioma leidt hij de wetten van botsing af, wanneer de lichamen gelijk, maar de snelheden ongelijk zijn. Al de gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen, terwijl de lichamen naar elkander gaan of het eene het andere inhaalt, behandelt hij op de wijze als boven, door 't schip een snelheid te geven noodig voor 't geval, dat hij behandelt.

Bij de beschouwing van ongelijke lichamen veronderstelt hij nog, dat het grootere het kleinere van zijn beweging mededeelt.

Opmerking verdient het nog, dat Huyghens in zijn 11de stelling zegt: dat de som van de producten van de massa's met de vierkanten van de respectieve snelheden vóór de botsing gelijk is aan die er na. Hierop komen wij nader terug.

De geschriften van Wallis, Wren, en Huyghens waren nauwelijks openbaar gemaakt of verscheidene natuurkundigen trachtten door proeven de min of meerdere juistheid van 't geschrevene aan te toonen. Uitvoerige proeven over de botsing zijn genomen door Mariotte; in het gedeelte van zijn Oeuvres (Leiden 1717), dat het opschrift draagt: Traité de la percussion etc., vindt men ze beschreven.

»Doch haben sie," merkt Dühring te recht aan, »nicht so wohl für die Fortschritte der fundamental Theorie als vielmehr für die speciellen Anwendungen und die Experimentalkunst hervorragende Bedeutung".

II.

Wij zijn met onze geschiedenis genaderd tot een tijdvak, gedurende 't welk zich een hevige strijd over een der belangrijkste beginselen der theoretische mechanica openbaarde; wij bedoelen die over het behoud der levendige krachten. 1)

De naam »levendige kracht" is afkomstig van Leibnitz (1646—1716). Hij maakte onderscheid tusschen doode en levendige krachten; de eerste noemt hij zulke, welke geen beweging, maar slechts drukking of spanning voortbrengen; de laatste zijn die krachten, waardoor beweging ontstaat. Terwijl de naam doode kracht, die Leibnitz aan Galileï ontleend heeft, niet in gebruik is gekomen, heeft de andere burgerrecht verkregen. 2)

---

1) Het fundament van dit beginsel is door Ch. Huyghens gelegd en wel in het 4de hoofdstuk van zijn beroemd werk: „Horologium oscillatorium" (1673), waarin hij een theorie over 't oscillatie-centrum geeft.

2) De twee geschriften van Leibnitz: demonstratio erroris memorabilis cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum (Act. erud. 1686) en specimen dynamicum pro admirandis naturae legibus circa corporum vires, et mutuas actiones detegendis, et ad suas causas revocandis (Act. erud. 1695), vooral het eerste gaven aanleiding tot dien verbitterden strijd, waarvan wij gewaagden, die gedurende de 18de eeuw tusschen de grootste wiskundigen gevoerd werd en eerst in 't laatst van die eeuw tot beslissing gekomen is.

Vóór het verschijnen van Leibnitz' werk: demonstratio erroris enz. was men algemeen de meening van Descartes toegedaan, dat de maat der krachten in het product der massa en de enkele snelheid gelegen was. Leibnitz nu beweerde in aansluiting met het door Huyghens ontwikkelde denkbeeld: dat de maat der krachten moet gezocht worden in 't product der massa en het vierkant van de snelheid 1)

Tot de bestrijders van Leibnitz behoorden de Cartesianen o. a. de abt de Catelan en la Lande. 2)

Leibnitz kreeg in Johannes Bernoulli (1667—1748) een krachtigen bondgenoot. Aanvankelijk de zienswijze van Leibnitz niet toegedaan kwam hij na rijp onderzoek tot de overtuiging, dat zij de ware is. 3)

In het eerste 4de gedeelte van de 18de eeuw bleef de strijd, waarvan wij spraken, kalm. Dit veranderde spoedig, nadat de Academie van wetenschappen te Parijs een prijsvraag uitgeschreven had over de overbrenging van beweging bij de botsing van lichamen. Die prijsvraag was een dubbele. In 1724 moest beantwoord worden, hetgeen betrekking heeft op onveerkrachtige en 2 jaren later op veerkrachtige lichamen; voor elk der bekroonde geschriften was een prijs van 2500 livres uitgeloofd. Van de verschillende verhandelingen, die inkwamen en op 't eerste gedeelte betrekking hadden, werd die van Maclaurin, een tegenstander van Leibnitz, als de beste beschouwd; terwijl voor het tweede gedeelte het antwoord van père Mazière, prêtre de l'oratoire, mede een aanhanger van de leer van Descartes bekroond werd. Ook Joh. Bernoulli had een stuk ingezonden; hierin verdedigde hij met alle kracht de meening van Leibnitz over de maat der krachten. Hij vermocht evenwel niet de Fransche Academie tot zijn zienswijze over te halen.

Bernoulli, verbitterd door de miskenning, die hem ten deel was gevallen, deed een beroep op de geleerde en onafhankelijke mannen

---

1) Zie voorafgaand hoofdstuk.

2) Beide beweerden, dat de conclusie van Leibnitz valsch was, omdat hij geen rekening met den tijd had gehouden.

3) In zijn beroemd werk: discours sur la communication du mouvement, waarin hij mededeelt, dat minder de redeneering van Leibnitz, dan wel zijn eigen overdenkingen gemaakt hebben, dat hij van meening veranderde, tracht hij haar door tal van voorbeelden, mathematische ontwikkelingen en niet minder door diepzinnige metaphysische beschouwingen te bevestigen.

van Europa en wel met zulk een goeden uitslag, dat de commissie der academie genoodzaakt was om in strijd met de gewoonte, achter de bekroonde stukken de verhandeling van Bernoulli te plaatsen.

Het is in dezen tijd, dat de strijd over de maat der krachten of wat op 't zelfde neerkomt, over het beginsel der levendige krachten ontbrandde. Ofschoon 't stuk van Bernoulli niet bekroond was en de tegenpartij daardoor een groot voordeel op de partij van Leibnitz behaald had, kreeg toch Bernoulli een grooten aanhang. Bijna al de Duitsche en de voornaamste Fransche wiskundigen, mannen als Wolff, Camus, Papin, Hermann enz., twee onzer beroemde Hollandsche geleerden 's Gravesande en Musschenbroek schaarden zich aan zijn zijde. Tot zijn tegenpartij behoorden voornamenlijk de Engelsche geleerden. Heftig werd hij bestreden door: Maclaurin, Clarcke, Stirling, Désaguliers, Robins, en De Mairan. De strijd werd dikwijls met groote heftigheid en verbittering gevoerd; dikwijls nam hij meer een persoonlijk, dan wetenschappelijk karakter aan. Vooral de Engelschen en inzonderheid Clarcke maakten zich hieraan schuldig; de partij van Bernoulli streed over 't algemeen meer waardig. 1)

De eerste, die de botsing behandeld heeft volgens het beginsel, dat de kracht evenredig is aan 't vierkant van de snelheid, is 's Gravesande geweest. In het eerste gedeelte van het 12de deel van 't Journal literaire jaargang 1722 komt een stuk van hem voor getiteld: »Essai d'une nouvelle theorie sur le choc des corps." 2)

1) Op welke wijze de strijd soms gevoerd werd, kan o. a. blijken uit een stuk van Dr. P. Van Geer: „Johannes Bernoulli en zijn strijd over het beginsel der levendige krachten. (Nieuw Archief voor wiskunde, deel II, stuk 2.)

2) In de voorrede deelt 's Gravesande mede, dat Leibnitz de eerste geweest is, die beweerd heeft, dat de kracht van een lichaam, dat in beweging is, niet evenredig is aan zijn snelheid, maar aan 't vierkant er van. Bekwame mathematici hebben dit gevoelen van Leibnitz verdedigd, maar niemand heeft, voor zoo ver hem bekend is, de botsing volgens dit beginsel behandeld ten minste wat de onveerkrachtige lichamen (qui ne sont pas flexibles à ressort) en wat de andere betreft, hierover is niet dat licht verspreid, wat hij wenschelijk acht.

Zijn proeven over de botsing o. a. hebben er hem toe gebracht Leibnitz gelijk te geven. „Je suis parvenu," zegt hij „à une théorie toute nouvelle du choc, Hierin geeft hij rekenschap, waarom hij het beginsel van Leibnitz toegedaan is en verklaart hij met behulp er van de botsingwetten van veerkrachtige en niet veerkrachtige lichamen.

Dat de krachten evenredig zijn met de vierkanten der snelheden toont hij in de eerste plaats uit zijn genomen proeven aan. Hij liet ballen van een zelfde stof, maar van verschillend gewicht vallen in: »terre glaise de la plus fin, dont se servent les potiers de terre." Zoo gebruikte hij drie ballen A, B en C waarvan de massa's evenredig waren aan 1, 2 en 3. Toen hij C liet vallen van een hoogte $= 9$ en A van een hoogte $= 27$ bleek het hem, dat de indrukselen in de aarde gelijk waren; dat was ook 't geval, toen hij C van een hoogte $= 18$ en B van een hoogte $= 27$ liet vallen. Uit de grootte van de indrukselen kan men bepalen de grootte van de krachten, die de lichamen, wanneer ze in aanraking komen met de aarde, hebben. Als A en C beide vielen van een hoogte $= 9$, dan zouden hun verkregen krachten zich verhouden als 1 tot 3. Als A van een hoogte $= 27$ en C van een hoogte $= 9$ voet valt, zijn de indrukselen gelijk, dus ook de verkregen krachten; hieruit volgt, dat de kracht van A na een val van 27 het drievoud zal zijn van de kracht na een val van 9. Men heeft dus dat de kracht van den bal evenredig is met de hoogte, waarvan hij valt. Nu is deze hoogte evenredig met het vierkant van de verkregen snelheid, waarmede het lichaam de aarde bereikt, zoo

---

qui pour ce qui regarde le choc des deux corps, et le choc direct de plusieurs corps non élastiques ne mene pas à des regles differents de celles qui sont connues et que l'experience a confirmées; mais on trouvera ici ces regles demontrées d'une manière differente de celle qu'elles l'ont été jusqu' à present; et on verra comment d'un principe contraire à l'expérience, les Philosophes sont parvenus à ces regles, par un raisonnement dans lequel ils ont negligé de faire attention à tout ce qui devoit être consideré; sans quoi il étoit impossible de parvenir à la verité par le chemin qu'ils aroient pris. On verra à l'égard de ces mêmes regles, que pour ce qui regarde les corps non élastiques elles ne sont démontrées que pour les corps que nous connoissons: il seroit assez inutile et encore plus difficile de déterminer ce qui arriveroit aux corps parfaitement durs. Cette nouvelle théorie ne regarde que le choc et ne change rien à ce qui a été demontré touchant la projection des graves, les forces centrales, les centres d'oscillation, la résistance des fluides etc, les effets, qui dans toutes ces occasions changent le mouvement des corps, sont d'une nature tout à fait differente du choc."

als uit tal van proeven gebleken is. Uit dit voorafgaande volgt, dat de krachten evenredig zijn met de vierkanten der snelheden. 1)

Maar ook uit de natuur van de kracht zelve volgt het beginsel.

Allereerst moet aangetoond worden, dat een lichaam in beweging aan de versnelling weerstand biedt in reden van de snelheid, die het heeft. Dit blijkt reeds gedeeltelijk hieruit, dat men minder kracht (effort) noodig heeft om een lichaam, dat in rust is, een zekere snelheid te geven, dan om met een zelfde bedrag de snelheid van een gelijk lichaam, dat in beweging is, te vermeerderen, immers in 't laatste geval moet men de »cause mouvante" eerst een snelheid geven, die 't lichaam heeft en dit nu kan niet zonder kracht (effort) geschieden. 2)

Stel dat *eee* enz. een zeker aantal uitgerekte veeren zijn (fig. 3), die zich ontspannende al hun effort aan het lichaam *P* geven, laat elke veer in den toestand van ontspanning den vorm *E* hebben. Wanneer de veer, die het dichtste bij *P* is, zich ontspannen heeft, deelt zij een oneindig kleine snelheid aan *P*, die in rust is, mede. Om deze snelheid met een oneindig kleine snelheid te vermeerderen, is het niet voldoende, dat alleen een tweede veer zich ontspanne, deze moet zich ontspannende tevens de snelheid krijgen, die het lichaam reeds heeft; daarvoor is noodig, dat zich nog een derde veer ontspanne, ieder met een effort gelijk aan die, waarmede de eerste zich ontspannen heeft, m. a. w. voor dien 2den graad van snelheid is dus een dubbel effort noodig als voor den 1sten. Zoo redeneerende kan men aantoonen, dat om een lichaam een oneindig kleine vermeerdering van snelheid te geven, er noodig zijn zooveel oneindig kleine efforts, als 't lichaam oneindig kleine snelheden heeft; derhalve: »l'effort qu'il faut pour augmenter

---

1) Album der Natuur 3de afl. 1879. Levensschets van Willem Jacob 's Gravesande door Prof. P. L. Rijke.

2) 's Gravesande maakt onderscheid tusschen *force* en *effort*. *Force* is hetgeen een lichaam, dat in beweging is, van de eene plaats naar de andere voert. „La force d'un corps lui est inhérente et ne peut être changée que par l'action d'une cause étrangère. *Effort* is elke uitwendige oorzaak, die een lichaam van plaats doet veranderen en zijn kracht wijzigt. Hij spreekt van een uitwendige oorzaak: „parce que je ne mets pas au nombre des *efforts* la force qui est inhérente au corps et par laquelle il est transporté. Un *effort* peut communiquer de la *force* à un corps, mais aussitôt qu'elle est communiquée, cette *force* n'est plus un *effort* qui agisse sur ce corps."

d'un degré infinement petit la vitesse d'un corps croit en raison de cette vitesse."

Met behulp van 't voorafgaande bewijst hij zijn stelling aldus: »on a vu que l'effort de tous les petits ressorts qui se débandent est necessaire pour donner à un corps un certain degré de vitesse; l'effort de ces ressorts n'a d'autre effet que de mouvoir le corps, car l'effort que les ressorts reçoivent les uns des autres est toujours emploié à mouvoir le corps; par consequent les differentes forces, que reçoit le corps en recevant differentes vitesses sont entre elles comme les nombres des ressorts infinement petits qui se débandent pour donner ces vitesses differentes.

Soit *AF* (fig. 4) la vitesse d'un corps acquise par acceleration; soient *Ab*, *bc*, *cd* des parties infinement petites acquises successivement, les nombres des ressorts pour donner chacun de ce degrez de vitesses sont proportionels aux rectangles *Abbe*, *bcif*, *cdtg* et le total des ressorts sera proportionel à la superficie *Aeld*, laquelle est un véritable triangle, à cause que les parties *Ac*, *eh*, *hf*, *fi* etc. sont infinement petites. Par consequent les forces du corps, si les vitesses sont entre elles comme *Ad* et *AF*, sont comme les aires des triangles *Ald* et *AGF* et ces aires sont comme les quarrés des vitesses *Ad* et *AF*."

In het nu volgende gedeelte van zijn stuk behandelt 's Gravesande eerst de botsing van niet veerkrachtige lichamen (corps, qui ne sont ni parfaitement durs, ni flexibles à ressort.)

Hij toont aan, dat deze lichamen na de botsing zich niet van elkander scheiden, daar er geen kracht (effort) is, die dat te weeg zou kunnen brengen. De som van de krachten vóór de botsing is minder dan er na. Bij elke botsing toch heeft er een verschuiving van lichaamdeeltjes plaats, hiervoor is kracht noodig en die kracht gaat verloren: »il n'y a point de nouvelle effort étranger pour produire une nouvelle force qui récompense la force perdue; il faut donc necessairement que la somme des forces soit moindre après le choc qu'avant le choc."

Het verlies van kracht is hetzelfde, welke ook de absolute snelheden der twee lichamen zijn, als hun verschil in snelheden hetzelfde blijft. Immers van dit laatste hangt de verschuiving van de lichaamsdeeltjes af en door die verplaatsing ontstaat er verlies van kracht. — Bij een constant verschil in snelheid is de som van de twee krachten een minimum, wanneer bij tegengestelde richting, de volstrekte snelheden van beide lichamen omgekeerd evenredig zijn met de massa's. Laat de snelheid van 't eene lichaam x en die van 't andere y zijn. 't Verschil in snelheid is dus $x + y = d$, daar de lichamen naar elkander gaan; $Ax^2 + By^2$ is een minimum als $A : B = y : x$ of $Ax = By$ is. Om dit te bewijzen veronderstelt men dat de snelheid van A vermeerdert met e en dus wordt $x + e$, de snelheid van B moet dan zijn $y - e$. De som van de twee krachten zal dan zijn $Ax^2 + 2\,Axe + Ae^2 + By^2 - 2\,Bye + Be^2$. Omdat $Ax = By$ is, heeft men $Ax^2 + Ae^2 + By^2 + Be^2$ en deze som is klaarblijkelijk grooter dan $Ax^2 + By^2$.

Bij een gegeven verschil in snelheid is er een geval, waarbij de lichamen, die naar elkander zich bewegen, na de botsing in rust blijven. Veronderstel, dat de lichamen niet in rust blijven, dat het lichaam B door A wordt medegesleept. Vermindert men nu de snelheid van A en vermeerdert men met een zelfde bedrag de snelheid van B. dan zal B met minder kracht worden medegesleept. Men zal zooveel van A kunnen afnemen en voegen bij B, dat B A medesleept. Dit bewijst: »qu'il y a un degré moien de diminuation de la vitesse d'A, dont l'effet est qu'aucun des deux corps n'emporte l'autre."

Hij bewijst dan, dat de lichamen in rust zullen blijven, als de som van hun krachten een minimum is en dus wanneer de krachten omgekeerd evenredig zijn met de massa's. Hierbij beschrijft hij eenige proeven, die hij genomen heeft om de waarheid van 't voorafgaande aan te toonen.

De grootte van de verloren kracht is gelijk aan het quotiënt, dat men verkrijgt, wanneer men het gedurig product van het vierkant van 't verschil in snelheid en de beide massa's deelt door de som der massa's of $= \frac{ABd^2.}{A+B}$ Bij een constant verschil in snelheid is de grootte van 't verlies in kracht, hoe groot ook de volstrekte snelheden zijn, steeds dezelfde; nu is er een geval, waarbij de lichamen hun totale krachten verliezen, zooveel kracht ze dan verliezen, zal altijd verloren gaan. Het verlies zal derhalve bedragen $Ax^2 + By^2$, terwijl men heeft $d = x + y$ en $Ax = By$. Lost men uit deze laatste vergelijkingen x en y op en substitueert men die waarden in de eerste vergelijking, dan verkrijgt men, dat de verloren kracht $= \frac{ABd^2}{A+B}$ is.

Hieruit leidt hij af, hoe groot de gemeenschappelijke snelheid van de beide lichamen na de botsing zal zijn. Eerst neemt hij 't geval, dat de lichamen denzelfden kant uitgaan en dan, dat hun beweging in tegengestelde richting plaats heeft.

a. Na de botsing hebben beide lichamen dezelfde snelheid. De som van hunne krachten vóór de botsing is $Aa^2 + Bb^2$, waarvan men de verloren kracht af moet trekken om de kracht na de botsing te verkrijgen. 'tVerschil in snelheid is $a - b$ en de verloren kracht dus gelijk aan : $\frac{AB\,(a-b)^2}{A+B}$; de kracht na de botsing zal dus bedragen:

$$Aa^2 + Bb^2 - \frac{AB\,(a-b)^2}{A+B} = \frac{(A\,a + B\,b)^2}{A+B.}$$

Na de botsing vormen de lichamen één lichaam met de massa $A + B$. Wanneer men de kracht door de massa deelt, verkrijgt men 't vierkant van de snelheid of

$$v^2 = \frac{(Aa + Bb)^2}{(A+B)^2} \text{ of } v = \frac{Aa + Bb.}{A+B.}$$

b. De som van de krachten vóór de botsing is $Aa^2 + Bb^2$; 't verschil in snelheid is nu $a + b$, dus de verloren kracht $\frac{AB\,(a+b)^2}{A+B,}$ de overblijvende kracht is derhalve gelijk aan

$$Aa^2 + Bb^2 - \frac{AB\,(a+b)^2}{A+B} = \frac{(Aa - Bb)^2}{A+B,}$$

waaruit als boven voor de gemeenschappelijke snelheid volgt

$$v = \frac{Aa - Bb}{A+b}$$

Hierop laat 's Gravesande volgen: »on voit par cette proposition que le regle ordinaire qu'on emploie pour trouver la vitesse dont il 's agit est exacte quoiqu'on l'ait déduire de ce principe contraire à l' experience, que la force est proportionelle à la masse par la vitesse, ce qui avoit fait appeler ce product quantité du mouvement La raison pour quoi ce principe n'a pas mené dans l'erreur, c'est qu'on a supposé en même temps qu' après le choc et avant le choc, la force étoit la même sans faire attention à l'effort qu'il faut pour enfoncer à aplatir les parties et une erreur a été le correctif de l'autre."

Het verband, dat er bestaat tusschen de verandering in snelheid van A en B en hunne massa's toont hij op deze wijze aan:

a de beide lichamen hebben gelijk gerichte snelheden.

Laat AB (fig. 5) de massa van een der lichamen en BN zijn snelheid voorstellen, 't product van massa en snelheid is dan AN. Zijn

BC de massa van 't andere lichaam en *BE* zijn snelheid, 't product van massa en snelheid is nu *BF*. Als men *FE* verlengt tot *D* en den rechthoek *AO* construeert, *DO* trekt en door *I*, 't snijpunt van *DO* en *NE* een lijn *HL* // *AC* trekt, dan zal de rechthoek *HC* gelijk zijn aan de som der rechthoeken *AN* en *BF*. Deze rechthoek is dus gelijk aan de som van de producten der massa's met de snelheden; deze som door de som der massa's $AB + BC$ of *AC* deelende, geeft *BI* als de gemeenschappelijke snelheid na de botsing. De verandering van de snelheid van *AB* is *NI*, die van de snelheid van *BC* is *EI*, maar daar driehoek *ION* gelijkvormig is met driehoek *IOE* heeft men *DE* of $AB : NO$ of $BC = EI : NI$. Men heeft derhalve: de veranderingen in snelheden zijn omgekeerd evenredig met de massa's.

