6

BESCHOUWINGEN
OVER DEN
LOOP DER LICHTSTRALEN EN DE BEELDVORMING IN OPTISCHE STELSELS

P. G. TIDDENS.

D. Leiden 1904

6

BESCHOUWINGEN OVER DEN LOOP DER LICHTSTRALEN

EN DE

BEELDVORMING IN OPTISCHE STELSELS.

DRUK VAN EDUARD IJDO. — LEIDEN.

Beschouwingen over den loop der lichtstralen en de beeldvorming in optische stelsels.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. H. KAMERLINGH ONNES,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

OP

Donderdag 7 Juli 1904, des namiddags te 4 uur,

DOOR

PIETER GERLOF TIDDENS,

GEBOREN TE VEENDAM.

BREDA,
FIRMA P. C. G. PEEREBOOM.
1904.

AAN MIJNE VROUW.

Bij het voltooien van dit proefschrift rust op mij de aangename taak U, Hooggeleerde Lorentz, *hooggeachte Promotor, mijn hartelijken dank te betuigen voor den grooten steun, dien ik van U bij het samenstellen van dit proefschrift heb ondervonden en voor de bereidwilligheid, waarmede Gij U beschikbaar steldet, om mij, die geen leerling der Leidsche Hoogeschool was, in dezen tot leidsman te willen zijn.*

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om U, Hoogleeraren van de faculteit der Wis- en Natuurkunde der Groningsche Hoogeschool dank te zeggen voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen.

HOOFDSTUK I.

COLLINEAIR VERBAND TUSSCHEN TWEE VLAKKE STELSELS.

De baan van een lichtstraal die zich door verschillende homogene middenstoffen voortplant, is in het algemeen een gebroken lijn, die uit zooveel rechte deelen bestaat als het aantal dier middenstoffen bedraagt. Is een der deelen van deze gebroken lijn gegeven, dan zijn hare overige deelen door de wetten der breking volkomen bepaald. Van een meetkundig standpunt beschouwd heeft men hier dus te doen met een aantal rechte lijnen, tusschen welke een zoodanig verband bestaat, dat als een der rechten gegeven is, alle overige daardoor bepaald zijn.

Iedere rechte der ruimte kan dan gerekend worden hetzij tot de eene, hetzij tot de andere der verschillende middenstoffen te behooren, zoodat men evenveel stelsels van rechten krijgt als het aantal dier middenstoffen bedraagt. Deze stelsels van rechten staan twee aan twee zoo met elkaar in verband, dat met een gegeven rechte van het eene stelsel steeds een bepaalde rechte van het andere stelsel overeenkomt.

Het is duidelijk dat een dergelijke overeenkomst nog wel op andere manier dan door de brekingswetten bepaald kan worden.

In het algemeen komen met alle door één punt gaande rechten van het eene stelsel rechten in het andere stelsel overeen, die niet door een zelfde punt gaan, en behooren bij rechten van het eene stelsel, die in een plat vlak liggen, rechten van het andere stelsel, die niet in een zelfde plat vlak gelegen zijn.

In plaats van de verschillende rechten der ruimte kan men ook de verschillende punten der ruimte tot twee verschillende stelsels rekenen te behooren, en dan tusschen de punten dier stelsels een zoodanig verband vastleggen, dat met een punt der ééne ruimte een enkel punt der andere ruimte overeenkomt en omgekeerd.

In het volgende zullen we ons bezighouden met twee bij elkaar behoorende stelsels van rechten en punten, waarbij de elementen van elk der stelsels in een plat vlak gelegen zijn. Het verband dat er tusschen de elementen van de beide stelsels zal bestaan, kiezen we zoodanig, dat met een bundel van rechten (d. w. z. met rechten die door één punt gaan) van het eene stelsel steeds een bundel van rechten in het tweede stelsel overeenkomt, terwijl we blijven onderstellen, dat bij een rechte van het eene stelsel altijd een enkele rechte van het tweede stelsel behoort. Door dit verband is tegelijkertijd een verband tusschen de punten van beide stelsels vastgelegd. Twee overeenkomstige punten P en P' zijn n.l. de toppen van twee bij elkaar behoorende stralenbundels. Men spreekt in een dergelijk geval van twee *collineaire* vlakke stelsels. Het collineaire verband komt dus daarop neer, dat met een lijn l door een punt P van het eene stelsel in het andere stelsel een lijn l' overeenkomt, die gaat door P'.

Vallen de vlakken waarin de twee stelsels gelegen zijn samen, dan worden de collineaire stelsels *conjectief* genoemd. Ieder element van dat vlak kan gerekend worden te behooren zoowel tot het eene als tot het andere stelsel; gerekend tot het eene stelsel heeft het natuurlijk een andere overeenkomstige dan wanneer het tot het andere stelsel gerekend wordt. Het kan echter gebeuren dat een element met zijn overeenkomstige in het andere stelsel samenvalt; bij de vlakke collineatie is dit in 't algemeen het geval met drie punten en met drie door die punten gaande lijnen (dubbelpunten en dubbellijnen). Er kunnen zich daarbij wat de ligging en de eigenschappen dier dubbelpunten en dubbellijnen betreft, nog verschillende min of meer bijzondere gevallen voordoen; zoo kunnen bijv. een of twee van die elementen in 't oneindige komen te liggen; verder kunnen alle punten eener dubbellijn dubbelpunten zijn, in welk geval alle rechten door het dubbelpunt dat niet op die dubbellijn ligt, met zich zelf overeenkomende lijnen zijn.

Uit de voor het collineair gelegen zijn van twee vlakke stelsels gegevene definitie volgt de stelling: wanneer een stelsel A collineair is met een stelsel B en eveneens met een stelsel C, dan zijn B en C ook onderling collineair.

Verder is het duidelijk dat met een bepaalde meetkundige plaats van punten of met een bepaalde omhullende van rechten in het eene stelsel, in het andere stelsel een meetkundige plaats van denzelfden graad of een omhullende van dezelfde klasse overeenkomt.

Tusschen twee stelsels van veranderlijke grootheden x, y en x', y' kan een zoodanig verband bestaan, dat vooreerst met een bepaald stel waarden van x en y één enkel stel waarden van x' en y' overeenkomt en omgekeerd, en dat ten tweede met een betrekking van den eersten graad tusschen het eene paar veranderlijken een betrekking van den zelfden aard tusschen het andere paar overeenkomt. Dit is, zooals men aanstonds ziet, het geval, wanneer tusschen x, y en x', y' het volgende verband bestaat,

$$x' = \frac{a + bx + cy}{p + qx + ry}, \quad y' = \frac{d + ex + fy}{p + qx + ry} \quad \ldots\ldots (1)$$

Zijn nu x, y en x', y' de coördinaten van een element, hetzij punt of rechte, in twee verschillende vlakke stelsels van rechten en punten, dan drukken de vergelijkingen (1) dus een collineair verband uit, dat er tusschen de elementen der twee stelsels bestaat.

In het volgende zal bewezen worden, dat een collineair verband altijd door vergelijkingen van dezen vorm kan worden voorgesteld. Voor dit bewijs denken we ons drie punten A', B', C' en de daardoor bepaalde lijnen $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ van het tweede van twee collineaire vlakke stelsels, overeenkomende resp. met de drie punten A, B en C en de drie lijnen AB, AC, BC van het eerste stelsel (fig. 1). Verder komen de punten P' en Q' der lijnen $A'B'$ en $A'C'$ met de oneindig ver gelegen punten P en Q der lijnen AB en AC overeen; een lijn uit C evenwijdig aan AB heeft tot overeenkomstige de lijn $C'P'$; de lijn uit B evenwijdig aan AC de lijn $B'Q'$, terwijl met het parallelogram $ABEC$ de vierhoek $A'B'E'C'$ overeenkomt.

In het parallelogram trekken we de diagonalen en door hun snijpunt F een lijn evenwijdig aan AP; door C en het snijpunt G van deze laatste lijn met BE wordt een lijn getrokken, die AP in H snijdt. Om in het tweede stelsel de overeenkomstige constructie uit te voeren trekken we de diagonalen in $A'B'E'C'$, verbinden hun snijpunt F' met P' en trekken de lijn $C'G'$, die $A'P'$ in H' snijdt. Met het punt H' is het overeenkomstige van het punt H gevonden, terwijl uit de afleiding blijkt dat men nu ook de overeenkomstigen van al die punten van AP kan vinden, die, bij H beginnende, telkens op denzelfden afstand AB van elkaar verwijderd zijn.

De punten A', B', H' en P' liggen volgens een eigenschap der volledige vierzijde harmonisch, waaruit volgt dat de grootheden $\frac{1}{A'P'}$, $\frac{1}{B'P'}$, $\frac{1}{H'P'}$ een rekenkundige reeks vormen.

Zij nu x de afstand van een of ander punt der lijn AP tot het punt A, u de afstand van het overeenkomstige punt tot A' en $A'P' = \alpha$. Dan zal volgens het bovenstaande $\frac{1}{\alpha - u}$ met gelijke verschillen opklimmen, wanneer dit met x het geval is. Derhalve is $\frac{1}{\alpha - u}$ een lineaire fuctie van x, zoodat, daar voor $x = 0$ ook $u = 0$ is

$$\frac{1}{\alpha - u} = \frac{1}{\alpha} + kx$$

waarin k een constante is; of

$$u = \frac{\alpha^2 kx}{1 + \alpha kx}.$$

Verder noemen wij den afstand, waarop een punt van AQ van A verwijderd is, y, v den afstand van het overeenkomstige punt tot A' en stellen $A'Q' = \beta$; dan is eveneens

$$v = \frac{\beta^2 ly}{1 + \beta ly},$$

als l een constante is.

We kiezen thans de lijnen AP en AQ tot x- en y as, de lijnen $A'P'$ en $A'Q'$ tot x'- en y'-as. Zij R (fig. 2) een willekeurig punt met de coördinaten x en y. Het overeenkomstige van dit punt vinden we door RS en RT evenwijdig aan QA en PA te trekken, de punten S' en T' op te zoeken, die met S en T overeenkomen, en dan $S'Q'$ en $T'P'$ te trekken. Deze lijnen zijn de overeenkomstigen van SR en TR; hun snijpunt is dus het gezochte punt R'.

Daar $A'S'$ de waarde u en $A'T'$ de waarde v heeft, zijn de vergelijkingen der lijnen $S'Q'$ en $T'P'$:

$$\frac{x'}{u} + \frac{y'}{\beta} = 1 \text{ en } \frac{x'}{\alpha} + \frac{y'}{v} = 1 .$$

Hieruit volgt, in verband met de gevonden waarden voor u en v,

$$x' = \frac{\alpha^2 kx}{1 + \alpha kx + \beta ly}, \quad y' = \frac{\beta^2 ly}{1 + \alpha kx + \beta ly} \quad \ldots . \quad (2)$$

en dit zijn betrekkingen van den vorm der vergelijkingen (1).

De coördinaat-assen waren in het bovenstaande zoo gekozen, dat de x'- en y'-as resp. de overeenkomstige lijnen waren van de x- en y-as. Nemen we als x'- en y'-as twee willekeurige lijnen, dan kunnen de nieuwe coördinaten door geheele functie's van den eersten graad in de boven gebezigde x' en y' worden uitgedrukt. Substitutie in die functiën van de waarden (2) geeft dan weer vergelijkingen van den vorm (1).

Men kan aantoonen, dat de collineatie bepaald is door vier paar overeenkomstige lijnen (mits deze voldoen aan de voorwaarde, dat in elk stelsel niet drie van de vier lijnen door één punt gaan) of vier paar overeenkomstige punten (mits deze voldoen aan de voorwaarde, dat in elk stelsel niet drie van de vier punten op een rechte liggen).

Een geheel willekeurige collineaire overeenkomst van twee vlakke stelsels kan dus door de vergelijkingen (1) worden uitgedrukt. De in deze vergelijkingen gebruikte coördinaten waren tot nog toe punt-coördinaten. We kunnen de elementen van het platte vlak ook voorstellen door lijn-coördinaten; tusschen de lijn-coördinaten van overeenkomstige lijnen van twee collineaire stelsels zullen dan ook betrekkingen bestaan van den vorm (1).

De vergelijkingen (1) kunnen ook geschreven worden in den vorm:

$$x = \frac{Q + Bx' + Ey'}{P + Ax' + Dy'}, \quad y = \frac{R + Cx' + Fy'}{P + Ax' + Dy'} \quad \ldots (1').$$

Bij het gebruiken der betrekkingen (1) om de meetkundige collineatie van twee vlakke stelsels algebraïsch voor te stellen, zullen we in de eerste plaats aannemen, dat de veranderlijken punt-coördinaten voorstellen, de coördinaat-assen zullen we steeds loodrecht op elkaar aannemen.

Gebruik makende van de algebraïsche voorstelling der meetkundige collineatie, kan men aantoonen, dat een vlakke collineatie, voor 't geval ze conjectief is, drie dubbellijnen en eveneens drie dubbelpunten bezit.

In 't algemeen komt met een lijn

$$ux' + vy' + w = 0$$

van het eene stelsel een lijn

$$u\,(a + bx + cy) + v\,(d + ex + fy) + w\,(p + qx + ry) = 0$$

overeen.

Hebben nu x, y en x', y' betrekking op dezelfde coördinaat-assen, dan is de voorwaarde dat deze twee overeenkomstige lijnen samenvallen:

$$\frac{u}{bu + ev + qw} = \frac{v}{cu + fv + rw} = \frac{w}{au + dv + pw} = \frac{1}{\rho}$$

of

$$\left.\begin{array}{l} (b-\rho)\,u + ev + qw = 0 \\ cu + (f-\rho)\,v + rw = 0 \\ au + dv + (p-\rho)\,w = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aan deze drie vergelijkingen zal door van nul verschillende waarden van u, v en w voldaan worden, indien

$$\begin{vmatrix} b-\rho & e & q \\ c & f-\rho & r \\ a & d & p-\rho \end{vmatrix} = 0 \text{ is.}$$

En aan deze voorwaarde wordt in 't algemeen voldaan door drie verschillende waarden van ρ, zoodat men ook drie verschillende stellen waarden voor de verhouding van u, v en w verkrijgt en dus drie met zich zelf overeenkomende lijnen.

Daar het snijpunt van twee dergelijke lijnen een dubbelpunt is, zijn er derhalve ook drie dubbelpunten.

Dit laatste kan ook direct met behulp der algebraïsche vergelijkingen worden aangetoond. Denken we ons n.l. dat de coördinaten in de vergelijkingen (1) lijncoördinaten zijn, dan stelt de vergelijking

$$ux' + vy' + w = 0$$

een punt voor.

De vergelijkingen (3) drukken dan de voorwaarde uit, dat een punt met zijn overeenkomstige samenvalt.

Men kan bewijzen, dat, indien we in beide gevallen met dezelfde collineatie te doen hebben, de vergelijking in ρ dezelfde wordt.

Deze laatste vergelijking kan twee onbestaanbare wortels hebben; is dit het geval, dan worden, zooals uit (3) volgt, twee dubbellijnen en ook twee dubbelpunten onbestaanbaar.

De punten der bestaanbare dubbellijn, achtereenvolgens gerekend tot elk der beide stelsels, vormen op die dubbellijn eene homografie. Deze laatste heeft òf twee bestaanbare òf twee onbestaanbare dubbelpunten, waaruit volgt dat in 't geval van één bestaanbare dubbellijn en één dergelijk dubbelpunt, dit laatste niet op de bestaanbare dubbellijn gelegen kan zijn. De beide onbestaanbare dubbellijnen snijden elkaar derhalve in het bestaanbare dubbelpunt; terwijl de bestaanbare dubbellijn de verbindingslijn is van de twee onbestaanbare dubbelpunten.

Twee collineaire stelsels zullen we symmetrisch noemen, indien twee willekeurige punten P_1 en P_2 van het eerste stelsel, symmetrisch gelegen ten opzichte van een lijn l van dat stelsel, twee punten P_1' en P_2' in het andere stelsel tot overeenkomstige hebben, die symmetrisch gelegen zijn ten opzichte van een lijn l' in dat stelsel.

De lijnen l en l' zullen in dit geval overeenkomstige lijnen zijn; met een punt Q van l moet noodzakelijk een punt Q' van l' overeenkomen, want als dit niet het geval was, dan zou met Q' zoowel als met zijn spiegelbeeld ten opzichte van l' in het tweede stelsel het punt Q van het eerste stelsel overeenkomen, hetgeen volgens de bepaling van collineatie onmogelijk is.

Om dit symmetrische verband door formules aan te geven, beginnen we met de coördinaat-assen zoo te verplaatsen, dat de x-as resp. x'-as langs l resp. l' valt. Daar dan de lijn

$$y = 0$$

de lijn

$$y' = 0$$

tot overeenkomstige moet hebben, worden ten gevolge van dit verplaatsen de coëfficiënten d en e van (1) gelijk nul. Zijn nu de stelsels symmetrisch, dan moeten de vergelijkingen zoodanig zijn, dat het omkeeren van het teeken van y alleen tengevolge heeft dat het teeken van y' ook omkeert. Hiervoor is noodig dat c en r gelijk nul zijn, zoodat de betrekkingen nu worden:

$$x' = \frac{a + bx}{p + qx}, \quad y' = \frac{fy}{p + qx} \quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

Het is duidelijk dat in 't geval van symmetrische collineatie, twee symmetrisch ten opzichte der symmetrie-as gelegen lijnen van het eene stelsel twee dergelijke lijnen in het andere stelsel tot overeenkomstigen hebben en dat met een lijn, loodrecht op de symmetrie-as in het eene stelsel een lijn loodrecht op de symmetrie-as in het tweede stelsel overeenkomt.

Zijn de beide symmetrische stelsels conjectief, dan kunnen ze zoodanig verplaatst worden, dat de lijnen van symmetrie samenvallen. De collineatie wordt nu voorgesteld door de vergelijkingen (4) als x, y en x', y' betrekking hebben op een zelfde assenstelsel, waarvan de x-as langs de samengevallen symmetrie-assen geplaatst is.

In plaats van het punt als opbouwend element van een vlak stelsel, kan, zooals we gezien hebben, even goed de rechte genomen worden. Heeft men, dit doende, twee collineaire vlakke stelsels, dan kan het verband daartusschen weer aangegeven worden door de betrekkingen (1), mits hierin een stel waarden van

x en y zoowel als van x' en y' ondubbelzinnig een rechte bepalen, wanneer m. a. w. x, y en x', y' als lijn-coördinaten beschouwd kunnen worden; waarbij dan nog voldaan moet zijn aan de voorwaarde, dat een lineaire betrekking tusschen deze coördinaten de vergelijking van een punt is.

Om de lijn-coördinaten die wij gebruiken zullen aan te geven, nemen we in den drager van het vlakke stelsel twee onderling loodrechte coördinaat-assen aan. Als eerste lijn-coördinaat (ξ) zullen we nemen de tangens van den hoek, dien de lijn met de x-as maakt; voor dezen hoek zal steeds de scherpe hoek genomen worden en hij zal positief gerekend worden, als de beide punt-coördinaten (x en y) van een zich langs de lijn bewegend punt tegelijkertijd grooter of kleiner worden, negatief wanneer het grooter worden van de eene coördinaat het kleiner worden van de andere tengevolge heeft.

De tweede lijn-coördinaat (η) is het stuk der y-as, gelegen tusschen den coördinaten-oorsprong en het snijpunt van de lijn en de y-as, positief geteld als het op het positieve gedeelte der y-as ligt. Ieder stel coördinaten bepaalt één enkele rechte, terwijl een vergelijking van den eersten graad in deze coördinaten, die zonder aan hare algemeenheid te kort te doen, geschreven kan worden in den vorm

$$a\,\xi + \eta = b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

alle mogelijke lijnen door een zelfde punt, met punt-coördinaten (a en b), dus dit punt zelf, voorstelt. Dit blijkt uit fig. 3, waarin CP een lijn is met de coördinaten $\xi = tg\ \phi$ en $\eta = OC$. Is CD evenwijdig aan de x-as, dan is $\angle PCD = \phi$; de voorwaarde dat $P(a, b$ op de lijn ligt is

$$AP = PD + DA = PD + CO,$$

waaruit bij substitutie de vorige vergelijking volgt.

