

OVER DE BEWEGING  
VAN EEN PUNT OP EEN OPPERVLAK.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

DOOR

J. TIMMERS.



TE LEIDEN, BIJ A. W. SIJTHOFF.

1875.

Diss Leiden

1875 nr 36

~~2/1~~

~~D. 2~~

OVER DE

BEWEGING VAN EEN PUNT OP EEN OPPERVLAK.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE EAST ASIAN LIBRARY

1100 EAST 58TH STREET

CHICAGO, ILLINOIS 60637

TEL: 773-936-3300

FAX: 773-936-3300

OVER DE BEWEGING  
VAN EEN PUNT OP EEN OPPERVLAK.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

M<sup>R</sup>. JOANNES THEODORUS BUYS,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

OP VRIJDAG DEN 17<sup>den</sup> DECEMBER 1875, DES NAMIDDAGS TE 3 UREN,

DOOR

JOHANNES TIMMERS,

GEBOREN TE KLUNDERT.

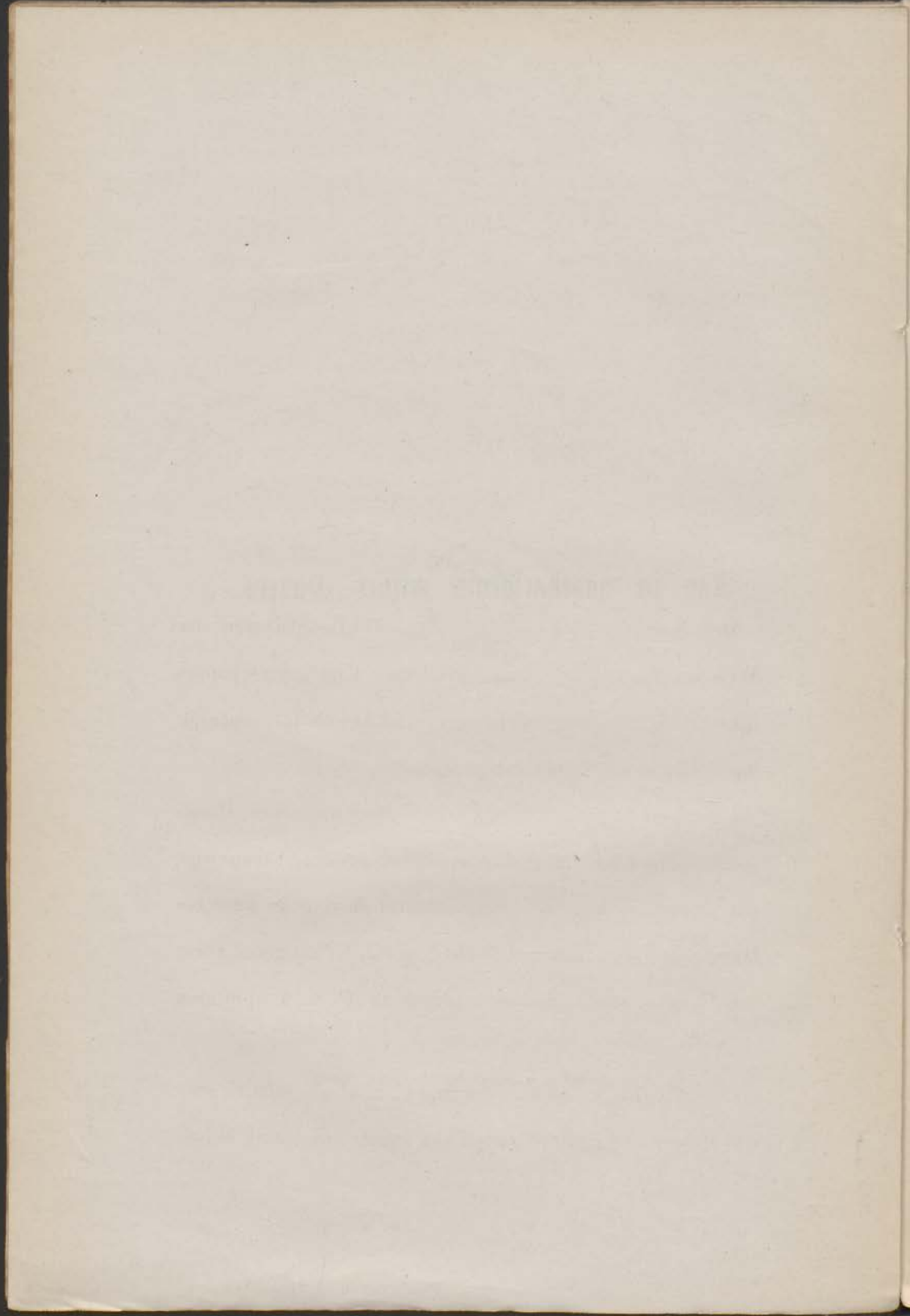
---

TE LEIDEN, BIJ A. W. SIJTHOFF.

1875.



Aan de nagedachtenis mijner Ouders.





Het is mij een aangename plicht U Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit! voor Uwe wetenschappelijke voorlichting en welwillende vriendschap hier openlijk mijne erkentelijkheid te betuigen.

Inzonderheid aan U, Hooggeleerde Heer VAN GEER, Hooggeachte Promotor! Niet alleen voor het uitstekend onderwijs, dat ik van U heb ontvangen, maar ook voor de ware belangstelling en bijzondere bereidwilligheid, bij het geven Uwer inlichtingen steeds getoond, betuig ik U mijn oprechten dank.

Ook U, Hooggeleerde Heer RIJKE! moet ik, behalve voor een hoogst gewaardeerd onderricht, immer erkentelijk blijven

voor de krachtige hulp en vriendschappelijken raad, mij in menige omstandigheid, tot bevordering mijner belangen, zoo goedgunstig verleend.

Aan U, Hooggeleerde Heer BIERENS DE HAAN! van wiens veel omvattend onderwijs ik gedurende mijn Academietijd een trouw en hoogwaardeerend gebruik mocht maken, breng ik mede mijn hulde en dank.

Eindelijk aan U, mijne vrienden! bij het afscheid mijne wensch, dat het U allen moge welgaan.

---

## INLEIDING.

---

„Das tiefere Studium der Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche hat bis jetzt nicht sonderlich grosse Fortschritte gemacht.”

Deze bekentenis, waarmede Schell dat gedeelte zijner theorie aanvangt, waarin de nieuwe eigenschappen en waarheden worden medegedeeld, door Serret aan de reeds door Newton en Euler verkregen uitkomsten toegevoegd, geeft weinig be moediging om onderzoekingen in te stellen aangaande een onderwerp, waaraan reeds zulke rijk begaafde geleerden met betrekkelijk gering gevolg hebben gearbeid. Doch het bewustzijn, dat elke poging moet welkom zijn, die of door het verduidelijken der beginselen of door verbeteren en vereenvoudigen der hulpmiddelen tot helderder voorstelling of tot het bereik van grooter doeleinden kan leiden, geeft eenigermate hoop, dat na veelvuldigen arbeid niet al het zoeken en zwoegen zal blijken onnut geweest te zijn.

De weg, waarop aanvankelijk wel de meeste kans tot slagen gevonden wordt, en die ook door Serret gevolgd is, wordt ons door Schell duidelijk aangewezen, als hij zegt: „Die

Möglichkeit, Probleme der fraglichen Art mit Erfolg zu behandeln, wird durch die Kenntniss der geodätischen Krümmung der Curven auf gegebenen Fläche und durch die besondere Beschaffenheit der Componente der Beschleunigung bestimmt, welche in die Tangenten-ebene der Fläche fällt."

Allereerst heb ik getracht uit de theorie van Serret mij een klaar denkbeeld te verwerven van den stand, waarop door zijne onderzoekingen de kennis van dit onderwerp der beweging was gebracht.

Hiervan wordt in de inleiding een getrouw verslag gegeven en tevens worden de bezwaren opgesomd, die grootere vorderingen op dat gebied der wetenschap hebben belet. Het betreft hier hoofdzakelijk de kennis der geodetische kromming van lijnen op het oppervlak.

Dienaangaande zegt Serret <sup>1)</sup>: „Niet alleen is het begrip van geodetische kromming eene der nieuwere aanwinsten in de theorie der lijnen op een oppervlak, maar de uitdrukkingen, welke op bizondere oppervlakken deze kromming bepalen, zijn ook niet zeer talrijk, en in haar tegenwoordigen vorm misschien voor het betreffende onderwerp nog weinig geschikt."

De uitdrukkingen voor de geodetische kromming, bij de verschillende gevallen der beweging op bizondere oppervlakken door hem gebezigd, zijn alle afgeleid uit meetkundige waarheden, welke telkens door afzonderlijke kunstmiddelen werden verkregen.