Tot deze slotsom komt men ook, als men onderstelt:

b. dat de lichamen naar elkander gaan.

AB (fig. 6.) stelt weer de massa van 't eene lichaam, *BN* zijn snelheid en dus *BM* 't product van de massa met de snelheid. *BC* is de massa van het andere lichaam, *BE* zijn snelheid en *BF* 't product van deze massa en snelheid.

Men construeert den rechthoek *MDOF*; de diagonaal *DO* snijdt *EN* in *I*; door dit punt trekt men een lijn *HL* // *AC*; de rechthoeken *IM* en *IF* zijn dan gelijk. Verder heeft men $MB - MI$ of $AI = MB - BL - EC$ en dus $AI + BL = MB - EC$.

Hieruit volgt, dat de rechthoek *AL* gelijk is aan 't verschil van de producten van de massa's met hunne snelheden. Dit verschil deelende door *AC* (som van de massa's) geeft *BI* als de gemeenschappelijke snelheid na de botsing.

De snelheid, die 't lichaam *AB* verliest is *NI*; 't andere lichaam verliest niet alleen zijn snelheid *BE*, maar na de botsing beweegt het zich naar de tegenovergestelde zijde met de snelheid *BI*, zoodat de geheele verandering van snelheid *EI* is. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken *OIN* en *DEI* volgt *DE* of $AB : NO$ of $BC = EI : NI$.

In het laatste hoofdstuk bespreekt 's Gravesande de botsing van veerkrachtige lichamen. Hij toont aan dat het verschil in snelheid, waarmede de beide veerkrachtige lichamen zich na de botsing verwijderen gelijk is aan dat, waarmede zij elkander naderen; dat de verandering in snelheid van elk lichaam gelijk is aan de dubbele verandering, die er zou zijn, als de lichamen geen veerkracht bezaten en eindelijk dat de som van de krachten vóór en na de botsing dezelfde is. »Il n'y a de force perdue", zegt hij, »par le choc que celle qui est emploiée à enfoncer les parties; quand les corps ont du ressort, les parties enfoncées retournent à leur première figure avec un effort égal à celui qui a été emploié à les plier, ce qui rend au corps une force égale à celle qui étoit perdue; l'effort du ressort n'a d'autre effect que de donner de la force aux corps. Ce qui fait que la force totale de la somme des forces n'est pas changée par le choc."

De prijsverhandeling van Mac-Laurin bestaat uit vier hoofdstukken. In het 1ste zet hij uiteen de axioma's en beginselen, die betrekking hebben op de beweging van de lichamen en niet tegengesproken worden; in het 2de toont hij aan dat de krachten gemeten worden door het product van massa en snelheid; de twee laatste hoofdstukken bevatten de botsingwetten.

Gelijk uit het voorafgaande blijkt, was Mac-Laurin 't gevoelen van Leibnitz over 't meten der krachten niet toegedaan; in het 2de hoofdstuk geeft bij hiervan rekenschap, terwijl hij het werk van 's Gravesande, hetwelk wij boven bespraken, aan een critiek onderwerpt.

Volgens Leibnitz en 's Gravesande verhouden zich de krachten als 100 tot 64, als van de twee lichamen, die gelijk zijn, de snelheden 10 en 8 zijn. Veronderstel, zegt Mac-Laurin, dat van twee personen de een zich op een schip bevindt, dat zich eenparig met een snelheid $= 2$ beweegt en de andere op den oever; laten zij twee gelijke lichamen A en B met gelijke »efforts" in de richting waarin 't schip zich beweegt, werpen en wel zoo, dat het lichaam B, geworpen door den persoon, die in rust is, een snelheid $= 8$ verkrijgt; op 't schip zal dus ook A een snelheid $= 8$ hebben, maar in de lucht zal de snelheid $= 10$ zijn. De kracht van 't lichaam A was, vóór het een vermeerdering kreeg, volgens $L. = 4$, daar zijn snelheid $= 2$ was. De vermeerdering in kracht moet zijn 64; dus de totale kracht zal zijn $64 + 4 = 68$. Maar omdat zijn snelheid $= 10$ is, moet de kracht $=$ 100 zijn; dit nu is in tegenspraak met het zoo even verkregene, waaruit volgt, dat de krachten zich niet verhouden kunnen als de vierkanten der snelheden.

Door nog drie dergelijke voorbeelden tracht Mac-Laurin 't gevoelen van Leibnitz en 's Gravesande te weerleggen.

Ook met behulp van de botsing bestrijdt hij de meening van zijn tegenpartij. Wanneer twee lichamen, die onveerkrachtig zijn en snelheden hebben tegengesteld aan elkander en omgekeerd evenredig aan de massa's, met elkander in botsing komen, zullen ze, ook volgens 's Gravesande, in rust blijven. Dit zal dus geschieden, als de massa's respect. 3 en 1 en de snelheden 1 en 3 zijn. Hunne krachten zullen dan volgens 's Gravesande zijn als 9 en 3 of als 3 en 1, maar volgens onze zienswijze, zegt *M.L.* als 3: 3 of 1: 1, d. w. z. ze zijn gelijk. Volgens 's Gravesande heft dus een kracht een andere op, die er niet gelijk aan is, maar het 3de gedeelte er van; men zou op 't standpunt van 's Gravesande staande, kunnen aantoonen, dat een kracht een tegengestelde opheft, die een 100ste b. v. er van groot is. »On prétend," zegt hij verder, »que la plus grande force perd tout son avantage en enfonçant les parties de l'autre. Mais cette réponse n'ôte pas la difficulté; on dit que ces forces ne se détruisent pas, mais qu'elles se consument en enfonçant leurs parties mutuellement. Or comme ces actions sont mutuelles et contraires, et qu'elles commencent et s'achèvent en même temps, et qu'elles se soûtiennent sans prévaloir l'une sur l'autre pendant qu'elles s'exercent, je ne comprends pas comme elles peuvent produire des effets si inégaux, l'une perdant quelquefois mille, ou même dix mille fois plus que l'autre."

Volgens Mac-Laurin is het 's Gravesande gelukt uit zijn beginsel dezelfde botsingwetten af te leiden, die hij gevonden heeft, omdat 's Gr. van een onjuiste stelling gebruik maakt, waaruit hij al de andere heeft afgeleid. Bedoelde stelling, welke aldus luidt: »la force perdue dans les chocs des deux corps non élastiques, est la même, quelles que puissent être les vîtesses absolues de ces deux corps, si leur vîtesse respective est la même," bewijst 's Gr. zonder van zijn beginsel gebruik te maken. Volgens M. L. is deze stelling valsch om de volgende reden. Veronderstel, dat 2 lichamen A en B snelheden hebben gelijk V en u; de som van de krachten vóór de botsing zal zijn $AV + Bu$; als de kracht van 't lichaam A de grootste is en als de lichamen tegengestelde beweging hebben, dan zal die som na de botsing $Av - Bu$ zijn. De verloren kracht zal dan zijn $AV + Bu - AV + Bu = 2Bu$, dat is gelijk aan het dubbele van de kleinste kracht. De verloren kracht zal derhalve veranderen, terwijl de »vîtesse respective" dezelfde blijft, wanneer de kleinste kracht verandert en kan niet veranderen, hoewel die snelheid grooter wordt, als de kleinste kracht dezelfde blijft. Met behulp van een valsch beginsel en een valsche hoofdstelling, die onafhankelijk van elkander zijn, is het 's Gravesande gelukt juiste botsingwetten te vinden.

In het laatste gedeelte van dit hoofdstuk bespreekt hij de proeven van 's Gravesande. Gelijk wij boven mededeelden, liet 's Gr. ballen in aarde vallen en bepaalde uit de grootte van de indrukselen de grootte van de krachten. Dit nu is volgens Mac-Laurin niet geoorloofd. »La seule pesanteur d'un corps qui n'a point de force, le peut enfoncer dans cette terre." Hieruit volgt, dat de indrukselen niet evenredig zijn aan de krachten en dat, wanneer gene gelijk zijn, deze dat daarom nog niet zijn. Wel acht hij het nuttig na te gaan, hoe het komt, dat de indrukselen gelijk zijn, als de massa's van de lichamen omgekeerd evenredig zijn met de vierkanten van de snelheden; maar deze proef acht hij niet voldoende om een beginsel vast te stellen »que l'on ne peut pas accorder avec des autres expériences incontestables, comme nous avons démontré."

In het 3de hoofdstuk bespreekt hij »le choc direct," dat is een zoodanige, waarbij de zwaartepunten altijd op de lijn blijven, die door de plaats gaat, waar de lichamen in botsing komen en loodrecht is op die deelen van de oppervlakken, die tegen elkander komen. Hij maakt onderscheid tusschen: 1° volkomen harde lichamen, dat zijn zulke, waarvan de deeltjes niet van plaats veranderen bij de botsing, 2° veerkrachtige en 3° weeke lichamen. Wel vindt men geen volkomen harde en volkomen veerkrachtige lichamen, maar dat is geen beletsel om ze ter sprake te brengen.

Hij begint met de botsing van volkomen harde lichamen. Men moet de som of 't verschil van hunne krachten vóór de botsing deelen door de som van hunne massa's om hun gemeenschappelijke snelheid na de botsing te verkrijgen; men neemt de som, als de lichamen denzelfden kant uitgaan, 't verschil, wanneer zij zich naar elkander bewegen. Het bewijs van het eerste gedeelte dezer stelling komt hierop neer: alles wat door de botsing 't eene lichaam verliest, wint het andere; dus de som van hunne krachten na de botsing zal dezelfde zijn, als deze er vóór was. Daar de lichamen niet veerkrachtig zijn, gaan ze na de botsing niet van elkander af, maar gaan beiden denzelfden kant uit, even als of men slechts één massa met één gegemeenschappelijke snelheid had. Van daar dat men, om deze snelheid te verkrijgen, de som van hunne krachten door de som van de massa's van beide lichamen deelen moet. Als dus A en B de massa's en V en v de snelheden van de botsende lichamen zijn, dan zal hun gemeenschappelijke snelheid na de botsing zijn $\frac{AV + Bv}{A + B}$, de kracht van A na de botsing zal bedragen $\frac{A^2V + ABV}{A + B}$ en die van 't lichaam B $\frac{BAV + B^2v.}{A + B}$ De kracht, die 't eene lichaam wint en 't andere verliest zal bedragen $AV - \frac{A^2V + ABv}{A + B} = \frac{AB}{A + B}(V - v.)$

Gaan de lichamen naar elkander, dan zal de grootste kracht de kleinste vernietigen, maar, terwijl zij deze vernietigt, zal zij zelve verminderd worden met een hoeveelheid gelijk aan deze kleinste kracht. In dit geval moet men dus het verschil van de twee krachten vóór de botsing deelen door de som van de massa's om de gemeenschappelijke snelheid na de botsing te verkrijgen Er heeft een verlies van kracht plaats en wel een hoeveelheid gelijk aan twee maal de kleinste kracht.

Nu gaat hij over tot de volkomen veerkrachtige lichamen. Bij de botsing van zulke zijn de veranderingen van de kracht het dubbele van die, welke verkregen zouden zijn, als de lichamen niet veerkrachtig waren. Immers: »les parties des corps élastiques sont enfoncées par le choc, et se plient toujours jusqu'à ce que les deux corps s'avançant avec une vîtesse commune, comme s'il n'y avoit point de ressort, la vîtesse respective qui bandoit leur ressort n'agissant plus, elles se débandent, et se restituant par les mêmes degrez, et avec les mêmes forces par lesquelles elles avoient été enfoncées, elles produisent les mêmes effets, en séparant les corps avec une vîtesse respective, égale à celle dont ils s'approchoient avant le choc. Il y a donc une double augmentation produite dans la force de ce corps qui perd par le choc."

Gaan dus de lichamen denzelfden kant uit, dan moet men $\frac{2\,AB}{A+B} \times (V - v)$ voegen bij de snelheid, die B vóór de botsing had om die na de botsing te verkrijgen; — met ditzelfde bedrag moet men de snelheid van A verminderen. De kracht van B zal derhalve na de botsing bedragen: $\frac{B^2v + 2\,ABV - ABv}{A + B.}$

Hieruit leidt hij o. a. 't volgende af. Als A tegen een grooter lichaam B, dat in rust is, stoot, dan zal B na de botsing meer kracht hebben, dan A vóór de botsing had. De kracht van B zal zijn, in de laatst gevonden uitdrukking $v = o$ stellende, $\frac{2\,ABV}{A+B}$; is nu $B > A$, dan zal $\frac{2\,ABV}{A+B}$, AV overtreffen met een bedrag $= \frac{AV}{A+B}\,(B - A)$ Komt nu B tegen een grooter lichaam C aan, dat in rust is, dan zal de kracht van C, die van B weer overtreffen. »On trouve par un calcul que si onze corps élastiques en progression géometrique d'un à dix, se frappoient l'un après l'autre, le dernier auroit 394 fois plus de force que n'en avoit le plus petit." Hij wijst er evenwel op, dat de tien andere lichamen terug geworpen worden met 393 graden kracht en dat dus de som van alle krachten op het teeken lettende, slechts 1 graad is; de som van de krachten blijft gelijk aan AV.

Zijn de lichamen niet volkomen veerkrachtig, dan moet men de snelheid, waarmede zij zich na de botsing scheiden, verminderen in reden van de elastische kracht.

Het 4de hoofdstuk, dat tot opschrift heeft: »du choc indirect" begint met de oplossing van 't volgende vraagstuk: »wanneer van twee bollen de richtingen, snelheden en middellijnen benevens hun plaats vóór de botsing gegeven zijn, de plaats te vinden, waar zij elkander ontmoeten. Laat A en B de twee lichamen zijn; veronderstel, dat zij deze plaats (fig. 7.) op 't zelfde oogenblik verlaten in de richtingen AC en BC en dat de snelheid van A tot die van B zich verhoudt als AC tot BD. Beschrijf 't parallelogram $ABHC$ en trek DH; constueer met C als middelpunt en de som van de twee stralen van de bollen tot straal een cirkelboog, die DH in L en l snijdt; trek $LN \,//\, CA$ en $NR \,//\, CL$. De middelpunten van de twee bollen zullen te gelijker tijd in N en R komen en hier zullen zij dus elkander ontmoeten. Bewijs: DN staat tot NL of CR als DB tot BH of AC, waaruit volgt $BN : AR = BD : AC$ of als de snelheid van B tot die van A. De wegen BN en AR zullen dus in denzelfden tijd doorloopen worden en de middelpunten zullen dus op 't zelfde oogenblik in de punten N en R komen; daar $NR = CL =$ de som van de twee stralen is, moeten daar de lichamen met elkander in botsing komen.

De cirkel uit C met CL als straal snijdt DH in twee punten L en l; wanneer A en B komen van de opgegeven plaatsen, dan vervalt l. Als evenwel A komt van den anderen kant van F en $CF = CA$ is, dan moet men van l gebruik maken.

Als *DH* den cirkel niet snijdt, dan heeft er geen botsing plaats, evenmin als *DH* den cirkel raakt; in dit laatste geval komen de twee bollen even met elkander in aanraking. Is dus de sinus van ∟ *CDL* grooter dan de som van de twee stralen (*DC* als eenheid nemende), dan zal er geen botsing plaats hebben.

Trek *BM* en *AQ* loodrecht op *NR*, de werking van 't eene lichaam op 't andere zal dezelfde zijn, als wanneer *A* met een snelheid *RQ* *B* met een snelheid *MN* op de lijn *NR* ontmoette. Immers: de snelheden van *A* en *B* zijn evenredig met *AR* en *BN* en kunnen dus door deze lijnen voorgesteld worden. Nu kan de kracht *AR* ontbonden worden in *AQ* en *RQ*, zoo de kracht *BN* in *BM* en *NM*. De krachten *AQ* en *BM* zijn evenwijdig en daar zij werken in de richting van de raaklijn van de twee lichamen zullen zij op de botsing geen invloed uitoefenen. Dus de twee lichamen zullen op elkander werken als of zij elkander ontmoeten in de richting *NR* met de snelheden *RQ* en *MN*.

Met behulp van deze laatste stelling brengt Mac-Laurin de niet rechtstreeksche botsing tot de rechtstreeksche.

»Les loix du choc des corps à ressort parfait ou imparfait, déduites d'une explication probable de la cause physique du ressort" is 't opschrift van de bekroonde verhandeling van père Mazière, Prêtre de l'Oratoire. Even als Mac-Laurin geeft ook hij eerst op van welke grondbeginselen hij uitgaat. Maar niet als deze tracht hij het tweede grondbeginsel: »les forces des corps ou leurs mouvements sont en raison composée de leurs masses et des vîtesses qu'ils ont dans l'instant qu'on les considère" te verdedigen. De waarheid er van staat voor hem zoo vast, dat hij durft schrijven (wij geven 't geheele toevoegsel tot dit beginsel): »c'est en vain que des Auteurs celèbres ont essayé de donner atteinte à ce principe et de lui en substituer un autre. On les a refutez avec tant de solidité, qu'il n'y a pas lieu de craindre, que desormais l'on s'avise de soutenir après eux, que les forces sont en raison composée des masses et des quarrez des vîtesses."

De »mémoire" bestaat eigenlijk uit twee deelen: 't eerste gedeelte bevat een verklaring van de »cause physique du ressort," terwijl het tweede de botsingwetten van volkomen en onvolkomen veerkrachtige lichamen bevat.

In het eerste deel begint hij met aan te toonen, dat de lichamen, die met gelijke krachten tegen elkander aan komen, terug geworpen worden door de veerkracht. Twee zulke lichamen worden niet teruggeworpen, als hunne integreerende deeltjes niet van plaats kunnen veranderen (corps parfaitement durs ou inflexibles), ook niet, wanneer zij na de verplaatsing niet in staat zijn tot hun vorigen stand terug te keeren (corps moûs). Voor de verplaatsing zijn dus twee voorwaarden noodzakelijk: »1° que leurs parties soient un peu dérangées de leur première situation dans le premier tems du choc; 2° qu'elles y soient rétablies dans le second tems du choc, plus ou moins exactement, suivant que les ressorts sont plus ou moins parfaits; c'est à dire, en d'autres termes que les corps qui se rencontrent avec des forces égales, ne rejaillissont, que parce que leurs ressorts ayant été bandez dans *le tems de la compression*, ils sont réablis dans *le tems de la restitution*, par une force inconnuë dont nous cherchons la cause physique."

Elk lichaam bestaat uit: 1° de deeltjes van 't lichaam zelf en 2° de »corpuscules du fluide qui remplit les pores de ces corps." De eerste kunnen de achterwaartsche beweging niet veroorzaken. »Car pour le produire, il seroit necessaire que d'elles-mêmes elles eussent des forces pour se rêtablir au second tems du choc, en l'état dont elles ont été dérangées pendant le premier; et par conséquent pour aller dans un sens opposé à celui vers lequel elles ont été poussées. Or il est évident que par elles mêmes, elles n'ont point de force pour aller dans un sens opposé à celui vers lequel elles ont été poussées; puisqu'elles sont dans un repos mutuel, soit dans l'instant que la compression commence, soit dans l'instant qu'elle finit; et que le repos ne produit jamais de mouvement." De lichamen bewegen zich dus achterwaarts en hebben bijgevolg slechts veerkracht door de beweging van de: »corpuscules du fluide qui coule par les canaux imperceptibles des corps les plus durs et qui en remplit tous les pores."

Voor hij de eigenschappen van deze fluide opgeeft, toont hij aan, dat ze niet de lucht is. De lucht toch is samengesteld uit: petites parties branchuës, ou de petites lames, soit spirales, soit d'une autre figure." Ook deze deelen hebben veerkracht. Hoe komen zij hier aan? Omdat ze omgeven zijn door een fluide. Zie hier hoe hij dit bewijst. »Si je presse fortement un ballon plein d'air entre mes mains, j'en fais sortir une assez grande quantité de matière; plus je le presse, plus il en sort; de sphérique qu'il étoit, il devient à peu près elliptique. L'air qui est dans le ballon se condense, son volume diminuë, les lames spirales se resserrent de plus en plus: le ressort se bande, à mesure que je presse ce ballon. Dès que je cesse de le presser, la même quantité de matière qui en étoit sortie, ou à peu près, y rentre en moins d'un clin d'oeil: l'air qui est comprimé dans le ballon se dilate, son volume augmente, les lames spirales se déployent: le ressort se débande et le ballon reprend à peu près la figure sphérique, qu'il avoit d'abord.

Il est évident que c'est la matière qui sort du ballon, et qui y rentre ensuite, qui doit être la cause physique du ressort. Or certainement la matière qui sort du ballon en assez grande quantité, n'est pas de l'air. S'il en sort, ce n'est qu'en petite quantité; et cette petite quantité, ne doit pas y rentrer. Car l'air est plus pressé dans le ballon, qu'il ne l'est hors du ballon. Donc les corpuscules de l'air grossier et même de l'air subtil, ne doivent pas y rentrer, par cette loy invariable, *que les corps vont du côté vers lequel ils sont moins pressez.* Donc ce n'est ni l'air grossier, ni l'air subtil, qui est la cause physique du ressort du ballon; et ce que je dis d'un ballon qui sert ici d'exemple sensible, je puis le dire à proportion de tous les autres corps."

De eerste eigenschap, die hij van deze fluide opgeeft, is dat zij een oneindige kracht bezit. Wanneer twee glazen ballen met elkander in botsing komen met krachten van 16 graden, dan worden zij met 15 graden teruggeworpen (volgens Newton); kwamen zij in botsing met 16000 graden en braken zij niet, dan zouden zij achteruit geworpen worden met 15000 graden kracht. Zonder de veerkracht zouden de oorspronkelijke krachten geheel vernietigd worden. »Donc la matière subtile par son action seule, fait renaître presqne toutes les forces primitives des deux boules, et il ne 's en faut tout au plus que la 16e partie. Or nous pouvons supposer que la matière subtile par la force qu'elle a reçuë de l'Auteur de la Nature, feroit renaître toutes les forces primitives des deux boules, sons les imperfections qui se trouvent dans les corps; et cela jusqu' à l'infini; c'est à dire, qu'en concevant que les forces primitives sont infinies, les forces après le choc devroient dans ce cas même, par l'efficacité de leur cause, égaler les forces primitives. Donc dans ce cas la matière subtile par son action toute seule, seroit conçuë produire une force infinie.