Het collineaire verband tusschen twee vlakke stelsels kan nu aangegeven worden door de betrekkingen

$$\xi' = \frac{a + b\xi + c\eta}{p + q\xi + v\eta},\ \eta' = \frac{d + e\xi + f\eta}{p + q\xi + v\eta} \quad \ldots \quad (6)$$

Ook met behulp dezer vergelijkingen kunnen de vroeger afgeleide algemeene eigenschappen der collineatie worden bewezen. Zijn de stelsels symmetrisch en daarbij conjectief, en worden ze zoodanig geplaatst, dat de symmetrie-assen samenvallen, dan kan deze collineatie voorgesteld worden door de vergelijkingen

$$\xi' = b\xi + c\eta\ ;\ \eta' = e\xi + f\eta \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

waarbij de verschillende coördinaten op een zelfde assenstelsel, met de x-as langs de samengevallen symmetrie-assen, betrekking hebben. Bovendien is $\frac{b}{p}$ door b en $\frac{c}{p}$ door c vervangen.

Door de formules (7) te vergelijken met de formules (4), blijkt het dat de symmetrische, conjectieve collineatie met behulp van de gebruikte lijn-coördinaten door eenvoudiger formules kan worden voorgesteld dan door middel van punt-coördinaten.

De vergelijkingen (7) kunnen ook geschreven worden in den vorm

$$\xi = f'\xi' - c'\eta', \ \eta = -e'\xi' + b'\eta' \ . \ . \ . \ . \ (7')$$

waarin $b' = \dfrac{b}{bf - ec}$, $c' =$ enz. genomen is.

De formules (4) en (7) zijn in het voorgaande geheel onafhankelijk van elkaar afgeleid. Met behulp van de formules (7) kunnen de formules (4) gemakkelijk op de volgende manier worden gevonden: met een stralenbundel, die tot top het punt (x, y) heeft, en dus volgens (5) voorgesteld kan worden door de vergelijking

$$x\xi + \eta = y$$

komt overeen een bundel, voorgesteld door

$$\frac{f'x - e'}{b' - c'x}\xi' + \eta' = \frac{y}{b' - c'x}.$$

De top van dezen bundel is het beeld van het punt (x, y) en heeft tot coördinaten

$$x' = \frac{f'x - e'}{b' - c'x}, \quad y' = \frac{y}{b' - c'x} \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

Deze vergelijkingen, die het punt (x', y'), dat overeenkomt met het punt (x, y), leeren vinden, zijn van den vorm van de vergelijkingen (4).

Uit de vergelijkingen (8) volgen nog de vergelijkingen

$$x = \frac{e + bx'}{f + cx'}, \quad y = \frac{y'}{f + cx'} \ . \ . \ . \ . \ (8')$$

We zien dus dat de symmetrische collineatie voorgesteld kan worden door elk der stelsels van vergelijkingen (7), (7′), of (8), (8′).

De determinant

$$\begin{vmatrix} b, & c \\ e, & f \end{vmatrix} = \Delta$$

die voorgekomen is bij den overgang van de vergelijkingen (7) tot (7′) zal de *modulus der transformatie* van de vergelijkingen (7) genoemd worden. Voor de vergelijkingen (7′) wordt deze modulus

$$\begin{vmatrix} f', & -c' \\ -e', & b' \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Uit de waarden van b' enz. in verband met die van b enz. volgt

$$\Delta' = \frac{1}{\Delta}.$$

Met behulp van vergelijkingen (7), (7′), (8) en (8′) zullen we thans verschillende eigenschappen der symmetrische collineatie afleiden.

Lijnen en punten van het tweede stelsel zullen in het vervolg dikwijls de beelden der overeenkomstige lijnen of punten van het eerste stelsel genoemd worden; terwijl de beide stelsels aangeduid zullen worden door de, zij het ook niet geheel juiste, benamingen: voorwerp- en beeldruimte, welke ontleend zijn aan de leer der optische afbeelding.

Uit de vergelijkingen (8) volgt dat het punt F der x-as met de coördinaten

$$x = \frac{b'}{c'}, \quad y = 0$$

tot beeld heeft het oneindig ver gelegen punt der x-as. F wordt het eerste hoofdbrandpunt genoemd.

Het beeld van het oneindig ver gelegen punt der x-as, welk beeld het tweede hoofdbrandpunt genoemd wordt, heeft tot coördinaten

$$x' = -\frac{f}{c}, \quad y' = 0.$$

Van de drie dubbellijnen der symmetrische collineatie is de eene in de x-as gelegen; de beide andere staan daar loodrecht op, voor het geval ze bestaanbaar zijn. Twee van de drie dubbelpunten zijn in dat geval punten op de x-as, n. l. de snijpunten van de beide laatste dubbellijnen met de x-as; het derde dubbelpunt is het in de richting der y-as oneindig ver gelegen punt.

De beide eerste dubbelpunten worden gevonden door in (8′) $x' = x$ te nemen. Men vindt dan de vergelijking

$$c\,x^2 + (f-b)\,x - e = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De bedoelde dubbelpunten zijn bestaanbaar, indien dit het geval is met de wortels van vergelijking (9).

Uitgaande van (8) in plaats van (8′) krijgen we een vergelijking, die identiek met (9) is.

Zijn de dubbelpunten en dus ook de dubbellijnen alle bestaanbaar, dan kan men, door de y-as langs een dier dubbellijnen te plaatsen, aan de vergelijkingen (7), (7′), (8) en (8′) een iets eenvoudiger gedaante geven. Alsdan komt de oorsprong in een der dubbelpunten te liggen, zoodat een der wortels van (9) gelijk nul moet zijn, hetgeen het geval is indien $e = 0$ is; als $e = 0$ is, is ook $e' = 0$.

Het tweede op de x-as gelegen dubbelpunt heeft dan tot coördinaten

$$x = \frac{b - f}{c}, \quad y = 0.$$

De collineatie vertoont eene hoogere bijzonderheid, indien elk punt der y-as met zich zelf overeenkomt. Dit zal het geval zijn, indien voor $x = 0$, $y' = y$ is. Volgens (8) moet dan $b' = 1$ zijn; volgens (8′) $f = 1$. Deze beide laatste voorwaarden komen op hetzelfde neer; want, daar de y-as dubbellijn is, is $e = 0$, zoodat

$$b' = \frac{b}{\Delta} = \frac{b}{bf} = \frac{1}{f} \text{ is.}$$

Bij deze collineatie is het snijpunt van een rechte en haar overeenkomstige steeds een punt der y-as. Iedere lijn door het dubbelpunt op de x-as, dat niet in den coördinaten-oorsprong ligt, komt met zich zelf overeen.

Zijn de wortels van (9) gelijk, dan vallen de bijbehoorende dubbelpunten samen en dus eveneens de beide dubbellijnen loodrecht op de x-as. Plaatst men de y-as langs de eenige dubbellijn, loodrecht op de

x-as, dan moet in de vergelijkingen (7) en (8) $f = b$ genomen worden; e is evenals vroeger ook nu gelijk nul. De modulus der transformatie, die bij deze collineatie behoort, is positief.

Komt in het laatste geval bovendien ieder punt der y-as met zich zelf overeen, zoodat de beide behandelde bijzondere gevallen zich tegelijkertijd voordoen, dan wordt $b = 1$, $b' = 1$, $f = 1$, $f' = 1$.

Ieder punt der y-as, evenals iedere lijn door den oorsprong, komt nu met zich zelf overeen. In dit geval is de waarde van den modulus gelijk de eenheid.

In het algemeene geval van symmetrische collineatie bestaat er op de x-as eene homografie, die voorgesteld kan worden door de vergelijking, volgende uit (8)

$$x' = \frac{f'x - e'}{b' - c'x} \quad \ldots . \quad (10)$$

Elke homografie heeft de eigenschap, dat een beweging van een punt van het eene stelsel in een bepaalde richting een beweging van het overeenkomstige punt van het andere stelsel òf altijd in dezelfde richting òf altijd in tegengestelde richting tengevolge heeft. Differentiatie van (10) geeft n.l.

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{b'f' - e'c'}{(b' - c'x)^2} = \frac{\Delta'}{(b' - c'x)^2}$$

waaruit volgt dat de verhouding $\frac{dx'}{dx}$ altijd hetzelfde teeken heeft, onafhankelijk van de waarde van x, welk teeken hetzelfde is als dat van den modulus Δ' of Δ.

Uit de eerste der vergelijkingen (8) volgt dat, wanneer een punt der voorwerpruimte een lijn loodrecht op de x-as, (dus x = constante) beschrijft, het beeld iets dergelijks doet; uit de tweede der vergelijkingen (8) volgt, dat de verhouding van twee overeenkomstige waarden van y' en y constant is voor de verschillende punten eener rechte, loodrecht op de x-as; deze verhouding

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{b'-c'x} \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

noemen we de ***lineaire vergrooting.***

Op de beide overeenkomstige lijnen liggen twee collineaire puntstelsels die gelijkvormig zijn.

Twee dergelijke puntstelsels worden congruent (vergrooting = de eenheid) als

$$x = \frac{b'-1}{c'}$$

is.

Heeft x de waarde

$$x = \frac{b'}{c'}$$

dan worden in 't algemeen x' en y' beide oneindig groot, behalve wanneer $y = 0$ is, in welk geval alleen x' oneindig groot wordt.

Een stralenbundel, wiens top gelegen is op de lijn

$$x = \frac{b'}{c'}$$

heeft tot overeenkomstige een bundel evenwijdige stralen. De richting der stralen, die overeenkomen met een bundel die het punt $\left(\frac{b'}{c'}, y\right)$ tot top heeft, wordt bepaald door de tangens hunner divergentie:

$$\xi' = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x f' - e'} = \frac{c' y}{b' f' - e' c'} = \frac{c' y}{\Delta'}.$$

De bovenbedoelde lijn

$$x = \frac{b'}{c'}$$

wordt de *eerste focale lijn* van het stelsel genoemd.

Het snijpunt dezer lijn met de x-as is vroeger reeds het eerste hoofdbrandpunt genoemd.

Een lijn die de x-as snijdt in een punt $(x, 0)$ en met die as een hoek Φ maakt, heeft tot coördinaten

$$\xi = tg\ \Phi, \quad \eta = -x\xi.$$

De coördinaten van het beeld dezer rechte zijn volgens (7)

$$\xi' = (b - cx)\,\xi, \quad \eta' = (e - f x)\,\xi.$$

De verhouding

$$\frac{\xi'}{\xi} = b - c\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

die uit de voorlaatste vergelijking volgt, is constant, zoolang x niet verandert; dus voor alle lijnen die door eenzelfde punt der x-as gaan. Deze verhouding zal in het vervolg de *hoekvergrooting* genoemd worden.

De hoekvergrooting wordt de eenheid voor dat punt der x-as, waarvoor

$$x = \frac{b-1}{c} \text{ is.}$$

Dit punt zal samenvallen met het punt waarbij een lineaire vergrooting gelijk de eenheid behoort, indien $\Delta = 1$ is.

Door de vermenigvuldiging van de overeenkomstige leden van de vergelijkingen (11) en (12) ontstaat de formule

$$\frac{y'\,\xi'}{y\,\xi} = \frac{b-cx}{b'-c'x}$$

of, na invulling van de waarden van b' en c', uitgedrukt in b, c enz.

$$y'\,\xi' = \Delta\, y\, \xi.$$

Deze algemeene betrekking, die men ook kan schrijven in den vorm

$$\frac{y'}{y} \cdot \frac{\xi'}{\xi} = \Delta \; \ldots\ldots (13)$$

leert dat *het product van de lineaire en de hoekvergrooting, beide voor een zelfde plaats van het voorwerp genomen constant, d. w. z. onafhankelijk van die plaats is.*

Met behulp van deze stelling kan de volgende bewezen worden:

Is (fig. 4) $P_1\ B$ een voorwerp, loodrecht op de as, in het punt P_1 der as, en $P_1'\ B'$ zijn beeld, dat van uit een punt P_2' der as gezien wordt onder een hoek wiens tangens ξ_2' is, en wordt het beeld van een even groot voorwerp $P_2'\ A'$, in de beeldruimte in het punt P_2' der as loodrecht op de as geplaatst, in de voorwerpruimte van uit het punt P_1 gezien onder een hoek wiens tangens ξ_1 is, dan geldt de betrekking

$$\xi_2' = -\Delta\, \xi_1 \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Zij, om dit te bewijzen, y_1 de grootte van $P_1\ B$ en y_1' de grootte van het beeld; zij $P_1\ L$ een lijn door P_1, $P_1'\ L'$ de overeenkomstige lijn door P_1', ξ_1 de tangens der divergentie der eerste en ξ_1' de tangens der divergentie der tweede lijn. Dan is steeds volgens (13)

$$\frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{\xi_1'}{\xi_1} = \Delta .$$

De vier grootheden in het eerste lid dezer vergelijking kunnen nu eens positief, dan eens negatief zijn.

Verder kiezen we op $P_1\ L$ een willekeurig punt A, en nemen op $P'_1\ L'$ het overeenkomstige punt A'. Uit A en A' laten we loodlijnen $A\ P_2$ en $A'\ P_2'$ op de as neer, en noemen de lengten dezer lijnen y_2 en y_2'; deze beide lijnen komen met elkaar overeen.

Stellen wij den tangens van den hoek, dien een lijn uit den top van een voorwerp y naar een punt Q der as getrokken, met de as maakt voor door (Q, y), zoodat dus

$$\xi_1 = (P_1,\ y_2) \text{ en } \xi_1' = (P_1',\ y'_2)$$

is, dan leert een eenvoudige beschouwing, dat

$$\frac{(P_1', y_2')}{(P_2', y_1')} = -\frac{y_2'}{y_1'}.$$

Substitutie in de voorgaande vergelijking geeft

$$-\frac{y_2'}{y_1}\cdot\frac{(P_2', y_1')}{(P_1, y_2)} = \Delta.$$

Wordt nu $y_2' = y_1$ genomen, dan gaat deze laatste vergelijking over in

$$(P_2', y_1') = -\Delta\,(P_1, y_2)$$

waarmede de stelling bewezen is.

Indien er tusschen twee vlakke stelsels α en β een symmetrische collineatie met samengevallen symmetrielijnen bestaat en dit ook het geval is met het stelsel β en een derde stelsel γ, dan bestaat er een dergelijke collineatie tusschen de stelsels α en γ, met dezelfde symmetrie-as.

Wordt de eerste collineatie voorgesteld door

$$\xi' = b\,\xi + c\,\eta, \quad \eta' = e\,\xi + f\,\eta$$

en de tweede door

$$\xi'' = b_1\,\xi' + c_1\,\eta', \quad \eta'' = e_1\,\xi' + f_1\,\eta'$$

dan gelden voor de derde de vergelijkingen

$$\xi'' = (b\,b_1 + e\,c_1)\,\xi + (c\,b_1 + f\,c_1)\,\eta$$
$$\eta'' = (b\,e_1 + e\,f_1)\,\xi + (c\,e_1 + f\,f_1)\,\eta.\ ^{1})$$

---

[1]) Ondersteld wordt, dat de coördinaten ξ, η; ξ', η' en ξ'', η'' alle op dezelfde coördinaat-assen betrekking hebben.

Worden de moduli van transformatie der drie stelsels van vergelijkingen resp. aangeduid door Δ_{12}, Δ_{23} en Δ_{13}, dan volgt door toepassing van een bekende stelling omtrent het product van determinanten:

$$\Delta_{12} \,.\, \Delta_{23} = \Delta_{13}. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (15)$$

Voor meerdere op elkaar volgende symmetrische collineatie's, met in de x-as samengevallen symmetrielijnen bestaat een dergelijke betrekking tusschen de moduli der opvolgende collineatie's.

Door toepassing van het bovenstaande kan men bewijzen dat de modulus der collineatie, voorgesteld door de vergelijkingen (7), niet verandert, wanneer de y-as evenwijdig aan zich zelf verschoven wordt, mits de x-as dezelfde blijft. Een dergelijke verschuiving heeft een coördinaten-transformatie tengevolge, die aangeduid kan worden door

$$\xi' = \xi, \; \eta' = e\xi + \eta.$$

Daar de modulus van dit stelsel gelijk de eenheid is, volgt uit (15) dat deze coördinaten-transformatie op den modulus van (7) geen invloed heeft.

Ten slotte zij nog opgemerkt dat de symmetrische collineatie bepaald is, wanneer gegeven zijn de symmetrie-assen der twee stelsels en twee paar willekeurige overeenkomstige rechten. Dit blijkt o. a. daaruit, dat in de vergelijkingen (7) vier coëfficiënten voorkomen, terwijl de overeenkomst van een lijn a en een lijn a' twee dezer coëfficiënten bepaalt. Meetkundig kan men hetzelfde aantoonen; wanneer men van een symmetrische collineatie kent de symmetrie-lijnen l en l', en bovendien twee paar overeenkomende lijnen (a, a') en (b, b'), dan kent men nog twee andere paren (a_1, a_1') en (b_1, b_1'), wanneer a_1 en b_1 de spiegelbeelden van a en b ten opzichte van l en a_1' en b_1' die van a' en b' ten opzichte van l' zijn. Men kent dan van vier lijnen a, b, a_1, b_1 in het eene stelsel, waarvan er geen drie door één punt gaan, de overeenkomstigen in het andere stelsel, waardoor de collineatie, zooals vroeger medegedeeld werd, bepaald is.

HOOFDSTUK II.

BREKING DOOR EEN STELSEL GECENTREERDE BOLVORMIGE OPPERVLAKKEN.

De in de vorige bladzijden besproken afbeelding door middel van collineaire stelsels wordt verwezenlijkt in sommige gevallen van breking en terugkaatsing; o. a. bij breking door een stelsel bolvormige oppervlakken welker middelpunten op een rechte lijn liggen, mits alleen die stralen beschouwd worden, die, gelegen in een door de as van het stelsel gaand vlak, met de normalen op de bol-oppervlakken hoeken maken, die zoo klein zijn, dat zij door hunne tangenten vervangen kunnen worden, terwijl hetzelfde ook het geval moet zijn met de hoeken der verschillende normalen onderling.

Wij beschouwen vooreerst bij één brekend oppervlak den loop van lichtstralen die gelegen zijn in een vlak, dat door het middelpunt gebracht is; een in dit vlak gelegen normaal wordt als x-as en een lijn daar loodrecht op in het snijpunt met het boloppervlak als y-as aangenomen. De hoek dien een lichtstraal met de x-as maakt, zullen wij zijne *divergentie* noemen, en deze positief of negatief rekenen op dezelfde wijze als zulks vroeger gebeurd is met den hoek van een rechte met de x-as. De hoek dien twee lichtstralen met elkaar maken, is dan steeds gelijk aan het verschil hunner divergentie's. De straal van het boloppervlak zal positief gerekend worden als zijne richting van het middelpunt naar het oppervlak is in de richting der positieve x-as.

Zoolang voldaan wordt aan de voorwaarde omtrent de grootte der hoeken, mag steeds ondersteld worden, dat de breking van een lichtstraal in plaats van op het boloppervlak in de y-as plaats heeft. Is de invalshoek van een lichtstraal α, de hoek van breking β, de divergentie van de normaal van het invalspunt γ, die van den invallenden straal Φ en van den gebroken straal Φ', de absolute brekings-index van de eerste middenstof n_1, en die van de tweede n_2, dan is volgens fig. 5

$$\alpha = \Phi - \gamma, \quad \beta = \Phi' - \gamma.$$

Wij merken hierbij op dat volgens de wet der breking het verlengde van den invallenden straal en de gebroken straal steeds aan denzelfden kant der normaal gelegen zijn en dat dus, wanneer wij $\alpha = \Phi - \gamma$ en $\beta = \Phi' - \gamma$ (en niet $= \gamma - \Phi'$) stellen, α en β òf beide positief òf beide negatief zijn, zoodat men mag stellen

$$n_1 (\Phi - \gamma) = n_2 (\Phi' - \gamma).$$

Vervangen wij de hoeken door hunne tangenten, daarbij $tg\ \Phi = \xi$ en $tg\ \Phi' = \xi'$ stellende en in aanmerking nemende dat

$$tg\ \gamma = \frac{\eta}{r}$$

is, als r de straal van het boloppervlak is en η de vroeger aangenomen beteekenis heeft, dan is

$$\xi' = \frac{n_1}{n_2}\,\xi + \frac{n_2 - n_1}{n_2\, r}\,\eta, \quad \eta' = \eta \ . \ . \ . \ . \ (16).$$

Deze vergelijkingen stellen eene collineatie voor, die de op pag. 18 vermelde bijzonderheid vertoont; zij bezit een oneindig aantal dubbelpunten, de gezamenlijke punten der y-as, en een oneindig aantal dubbellijnen, alle lijnen door het middelpunt van het boloppervlak De modulus van transformatie der vergelijkingen (16) is $\frac{n_1}{n_2}$.