Het kwam mij voor, dat de afleiding van al deze uitdrukkingen uit eene enkele grondformule, zoo het mogelijk ware

---

<sup>1)</sup> Théorie nouvelle géométrique et mécanique 2<sup>e</sup> partie.

zulk eene formule te vinden, tot werkelijke vereenvoudiging moest leiden.

Met het opsporen van analytische grondvormen had ik mij reeds een geruimen tijd bezig gehouden, toen in de *Nouvelles annales de l'école normale supérieure* <sup>1)</sup> een opstel van Ch. Brisse (analyse des surfaces) bijzonder mijne aandacht trok van wege de groote overeenkomst tusschen de methode door Brisse bij de afleiding der formules gevolgd, en de wijze waarop ik mijne onderzoekingen had aangevangen.

De herleidingsvormen, door mij reeds verkregen, waren echter te samengesteld, omdat ik op eenige geoorloofde en zeer goed te stude komende vereenvoudigingen niet was bedacht geweest, en ik moet bekennen, dat, zonder de kennis-making met den arbeid van Brisse en meer bijzonder met de formules van Laguerre, ik wellicht spoedig mijne voorloopige onderzoekingen prijsgegeven, en verdere pogingen zou hebben gestaakt.

In gemelde formules vond ik mijn verlangen gedeeltelijk bevredigd. Wel konden de uitdrukkingen, in deze algemeene gedaante voor de studie van het oppervlak in het algemeen zeer belangrijk, niet zonder behoorlijke vervormingen in de toepassing op bijzondere gevallen worden aangewend, doch met de invoering van het kromlijinig coördinatenstelsel van Gauss, gelukte het mij de gewenschte wijzigingen en omzettingen aan te brengen.

Door dit aanvankelijk succes aangemoedigd, heb ik gemeend in denzelfden geest bij de behandeling der beweging te moeten voortgaan.

---

<sup>1)</sup> 2<sup>e</sup> Série, T. III, 1874.

In algemeenen zin heeft de kennis der beweging daardoor weinig uitbreiding van aanbelang verkregen. Slechts de beweging op kegel- en omwentelingsoppervlakken is iets uitvoeriger behandeld door de opname van enkele bijzondere gevallen, waarvan de bepaalde vorm van het oppervlak of de meetkundige eigenschappen der baan eenige bijzonderheden kenbaar maakten, welke als reductie-voorwaarden gemakkelijk in de vergelijkingen waren in te voeren.

Om de geheele ontwikkeling geleidelijk aan de gewone analyse te doen aansluiten, heb ik de laatste tot uitgangspunt gekozen, en in § 1 de hoofdzaken in het kort weergegeven.

---

§ 1.

Wanneer op rechthoekige coördinatenassen  $x, y, z$  de coördinaten zijn van een punt, waarop eene versnelling werkt  $P$ , welke gericht is naar een ander punt met de coördinaten  $a, b, c$  dus op een afstand:

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

waarin  $x-a, y-b, z-c$  de projectiën van de lijn  $p$  op de coördinatenassen, en:

$$\frac{x-a}{p}, \frac{y-b}{p}, \frac{z-c}{p},$$

de cosinussen der hoeken, welke de lijn  $p$  met de assen maakt, voorstellen, dan zijn de componenten van  $P$  volgens deze drie richtingen:

$$P \frac{x-a}{p}; P \frac{y-b}{p}; P \frac{z-c}{p}.$$

Als men nu voor een oogenblik  $p$  als eene constante beschouwt, dan is:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} - p = 0$$

de vergelijking van een bol oppervlak, korthedshalve voor te stellen door:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Van deze vergelijking zijn de eerste afgeleiden:

$$\frac{x-a}{r} = f'(x), \quad \frac{y-b}{r} = f'(y), \quad \frac{z-c}{r} = f'(z).$$

De componenten van elke versnelling, werkende op een punt van het bolvormig oppervlak in de richting van de straal, zijn dus:

$$P f'(x), P f'(y), P f'(z).$$

Voor elk oppervlak  $F(x, y, z) = 0$ , dat in het punt  $x, y, z$  met het bolvormig oppervlak een gemeenschappelijk raakvlak heeft, zijn de eerste afgeleide functiën  $F'(x), F'(y), F'(z)$  evenredig met die van  $f(x, y, z) = 0$ , dien overeenkomstig zijn de componenten eener versnelling  $P$  normaal op het oppervlak:

$$P F'(x), P F'(y), P F'(z).$$

Werken verschillende versnellingen op een punt, dan geeft de samenstelling een enkele resultante. Deze resulterende versnelling zullen wij voor een oogenblik onderstellen, het gevolg te zijn eener aantrekking uitgaande van een punt, dat ergens op de richting dier resultante gelegen is.

Zij nu het punt gedwongen zich op een oppervlak te bewegen en stellen wij ons dat oppervlak voor als eene oneindig dunne laag, welke het bewegende punt niet kan doorboren, terwijl het zoo even ingevoerde aantrekkende punt zich ergens in de ruimte bevindt aan den tegenovergestelden kant. Het oppervlak sluit dan voor het bewegende punt laatstgenoemde ruimte af.

Ontbinden wij de versnelling volgens twee richtingen, de eene component volgens de normaal, de andere in het raakvlak, dan kan het punt alleen gevolg geven aan de laatste, terwijl de eerste door het oppervlak wordt opgeheven, even



alsof in dezelfde richting, doch in tegengestelden zin, eene versnelling werkte van dezelfde intensiteit.

Het is dus duidelijk, dat de invloed van het oppervlak op de beweging gelijk staat met dien eener versnelling van veranderlijke grootte, die overal de richting heeft van de normaal op het oppervlak.

Noemen wij dien weerstand van het oppervlak  $W$ , dan zijn de componenten volgens de coördinatenassen:

$$\frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial z},$$

en wanneer wij de componenten der resulteerende versnelling naar dezelfde richtingen door  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  voorstellen, zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \frac{W}{P} \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (1)$$

waarin:

$$P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Het teeken van  $P$  wordt bij de berekening bepaald, en hangt af van eene op de richting der normaal te maken onderscheiding in positieven en negatieven zin.

Door eliminatie van  $W$  volgt uit de vergelijkingen (1):

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2} - X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} - Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2 z}{dt^2} - Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \dots \dots \dots (2)$$

Deze twee vergelijkingen kunnen, verbonden met de vergelijking van het oppervlak, ons in staat stellen de coördi-

naten uit te drukken in functiën van den tijd, en ook na eliminatie van  $t$ , aanleiding geven tot twee betrekkingen tusschen de coördinaten, en deze zijn dan de vergelijkingen van de baan op het oppervlak.

Hiermede zou de oplossing van het vraagstuk zijn afgeloopen, doch in het algemeen zijn de voorgestelde bewerkingen onuitvoerbaar, en daarom is men op verschillende vervormingen bedacht geweest.

De vergelijkingen (1) kunnen onder anderen aldus getransformeerd worden. Men vermenigvuldige teller en noemer der eerste breuk met  $dx$ , die der tweede met  $dy$  en der derde met  $dz$ , en passe vervolgens de eigenschap der gelijke breuken toe; men verkrijgt dan, na doelmatige rangschikking der termen, de breuk:

$$\frac{dx \frac{d^2 x}{dt^2} + dy \frac{d^2 y}{dt^2} + dz \frac{d^2 z}{dt^2} - (X dx + Y dy + Z dz)}{\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz} \quad (3)$$

welke breuk gelijk is aan elk der vorige. Hierin is de noemer als totale differentiaal van  $F(x, y, z)$  gelijk nul, derhalve moet de teller ook gelijk aan nul zijn, dat is:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz = X dx + Y dy + Z dz, \quad (4)$$

of wanneer het baan-element door  $ds$  wordt voorgesteld:

$$d \cdot \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = 2 (X dx + Y dy + Z dz) \dots \dots (5)$$

Na integratie vindt men voor de snelheid:

$$v^2 = 2 \int (X dx + Y dy + Z dz) + C, \dots \dots (6)$$

waarin  $C$  eene willekeurige constante voorstelt, die bepaald moet worden uit de initiale omstandigheden.