Or une force finie ne peut pas être conçuë produire une force infinie. Donc la matière subtile qui produit le ressort, a reçu de l'Auteur de la Nature une force infinie, ou si l'on veut, une force qu'il est permis en Physique de supposer infinie."

Met even krachtige argumenten toont hij de tweede eigenschap. »la matière subtile est un fluide parfait." Uit deze twee leidt hij zeven andere af, met welke hij hetgeen bij de botsing plaats grijpt, tracht te verklaren. Nadat hij aangetoond heeft: »la matière subtile n'est composé que d'une infinité de tourbillons, les tourbillons grands et petits se contrebalancent par leurs forces centrifuges" en deze krachten omgekeerd evenredig zijn met de middellijnen van de tourbillons, komt hij tot de stelling: »la matière subtile est la cause physique du ressort par la force centrifuge de ses petits tourbillons." Hierbij gaat hij na, wat er gebeurt, wanneer twee lichamen met gelijke, maar tegengestelde krachten elkander rechtstreeks treffen. Ziehier hoe hij de verschijnselen, die daarbij plaats grijpen, met behulp van 't voorafgaande verklaart.

»Les corps ne se communiquent par leurs mouvements dans un instant indivisible; maïs successivement dans un tems très-court; et ils employent leurs forces primitives à se comprimer mutuellement. La matière subtile qui par sa nature, ne résiste point au mouvement, doit abandonner en partie les pores comprimez. Le mouvement se communique des premiers pores aux seconds, et de là successivement aux autres: et à mesure que le mouvement se communique, la matière subtile continue de sortir du côté vers lequel elle est poussée. Ainsi les pores s'aplatissent, et prennent des figures à peu près elliptiques; et continuënt de s'aplatir jusqu'à l'instant précis que les corps aijent épuisé toutes leurs forces primitives par ces compressions mutuelles.

Il est donc clair que la matière subtile doit sortir des corps pendant le tems que dure la compression. Mais il n'est pas moins évident qu'elle doit commencer à y rentrer dans l'instant que la compression cesse; car dès l'instant que la compression cesse, il doit y avoir un parfait équilibre entre tous les tourbillons extérieurs et intérieurs, parce que ceux-ci cessent dans cet instant de sortir et de repousser ceux-là; de sorte qu'un tourbillon à moitié sorti d'un pore, doit rester dans cet état, jusqu'à ce qu'il survienne quelque changement qui l'oblige de sortir ou de rentrer.

D'ailleurs il est évident que dans ce même instant les forces centri fuges des tourbillons extérieurs, sont égales à celles qu'il avoient avant le choc des deux corps; mais dans ce même instant les forces centrifuges des tourbillons intérieurs sont augmentées, parce que leurs diamètres sont diminuez. Avant le choc les tourbillons interieures tendoient par leurs forces centrifuges à élargir les pores où ils circuloient; mais inutilement, parce que les tourbillons extérieurs avoient des forces centrifuges qui suffisoient alors pour empêcher l'action des tourbillons intérieurs.

A la fin de la compression les tourbillons intérieurs ont acquis des degrez de force centrifuge, et les tourbillons extérieurs n'en ont point acquis. Ainsi dans l'instant que nous considerons, les tourbillons extérieurs n'ont pas des forces centrifuges qui soient capables d'arrêter l'action par laquelle les tourbillons intérieurs tendent à élargir leurs pores. Il n'y a donc point de doute qu'ils ne doivent commencer à les élargir; mais ils ne peuvent commencer à les élargir, que les tourbillons extérieurs ne rentrent; et ils doivent continuer de rentrer à mesure que les pores s'élargissent. Ainsi toute la matière qui étoit sortie des corps, y rentre successivement à mesure que les parties comprimées se rétablissent, de la même manière qu'elles ont été comprimées, mais dans un ordre renversé.

C'est ainsi qui les ressorts parfaits se débandent avec des vîtesses égales à celles avec lesquelles ils ont été bandez, par la force infinie des petits tourbillons; et il est clair que les ressorts en se débandant avec des forces égales à celles par lesquelles ils ont été bandez, doivent repousser les corps en arrière avec des forces égales à leurs forces primitives." ......

Met behulp van deze theorie over de »cause physique du ressort," komt Mazière in het tweede gedeelte tot de wetten van botsing van de volkomen en onvolkomen veerkrachtige lichamen. Na eenige veronderstellingen op den voorgrond en eenige stellingen bewezen te hebben, gaat hij over tot het oplossen van zes vraagstukken. Een enkele hiervan willen we nader bespreken om na te gaan, op welke wijze Mazière dit gedeelte van zijn onderwerp behandelt.

Volgens hem hebben de twee lichamen, die in botsing komen, op 't oogenblik, dat de samendrukking ophoudt, een gelijke snelheid; als de beweging tegengesteld is, hebben beide op dat oogenblik een gelijke hoeveelheid van hun oorspronkelijke krachten verloren en wanneer de beweging naar denzelfden kant gericht is, heeft het eene lichaam, »le choquant", zooveel kracht verloren, als 't andere »le choqué" heeft gewonnen.

Noem de massa's van de lichamen A en B; hun snelheden vóór de botsing a en b, na de botsing a' en b', terwijl r de veerkrachtige verhouding is; deze is de betrekking tusschen de kracht van een lichaam na de botsing en zijn oorspronkelijke kracht.

Deze veerkrachtige verhouding is in lichamen van dezelfde natuur constant. »On sera convaincu de la verité de ce principe, qui est conforme à l'expérience, si l'on fait attention à la force infinie des petits tourbillons qui sont la cause du ressort, et aux loix qui proportionnent les effets à leurs causes."

Het vraagstuk, waarover we boven spraken, luidt: »wanneer van de twee lichamen de massa's en de snelheden vóór de botsing en hun veerkrachtige verhouding gegeven zijn, hunne bewegingen na de botsing te vinden."

EERSTE GEVAL.

Wij veronderstellen, dat de bewegingen naar denzelfden kant gericht zijn. Het lichaam A, dat meer snelheid heeft dan B, zal een gedeelte er van verliezen in 't eerste deel van de botsing en een ander gedeelte in 't tweede deel. Is nu k 't eerste verlies van snelheid, de eerst verloren kracht zal dan zijn Ak en de tweede rAk; de kracht vóór de botsing is Aa en er na Aa'. Men heeft dus deze vergelijking.

$$Aa' = Aa - Ak - rAk = Aa - A(r + 1)\,k.$$

De kracht, die A verliest, wint B; men heeft dus ook

$$Bb' = Bb + A\,(r + 1)\,k.$$

Op 't oogenblik, dat de samendrukking ophoudt, is de kracht van $B = Bb + Ak$, dus zijn snelheid $= \dfrac{Bb + Ak}{B}$ terwijl de snelheid van A dan $a - k$ bedraagt. Op dit oogenblik zijn beide snelheden gelijk; men heeft dus: $\dfrac{Bb + Ak}{B} = a - k$ of $k = B \times \dfrac{a - b}{A + B.}$

Plaatst men deze waarde van k in de beide voorafgaande vergelijkingen, dat verkrijgt men twee vergelijkingen, die als oplossing kunnen dienen van 't eerste geval :

$$Aa' = Aa - AB \times \frac{(r+1)\ (a-b)}{A+B} \text{ en}$$

$$Bb' = Bb + AB \times \frac{(r+1)\ (a-b)}{A+B.}$$

TWEEDE GEVAL.

Veronderstel, dat de bewegingen tegengesteld zijn.

Even als in 't vorige geval zal de oorspronkelijke kracht van A eerst met rAk en vervolgens met Ak verminderen; men heeft dus als boven :

$$Aa' = Aa - A\ (r+1)\ k.$$

Daar de beweging van B tegengesteld is aan die van A, heeft men deze tweede vergelijking :

$$Bb' = -Bb + A\,(r+1)\,k.$$

Op 't oogenblik, dat de samendrukking ophoudt, is de kracht van $B = -Bb + Ak$, zijn snelheid dus $= \frac{-Bb + Ak}{B}$; de snelheid van A bedraagt dan $a - k$; hieruit volgt :

$$k = B \times \frac{a+b}{A+B}.$$

Deze waarde van k substitueerende in de beide voorafgaande vergelijkingen verkrijgt men :

$$Aa' = Aa - AB \times \frac{(r+1)\ (a+b)}{A+B} \text{ en}$$

$$Bb' = -Bb + AB \times \frac{(r+1)\ (a+b)}{A+B}.$$

Deze vergelijkingen had men uit die van 't voorafgaande geval kunnen afleiden door daar b te veranderen in $-b$.

GEVOLGEN.

I. Als men de eerste eind-formules van beide gevallen door A en de beide andere door B deelt, verkrijgt men uitdrukkingen voor de snelheden van A en B; men krijgt dan :

$$a' = a - B \times \frac{(r+1)\ (a \mp b)}{A+B} \text{ en}$$

$$b' = \pm b + A \times \frac{(r+1)\ (a \mp b.}{A+B}$$

Hieruit blijkt, dat de snelheden van de lichamen na de botsing uit twee deelen bestaan.

't Eerste deel is bij A de oorspronkelijke snelheid a, die altijd positief is, en bij B de oorspronkelijke snelheid b, die positief is, wanneer de snelheden gelijke en negatief, wanneer ze ongelijke richtingen hebben.

Het tweede gedeelte is de totale snelheid, die 't lichaam wint of verliest »par le bandement et le débandement des ressorts dans les deux tems du choc." Die van A (le choquant) is altijd negatief, die van B (le choqué) altijd positief.

II. Men kan de vier formules herleiden tot deze:

$$\frac{A+B}{(r+1)\ (a \mp b)} = \frac{B}{a - a'} = \frac{A}{b' \mp b'}$$

m. a. w. de som van de beide massa's staat tot 't product van het verschil der snelheden en de met de eenheid vermeerderde veerkrachtige verhouding als de massa van het eene lichaam staat tot de snelheid, die 't andere lichaam wint of verliest in de twee perioden van de botsing.

III. Wanneer de lichamen volkomen veerkrachtig zijn, dan is $r = 1$, dan heeft men in 't eerste geval:

$$a' = a - 2B \times \frac{a - b}{A+B} \text{ en } b' = b + 2A \times \frac{a - b}{A+B}$$

waaruit volgt:

$$a' = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B} \text{ en } b' = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A+B}.$$

»Ces formules expriment" zegt Mazière, »d'une manière generale les loix du choc des corps à ressort parfait, lesquelles sont démontrées par de longs circuits dans plusieurs ouvrages."

IV. Bezitten de lichamen geen veerkracht, hetzij ze volkomen hard, of volkomen week zijn, dan is $r = o$ en men heeft dan

$$a' = a - B \times \frac{a - b}{A+B} \text{ en } b' = b + A \times \frac{a - b}{A+B}.$$

Hieruit volgt: $a' = b' = \dfrac{Aa + Bb}{A+B}$.

V. Wanneer de veerkrachtige verhouding gelijk is aan de verhouding van de beide massa's, dus $r = \frac{A}{B}$ of $r + 1 = \frac{A + B}{B}$, dan krijgt men:

$$a' = b \text{ en } b' = \frac{Bb + Aa - Ab}{B}.$$

Hieruit volgt, dat 't lichaam A, dat verondersteld wordt 't kleinste te zijn, in dit geval na de botsing de snelheid van B gekregen heeft.

VI. Zijn A en B gelijk, dan vindt men:

$$a' = \frac{(1 - r)\,a + (1 + r)\,b}{2} \quad \text{en } b' = \frac{(1 - r)\,b + (1 + r)\,a}{2}$$

Zijn nu de lichamen volkomen veerkrachtig of is de verhouding tusschen de massa gelijk de veerkrachtige verhouding (in beide gevallen is $r = 1$) dan heeft men $a' = b$ en $b' = a$.

De lichamen hebben dus hun snelheid omgewisseld.

VII. Is B vóór de botsing in rust, dan krijgt men:

$$a' = \frac{Aa - rBa}{A + B} \text{ en } b' = \frac{(r + 1)\,Aa}{A + B}.$$

Zijn de lichamen volkomen veerkrachtig, dan is nu:

$$a' = \frac{Aa - Ba}{A + B} \text{ en } b' = \frac{2\,Aa}{A + B}.$$

Zijn ze zonder veerkracht, dan is

$$a' = b' = \frac{Aa}{A + B}.$$

Is de verhouding tusschen de massa's gelijk aan de veerkrachtige verhouding, dan is: $a' = o$ en $b' = \frac{Aa}{B}$.

In dat geval zal dus het botsende lichaam na de botsing in rust zijn, terwijl 't andere er de geheele beweging van over neemt.

VIII. Stelt men in 't geval van VII $a = A + B$, men verkrijgt dan o. a.:

$$b' = (r + 1)\,A \text{ of } r + 1 = \frac{b'}{A}.$$

Met behulp van proeven kan men deze laatste verhouding bepalen en hierdoor r vinden.

IX. Wanneer B in rust is en oneindig groot ten opzichte van A, dan mag men $A = o$ stellen. In dit geval volgt uit het eerste gevolg $a' = - ra$.

Hieruit blijkt, dat A terug geworpen zal worden met een snelheid gelijk aan zijn oorspronkelijke snelheid vermenigvuldigd met de veerkrachtige verhouding, bij gevolg met een snelheid minder dan de oorspronkelijke, wanneer de lichamen onvolkomen veerkrachtig zijn en gelijk, wanneer ze volkomen veerkrachtig zijn.

Nog 6 andere vraagstukken behandelt Mazière op soortgelijke wijze als 't bovenstaande. Men kan al de uitkomsten van deze beschouwen als gevolgen van het hierboven behandelde.

De bekroonde verhandeling van Mazière wordt gevolgd door het stuk van Johannes Bernoulli: »discours sur les loix de la communication du mouvement," welk stuk hij in 1724 inzond als antwoord op de prijsvraag: »quelles sont les loix suivant lesquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre de même nature, soit en repos, soit en mouvement, qu'il rencontre, soit dans le vuide, soit dans le plein." Vóór hij er toe overgaat deze vraag te beantwoorden geeft hij op, wat hij verstaat onder »corps parfaitement durs". Hij doet dit, omdat de philosophen verschillende denkbeelden over de hardheid der lichamen hebben en de Academie niet opgegeven heeft, in welken zin zij deze uitdrukking opgevat wil hebben. Volgens de gewone beteekenis is een lichaam volmaakt hard, wanneer zijn deeltjes door geen kracht, hoe groot men deze ook neemt, van elkander gescheiden kunnen worden. Hardheid zou dan hetzelfde zijn als: »inflexibilité absolue."

Deze beteekenis evenwel mag men niet aan dat woord geven. »Dureté prise dans le sens vulgaire, est absolument impossible." Immers: wanneer twee lichamen van zoodanige natuur, die volkomen gelijk zijn, elkander rechtstreeks met gelijke snelheden ontmoeten, dan moeten zij, nadat zij tegen elkander gekomen zijn, òf plotseling in rust blijven òf dadelijk teruggeworpen worden. Dit kan niet, omdat men in het eerste geval in eens een overgang van beweging tot rust zou hebben en in het tweede geval de positieve snelheid zonder overgang tot rust in een negatieve veranderd zou worden. De aanname van een plotselingen stilstand of een plotselinge verandering van de richting van de snelheid is in strijd met de algemeen erkende en overal waar te nemen wet van continuïteit »en vertu de la quelle tout, ce qui s'exécute, s'exécute par des degrez infiniment petits."

Om deze reden geeft Bernoulli aan de volmaakte hardheid een andere beteekenis en wel een zoodanige, welke volgens hem 't meest overeenkomt met de natuur der lichamen.

Hij gebruikt »dureté parfaite" in den zin van »roideur infinie." Elk lichaam, dat door de botsing met een ander lichaam ingedrukt wordt en daarna zijn oorspronkelijke figuur terug krijgt, noemt hij een »corps roide ou élastique;" hoe grooter deze »roideur" of elasticiteit is, des te minder zal 't lichaam ingedrukt worden; bij gevolg zal dus elk veerkrachtig lichaam des te meer tot de natuur van de volmaakt harde naderen, hoe grooter zijn elasticiteit is; »en sorte qu'il n'y avoit plus qu' à supposer une roideur infinie ou immense, pour avoir des corps parfaitement durs, ou infiniment peu flexibles."

Toen de commissie ter beoordeeling van de op de prijsvraag ingekomen antwoorden rapport uitbracht, maakte zij van de verhandeling: »in magnis voluisse sat est" (onder dit motto had Bernoulli zijn antwoord ingezonden) met veel lof melding, maar voegde er aan toe, dat het niet bekroond kon worden, omdat het volgens haar geen antwoord was op de gestelde vraag. »On avoit demandé les loix du choc des corps parfaitement durs, sans s'embarraser si ces corps existent." 't Kon als antwoord dienen op de vraag: »quelles sont les loix du choc des corps à ressort "

Deze vraag werd' 2 jaren later ter beantwoording gesteld. Van daar, dat Bernoulli zijn eerst ingezonden stuk onveranderd weer inzond, maar er afzonderlijk aan toevoegde: »une explication probable de la cause physique du ressort," omdat ook dit gevraagd werd.

Wanneer men Bernoulli's verhandeling met het supplement, die beide getuigenis geven van de genialiteit van den schrijver, vergelijkt met het onbeduidende stuk van Mazière, is men er over verbaasd, dat het laatste de bekrooning waardig werd gekeurd, maar misschien nog meer, dat de Fransche Academie van wetenschappen den moed gehad heeft om met 't stuk van Mazière dat van Bernoulli uit te geven. Boven zagen wij, waardoor zij tot dezen stap gedwongen werd.

Hoe heftig Bernoulli de meening van Descartes over de maat der krachten bestreed, een trouw aanhanger was hij van zijn theorie der tourbillons. Niet alleen blijkt dit uit zijn bekroond stuk als antwoord op de prijsvraag door de Fransche Academie van wetenschappen in 1730 uitgeschreven over den elliptischen vorm van de banen der planeten en de verplaatsing van haar groote assen — in welk stuk hij de reeds door Newton veroordeelde theorie der tourbillons op den voorgrond plaatst — ook uit zijn verklaring van de physische oorzaak der veerkracht.

Volgens hem hangt deze oorzaak nauw samen met de beweging van de »matière subtile." Hierdoor krijgen de deeltjes van een lichaam, die in deze matière aanwezig zijn (»qui nagent dedans"), een cirkelvormige beweging, waardoor een centrifugaalkracht ontstaat, die maakt dat de deeltjes de ruimte, die het lichaam inneemt, trachten te vergrooten. Van dit streven hangt de grootte van de veerkracht af. Zie hier, hoe hij dit nader expliceert.

Denken wij ons een zekere ruimte b. v. een recipiënt van den een of anderen vorm gevuld met ether (matière subtile); de deeltjes hiervan zijn zoo dun, dat ze gemakkelijk door de poriën van den recipiënt kunnen gaan; laat deze ruimte nog bevatten een zeker aantal lichaamdeeltjes (corpuscules), die te dik zijn om door de poriën heen te dringen en door een zoodanige tusschenruimte van elkander gescheiden zijn, dat, wanneer men ze allen bij elkander voegde, zij nog niet het honderdduizendste gedeelte van den recipiënt innemen. Deze deeltjes zijn allen uiterst vatbaar voor beweging, maar niet alle in dezelfde mate, daar zij niet allen gelijken vorm hebben.

Daar de etherdeeltjes in aanhoudende beweging zijn en met groote snelheid den recipiënt doorkruisen, kan het niet anders of de lichaamdeeltjes zullen in een »agitation extrêmement confuse" komen en dikwijls bij de onregelmatigheid hunner beweging tegen elkander aanbotsen. Hierdoor zullen zij »agitez ainsi en tous sens, s'embarrassans les uns les autres par des mouvements rectilignes opposez" na eenigen tijd zich zoo bewegen, dat zij 't minst de beweging van andere deeltjes hinderen; de oorspronkelijke rechtlijnige beweging zal in een cirkelvormige veranderen. Elk lichaamdeeltje (Bernoulli noemt ze in 't vervolg: »mobile circulant") zal een cirkel beschrijven, grooter of kleiner naar mate zij meer of minder snelheid heeft, want niet elk deeltje ontvangt van de ether dezelfde snelheid.

Onder deze ronddraaiende deeltjes zullen er verscheidene zijn, die gelijke cirkels om een zelfde middelpunt, groote cirkels op een zelfde boloppervlak beschrijven; de hoeveelheid van deze zal zoo groot kunnen zijn, dat 't geheele boloppervlak als bedekt zal zijn met deze deeltjes. Er zullen zich een groot aantal van deze boloppervlakken vormen, waarvan ieder zich om zijn bijzonder middelpunt bewegen zal.

Gaat men na de onderlinge plaatsing van deze vlakken, de werking, die zij op elkander uitoefenen, zoo ook die op den binnenwand van den recipiënt, die verhindert dat zij zich uitbreiden, dan vindt men: 1° dat elk gedeelte van den recipiënt een gelijk aantal boloppervlakken van een zekere orde bevat, 2° dat, in de veronderstelling dat de grootste bollen gelijkelijk verdeeld zijn in de ruimte van den recipiënt, de op de grootste volgende de tusschenruimten innemen, die de grootste gevormd hebben, die van de derde orde op gelijke wijze de tusschenruimten van die van de tweede orde beslaan en zoo vervolgens tot in 't oneindige, zoo dat elk boloppervlak omringd zal zijn van alle kanten door een oneindig aantal kleinere oppervlakken van alle mogelijke orden, 3° dat elk boloppervlak door de middelpuntvliedende kracht afkomstig van de beweging, die de deeltjes bezitten, een grootere ruimte tracht in te nemen en 4° dat deze uitzetting verhinderd wordt door de nabij zijnde boloppervlakken, die gelijke pogingen in 't werk stellen om zich uit te breiden.