Was deze collineatie voorgesteld geworden met behulp van coördinaten die op dezelfde x-as, doch op een nieuwe y-as, evenwijdig aan de oorspronkelijke, betrekking hebben, dan hadden de formules een iets meer algemeene gedaante gekregen; de modulus van transformatie was daarbij echter onveranderd gebleven.

Wij beschouwen nu p brekende oppervlakken, die $p + 1$ middenstoffen met de brekingsindices n_1, n_2 ... n_{p+1} van elkaar scheiden. Is aan elk oppervlak aan de voorwaarden voor een collineair verband voldaan, dan is ook het stralenstelsel der eerste middenstof collineair verbonden met dat der laatste. Aan de formules die dit verband uitdrukken, kan de vorm gegeven worden van de vergelijkingen (7); we zullen deze formules hier echter niet afleiden, doch ons bepalen tot het berekenen van den modulus van transformatie voor het eerste en $(p+1)^{\text{ste}}$ stelsel.

Door toepassing van de door de vergelijking (15) uitgedrukte stelling en van het feit, dat de modulus voor de transformatie van een stelsel l naar het opvolgende stelsel $l+1$ gelijk is aan $\dfrac{n_l}{n_{l+1}}$, vinden wij voor den gezochten modulus

$$\Delta_{1,p+1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{n_p}{n_{p+1}} = \frac{n_1}{n_{p+1}}.$$

Voor het bijzondere geval dat de laatste middenstof dezelfde is als de eerste, dat men b. v. met één of meer in de lucht gelegen lenzen te doen heeft, krijgt het collineaire verband tusschen het eerste en het laatste stelsel de bijzonderheid, dat de bijbehoorende modulus de eenheid wordt, daar dan $n_1 = n_{p+1}$ is.

Wordt de optische collineatie voortgebracht door een enkele lens met te verwaarloozen dikte, dan heeft zij de bijzonderheid dat het middelpunt van den stralenbundel, wiens stralen met zich zelf overeenkomen, valt op de rechte, wier punten alle dubbelpunten zijn (vgl pag. 19); deze rechte staat loodrecht op de hoofd-as in het optisch middelpunt der lens. De hoofd-as als

x-as en de genoemde rechte as y-as aannemende, kunnen wij de collineatie voorstellen door

$$\xi' = \xi + c\eta, \quad \eta' = \eta.$$

Nu wij hebben aangetoond dat onder de bovengenoemde omstandigheden de optische afbeelding een collineaire is, mogen wij besluiten dat dezelfde stellingen die bij de meetkundige collineatie aangetoond zijn, ook voor de optische afbeelding gelden. Van deze stellingen zullen thans die, welke uitgedrukt worden door de formules (13) en (14), in verband met hare beteekenis in de leer van het licht, nader behandeld worden.

De ontdekkers van de waarheden, in die stellingen neergelegd, hebben voor het bewijs daarvan een anderen weg gevolgd dan de bovenaangegevene, en in sommige gevallen zich bepaald tot de breking door lenzen, wier dikte te verwaarloozen is.

De stelling (14) is voor een bijzonder geval het eerst gegeven door Chr. Huygens, die haar met dertien andere in den vorm van een anagram in het jaar 1669 aan H. Oldenbourg, secretaris der Royal Society te Londen zond.

Huygens maakte van anagrammen gebruik om daarin nieuw ontdekte waarheden, die hij nog niet voor publicatie geschikt achtte, als het ware op te sluiten en zich zoodoende toch het recht van prioriteit te verzekeren. Dergelijke anagrammen bestonden in eene opsomming van het aantal keeren, dat de verschillende letters (in elken regel) noodig waren geweest om de bedoelde waarheid in een zin uit te drukken.

Het bovenbedoelde anagram had den volgenden vorm:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*x*	*y*	*z*
2	2	3	0	6	0	0	0	7	3	3	4	2	1	0	1	4	4	6			
2	1	1	1	5	0	0	0	5	1	1	3	2	2	3	2	4	4	6			
1	0	2	2	3	0	1	0	9	3	2	3	1	1	1	1	3	3	5;			

en heeft de onderstaande beteekenis:

Si oculus et visibile invicem loca permutent, manentibus || interpositis lentibus quotcunque, eadem qua prius || magnitudine, similique situ illud conspicietur. [1])

In de »Dioptrica" van HUYGENS komt dit voor als stelling XL.

Wat betreft de grootte van den hoek, waaronder in beide gevallen het beeld gezien wordt, is de stelling in overeenstemming met formule (14); in het door HUYGENS beschouwde geval toch kwam de beeldvorming door in de lucht geplaatste lenzen tot stand.

Dan is $\Delta = 1$, en volgens de formule (14)

$$\xi_1 = -\xi_2'.$$

Dat het beeld in beide gevallen, voor en na de verwisseling van plaats van oog en voorwerp, in denzelfden stand gezien wordt, kan als volgt worden aangetoond:

Uit het op pag. 19 gezegde volgt, dat bij elk stelsel

---

[1]) Zie „Oeuvres Complètes de CHRISTIAN HUYGENS" publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Tome VI pag. 487.

van lenzen de verplaatsing van het voorwerp langs de as gepaard gaat met een verplaatsing van het beeld in dezelfde richting. Worden dus, zooals HUYGENS bedoelt, voorwerp en oog met elkaar verwisseld, dan beziet men het beeld van de rechterzijde als men het eerst van links bezag, en omgekeerd. Dit, in verband met de omstandigheid dat ξ_1 en ξ_2' tegengestelde teekens hebben, leidt tot het besluit, dat het voorwerp in beide gevallen — vóór en na de verplaatsing — rechtop of in beide gevallen omgekeerd zal worden gezien.

Liggen beeld en voorwerp in middenstoffen resp. met de brekings-indices n_2 en n_1, dan zal het beeld na de verwisseling gezien worden onder een hoek die $\frac{n_2}{n_1}$ maal zoo groot is als voor de verwisseling.

Met het doel om de theorie der optische instrumenten in eenige algemeene formules samen te vatten zijn indertijd door de wiskundigen COTES en EULER verschillende stellingen over den gang der lichtstralen in zulke instrumenten afgeleid. Bij een poging om het verband tusschen deze stellingen vast te stellen heeft LAGRANGE [1]) een algemeene theorie der optische instrumenten opgesteld, welke hem ten slotte geleid heeft tot verge-

[1]) LAGRANGE. Nouv. Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences et Belles — Lettres 1798 pag. 162 en 1803 pag. 3.

lijkingen die het collineaire verband tusschen beeld- en voorwerpruimte uitdrukken. Daarbij wordt door LAGRANGE ondersteld dat hij te doen heeft met een gecentreerd lenzen-stelsel, terwijl bovendien de door hem beschouwde lichtstralen steeds moeten voldoen aan de verschillende op pag. 27 opgegeven voorwaarden.

Het uitgangspunt van LAGRANGE is de bekende vergelijking

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \,,$$

die het verband aangeeft tusschen de plaats van een lichtpunt en zijn beeld, gevormd door een lens met den hoofdbrandpunts-afstand f.

Hieruit leidt hij een formule af, met behulp waarvan bij een willekeurig aantal lenzen voor een lichtstraal de hoek bepaald kan worden, dien deze met de as maakt, nadat hij het geheele stelsel gepasseerd is, en ook de afstand van het snijpunt van den lichtstraal met de laatste lens tot aan de as, als gegeven zijn de hoek dien de lichtstraal voor de breking met de as maakt, en het punt, waar hij de eerste lens treft. Is de tangens van den eerstgenoemden hoek x_{m+1}, van den laatstgenoemden x_1; de eerstgenoemde afstand y_m en de laatstgenoemde y_1, dan komt LAGRANGE, door herhaalde toepassing van de bovengenoemde lenzen-formule, tot de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} x_{m+1} &= P_{2m}\, y_1 + Q_{2m}\, x_1 \\ y_m &= P_{2m-1}\, y_1 + Q_{2m-1}\, x_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \; (17).$$

De grootheden P en Q zijn functie's van de hoofdbrandpunts-afstanden f en van de onderlinge afstanden h der verschillende lenzen; P_{2m} is ten opzichte van f en h van den graad -1, P_{2m-1} en Q_{2m} van den graad 0, en Q_{2m-1} van den graad 1.

In de x's en y's herkent men de door ons gebruikte lijn-coördinaten; x_{m+1} en y_m ten opzichte van het assen-stelsel, waarvan de x-as samenvalt met de hoofdas van het lenzenstelsel, en de y-as in het optisch middelpunt der laatste lens daar loodrecht op staat; x_1 en y_1 hebben betrekking op een assen-stelsel dat ten opzichte van de eerste lens op overeenkomstige manier geplaatst is.

Daar beeld- en voorwerpruimte in dezelfde middenstof, de lucht, gelegen zijn, is de modulus van transformatie der vergelijkingen (17) gelijk de eenheid; dus

$$Q_{2m} P_{2m-1} - Q_{2m-1} P_{2m} = 1 ; \ldots\ldots \quad (18)$$

deze betrekking wordt door LAGRANGE aangetoond door na te gaan welke waarden deze grootheden verkrijgen, als het lenzen-stelsel resp. bestaat uit één, twee enz. lenzen.

Verder beschouwt LAGRANGE een lichtpunt, gelegen op een afstand a voor de eerste lens en op een afstand b boven de as van het lenzen-stelsel. De richting van een straal door dit punt na breking door m lenzen, wordt bepaald door de vergelijking

$$x_{m+1} = \left(P_{2m} + \frac{Q_{2m}}{a}\right) y_1 - \frac{b}{a}\, Q_{2m}$$

als y_1 de afstand is van het snijpunt van den invallenden lichtstraal met het eerste brekende oppervlak tot de as van het stelsel.

Aan deze vergelijking voegt Lagrange de volgende opmerking toe:

»Cette valeur de x_{m+1} exprime la tangente de l'angle que le rayon fait avec l'axe après la sortie de l'oculaire; et l'on voit qu'elle est différente pour les différens rayons qui, partant du même point de l'objet, entrent dans l'objectif à différentes distances y_1 de l'axe. Mais, pour que tous ces rayons puissent former dans l'oeil une image distincte, il faut qu'ils y entrent parallèles ou à très-peu-près parallèles; or ils ne peuvent être parallèles entr' eux qu'autant que la valeur de x_{m+1} sera la même pour tous les rayons; ainsi il faudra que cette valeur soit indépendante de la quantité y_1 et que par conséquent on ait

$$P_{2m} + \frac{Q_{2m}}{a} = 0.$$

C'est la condition nécessaire pour que l'assemblage des n lentilles puisse former un télescope ou un microscope.

Pour le microscope la distance a est ordinairement très-petite et on peut la prendre à volonté; mais pour les télescopes cette distance doit être fort grande et on peut la supposer infinie. Alors, la condition se réduit simplement à $P_{2m} = 0$.

»La valeur de x_{m+1} deviendra donc $-\frac{b}{a}\ Q_{2m}$. Or $\frac{b}{a}$ est la tangente de l'angle sous lequel l'oeil placé au centre de l'objectif verroit la ligne b perpendiculaire à l'axe; mais, par le télescope ou le microscope, cette même ligne sera vue sous l'angle, dont la tangente sera x_{m+1}, égale à $-\frac{b}{a}\ Q_{2m}$; donc le diamètre des objets vus par le télescope ou le microscope sera augmenté dans la raison de 1 à $-\ Q_{2m}$. Ainsi l'amplification des diamètres apparens, ou le grossissement linéaire produit par l'instrument, sera exprimé par la fonction $-\ Q_{2m}$.

Lagrange toont verder aan dat de waarde van Q_{2m}, dus de vergrooting van het instrument, steeds gelijk is aan de verhouding van den straal van het objectief tot dien van den stralencilinder die uit het oculair treedt en ontstaan is uit de stralen, afkomstig van het op de as gelegen punt van het eerste focale vlak en merkt naar aanleiding daarvan het volgende op:

»Comme il y a en mécanique la loi générale des vitesses virtuelles, par laquelle on peut connoître l'augmentation de force produite par une machine, sans connoître la nature ni la construction de la machine, mais par le simple rapport des vitesses simultanées du point où est appliquée la puissance et du point auquel cette puissance est transmise par la machine, de même, on peut dire qu'il y a en optique une loi analogue, par laquelle, sans connoître la disposition intérieure d'un télescope ou d'un microscope, on peut juger de la force par le simple rapport du diamètre de l'ouverture de l'objectif au diamètre de l'ouverture de l'oculaire."

Nu wij eenmaal weten dat de afbeelding door het lenzenstelsel de in het vorige hoofdstuk besproken eigenschappen heeft, kunnen wij de stelling waarvan in het bovenstaande sprake is, onmiddellijk uit de vergelijking (13) van pag. 22 afleiden, of liever een stelling bewijzen, waarin die van LAGRANGE als een bijzonder geval begrepen is.

Te dien einde beschouwen we een in een willekeurig punt geplaatst voorwerp A en zijn beeld A'; verder de objectief-opening B en het beeld B' daarvan (de »oogring"). Laat de hoeken onder welke A van uit het middelpunt van B, en A' van uit het middelpunt van B' gezien worden, door ξ en ξ' worden voorgesteld, zij b de middellijn van B en b' die van B'. Dan volgt uit (13), wanneer wij deze stelling op B en B' en op den straal van den top van A naar het middelpunt van B loopende, toepassen (daar $\Delta = 1$), als alle grootheden positief gerekend worden,

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{b}{b'} .$$

LAGRANGE heeft alleen het bijzondere geval op het oog, dat A in het eerste focale vlak ligt.

Uit de laatste vergelijking blijkt dat de verhouding $\frac{\xi'}{\xi}$ onafhankelijk is van de plaats van het voorwerp.

Denkt men zich met LAGRANGE het voorwerp in het eerste focale vlak geplaatst, dan wordt niet alleen van uit het middelpunt van den oogring, maar van uit elk punt van de as het beeld onder den hoek ξ' gezien.

In verschillende leerboeken der Geometrische Optica wordt gesproken over de »stelling van LAGRANGE" omtrent de beeldvorming bij gecentreerde brekende oppervlakken, welke stelling uitgedrukt wordt door de vergelijking

$$n \beta \, tg \, \alpha = n' \beta' \, tg \, \alpha', \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

waarin β' het beeld is van een voorwerp β (pijl loodrecht op de as) en α en α' de hoeken voorstellen, die een straal door het voetpunt van β gaande, in de voorwerp- resp. beeldruimte met de as maakt.

Deze stelling, voor het geval dat n' van n verschilt, is echter niet door LAGRANGE gegeven; zij komt voor bij HELMHOLTZ, die haar in zijne »Physiologische Optik" (pag. 50) heeft afgeleid.

Hoe de vergelijking (19) uit de betrekking (13) van het vorige hoofdstuk volgt, behoeft wel niet nader te worden aangewezen.

Bij een onderzoek naar de fouten bij microscopische aflezingen, veroorzaakt door een niet geheel zuivere instelling, heeft prof. J. BOSSCHA [1]) een tweetal formules afgeleid voor het bepalen van den weg door lichtstralen bij breking door gecentreerde bolvormige oppervlakken afgelegd.

Prof. BOSSCHA gaat daarbij op de volgende wijze te werk:

In de onderstelling dat de stralen voldoen aan de op pag. 27 genoemde voorwaarden, kan gemakkelijk bewezen worden dat alle van een lichtend punt uitgaande stralen na breking weer door een punt gaan. Hieruit volgt dan onmiddellijk, dat met een stralenkegel in de voorwerpruimte een zoodanige stralenkegel in de beeldruimte overeenkomt, dat de doorsnede van dezen laatste met een vlak loodrecht op de as een figuur is gelijkvormig met het door den eersten kegel verlichte gedeelte van het eerste brekende oppervlak. Om den stralenkegel der beeldruimte te kunnen bepalen is het voldoende dat men den weg van twee tot dien kegel behoorende lichtstralen kent. Het snijpunt dezer twee stralen is de top van den stralenkegel, terwijl hunne snijpunten met een vlak loodrecht op de as de grootte en de plaats van de doorsnede van dit vlak met den kegel bepalen, daar deze doorsnede gelijkvormig is met het verlichte gedeelte van het eerste brekende oppervlak.

---

[1]) Prof. J. BOSSCHA: Verspreide Geschriften II, pag. 339.

Kiest men voor de bovenbedoelde stralen twee stralen die met de as in een vlak liggen, dan liggen de uittredende stralen eveneens in dit vlak, waarmede de questie is teruggebracht tot het bepalen van den weg van een lichtstraal die de as snijdt.

Om dan de baan van een uittredenden lichtstraal te vinden, als die van den invallenden gegeven is, bepaalt men een straal door zijne divergentie en door zijne amplitude, d. w. z. den afstand van zijn invalspunt op een der brekende oppervlakken tot de as.

Zijn deze grootheden voor den invallenden straal D_1 en A_1 en voor den uittredenden D_f en A_f, dan kan men stellen

$$D_f = f\,(D_1,\, A_1),\quad A_f = \Phi\,(D_1,\, A_1),$$

waarin f en Φ functie's voorstellen, die met behulp der aangegeven eigenschappen der lichtstralen bepaald moeten worden.

Prof. Bosscha toont dan aan, dat f en Φ lineaire functie's van D_1 en A_1 moeten zijn en wel van den vorm

$$D_f = c\,D_1 + p\,A_1\ ,\quad A_f = r\,D_1 + s\,A_1.$$

Dit zijn weder de formules die wij reeds vroeger hebben afgeleid en die uitdrukken dat de afbeelding symmetrisch collineair is.

Zooals reeds is opgemerkt, is de stelling, uitgedrukt door de vergelijking (13), voor het geval van breking van lichtstralen door gecentreerde boloppervlakken, die middenstoffen van verschillenden brekings-index van elkaar scheiden, het eerst door HELMHOLTZ afgeleid.

Wij laten hier nog een eenvoudig bewijs dezer stelling volgen:

Zij (fig. 6) M het middelpunt van het brekend oppervlak $h\,h'$; het voorwerp $a'\,a'' = \beta'$, een pijl loodrecht op de hoofd-as $M\,h$, zij gelegen in een middenstof met den brekings-index n'. De straal die van a' naar h gaat, zal dan zoodanig gebroken worden, dat hij na breking door b' gaat; de invalshoek van dezen straal is $\frac{\beta'}{2v}$, de hoek van breking is $-\frac{\beta''}{2b}$ (daar β'' negatief is als wij β' positief rekenen), als v en b resp. de afstanden $a\,h$ en $h\,b$ zijn. Daar deze hoeken moeten voldoen aan de brekingswet en, als divergenties beschouwd, hetzelfde teeken hebben, is

$$\frac{n'\beta'}{v} = -\frac{n''\,\beta''}{b}.$$

terwijl v en b bovendien verbonden zijn door de betrekking

$$\alpha'\,v = h\,h' = -\alpha''\,b,$$

waar in het tweede lid het negatieve teeken is ingevoerd, omdat α' en α'' tegengestelde teekens hebben.

Uit de beide voorgaande vergelijkingen volgt:

$$\alpha'\,n'\,\beta' = \alpha''\,n''\,\beta'',$$

wat de door HELMHOLTZ afgeleide vergelijking is, die, in overeenstemming met de vergelijking (13) geschreven kan worden in den vorm:

$$\frac{\alpha'' \beta''}{\alpha' \beta'} = \frac{n'}{n''}.$$

In al het voorgaande is steeds ondersteld dat de collineaire afbeelding tot stand kwam door breking van lichtstralen Het behoeft geen nader betoog, dat ook voor de terugkaatsing van lichtstralen door bolvormige spiegels dergelijke beschouwingen gelden.

HOOFDSTUK III.

LOOP DER LICHTSTRALEN IN EEN WILLEKEURIG STELSEL DOORSCHIJNENDE STOFFEN.