In de onderstelling dat de integraal uit het tweede lid

eene quadratuur is, zoodat X, Y, Z de differentiaal-quotienten zijn eener krachtfunctie U, wordt:

$$v^2 = 2U + C. \dots \dots \dots (7)$$

Voor een andere transformatie der vergelijkingen (2) heeft men in de tweede breuk teller en noemer te vermenigvuldigen met  $dx$ , die van de eerste met  $dy$ , en vervolgens het verschil der tellers te deelen door het verschil der noemers, zoo ook de derde, vermenigvuldigd met  $dx$ , te verbinden met de eerste, vermenigvuldigd met  $dz$ . De gelijkstelling geeft dan:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dt^2} + (X \, dy - Y \, dx) \\ & \frac{\frac{\partial F}{\partial y} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dy}{dx \, d^2z - dz \, d^2x} + (X \, dz - Z \, dx) \\ & = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dz}{\dots} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Hierin nu is:

$$\frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d \cdot \frac{dy}{dx};$$

eveneens:

$$\frac{dx \, d^2z - dz \, d^2x}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Beide vormen in de vergelijking (8) ingevoerd, en vervangende  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$  door  $2U + C$ , wordt deze:

$$\left. \begin{aligned} & (2U + C) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d \cdot \frac{dy}{dx} + (X \, dy - Y \, dx) \\ & \frac{\frac{\partial F}{\partial y} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dy}{(2U + C) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d \cdot \frac{dz}{dx} + (X \, dz - Z \, dx)} \\ & = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dz}{\dots} \end{aligned} \right\} (9)$$

In deze vergelijking komt de tijd niet meer voor, doch het is eene differentiaalvergelijking van de tweede orde; zoodra echter de oplossing uitvoerbaar is en leidt tot eene betrekking  $\varphi(x, y, z) = 0$ , geeft deze met de vergelijking van het oppervlak  $F(x, y, z) = 0$  de beide vereischte vergelijkingen voor de baan op het oppervlak.

In het bijzonder geval, dat er geen uitwendige versnelling op het bewegende punt werkt, worden de vergelijkingen (2) vereenvoudigd door  $X = Y = Z = 0$  te stellen, tot:

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \dots \dots \dots (10)$$

Hier valt op te merken, dat de tellers dezer breuken evenredig zijn met de cosinussen der hoeken, die de kromtestraal der baan, en de noemers met die der hoeken, welke de normaal in dat punt op het oppervlak met de coördinatenassen maakt. De vergelijkingen (10) drukken de voorwaarde der evenwijdigheid van deze beide lijnen uit, en daar zij door hetzelfde punt van het oppervlak gaan, moeten zij saamvallen.

Het osculatievlak der baan bevat de normaal op het oppervlak, dus is de baan eene geodetische lijn.

Bovendien is de functie  $U = 0$ , en naar vergelijking (7) de snelheid, waarmede de baan doorloopen wordt, standvastig. De vergelijking wordt in dit geval:

$$\frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dy} = \frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial z} dx - \frac{\partial F}{\partial x} dz} \dots \dots (11)$$

De gewone notatiën gebruikende:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \text{en} \quad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

en  $dx$  als onafhankelijk veranderlijke beschouwende, volgt hieruit:

$$\frac{d^2 y}{p dy - q dx} = \frac{d^2 z}{p dz + dx},$$

waaruit:

$$(p dz + dx) d^2 y = (p dy - q dx) d^2 z.$$

Na vermenigvuldiging met  $dx$  en omzetting der termen:

$$dx^2 (d^2 y + q d^2 z) = -p dx (dz d^2 y - dy d^2 z). \quad (12)$$

Uit de vergelijking  $p dx + q dy - dz = 0$ , door differentiatie van  $F(x, y, z) = 0$  verkregen, volgt:

$$-p dx = q dy - dz.$$

In de vergelijking (12) overgebracht, en bij beide leden de ontbrekende termen opgeteld, verkrijgt men met eene in het ooglopende verschikking:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) (d^2 y + q d^2 z) = (dy + q dz) (dy d^2 y + dz d^2 z),$$

of liever:

$$\frac{d^2 y + q d^2 z}{dy + q dz} = \frac{dy d^2 y + dz d^2 z}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

zijnde eene differentiaal vergelijking, waarop Euler bijzonder de aandacht vestigt <sup>1)</sup>.

Van de geodetische banen op een omwentelingsoppervlak laat zich uit de vergelijkingen (10) nog eene merkwaardige eigenschap aantoonen.

Door vermenigvuldiging en aftrekking verkrijgt men uit de beide eerste breuken:

$$\frac{y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2}}{p y - q x}.$$

Op een omwentelingsoppervlak, waarvan de as samenvalt

<sup>1)</sup> Euler *Mechanica*, T. II, § 70.

met de Z as, is de noemer dezer breuk gelijk nul <sup>1)</sup>, dus ook de teller, dat is:

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} = 0;$$

geïntegreerd:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = 2C;$$

nogmaals geïntegreerd:

$$S_{xy} = Ct + C'.$$

De loodlijn op de as, die het bewegende punt met de as verbindt, radius vector noemende, luidt de eigenschap aldus:

De projectie van den radius vector op het XY vlak beschrijft sectoren, die evenredig zijn met den tijd.

---

## § 2.

In het voorgaande hoofdstuk is gewag gemaakt van het geval, dat het punt aan geene versnelling onderworpen is, en de formules hebben aangetoond, dat dan de beweging langs eene geodetische lijn moet plaats hebben. Er is echter nog eene omstandigheid, waaronder de geodetische lijn als baan op het oppervlak verkregen wordt; namelijk, wanneer de richting der versnelling overal samenvalt met de normaal op het oppervlak, of meer algemeen, wanneer zij steeds gelegen is in het vlak der normale doorsnede tot de baan.

Als voorbeeld van het laatste zou men den gewonen slinger, als bijzonder geval van den spherischen, hebben te beschouwen.

Om dit door de formules te laten bevestigen, gaan wij aldus te werk.

---

<sup>1)</sup> Leroy analyse, pag. 258.

Door  $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma; l, m, n$  zullen de hoeken worden voorgesteld, die de normaal op het oppervlak, de raaklijn aan de baan en de zij-normaal (d. i. de lijn in het raakvlak loodrecht op de beide vorige richtingen) met de coördinatenassen maken, voorts door  $N, R$  en  $D$  de componenten der versnelling volgens deze drie richtingen, eindelijk door  $\lambda, \mu, \nu$  de richthoeken en door  $q$  de lengte van den kromtestraal der baan.

Door verandering van onafhankelijk veranderlijke heeft men in de vergelijkingen (1) aan den eenen kant:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d \cdot \frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d \left( \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right)}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} \right),$$

of dewijl  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  respectievelijk gelijk zijn aan  $\cos. \alpha,$

$\cos. \beta, \cos. \gamma,$  en  $\frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^2 y}{ds^2}, \frac{d^2 z}{ds^2}$  aan  $\frac{\cos. \lambda}{q}, \frac{\cos. \mu}{q}, \frac{\cos. \nu}{q},$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cos. \alpha + \frac{\left( \frac{ds}{dt} \right)^2}{q} \cos. \lambda;$$

evenzoo:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cos. \beta + \frac{\left( \frac{ds}{dt} \right)^2}{q} \cos. \mu,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cos. \gamma + \frac{\left( \frac{ds}{dt} \right)^2}{q} \cos. \nu.$$

Aan den anderen kant is door ontbinding:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (N + W) \cos. a + R \cos. \alpha + D \cos. l,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (N + W) \cos. b + R \cos. \beta + D \cos. m,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (N + W) \cos. c + R \cos. \gamma + D \cos. n,$$

gevende, door invoering in de vergelijking:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{g} \cos. \lambda + \frac{dv}{dt} \cos. a &= (N + W) \cos. a + R \cos. a + D \cos. l, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \mu + \frac{dv}{dt} \cos. \beta &= (N + W) \cos. b + R \cos. \beta + D \cos. m, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \nu + \frac{dv}{dt} \cos. \gamma &= (N + W) \cos. c + R \cos. \gamma + D \cos. n. \end{aligned} \right\} (1)$$

Wanneer nu de component  $D = 0$  is, dan komen hieruit voort,  $N + W$  door  $W'$  vervangende:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{g} \cos. \lambda &= W' \cos. a, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \beta &= W' \cos. b, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \gamma &= W' \cos. c; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

waaruit volgt:

$$\cos. \lambda : \cos. \mu : \cos. \nu = \cos. a : \cos. b : \cos. c;$$

uitdrukkende de voorwaarde, dat de baan eene geodetische lijn moet zijn.

Ingeval  $N = R = D = 0$ , blijkt uit de vergelijkingen (1) en (2) dat de snelheid standvastig is, en de centrifugale of centripetale kracht gelijk aan den weerstand van het oppervlak <sup>1)</sup>.

Is de component  $D$  niet gelijk aan nul, dan kan ook de kromtestraal van de baan niet samenvallen met de normaal op het oppervlak.

Men heeft dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{g} \cos. \lambda &= W' \cos. a + D \cos. l, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \mu &= W' \cos. b + D \cos. m, \\ \frac{v^2}{g} \cos. \nu &= W' \cos. c + D \cos. n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

<sup>1)</sup> Euler *Mechanica*, II, § 846 en § 855.