De deeltjes, die op de boloppervlakken zich bewegen, zullen snelheden hebben, waarvan de vierkanten evenredig zijn met de stralen; daardoor zijn de middelpuntvliedende krachten gelijk en zullen de bollen, die tegen elkaar gelegen zijn, hoewel ongelijk in grootte, elkander in evenwicht houden. Alleen 't gedeelte van de bollen, dat tegen den wand van den recipiënt gelegen is, zal tegen dien wand drukken, »il est manifeste que toute sa surface intérieure devant soutenir l'effort des sphères qui la touchent, sera continuellement pressée du dedans au dehors dans tous ses points par des directions perpendiculaires."

Elk lichaam kan beschouwd worden als een verzameling van kleine recipiënten; elk lichaam bevat dus boloppervlakken met eigenschappen, die wij boven opgaven. Wordt nu een lichaam samengedrukt, dan kan het niet anders of deze bollen zullen kleiner worden, waardoor de ronddraaiende deeltjes genoodzaakt worden kleinere cirkels te beschrijven, terwijl zij hun zelfde snelheid behouden. Hij heeft toch vroeger aangetoond: »la matière subtile, qui imprime la vîtesse aux corpuscules, continue toujours d'être agitée de même, quelque puisse être la compression des pores et des cellules." Ieder van de ronddraaiende deeltjes zal daardoor verkrijgen een grootere middelpuntvliedende kracht, naar mate de straal van het oppervlak, waarop het zich beweegt, kleiner wordt. De bolloppervlakken zullen daardoor meer streven zich uit te breiden, dan voor de samendrukking. »Or c'est précisement dans cet effort, exercé continuellement contre les parois des cellules, et qui tend à les élargir, que consiste la vertu des corps à ressort."

Vergelijkt men deze theorie met die door Mazière gegeven, neemt men verder in aanmerking, dat Bernoulli andere theoriën over de oorzaak van de veerkracht aan een critiek onderwerpt en aantoont, waarom hij zich met geen van deze vereenigen kan, eindelijk, dat hij door zijn theorie verschillende verschijnselen in de natuur, voornamelijk betrekking hebbende op de warmte, tracht te verklaren, dan kan men niet anders besluiten dan dat Bernoulli het gedeelte van de prijsvraag, waarbij een verklaring van de physische oorzaak van de veerkracht gevraagd werd, veel degelijker behandeld heeft dan Mazière, die ook als hij met de aanname van tourbillons zijn theorie opstelde.

Tot dezelfde slotsom komt men, wanneer men met elkander vergelijkt hetgeen beiden gemaakt hebben van het tweede gedeelte der prijsvraag: »les loix du choc des corps élastiques."

Nadat Bernoulli in 't eerste hoofdstuk opgegeven heeft, wat hij onder volkomen harde, volkomen en onvolkomen veerkrachtige lichamen verstaat en voor zijn bewering de gronden opgesomd heeft, toont hij in 't tweede hoofdstuk aan, dat een hard lichaam, wanneer het rechtstreeks stoot tegen het einde van een volkomen veerkrachtige veer, die aan 't andere einde vast is, volgens tegenovergestelde richting en met dezelfde snelheid teruggeworpen zal worden. Vervolgens gaat hij naar aanleiding van 't voorafgaande de beweging van een bol na, die met een zekere snelheid komt tegen een diaphragma, dat een gedeelte van de lucht in een holle buis, die aan den tegenovergestelden kant van waar de bol komt gesloten is, afsluit. Hij maakt hierbij onderscheid tusschen een kleine en een groote beweging van 't diaphragma, omdat men in 't eerste geval de veerkracht van de lucht gedurende de beweging als constant, in 't tweede geval als niet constant moet beschouwen. Zijn beschouwingen en berekeningen, die hierop betrekking hebben, zijn zoo helder en scherp, dat zijn methode heden in dezen nog gevolgd zou kunnen worden.

In het volgende hoofdstuk beschouwt hij twee lichamen verbonden door een veer, hij gaat na welke beweging deze lichamen krijgen als de veer zich ontspant en door de beweging van de lichamen weer gespannen wordt. In de plaats van deze door een veer verbonden lichamen, stelt hij vervolgens twee volkomen veerkrachtige; hij toont aan dat hetgeen geldt voor de eerst beschouwde lichamen ook op deze toepasselijk is; hierdoor komt hij geleidelijk tot hetgeen plaats heeft, wanneer twee volkomen veerkrachtige lichamen rechtstreeks in botsing komen, terwijl zij naar elkander gaan met snelheden omgekeerd evenredig aan hunne massa's. Zijn slotsom is: 1° na de botsing zal elk lichaam zich in tegengestelden zin bewegen met zijn eerste snelheid en bij gevolg ook met zijn eerste hoeveelheid van beweging en 2° hun gemeenschappelijk zwaartepunt zal door de botsing niet van plaats veranderd zijn.

Nadat hij opgemerkt heeft, dat de wetten van botsing onafhankelijk zijn van een gemeenschappelijke beweging van het stelsel botsende lichamen, geeft hij in het vierde hoofdstuk de oplossing van een algemeen vraagstuk — algemeen, omdat het alle bijzondere gevallen insluit. Dit vraagstuk luidt: »wanneer twee volkomen veerkrachtige lichamen A en B 't eerste met een snelheid a, het tweede met een kleinere snelheid b zich bewegen naar den zelfden kant op dezelfde rechte lijn, welke zullen dan de snelheden van die lichamen na de botsing zijn?" Bij de oplossing onderstelt hij, dat het vlak, waarop de lichamen zich bevinden, een zoodanige beweging heeft dat het gemeenschappelijk zwaartepunt van A en B in rust is. De snelheid van dit punt zal zijn »par le principe de la Mécanique" gelijk $\frac{aA+bB}{A+B}$; de absolute snelheid van A zal dus zijn $a - \frac{aA+Bb}{A+B} = \frac{aB-bB}{A+B}$ vooruit en die van $B = \frac{aA+bB}{A+B} - b = \frac{aA-bA}{A+B}$ achteruit; deze twee snelheden verhouden zich dus als B tot A; m. a. w. de snelheden, waarmede de lichamen elkander rechtstreeks ontmoeten, terwijl zij naar elkander gaan, zijn omgekeerd evenredig met de massa's. Volgens het gevondene in het derde hoofdstuk zal elk lichaam na de botsing met zijn eigen snelheid in tegenovergestelde richting zich bewegen. A zal dus achteruitgaan met de snelheid $\frac{aB - bB}{A + B}$ en B vooruit met een snelheid $\frac{aA - bA}{A + B}$. Brengen wij nu 't vlak terug in zijn eersten toestand, geven we dus aan elk lichaam een snelheid $\frac{aA + bB}{A + B}$ naar voren, dan zal de snelheid van A na de botsing gelijk zijn aan

$$\frac{aA + bB}{A + B} - \frac{aB + bB}{A + B} = \frac{aA - aB + 2Bb}{A + B} \text{ vooruit}$$

en die van B gelijk zijn aan

$$\frac{aA + bB}{A + B} + \frac{aA - bA}{A + B} = \frac{2aA - bA + bB}{A + B} \text{ ook vooruit.}$$

Hieruit leidt hij enkele bijzondere gevallen af. Terwijl Mazière alle bijzondere gevallen, zelfs de eenvoudigste, berekent, is Bernoulli van een geheel andere meening »Notre méthode," zegt hij, »nous ayant conduit immédiatement à la règle générale, ce seroit perdre son tems que de l'appliquer à tous les cas particuliers, que les Auteurs ont été obligez de résoudre pour y pouvor parvenir, et d'autant plus que le moindre Géomètre est en état de le faire; il n'y a qu'à substituer dans nos formules générales, les valeurs selon les conditions du cas qu'on s'est proposé, je me contenterai d'en donner quelques exemples"

Vervolgens bewijst hij: 1° dat het verschil in snelheid van de beide lichamen, hetzij zij zich bewegen in gelijke of in tegengestelde richting door de botsing niet verandert; 2° dat de beweging van 't gemeenschappelijk zwaartepunt noch wat richting, noch wat snelheid betreft, gewijzigd wordt; 3° dat de hoeveelheid van beweging niet altijd even groot blijft, dat dit wel geschiedt, als de lichamen zich vóór en na de botsing naar denzelfden kant bewegen en ook wanneer het gemeenschappelijk zwaartepunt in rust is; 4° dat de hoeveelheid van richting (quantité de direction), dat is 't product van de snelheid van 't gemeenschappelijk zwaartepunt met de som van de massa's, altijd constant blijft.

Aan het slot van dit hoofdstuk wijst hij er op, dat men uit het voorafgaande met behulp van de ontbinding van beweging de botsingwetten, wanneer de lichamen niet rechtstreeks in botsing komen kan afleiden.

Met hoofdstuk *V* vangt een belangrijk gedeelte van zijn verhandeling aan. In dit en in de vier volgende bespreekt hij toch 't beginsel van de levendige krachten.

»La *force vive* est celle qui réside dans un corps lorsqu'il est dans un mouvement uniforme; et la *force morte* celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité et pressé de se mouvoir ou à se mouvoir plus ou moins vîte, lorsque ce corps est déjà en mouvement." En verder: »chaque instant la pesanteur imprime aux corps sur qui elle agit, un degré de vîtesse infinement petit, lequel est aussitôt absorbé par la résistance de l'obstacle. Ces petits degrez de vîtesse perissent en naissant, et renaissent en périssant et c'est dans cette réciprocation constante, dans ce retour de production et de destruction, en quoi consiste l'effort de la pesanteur quand elle est retenuë par un obstacle invincible à qui nous avons donné le nom de force morte....

»La force morte a cela de particulier, qu'elle ne produit aucun effet qui dure plus long-temps qu'elle: dès que cette force cesse, tout cesse avec elle; et son effet ne survit jamais à son action." Geheel anders is het met de levendige kracht gesteld: »Sa nature est toute differente, elle ne peut ni naître, ni périr en un instant comme la force morte, il faut plus ou moins de tems pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas, il faut aussi du tems pour la détruire dans un corps qui en a; la force vive se produit successivement dans un corps, lorsque ce corps étant en repos, une pression quelconque appliquée à ce corps, lui imprime peu-à-peu, et par degrez, un mouvement local. On suppose qu'aucun obstacle ne l'empêche de se mouvoir. Ce mouvement s'acquiert par des degrez infiniment petits, et monte à une vîtesse finie et déterminée, qui demeure uniforme dès que la cause qui a mis ce corps en mouvement cesse d'agir sur lui; ainsi la force vive produite dans un corps en un tems fini par une pression, qu' aucun obstacle n'a retenuë, est quelque chose de réel, elle est équivalente à cette partie de la cause qui s'est consumée en la produisant puisque toute cause éfficiente doit être égale à son effet pleinement exécuté." Eindelijk: »la force morte que recoit un obstacle immobile par l'effort d'un ressort qui cherche à se débander, ne diminuë en rien la force du ressort, bien loin de l'épuiser..... La production du moindre degré de la force vive demande la perte ou la destruction d'un degré égal de la force du ressort: l'un est la cause et l'autre l'effet immediat qui en resulte; or la cause ne sauroit périr en tout ou en partie, qu'elle ne se retrouve dans l'effet à la production du quel elle a été employée." Hij maakt hierbij de bemerking, dat men niet altijd 't verschil tusschen doode en levendige kracht in 't oog gehouden heeft; van daar de algemeene dwaling om als maat van de krachten 't product van massa en snelheid te nemen. Leibnitz was de eerste, die op 't verkeerde hiervan gewezen heeft. Volgens dezen stijgt een lichaam met een dubbele snelheid vier maal zoo hoog, met een drievoudige snelheid negen maal zoo hoog enz. als met de eenheid van snelheid, is dus de maat van de levendige kracht 't product van massa en vierkant van de snelheid. Wel beweren zijn tegenstanders, dat deze conclusie niet de juiste is, omdat Leibnitz geen rekening houdt met den tijd, maar: »les adversaires de M. de Leibnitz ne réfléchissoient pas que la considération du tems n'étoit d'aucune conséquence dans le sujet de leur dispute; puisqu'il étoit facile de faire monter le corps pesant à differentes hauteurs en des tems égaux; on n'a pour cela qu' à se servir d'une cycloïde renversée, dont on sait que tous les arcs, à commencer depuis le point le plus bas sont Isochrones, ou parcourus en des tems égaux."

In de vier volgende hoofdstukken (6 — 9) toont hij op vijf verschillende wijzen aan, dat de maat van de levendige krachten niet in de enkele snelheid, maar in 't vierkant er van gelegen is. Wij willen van één bewijs een overzicht geven, niet omdat wij het voor het beste houden, maar omdat het volgens Bernoulli 't best in staat is den meest verstokten tegenstander van zijn ongelijk te overtuigen.

Hij toont aan, dat een lichaam, wanneer het juist zooveel snelheid heeft, dat het in staat is een veer, waartegen het loodrecht stoot, in te drukken, niet twee maar vier veeren zal kunnen indrukken, als de snelheid tweemaal zoo groot is. Hij bewijst dit aldus: een lichaam C (fig. 8) komt schuins tegen een veer, geplaatst in L, met een snelheid $CL = 2$ onder een hoek $= CLP = 30^0$; $CP \perp PL$ zal dan $= 1/_2\ CL = 1$ zijn; 't lichaam zal de loodrechte beweging CP aan de veer afstaan en zelf met een snelheid $= \sqrt{3}$ in de richting LM zich voortbewegen. In M stoot het tegen een tweede veer gelijk aan de eerste. Deze is zoo geplaatst, dat de loodrechte beweging $LQ = 1$

weer verloren gaat en het met een snelheid $= \sqrt{2}$ in de richting *MN* zijn weg voortzet. In *N* bevindt zich een derde veer gelijk aan de beide voorafgaande en wel zoo, dat het lichaam nu de loodrechte snelheid $MR = 1$ verliest en met een snelheid gelijk 1 den weg *NO* aflegt. 't Lichaam *C* behoudt dus 1 graad van snelheid volgens die richting, nadat het aan drie veeren in *L*, *M* en *N* telkens 1 graad van snelheid gegeven heeft; komt het in *O* rechtstreeks tegen een vierde veer gelijk aan de drie voorafgaande, dan staat het aan deze zijn overgeblevene snelheid af. Men heeft dus: met een tweevoudige snelheid bezit *C* een viervoudige kracht, omdat het in staat is met een snelheid gelijk 2 vier veeren in te drukken, terwijl het met een snelheid gelijk 1 slechts één van deze dat kan doen. —

Een zeer belangrijk hoofdstuk is zeker wel het tiende. Hierin wijst hij op het beginsel: het behoud van de levendige krachten »Ce seroit obscurcir cette loi que d'entreprendre de la démontrer.... Il est clair que la force vive d'un corps diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps; la force vive de cet autre corps doit en échange augmenter ou dimiuer de la même quantité; l'augmentation de l'une étant l'effet immédiat de la diminuation de l'autre, ce qui emporte necessairement la conservation de la quantité totale des forces vives." Toch acht hij 't noodig er een bewijs van te geven juist om zijn tegenstanders van hun ongelijk te overtuigen.

Uit de twee beginselen: het behoud van 't verschil in snelheid vóór en na de botsing en dat van de hoeveelheid van richting volgt het te bewijzen beginsel dadelijk. Laat de massa van de twee lichamen, die met elkander in botsing komen èn vóór èn na de schok denzelfden kant uitgaan, *A* en *B* zijn, hun snelheid vóór de botsing *a* en *b* en er na *x* en *y*. Men heeft dan: $a - b = y - x$ en $Aa + Bb = Ax + By$ of $a + x = y + b$ en $Aa - Ax = By - Bb$. Door vermenigvuldiging verkrijgt men $Aa^2 - Ax^2 = By^2 - Bb^2$ of $Aa^2 + Bb^2 = Ax^2 + By^2$ een formule, die juist uitdrukt hetgeen men bewijzen wil.

Van dit laatste beginsel maakt Bernoulli een trouw gebruik, wanneer hij nagaat de botsing van drie lichamen volgens verschillende richtingen (hoofdstuk 11) en die van een lichaam tegen verscheidene andere (hoofdstuk 12) en eindelijk, wanneer hij bespreekt den weerstand, dien een lichaam, dat in de een of andere middenstof in beweging is, ondervindt en het verlies in snelheid, dat daardoor ontstaat, berekent (hoofdstuk 13). In 't laatste hoofdstuk geeft hij een nieuwe wijze op om met behulp van de theorie der levendige krachten het schommelingspunt van een samengestelden slinger te bepalen

Bernoulli's werk werd door het hoogst wetenschappelijke lichaam van zijn tijd beneden 't oppervlakkige stuk van Mazière gesteld!

Onder de Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres de Berlin van 't jaar 1746 komt een stuk voor van Maupertuis getiteld: »les loix du Mouvement et du Repos deduites d'un principe Métaphysique." Hierin bespreekt hij de botsing van volkomen veerkrachtige en van volkomen onveerkrachtige lichamen. De wetten van botsing van zulke lichamen vindt hij met behulp van het volgende algemeene beginsel, hetwelk hij aldus formuleerde: gebeurt er eenige verandering in de natuur dan is de hoeveelheid werking noodig voor die verandering een minimum. De hoeveelheid werking is het product van de massa der lichamen, hun snelheid en de ruimten, die zij doorloopen. 1)

Hij past zijn beginsel eerst toe op volkomen onveerkrachtige lichamen (corps absolument durs ou sans ressort). Dit zijn volgens hem zulke lichamen, die door geen schok kunnen ingedrukt worden en die dus na botsing een gemeenschappelijke snelheid hebben.

Veronderstel, dat twee bollen van zoodanige natuur, die A en B tot massa hebben, zich in eenzelfde richting bewegen met de respectieve eenparige snelheden a en b, terwijl $a > b$ is. Welke zal hun gemeenschappelijke snelheid na de botsing zijn? Laat deze $= x$ wezen, 't lichaam A zal snelheid verloren en B gewonnen hebben, het verlies van A zal bedragen $a - x$, de winst van B $x - b$. De botsing heeft dus veroorzaakt, dat A gekregen heeft een snelheid in den tegenovergestelden zin van zijn beweging $= a - x$, terwijl B er een gekregen heeft in denzelfden zin $= x - b$. — Omdat bij een eenparige beweging de afgelegde wegen evenredig zijn met de snelheden, volgt hieruit dat de hoeveelheid werking noodig om deze beweging aan 't lichaam A te geven, uitgedrukt moet worden door $A\ (a - x)^2$ en voor 't lichaam B door $B\ (x - b)^2$.

De som van deze twee hoeveelheden $A\ (a - x)^2 + B\ (x - b)^2$ moet een minimum zijn, dus nu differentiatie verkrijgt men:

---

1) Het beginsel der kleinste werking in verband met de bewegingsvergelijkingen van Lagrange en Hamilton, Academisch proefschrift van A. Kempe.

$$-A(a-x)+B(x-b)=o$$

waaruit volgt:

$$x=\frac{Aa+Bb}{A+B}$$

welke uitkomst gelijk is aan die welke door Mac-Laurin, Mazière en Bernoulli op andere wijze gevonden is.

Had de beweging in tegengestelden zin plaats, dan vindt men door een gelijke ontwikkeling:

$$x=\frac{Aa-Bb}{A+B}.$$

Maupertuis bespreekt nu de botsing van twee volkomen veerkrachtige lichamen (aan deze kent hij die eigenschappen toe, die hun tegenwoordig nog toegeschreven worden).

Laat weer A en B de massa's zijn van twee volkomen veerkrachtige bollen, die zich in verschillende richtingen met de snelheden a en b eenparig bewegen, waarbij $a > b$. Stel dat x en y de respectieve snelheden na de botsing zijn. A zal dan verliezen de snelheid $a-x$ en B zal verkregen hebben $y-b$. De hoeveelheid werking vereischt voor deze verandering zal bedragen:

$$A(a-x)^2+B(y-b)^2,$$

welke uitdrukking een minimum moet zijn.

Differentiëerende krijgt men:

$$-Aadx+Ax\,dx+By\,dy-Bb\,dy=o.$$

Neemt men in aanmerking dat $a-b=y-x$ 1) moet zijn, dus $dx=dy$, dan heeft men:

$$x=\frac{Aa-Ba+2\,Bb}{A+B} \quad \text{en } y=\frac{Bb-Ab+2\,Aa}{A+B}$$

welke uitdrukkingen in overeenstemming zijn met de vroeger gevondene.

---

1) Maupertuis heeft bij 't voorafgaande opgemerkt, dat zoowel vóór als na de botsing het verschil hunner respectieve snelheden een zelfde moet zijn. Immers: „la vitesse respective des deux corps étant la seule cause qui avoit bandé leur ressort, il faut que le débandement reproduise un effet égal à celui, qui comme cause avoit produit le débandement: c'est à dire une vitesse respective, en sens contraire, égal à la première.

III.

De wijze waarop d' Alembert uit zijn beginsel de botsingwetten heeft afgeleid, moge blijken uit de oplossing van het volgende vraagstuk. Twee bollen A en a (fig. 9) vastgemaakt aan de koorden CA en ca, die in C en c vastzitten, komen met gegeven snelheden met elkander in botsing; er wordt gevraagd naar de snelheden na de botsing in de veronderstelling, dat beide lichamen vóór de botsing van denzelfden kant komen.