Voor de optische collineatie bij de breking van lichtstralen door bolvormige oppervlakken werd vereischt dat deze lichtstralen en de normalen der oppervlakken aan de in het begin van hoofdstuk II genoemde voorwaarden voldeden. De tot nog toe medegedeelde beschouwingen gelden dan ook alleen zoo lang aan die voorwaarden voldaan is.

Wij zullen nu in het volgende eenige stellingen bespreken, die gelden als men de beperkende voorwaarden laat vervallen en ook dan wanneer de breking der lichtstralen door willekeurige oppervlakken plaats heeft, of zij zich voortplanten in middenstoffen, wier brekingsindex van punt tot punt verandert.

We zullen deze stellingen afleiden uit een algemeene theorie omtrent het wezen van het licht. We beginnen daartoe met uit te gaan van de theorie van NEWTON, die zooals men weet de wetten der terugkaatsing en der breking van lichtstralen kan verklaren. Wij stellen ons dus voor dat een lichtgevend voorwerp uiterst kleine lichtdeeltjes uitzendt met eene snelheid wier grootte afhankelijk is van den aard der omringende middenstof. Een lichtstraal is, volgens deze theorie, de baan, door een dergelijk lichtdeeltje afgelegd. De deeltjes worden ondersteld geen invloed op elkaar uit te oefenen; ze zijn wel onderhevig aan krachten, uitgeoefend door deeltjes der middenstof, doch deze krachten zijn alleen op zeer geringen afstand merkbaar. In het binnenste van een homogene middenstof heffen de op een lichtdeeltje werkende krachten elkaar op, zoodat het daar steeds een eenparige, rechtlijnige beweging bezit. Bij het passeeren van een grensvlak daarentegen kan zich tengevolge van de verschillende aantrekking van deeltjes van verschillende middenstoffen, afwijking van de rechte baan en verandering der snelheid voordoen. Bij den overgang van de eene middenstof in de andere wordt de potentieele energie van een lichtdeeltje vermeerderd of verminderd met een bepaald bedrag, dat onafhankelijk is van de richting waarin de grenslaag doorloopen wordt. Neemt men nu aan dat de snelheid in één bepaalde middenstof, bijv. in lucht, altijd dezelfde is, dan volgt uit het bovenstaande, dat ook voor elke andere middenstof de grootte der snelheid geheel bepaald is.

Een lichtdeeltje heeft nl. in de lucht een bepaalde kinetische energie, die toe- of afneemt met een bedrag gelijk aan de af- of toename der potentieele energie. Deze laatste nu is onafhankelijk van de richtingsverandering van den lichtstraal door de breking, zoodat in de tweede middenstof de kinetische energie, en dus ook de snelheid, voor alle richtingen dezelfde moet zijn. Op de beweging der lichtdeeltjes is nu het beginsel der *kleinste werking* of zooals het met meer recht door HAMILTON genoemd is, het beginsel der *stationaire werking* van toepassing.

We zullen daarom aan de volgende beschouwingen een bespreking van dit beginsel laten voorafgaan, waarbij in hoofdzaak het bekende werk van THOMSON en TAIT: Treatise on Natural Philosophy, Part I, gevolgd zal worden.

Bij al het volgende zal ondersteld worden dat de op de verschillende deelen van een stelsel werkende krachten zoodanig zijn, dat bij elke beweging tusschen twee gegeven configuratie's van het stelsel dezelfde arbeid verricht wordt, onafhankelijk van de baan langs welke de beweging plaats heeft. De verrichte arbeid is dus alleen afhankelijk van de begin- en de eind-configuratie; er bestaat m. a. w. een krachtfunctie, die van de configuratie, doch niet van de snelheid afhangt. THOMSON en TAIT spreken in zoo'n geval van een *conservatief stelsel* (l. c. § 271 en § 293).

Onder de *werking* gedurende een tijd t wordt verstaan een grootheid, die evenredig is met de gemiddelde kinetische energie die het stelsel gedurende dien tijd bezit, vermenigvuldigd met dien tijd. Stelt T op eenig oogenblik de kinetische energie voor, dan wordt de werking A voor zeker tijdsverloop aangegeven door

$$A = 2 \int T dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Deze integraal, waarbij geïntegreerd moet worden over het beschouwde tijdsverloop, kan vervormd worden tot een andere integraal, die betrekking heeft op de baan waarlangs de beweging heeft plaats gehad.

Wordt n. l. voor T de waarde

$$T = {}^1/_2 \; \Sigma \; mv^2$$

ingevuld en neemt men in aanmerking dat $v = \frac{ds}{dt}$ is, dan is

$$A = \int \Sigma \, m \, v \, ds \; . \; . \; . \; . \; . \; (20')$$

waarbij over den afgelegden weg geïntegreerd moet worden.

Het beginsel van de kleinste werking wordt door Thomson en Tait als volgt uitgedrukt (l. c. pag. 338 § 327).

»Of all the different sets of paths along which a conservative system may be guided to move from one configuration to another, with the sum of its potential and kinetic energies equal to a given constant, that one for which the action is the least is such that the system will require only to be started with the proper velocities, to move along it unguided."

Dit beginsel kan bewezen worden door aan te toonen dat voor den in werkelijkheid gevolgden weg de variatie van de werking nul zal zijn, indien we bij de variatie de begin- en eind-configuratie onveranderd laten en verder zoodanig varieeren, dat ook voor de gevarieerde beweging de som van de potentieele en kinetische energie even groot blijft, door welke laatste voorwaarde klaarblijkelijk de kinetische energie bij de denkbeeldige gevarieerde beweging op elk oogenblik is vastgesteld. De variatie van de werking, als in plaats van den werkelijken weg een willekeurige, oneindig dicht bij gelegen weg gevolgd wordt, wordt gevonden door de variatie der integraal van (20′):

$$\delta A = \int \Sigma m \, (\delta v \; ds + v \, \delta \, ds).$$

Daar $ds = v\,dt$ is, heeft men

$$m \, \delta v \; ds = m \, \delta v \; v \, dt = \delta \, (^1/_2 \, mv^2) \; dt$$

en dus

$$\int \Sigma m \; \delta v \; ds = \int \delta \, T \; dt.$$

De integraal

$$\int \Sigma \, mv \, \delta \, ds$$

kan als volgt herleid worden:

Uit de variatie van

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

volgt

$$\delta\, ds = \frac{dx}{ds}\, \delta\, dx + \frac{dy}{ds}\, \delta\, dy + \frac{dz}{ds}\, \delta\, dz$$

of

$$\delta\, ds = \cos\alpha\, \delta\, dx + \cos\beta\, \delta\, dy + \cos\gamma\, \delta\, dz,$$

waarin α, β en γ de hoeken zijn, die ds met de X-, Y- en Z-as maakt.

Voor $v\, \delta\, ds$ vinden wij nu

$$v\, \delta\, ds = v \cos\alpha\, \delta\, d\, x + v \cos\beta\, \delta\, dy + v \cos\gamma\, \delta\, dz =$$
$$= \dot{x}\, \delta\, dx + \dot{y}\, \delta\, dy + \dot{z}\, \delta\, dz,$$

of met toepassing van de betrekkingen $\delta\, dx = d\, \delta\, x$ enz.

$$v\, \delta\, ds = \dot{x}\, d\, \delta\, x + \dot{y}\, d\, \delta\, y + \dot{z}\, d\, \delta\, z.$$

We vinden nu

$$\int \Sigma\, m\, v\, \delta\, ds = \int \Sigma\, m\, (\dot{x}\, d\, \delta\, x + \dot{y}\, d\, \delta\, y + \dot{z}\, d\, \delta\, z)$$

en na partieele integratie

$$\int \Sigma\, m\, v\, \delta\, ds = \Big[\, \Sigma\, m\, (\dot{x}\, \delta\, x + \dot{y}\, \delta\, y + \dot{z}\, \delta\, z) \Big]_1 -$$
$$- \Big[\, \Sigma\, m\, (\dot{x}\, \delta\, x + \dot{y}\, \delta\, y + \dot{z}\, \delta\, z) \Big]_0 -$$
$$- \int \Sigma\, m\, (\ddot{x}\, \delta\, x + \ddot{y}\, \delta\, y + \ddot{z}\, \delta\, z)\, dt.$$

Deze laatste integraal is verkregen door voor $d\dot{x}$ enz. te zetten $\ddot{x}\, dt$ enz., terwijl de indices 0 en 1 op het begin en het einde van het beschouwde tijdsverloop betrekking hebben.

Voor de variatie van A vinden we ten slotte

$$\delta A = \int \left\{ \delta T - \Sigma m\, (\ddot{x}\, \delta x + \ddot{y}\, \delta y + \ddot{z}\, \delta z) \right\} dt +$$
$$+ \Big[\Sigma m\, (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z) \Big]_1 -$$
$$- \Big[\Sigma m\, (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z) \Big]_0 \quad . \; . \; . \; . \; (21).$$

Daar de coördinaten van de begin- en eindconfiguratie's bij het varieeren constant gedacht worden, is de waarde der beide laatste vormen nul, zoodat dus

$$\delta A = \int \left\{ \delta T - \Sigma m\, (\ddot{x}\, \delta x + \ddot{y}\, \delta y + \ddot{z}\, \delta z \right\} dt$$

wordt.

Nu is echter de onbepaalde bewegingsvergelijking, als V de potentieele energie voorstelt

$$\Sigma m\, (\ddot{x}\, \delta x + \ddot{y}\, \delta y + \ddot{z}\, \delta z) + \delta V = 0.$$

Daar bovendien voldaan moet worden aan de voorwaarde dat de som der potentieele en der kinetische energie een constante is, zoodat

$$\delta T + \delta V = 0,$$

volgt uit de drie voorgaande vergelijkingen

$$\delta A = 0.$$

Daar het nul zijn van de variatie der werking nog niet in zich sluit dat de werking voor de werkelijke beweging *kleiner* is dan voor de gevarieerde, doch alleen aangeeft dat de waarden der werking bij de beide bewegingen slechts met grootheden van hoogere orde van elkaar verschillen, heeft HAMILTON den boven reeds vermelden naam van stationaire werking ingevoerd. — Wat de voorwaarde betreft, dat de som van potentieele en kinetische energie onveranderd moet worden gelaten, deze komt bij de beschouwing van de beweging van een lichtdeeltje hierop neer, dat wij ons moeten voorstellen dat in elke middenstof de snelheid bij de gevarieerde beweging even groot is als zij zou zijn wanneer het deeltje bij een werkelijke beweging dezelfde plaats innam. Onder dien verstande is, als v de snelheid is en A en B begin- en eindstand aanduiden,

$$\delta \int_A^B m\, v\, dl = 0.$$

waarin dl een weg-element voorstelt en m, als constante, mag weggelaten worden. De van A naar B gaande lichtstraal zal dus dien weg volgen, waarvoor

$$\delta \int_A^B v\, dl = 0$$

is; hierin is v een functie van de plaats en van de kleur van het beschouwde licht, doch, zoolang isotrope middenstoffen beschouwd worden, onafhankelijk van de richting van den lichtstraal.

De zoo even afgeleide voorwaarde, onder welke een lichtstraal zich van een punt A naar een punt B beweegt, kan ook afgeleid worden door uit te gaan van de theorie van HUYGENS omtrent het wezen van het licht. Zooals bekend is, neemt HUYGENS aan dat de voortplanting van het licht tot stand komt door dat trillingen van de deeltjes van het lichtgevende voorwerp zich aan den omringenden aether mededeelen.

De snelheid waarmede deze evenwichts-verstoringen zich voortplanten, is afhankelijk van den aard der middenstof waarin ze plaats grijpen, doch onafhankelijk van de richting, mits de middenstof isotroop is.

Beschouwen wij nu de lichtbeweging die van een enkel lichtend punt L in een isotrope middenstof uitgaat, dan heeft de evenwichtsverstoring na een bepaald tijdsverloop zich uitgestrekt tot alle punten van een rondom L als middelpunt beschreven boloppervlak a. Om de rechtlijnige voortplanting van het licht, de terugkaatsing en de breking te verklaren neemt nu HUYGENS het volgende aan: Elk punt van a wordt nieuw middelpunt van trilling op het oogenblik dat het door de van L uitgegane evenwichtsverstoringen bereikt wordt. Een oneindig kleinen tijd later heeft van elk dezer punten uit de nieuwe evenwichtsverstoring zich voortgeplant over boloppervlakken met gelijke stralen, zoogenaamde elementaire golfoppervlakken. Ten gevolge van interferentie brengen nu al deze golfoppervlakken merkbare evenwichtsverstoringen alleen voort in de verschillende punten van het hen omhullende oppervlak, dat golfoppervlak genoemd wordt.

Voor het geval van één lichtend punt in een isotrope middenstof zijn alle golfoppervlakken boloppervlakken of gedeelten daarvan, indien n. l. schermen het licht beletten zich naar alle richtingen voort te planten.

Is de voortplantingssnelheid in verschillende richtingen verschillend, hetgeen zich bij anisotrope middenstoffen voordoet, dan zijn de elementaire golfoppervlakken, zoowel als de omhullende oppervlakken, niet meer bolvormig.

Volgens deze theorie verstaat men onder een lichtstraal het volgende:

Wij denken ons een golfoppervlak a behoorend bij een lichtend punt L en daarin een punt P; wij construeeren om de verschillende punten elementaire golfoppervlakken, en denken het omhullende vlak aangebracht; de lijn van P naar het raakpunt van het bij P behoorende elementaire golfoppervlak met het omhullende oppervlak, is dan een element van den lichtstraal, waarvan alle andere elementen op dezelfde wijze bepaald kunnen worden.

Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat, wanneer een lichtstraal volgens een rechte lijn of volgens een lijn die geleidelijk van richting verandert, van een punt A naar een punt B gaat, de hiervoor benoodigde tijd korter is dan hij voor eenigen anderen oneindig dicht bij gelegen weg zou zijn, en men kan gemakkelijk aantoonen dat dit ook het geval is, wanneer de lichtstraal ten gevolge van breking of terugkaatsing den vorm van een gebroken lijn krijgt.

In het algemeen is dus de variatie van den tijd door de lichtbeweging gebruikt om van een punt L naar een punt V te komen nul, d. i.

$$\delta \int_{L}^{V} \frac{dl}{v} = 0.$$

Denkt men zich uit een punt A een groot aantal lichtstralen getrokken, naar verschillende in een zelfde middenstof gelegen punten, zoodanig dat, volgens de emissie-theorie, de werking tot in al die punten dezelfde is, dan is de meetkundige plaats dier punten een oppervlak dat loodrecht op de lichtstralen staat. Daar alle lichtstralen van een zelfde punt uitgaan en hunne uiteinden in dezelfde middenstof gelegen zijn, is voor alle bewegende lichtdeeltjes de som der kinetische en potentieele energie even groot, zoodat wij de vergelijking (21) mogen toepassen op den overgang van een lichtstraal $A\,B$ naar een oneindig dicht bij gelegen eveneens van A afkomstigen lichtstraal. Men heeft dus

$$\delta A = \Big[m\,(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z) \Big]_1 = m\,v\,q\,cos\,\theta \,.\;. \quad (22),$$

als q de verbindingslijn der uiteinden van de beide lichtstralen is en θ den hoek voorstelt tusschen de richting van den lichtstraal in het uiteinde B en de richting van q.

Hierbij is in aanmerking genomen dat

$$\int \left\{ \delta T - \Sigma m \left(\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + \ddot{z}\,\delta z \right) \right\} dt = 0.$$

Is nu voor een oneindig dicht bij gelegen lichtstraal $A\,B_1$ de werking even groot als die voor $A\,B$, dan is $\delta A = 0$, waaruit volgt dat dan $\theta = 90°$ is. Trekken we de verschillende van A uitgaande lichtstralen naar punten, die oneindig dicht bij B liggen en waarvoor de werking gelijk is aan die voor $A\,B$, dan staat de lichtstraal $A\,B$ in het punt B loodrecht op het oppervlakte-element door de uiteinden dier lichtstralen bepaald.

In de theorie van Huygens volgt uit de definitie van golf-oppervlak en lichtstraal onmiddellijk dat de uiteinden der van een zelfde lichtend punt A uitgaande lichtstralen, wier lichttijd dezelfde is, als die uiteinden in een zelfde isotrope middenstof gelegen zijn, een oppervlak bepalen, dat in al zijn punten loodrecht staat op de lichtstralen; dit oppervlak kan bepaald worden door de vergelijking

$$T = \int_{A}^{B} \frac{dl}{v} = \text{constante},$$

als dl een weg-element en v de bijbehoorende snelheid voorstelt.

Uitgaande van deze eigenschap van het oppervlak van constanten lichttijd, kunnen wij nu een merkwaardige stelling bewijzen:

Is $d\,q$ een oppervlakte-element, gelegen in een middenstof, waarin de voortplantings-snelheid van het licht

v is, en gaat van het midden van dit element een stralenbundel uit met de zeer kleine opening $d\,\omega$, en waarvan de as een hoek θ maakt met de normaal op het oppervlakte-element, dan zal deze bundel uit een willekeurig geplaatst plat vlak een element $d\,q'$ snijden; beschouwt men dan omgekeerd het midden van dq' als een lichtend punt, dat een stralenbundel uitzendt naar $d\,q$, zoodat de uiterste stralen naar den omtrek van $d\,q$ gaan, en is de opening van dezen bundel $d\,\omega'$, terwijl de as met de normaal op $d\,q'$ een hoek θ' maakt, dan bestaat de betrekking:

$$\frac{d\,q \;\; d\,\omega \;\; \cos\theta}{v^2} = \frac{d\,q' \;\; d\,\omega' \;\; \cos\theta'}{v'^{\,2}},$$

als v' de voortplantings-snelheid in de middenstof ter plaatse van $d\,q'$ is en voor θ en θ' de scherpe hoeken genomen worden.

Deze stelling is het eerst door R. Straubel uitgesproken [1].

Voor het bewijs nemen we (fig. 7) in het vlak van $d\,q$ twee onderling loodrechte coördinaat-assen OX en OY aan en in dat van $d\,q'$ de eveneens loodrecht op elkaar staande assen $O'X'$ en $O'Y'$ De punten O en O' zijn punten van een zelfden lichtstraal. Heeft nu voor den lichtweg van eenig punt van het eene naar een willekeurig punt van het andere vlak, de lichttijd een waarde

R. Straubel. Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen. Physikal. Zeitschrift 4 Jahrg. pag. 114.

T, dan zullen we allereerst de beteekenis van de differentiaal-quotienten $\frac{\partial T}{\partial x}$ en $\frac{\partial T}{\partial y}$ zoeken. Daartoe laten we een lichtstraal gaan van een punt B van het vlak $O' X' Y'$ naar een punt A (x, y) van het vlak $O X Y$ en een tweeden straal naar het punt A', dat wij verkrijgen door A in de richting der x-as oneindig weinig te verplaatsen en waarvan de coördinaten zijn $x + d\,x$ en y. Is de lichttijd voor dezen tweeden weg $T + d\,T$, dan hebben wij $d\,T$ te bepalen.

Breng (fig. 8) door A een vlak V loodrecht op den eersten lichtstraal in A, dan is voor alle naburige punten van dit vlak de waarde van T even groot; ook voor den weg $B\,C$, als C het snijpunt van $B\,A'$ met het vlak V is, bedraagt de lichttijd dus T. Daaruit volgt dat $d\,T$ de tijd is, waarin de weg $C\,A'$ wordt doorloopen, en dus als v de snelheid van de lichtbeweging in het punt A is

$$v\,d\,T = d\,x \cos\,(x, l).$$

Deze vergelijking gaat in alle gevallen door, ook wat het teeken betreft, indien (x, l) de hoek is tusschen de positieve richting der x-as en de richting van den lichtstraal, genomen van B naar A. Uit de laatste vergelijking volgt

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{v} \cos\,(x, l).$$

Evenzoo is

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{v} \cos\,(y, l).$$

Laat nu lichtstralen gaan van uit den coördinatenoorsprong in het vlak $O X Y$ naar verschillende punten in het vlak van $d q'$; we beschrijven met O (fig. 7) als middelpunt een bol met een straal $O D$ gelijk de lengteeenheid. De punten waarin de raaklijnen in O aan de stralen van den stralenbundel met O tot top het boloppervlak snijden, projecteeren we op het vlak $O X Y$.