Door deze vergelijkingen in het kwadraat te verheffen en vervolgens de som te nemen, verkrijgt men de betrekking:

$$\left(\frac{v^2}{g}\right)^2 = W'^2 + D^2 \dots \dots \dots (4)$$

Stellen wij den hoek tusschen kromtestraal en normaal door  $\vartheta$  voor, en nemen wij in aanmerking, dat de richtingen van  $W'$  en  $D$  een rechten hoek met elkaar maken, en met die van  $\frac{v^2}{g}$  in een zelfde plat vlak gelegen zijn, dan kunnen wij de vergelijking (4) ontleden in de beide volgende:

$$W' = \frac{v^2}{g} \cos. \vartheta, \quad D = \frac{v^2}{g} \sin. \vartheta \dots \dots \dots (5)$$

De grootheden  $W'$  en  $D$  zijn van dezelfde natuur; de een kan zoo min als de andere in de snelheid eenige verandering in grootte teweegbrengen; beide oefenen slechts invloed uit op de richting der beweging, door deze volgens bepaalde richtingen te verhinderen.

Zoo zal de eerste het punt nopen om zich te bewegen op de normale doorsnede, welke met de baan in het punt een gemeenschappelijke raaklijn heeft. Deze doorsnede nu heeft met de geodetische lijn, die de baan eveneens in dat punt aanraakt en waarop het punt zich zou blijven bewegen, als van dat oogenblik af aan de component  $D$  gelijk nul werd en bleef, twee elementen en bijgevolg ook de kromming gemeen. Evenals bij de kromlijnige beweging in het platte vlak stellen wij hier de normale component  $W' = \frac{v^2}{R}$ , wanneer  $R$  de lengte is van den kromtestraal der normale doorsnede.

Treedt de zijdelingsche component ook in werking, dan kan het punt zijne beweging niet voortzetten over een tweede element van dezelfde geodetische lijn, maar zal eene richting volgen, die afwijkt. De oneindig kleine hoek, dien deze richting of tweede element van de baan met het tweede element

van genoemde geodetische lijn maakt, wordt geodetische contingentiehoek genoemd.

Het is duidelijk, dat ook als geodetische contingentiehoek, de oneindig kleine hoek kan worden beschouwd, gevormd door twee geodetische lijnen op het oppervlak, waarvan de eerste een element  $p$  en de andere het volgende element  $p'$  met de baan gemeen heeft.

Duiden wij den geodetischen contingentiehoek aan door  $e_g$  en zij  $R_g$  de lengte van een aan dezen hoek beantwoordenden kromtstraal (geodetische kromtstraal te noemen), zoodat  $e_g = \frac{ds}{R_g}$ , dan stellen wij, evenals  $W' = \frac{v^2}{R}$ , bij analogie  $D = \frac{v^2}{R_g}$  waardoor de vergelijkingen (5) overgaan in:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\rho} \cos. \vartheta, \text{ en } \frac{v^2}{R_g} = \frac{v^2}{\rho} \sin. \vartheta;$$

of:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos. \vartheta}{\rho}, \quad \frac{1}{R_g} = \frac{\sin. \vartheta}{\rho} \dots \dots \dots (6)$$

De uitdrukking  $\frac{1}{R_g}$  wordt tegenwoordig aangeduid onder den naam van geodetische kromming. Zij is nul d. i.  $R_g = \infty$ , wanneer  $\vartheta = 0$ ; derhalve is de geodetische kromming eener geodetische lijn in al hare punten gelijk nul.

De eerste der vergelijkingen (6)  $\rho = R \cos. \vartheta$  leert ons:

In elk punt van het oppervlak is de kromtstraal eener willekeurige schuine doorsnede gelijk aan de projectie op haar osculatie-vlak van den kromtstraal der normale doorsnede, die in dat punt met de schuine doorsnede eene gemeenschappelijke raaklijn heeft. (Theorema van Meusnier).

Wanneer  $R$  en  $\rho$  bekend zijn, kan  $R_g$  gemakkelijk door constructie worden bepaald. Omdat  $\rho = R \cos. \vartheta = R_g \sin. \vartheta$ , is  $R_g$  de rechthoekszijde eens rechthoekigen driehoeks, waarvan  $R$  de andere rechthoekszijde is, en  $\rho$  de loodlijn uit het hoekpunt van den rechten hoek op de hypotenusa neergelaten.

Voorloopig merken wij nog op, dat tusschen de drie bovenvermelde krommingen, behoorende bij de baan op het oppervlak, naar de vergelijking (4) de betrekking bestaat:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_g}\right)^2;$$

eene betrekking, die, wat den vorm betreft, geheel overeenstemt met eene andere, waarvan later bij de beschouwing van de lijn, als lijn van dubbele kromming, wordt gewag gemaakt.

### § 3.

Om voor de uitdrukking  $\frac{\sin. \vartheta}{\rho}$ , zijnde voor de studie betreffende den vorm van het oppervlak om elk van zijne punten van het grootste gewicht, doelmatige en tamelijk eenvoudige betrekkingen op te sporen, zullen wij gebruik maken van de formules van Laguerre.

Bij de voorgenomen ontwikkeling zullen wij de volgende voorstellingswijze in acht nemen:

Eene kromme lijn in de ruimte zullen wij aanduiden door drie vergelijkingen:  $x = f_1(u)$ ,  $y = f_2(u)$ ,  $z = f_3(u)$ , dat is de drie coördinaten van elk harer punten als functiën van eene vierde grootheid beschouwen. De eliminatie dezer grootheid  $u$  zou weder terug voeren tot het gewone stel van twee vergelijkingen tusschen de coördinaten onderling.

Het oppervlak zal evenzoo worden voorgesteld door drie vergelijkingen, waarbij de coördinaten van elk punt gegeven zijn in functiën van twee nieuwe veranderlijken  $u$  en  $v$ , als:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v).$$

Hieruit volgt weder door eliminatie van  $u$  en  $v$  de enkele vergelijking  $f(x, y, z) = 0$ .

Geeft men aan een dezer grootheden, bijv.  $v$ , eene standvastige waarde, terwijl  $u$  als doorlopend veranderlijke wordt beschouwd, dan behooren de drie vergelijkingen tot eene kromme lijn, en deze lijn ligt op het oppervlak. Bij elke waarde van  $v$  behoort zulk eene kromme lijn, en al deze krommen te samen vormen een stelsel, dat wij het stelsel der krommen U zullen noemen, omdat elk dezer krommen U wordt verkregen uit de doorlopende verandering van de veranderlijke  $u$ .

Evenzoo geeft elke constante waarde van  $u$  met eene doorlopend veranderlijke  $v$  aanleiding tot eene kromme lijn van een ander stelsel, bij analogie met het voorgaande, het stelsel der krommen V te noemen.

Tot elk dezer stelsels behooren een oneindig aantal zulke kromme lijnen, waarmede het geheele oppervlak overdekt gedacht kan worden.

De lijnen van het eene stelsel snijden die van het andere, en onder zekere voorwaarden zal de snijding overal loodrecht plaats hebben.

Worden aan  $u$  en  $v$  gelijktijdig standvastige waarden toegekend, dan bepalen de vergelijkingen een enkel punt op het oppervlak, het snijpunt van de kromme  $v = \text{constant}$ , van het eerste stelsel, met de kromme  $u = \text{constant}$ , van het tweede stelsel.

Elke kromme, tot geene der beide stelsels behorende, wordt voorgesteld door eene betrekking tusschen de veranderlijken  $u$  en  $v$ , bijv.  $u = f(v)$ .

Met het oog op deze beide stelsels zullen wij in elk punt van het oppervlak drie onderling rechthoekige hoofdrichtingen onderscheiden, namelijk de raaklijnen aan de beide krommen U en V, die elkaar in dat punt snijden, benevens de normaal tot het oppervlak in het bedoelde punt, en bij aldien de krommen U en V scheve hoeken met elkaar maken,

in plaats van de beide eerste richtingen de lijnen, die deze hoeken midden door deelen.

Voor den overgang tot de nieuwe veranderlijken, stellen wij, volgens Gauss, ter bekorting <sup>1)</sup>:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G^2.$$

Bij elke te beschouwen kromme lijn op het oppervlak (in het algemeen eene lijn van dubbele kromming) worden ons drie voorname richtingen aangewezen: de raaklijn, de hoofdnormaal en de binormaal. Laatstgenoemde is volgens Saint-Venant de lijn, die in het normaalvlak gelegen loodrecht staat op de hoofdnormaal, d. i. op de doorsnede van normaal- en osculatievlak.

Het raakvlak, dat de binormaal bevat, dus loodrecht staat op de hoofdnormaal, is door Lançret rectificeerend vlak genoemd.