Laat u en v de snelheden van de middelpunten A en a vóór en u' en v' die na de botsing zijn. Uit zijn beginsel heeft hij afgeleid dat, als de middelpunten snelheden $u - u'$ en $v - v'$ hadden, de lichamen evenwicht met elkander zouden maken, m. a. w. als de punten A en a snelheden $u - u'$ en $v - v'$ hebben, dan moet de kracht van 't lichaam A, die men in 't middelpunt A denkt, werkende volgens Aa gelijk zijn aan de kracht van 't lichaam a, ook geheel in 't middelpunt a gedacht en werkende volgens aA. Tevens moeten de snelheden u' en v' zoodanig zijn, dat de lichamen elkander niet hinderen. Uit deze laatste voorwaarde volgt $\frac{u'.\,CG}{CA} = \frac{v.\,cg}{ca}$ als CG en cg loodlijnen zijn op Aa. Uit de eerste leidt hij af, als men F noemt de som van de producten van de deeltjes van 't lichaam A met 't vierkant van hunne afstanden tot C of liever tot de as, die door C gaat en f dezelfde som ten opzichte van a

$$\frac{F\,(u - u')}{CA.\ CG} + \frac{f\,(v - v')}{ca.\ cg} = o \quad 1)$$

1) Car $u - u'$ étant la vitesse de rotation perdue par le centre A, la vitesse perdue par tout autre point M sera $(u - u') \times \frac{CM}{CA}$ et la force $(u - u') \times \frac{CM}{CA} \times M$; mais à cette force on en peut substituer une agissant suivant GA ou Aa, et qui (en considérant MCG comme un levier angulaire) doir être $= \frac{(u - u') \times CM^2 \times M}{CA \times CG}$ par le principe du levier; donc la somme des forces perdues du corps A sera

$$\int \frac{(u - u') \times CM^2 \times M}{CA \times CG} = \frac{u - u'}{CA \times CG} \times \int CM^2 \times M = \frac{(u - u') \times F}{CA \times CG}$$

Donc etc.

Uit deze twee vergelijkingen kan men u' en v' oplossen.

Wanneer de twee lichamen veerkrachtig zijn, zullen hunne snelheden na de botsing $2u' - u$ en $2v' - v$ bedragen. De som van de levendige krachten na de botsing zal derhalve zijn: $\frac{F}{CA^2}(2u' - u)^2 + \frac{f}{ca^2}(2v' - v)^2 = \frac{Fu^2}{CA^2} + \frac{fv^2}{ca^2} + \frac{4F}{CA^2}(u'^2 - uu') + \frac{4f}{ca^2}(v'^2 - vv')$. Maar als men de eerste van de twee laatste termen vermenigvuldigt met $\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA}$ en de laatste met $\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca}$, waardoor hun waarde niet verandert, dan zal men, omdat $\frac{u.\ CG}{CA} = \frac{v.\ cg}{ca}$ en $\frac{F(u - u')}{CA.\ CG} + \frac{f(v - v')}{ca.\ cg} = o$ is, die twee termen tegen elkander kunnen wegschrappen. Dus de som van de levendige krachten na de botsing zal gelijk zijn aan $\frac{T.\ u^2}{CA^2} + \frac{f.\ v^2}{ca^2}$; waaruit volgt, dat de som van de levendige krachten vóór en na de botsing dezelfde is.

Op de volgende wijze leidt d'Alembert uit zijn beginsel dat van 't behoud der levendige krachten af. Veronderstel, dat A en B (fig. 10) oneindig klein zijn; men geeft hun snelheden, die in richting en grootte voorgesteld worden door de oneindig kleine lijnen AK en BD. Uit zijn beginsel volgt, dat men de parallelogrammen NL en MC zoo construeeren moet dat $LC = AB$ en $B \times BM = A \times AN$ is; AL en BC zullen dan de snelheden in grootte en richting van de lichamen A en B zijn. Nu is $BC^2 = BD^2 - 2CE \times CD - CD^2$ en $AL^2 = AK^2 + 2PL \times KL - KL^2$ waaruit volgt: $B.\ BC^2 + A.\ AL^2 = A.\ AK^2 + B.\ BD^2 + A\ (2PL \times KL - KL^2) - B\ (2CE.\ CD + CD^2) = A.\ AK^2 + B.\ BD^2 - A.\ KL^2 - B.\ CD^2$ omdat $CE = PL$ en $A.\ KL = B.\ CD$ is. Men heeft dus:

$$B.\ BC^2 + A.\ AL^2 = A.\ AK^2 + B.\ BD^2 - A.\ KL^2 - B.\ CD^2.$$

1°. Wanneer NA en BM oneindig klein zijn, d. w. z. als de snelheden AL en BC slechts oneindig weinig van de snelheden AK en BD verschillen, zal 't behoud van de levendige krachten plaats hebben. Want in de laatste vergelijking KL en $CD = o$ stellende, krijgt men:

$$B.\ BC^2 + A.\ AL^2 = B.\ BD^2 + A.\ AK^2.$$

2°. Als NA en BM niet oneindig klein zijn en men maakt $CF = CD$ en $LO = LK$, dan heeft men $BF^2 = BD^2 - 4CE.\ CD$ en $AO = AK^2 + 4PL \times KL$. Dus $B.\ B\ F^2 + A.\ AO^2 = B\ (BD^2 - 2BM \times 2CE) + A\ (AK^2 + 2AN \times 2PL) = B.\ BD^2 + A.\ AK^2$ omdat $CE = PL$ en $A.\ AN = B.\ BM$ is.

Ook in dit geval heeft 't behoud der levendige krachten plaats. Hieruit kan men afleiden, dat dit geschiedt o. a. bij de botsing van volkomen veerkrachtige lichamen. Immers: hebben deze lichamen vóór de botsing snelheden a en b en daarna a' en b', ontbind dan a in a' en α en b in b' en β, de snelheden na de botsing zullen dan samengesteld zijn uit a' en $-\alpha$ en b' en $-\beta$. Het onder n°. 2 behandeld is dus 't zelfde, wat bij de botsing van veerkrachtige lichamen plaats heeft.

Hieruit blijkt, dat d'Alembert het beginsel niet algemeen bewezen heeft; dat was trouwens ook zijn bedoeling niet. Hij zegt toch: »j'entreprends de donner sinon une démonstration générale pour tous les cas, au moins les principes suffisans pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier."

Het beginsel zelf formuleert hij aldus: »Si des corps agissent les uns sur les autres, soit en se tirant par des fils ou des verges inflexibles, soit en se poussant, pourvû qu'ils soient à ressort parfait dans ce dernier cas, la somme der produits des masses par les quarrés des vitesses, fait toujours une quantité constante; et si ces corps sont animés par des puissances quelconques, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses à chaque instant, est égale à la somme des masses par les quarrés des vitesses initiales, plus les quarrés des vitesses que les corps auroient acquises, si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est dans ces deux principes que consiste ce qu'on apelle *la conservation des forces vives.*"

De velerlei bezwaren verbonden aan 't op den voorgrond stellen van d'Alembert's beginsel, hebben Lagrange (1736—1813) mede aanleiding gegeven tot het inslaan van een anderen weg. Wel maakt hij gebruik van het door hem gewijzigde beginsel van d'Alembert 1), maar hij stelt een ander beginsel, dat van de virtueele snelheden voorop. Met behulp van dit laatste beginsel is het Lagrange gelukt de geheele statica tot een enkele algemeene formule te herleiden. «On pourra donc aussi," zegt hij naar aanleiding hiervan, 2) »réduire à une formule générale toute la Dynamique; car pour appliquer au mouvement d'un système de corps la formule de son équilibre, il suffira d'y introduire les forces qui proviennent des variations du mouvement de chaque corps, et qui doivent être détruites. Le développement de cette formule, en ayant égard aux conditions dépendantes de la nature du système, donnera toutes les équations nécessaires pour la détermination du mouvement de chaque corps." Daardoor is het hem gelukt duidelijker 't onderlinge verband tusschen de verschillende mechanische beginselen te doen uitkomen, dan dit d'Alembert deed en die principia alleen door berekeningen en niet door philosophische beschouwingen uit de axioma's en eenvoudiger beginselen af te leiden. 3)

Wij bezitten van Lagrange o. a. twee klassieke werken: »Mécanique analytique" en »théorie des fonctions analytiques." Het eerste werk, waarvan de eerste uitgave in 1788 verscheen, werd in 1811—1815, nadat het voor het grootste gedeelte door den schrijvee belangrijk gewijzigd was, op nieuw uitgegeven. Voor zijn functierekening, die in 1791 het eerst het licht zag, verscheen in 1813 de laatste druk.

---

1) „Si on voulait éviter les décompositions de mouvements que ce principe exige il n' y aurait qu' à établir tout de suite l'équilibre entre les forces et let mouvements ·engendrés, mais pris dans des directions contraires. Car si on imagine qu'on imprime à chaque corps, en sens contraire, le mouvement qu'il doit prendre, il est clair que le systême sera réduit au repos; par conséquent il faudra que ces mouvements detruisent ceux que les corps avaient reçus et qu'ils auraient suivis sans leur action mutuelle: ainsi il doit y avoir équilibre entre tous ces mouvements ou entre ces forces qui peuvent les produire."

Wel is deze wijze minder direct dan die van d'Alembert, maar voor de toepassingen is ze eenvoudiger.

2) Mécanique analytique 2de deel Hoofdstuk 1 § 12.

3) Over het beginsel der virtueele snelheden, Academisch proefschrift van W. H. Nieuwhuis.

Gaan wij eerst na, wat Lagrange in het eerste werk geeft van hetgeen op ons onderwerp betrekking heeft.

Beschouwen wij een systeem van lichamen, die in 't een of ander verband tot elkander staan en waarop eenige versnellende krachten werken; laat m zijn de massa van een dezer lichamen, hetwelk wij als een punt beschouwen, terwijl x, y en z de absolute plaats aanwijzen, waarop 't lichaam zich aan 't einde van zekeren tijd $= t$ bevindt. Wij maken gebruik van een vast rechthoekig coördinatenstelsel; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$ zullen de componenten van de snelheden van het lichaam ten opzichte van de coördinaatassen zijn. Door de verbinding der lichamen en door de werking van de versnellende krachten krijgen deze snelheden gedurende dt de aangroeiingen $d\,\frac{dx}{dt}$, $d\,\frac{dy}{dt}$ en $d\,\frac{dz}{dt}$; deelt men deze door dt, dan verkrijgt men de maat van de versnellende krachten, waardoor deze vermeerdering in snelheid tot stand komt.

Neemt men nu dt als constant, dan kan de versnellende krachten uitdrukken door $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ en $\frac{d^2z}{dt^2}$; hieruit volgt, dat $m\,\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2y}{dt^2}$ en $m\,\frac{d^2z}{dt^2}$ de grootte van de krachten zullen zijn, die 't lichaam m gedurende dt parallel aan de coördinaatassen bewegen. Op elk lichaam van 't systeem zullen dergelijke krachten werken; bij gevolg zullen al deze krachten aequivalent zijn aan die, welke men veronderstelt, dat op 't systeem werken en waarvan de werking door de natuur van 't systeem gewijzigd wordt. De momenten van deze aequivalente krachtsystemen moeten gelijk zijn.

Van het eerste krachtsysteem zal de som van de momenten voorgesteld kunnen worden door $S\,(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z)\;m.$

Zijn nu P, Q, R enz. de gegevene versnellende krachten, die op ieder lichaam van 't systeem werken en p, q, r enz. de afstanden van ieder dezer lichamen tot de middelpunten, waarvan men onderstelt, dat deze krachten uitgaan, dan zullen, omdat de krachten trachten de afstanden p, q, r enz. te verminderen, $-\,\delta p$, $-\,\delta q$, $-\,\delta r$ enz. hunne virtuëele snelheden voorstellen. De momenten van de krachten

mP, mQ, mR enz zullen dan uitgedrukt worden door $-mP\,\delta p$, $-mQ\,\delta q$, $-mR\,\delta r$ enz. en de som van de momenten van al deze krachten door:

$$-S\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \text{enz.})\;m.$$

Door deze som gelijk te stellen aan de boven gevondene, heeft men:

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)m + S\left(P\delta p + Q\delta q + R\,\delta r + \text{enz.}\right)m = o.$$

Deze uitdrukking is Lagrange's formule voor de beweging van elk systeem van lichamen.

Wanneer nu de vergelijkingen van voorwaarden tusschen de coördinaten van de verschillende lichamen niet de grootheid t bevatten, als dus de verbindingen tusschen de lichamen, die 't systeem vormen, onafhankelijk van den tijd zijn, dan mag men in de voorafgaande formule de variaties δx, δy en δz vervangen door de differentialen dx, dy en dz, die de ruimten voorstellen, welke de lichamen gedurende dt werkelijk afleggen, terwijl de variaties de ruimten aanwijzen, die de lichamen in verband met hunne onderlinge verbinding zouden kunnen doorloopen.

Vervangt men derhalve in de algemeene vergelijking δx, δy en δz door dx, dy en dz en even eens δp, δq, δr, enz. door dp, dq, dr, enz., dan wordt deze:

$$S\left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{enz.}\right)m = o.$$

In 't geval, dat $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{enz.}$ integreerbaar is, 't welk plaats zal hebben als de krachten van vaste centra of van de lichamen van 't systeem uitgaan en functies zijn van de afstanden p, q, r, enz. en deze uitdrukking dan $= d\Pi$ stellende, wordt de voorafgaande vergelijking:

$$S\left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} + d\,\Pi\right)m = o.$$

of na integratie

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} + \Pi\right)m = H$$

waarin H een constante is, gelijk aan de waarde van het eerste lid van deze vergelijking voor een gegeven oogenblik.

»Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives.* En effet, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ étant le carré de l'espace que le corps parcourt dans l'instant dt, $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ sera le carré de sa vitesse et $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ m sa force vive. Donc $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) m$ sera la somme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le système; et on voit par l'équation dont il 's agit, que cette force vive est égale à la quantité $2\,H - 2\,S\,\Pi\, m$, laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps, et nullement de leur liaison mutuelle, de sorte que la force vive du système est à chaque instant la même que les corps auraient acquise si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étaient mus librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est ce qui a fait donner le nom de *Conservation des forces vives*, à cette propriété du mouvement." 1)

Dit beginsel gaat ook door, als men de bewegingen van de lichamen tot hun zwaartepunt herleidt. Wanneer x', y' en z' de coördinaten van dat punt zijn en men stelt $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$ en $z = z' + \zeta$, dan zullen de coördinaten ξ, η en ζ hun oorsprong in het zwaartepunt hebben. Nu heeft men:

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2\,dt^2}\,Sm + \frac{dx'}{dt}\,S\,\frac{d\xi}{dt}\,m + \frac{dy'}{dt}\,S\,\frac{d\eta}{dt}\,m + \frac{dz'}{dt}\,S\,\frac{d\zeta}{dt}\,m + S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2\,dt^2}\right) m$$

en uit de eigenschap van 't zwaartepunt:

$$S\,\frac{d\xi}{dt}\,m = o \quad S\,\frac{d\eta}{dt}\,m = o \text{ en } S\,\frac{d\zeta}{dt}\,m = o$$

Hiervan gebruik makende, wordt Lagrange's hoofdvergelijking:

$$\frac{dx'd^2x' + dy'd^2y' + dz'd^2z'}{dt^2}\,Sm + S\left(\frac{d\xi d^2\xi + d\eta d^2\eta + d\zeta d^2\zeta}{dt^2}\right) m$$
$$+ S(Pdp + Qdq + Rdr + \text{enz.})\,m = o.$$

Vervangt men hierin $Pdp + Qdq + Rdr$ enz. door $Xdx + Ydy + Zdz$

1) Lagrange. Anal. mécanique T. I, P. II, Section III § 34.

en vervolgens dx, dy en dz respect door $dx' + d\xi$, $dy' + d\eta$ en $dz' + d\zeta$, gebruik makende van het beginsel: het behoud van de beweging van het zwaartepunt 1), dan verkrijgt men:

$$S\left(\frac{d\xi\, d^2\xi + d\eta\, d^2\eta + d\zeta\, d^2\zeta}{dt^2}\right) m + S\left(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta\right) m = o$$

welke formule analoog is met de straks gevondene. De uitdrukking $Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta$ zal evenwel slechts dan integreerbaar zijn, als de krachten gericht zijn naar de lichamen zelven van het systeem en functies zijn van de afstanden. In dat geval zal men hebben:

$$S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2} + \Pi\right) m = H$$

een vergelijking, die *het behoud van de levendige krachten* uitdrukt met betrekking tot het zwaartepunt.

Terwijl de beginselen van het massamiddelpunt en der doorloopen sectoren doorgaan, welke ook de werking is, welke de lichamen van 't systeem op elkander uitoefenen, zelfs wanneer zij met elkander in botsing komen, omdat alle inwendige krachten uit de vergelijkingen, die deze twee beginselen bevatten, verdwijnen, is dit met 't beginsel van 't behoud der levendige krachten niet het geval.

De vergelijking, die dit beginsel uitdrukt, bevat alle termen zoowel van uitwendige als van inwendige krachten en is slechts onafhankelijk van de werking der lichamen uit hun onderlinge verbinding voortspruitende.

»Aussi ce principe," zegt Lagrange, »a-t-il lieu dans le mouvement des fluides non élastiques, tant qu'ils forment une masse continue, et qu'il n'y a point de choc entre leurs parties, et si la quantité de *forces vives* est la même avant et après le choc des corps élastiques, c'est qu'on suppose que les corps se sont rétablis après le choc, dans le même état où ils étaient auparavant; de sorte que les termes $\int Pdp$ de l'expression Π, qui proviennent des forces P dues au ressort des corps, et dont la valeur est la plus grande lorsque la

---

1) Deze vergelijkingen zijn:

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\, Sm + SXm = o, \quad \frac{d^2y'}{dt^2}\, Sm + SYm = o \text{ en } \frac{d^2z'}{dt^2}\, Sm + SZm = o$$

compression est à son terme, décroissent ensuite par degrés égaux pendant la restitution, et redeviennent nuls à la fin du choc. C'est uniquement dans cette hypothèse que la conservation des forces vives peut avoir lieu dans le choc des corps élastiques.

Dans tout autre cas, lorsqu' il y a des changemens brusques dans les vitesses de quelques corps du système, la force vive totale se trouve diminuée de la quantité des forces vives dues aux forces accélératrices qui ont pu produire ces changemens; et cette quantité peut toujours s'estimer par la somme des masses multipliées par les carrés des vitesses que ces masses ont perdues, ou sont censées avoir perdues dans les changemens brusques des vitesses réelles des corps. C'est le théorème que M. Carnot avoit trouvé dans le choc des corps durs."

Dit laatste punt brengt Lagrange uitvoeriger ter sprake in zijn functie-rekening. Dit werk, geschreven volgens den auteur met het doel, door de functie-theorie de belangrijke vraagstukken van de analyse, géometrie en mechanica op te lossen, bevat drie gedeelten. In 't eerste stuk vindt men een uiteenzetting van deze theorie met hare voornaamste toepassingen op de analyse, het tweede en het derde gedeelte bevatten hetgeen betrekking heeft resp. op de géometrie en de mechanica. Van dit laatste gedeelte hebben wij voor ons doel alleen te maken met het laatste hoofdstuk, waar Lagrange 't beginsel van 't behoud der levendige krachten ter sprake brengt.

Men heeft een systeem van lichamen, voor hetwelk de volgende vergelijkingen van voorwaarden gelden:

$$F(x, y, z, \xi, \text{enz.}) = o. \quad \varphi(x, y, z, \xi, \text{enz.}) = o.$$

Differentiëert men deze ten opzichte van t, van welke x, y, z, ξ, enz. functies zijn en stelt men $x' = \frac{dy}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ enz., dan verkrijgt men:

$$\left.\begin{aligned} x' F(x) + y' F(y) + z' F(z) + \xi' F(\xi) + \text{enz.} &= o \\ x' \varphi'(x) + y' \varphi'(y) + z' \varphi'(z) + \xi' \varphi'(\xi) + \text{enz.} &= o \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Nu heeft Lagrange in 't voorafgaande aangetoond, dat als 't systeem slechts de werking van die krachten ondervindt, die uit deze voorwaarden voortvloeien, dat dan de vergelijkingen van de beweging van pe lichamen M, N enz., waaruit 't systeem bestaat, zullen zijn:

$$\left.\begin{aligned} Mx'' &= \pi\, F'(x) + \chi\, \varphi'(x) + \text{enz.} \\ My'' &= \pi\, F'(y) + \chi\, \varphi'(y) + \text{enz.} \\ Mz'' &= \pi\, F'(z) + \chi\, \varphi'(z) + \text{enz.} \\ N\xi'' &= \pi\, F'(\xi) + \chi\, \varphi'(\xi) + \text{enz.} \\ N\eta'' &= \pi\, F'(\eta) + \chi\, \varphi'(\eta) + \text{enz.} \\ N\zeta'' &= \pi\, F'(\zeta) + \chi\, \varphi'(\zeta) + \text{enz.} \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

In deze is $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ enz., terwijl π, χ enz. onbepaalde coëfficiënten zijn.

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (2) resp. met x', y', z' enz. en telt men ze dan op, dan verkrijgt men in verband met (1):

$$M\,(x'x'' + y'y'' + z'z'') + N\,(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') + \text{enz.} = o \ldots (3)$$

Deze vergelijking is geheel onafhankelijk van de voorwaarden van het systeem en geldt dus, welke ook het verband is tusschen de lichamen, die het systeem samenstellen.

Uit (3) volgt:

$$M\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) + N\,(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \text{enz.} = H \ldots (4)$$

Hierin is $x'^2 + y'^2 + z'^2 =$ aan 't vierkant van de snelheid van het lichaam, dat de lijn beschrijft, waarvan x, y, z, de coördinaten zijn; noemt men de snelheid van 't lichaam $M = u$, die van $N = v$ enz. dan wordt de vergelijking (4)

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{enz.} = H \ldots (5)$$

»Dans la fameuse dispute", zegt Lagrange naar aanleiding van deze formule, »sur l'estimation des forces, on a appellé *force vive* d'un corps en mouvement, le produit de sa massa et du carré de sa vitesse. Ainsi, en conservant cette dénomination, on voit par l'équation qu'on vient de trouver, que la somme des forces vives de tous les corps d'un système est constante, lorsque ces corps n'éprouvent d'autres actions que celles qui résultent de leur liaison, et en général, de toutes les conditions qui peuvent être exprimées par des équations entre les différentes coördonnées du corps, sans que le tems y entre. C'est dans cette loi que consiste le principe de la conservation des forces vives."