Noemen we de coördinaten van een dergelijk punt x en y, dan is

$$cos\,(x, l) = -\,\mathsf{x} \text{ en } cos\,(y, l) = -\,\mathsf{y},$$

zoodat we voor een van O naar O' gaanden lichtstraal krijgen:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\,\frac{1}{v}\,\mathsf{x} \text{ en } \frac{\partial T}{\partial y} = -\,\frac{1}{v}\,\mathsf{y}.$$

Bepaalt men zich tot de oneindig kleine gedeelten van de vlakken $O X Y$ en $O' X' Y'$, gelegen rondom (x, y) en rondom O', dan komt met ieder punt van het eene vlakte-element een bepaald punt van het tweede vlakte-element overeen en behoort bij een lijn-element in het eerste een bepaald lijn-element in het tweede vlakte-element; dit verband kan aangegeven worden door de vergelijkingen

$$d\,\mathsf{x} = -\,v\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x'}\,d x' + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y'}\,d y'\right)$$

$$d\,\mathsf{y} = -\,v\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x'}\,d x' + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial y'}\,d y'\right),$$

die door differentiatie van de voorafgaande vergelijkingen gevonden worden.

Uit de bovenstaande waarden van $d\mathbf{x}$ en $d\mathbf{y}$ volgt dat de verhouding der oppervlakken van twee overeenkomstige, oneindig kleine figuren, in de beide vlakte-elementen gelegen, voor alle figuren die bij de punten ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) en O' liggen, even groot is.

Om dit te bewijzen gaan we uit van een driehoek met den top in O'; zijn de coördinaten der beide andere hoekpunten resp. (dx'_1, dy'_1) en (dx'_2, dy'_2), dan is zijn oppervlak

$$\pm\ {}^1/_2\,(dx'_1\,dy'_2 - dx'_2\,dy'_1)$$

en dat van den overeenkomstigen driehoek in het vlak OXY

$$\pm\ {}^1/_2\,v^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x'}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 T}{\partial x'\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y'\,\partial x}\right)\left(dx'_1\,dy'_2 - dx'_2\,dy'_1\right),$$

waaruit volgt dat de verhouding onafhankelijk is van de ligging en de grootte van den oorspronkelijken driehoek. In bovenstaande uitdrukkingen zijn, evenals in de verder voorkomende formules, dubbele teekens genomen met de bedoeling dat steeds de absolute waarde der uitdrukking genomen moet worden.

Door een vlakte-element van willekeurigen vorm rondom O' te beschouwen als opgebouwd uit driehoeken met hun top in O', kan men het bewijs gemakkelijk tot figuren van willekeurigen vorm, mits oneindig klein, uitbreiden.

Gaan nu de van O afkomstige stralen naar de verschillende punten van een oppervlakte-element dq' rondom O', dan snijden de raaklijnen in O aan deze lichtstralen getrokken, uit het bolopperviak rondom O een stuk waarvan de projectie op het vlak $O\,X\,Y$ bepaald wordt door

$$\pm\; v^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 T}{\partial x'\,\partial y} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y'\,\partial x}\right) d\,q'$$

en dat dus zelf de grootte

$$d\,\omega = \pm\, \frac{v^2}{\cos\theta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 T}{\partial x'\,\partial y} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y'\,\partial x}\right) d\,q'$$

heeft, als θ de hoek is, dien de raaklijn in O aan den lichtstraal die van O naar O' gaat, maakt met de normaal in O op $O\,X\,Y$ opgericht. Wij kunnen ook zeggen dat $d\,\omega$ den lichamelijken hoek voorstelt van den kegel, bepaald door de raaklijnen in O aan de lichtstralen die van O naar den omtrek van $d\,q'$ gaan.

De redeneering herhalende voor een stralenbundel met O' tot top, gevormd door de van O' naar de verschillende punten van een rondom O gelegen oppervlakte-element $d\,q$ gaande lichtstralen, vindt men de betrekking

$$d\,\omega' = \pm\, \frac{v'^2}{\cos\theta'} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x'\,\partial x} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y'\,\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x'\,\partial y}\right) d\,q.$$

Daar in de beide nu beschouwde gevallen de tusschen haakjes geplaatste vorm dezelfde is, volgt uit deze en de voorgaande betrekking

$$\frac{d\,\omega\,\cos\theta\,d\,q}{v^2} = \frac{d\omega'\,\cos\theta'\,dq'}{v'^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

waarmede de stelling van STRAUBEL bewezen is.

De stelling kan ook afgeleid worden met behulp van de emissie-theorie; het door A loodrecht op den lichtstraal aangebrachte oppervlak wordt in dat geval beschouwd als een oppervlak van constante werking. Noemt men I het bedrag der werking voor een lichtstraal van een of ander punt van $O' X' Y'$ uitgaande naar een punt van $O X Y$, dan vindt men, op overeenkomstige wijze als boven,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = v \cos (x, l), \text{ enz.}$$

terwijl de verdere redeneering onveranderd blijft.

Het eind-resultaat wordt dan echter

$$v^2 \, d\omega \cos \theta \, dq = v'^2 \, d\omega' \cos \theta' \, dq' \; . \; . \; . \; (23').$$

Het verschil dat tusschen de formules (23) en (23′) bestaat, valt weg zoodra in plaats van de voortplantingssnelheden de brekings-indices ingevoerd worden. Zooals bekend is volgt uit de theorie van Huygens

$$\frac{v}{v'} = \frac{n'}{n}$$

en uit die van Newton

$$\frac{v}{v'} = \frac{n}{n'},$$

als n en n' de absolute brekings-indices voorstellen van de middenstof om O en om O'. Bij substitutie dezer waarden resp. in (23) en (23′) ontstaat de formule

$$n^2 \, d\omega \cos \theta \, dq = n'^2 \, d\omega' \cos \theta' \, dq',$$

wat de vorm is, waarin ze door STRAUBEL t. a. p. gegegeven wordt.

De stelling van STRAUBEL is te beschouwen als eene uitbreiding van de vroeger behandelde stelling van HUYGENS, daar ze het verband bepaalt tusschen de lichamelijke hoeken waaronder, tengevolge van geheel willekeurige brekingen der lichtstralen, van uit een punt O van $d\,q$ het oppervlak $d\,q'$ en van uit een punt O' van $d\,q'$ het oppervlak $d\,q$ gezien wordt.

Wij kunnen de gevonden betrekking nu ook op een gecentreerd lenzen-stelsel toepassen; daarbij onderstellen wij dat $d\,q$ en $d\,q'$ in punten der as van het stelsel loodrecht op die as staan en beide in dezelfde middenstof gelegen zijn. Het oppervlakte-element $d\,q$ rekenen we te behooren tot het door het stelsel afgebeelde voorwerp, terwijl in $d\,q'$ het oog geplaatst gedacht wordt; het oog ziet $d\,q$ dan onder een lichamelijken hoek $d\,\omega'$. Daar nu θ en θ' beide nul zijn, en $v = v'$ is, is volgens (23)

$$d\,\omega\;d\,q = d\,\omega'\;d\,q'.$$

Is $d\,q$ cirkelvormig en ligt zijn middelpunt op de as, dan kan $d\,\omega'$ verkregen worden door den straal, die van een punt van den omtrek van $d\,q$ naar het op de as gelegen punt van $d\,q'$ gaat, om de as te laten wentelen. Iets dergelijks geldt van $d\,\omega$, wanneer ook voor $d\,q$ een oneindig klein cirkelvlak met het middelpunt op de as genomen wordt. Wordt nu in de laatste formule $d\,q = d\,q'$ genomen, dan wordt $d\,\omega = d\,\omega'$; daar verder uit de gelijkheid van de lichamelijke hoeken van twee omwentelingskegels tot de gelijkheid van hunne tophoeken kan besloten worden, komt men tot de stelling van Huygens terug.

Zijn de middenstoffen waarin het oog en het voorwerp geplaatst zijn, verschillend, met de voortplantingssnelheden v en v', dan wordt de verhouding der lichamelijke hoeken waaronder in de twee gevallen het voorwerp gezien wordt

$$\frac{d\,\omega'}{d\,\omega} = \frac{v'^2}{v^2},$$

hetgeen met het op pag. 33 vermelde in overeenstemstemming is.

Met behulp van de stelling van Straubel kunnen wij verder de volgende stelling afleiden:

Gaan alle van een lichtend punt A binnen een lichamelijken hoek $d\,\omega$ uitgaande stralen ten slotte weer door een zelfde punt B, waarbij ze een lichamelijken hoek $d\,\omega_1$ insluiten, en trekt men van uit een binnen den stralenbundel gelegen punt C de stralen naar den omtrek van een door A gaand vlakte-element $d\,q$, dan zullen deze stralen na verlenging door C in een door B gaand vlak een vlakte-element $d\,q_1$ bepalen, zoodanig dat voldaan wordt aan de betrekking

$$\frac{d\,\omega\ cos\ \theta\ d\,q}{v^2} = \frac{d\,\omega_1\ cos\ \theta_1\ d\,q_1}{v_1{}^2}, \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

waarin θ en θ_1 de scherpe hoeken zijn, die de stralenbundels in A en B met de normalen op de door A en B gaande vlakken insluiten en v en v_1 de bekende beteekenis hebben.

Om deze stelling te bewijzen brengen we door C een vlakte-element $d\,q'$ aan, dat door den stralenbundel, die van A naar B gaat, begrensd wordt. Passen we op $d\,q$ en $d\,q'$ voor de punten A en C de stelling van Straubel toe, dan ontstaat de vergelijking

$$\frac{d\,\omega\ cos\ \theta\ d\,q}{v^2} = \frac{d\,\omega'\ cos\ \theta'\ d\,q'}{v'^{\,2}},$$

waarin de grootheden met accenten op het punt C betrekking hebben.

Wordt aan de gemaakte onderstellingen voldaan, dan geeft de stelling van Straubel voor de elementen $d\,q'$ en $d\,q_1$ de vergelijking

$$\frac{d\,\omega'\ cos\ \theta'\ d\,q'}{v'^{\,2}} = \frac{d\,\omega_1\ cos\ \theta_1\ d\,q_1}{v_1{}^2}.$$

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt dan onmiddellijk de betrekking (24).

Het geval kan zich voordoen dat een door A gaand vlakte-element $d\,q$ een door B gaand vlakte-element $d\,q_1$ tot *beeld* heeft, d. w. z. dat de van ieder willekeurig punt van $d\,q$ afkomstige stralen zich telkens in één punt van $d\,q_1$ vereenigen. Is dit het geval dan zullen steeds de stralen van den bundel met het punt C tot top, die naar den omtrek van $d\,q$ gaan na verlenging door C naar den omtrek van $d\,q_1$ gaan, onafhankelijk van de plaats van het punt C. Het verband tusschen de grootte van $d\,q$ en $d\,q_1$ wordt weer aangegeven door (24).

Komt de afbeelding van $d\,q$ in $d\,q_1$ tot stand door middel van stralenbundels met eindige lichamelijke hoeken, dan kan men die hoeken in oneindig kleine hoeken verdeelen en telkens het bovengevondene toepassen. Is $d\,\omega$ een element der eene kegel-opening en $d\,\omega_1$ het overeenkomstige element der andere, terwijl θ en θ_1 de bij die elementen behoorende hoeken zijn, dan geldt de betrekking

$$\frac{d\,q}{v^2}\int d\,\omega\,\cos\theta = \frac{d\,q_1}{{v_1}^2}\int d\,\omega_1\,\cos\theta_1 \quad . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Wij passen deze uitkomst toe op een stelsel gecentreerde bolvormige, brekende oppervlakken, waarbij wij onderstellen dat het element $d\,q$ in een punt der as loodrecht daarop staat en dat dit in het element $d\,q_1$, dat denzelfden stand heeft, wordt afgebeeld door een stralenkegel met den eindigen halven tophoek θ. De richting van een straal kunnen wij bepalen door den hoek θ, dien hij met de as maakt en den hoek ψ tusschen het vlak door den straal en de as gebracht en een vast vlak door de as. Beantwoordt dan aan den hoek θ voor den invallenden straal de hoek θ_1 voor den uittredenden, dan is

$$d\,\omega = \sin\,\theta\,d\,\theta\,d\,\psi\,, \quad d\,\omega_1 = \sin\,\theta_1\,d\,\theta_1\,d\,\psi_1,$$

zoodat de vergelijking (25) overgaat in

$$\frac{d\,q}{v^2}\int_0^{\theta} \sin\,\theta\,\cos\,\theta\,d\,\theta = \frac{d\,q_1}{{v_1}^2}\int_0^{\theta_1} \sin\,\theta_1\,\cos\,\theta_1\,d\,\theta_1$$

of

$$\frac{d\,q}{v^2}\,\sin^2\,\theta = \frac{d\,q_1}{{v_1}^2}\,\sin^2\,\theta_1\,.$$

Het hierin uitgedrukte theorema staat in de Optica bekend als de *sinus-stelling*; het is de vergelijking die in de plaats komt van die van HELMHOLTZ, zoodra de afbeelding geschiedt door stralenbundels met eindige opening.

De stelling van STRAUBEL, die in het voorgaande besproken is, kan tot anisotrope lichamen worden uitgebreid. Het bewijs dat deze uitbreiding mogelijk is en de formule, waartoe zij aanleiding geeft, is mij medegedeeld door prof LORENTZ, wiens beschouwingen ik in het volgende zal weergeven.

Evenals bij isotrope lichamen kan ook bij anisotrope een verband worden afgeleid, dat er bestaat tusschen de grootte van een vlakte-element $d\,q'$, dat door een oneindig smallen kegel van lichtstralen, afkomstig van een punt O, uit een vlak V' gesneden wordt en de grootte van het vlakte-element dat door een dergelijken van een punt O' van $d\,q'$ afkomstigen kegel uit een door O gaand vlak V rondom O wordt gesneden.

Van een willekeurig punt A in V gaat, in het geval van anisotrope middenstoffen, meer dan één lichtstraal naar een punt B van V. Wij beschouwen echter slechts één van A naar B gaanden straal.

In elk der vlakken V en V' nemen we twee onderling loodrechte coördinaat-assen aan. De tijd T, voor den beschouwden lichtstraal benoodigd om van A naar B of omgekeerd te gaan, is dan een functie van de coördinaten (x, y) van A en (x', y') van B.

Welke beteekenis hebben nu de differentiaalquotienten $\frac{\partial T}{\partial x}$ en $\frac{\partial T}{\partial y}$? Om deze te vinden maken we gebruik van het bij B behoorende golffront G, dat door het punt A gaat. Dit golffront is een oppervlak dat de eigenschap heeft, dat al zijn punten door de van B uitgaande lichtstralen in denzelfden tijd bereikt worden, zoodat voor al deze punten T dezelfde waarde heeft. In een oneindig kleinen tijd $d\,T$ zal dit golffront zich voortgeplant hebben tot een oneindig weinig verder gelegen golffront G'. De voortplantingssnelheid v der golven in A wordt dan aangegeven door $\frac{d\,N}{d\,T}$, als $d\,N$ het stuk is der normaal in A op het golffront G, begrepen tusschen G en G'. Hierbij dient in het oog gehouden te worden, dat deze voortplantingssnelheid niet dezelfde is als die van den straal, en dat de richting der normaal niet samenvalt met die van den straal.

Om nu $\frac{\partial T}{\partial x}$ te vinden trekken wij door A een lijn evenwijdig aan de x-as Deze lijn snijdt het golffront G' in een punt A', dat op een afstand $d x = \frac{d N}{cos\,(N, x)}$ van A gelegen is.

Nu is

$$d N = v\, d T,$$

en bij gevolg

$$v\, d T = d x \; cos\; (N, x).$$

Onder (N, x) verstaan we hier den hoek dien de van B naar de zijde van A getrokken normaal op het golffront met de x-as maakt.

Wij hebben dus

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{v}\; cos\; (N, x).$$

Evenzoo is

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{v}\; cos\; (N, y).$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn van toepassing op een lichtstraal, die gaat van O naar eenig nabij O' gelegen punt van V'. De richting van een door O gaanden lichtstraal in het punt O is de richting s der raaklijn in O; bij het punt O van den straal behoort bovendien een bepaalde richting N van de golfnormaal Gaat nu van

O een oneindig smalle stralenkegel uit, wiens as de van O naar O' gaande lichtstraal is, dan behoort bij dezen een dergelijke kegel, bepaald door de raaklijnen aan de verschillende stralen in O en een kegel bepaald door de golfnormalen in O. Op elk dezer laatste zetten we van uit O een stuk af $= \frac{1}{v}$, als v de voortplantingssnelheid van het bij de normaal behoorende golffront is. Daar de waarde van v geleidelijk verandert en de opening $d\omega$ van den normalenkegel oneindig klein is, mogen wij aannemen dat de uiteinden D der op de normalen afgezette stukken in een plat vlak liggen, en daarin een oppervlakte-element ds bepalen. De verschillende punten van dit vlakte-element projecteeren we op het vlak V. Voor het punt dat gelegen is op de normaal, die bij den van O naar O' gaanden lichtstraal behoort, zijn de coördinaten van de projectie

$$\mathsf{x} = -\frac{1}{v} \cos(N, x), \quad \mathsf{y} = -\frac{1}{v} \cos(N, y)$$

of in verband met bovenstaande formules

$$\mathsf{x} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mathsf{y} = -\frac{\partial T}{\partial y}.$$

De op deze wijze verkregen punten (x, y) behooren alle tot een bepaald vlakte-element dV van V, waarvan de grootte bepaald wordt door de vergelijking

$$dV = \cos\theta\, ds = \frac{\cos\theta}{\cos\eta} \frac{1}{v^2} d\omega,$$

als θ de scherpe hoek is, dien de normaal op ds maakt met de normaal op V, en η de scherpe hoek tusschen de eerste dier twee normalen en de as van den normalen-kegel $d\,\omega$.

Snijdt nu de stralenkegel die van O uitgaat, een vlakte-element $d\,q'$ uit V', dan behoort, zooals uit de voorlaatste vergelijkingen blijkt, bij elk punt (x', y') van $d\,q'$ een punt (**x**, **y**) van $d\,V$.

Daaruit volgt dat tusschen de grootte van $d\,q'$ en die van $d\,V$ een verband bestaat, dat aangegeven wordt door

$$d\,V = \pm \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y'} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x'}\right) d\,q'$$

of, na invulling der voor $d\,V$ gevonden waarde,

$$\frac{\cos\,\theta}{\cos\,\eta}\;\frac{1}{v^2}\;d\,\omega = D\,d\,q'$$

als D de absolute waarde van de tusschen haakjes geplaatste determinant voorstelt.

De normaal op het vlakte-element ds heeft dezelfde richting als de as van den stralenkegel in het punt O. Dit kan op de volgende manier bewezen worden. Rondom O denken we ons een bol met een straal gelijk de eenheid, en nemen dan van al de punten van ds de poolvlakken, met betrekking tot het oppervlak van dezen bol. Daar ds de meetkundige plaats is van de verschillende punten D, gelegen op de verschillende lijnen N binnen den normalen-kegel $d\omega$, telkens op den afstand $\frac{1}{v}$ van O, behoort bij ieder punt D van ds een poolvlak met betrekking tot den bol, dat op een afstand v van O loodrecht staat op de lijn $O\,D$. De verschillende poolvlakken zijn dus raakvlakken aan een bij O behoorend golfoppervlak; zij kunnen geacht worden alle te gaan door een punt van den lichtstraal, waarbij de as van den normalen-kegel $d\,\omega'$ als golf-normaal behoort (of liever door een punt van de raaklijn in O aan dien straal getrokken). Nu is echter het bij dit punt behoorende poolvlak niet anders dan het vlak van ds, waaruit volgt dat de richting van de normaal van ds dezelfde is als die van de raaklijn aan den lichtstraal door O. De hoek θ is dus te beschouwen als de hoek tusschen de richting van den lichtstraal in O en de normaal op V en de hoek η als de hoek tusschen de richting van den lichtstraal in O en de golfnormaal; is nu v_s de voortplantingssnelheid van den lichtstraal, dan is dus

$$\cos\eta = \frac{v}{v_s}.$$

Hierdoor kan de voorgaande vergelijking geschreven worden in den vorm

$$\frac{v_s}{v^3}\cos\theta\;d\,\omega = D\,d\,q'.$$

De beschouwing van een oneindig smallen kegel die, van O' uitgaande, den van O' naar O gaanden lichtstraal tot as heeft, leidt tot een dergelijke betrekking als de bovenstaande. Snijdt deze kegel uit het vlak V een element dq en noemen we θ' den scherpen hoek, dien de raaklijn in O' aan de as van den kegel getrokken met de normaal op V' maakt, v'_s de voortplantingssnelheid in O' van den lichtstraal die door O gaat, en $d\omega'$ de opening van den oneindig smallen kegel die de verschillende normalen, bij de door O' gaande lichtstralen behoorende, bevat, dan heeft men

$$\frac{v'_s}{v'^3} \cos\theta' \, d\omega' = D\,dq\,,$$

waarin D hetzelfde is als boven, daar de waarde van die determinant niet verandert als men x, y met x', y' verwisselt.