De stand van dit laatste stelsel met betrekking tot het vorige wordt bepaald door den hoek  $i$ , dien de raaklijn aan de kromme lijn  $u = f(v)$  maakt met de raaklijn aan de kromme  $U$  (of de lijn, die den hoek  $(U, V)$  midden doordeelt), en den hoek  $\vartheta$ , gevormd door de hoofdnormaal van  $u = f(v)$  en de normaal op het oppervlak.

Volgens de betrekkingen van Euler heeft men voor homologe stelsels, wanneer  $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; \xi, \eta, \zeta$  de hoeken voorstellen door de raaklijn der baan  $T$ , de hoofdnormaal  $H$ , de binormaal  $B$ ;  $a_1 b_1 c_1; a_2 b_2 c_2; a_3 b_3 c_3$  de cosinussen der hoeken

<sup>1)</sup> Zie Joachimsthal, pag. 80.

door de raaklijn aan U, de raaklijn aan V en de normaal N op het oppervlak met de oorspronkelijke assen gevormd:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos. (T, U) &= a_1 \cos. \alpha + b_1 \cos. \beta + c_1 \cos. \gamma = \cos. i, \\
 \cos. (T, V) &= a_2 \cos. \alpha + b_2 \cos. \beta + c_2 \cos. \gamma = \sin. i, \\
 \cos. (T, N) &= a_3 \cos. \alpha + b_3 \cos. \beta + c_3 \cos. \gamma = 0. \\
 \cos. (H, U) &= a_1 \cos. \lambda + b_1 \cos. \mu + c_1 \cos. \nu = -\sin. i \cos. \vartheta, \\
 \cos. (H, V) &= a_2 \cos. \lambda + b_2 \cos. \mu + c_2 \cos. \nu = \cos. i \cos. \vartheta, \\
 \cos. (H, N) &= a_3 \cos. \lambda + b_3 \cos. \mu + c_3 \cos. \nu = \sin. \vartheta. \\
 \cos. (B, U) &= a_1 \cos. \xi + b_1 \cos. \eta + c_1 \cos. \zeta = \sin. i \sin. \vartheta, \\
 \cos. (B, V) &= a_2 \cos. \xi + b_2 \cos. \eta + c_2 \cos. \zeta = -\cos. i \sin. \vartheta, \\
 \cos. (B, N) &= a_3 \cos. \xi + b_3 \cos. \eta + c_3 \cos. \zeta = \cos. \vartheta.
 \end{aligned} \right\} (A)$$

Om betrekkingen te verkrijgen tusschen twee opvolgende standen, moeten deze gedifferentieerd worden.

Hierdoor wordt:

$$\left. \begin{aligned}
 da_1 \cos. \alpha + db_1 \cos. \beta + dc_1 \cos. \gamma &= d \cos. i - \\
 &\quad - (a_1 d \cos. \alpha + b_1 d \cos. \beta + c_1 d \cos. \gamma), \\
 da_2 \cos. \alpha + db_2 \cos. \beta + dc_2 \cos. \gamma &= d \sin. i - \\
 &\quad - (a_2 d \cos. \alpha + b_2 d \cos. \beta + c_2 d \cos. \gamma), \\
 da_3 \cos. \alpha + db_3 \cos. \beta + dc_3 \cos. \gamma &= \\
 &\quad - (a_3 d \cos. \alpha + b_3 d \cos. \beta + c_3 d \cos. \gamma). \\
 da_1 \cos. \lambda + db_1 \cos. \mu + dc_1 \cos. \nu &= d (-\sin. i \cos. \vartheta) - \\
 &\quad - (a_1 d \cos. \lambda + b_1 d \cos. \mu + c_1 d \cos. \nu), \\
 da_2 \cos. \lambda + db_2 \cos. \mu + dc_2 \cos. \nu &= d (\cos. i \cos. \vartheta) - \\
 &\quad - (a_2 d \cos. \lambda + b_2 d \cos. \mu + c_2 d \cos. \nu), \\
 da_3 \cos. \lambda + db_3 \cos. \mu + dc_3 \cos. \nu &= d \sin. \vartheta - \\
 &\quad - (a_3 d \cos. \lambda + b_3 d \cos. \mu + c_3 d \cos. \nu). \\
 da_1 \cos. \xi + db_1 \cos. \eta + dc_1 \cos. \zeta &= d (\sin. i \sin. \vartheta) - \\
 &\quad - (a_1 d \cos. \xi + b_1 d \cos. \eta + c_1 d \cos. \zeta), \\
 da_2 \cos. \xi + db_2 \cos. \eta + dc_2 \cos. \zeta &= d (-\cos. i \sin. \vartheta) - \\
 &\quad - (a_2 d \cos. \xi + b_2 d \cos. \eta + c_2 d \cos. \zeta), \\
 da_3 \cos. \xi + db_3 \cos. \eta + dc_3 \cos. \zeta &= d \cos. \vartheta - \\
 &\quad - (a_3 d \cos. \xi + b_3 d \cos. \eta + c_3 d \cos. \zeta).
 \end{aligned} \right\} (B)$$

Deze negen betrekkingen zijn de grondvergelijkingen, waaruit de drie formules van Laguerre zullen worden afgeleid.

#### §. 4.

De vergelijkingen (B) zullen wij in tweeledigen zin gaan herleiden.

Eerst stellen wij ons ten doel, de grootheden  $\cos. \alpha$ ,  $\cos. \beta$ ,  $\cos. \gamma$ ;  $\cos. \lambda$ ,  $\cos. \mu$ ,  $\cos. \nu$ ;  $\cos. \xi$ ,  $\cos. \eta$ ,  $\cos. \zeta$ , die alle betrekking hebben op de baan  $u = f(v)$ , te elimineeren, om daarvoor in de plaats te bekomen het boogelement, den kromtestraal en den straal van torsie; vervolgens zoeken wij voor de grootheden  $a_1 b_1 c_1$ ;  $a_2 b_2 c_2$ ;  $a_3 b_3 c_3$  betrekkelijk het oppervlak andere grootheden of uitdrukkingen in te voeren, wier beteekenis bekend is, of gemakkelijk op te sporen.

Voor beide herleidingen ontleenen wij de belangrijkste transformatie-formules aan de theorie der beweging van een rechthoekig coördinatenstelsel, dat om zijn oorsprong wentelt.

Dewijl van deze formules in dubbel opzicht moet worden gebruik gemaakt, zullen de cosinussen der hoeken tusschen de veranderlijke en de vaste assen worden voorgesteld door andere letters dan die, waarvan wij ons bij de boven gemelde stelsels hebben bediend.

Zijn voor een punt, dat aan de beweging deelneemt,  $x, y, z$  de coördinaten met betrekking tot de vaste-,  $x', y', z'$  tot de veranderlijke assen, en  $p_1, q_1, r_1$  enz. de cosinussen der richt-hoeken, dan heeft men:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 x' + p_2 y' + p_3 z' \\ y &= q_1 x' + q_2 y' + q_3 z' \\ z &= r_1 x' + r_2 y' + r_3 z' \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= p_1 x + q_1 y + r_1 z \\ y' &= p_2 x + q_2 y + r_2 z \\ z' &= p_3 x + q_3 y + r_3 z \end{aligned} \right\} (2)$$

Gedifferentieerd:

$$\left. \begin{aligned} dx &= x' d p_1 + y' d p_2 + z' d p_3, \\ dy &= x' d q_1 + y' d q_2 + z' d q_3, \\ dz &= x' d r_1 + y' d r_2 + z' d r_3, \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (x d p_1 + y d q_1 + z d r_1) + (p_1 dx + q_1 dy + r_1 dz), \\ 0 &= (x d p_2 + y d q_2 + z d r_2) + (p_2 dx + q_2 dy + r_2 dz), \\ 0 &= (x d p_3 + y d q_3 + z d r_3) + (p_3 dx + q_3 dy + r_3 dz). \end{aligned} \right\} (4)$$

Wanneer de vergelijking (3) respectievelijk met  $p_1, q_1, r_1$  worden vermenigvuldigd en daarna opgeteld, evenzoo met  $p_2, q_2, r_2$  en nog eens met  $p_3, q_3, r_3$ , bij de optelling tevens acht gevende op de betrekkingen, die tusschen de cosinussen der righthoeken bestaan, dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} p_1 dx + q_1 dy + r_1 dz &= - (p_2 d p_1 + q_2 d q_1 + r_2 d r_1) y' + \\ &\quad + (p_1 d p_3 + q_1 d q_3 + r_1 d r_3) z', \\ p_2 dx + q_2 dy + r_2 dz &= - (p_3 d p_2 + q_3 d q_2 + r_3 d r_2) z' + \\ &\quad + (p_2 d p_1 + q_2 d q_1 + r_2 d r_1) x', \\ p_3 dx + q_3 dy + r_3 dz &= - (p_1 d p_3 + q_1 d q_3 + r_1 d r_3) x' + \\ &\quad + (p_3 d p_2 + q_3 d q_2 + r_3 d r_2) y'. \end{aligned} \right\} (5)$$