Vervolgens gaat Lagrange 't geval na, wanneer de krachten tusschen de lichamen van 't systeem aantrekkende of afstootende en daarbij functies van den afstand zijn. De analyse brengt hem tot de vergelijking:

$$Muu' + Nvv' + \text{enz.} = Pp' + Qq' + \text{enz.} \ldots (6)$$

Deze vergelijking geldt voor elk systeem van lichamen op welke wijze ook onderling verbonden, die elkaar aantrekken of aanstooten of een aantrekking of afstooting ondervinden van vaste centra, waarvan de krachten P, Q enz. groot zijn, terwijl p, q enz. gelijk zijn aan de onderlinge afstanden van de lichamen, die elkaar aantrekken of afstooten of aan hunne afstanden tot de centra. Men moet P, Q enz. pos. of neg. nemen en wel pos. wanneer deze krachten afstootende en neg. als zij aantrekkende zijn, omdat de eerste de afstanden p, q enz. trachten te vermeerderen, de andere te verminderen.

Wanneer nu de krachten P, Q, enz. resp. functies zijn van de afstanden p, q, enz. hetgeen men altijd veronderstellen mag als deze krachten van elkander onafhankelijk zijn of in 't algemeen, als $Pp' + Qq' +$ enz. de eerste afgeleide functie is van $F(p, q, \ldots)$ dan kan men (6) herleiden tot:

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{enz.} = K + 2F(p, q, \text{enz.}) \ldots (7)$$

Zijn nu a, b, enz. de waarden van p, q, enz. en U, V, enz. de snelheden van M, N, enz. op een gegeven oogenblik, dan wordt de voorafgaande vergelijking:

$$MU^2 + NV^2 + \text{enz.} = K + 2F(a, b, \text{enz.}) \ldots (8)$$

Elimineert men K uit (7) en (8), dan verkrijgt men de algemeene vergelijking:

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{enz.} = MU^2 + NV^2 + \text{enz.} + 2F(p, q, \text{enz.}) - 2F(a, b, \text{enz.}) \ldots (9)$$

»Cette équation," zegt Lagrange, »renferme le principe de la conservation des forces vives pris dans toute sa généralité. Elle fait voir que la force vive totale du système ne dépend que des forces actives qui animent les corps, et de la position des corps relativement aux centres de ces forces; de sorte que si, dans deux instants, les corps se trouvent à mêmes distances de ces centres, la somme de leurs forces vives sera aussi la même.

J'entends par *forces actives* les forces que les corps exercent les uns sur les autres, et dont l'effet est de changer leurs distances ou leurs positions respectives, comme les forces intrinsèques d'attraction ou de répulsion, les forces des ressorts placés entre les corps etc. Au contraire j'appelle *forces passives* les forces de résistance produites par les pressions des corps, les tensions des fils ou des verges, etc., et dont l'effet est de maintenir les corps dans une même position respective, et d'empêcher que les conditions du système ne soient violées. Ces forces passives ne contribuent en rien, comme l'on voit, à la production de la force vive; les forces actives seules l'augmentent ou la diminuent, comme elles feraient, si les corps, étant mus librement, partaient des mêmes points et arrivaient aux mêmes points, en décrivant des lignes quelconques."

Gelijk men ziet, wijst Lagrange er uitdrukkelijk op, dat de wet van het behoud der levendige krachten slechts onafhankelijk is van de passive krachten. Deze wet gaat niet door, wanneer door de onderlinge werking van de lichamen of door het ontmoeten van hinderpalen de bewegingen plotseling veranderen, omdat deze veranderingen zijn of altijd beschouwd kunnen worden als het gevolg van active krachten van veeren geplaatst tusschen de lichamen of tusschen deze en de hinderpalen. De levendige kracht van de lichamen, die zulke veranderingen ondergaan, krijgt bij elke wijziging een vermeerdering of vermindering gelijk aan de levendige kracht, die de werking van deze veeren voort zou brengen, als de lichamen slechts aan deze werking onderworpen waren.

Als dus de lichamen M, N, enz. elkander of hinderpalen ontmoeten, waardoor er plotselinge veranderingen in hunne bewegingen komen, dan zal men voor die lichamen, gedurende hunne werking, hoe kort die ook moge duren van de formule (9) mogen gebruik maken; noemt men nu U, V, enz. hunne snelheden bij het begin, u, v, enz. de snelheden aan het einde, a, b, enz. de grootte van de afstanden p, q, enz. bij het begin, en α, β, enz, die aan 't einde, dan heeft men:

$$MU^2+MV^2+\text{enz}...-Mu^2-Nv^2-\text{enz}...=2F(a,b,\text{enz.})-2F(\alpha,\beta,\text{enz}..)\quad(10)$$

Het verschil tusschen de levendige kracht bij 't begin en bij het einde van de werking zal dus gelijk zijn aan $2F(a, b, \text{enz.}) - 2F(\alpha, \beta, \text{enz.})$

Hoewel a, b, enz. en α, β, enz. zeer weinig van elkander verschillen, kan toch het verschil tusschen $F(a, b, \text{enz.})$ en $F(\alpha, \beta, \text{enz.})$ een eindige waarde geven.

In bijzondere gevallen kunnen uit de voorwaarden van het vraagstuk deze functies bepaald worden.

Wanneer de lichamen met elkander in botsing komen, hetzij onmiddellijk, hetzij door tusschenkomst van hefboomen of andere machines, en de lichamen zijn volkomen veerkrachtig, dan heeft de samendrukking en uitzetting volgens dezelfde wet plaats. 1) In dat geval is $a = \alpha$ en $b = \beta$ en is dus $F(a, b, \text{enz.}) = F(\alpha, \beta, \text{enz.})$

Hieruit volgt, dat in dit geval de levendige kracht vóór en na de botsing dezelfde zal zijn. »Ce qu'on sait," zegt Lagrange, »depuis long-tems, mais dont on n'avait pas, que je sache, une démonstration simple et générale.

Voor niet veerkrachtige lichamen geldt het volgende: »dans le choc des corps durs, l'action n'est censée durer que jusqu' à ce que les corps aient acquis des vitesses en vertu desquelles ils ne se nuisent plus, et qui, par conséquent, ne produisent point d'action entre eux. Ainsi l'effet de ces vitesses sur l'action mutuelles des corps étant nul, si on leur imprimait ces mêmes vitesses avant ou pendant l'action, elle serait la même en vertu des vitesses composées de celles-ci et des vitesses propres des corps. Donc elle serait encore la même, si les vitesses imprimées étaient égales et directement contraires à celles dont nous parlons, car l'action ne varierait pas, en supposant qu'on détruisit ces vitesses imprimées par des vitesses opposées."

Hieruit volgt nu, dat de snelheden u, v, enz. na de botsing zoodanig zijn, dat de vergelijking:

$$MU^2 + NV^2 + \text{enz...} - Mu^2 - Nv^2 - \text{enz.} = 2\,F(a, b, \text{enz.}) - 2\,F(\alpha, \beta, \text{enz.}$$

ook doorgaat, als men de snelheden U, V, enz. u, v, enz. met de snelheden $-u$, $-v$, enz. samenstelt, terwijl 't tweede lid van deze vergelijking 't zelfde blijft, omdat het slechts afhangt van de onderlinge plaatsing van de lichamen vóór en na de botsing.

Als nu A de resultante is van U en $-u$, B die van V en $-v$ enz. krijgt men, omdat $u - u$, $v - v$, enz. $= o$ zijn:

1) Lagrange zegt: „l'action est censée durer jusqu' à ce que les corps soient revenus, par la restitution du ressort, à la même position respective où la compression a commencé."

$$MA^2 + NB^2 + \text{enz.} = 2\,F(a\,,b\,,\text{enz.}) - 2\,F(\alpha\,,\beta\,,\text{enz.})$$

Men heeft derhalve voor niet veerkrachtige lichamen de vergelijking:

$$MU^2 + NV^2 + \text{enz.} - Mu^2 - Nv^2 - \text{enz.} = MA^2 + NB^2 + \text{enz.}$$

Daar U, V, enz. de snelheden vóór en u, v, enz. die na de botsing zijn, is het duidelijk, dat A, B enz. de snelheden zullen zijn, die door de botsing verloren zijn; bij gevolg zal $MA^2 + NB^2 +$ enz. de levendige kracht zijn, die 't gevolg is van die snelheden. Hieruit blijkt: »que dans le choc des corps durs, il se fait une perte de forces vives égale à la force vive que les mêmes corps auraient s'ils étaient animés chacun de la vitesse qu'il perd dans le choc."

Zoo als men ziet, heeft er volgens Lagrange bij botsing soms verlies van levendige kracht plaats. Bij de botsing van volkomen veerkrachtige lichamen zal het behoud van die kracht daarom plaats hebben, omdat men hierbij veronderstelt, dat de ontwikkelde veerkracht, die bij de grootste samendrukking een maximum waarde heeft, daarna weder vermindert en eindelijk gelijk nul wordt. Dit terugkeeren tot den vroegeren toestand is volgens hem alleen de grond, waarom van het beginsel van het behoud van de levendige kracht bij vergelijking van den toestand vóór en na de botsing gebruik mag gemaakt worden. Bij de botsing van niet veerkrachtige lichamen heeft er verlies plaats

In zijn anal. mechanica en functierekening heeft hij het beginsel van Carnot tot bepaling van dit verlies analytisch afgeleid. Bij volkomen niet veerkrachtige lichamen laat zich Carnot's beginsel 't eenvoudigst aantoonen, maar 't gaat ook door voor niet veerkrachtige lichamen, die dat niet volkomen zijn. Gaan wij hiervoor na, op welke wijze Carnot zijn beginsel afgeleid heeft.

In 't jaar 1783 verscheen er van de hand van L. N. M. Carnot een werkje getiteld: »essai sur les Machines en général," dat in 1803 onder den titel: »principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement," nadat het hier en daar gewijzigd en met belangrijke opmerkingen vermeerderd was, voor de tweede maal het licht zag. In dit keurig geschreven werkje geeft Carnot niet alleen een overzicht van de mechanische beginselen en maakt hij er de beteekenis van duidelijk minder door bepalingen, die bijna altijd onbegrijpelijk zijn voor hen, voor wie zij nieuw zijn, dan door beschouwingen aan de ervaring ontleend, maar heeft hij op sommige van hen een nieuw licht geworpen. Hij was de eerste, die het duidelijk uitsprak, dat er bij botsing van niet veerkrachtige lichamen verlies van levendige kracht plaats had en door het beginsel, naar hem genoemd, een eenvoudigen vorm gaf om dit verlies voor te stellen en uit te drukken.

Gaan wij nu na, op welke wijze Carnot het naar hem genoemde beginsel afleidde.

Veronderstellen wij, dat A en B (fig. 11) twee volkomen niet veerkrachtige lichamen zijn, die met elkander in botsing komen; hun snelheden vóór de botsing worden in richting en grootte voorgesteld door AA' en BB', na de botsing door Aa en Bb; hun door de botsing verlorene snelheden zullen dan Aa' en Bb' zijn.

AA' zal dus de resultant zijn van Aa en Aa', zoo ook BB' die van Bb en Bb'.

Daar actie en reactie gelijk en tegengesteld zijn, zullen de richtingen Aa' en Bb' zich bevinden op een zelfde rechte lijn AB en zal men hebben:

$$A.\ Aa' = -\ B.\ Bb' \ldots (1).$$

Maar daar bij lichamen, als waarvan hier sprake is, de snelheden in de richting van de actie, in die van AB voor beide lichamen gelijk zijn, heeft men nog:

$$Aa.\ \cos aAa' = Bb.\ \cos bBb' \ldots (2).$$

Uit deze twee verg. volgt na vermenigvuldiging:

$$A.\ Aa'.\ Aa.\cos aAa' + B.\ Bb'.\ Bb.\cos bBb' = o \ldots (3)$$

In deze uitdrukking is $A.\,Aa'$ de hoeveelheid van beweging door A verloren en $Aa.\cos aAa'$ zijn snelheid na de botsing in de richting van deze hoeveelheid, $B.\,Bb'$ de hoeveelheid van beweging door B verloren en $Bb.\cos bBb'$ zijn snelheid na de botsing in de richting van deze hoeveelheid. Men heeft dus:

bij de botsing van twee volkomen onveerkrachtige lichamen is de som van de producten van de verloren hoeveelheid van beweging en de snelheid na de botsing in de richting van deze hoeveelheid gelijk nul.

Deze regel gaat ook door, wanneer één van de twee lichamen vast is, zoo ook wanneer men meerdere lichamen heeft, die alle beweegbaar of waarvan enkele vast zijn, alsmede wanneer de botsing niet onmiddellijk, maar door tusschenkomst van een onveerkrachtig werktuig geschiedt.

Wanneer dus M de massa van ieder lichaam van zeker systeem W zijn snelheid vóór, V die na de botsing, U de snelheid die het door de botsing verloren heeft en eindelijk $\hat{UV}$ de hoek tusschen U en V zijn, dan heeft men in al de gevallen hierboven opgenoemd:

$$\Sigma M.\ U.\ V.\cos \hat{UV} = o \ldots (4).$$

Wanneer nu in 't parallellogram (fig. 12) de diagonaal $Mm = W$, de zijde $MA = V$ en de zijde $MB = U$ is, dan heeft men:

$$Mm^2 = MA^2 + Am^2 - 2\,MA.\,Am.\cos MAm$$

$$\text{of } Mm^2 = MA^2 + MB^2 + 2\,MA.\,MB.\cos AMB.$$

$$\text{of } W^2 = V^2 + U^2 + 2\ V.U.\cos \hat{VU}$$

waaruit volgt:

$$\Sigma MW^2 = \Sigma MV^2 + \Sigma MU^2 + 2\,\Sigma MVU \cos \hat{VU}$$

Volgens (4) is de laatste term $= o$, dus

$$\Sigma MW^2 = \Sigma MV^2 + \Sigma MU^2 \ldots (5)$$

Waaruit volgt:

bij de botsing van volkomen onveerkrachtige lichamen, welk hun getal ook zij, hetzij de botsing onmiddellijk geschiedt, hetzij zij door een onveerkrachtig werktuig tot stand komt is de som van de levendige kracht vóór de botsing altijd gelijk aan de som er van na de botsing vermeerderd met de som van de levendige krachten, die verkregen zou worden, als elk van de lichamen zich vrij bewoog alleen met de snelheid, die het door de botsing verloren heeft.

Wanneer 't systeem geleidelijk (par degrés insensibles) van beweging verandert, dan zal de hoeveelheid van beweging, die ieder oogenblik door elk van de lichamen verloren wordt, oneindig klein zijn; men mag dan $\Sigma\ MU^2 = o$ nemen. In dit geval wordt de formule (5):

$$\Sigma\, MW^2 = \Sigma\, MV^2$$

en dan zal de som van de levendige krachten vóór de botsing gelijk zijn aan die er na.

Is de verandering van beweging niet aldus, maar plotseling (brusque), dan zal, terwijl de waarde van de verloren snelheid U positief of negatief is, U^2 altijd positief zijn. Dus $\Sigma\, MU^2$ is altijd een positieve hoeveelheid, even als $\Sigma\, MW^2$ en $\Sigma\, MV^2$. Hieruit volgt, dat dan $\Sigma\ MW^2$ altijd grooter is dan $\Sigma\ MV^2$, *m.a.w.*, dat dan de som van de levendige krachten na de botsing altijd minder is dan er vóór.

»Il y a donc toujours," zegt Carnot, »déperdition de forces vives dans le choc des corps durs, soit que le choc soit immédiat, ou qu'il s'opère au moyen d'une machine quelconque sans ressort; et cette déperdition de forces vives est toujours égale à la somme des forces vives qui auroit lieu, si chacun des corps se mouvoit librement avec une vitesse égale à celle qu'il a perdue par le choc. J'appellerai ce principe: »*loi de la déperdition de forces vives dans le choc des corps durs.*"

Voor volkomen veerkrachtige lichamen geldt het volgende:

Door de elasticiteit wordt de hoeveelheid van beweging, die ieder lichaam van 't systeem aan elk van de andere geeft verdubbeld 1), dus MU wordt voor elk lichaam van 't systeem het dubbele van hetgeen het zou zijn, als de lichamen volkomen onveerkrachtig waren. De richting van deze hoeveelheid verandert niet, omdat zij altijd gelijk en tegengesteld gericht is aan de resultante van alle krachten, die M ontvangt en daar deze alle tegelijker tijd verdubbeld worden, kan de richting van haar resultaat niet veranderd worden.

Wij vonden boven:

$$\Sigma\ M.\ U.\ V.\ \cos \widehat{UV} = o \quad (4)$$

Maar daar W de resultante is van V en U heeft men:

$$V.\ \cos \widehat{VU} = W.\ \cos \widehat{WU} - U.$$

en dus in verband met (4)

1) Soortgelijke redeneering als Maclaurin pag. 21.

$$\Sigma\ M.\ U.\ W.\ \cos \widehat{WU} - \Sigma\ M.\ U^2 = o \ldots (6)$$

Deze formule geldt voor volkomen onveerkrachtige lichamen.

Veronderstel nu, dat de lichamen volkomen veerkrachtig zijn, dat de verloren snelheid $= U'$, de overblijvende $= V'$ is; W blijft dezelfde, terwijl U' 't dubbele is van U of $U = \frac{1}{2}$ U'; form. (6) wordt dus voor volkomen veerkrachtige lichamen, in aanmerking nemende dat $\widehat{WU} = \widehat{WU'}$ is:

$$2\ \Sigma\ M.\ U'.\ W.\ \cos \widehat{WU'} - \Sigma\ MU'^2 = o.$$

Daar evenwel $W \cos \widehat{WU'} = V' \cos \widehat{V'U'} + U'$ is, wordt deze laatste uitdrukking:

$$2\ \Sigma\ M.\ U'\ V' \cos \widehat{V'U'} + \Sigma\ M.\ U'^2 = o \ldots (7)$$

Verder heeft men:

$$W^2 = V'^2 + U'^2 + 2\ V'U' \cos \widehat{V'U'}$$

of $\Sigma\ MW^2 = \Sigma\ MV'^2 + \Sigma\ MU'^2 + 2\,\Sigma\ MU'V' \cos \widehat{V'U'} \ldots (8)$

welke uitdrukking door (7) verandert in:

$$\Sigma\ MW^2 = \Sigma\ MV'^2$$

Bij de botsing van volkomen veerkrachtige lichamen, welk hun aantal ook zij, is de som van de levendige krachten na de botsing altijd gelijk aan de som van de levendige krachten vóór de botsing.

Zijn de lichamen niet volkomen veerkrachtig, maar allen voorzien van eenzelfde graad van elasticiteit, die men door n voorstelt, d. w. z. zoo, dat in plaats van als boven de wederkeerige werking van de lichamen te verdubbelen, men deze met n moet vermenigvuldigen, dan heeft men het volgende.

De richting van elk van de verloren snelheden zal dezelfde blijven.

Stelt nu weer U' de verloren, V' de blijvende snelheid voor en is $U' = nU$ of $U = \frac{1}{n}\ U'$ dan wordt

$$\Sigma\ M.\ U.\ W.\ \cos \widehat{WU} - \Sigma\ M.\ U^2 = o$$

na vermenigvuldiging met n:

$$n\ \Sigma\ M.\ U'.\ W.\ \cos \widehat{WU'} - \Sigma\ MU'^2 = o.$$

Deze vergelijking wordt, omdat:

$$W.\cos \widehat{WU'} = V' \cos \widehat{V'U'} + U' \text{ is},$$

$$\Sigma\, M.\ V.'\ U.' \cos \widehat{V'U'} + \frac{n-1}{n}\ \Sigma\ MU'^2 = o \ldots (9)$$

Nog heeft men:

$$W'^2 = V'^2 + U'^2 + 2\,V'U' \cos \widehat{V'U'} \text{ en dus}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \Sigma\ MW'^2 = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ MV'^2 + \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ MU'^2 + \Sigma\, MU'V' \cos \widehat{V'U'} \ldots . (10)$$

Uit (9) en (10) volgt:

$$\Sigma\ MW'^2 = \Sigma\ MV'^2 - \frac{n-2}{n}\ \Sigma\ MU'^2 \ldots (11)$$

Neemt men nu in aanmerking, dat men heeft $1 < n < 2$ als de lichamen noch volkomen veerkrachtig, noch volkomen onveerkrachtig zijn, dan volgt uit (11), dat er bij botsing van zulke lichamen verlies van levendige kracht plaats heeft.

Uit (11) kan men gemakkelijk afleiden het gevondene voor volkomen veerkrachtige en voor volkomen onveerkrachtige lichamen.

In 't eerste geval is $n = 2$ en wordt dus (11)

$$\Sigma\, MW'^2 = \Sigma\, MV'^2.$$

In 't tweede geval is $n = 1$ en men krijgt

$$\Sigma\, MW'^2 = \Sigma\, MV'^2 + \Sigma\, MU'^2.$$

Deze twee formules zijn in overeenstemming met de vroeger gevondene.

Volgens Carnot is de werkelijk plaats hebbende beweging na de botsing van onveerkrachtige lichamen een zoodanige, dat de som van de producten van de massa's met de vierkanten van de verloren snelheden een minimum is; bij elke andere virtueele beweging zal deze eigenschap niet plaats hebben. Hij bewijst dit, door aan te toonen dat $\delta \int Mu^2$ gelijk nul is.

Deze formule is geschikt om de beweging van een systeem van onveerkrachtige lichamen na de botsing te bepalen, wanneer men die, welke vóór de botsing plaats heeft, kent.

Stel toch dat twee bollen A en B schuins met elkander in botsing komen; laat de snelheid van A in de richting AB, dat is de lijn die de middelpunten verbindt, vóór de botsing a en er na α zijn, die van B b en β; de snelheid van A loodrecht op AB vóór de botsing a' en er na α', die van B b' en β'.