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt

$$\frac{v_s}{v^3} \cos\theta \, dq \, d\omega = \frac{v'_s}{v'^3} \cos\theta' \, dq' \, d\omega'\,,$$

welke formule als de uitbreiding van de stelling van Straubel te beschouwen is.

De bovenstaande formule is, evenals de afleiding, algemeen geldig; d. w. z., dat de stralen van de eene dubbelbrekende stof in de andere kunnen overgaan, dat de dubbelbrekende stoffen niet homogeen behoeven te zijn, waardoor de banen der stralen kromme lijnen kunnen worden, en dat naast de dubbelbrekende middenstoffen ook enkelbrekende kunnen voorkomen, waarbij dan de oppervlakte-elementen dq en dq' beide of een van beide in zoodanige middenstof kunnen liggen. Liggen O en O' beide in enkelbrekende middenstoffen, dan gaat de formule over in die van pag. 56, daar dan $v_s = v$ en $v'_s = v'$ genomen moet worden, terwijl de normalen-kegels overgaan in de kegels, die door de raaklijnen aan de lichtstralen in O resp. O' opgevuld worden.

HOOFDSTUK IV.

VERBAND TUSSCHEN DE STELLINGEN OMTRENT DEN LOOP DER STRALEN EN DE TWEEDE WET DER THERMODYNAMICA.

Door Kirchhoff, Helmholtz en Clausius zijn verschillende beschouwingen ontwikkeld omtrent de uitwisseling van warmte door straling, welke beschouwingen de beide laatste natuurkundigen o. a. geleid hebben tot de sinus-wet der optische afbeelding.

Kirchhoff [1]) gaat uit van het beginsel dat, wanneer een lichaam opgesloten is in een omhulsel dat geen warmtestralen doorlaat, en waarvan de temperatuur constant gehouden wordt, de temperatuur van het lichaam, wanneer zij eenmaal gelijk aan die van het omhulsel is, voortdurend daaraan gelijk zal blijven, tenzij op andere wijze warmte toegevoerd of weggenomen wordt. Hierbij wordt ondersteld dat noch het lichaam noch het omhulsel eenige verandering ondergaat door de stralen die het uitzendt of absorbeert,

---

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann. Bd. 109, pag. 275.

zoolang hunne temperatuur gelijk gehouden wordt.

Met behulp van dit beginsel leidt KIRCHHOFF zijne bekende wet omtrent de verhouding van het emissie- en het absorptie-vermogen af, eerst voor volkomen zwarte, daarna voor willekeurige lichamen. Voor het geval van volkomen zwarte lichamen wordt de wet in de eerste plaats bewezen in de onderstelling dat de warmtestralen rechte lijnen zijn; vervolgens wordt aangenomen dat de stralen door tusschengeplaatste lichamen willekeurige brekingen en terugkaatsingen ondergaan.

Om in dit laatste geval eene uitdrukking te vinden voor de hoeveelheid warmte, die het eene zwarte oppervlak S_1 naar een tweede zwart oppervlak S_2 zendt, beschouwt KIRCHHOFF den tijd dien het licht noodig heeft om zich van een punt van het eene oppervlak naar een punt van het andere voort te planten, waarbij hij gebruik maakt van de omstandigheid, dat deze tijd voor den werkelijk gevolgden weg een minimum is.

Stilzwijgend neemt KIRCHHOFF daarbij aan dat de beide elkaar warmte toestralende oppervlakken in gelijke middenstoffen (i. c. het luchtledige) gelegen zijn. In het beginpunt O_1 van de as van den stralenbundel die van een punt van S_1 naar een element van S_2 gaat, plaatst KIRCHHOFF den oorsprong van twee onderling loodrechte coördinaat-assen $O_1 X_1$ en $O_1 Y_1$, wier vlak in O_1 loodrecht staat op de as van genoemden stralenbundel. In het snijpunt van de as met S_2 wordt op overeenkomstige manier een coördinaten-stelsel $O_2 X_2$, $O_2 Y_2$ geplaatst; vervolgens worden de rondom O_1 resp. O_2 gelegen oppervlakte-elementen van S_1 resp. S_2 op deze coördinaat-vlakken geprojecteerd. Voor de warmte die het oppervlak S_1 het oppervlak S_2 toezendt, geldt dan de volgende uitdrukking

$$K_1 = \mu_1 \int\int\int\int \pm \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1} \right) dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$$

waarin $d\,x_1 \; d\,y_1$ en $d\,x_2 \; d\,y_2$ elementen der projectie's van de oppervlakken S_1 en S_2 zijn, van een hoogere orde oneindig klein dan die oppervlakken en T den tijd voorstelt, waarin de warmtestraal gaat van O_1 naar O_2, terwijl μ_1 de stralings-intensiteit van het oppervlak is; deze is een functie van de golflengte en van de temperatuur ter plaatse van O_1. Men kan een dergelijke uitdrukking opstellen voor de warmte K_2 die het oppervlak S_2 het oppervlak S_1 toestraalt; deze is dan gelijk aan K_1, want de stralings-intensiteit μ_2 van S_2 moet, wegens de gemaakte onderstelling omtrent de middenstoffen waarin O_1 en O_2 gelegen zijn, gelijk zijn aan μ_1, terwijl het op de tusschen haakjes geplaatste uitdrukking geen invloed heeft of de lichtstraal gaat van O_1 naar O_2, dan wel van O_2 naar O_1.

In de tweede plaats denkt Kirchhoff zich een lichaam met willekeurig oppervlak in een volkomen zwart omhulsel en bewijst dan, met toepassing van de wet van het temperatuur-evenwicht, dat voor ieder willekeurig lichaam bij dezelfde temperatuur de verhouding van het emissie-vermogen tot het absorptie-vermogen even groot is.

Met behulp van deze laatste wet wordt dan ten slotte bewezen dat de waarde van μ afhankelijk is van den aard der middenstof; is nl. μ_1 de waarde der stralings-intensiteit voor een middenstof met den absoluten brekings-index n_1 en μ die voor het luchtledige, dan is

$$\mu_1 : \mu = n_1^2$$

of voor twee verschillende middenstoffen met brekings-indices n_1 en n_2:

$$\mu_1 : \mu_2 = n_1^2 : n_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Van het bovenstaande zullen we hier eene afleiding laten volgen, uitgaande van de op pag. 60 afgeleide formule (23).

Deze formule is afgeleid door de beschouwing van de stralen die uitgaan van het midden van een element $d\,q$ naar den omtrek van een element $d\,q'$; deze stralen begrenzen een lichamelijken hoek $d\omega$. De stralen die van naburige punten van $d\,q$ naar den omtrek van $d\,q'$ gaan, sluiten telkens een lichamelijken hoek in, die op grootheden van hoogere orde na, aan $d\omega$ gelijk is. De hoeveelheid warmte die het element $d\,q$ naar $d\,q'$ zendt, is dan evenredig met de grootte van $d\,q$, met de grootte van $d\omega$, en met den cosinus van den hoek θ, dien de as van den stralenbundel met de normaal op dq maakt; deze hoeveelheid kan dus voorgesteld worden door

$$d\,\mathrm{K} = \mu\, dq\, d\omega \cos\theta,$$

waarin μ de hoeveelheid warmte beteekent, die door de eenheid van oppervlakte binnen een kegel met een opening gelijk de eenheid, wiens as loodrecht staat op het vlakte-element, wordt uitgestraald.

De hoeveelheid warmte die dq' naar dq zendt, kan eveneens voorgesteld worden door

$$d\,\mathrm{K}' = \mu'\, dq'\, d\omega' \cos\theta'.$$

Wordt nu voldaan aan de voorwaarden noodig voor het bestaan van het temperatuur-evenwicht, dan is

$$d\,\mathrm{K} = d\,\mathrm{K}',$$

of na substitutie der bovenstaande waarden

$$\mu\, dq\, d\omega \cos\theta = \mu'\, dq'\, d\omega' \cos\theta'.$$

Uit deze betrekking en uit de vergelijking (23) volgt onmiddellijk

$$\mu : \mu' = v'^2 : v^2.$$

De wet, door deze evenredigheid uitgedrukt, kan dus beschouwd worden als een gevolg van de wet van het temperatuur-evenwicht en van de wet omtrent de minimum-waarde van den lichttijd.

Uit het bovenstaande volgt o.a. nog dat de wet van het temperatuur-evenwicht niet volgt uit de wet van den minimum-lichttijd; zelfs niet voor het geval, dat de beide zwarte oppervlakte-elementen dq en dq' in dezelfde middenstof gelegen zijn Men mag nl. niet à priori aannemen dat μ voor alle mogelijke volkomen zwarte lichamen, in dezelfde middenstof gelegen, dezelfde is. Dat dit inderdaad het geval is, is door KIRCHHOFF (l. c.) juist met behulp van de wet van het temperatuur-evenwicht bewezen.

In de tweede plaats zullen hier de onderzoekingen van CLAUSIUS [1]) betreffende de concentratie van licht- en warmte-stralen besproken worden. Deze onderzoekingen staan in verband met zijne beschouwingen over de tweede hoofdwet der mechanische warmte-theorie, welke laatste hij afleidt uit de grondstelling: „de warmte kan niet van zelf (of zonder compensatie) van een kouder naar een warmer lichaam overgaan.”

CLAUSIUS zegt dat deze grondstelling, wat betreft de op gewone manier plaatsgrijpende warmte-straling, door de ervaring bevestigd wordt, doch dat het de vraag zou kunnen zijn of het niet mogelijk is om door stralen-concentratie het bestraalde lichaam een hoogere temperatuur te geven dan die van het uitstralende lichaam. Het was daarom noodig, de warmte-wisseling bij een willekeurigen loop der stralen nader te onderzoeken.

CLAUSIUS komt daarbij tot het volgende resultaat:

---

[1]) CLAUSIUS. Die Mechanische Theorie der Wärme. Ier Band pag. 314.

„Um die Wirkungen der gewöhnlichen, ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung mit dem Grundsatze, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, in Einklang zu bringen, ist es nothwendig anzunehmen, dass die Stärke der Emission eines Körpers nicht nur von seiner eigenen Beschaffenheit und seiner Temperatur, sondern auch von der Natur des umgebenden Mittels, abhängt" etc (l. c. pag. 353).

Voor deze afhankelijkheid vindt hij de wet waartoe ook Kirchhoff is gekomen, en hij zegt dan verder: „Wenn diese Annahme über den Einfluss des umgebenden Mittels auf die Emission richtig ist, so ist jener Grundsatz nicht nur bei der ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung erfüllt, sondern er muss auch gültig bleiben, wenn die Strahlen durch Brechungen und Reflexionen in beliebiger Weise concentrirt werden" etc.

Door zijne verdere beschouwingen vindt Clausius dit bevestigd, en toont hij de gelijkheid der straling aan, ook voor het geval men met concentratie van warmte-stralen te doen heeft. Voor het bewijs wordt gebruikt gemaakt van formules die het verband aangeven tusschen de grootte van een voorwerp en die van zijn beeld dat door de stralen-concentratie ontstaat. Deze en andere formules, die dienen om den gang der lichtstralen aan te geven, worden door Clau-

SIUS afgeleid uit de stelling omtrent het minimum van den lichttijd.

Om zijne grondstelling voor het geval van stralenconcentratie te bewijzen heeft CLAUSIUS dus noodig 1°) de wet van het minimum van den lichttijd en 2°) de wet omtrent de intensiteiten der straling in verschillende middenstoffen.

In het voorgaande is aangetoond dat met behulp van de eerste stelling van STRAUBEL bewezen kan worden dat de gelijkheid van straling bestaat tusschen twee elementen die *niet* elkaars beeld zijn, indien men aanneemt

$$\mu : \mu' = v'^2 : v^2;$$

of, zoo men wil, dat door combinatie van de stelling van het temperatuur-evenwicht met die van STRAUBEL, de waarde der verhouding $\mu : \mu'$ bepaald kan worden.

Voor het geval de beide elementen elkaars beeld zijn, wat, zooals boven vermeld is, zich voordoet, als de stralen, die van een punt van het eene element uitgaan, samenkomen in een punt van het tweede element, geldt de tweede stelling van STRAUBEL (pag. 64); deze kan uitgedrukt worden door de formule (24), als daarin $d\,q$ en $d\,q_1$ als elkaars beeld worden opgevat. Neemt men nu bovenstaande evenredigheid der stralingsintensiteiten aan, dan is het duidelijk dat ook in dit geval de gelijkheid der wederkeerige straling bestaat, hetgeen in overeenstemming is met het door CLAUSIUS gevonden resultaat.

Ook HELMHOLTZ [1]) bespreekt bij zijn onderzoek over het oplossend vermogen der microscopen de sinus-wet der optische afbeelding. Hij bepaalt zich daarbij tot de breking door gecentreerde, bolvormige oppervlakken en bespreekt allereerst die gevallen, waarbij de beeldvorming door centrale stralen tot stand komt; daarbij geeft hij een afleiding van de vergelijking

$$n_1 \alpha_1 \beta_1 = n_2 \alpha_2 \beta_2 ,$$

die reeds vroeger (pag. 39 en 42) besproken is.

Uit deze vergelijking leidt HELMHOLTZ een betrekking af omtrent de helderheid van beeld en voorwerp, van welke betrekking hij vervolgens gebruik maakt voor het bewijs van de sinus-wet voor eindige waarden der hoeken van divergentie.

De bedoelde betrekking komt op het volgende neer:

Zooals op pag. 78 besproken is, zendt een oppervlakte-element $d s_1$, loodrecht op de as gelegen, als de stralings-intensiteit μ_1 is, binnen een kegel met lichamelijken hoek $d \omega$ eene hoeveelheid warmte of licht uit, voorgesteld door

$$d L = \mu_1 \, ds_1 \, d \omega_1 .$$

Deze hoeveelheid valt ook op het beeld en kan voorgesteld worden door

---

[1]) Ann. d. Phys. u. Chem. Jubelband pag. 557.

$$d\,L = \mu_2\ ds_2\ d\,\omega_2,$$

waarbij dan de coëfficiënt μ_2 de helderheid van het beeld kan genoemd worden.

Daar echter

$$\beta_1^2 : \beta_2^2 = ds_1 : ds_2$$

en

$$\alpha_1^2 : \alpha_2^2 = d\,\omega_1 : d\,\omega_2,$$

volgt daaruit

$$\mu_1 : \mu_2 = n_1^2 : n_2^2$$

Zooals HELMHOLTZ aantoont, blijft deze betrekking nog gelden als het af te beelden vlakte-element niet loodrecht op de as staat. Maakt n. l. de as van den stralenkegel een hoek (N_1, r) met de normaal van $d\,s_1$, en een hoek (N_2, r) met die van $d\,s_2$, dan is de uitstraling van $d\,s_1$ binnen den kegel $d\,\omega_1$

$$d\,L = \mu_1\ cos\ (N_1, r)\ ds_1\ d\,\omega_1,$$

terwijl de even groote hoeveelheid licht die het beeld ontvangt, voorgesteld kan worden door

$$d\,L = \mu_2\ cos\ (N_2, r)\ d\,s_2\ d\,\omega_2$$

Daar echter

$$ds_1\ cos\ (N_1, r) : ds_2\ cos\ (N_2, r) = \beta_1^2 : \beta_2^2,$$

volgt hieruit onmiddellijk de bovenstaande waarde der verhouding $\mu_1 : \mu_2$.

Is $n_1 = n_2$, dan is ook $\mu_1 = \mu_2$.

Om het verband tusschen de grootte van beeld en voorwerp te vinden bij willekeurige hoeken van divergentie, bewijst Helmholtz in de eerste plaats dat ook in dat geval de betrekking tusschen de intensiteiten resp. van beeld en voorwerp geldt. Hij beschouwt daartoe van den stralenbundel, die de beeldvorming tot stand brengt, een bundel met zeer kleine opening; ligt nu het beeld ds_1 en het voorwerp ds_2 in middenstoffen resp. met de brekings-indices n_1 en n_2, dan geldt de betrekking

$$\mu_1 : \mu_2 = n_1^2 : n_2^2,$$

want was dit niet het geval, dan kon men den stralenbundel, nadat het beeld gevormd is, loodrecht door een plat scheidingsvlak van uit de middenstof met brekings-index n_2 laten treden in een middenstof met brekingsindex n_1, waarbij een beeld ds_3 gevormd wordt. Hierbij geldt dan bovenstaande betrekking, daar we dan ten opzichte van het scheidingsvlak te doen hebben met een centralen stralenbundel. Voldeden nu de intensiteiten van ds_1 en ds_2 niet aan de gevonden betrekking, dan zou de intensiteit van ds_3, in de middenstof n_1 gelegen, verschillen van die van ds_1 in dezelfde middenstof gelegen. Het is duidelijk dat het dan mogelijk zou zijn, dat bij een dergelijke afbeelding de intensiteit van het beeld grooter werd dan die van het voorwerp. Dat zulks niet mogelijk is, blijkt uit de waarneming omtrent de helderheid der beelden bij alle mogelijke optische instrumenten. Bovendien verwijst HELMHOLTZ hier naar de beschouwingen van KIRCHHOFF, die met geringe wijziging op het geval van stralen-concentratie overgebracht kunnen worden. Was de intensiteit van ds_1 en ds_3 niet even groot, dan zou de wet van het temperatuur-evenwicht geschonden zijn, daar dan één van beide elementen ten koste van het andere een voortdurend hoogere temperatuur zou krijgen, als de begin-temperatuur van beide even hoog was.

Wordt nu van een element ds_1 door een stralenkegel met den halven tophoek α_1 een beeld ds_2 gevormd, dan kan de hoeveelheid licht die ds_1 binnen dezen kegel uitzendt, voorgesteld worden door

$$L = \mu_1\, ds_1 \int_0^{\alpha_1} 2\,\pi\, \cos\alpha\, \sin\alpha\, d\alpha = \pi\, \mu_1\, ds_1 \sin^2\alpha_1 ;$$

de afleiding van deze formule is geheel overeenkomstig met die, welke op pag. 65 en 66 uitvoeriger besproken is, terwijl θ door α is vervangen.

Blijkens het bovengezegde kan nu deze zelfde hoeveelheid licht ook voorgesteld worden door

$$L = \mu_2\, ds_2 \int_0^{\alpha_2} 2\,\pi\, \cos\alpha\, \sin\alpha\, d\alpha = \pi\, \mu_2\, ds_2 \sin^2\alpha_2 ,$$

waaruit volgt, na invulling der waarde van de verhouding $\mu_1 : \mu_2$,

$$n_1^2\, ds_1 \sin^2\alpha_1 = n_2^2\, ds_2 \sin^2\alpha_2 ,$$

wat de sinus-wet is.

Tegen de juistheid van dit door Helmholtz gegeven bewijs wordt door R. Straubel in zijn op pag. 56 reeds aangehaald artikel: »Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen" bezwaar gemaakt, waar hij zegt: »Helmholtz hat den Sinussatz energetisch bewiesen, aber bei aller Ehrfurcht vor Helmholtz und trotz des richtigen Resultates muss ich sagen, ich halte die Schlussweise nicht für korrekt. Denn er verallgemeinert den nur für *unendlich dünne* Büschel bewiesenen Satz über das Helligkeitsverhältnis von Objekt und Bild auf endlich geöffnete Büschel. Man muss, meiner Ueberzeugung nach, durch Kombination des Energie-satzes und des Sinussatzes den Satz über das Helligkeitsverhältnis beweisen, nicht aber, wie Helmholtz es gethan, aus Energiesatz und Helligkeitsverhältnis den Sinussatz ableiten."