Hierin volgens (4) de eerste leden door gelijke waarden vervangende, en voor  $x', y', z'$  de betrekkingen uit (2) substitueerende, dan ontstaan de drie identieke vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x d p_1 + y d q_1 + z d r_1 &= \\ &= (p_2 d p_1 + q_2 d q_1 + r_2 d r_1) (p_2 x + q_2 y + r_2 z) \\ &\quad - (p_1 d p_3 + q_1 d q_3 + r_1 d r_3) (p_3 x + q_3 y + r_3 z), \\ x d p_2 + y d q_2 + z d r_2 &= \\ &= (p_3 d p_2 + q_3 d q_2 + r_3 d r_2) (p_3 x + q_3 y + r_3 z) \\ &\quad - (p_2 d p_1 + q_2 d q_1 + r_2 d r_1) (p_1 x + q_1 y + r_1 z), \\ x d p_3 + y d q_3 + z d r_3 &= \\ &= (p_1 d p_3 + q_1 d q_3 + r_1 d r_3) (p_1 x + q_1 y + r_1 z) \\ &\quad - (p_3 d p_2 + q_3 d q_2 + r_3 d r_2) (p_2 x + q_2 y + r_2 z); \end{aligned} \right\} (6)$$

waaruit volgen:



$$\left. \begin{aligned}
 dp_1 &= (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) p_2 - (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) p_3, \\
 dq_1 &= (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) q_2 - (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) q_3, \\
 dr_1 &= (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) r_2 - (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) r_3, \\
 dp_2 &= (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) p_3 - (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) p_1, \\
 dq_2 &= (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) q_3 - (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) q_1, \\
 dr_2 &= (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) r_3 - (p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1) r_1, \\
 dp_3 &= (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) p_1 - (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) p_2, \\
 dq_3 &= (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) q_1 - (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) q_2, \\
 dr_3 &= (p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3) r_1 - (p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2) r_2.
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Deze negen betrekkingen tusschen de cosinussen der richt-  
hoeken en hunne differentiaalën zijn de gewichtigste for-  
mulen, om van een bepaalden stand der assen tot een na-  
burigen over te gaan.

Voor het gebruik van deze formules moeten wij vooraf  
nog het volgende opmerken:

Wanneer wij twee opvolgende standen van het bewegende  
coördinatenstelsel doen overeenstemmen met een der beide  
stelsels, in het vorige hoofdstuk beschreven, zal deze over-  
eenstemming hierin bestaan, dat de assen van het eene even-  
wijdig zijn aan de richtingen van het andere.

Onder dien verstande zal, bijvoorbeeld bij de beschouwing  
van de kromme lijn  $u = f(v)$ , de hoek tusschen twee opvol-  
gende standen der X-as gelijk zijn aan den contingentie-hoek  
van de lijn in het punt der beschouwing. In hetzelfde opzicht  
zullen de hoeken, door de twee opvolgende standen der Y- en  
der Z-as gevormd, gelijk zijn aan die, waaronder twee na-  
burige hoofdnormalen en twee zulke binormalen elkander  
kruisen.

## §. 5.

Als eerste toepassing der formules (7) uit de vorige §, zullen wij ze gaan aanwenden tot de afleiding der formules van Serret <sup>1)</sup>.

Zijn  $x=f_1(u)$ ,  $y=f_2(u)$ ,  $z=f_3(u)$  de vergelijkingen van eene lijn met dubbele kromming; onderstellen wij, dat de cosinussen der richthoeken van de raaklijn, hoofdnormaal en binormaal, die wij voorloopig door de letters  $p, q, r$  voorstellen, bekende functiën zijn van de veranderlijke  $u$ , dan zullen  $p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1$ ,  $p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3$ ,  $p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2$  eveneens bekende functiën zijn van  $u$ . Stel:

$$\left. \begin{aligned} p_2 dp_1 + q_2 dq_1 + r_2 dr_1 &= M du, \\ p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3 &= -P du, \\ p_3 dp_2 + q_3 dq_2 + r_3 dr_2 &= -R du; \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

waarin  $M, P$  en  $R$  functiën zijn van  $u$ . De vergelijkingen (7) worden daardoor:

$$\left. \begin{aligned} dp_1 &= (M p_2 + P p_3) du, & dp_2 &= -(R p_3 + M p_1) du, \\ dq_1 &= (M q_2 + P q_3) du, & dq_2 &= -(R q_3 + M q_1) du, \\ dr_1 &= (M r_2 + P r_3) du, & dr_2 &= -(R r_3 + M r_1) du. \\ dp_3 &= -(P p_1 - R p_2) du, \\ dq_3 &= -(P q_1 - R q_2) du, \\ dr_3 &= -(P r_1 - R r_2) du. \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

De hoeken tusschen twee opevolgende standen der raaklijn, hoofdnormaal en binormaal door  $\varepsilon, \varepsilon'$  en  $\varepsilon''$  voorstellende en voor alle dezelfde berekening toepassende (Leroy, pag. 293), dan is het resultaat:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 &= dp_1^2 + dq_1^2 + dr_1^2, \\ \varepsilon'^2 &= dp_2^2 + dq_2^2 + dr_2^2, \\ \varepsilon''^2 &= dp_3^2 + dq_3^2 + dr_3^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

<sup>1)</sup> Journal de Liouville, Tome XVI, pag. 493.

Hierin voor  $dp_1$ ,  $dq_1$ ,  $dr_1$  enz. de betrekkingen uit (9) gesubstitueerd, en gelet op de betrekkingen tusschen de cosinussen der richthoeken, dan ontstaan de vormen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 &= (M^2 + P^2) du^2, \\ \varepsilon'^2 &= (R^2 + M^2) du^2, \\ \varepsilon''^2 &= (P^2 + R^2) du^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Om in deze uitdrukkingen nog eene kleine, doch daardoor niet minder belangrijke vereenvoudiging aan te brengen, moeten wij vooraf in overweging nemen, hoe het met den stand van twee opvolgende binormalen bij eene lijn van dubbele kromming gesteld is.

De binormaal staat loodrecht op het osculatie-vlak; dus dient de hoek, waaronder twee opvolgende binormalen elkander kruisen, tot maat voor den standhoek tusschen twee opvolgende osculatie-vlakken <sup>1)</sup>, dat is de hoek der wringing.

De doorsnede van twee opvolgende osculatie-vlakken is eene raaklijn aan de kromme. De beide binormalen staan loodrecht op deze doorsnede, doch niet in hetzelfde punt; derhalve kruisen zij elkaar.

Noemen wij de osculatie-vlakken  $V$  en  $V'$ , de daarbij behoorende binormalen  $B$  en  $B'$ . Nu zal  $B'$  loodrecht staan op de gemeene doorsnede, maar niet meer op eenig andere lijn in het vlak  $V$ , die met de doorsnede een hoek maakt. De grootste afwijking van den rechten hoek heeft men bij de lijn  $Q$ , die in het vlak  $V$  loodrecht staat op de gemeene doorsnede; een verschil gelijk aan  $\varepsilon''$ , dat oneindig klein is.

Denken wij ons door  $B'$  en  $Q$  een vlak gebracht, en laten wij dit vlak om  $B'$  draaien, dan zal de hoek tusschen de doorsneden van dit vlak met  $V$  en  $V'$ , steeds kleiner worden dan  $\varepsilon''$ , totdat zij bij het samenvallen van deze met de doorsnede van  $V$  en  $V'$  nul wordt; dus even te voren is deze hoek on-

<sup>1)</sup> Zie v. Geer's leerboek der Meetk., II deel, pag. 12 en 13.

eindig klein geweest ten opzichte van  $\varepsilon''$ . Derhalve een binormaal B' maakt met de vorige raaklijn een hoek, waarvan het verschil met een rechten hoek oneindig klein is van hooger orde dan de eerste, zoodat de cosinus van dien hoek gelijk nul mag gesteld worden.

Hierdoor wordt  $p_1 dp_3 + q_1 dq_3 + r_1 dr_3 = 0$ , dat is  $P = 0$ , en de vergelijkingen (11) geven:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 &= M^2 du^2, \\ \varepsilon'^2 &= (M^2 + R^2) du^2, \\ \varepsilon''^2 &= R^2 du^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

waaruit terstond het theorema van Lancret voortvloeit:

$$\varepsilon'^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon''^2 \dots \dots \dots (13)$$

Het vierkant van den hoek van totale kromming is gelijk aan de som der vierkanten van den contingentie-hoek en den hoek van torsie.