Stellen wij nu $\alpha = \beta$; dan zal de snelheid, die A verliest volgens AB, $a - \alpha$ en die van B $b - \beta$ of $b - \alpha$ bedragen, terwijl de snelheid, die A verliest loodrecht op AB zal zijn $a' - \alpha'$ en die van B $b' - \beta'$; dus het totale verlies in snelheid van A en B zal respectievelijk bedragen:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2 + (a'-\alpha')^2} \text{ en } \sqrt{(b-\alpha)^2 + (b-\beta')^2}$$

In verband dus met $\delta \int Mu^2 = 0$ heeft men:

$$\delta \left[A \left\{ (a-\alpha)^2 + (a'-\alpha')^2 \right\} + B \left\{ (b-\alpha)^2 + (b'-\beta')^2 \right\} \right] = 0 \text{ of:}$$

$$(Aa - A\alpha)\,\delta\alpha + (Bb - B\alpha)\,\delta\alpha + (Aa' - A\alpha')\,\delta\alpha' + (Bb' - B\beta')\,\delta\beta' = 0.$$

Daar in deze vergelijking de variatie $\delta\alpha$, $\delta\alpha^1$ en $\delta\beta'$ geheel onafhankelijk van elkander zijn, moeten haar coëfficiënten gelijk nul zijn.

Hieruit leidt men af:

$$\alpha = \frac{(Aa + Bb)}{A + B} \quad \alpha' = a' \text{ en } \beta' = b'$$

't Meest belangrijke uit Carnot's werk is zeker wel de naar hem genoemde wet. Evenmin als 's Gravesande, die ook van een verlies van kracht 1) (arbeidsvermogen) spreekt, wanneer twee gelijke onveerkrachtige ballen met gelijke snelheid tegen elkander botsen, waarna zij beide plotseling in rust blijven — wist ook Carnot dat alles wat (schijnbaar) verloren ging, in warmte terug gevonden kan worden. Maar door op te geven op welke wijze 't verlies van de levendige krachten uitgedrukt kon worden, heeft hij, al geschiedde dit natuurlijk volstrekt niet met deze bedoeling, de bezwaren weggeruimd, die men tegen de

---

1) Wij herinneren, dat 's Gravesande nu eens 't woord kracht in de beteekenis van snelheid gebruikt, dan weer in die, welke men tegenwoordig door 't woord arbeidsvermogen uitdrukt.

wet van het behoud van het arbeidsvermogen kon inbrengen. Carnot die even als d'Alembert en Lagrange den strijd over de levendige kracht als een, die over woorden liep, beschouwde, verklaarde niet, waar de levendige kracht, die volgens hem verloren ging, bleef. Eerst tegen het midden van de 19e eeuw heeft men hiervan een voldoende verklaring gevonden.

IV.

Uit het voorafgaande hoofdstuk is ons gebleken, dat er volgens Carnot verlies van levendige kracht plaats heeft bij de botsing van niet veerkrachtige lichamen. Sturm heeft aangetoond, dat het ook onder andere omstandigheden geschiedt en daarbij tevens de grootte van dit verlies bepaald. In een: »mémoire sur quelques propositions de mécanique rationelle" in 1841 aan de Academie van wetenschappen te Parijs aangeboden, ontwikkelt hij het volgende theorema:

»Wanneer men een systeem van punten heeft, dat in beweging is en waarvan het verband in een zeer kort tijdsverloop verandert, dan zal er verlies van levendige krachten plaats hebben; de som van de levendige krachten vóór deze verandering overtreft die, welke men er na heeft, met een bedrag gelijk aan de som van de levendige krachten, die overeenkomt met de snelheden, die verloren zijn bij den overgang van den eersten toestand van het systeem tot den tweeden."

Beschouwen wij een systeem van punten, die in beweging zijn, waarop eenige krachten werken en waartusschen verbindingen bestaan, die uitgedrukt worden door vergelijkingen, die de coördinaten van de punten bevatten en onafhankelijk van den tijd zijn; laat m, m', m'', enz. de massa van deze punten zijn; $x\ y\ z$ de coördinaten van 't punt m op het einde van het tijdstip t; $x'\ y'\ z$ die van 't punt m' enz., terwijl deze coörd. genomen zijn op 3 onveranderlijke rechthoekige assen; v waarvan de componenten $a\ b$ en c zijn, stelt voor de snelheid van 't punt m gedurende t; v' met de componenten $a'\ b'$ en c' die van 't punt m', terwijl $L = o\ \ M = o$ enz. de vergelijkingen zijn, die elk oogenblik gedurende den tijd t voor de coörd. x, y, z, x', y', z', enz. van de punten van het systeem gelden, terwijl $L = o$ enz. geen t bevatten.

Stellen wij ons nu voor, dat men op het einde van het tijdstip t tusschen de punten van 't systeem nieuwe verbindingen invoert, die men door de vergelijkingen $L_1 = o$, $M_1 = o$, enz. uitdrukt, welke vergelijkingen de eerste $L = o$, $M = o$, enz. kunnen bevatten.

Op 't oogenblik, dat men 't systeem aan deze nieuwe voorwaarden onderwerpt, zal de snelheid van ieder punt plotseling, of in grootte, of in richting, of in beide veranderen; laat nu v_1 met de componenten a_1, b_1 en c_1 de nieuwe snelheid van 't punt m, v_1' die van 't punt m' enz. zijn. Met behulp van 't beginsel van d'Alembert zal men voor 't oogenblik, waarop de nieuwe toestand van 't systeem begint, de volgende vergelijking hebben:

$$\Sigma\, m\, [(a - a_1)\,\delta x + (b - b_1)\,\delta y + (c - c_1)\,\delta z] = o \ldots (1)$$

waarin δx, δy, δz, enz. voorstellen de projecties op de assen van de virtueele verplaatsingen van de punten m, m', enz., terwijl zij in overstemming zijn met de nieuwe verbindingen $L_1 = o$, $M_1 = o$ enz.

Uit dit laatste volgt, dat δx, δy, δz, enz. voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dL_1}{dx}\,\delta x + \dfrac{\delta L_1}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL_1}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL_1}{dx'}\,\delta x' + \ldots = o \\ \dfrac{dM_1}{dx}\,\delta x + \dfrac{dM_1}{dy}\,\delta y + \dfrac{dM_1}{dz}\,\delta z + \dfrac{dM_1}{dx'}\,\delta x' + \ldots = o \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Wanneer men de vergelijkingen $L_1 = o$, $M_1 = o$, enz. differentiëert ten opzichte van t en men plaatst voor $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$, enz. hunne verkregen waarden a_1, b_1, c_1, enz. dan heeft men ook:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dL_1}{dx}\,a_1 + \dfrac{dL_1}{dy}\,b_1 + \dfrac{dL_1}{dz}\,c_1 + \dfrac{dL_1}{dx'}\,a_1' + \ldots = o \\ \dfrac{dM_1}{dx}\,a_1 + \dfrac{dM_1}{dy}\,b_1 + \dfrac{dM_1}{dz}\,c_1 + \dfrac{dM_1}{dx'}\,a_1' + \ldots = o \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Omdat de vergelijkingen van voorwaarden, gelijk verondersteld is, onafhankelijk van den tijd zijn, volgt uit (2) en (3), dat de werkelijke beweging van het systeem gedurende het tijdstip dt, dat op t volgt, een van de virtueele bewegingen is, die in overeenstemming zijn met de gegeven verbindingen. Immers uit (2) volgt, dat (1) waar is, als men in deze laatste δx, δy, δz, enz. door a_1, b_1, c_1, enz. vervangt.

Plaatst men nu in (1) voor δx, δy, δz, enz. a_1, b_1, c_1, enz., dan wordt deze vergelijking:

$$\Sigma\ m\ [(a - a_1)\,a_1, + (b - b_1)\,b_1 + (c - c_1\ )\,c_1\,] = o$$

welke men veranderen kan in:

$$\Sigma\ m\ (a^2 + b^2 + c^2) = \Sigma\ m\,(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2) + \Sigma\ m\,[(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2]$$

Daar $a - a_1$, $b - b_1$ en $c - c_1$ de componenten van de verloren snelheid van 't punt m zijn, wanneer men zijn snelheid v ontbindt in v_1 en u_1, verandert de laatste vergelijking in:

$$\Sigma\ mv^2 = \Sigma\ mv_1{}^2 + \Sigma\ mu_1{}^2$$

welke uitdrukking het theorema van Sturm bevat. 1)

Het beginsel van Carnot is een gevolg van dit theorema. Immers de botsing kan beschouwd worden als ontstaan te zijn door de invoering van nieuwe verbindingen, waardoor de lichamen genoodzaakt worden elkander in bepaalde punten te raken.

Bertrand 2) heeft het theorema van Sturm aldus bewezen.

Veronderstel, dat A een van de punten van het systeem is, waar-

1) Behalve in de Comptes rendus de l' Académie des sciences t. XIII p. 1046 kan men het bewijs van dit theorema nog vinden in de: cours de mécanique de l'école polytechnique par M. Sturm t II p. 349, alsmede in de: problèmes de mécanique rationelle par Jullien t. II p. 274; 't bewijs in laatstgenoemd werk is ook afkomstig van Sturm, die het aan Jullien had medegedeeld.

2) Men vindt het bewijs van M. J. Bertrand in de Comptes rendus de l'Aca-

van de massa m is; AI de snelheid, die het punt A hebben zou onder den invloed van de krachten, die op 't systeem werken, als het vrij was en er geen verband bestond tusschen het punt zelve en de andere punten van 't systeem; AI' de snelheid, die het heeft na de invoering van de verbindingen L en eindelijk AI'' de snelheid na de invoering van L en L'. Beschouwen wij den driehoek $AI'I''$, dan kan men hieruit afleiden:

$$\overline{AI'}^2 = \overline{AI''}^2 + \overline{I'I''}^2 - 2\,\overline{AI''}.\overline{I'I''} \cos \overline{AI''.I'I''}.$$

Na vermenigvuldiging met m en na sommatie voor al de punten van het systeem, krijgt men:

$$\Sigma\, m \overline{AI'}^2 = \Sigma\, m \overline{AI''}^2 + \Sigma\, m \overline{I'I''}^2 - 2\,\Sigma\, m \overline{AI''}.\overline{I'I''} \cos \overline{AI''.I'I''}.$$

Hierin is $\Sigma\, m.\,\overline{AI'}^2 = \Sigma\, mv^2$, $\Sigma\, m.\,\overline{AI''}^2 = \Sigma\, mv_1^2$ en $\Sigma\, m\,\overline{I'I''}^2 = \Sigma\, mu_1^2$ en het theorema van Sturm zal dus waar zijn, als men heeft:

$$\Sigma\, m.\,\overline{AI'}.\,\overline{I'I''} \cos \overline{AI''.I'I''} = o.$$

Bertrand toont nu aan dat

$$\Sigma\, \overline{AI''}.\,\overline{I'I''} \cos \overline{AI''.\,I'I''}$$

evenredig is aan de som van de virtueele momenten van krachten, die voortgebracht kunnen worden door de verbindingen L en L' en daar deze som $= o$ is, is 't theorema bewezen.

---

démie des sciences de Paris de l'année 1856 t. XLIII p. 1108. Hierin formuleert hij aldus Sturm's theorema:

„Si des points matériels liés entre eux par des liaisons (L) et sollicités par des forces instantanées, prennent un mouvement dans lequel la somme des forces vives initiales soit $\Sigma\, mv_1^2$;

si les mêmes points, partant comme précédemment du repos, sollicités par les mêmes forces, après introduction de liaisons nouvelles (L'), ajoutées à celles qui existaient déjà, prennent un nouveau mouvement dans lequel la somme des forces vives initiales soit $\Sigma\, Mv_2^2$;

quelles que soient les liaisons (L') introduites dans le système, la somme des forces vives $\Sigma\, mv_2^2$ sera toujours moindre que la somme primitive $\Sigma\, mv_1^2$, et la différence des deux sommes est précisément la somme des forces vives dues aux vitesses perdues par chaque point."

In 't voorafgaande zagen wij, dat Sturm zijn theorema afleidt uit de vergelijking:

$$\Sigma\ m\ [(a - a_1)\ \delta x + (b - b_1)\ \delta y + (c - c_1)\ \delta z] = o.$$

Tot deze vergelijking was ook Duhamel gekomen, evenwel langs een anderen weg als Sturm.

Duhamel's beschouwingen over het beginsel van Carnot komen op 't volgende neer. 1)

Men heeft een systeem van lichamen door zekere voorwaarden aan elkander verbonden en waarop eenige krachten werken. Op een gegeven oogenblik ontstaan er tusschen de lichamen van dit systeem werkingen, die twee aan twee gelijk en tegengesteld zijn, hetzij door de botsing van deze lichamen, hetzij door eenige andere oorzaak; door deze werkingen, die een zeer korten tijd aanwezig zijn, zijn de grootte en richtingen van de snelheden met eindige grootheden veranderd.

Beschouw nu een van deze lichamen, waarvan de massa m is; laat a, b en c de componenten van de snelheid vóór en a', b' en c' die oogenblikkelijk na de verandering zijn, verder N de oogenblikkelijke kracht, die dezelfde uitwerking op het lichaam zou hebben, als de drukking afkomstig van 't lichaam, dat tegen het beschouwde lichaam stoot. Op dit lichaam werken dus de krachten:

$$N,\ m\,(a - a'),\ m\,(b - b')\ \text{en}\ m\ (c - c').$$

Voor al de lichamen van 't systeem geldt dus deze vergelijking:

$$\Sigma\ m\,[(a - a')\,\delta x + (b - b')\,\delta y + (c - c')\delta z] + \Sigma\ N\delta n = 0.$$

Hierin zijn de krachten N twee aan twee gelijk en tegengesteld en wanneer men nu een zoodanige virtueele verplaatsing neemt, dat voor de gelijke krachten δn dezelfde waarde heeft, dan wordt $\Sigma\ N\delta n = o$. Nu is volgens Duhamel voor dit laatste volstrekt niet noodig aan te nemen, dat de aangrijpingspunten van deze krachten gelijke en evenwijdige virtueele snelheden verkregen hebben — de compo-

1) J. M. C. Duhamel: sur la perte de force vive qu' éprouve un système, dans lequel il s'opère des changements brusques de vîtesse; lu à l'Académie des Sciences le 29 Oct. 1832.

Men vindt deze verhandeling in het Journal de l'Ecole Royale Polytechnique, Tome XV (1835).

nenten van deze snelheden volgens den normaal behoeven slechts gelijk en van dezelfde richting te zijn. Voor de virtueele verplaatsingen, die aan deze voorwaarden voldoen, heeft men derhalve

$$\Sigma\, m\, [(a - a')\, \delta x + (b - b')\, \delta y + (c + c')\, \delta z] = o$$

Omdat de virtueele verplaatsingen aan zekere voorwaarden verbonden zijn, zijn δx, δy en δz in deze vergelijking niet meer willekeurig.

Men zal nu volgens Duhamel voor de virtueele slechts dan de ware verplaatsingen, die het systeem heeft op 't oogenblik volgende op de plotselinge verandering, mogen nemen, als de punten, waartusschen de werking geweest is, verkregen zullen hebben op het oogenblik, dat ze heeft opgehouden, snelheden waarvan de componenten volgens de richting van deze werking dezelfde is. Dit heeft alleen plaats bij de botsing van lichamen, die niet veerkrachtig zijn, en nooit bij zulke, die eenigen graad van veerkracht bezitten.

Uit het voorafgaande volgt nog volgens Duhamel, dat de voorafgaande vergelijking in elk geval doorgaat, als er, vóór dat de plotselinge verandering geheel tot stand is gekomen, door de een of andere oorzaak een oogenblik is, waarop de lichamen, waartusschen de werking bestaat, een gelijke snelheid volgens den normaal verkregen hebben; daardoor zal men een betrekking hebben tusschen de snelheden even vóór de plotselinge veranderingen en die op dat bijzondere oogenblik.

Laat a, b, c, a', b', c' en m dezelfde beteekenis hebben als boven, terwijl k voorstelt den graad van veerkracht 1) van de lichamen, die met elkander in botsing komen. De componenten van de snelheid zijn dan gedurende de botsing respectievelijk vermeerderd met $a' - a$, $b' - b$ en $c' - c$.

Wanneer nu de punten, die met elkander in aanraking zijn, dezelfde snelheid in de richting van den normaal zullen verkregen hebben, dan zal de oogenblikkelijke kracht, die men stellen kan in plaats van de drukkingen, die er tot dat oogenblik tusschen de lichamen geweest zijn, staan tot die, welke de werking van de drukkingen gedurende het tweede gedeelte van de botsing kan vervangen,

---

1) De graad van veerkracht is volgens Duhamel: „le rapport entre les quantités, dont varient les vîtesses pendant la seconde et la première partie du choc."

als 1 tot k, want de oogenblikkelijke krachten zijn evenredig met de snelheden, die zij aan dezelfde massa mededeelen. Daarenboven ondergaan de snelheden van alle punten van het systeem door de werking van de oogenblikkelijke krachten veranderingen evenredig aan die krachten 1). De componenten van de snelheid zullen nu respectievelijk bedragen:

$$\frac{a'-a}{1+k},\ \frac{b'-b}{1+k}\ \text{en}\ \frac{c'-c}{1+k}$$

waardoor de vergelijking verandert in:

$$\Sigma\, m \left(\frac{a'-a}{1+k}\,\delta k + \frac{b'-b}{1+k}\,\delta y + \frac{c'-c}{1+k}\,\delta z\right) = o$$

terwijl δx, δy en δz evenredig zijn aan de componenten van de snelheid van 't punt m op 't oogenblik, dat de samendrukking tusschen de lichamen, die met elkander in botsing zijn, ophoudt.

Daar deze componenten evenredig zijn met

$$a + \frac{a'-a}{1+k},\ b + \frac{b'-b}{1+k}\ \text{en}\ c + \frac{c'-c}{1+k}$$

$$\text{of}\ \frac{a'+ak}{1+k},\ \frac{b'+bk}{1+k}\ \text{en}\ \frac{c'+ck}{1+k}$$

wordt de laatste vergelijking na vermenigvuldiging met $(1+k)^2$

$$\Sigma\, m\left[(a'-a)(a'+ak) + (b'-b)(b'+bk) + (c'-c)(c'+ck)\right] = o$$

$$\text{of}\ \Sigma\, m\left[a'^2+b'^2+c'^2 - k(a^2+b^2+c^2) + (k-1)(a'a+b'b+c'c)\right] = o$$

Stelt men hierin $a'^2+b'^2+c'^2 = v_1^2$, $a^2+b^2+c^2=v^2$ en $(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2 = u_1^2$, dan krijgt men, in aanmerking nemende dat $a'a+b'b+c'c = \dfrac{v^2+v_1^2-u_1^2}{2}$ is:

1) Deze stelling is volgens Duhamel een bijzonder geval van de volgende, die men uit de algemeene vergelijking van de beweging kan afleiden:

„les vîtesses initiales produites par plusieurs systèmes de forces instantanées, qui agissent simultanément sur des points materiels liés entre eux d'une manière quelconque sont les résultantes de celles qui correspondraient separément à chacun de ces systèmes."

$$\Sigma\ m\left[v_1^2 - kv^2 + (k-1)\left(\frac{v^2 + v_1^2 - u_1^2}{2}\right)\right] = o$$

$$\text{of}\quad \Sigma\ (1+k)\ (\Sigma\ mv_1^2 - \Sigma\ mv^2) = (k-1)\ \Sigma\ mu_1^2$$

$$\text{of}\quad \Sigma\ mv^2 - \Sigma\ mv_1^2 = \frac{1-k}{1+k}\ \Sigma\ mu_1^2$$

Deze formule stelt het verlies van de levendige kracht voor, dat eenig systeem ondergaat, wanneer er gelijktijdige botsingen plaats grijpen tusschen de lichamen, die denzelfden graad van veerkracht bezitten.

Veronderstelt men, dat de lichamen volkomen onveerkrachtig zijn, dan moet men $k = o$ nemen en de vergelijking wordt:

$$\Sigma\ mv^2 = \Sigma\ mv_1^2 + \Sigma\ mu_1^2$$

welke verg. het beginsel van Carnot uitdrukt.

Bij volkomen veerkrachtige lichamen is $k = 1$ en de verg. wordt.

$$\Sigma\ mv^2 - \Sigma\ mv_1^2 = o$$

waaruit volgt, dat in dit geval de som van de levendige krachten dezelfde blijft 1).

Den meest algemeenen vorm van 't beginsel van Carnot vinden wij bij Coriolis 2), wiens beschouwingen wij hier in 't kort zullen meedeelen.

Bij de botsing van twee systemen van lichamen zullen de moleculen van een zelfde lichaam hun onderlinge afstanden veranderen; door de botsing ontstaan trillingen (ébranlements), waarmede de theorie rekening moet houden. Wanneer evenwel de lichamen vast zijn, dan mag men aannemen, dat die verandering in afstand zeer weinig bedraagt gedurende den zeer korten tijd, die noodig is om de ver-

1) De nieuwere theorie over de botsing in verband met de leer der elasticiteit en de invoering van den elasticiteit-coëfficiënt had ik hier kunnen laten volgen. Ik verwijs hierover naar Duhamel's geschriften.

2) G. Coriolis: traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines, séconde édition, 1844.

anderingen in snelheid te bewerkstelligen; de mededeeling van de beweging heeft in een zeer kort tijdsverloop plaats.

Beschouwen wij de beweging van iedere molecule gedurende den zeer korten duur van de botsing, gedurende welks tijdsverloop er een plotselinge verandering in haar snelheid plaats heeft; deze molecule zal onderworpen zijn aan de werkingen van alle moleculen, die in de nabijheid zijn en aan de uitwendige krachten (b. v. de zwaartekracht). Als men nu voor de virtueele snelheid van iedere molecule die neemt, welke voort zou vloeien door aan te nemen, dat er geen trillingen plaats hebben en dat de moleculen van ieder lichaam hun onderlinge afstanden bewaren, dan zullen de virtueele momenten van de wederzijdsche werkingen der moleculen van een zelfde lichaam elkaar opheffen en zal men overhouden die van de uitwendige krachten, welke men voor kan stellen door $P\delta p$ en die van de werkingen van de moleculen van twee verschillende lichamen, die in de nabijbeid van de punten van aanraking zijn; deze laatste stellen wij voor door $R\delta r$. Men heeft dus:

$$\Sigma\, m \left(\frac{du}{dt}\,\delta x + \frac{dv}{dt}\,\delta y + \frac{dw}{dt}\,\delta z\right) = \Sigma\, P\delta p + \Sigma\, R\delta r$$

waarin u, v en w de componenten van de snelheid volgens de assen zijn.