Ik geloof dat dit bezwaar door Straubel tegen de afleiding van Helmholtz gemaakt, niet gegrond is. Zooals toch op de vorige bladzijde gebleken is, past Helmholtz de voor oneindig dunne bundels geldende eigenschap niet zonder eenig voorafgaand bewijs op bundels met eindige opening toe, maar geeft hij door de voorafgaande redening juist het bewijs, dat dit geoorloofd is, welke redeneering m. i. volkomen juist en ook afdoende is, tenminste zoolang men te doen heeft met het geval dat zoowel voorwerp als beeld zich in isotrope middenstoffen bevinden, wat Straubel ook onderstelt

Trouwens, ook DRUDE [1]) heeft op afdoende wijze de sinus-stelling uit de stelling omtrent het temperatuur-evenwicht afgeleid. Wel is waar neemt hij daarbij aan, dat de beide oppervlakken die elkaar stralen toezenden volkomen zwart en aan de niet naar elkaar toegekeerde zijden volkomen spiegelend zijn, doch dit heeft op den gang der stralen, waarvan in de sinus-stelling alleen sprake is, geen invloed. Geldt de sinus-stelling voor volkomen zwarte oppervlakken, dan zal ze voor willekeurige oppervlakken onder overigens gelijke omstandigheden evengoed doorgaan.

In verband met de voorafgaande besprekingen omtrent de afleiding van de sinus-wet langs energetischen weg, zij hier nog opgemerkt dat DRUDE (l. c. pag. 56) tot de op deze manier gegeven bewijzen der sinus-stelling ook het door CLAUSIUS gegeven bewijs [2]) rekent. Dit is in zooverre niet geheel juist, dat de door CLAUSIUS gegeven afleiding der betrekking

$$n_a^2 \cos \theta_a \, d\omega_a : n_c^2 \cos \theta_c \, d\omega_c = ds_c : ds_a$$

(waarin n_a en n_c de brekings-indices, θ_a en θ_c de hoeken die de assen der zeer smalle bundels met de normalen der oppervlakte-elementen ds_c en ds_a maken, en $d\omega_a$ en $d\omega_c$ de openingen dezer bundels voorstellen) geheel berust op de stelling van den minimum-lichttijd en dus onaf-

[1]) DRUDE. Lehrbuch der Optik, pag. 463.

[2]) CLAUSIUS l. c. pag. 342.

hankelijk is van de wet van het temperatuur-evenwicht

Ten slotte moet nog vermeld worden, dat de afhankelijkheid der stralings-intensiteit van den brekings-index der omringende middenstof proefondervindelijk is onderzocht door QUINTUS ICILIUS [1]) en door SMOLUCHOWSKI DE SMOLAN [2]) Het resultaat der onderzoekingen van ICILIUS is volgens DE SMOLAN om verschillende redenen zeer problematisch. DE SMOLAN zelf heeft de intensiteit der straling in zwavelkoolstof vergeleken met die in lucht; hij vindt uit zijne uitkomsten, met behulp der evenredigheid (26), voor den brekings-index van zwavelkoolstof, in de onderstelling dat de stralingswet juist is, de waarde 1.595, terwijl de langs anderen weg gevonden waarde is 1,523, voor stralen wier golflengte 10 μ is.

DE SMOLAN besluit zijn artikel met de woorden:

»La loi de CLAUSIUS se trouve donc confirmée par ces expériences d'une façon suffisante, attendu que de petites erreurs sur les grandeurs mesurées, surtout sur l'absorption, ont une influence considérable sur le résultat".

De sinus-wet der optische afbeelding kan, zooals wij zagen, worden afgeleid door de wet van het temperatuur-evenwicht te combineeren met de stelling dat voor twee volkomen zwarte oppervlakken de intensiteiten der straling zich verhouden als de kwadraten der brekings-indices van de middenstoffen waarin zich

[1]) POGG. Annalen. Bd. 127.

[2]) Comptes Rendus, 1896 pag. 230.

die oppervlakken bevinden. Aan den anderen kant kan, zooals in Hoofdstuk III bleek, de sinus-wet ook afgeleid worden uit het beginsel van den kortsten lichttijd, waarbij men dan met de wet van het temperatuurevenwicht en met den regel voor de stralingsintensiteiten niet te maken heeft.

Hetzelfde doel kan hier dus langs twee geheel verschillende wegen bereikt worden, hetgeen wijst op een zeker verband tusschen de wetten der straling en die der breking, daar uit deze laatste het beginsel van den kortsten lichttijd volgt.

Inderdaad kan, zooals uit het volgende zal blijken, de tweede brekingswet uit de gelijkheid der straling worden afgeleid, als men de eerste brekingswet als geldig aanneemt. Om onafhankelijk te wezen van de intensiteit der straling, varieerende met den aard der middenstof zal het volgende geval beschouwd worden: We denken ons (fig. 9) twee middenstoffen met verschillenden brekings-index, door een plat vlak gescheiden; in de middenstof I bevindt zich een licht- of warmtestralen uitzendend vlakte-element $d\,q$, dat elementaire stralenbundels uitzendt, wier assen loodrecht op het vlakte-element staan.

In het brekende oppervlak wordt een x-as en een y-as aangenomen en loodrecht er op een z-as, die door het middelpunt A van $d\,q$ gaat. Bovendien wordt de x-as zoo geplaatst, dat het vlak waartoe $d\,q$ behoort, loodrecht staat op het vlak $X O Z$. De stralen die uitgezonden worden door het punt A van $d q$, en die deel uitmaken van een elementairen stralenbundel, die een kegel met den halven tophoek ε vult, ondergaan bij het passeeren van het grensvlak een richtingsverandering van zoodanigen aard, dat de bundel die ze dan vormen, niet meer homocentrisch is.

Brengen wij nu in het tweede medium door een punt C van den centralen in het vlak $X O Z$ liggenden straal een vlak loodrecht op dien straal, dan zal de stralenbundel uit dit vlak een oneindig kleine ellips snijden, waarvan de eene as $L L'$ in het vlak $X O Z$ ligt en andere $N N'$ evenwijdig aan de y-as loopt. Wij zullen vooreerst de lengte dezer assen bepalen. Het uiteinde L van de eerste as wordt bepaald door den straal $A B' L$, die in het vlak $X O Z$ met $A B$ den hoek ε maakt. Wanneer wij den invalshoek van $A B$ door i voorstellen, is $i + \varepsilon$ de invalshoek van $A B'$. Stellen wij nu den brekingshoek van den centralen straal voor door r, welke hoek een voorloopig onbekende functie van i is, dan mogen wij voor den brekingshoek van den tweeden straal schrijven

$$r + dr = r + \frac{dr}{di} \varepsilon.$$

Stellen wij verder $A B = a$, $B C = b$, dan is

$$B B' = \frac{a \varepsilon}{\cos i}, \quad B' D = \frac{a \varepsilon}{\cos i} \cos r,$$

als $B' D$ de loodlijn is, uit B' op $B C$ getrokken. Verder blijkt het dat, op grootheden van hoogere orde na,

$$C L = b\, dr + \frac{a\, \varepsilon}{\cos i} \cos r$$

of

$$C L = \left(b \frac{dr}{di} + \frac{a}{\cos i} \cos r \right) \varepsilon .$$

Om de lengte der tweede as te bepalen, beschouwen wij den straal $A B''$, die met $A B$ in een vlak loodrecht op het vlak $X O Z$ ligt en een hoek ε met $A B$ maakt; deze straal komt terecht in het punt N van het vlak door C loodrecht op $B C$ gebracht. Die straal wordt uit $A B C$ door een oneindig kleine wenteling om de as $O Z$ verkregen. Daar nu het punt B hierbij den weg $B B''$ $= a \varepsilon$ doorloopt, is de weg van het punt C, dat op een afstand

$$a \sin i + b \sin r$$

van $O Z$ ligt,

$$C N = \frac{a \sin i + b \sin r}{\sin i} \varepsilon$$

Het oppervlak van de bedoelde ellips is dus, zooals uit de waarden van $C L$ en $C N$ volgt,

$$\pi \frac{a \sin i + b \sin r}{\sin i} \left(b \frac{dr}{di} + \frac{a \cos r}{\cos i} \right) \varepsilon^2 ,$$

terwijl de kegelopening bij A bedraagt $\pi\, \varepsilon^2$.

De verhouding van de kegelopening en het element bij C is natuurlijk onafhankelijk van de bijzondere keus van den vorm van dat element; uit bovenstaande waarde voor het oppervlakte-element volgt dus dat, als $d\,q'$ de grootte is van een oppervlakte-element van willekeurigen vorm en $d\,\omega$ de bijbehoorende kegelopening bij A,

$$d\,q' = \frac{a \sin i + b \sin r}{\sin i} \left(b \frac{dr}{di} + \frac{a \cos r}{\cos i} \right) d\,\omega.$$

Evenzoo zal een van C uitgaande stralenbundel, wier stralen een kegel met de opening $d\,\omega'$ opvullen, uit het vlak dat in A loodrecht op $A\,B$ staat, een element $d\,q$ snijden, bepaald door

$$d\,q = \frac{b \sin r + a \sin i}{\sin r} \left(a \frac{di}{dr} + \frac{b \cos i}{\cos r} \right) d\,\omega'.$$

Straalt nu het element $d\,q$ licht of warmte naar het element $d\,q'$ in de tweede middenstof, dan zal $d\,q'$, indien voldaan wordt aan de voorwaarden onder welke de wet van het temperatuur-evenwicht geldig is, evenveel energie naar $d\,q$ toestralen Deze laatste hoeveelheid is evenredig met de grootte van $d\,q'$ en met de opening van de elementaire bundels door welke de straling tot stand komt.

Verandert men de richting van het vlak van $d\,q$, waarbij ook de stralenkegel een andere richting krijgt en ook i verandert, doch waarbij wij $d\,q$ en $d\,\omega$ constant laten, dan wordt ook de grootte van het element $d\,q'$ anders. We nemen n.l. $d\,q'$ steeds zoo groot, dat het alle van A binnen $d\,\omega$ uitgaande stralen kan opvangen;

ook staat $d\,q'$ steeds loodrecht op den centralen straal. Zoodoende blijft de straling van $d\,q$ steeds even groot, hetgeen dan ook het geval moet zijn met de terugstraling van $d\,q'$. Zoolang dus het product $d\,q \;\; d\,\omega$ niet verandert, moet ook $d\,q' \;\; d\,\omega'$ constant blijven.

Dit vereischt

$$\frac{\left(b\,\dfrac{dr}{di} + \dfrac{a\cos r}{\cos i}\right)\dfrac{a\sin i + b\sin r}{\sin i}}{\left(a\,\dfrac{di}{dr} + \dfrac{b\cos i}{\cos r}\right)\dfrac{b\sin r + a\sin i}{\sin r}} = c,$$

waarin c eene constante voorstelt.

Na eenige herleiding gaat deze vergelijking over in

$$\frac{\left(b\,\dfrac{dr}{di} + \dfrac{a\cos r}{\cos i}\right)\sin r}{\left(\dfrac{b\cos i}{\cos r} + a\,\dfrac{di}{dr}\right)\sin i} = c\,.$$

Daar nu de waarde der constante onafhankelijk moet zijn van de waarden van a en b, hetgeen uit de afleiding blijkt, is

$$\frac{dr}{di} = c\,\frac{\cos i}{\cos r}\,.\,\frac{\sin i}{\sin r}$$

of

$$\sin r\,\cos r\,dr = c\,\sin i\,\cos i\,di$$

of

$$\sin^2 r - c\sin^2 i = c'.$$

De constante c' zal nul moeten zijn, daar, hoe ook r van i moge afhangen, bij een waarde van i gelijk nul, steeds een waarde nul voor r zal moeten behooren; hierdoor gaat de laatste vergelijking over in

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constante},$$

wat de brekingswet is.

Bij de bovenstaande afleiding is geen rekening gehouden met de terugkaatsing van een deel der van A naar C of van C naar A gaande stralen aan het grensvlak der twee middenstoffen. Dat dit op het resultaat niet van invloed kan zijn, is duidelijk, als men bedenkt dat de terugkaatsings-factor aan het oppervlak bij B bij den overgang van A naar C even groot is als die bij den overgang van C naar A. De verhouding van de hoeveelheid energie die in het eerste geval naar $d\,q'$ gaat tot de totale van $d\,q$ uitgaande hoeveelheid is dezelfde als die van de hoeveelheid die in het tweede geval naar $d\,q$ gaat, tot de van $d\,q'$ uitgaande hoeveelheid.

Ten slotte zij hier nog met een enkel woord gewezen op het verband tusschen de in het voorgaande besproken stellingen en de dichtheid van de stralings-energie in verschillende deelen van een stelsel doorschijnende lichamen, die bij een bepaalde temperatuur met elkaar in evenwicht zijn.

Wat de isotrope lichamen betreft, is in het voorgaande gebleken, dat, wanneer twee volkomen zwarte elementen $d\,q$ en $d\,q'$ in dergelijke lichamen elkaar energie toestralen, er evenwicht bestaat indien de stralings-intensiteiten van $d\,q$ en $d\,q'$ zich verhouden als $\frac{1}{v^2}$ en $\frac{1}{v'^2}$, waarin v en v' de voortplantingssnelheden zijn resp. ter plaatse van $d\,q$ en van $d\,q'$. Is dit het geval, dan straalt een element $d\,q$ binnen een oneindig smallen kegel met de opening $d\,\omega$, wiens as een hoek θ maakt met de normaal op $d\,q$, in de tijds-eenheid eene hoeveelheid energie uit, voorgesteld door

$$C\,\frac{\cos\theta}{v^2}\,d\,q\;d\,\omega\,,$$

welke energie gerekend wordt naar $d\,q'$ te gaan. De grootheid C die in deze formule voorkomt, is voor alle lichamen bij dezelfde temperatuur even groot.

Nu zal $d\,q'$ evenveel energie ontvangen indien men, na verwijdering van het schijfje $d\,q$, zorgt, dat er door het meetkundige element $d\,q$ dezelfde hoeveelheid energie binnen denzelfden kegel naar $d\,q'$ wordt toegestraald, welke energie dan afkomstig is van deelen achter $d\,q$ gelegen. Het evenwicht blijft dan bestaan.

Wordt nu eveneens het schijfje $d\,q'$, dat energie naar $d\,q$ uitstraalt binnen een kegel $d\,\omega'$, weggenomen, dan zal nog het evenwicht blijven bestaan, indien ook hier door het element $d\,q'$ binnen $d\,\omega'$ dezelfde energie blijft stralen, afkomstig van elementen achter $d\,q'$ gelegen.

Zoodoende komt men tot een stelling, die door verschillende natuurkundigen is afgeleid en die zegt dat er in een stelsel doorschijnende lichamen stralings-evenwicht zal bestaan, wanneer elk willekeurig vlakte-element $d\,q$, tengevolge der stralen die er binnen een willekeurigen kegel $d\,\omega$ door heen gaan, per tijds-eenheid een hoeveelheid arbeidsvermogen

$$C\,\frac{\cos\theta}{v^2}\,d\,q\;d\,\omega$$

doorlaat, waarin C een van de temperatuur van het stelsel afhankelijke constante, v de voortplantings-snelheid ter plaatse van $d\,q$ en θ de hoek tusschen de as van $d\,\omega$ en de normaal van $d\,q$ is.

In de richting van de as van $d\,\omega$ laat het element $d\,q$ in den tijd dt een hoeveelheid energie door, die aanwezig is in een volume-element met $d\,q\,\cos\theta$ tot grondvlak en $v\,dt$ tot hoogte. Hieruit volgt, dat de dichtheid der stralings-energie (d. i. de energie per volume-eenheid) van de straling binnen den beschouwden kegel $d\,\omega$ ter plaatse van $d\,q$, voorgesteld wordt door

$$\frac{C}{v^3}\,d\,\omega,$$

waaruit volgt voor de totale dichtheid der stralings-energie

$$\frac{C}{v^3}\int d\,\omega = \frac{4\,\pi\,C}{v^3}.$$

Wat de anisotrope lichamen betreft, merken wij op dat het temperatuur-evenwicht vereischt dat de straling van een volkomen zwart element $d\,q$ in zoodanige richtingen, dat de bijbehoorende golf-normalen een kegel $d\omega$ opvullen, de intensiteit

$$C \frac{v_s \cos\theta}{v^3} \, dq \, d\omega$$

moet hebben waarin v de snelheid der golven die zich in de richting van de as van den kegel $d\omega$ voortplanten en v_s de voortplantingssnelheid van den bij die golven behoorenden lichtstraal voorstelt, terwijl θ de hoek is, dien deze lichtstraal met de normaal op dq maakt. Dit volgt uit de op pag. 66—72 medegedeelde uitbreiding van de stelling van STRAUBEL tot anisotrope lichamen.

Hiervan uitgaande vindt men voor de dichtheid der stralings-energie ter plaatse van dq in richtingen binnen den beschouwden kegel de waarde

$$\frac{C}{v^3} \, d\omega,$$

en kan men verder komen tot de stelling omtrent het stralings-evenwicht in anisotrope lichamen, die LORENTZ [1]) langs anderen weg heeft gevonden.

---

[1]). Zittingsverslag Kon. Akad. v. Wetensch. 1895—1896 pag. 305.

Fig. 1.

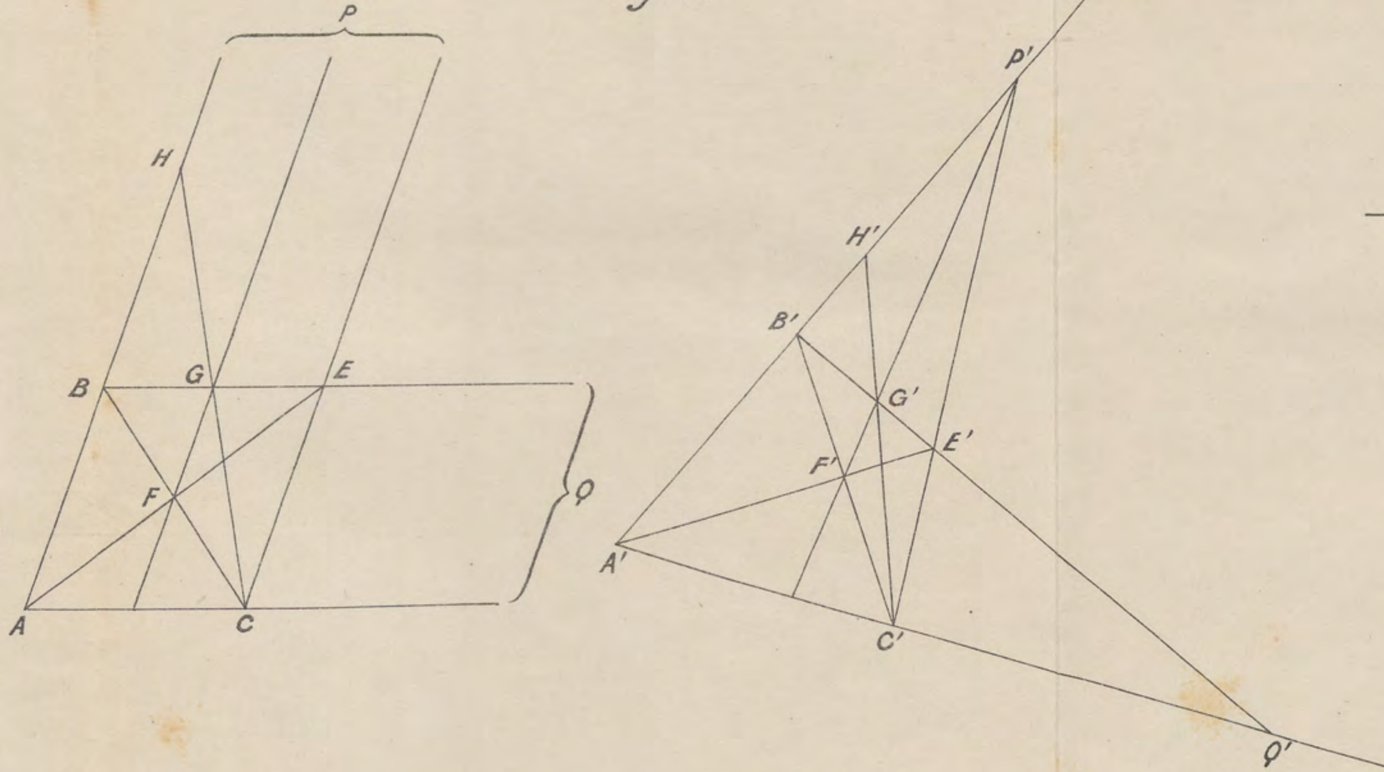


Fig. 2.