Door  $\varepsilon = \frac{ds}{\rho}$ ,  $\varepsilon'' = \frac{ds}{r}$  en, bij analogie,  $\varepsilon' = \frac{ds}{R_t}$  te stellen, volgt de overeenkomstige eigenschap der krommingen:

$$\left(\frac{1}{R_t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \dots \dots \dots (14)$$

De vergelijkingen (12) kunnen wij schrijven:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{\rho} &= M du, \\ \frac{ds}{R_t} &= \sqrt{M^2 + R^2} du, \\ \frac{ds}{r} &= R du. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Wanneer wij nu de eerste en derde dezer vormen in (9) overbrengen, letten op  $P = 0$  en  $p, q, r$  enz. vervangen door  $\cos. \alpha$ ,  $\cos. \beta$ ,  $\cos. \gamma$  enz., dan komen daaruit de vergelijkingen van Serret te voorschijn:

$$\left. \begin{aligned}
 d \cos. \alpha &= \frac{d s}{q} \cos. \xi, & d \cos. \lambda &= \frac{d s}{r} \cos. \xi, \\
 d \cos. \beta &= \frac{d s}{q} \cos. \eta, & d \cos. \mu &= \frac{d s}{r} \cos. \eta, \\
 d \cos. \gamma &= \frac{d s}{q} \cos. \zeta, & d \cos. \nu &= \frac{d s}{r} \cos. \zeta. \\
 \\ 
 d \cos. \xi &= -\frac{d s}{q} \cos. \alpha - \frac{d s}{r} \cos. \lambda, \\
 d \cos. \eta &= -\frac{d s}{q} \cos. \beta - \frac{d s}{r} \cos. \mu, \\
 d \cos. \zeta &= -\frac{d s}{q} \cos. \gamma - \frac{d s}{r} \cos. \nu.
 \end{aligned} \right\} . \quad (C)$$

Deze betrekkingen zijn voor de transformatie der vergelijkingen (B) zeer belangrijk, dewijl zij ons in staat stellen de differentialen der cosinussen door de cosinussen zelf, waartusschen verschillende betrekkingen bestaan, en de meer bruikbare vormen  $\frac{d s}{q}$  en  $\frac{d s}{r}$  te vervangen.

Alvorens tot de toepassing over te gaan, moeten wij in eene afzonderlijke paragraaf nog eenige onderzoekingen aangaande het oppervlak instellen.

## § 6.

Het oppervlak stellen wij voor door  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  en  $z = \chi(u, v)$ ; de onderstelling, dat de cosinussen der richthoeken bekende functiën zijn van  $u$  en  $v$ , wordt uitgedrukt door:

$$\left. \begin{aligned}
 p_2 d p_1 + q_2 d q_1 + r_2 d r_1 &= + M d u + N d v, \\
 p_1 d p_3 + q_1 d q_3 + r_1 d r_3 &= - P d u - Q d v, \\
 p_3 d p_2 + q_3 d q_2 + r_3 d r_2 &= - R d u - S d v,
 \end{aligned} \right\} . \quad (16)$$

waarin  $M, N, -P, -Q, -R, -S$  functiën zijn van  $u$  en  $v$ .

Deze vormen in de vergelijkingen (7) overgebracht, volgt:

$$\left. \begin{aligned} dp_1 &= (M du + N dv) p_2 + (P du + Q dv) p_3, \\ dq_1 &= (M du + N dv) q_2 + (P du + Q dv) q_3, \\ dr_1 &= (M du + N dv) r_2 + (P du + Q dv) r_3, \\ dp_2 &= -(R du + S dv) p_3 - (M du + N dv) p_1, \\ dq_2 &= -(R du + S dv) q_3 - (M du + N dv) q_1, \\ dr_2 &= -(R du + S dv) r_3 - (M du + N dv) r_1, \\ dp_3 &= -(P du + Q dv) p_1 + (R du + S dv) p_2, \\ dq_3 &= -(P du + Q dv) q_1 + (R du + S dv) q_2, \\ dr_3 &= -(P du + Q dv) r_1 + (R du + S dv) r_2. \end{aligned} \right\} (17)$$

Wanneer wij nu de termen met  $du$ , en evenzoo die met  $dv$  saamvatten, en tegelijkertijd, om herhalingen te vermijden, de veranderlijke assen met het in § 3 omschreven coördinaten-stelsel op het oppervlak laten overeenstemmen, d. i. de grootheden  $p, q, r$ , door de overeenkomende  $a, b, c$  vervangen, dan verkrijgen deze vergelijkingen de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} da_1 &= (M a_2 + P a_3) du + (N a_2 + Q a_3) dv, \\ db_1 &= (M b_2 + P b_3) du + (N b_2 + Q b_3) dv, \\ dc_1 &= (M c_2 + P c_3) du + (N c_2 + Q c_3) dv, \\ da_2 &= -(R a_3 + M a_1) du - (S a_3 + N a_1) dv, \\ db_2 &= -(R b_3 + M b_1) du - (S b_3 + N b_1) dv, \\ dc_2 &= -(R c_3 + M c_1) du - (S c_3 + N c_1) dv, \\ da_3 &= -(P a_1 - R a_2) du - (Q a_1 - S a_2) dv, \\ db_3 &= -(P b_1 - R b_2) du - (Q b_1 - S b_2) dv, \\ dc_3 &= -(P c_1 - R c_2) du - (Q c_1 - S c_2) dv. \end{aligned} \right\} (18)$$

Hieruit kan volgens de elementen der differentiaalrekening afgeleid worden:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial a_1}{\partial u} &= M a_2 + P a_3, & \frac{\partial a_2}{\partial u} &= -R a_3 - M a_1, & \frac{\partial a_3}{\partial u} &= -P a_1 + R a_2, \\
 \frac{\partial b_1}{\partial u} &= M b_2 + P b_3, & \frac{\partial b_2}{\partial u} &= -R b_3 - M b_1, & \frac{\partial b_3}{\partial u} &= -P b_1 + R b_2, \\
 \frac{\partial c_1}{\partial u} &= M c_2 + P c_3, & \frac{\partial c_2}{\partial u} &= -R c_3 - M c_1, & \frac{\partial c_3}{\partial u} &= -P c_1 + R c_2.
 \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial a_1}{\partial v} &= N a_2 + Q a_3, & \frac{\partial a_2}{\partial v} &= -S a_3 - N a_1, & \frac{\partial a_3}{\partial v} &= -Q a_1 + S a_2, \\
 \frac{\partial b_1}{\partial v} &= N b_2 + Q b_3, & \frac{\partial b_2}{\partial v} &= -S b_3 - N b_1, & \frac{\partial b_3}{\partial v} &= -Q b_1 + S b_2, \\
 \frac{\partial c_1}{\partial v} &= N c_2 + Q c_3, & \frac{\partial c_2}{\partial v} &= -S c_3 - N c_1, & \frac{\partial c_3}{\partial v} &= -Q c_1 + S c_2;
 \end{aligned} \right\}$$

en bovendien:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial v} (M a_2 + P a_3) &= \frac{\partial}{\partial u} (N a_2 + Q a_3), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (R a_3 + M a_1) &= \frac{\partial}{\partial u} (S a_3 + N a_1), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (P a_1 - R a_2) &= \frac{\partial}{\partial u} (Q a_1 - S a_2). \\
 \\ 
 \frac{\partial}{\partial v} (M b_2 + P b_3) &= \frac{\partial}{\partial u} (N b_2 + Q b_3), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (R b_3 + M b_1) &= \frac{\partial}{\partial u} (S b_3 + N b_1), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (P b_1 - R b_2) &= \frac{\partial}{\partial u} (Q b_1 - S b_2). \\
 \\ 
 \frac{\partial}{\partial v} (M c_2 + P c_3) &= \frac{\partial}{\partial u} (N c_2 + Q c_3), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (R c_3 + M c_1) &= \frac{\partial}{\partial u} (S c_3 + N c_1), \\
 \frac{\partial}{\partial v} (P c_1 - R c_2) &= \frac{\partial}{\partial u} (Q c_1 - S c_2).
 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

De aangeduide differentiatieën ten uitvoer brengende, en tegelijk  $\frac{\partial a_1}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial b_1}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial c_1}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial a_1}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial b_1}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial c_1}{\partial u}$  enz. vervangende door de vormen, zooals zij in de betrekkingen (19) gegeven worden, dan verkrijgt men wederom negen vergelijkingen, waarvan hier slechts de drie eerste worden opgesteld; dewijl de zes andere, even als in het oorspronkelijke stelsel, slechts herhalingen zijn van deze met verwisseling der  $a$  in  $b$  en  $c$ .