Door de keus van de virtueele snelheden δx, δy en δz zullen zij voor iedere molecule slechts afhangen van de plaats van de oogenblikkelijke as van omwenteling van 't systeem, waartoe de molecule behoort en van de plaats van deze molecule ten opzichte van de as. Gedurende den zeer korten duur van de botsing kan deze as als onveranderlijk beschouwd worden en daar, gelijk verondersteld is, de moleculen gedurende dit tijdsverloop zich weinig verschikken, zullen de virtueele snelheden uiterst weinig veranderlijk zijn, hoewel de werkelijke snelheden het aanzienlijk zijn. Men mag daarom bovenstaande vergelijking ten opzichte van den tijd gedurende den duur van de botsing integreeren, δx, δy en δz als constant beschouwende.

Zijn nu u_0, v_0 en w_0 de snelheden vóór en u_1, v_1 en w_1 na de botsing, dan heeft men:

$$\Sigma\, m\left[(u_1 - u_0)\,\delta x + (v_1 - v_0)\,\delta y + (w_1 - w_0)\,\delta z\right] =$$
$$\Sigma \int P\delta p\, dt + \Sigma \int R\delta r\, dt.$$

Daar de uitwendige krachten P, die gewoonlijk het gewicht van de moleculen zijn, niet in staat zijn plotseling de snelheden te veranderen, zijn ze zeer klein in vergelijking met de moleculaire werkingen, die deze plotselinge veranderingen voortbrengen. Door het zeer korte tijdverloop, waartusschen men integreert, kunnen deze uitwendige krachten P slechts termen geven, die zoo weinig waarde hebben met betrekking tot het eerste lid van deze vergelijking, dat zij verwaarloosd kunnen worden. Men heeft daardoor:

$$\Sigma m \; [(u_1 - u_0)\,\delta x + (v_1 - v_0)\,\delta y + (w_1 - w_0)\,\delta z] = \Sigma \int R\delta r\, dt.$$

Men kan nu het tweede lid zoo veranderen, dat het slechts tangentiëele krachten bevat. Wel kunnen de lichamen gedurende de botsing elkander samendrukken en zullen dus de snelheden, die normaal zijn op de aanrakingsoppervlakken, niet gelijk zijn, maar men kan door de keuze van de virtueele snelheden de lichamen beschouwen als vast geworden en daardoor de werkelijke samendrukking buiten rekening houden, veronderstellende dat het eene lichaam tegen het andere in de punten van aanraking glijdt. In dat geval heeft het virtueele element δr, dat behoort bij twee in elkaar's nabijheid gelegen moleculen, waartusschen de kracht R werkt, een normale component, die gelijk nul is; de virtueele arbeid van de kracht wordt dus herleid tot die van de component F volgens het raakvlak, het 2de lid van de vergelijking wordt daardoor $\Sigma \int F\delta f \cos(F\delta f)\, dt$, waarin δf genomen moet worden volgens de virtueele en niet volgens de werkelijke beweging.

Men heeft dus nu:

$$\Sigma m \; [(u_1 - u_0)\,\delta x + (v_1 - v_0)\,\delta y + (w_1 - w_0)\,\delta z] = \Sigma \int F\delta f \cos(F\delta f)\; dt.$$

Maar wanneer de virtueele beweging zoodanig gekozen is, dat het eene lichaam glijdt over 't andere, dan zullen de virtueele elementen δf voor alle moleculen, die met elkander in aanraking zijn en wel gedurende 't geheele tijdsverloop van de aanraking, gelijk zijn; waaruit volgt, dat δf onafhankelijk zal zijn van de plaats van het beschouwde element. Ook is het onafhankelijk van den tijd, even als alle virtueele snelheden door de veronderstelling, die gemaakt is, omtrent den korten duur van de botsing.

In plaats van de laatste vergelijking mag men dus schrijven:

$$\Sigma m \; [(u_1 - u_0\,\delta x + (v_1 - v_0)\,\delta y + (w_1 - w_0)\,\delta z] = \Sigma\, \delta f\, \Sigma \int F \cos(F\delta f)\, dt$$

waarin 't eerste Σ van het tweede lid geldt voor de verschillende aanrakingen van 't lichaam en het tweede voor alle moleculen, die in de nabijheid van een zelfde aanrakingspunt zijn.

In deze vergelijking is $\Sigma \int F \cos(F\delta f)\, dt$, welke uitdrukking wij ter verkorting voor elk contact door F zullen voorstellen: de som van de hoeveelheden van beweging, die gedurende de botsing van de wrijving afkomstig zijn 1). Het tweede lid van de voorafgaande vergelijking wordt nu $\Sigma F\delta f$, waarin Σ dezelfde beteekenis heeft als het eerste sommatieteeken van het tweede lid van de voorafgaande vergelijking. Men heeft dus:

$$\Sigma m \left[(u_1 - u_0)\delta x + (v_1 - v_0)\delta y + (w_1 - w_0)\delta z\right] = \Sigma F\delta f \quad \text{of}$$

$$\Sigma m (u_1 \delta x + v_1 \delta y + w_1 \delta z) = \Sigma m (u_0 \delta x + v_0 \delta y + w_0 \delta z) + \Sigma F \delta f.$$

Met behulp van de gemiddelde bewegingen (mouvements moyens 2) kan men uit de laatst gevonden uitdrukking een betrekking afleiden, wanneer er op het oogenblik, dat men de snelheden u_1, v_1 en w_1 heeft, nog trillingen (ébranlements) tusschen de moleculen zijn. Zijn de componenten voor deze gemiddelde beweging u_m, v_m en w_m, dan krijgt men, gelijk Coriolis aantoont 3) voor die beweging:

$$\Sigma m (u_m \delta x + v_m \delta y + w_m \delta z) = \Sigma m (u_0 \delta x + v_0 \delta y + w_0 \delta z) + \Sigma F\delta f.$$

Als nu op het einde van de botsing, op het oogenblik waarvoor men de gemiddelde snelheden u_m, v_m en w_m neemt, de lichamen nog met elkander in aanraking zijn, dan zullen deze zelfde gemiddelde snelheden, nog in overeenstemming zijnde met de verbindingen van het systeem gedurende de botsing, voor de virtueele snelheden genomen mogen worden; de laatste vergelijking wordt na deeling door dt:

---

1) Coriolis zegt, dat $\Sigma \int F \cos(F\delta f)\, dt$ voorstelt: „la quantité de mouvement due à une force tangentielle que l'expérience a donnée comme résultant de toutes les actions dans ce sens qui sont dues au contact."

2) Coriolis noemt: „le mouvement, que prendrait le système s'il venait à être solidifié dans l'état où il se trouve à un instant quelconque, son *mouvement moyen* pour cet instant."

3) Zie Coriolis: Traité de la mécanique des corps solides et du calcul des machines, alsmede het Journal de l'Ecole Royale Polytechnique Tome XV.

$$\Sigma\, m\,(u_0\, u_m + v_0\, v_m + w_0\, w_m) - \Sigma\, m\,(u^2_m + v^2_m + w^2_m) + \Sigma\, F \frac{\delta_m f}{dt} = o$$

Plaatst men hierin:

$$u_0\, u_m = \tfrac{1}{2}\,[u_0^2 + u_m^2 - (u_0 - u_m)^2]$$

en de overeenkomstige vormen voor $v_0\ v_m$ en $w_0\ w_m$, dan krijgt men:

$$\Sigma \tfrac{m}{2}\,(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 +) - \Sigma \tfrac{m}{2}\,(u^2_m + v^2_m + w^2_m) = \Sigma \tfrac{m}{2}\,[(u_0 - u_m)^2 + (v_0 - v_m)^2 + (w_0 - w_m)^2] - \Sigma\, F \frac{\delta_m f}{dt}.$$

Deze vergelijking bevat nu het theorema van Carnot voor de botsing van niet veerkrachtige lichamen, dat is voor zulke, die na de botsing vereenigd blijven in hun aanrakingspunten. Voor deze lichamen is dus: het verschil tusschen de levendige kracht, die behoort bij de snelheden vóór de botsing en die, welke behoort bij de gemiddelde snelheden na de botsing gelijk aan de som van twee termen: 1° de levendige kracht afkomstig van de verloren of gewonnen snelheden door de uitwerking van de botsing, d. w. z. van die snelheden, welke gecombineerd met die, welke men na de botsing heeft, tot resultante zouden geven, die, welke men vóór de botsing heeft, 2° de som van de producten van de hoeveelheden van beweging afkomstig van de wrijving gedurende de botsing.

Hieruit blijkt, dat volgens Coriolis ook rekening moet gehouden worden met de wrijving.

Lichamen, die na de botsing met elkander vereenigd blijven, zijn er niet. Als men evenwel van deze onderstelling gebruik maakt, dan geschiedt dit om het maximum van verlies door de botsing te krijgen. In de werkelijkheid zullen de lichamen na de botsing door de moleculaire werking van elkander afgaan; aan dit streven om zich door de moleculaire werking van elkander te verwijderen, heeft men den naam van veerkracht gegeven, terwijl men meer of minder volkomen veerkracht onderscheidt. Twee lichamen noemt men volkomen veerkrachtig, wanneer hunne moleculen na de botsing dezelfde plaats innemen, als er voor; terwijl de onderlinge werkingen, wanneer de lichamen van elkander afgaan zich zoo veranderen, evenwel in omgekeerden zin, als dit in het eerste gedeelte van de botsing plaats heeft. In dat geval zal er door de botsing geen verlies van levendige kracht plaats hebben; door dat de werkingen van de moleculen op elkander dezelfde waarde weer krijgen als de afstanden dezelfde zijn, zal $\Sigma R\delta r = o$ zijn, wanneer men sommeert van het begin van de verplaatsing tot het einde toe.

In het boven aangehaalde werk van Coriolis, alsmede in zijn: théorie mathematique des effets du jeu de billard, waarin men de botsing van lichamen zeer uitvoerig behandeld vindt, houdt hij rekening met den verschillenden graad van veerkracht, die de lichamen bezitten, als mede met het verlies van levendige kracht door de wrijving 1). Waar zijn theoretische beschouwingen te kort schieten, maakt hij gebruik van proeven. Wil men bij de botsing, gebruik maken van het door Coriolis gewijzigde beginsel van Carnot, dan zal men dit wel altijd moeten doen, omdat het onmogelijk is a priori te berekenen, hetgeen er bij de botsing plaats zal hebben. Men moet dan den zuiver mathematischen weg verlaten en zich begeven op het terrein van den physicus.

---

1) In Coriolis: théorie math. etc. vindt men een afzonderlijk hoofdstuk, waarin hij de botsing van lichamen behandelt in verband met de wrijving tusschen de lichamen gedurende de botsing.

STELLINGEN.

I.

Het beginsel van CARNOT over het verlies van levendige kracht bij de botsing van lichamen moet genoemd worden dat van STURM, beter nog dat van CORIOLIS.

II.

De wijze, waarop CARNOT $\Sigma MW^2 = \Sigma MV^2$ afleidt, is niet juist. (Principes fondamentaux de l' équilibre et du mouvement p. 148)

III.

In jeder Wissenschaft kann die Geschichte ihres Werdens mehr oder minder eine indirecte Anweisung für das Studium sein.

DÜHRING.

IV.

Wat F. DE BOER (Academisch proefschrift, aanhangsel) zegt omtrent de voorwaarden voor het gelijktijdig bestaan van eenige lineaire partiëele differentiaalvergelijkingen met dezelfde onafhankelijk en afhankelijk veranderlijken in het geval, dat er meer onafhankelijk veranderlijken dan vergelijkingen zijn, is niet waar.

V.

Een eerst leerboek voor de beoefening der meetkunde moet niet meer dan het volstrekt noodzakelijke bevatten.

VI.

Door de verdampingstheorie kunnen de bewegingen van radiometers niet verklaard worden.

VII.

De verklaring, die JOHNSTONE STONEY van de bewegingen van radiometers geeft, is onhoudbaar.

VIII.

Ten onrechte beweert GOOSSENS (Academisch proefschrift): «bij de beweging van vloeistoffen heeft er geen glijding langs den wand plaats.»

IX.

Het bewijs, dat Dr. O. E. MEIJER geeft van de wet van MAXWELL over den waarschijnlijksten toestand van de inwendige beweging van een gas, is niet juist.

X.

ZACHARIAS JANSEN (JANSZOON) is niet de uitvinder van den verrekijker.

XI.

De New-Yorksche voorspellingen van stormen hebben nu nog weinig waarde voor de praktijk.

XII.

LIEBIG's vleeschextract heeft als voedingsmiddel weinig waarde.

XIII.

NÄGELI's oordeel omtrent de onschadelijkheid van slecht drinkwater is niet genoeg gemotiveerd om zorgeloosheid en onverschilligheid op dit punt te rechtvaardigen.

XIV.

De nevelhypothese van LAPLACE is na de ontdekking van de wachters van Mars niet onhoudbaar geworden.

XV.

Ten onrechte beweert GÖTHE: «dass der Verfasser der Physico-Mathesis» (Grimaldi) «in allen Subtilitäten der Dialektik geübt sei, dass seine Darstellungsweise problematisch, ja ironisch sei, welches einer so ernsten folgerechten Arbeit eine ganz wunderliche Wendung gebe.»

XVI.

Je tiefer man eindringt in das Wesen der Naturkräfte, desto mehr erkennt man den Zusammenhang von Phänomenen, die lange vereinzelt und oberflächlich betrachtet, jeglicher Anreihung zu widerstreben scheinen; desto mehr werden Einfachheit und Gedrängtheit der Darstellung möglich.

ALEX. VON HUMBOLDT.

Fig. 1.

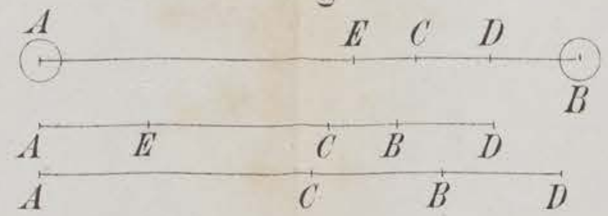


Fig. 2.

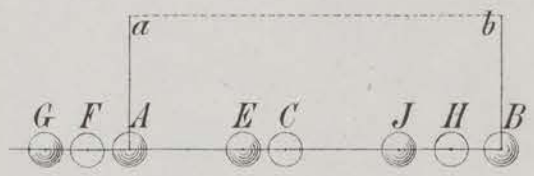


Fig. 3.

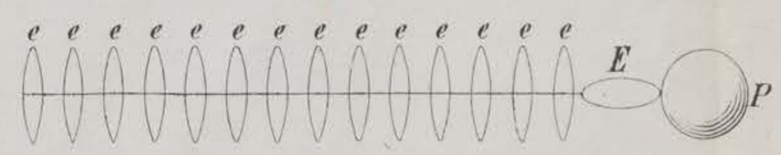


Fig. 4.

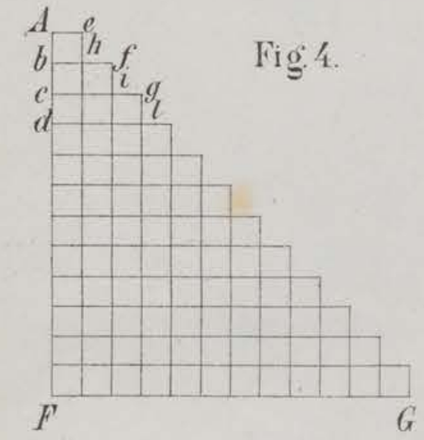
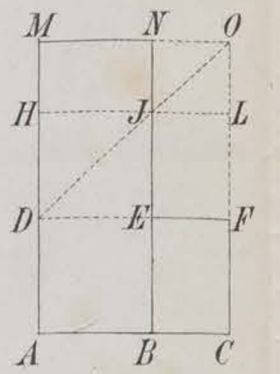


Fig. 5.



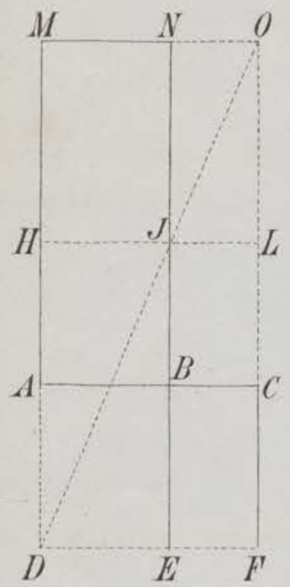


Fig. 6.

Fig. 7.

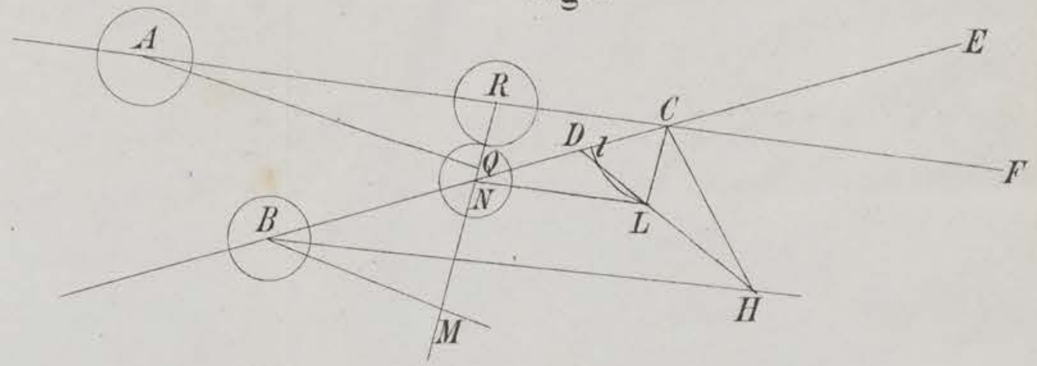


Fig. 9.

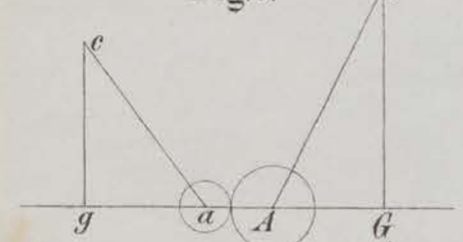


Fig. 8.

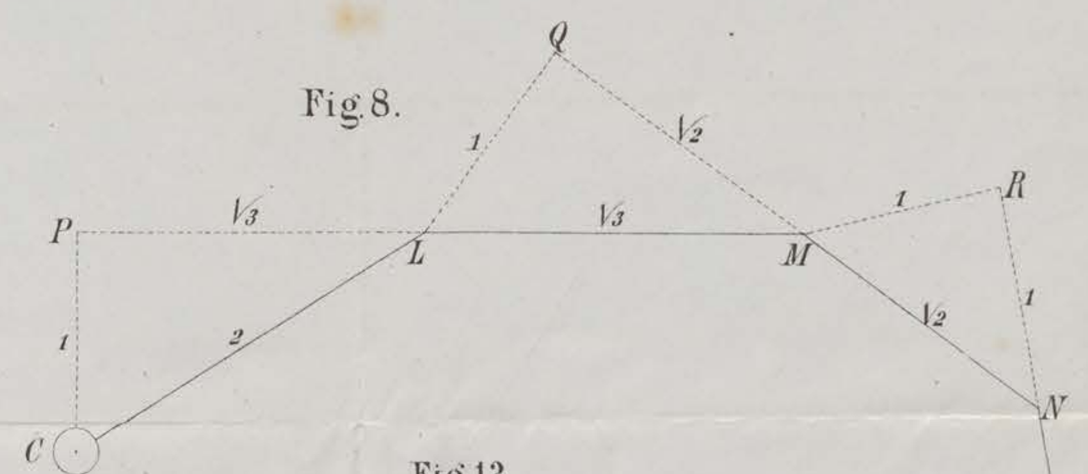


Fig. 10.

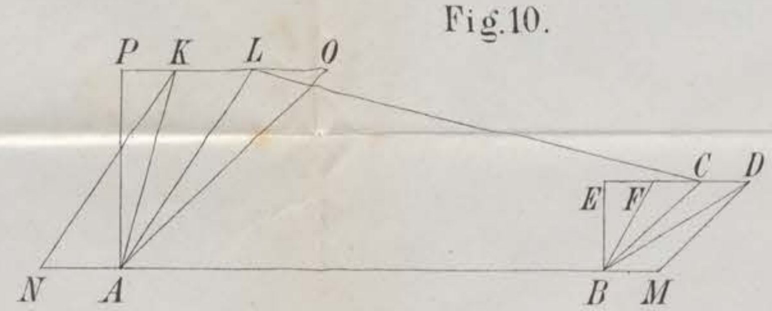


Fig. 11.

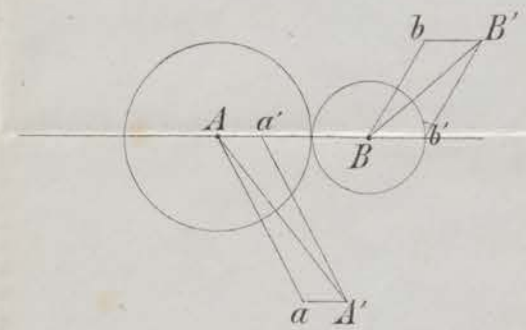
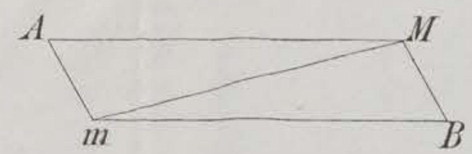


Fig. 12.



Gedrukt bij G. J. Thieme, te Arnhem.