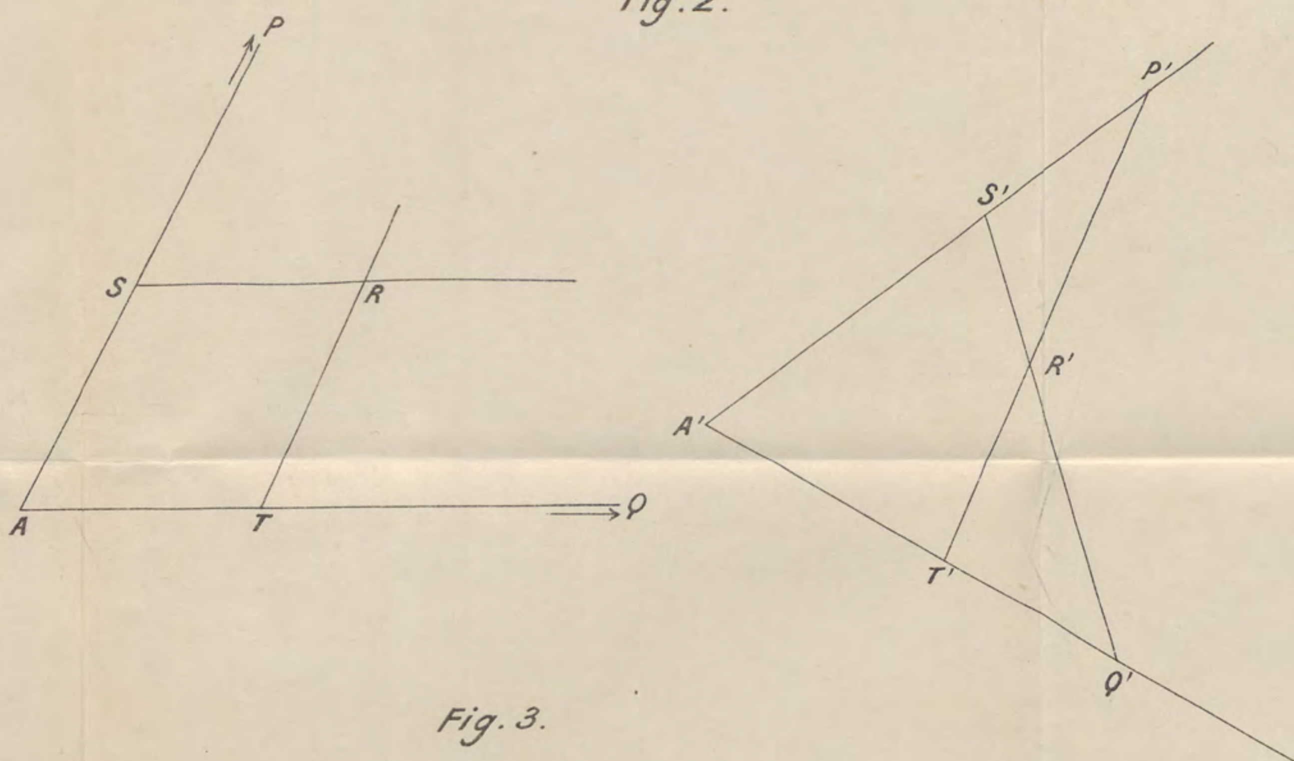


Fig. 3.

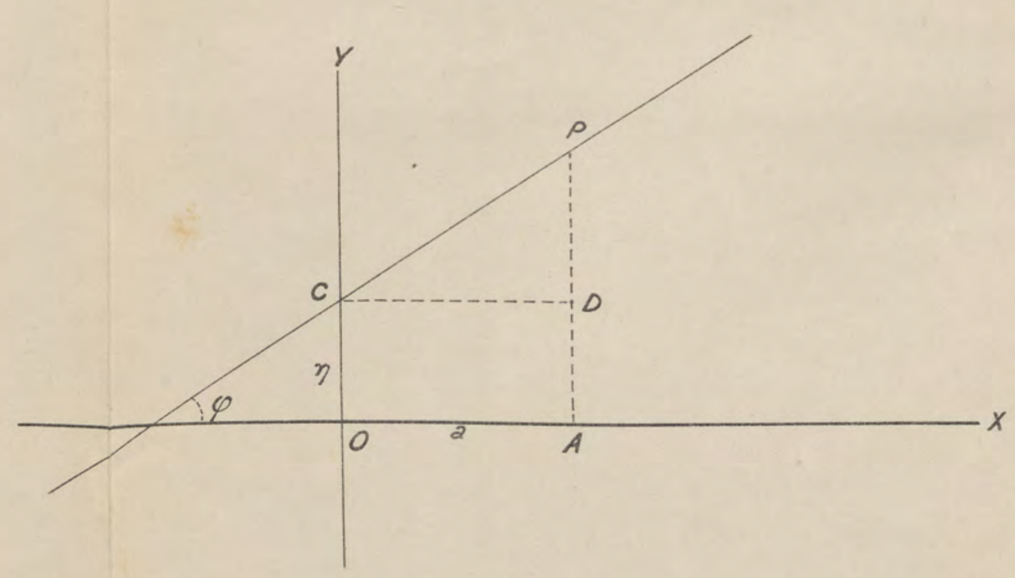


Fig. 4.

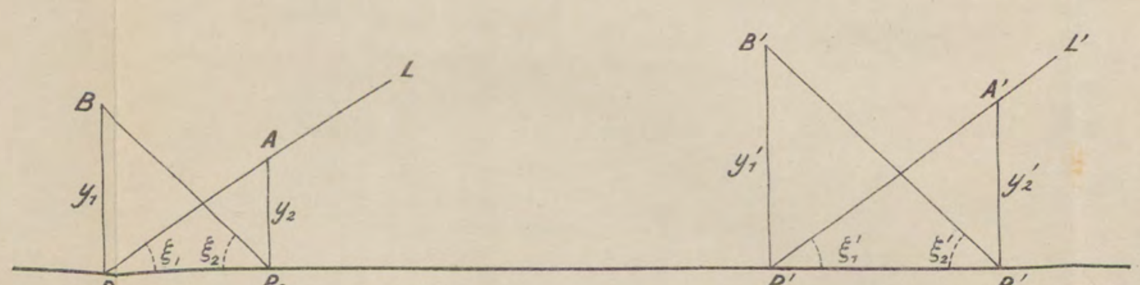


Fig. 5.

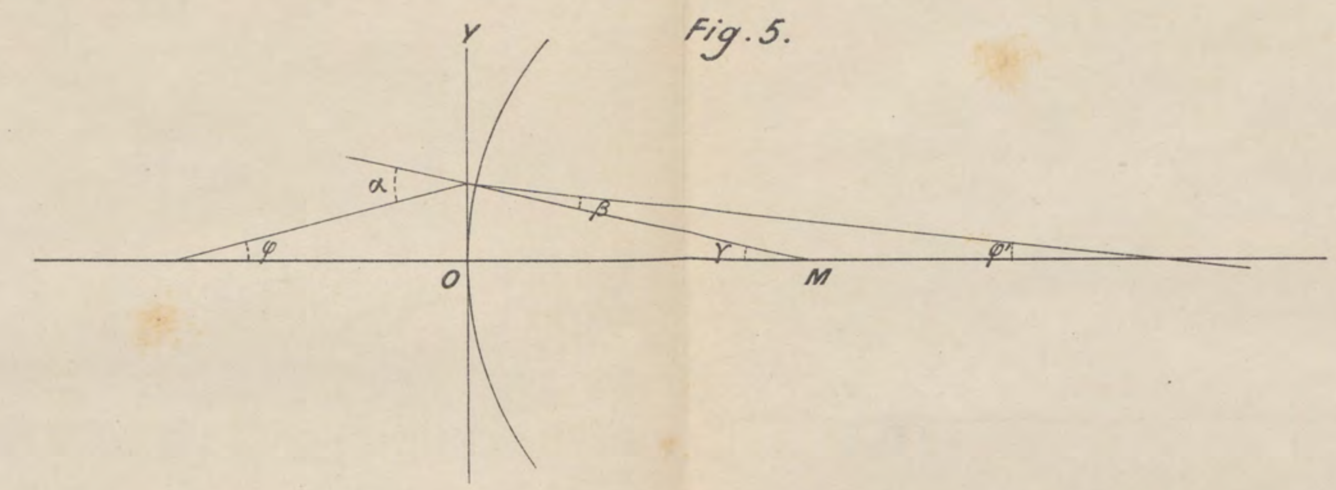


Fig. 6.

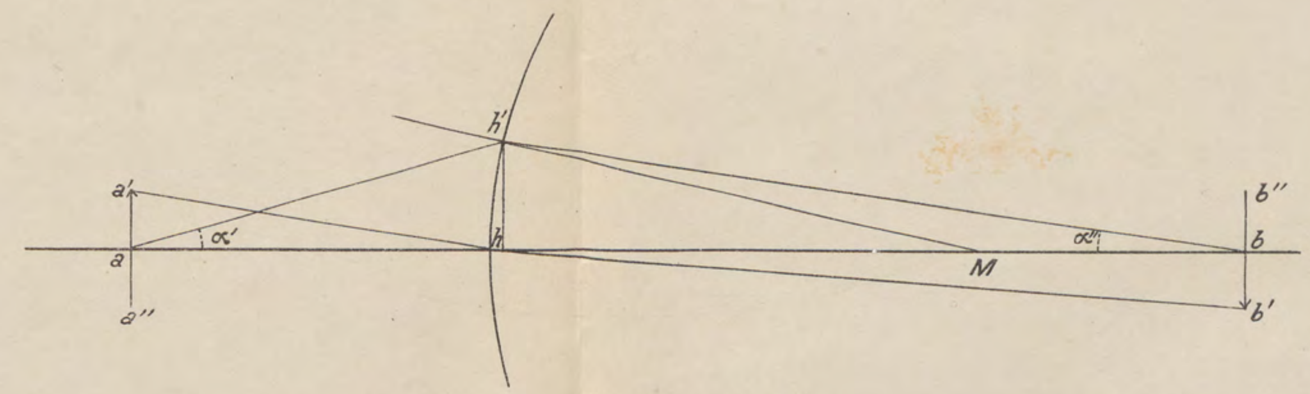


Fig. 7.

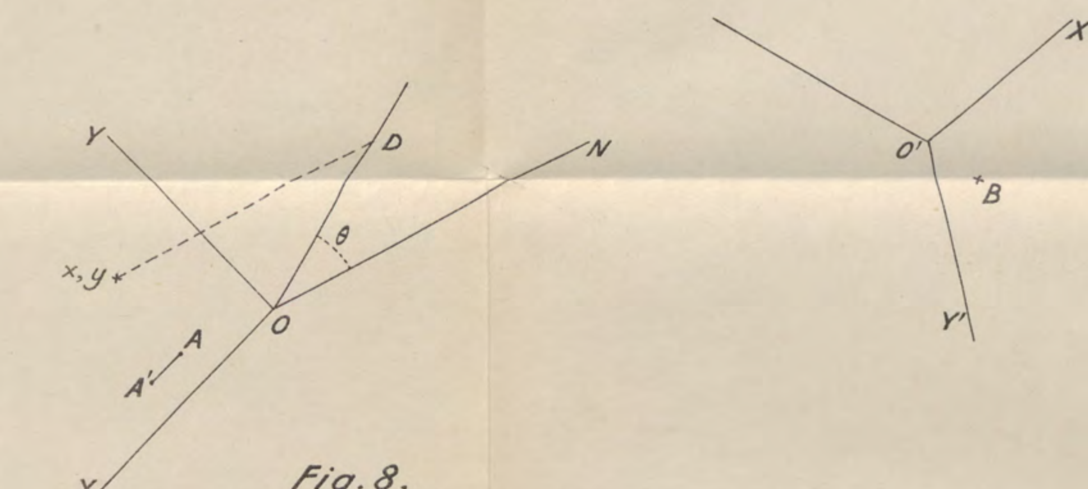


Fig. 8.

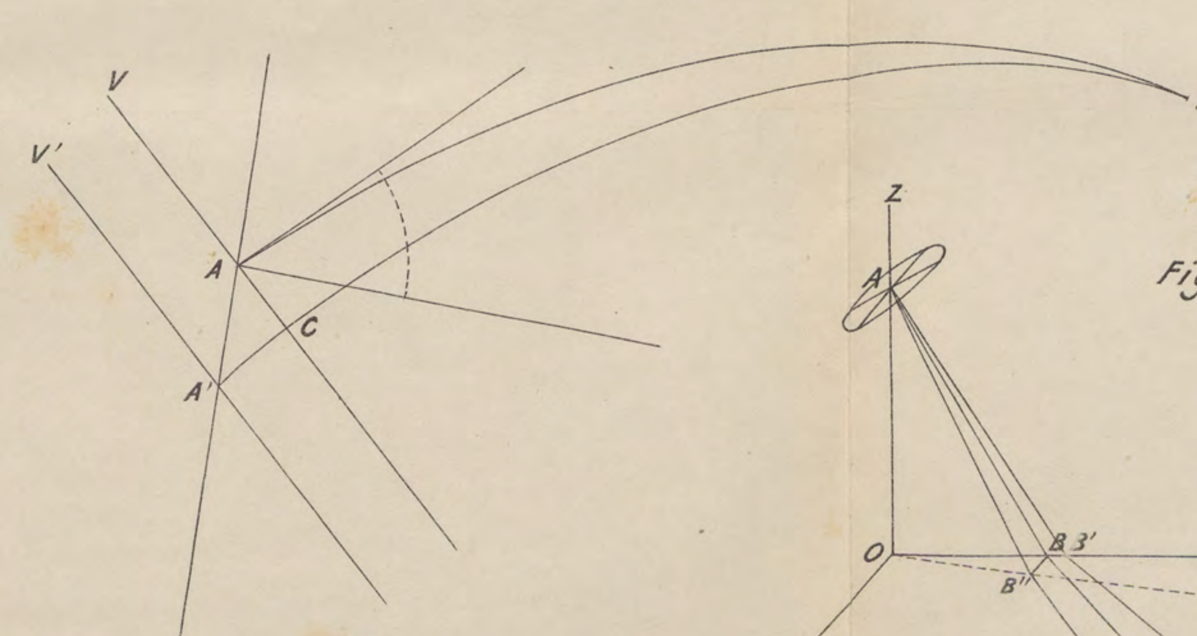
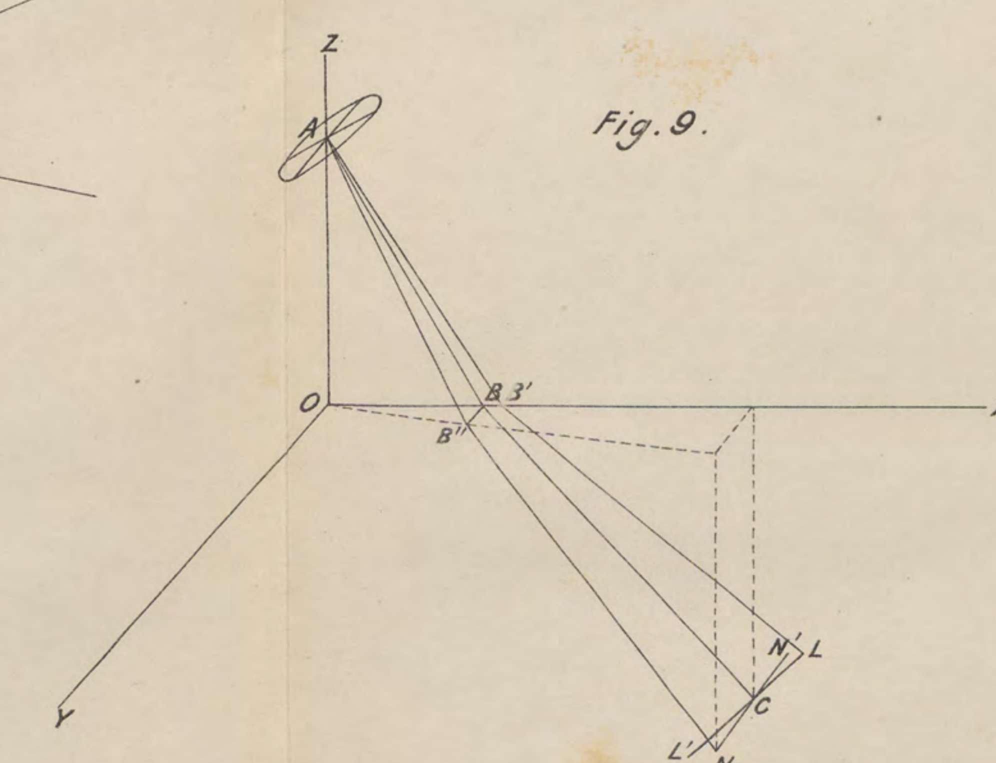


Fig. 9.



STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De door Straubel (Phys. Zeitschr. 4 Jahrg., pag. 114) afgeleide vergelijking is te beschouwen als eene uitbreiding van de stelling van Huygens (Dioptrica Stelling XL).

II.

Ten onrechte houdt Straubel (l. c.) de afleiding, door Helmholtz (Ann. d. Phys. u. Chem. Jubelband pag. 557) van de sinus-wet gegeven, voor onjuist.

III.

De berekeningen van Hicks (Phil. Mag. S. 6, Vol. 3, 1902, pag. 9) omtrent de proeven van Michelson en Morley (Phil. Mag. S. 5, Vol. 24, 1887, pag. 448) wijzen op een positief resultaat dier proeven.

IV.

Tegenover de bewering van WALTER (Phys. Zeitschr. 3 Jahrg., pag. 137) houden HAGA en WIND (l. c. en Wied. Annalen Bd. 10, 1903, pag. 305) terecht vol dat hunne proeven buigingsverschijnselen der X-stralen aanwijzen.

V.

De verklaring van het ontstaan van een electrischen stroom in het element van VOLTA kan eenvoudiger gegeven worden met behulp van den door NERNST ingevoerden „Lösungsdruck", dan door de scheikundige aantrekking tusschen zink en SO_4-ionen.

VI.

De uitkomsten der door BLONDLOT (Comptes rendus 136, 1904, pag. 125) verrichte bepalingen van de dispersie en de golflengte der N-stralen zijn weinig betrouwbaar.

VII.

De verklaring in Exner-Verdet, Vorlesungen über die Wellen-theorie des Lichtes, (Bd. 1, pag. 155) van de terugkaatsing door met lampzwart bedekte oppervlakken gegeven, is niet afdoende.

VIII.

Thomson en Tait (Treatise on Natural Philosophy, Part I, pag 219) zeggen omtrent de »axioma's der beweging" van Newton: »The axioms (of the present chapter) must (therefore) be considered to be due to actual experience in the shape either of observation or experiment."

Deze bewering is niet juist.

IX

Terecht merkt F. Klein (Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie, pag. 44) op:

»Die genaue Formulirung der Naturgesetze durch einfache Formeln beruht nur auf dem Wunsche, die äussere Erscheinung durch möglichst einfache Hilfsmittel zu beherrschen."

X.

Ten onrechte zegt Helmholtz (Populäre Wissenschaftl. Vorträge, Heft 3, pag. 29) dat, wanneer denkende wezens van slechts twee afmetingen op een plat vlak leefden, deze dezelfde meetkunde zouden kunnen opstellen als die, welke wij als planimetrie kennen.

XI.

Bij de benamingen »keerpunt van de tweede soort" en »buigpunt van de tweede soort" is niet voldoende gelet op het tegengestelde karakter van keerpunten en buigpunten.

XII.

De definitie van een ontwikkelbaar oppervlak, waarbij dit beschouwd wordt als de meetkundige plaats van de raaklijnen aan een ruimte-kromme, is te verkiezen boven de definitie, volgens welke iedere beschrijvende lijn van het oppervlak door hare opvolgende gesneden wordt.