Na doelmatige vereeniging der termen is het resultaat aldus:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) a_2 + \left( \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) a_3 = \\ & \quad (R Q - P S) a_2 + (M S - R N) a_3, \\ & \left( \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u} \right) a_3 + \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) a_1 = \\ & \quad (N P - M Q) a_3 + (R Q - P S) a_1, \\ & \left( \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) a_1 + \left( \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u} \right) a_2 = \\ & \quad (M S - R N) a_1 + (N P - M Q) a_2. \end{aligned}$$

Aangezien bij voortgezette bewerking dezelfde vormen ook verkregen worden met  $b$  en  $c$ , zoo blijkt hieruit, dat de vergelijkingen identiek zijn en aanleiding geven tot:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} &= R Q - P S, \\ \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} &= M S - R N, \\ \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u} &= N P - M Q. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Wanneer de krommen  $U$  en  $V$  op het oppervlak elkaar rechthoekig snijden en  $d\sigma_1$ ,  $d\sigma_2$ ,  $ds$  elementen zijn van  $v = \text{constant}$ ,  $u = \text{constant}$  en  $u = f(v)$ , dan is:  $d\sigma_1 = E du$ ,  $d\sigma_2 = G dv$  en  $ds^2 = E^2 du^2 + G^2 dv^2$  1).

1) Joachimsthal, pag. 82.



De cosinussen der hoeken, die de raaklijnen aan U en V met de vaste assen vormen, zijn:

$$\left. \begin{aligned} \cos. (U X) &= \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{E}, \quad \cos. (U Y) = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{E}, \quad \cos. (U Z) = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{E}, \\ \cos. (V X) &= \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{G}, \quad \cos. (V Y) = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{G}, \quad \cos. (V Z) = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{G}. \end{aligned} \right\} (22)$$

Uit:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

volgt naar (22):

$$dx = a_1 E du + a_2 G dv,$$

$$dy = b_1 E du + b_2 G dv,$$

$$dz = c_1 E du + c_2 G dv.$$

De tweede leden volledige differentiaal zijnde, is ook:

$$\frac{\partial(a_1 E)}{\partial v} = \frac{\partial(a_2 G)}{\partial u}, \text{ enz.},$$

waaruit volgt door differentiatie en substitutie der waarden

voor  $\frac{\partial a_1}{\partial v}$  en  $\frac{\partial a_2}{\partial u}$ :

$$\left(\frac{\partial E}{\partial v} + G M\right) a_1 - \left(\frac{\partial G}{\partial u} - E N\right) a_2 + (E Q + G R) a_3 = 0.$$

De beide andere vergelijkingen geven aanleiding tot dezelfde coëfficiënten met de factoren  $b$  en  $c$ , dus moet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial v} + G M &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial u} - E N &= 0, \\ E Q + G R &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (D)$$

Wanneer de krommen  $U$  en  $V$  een hoek  $2\bar{\omega}$  met elkaar maken, en de lijnen, die den hoek en zijn supplement midden-door deelen, tot  $X$ - en  $Y$ -as worden genomen, dan is:

$$\cos. (U X) = \cos. (X X_1) \cos. (U X_1) + \cos. (X Y_1) \cos. (U Y_1) + \\ + \cos. (X Z_1) \cos. (U Z_1);$$

$$\cos. (V X) = \cos. (X X_1) \cos. (V X_1) + \cos. (X Y_1) \cos. (V Y_1) + \\ + \cos. (X Z_1) \cos. (V Z_1).$$

Omdat hierin de laatste term nul is, wordt:

$$\cos. (U X) = a_1 \cos. \omega + a_2 \sin. \omega,$$

$$\cos. (V X) = a_1 \cos. \omega - a_2 \sin. \omega,$$

zoodat:

$$dx = a_1 (E du + G dv) \cos. \bar{\omega} + a_2 (E du - G dv) \sin. \bar{\omega}, \\ \text{enz. enz.}$$

waaruit volgt:

$$ds^2 = E^2 du^2 + 2EG \cos. 2\bar{\omega} \cdot du dv + G^2 dv^2.$$

In het vervolg zal alleen van onderling rechthoekige  $U$  en  $V$  gebruik gemaakt worden.

---

## § 7.

De ontwikkelingen van de beide voorgaande §§ zijn ver genoeg voortgezet, om thans de vergelijkingen van de lijn met dubbele kromming met die van het oppervlak te verbinden.

Daartoe onderstellen wij, dat de twee opvolgende standen der coördinatenstelsels van de kromme lijn en van het oppervlak behooren bij een element  $ds$  van de baan  $u = f(v)$  op het oppervlak.

Analytisch voldoen wij aan deze voorwaarde door de waarden van  $d \cos. \alpha \dots$ ,  $d \cos. \lambda \dots$ ,  $d \cos. \xi \dots$ , uit (C), en die van

$d a_1, -d a_2, \dots, d a_3, \dots$ , uit (18) in de vergelijkingen (B) over te brengen; in de eerste plaats verkrijgen wij dan:

$$\begin{aligned}
 & (M d u + N d v) (a_2 \cos. \alpha + b_2 \cos. \beta + c_2 \cos. \gamma) + \\
 & + (P d u + Q d v) (a_3 \cos. \alpha + b_3 \cos. \beta + c_3 \cos. \gamma) = \\
 & = -\sin. i d i - \frac{d s}{\rho} (a_1 \cos. \xi + b_1 \cos. \eta + c_1 \cos. \zeta), \\
 & - (R d u + S d v) (a_3 \cos. \alpha + b_3 \cos. \beta + c_3 \cos. \gamma) - \\
 & - (M d u + N d v) (a_1 \cos. \alpha + b_1 \cos. \beta + c_1 \cos. \gamma) = \\
 & = \cos. i d i - \frac{d s}{\rho} (a_2 \cos. \xi + b_2 \cos. \eta + c_2 \cos. \zeta), \\
 & - (P d u + Q d v) (a_1 \cos. \alpha + b_1 \cos. \beta + c_1 \cos. \gamma) + \\
 & + (R d u + S d v) (a_2 \cos. \alpha + b_2 \cos. \beta + c_2 \cos. \gamma) = \\
 & = -\frac{d s}{\rho} (a_3 \cos. \xi + b_3 \cos. \eta + c_3 \cos. \zeta). \\
 & (M d u + N d v) (a_2 \cos. \lambda + b_2 \cos. \mu + c_2 \cos. \nu) + \\
 & + (P d u + Q d v) (a_3 \cos. \lambda + b_3 \cos. \mu + c_3 \cos. \nu) = \\
 & = -\cos. i \cos. \vartheta d i + \sin. i \sin. \vartheta d \vartheta - \\
 & \quad - \frac{d s}{r} (a_1 \cos. \xi + b_1 \cos. \eta + c_1 \cos. \zeta), \\
 & - (R d u + S d v) (a_3 \cos. \lambda + b_3 \cos. \mu + c_3 \cos. \nu) - \\
 & - (M d u + N d v) (a_1 \cos. \lambda + b_1 \cos. \mu + c_1 \cos. \nu) = \\
 & = -\sin. i \cos. \vartheta d i - \cos. i \sin. \vartheta d \vartheta - \\
 & \quad - \frac{d s}{r} (a_2 \cos. \xi + b_2 \cos. \eta + c_2 \cos. \zeta), \\
 & - (P d u + Q d v) (a_1 \cos. \lambda + b_1 \cos. \mu + c_1 \cos. \nu) + \\
 & + (R d u + S d v) (a_2 \cos. \lambda + b_2 \cos. \mu + c_2 \cos. \nu) = \\
 & = \cos. \vartheta d \vartheta - \\
 & \quad - \frac{d s}{r} (a_3 \cos. \xi + b_3 \cos. \eta + c_3 \cos. \zeta).
 \end{aligned}
 \tag{E}$$

$$\begin{aligned}
 & (M du + N dv) (a_2 \cos. \xi + b_2 \cos. \eta + c_2 \cos. \zeta) + \\
 & + (P du + Q dv) (a_3 \cos. \xi + b_3 \cos. \eta + c_3 \cos. \zeta) = \\
 & = + \cos. i \sin. \vartheta di + \sin. i \cos. \vartheta d\vartheta + \\
 & \quad + \frac{ds}{\varrho} (a_1 \cos. \alpha + b_1 \cos. \beta + c_1 \cos. \gamma) \\
 & \quad + \frac{ds}{r} (a_1 \cos. \lambda + b_1 \cos. \mu + c_1 \cos. \nu), \\
 & - (R du + S dv) (a_3 \cos. \xi + b_3 \cos. \eta + c_3 \cos. \zeta) - \\
 & - (M du + N dv) (a_1 \cos. \xi + b_1 \cos. \eta + c_1 \cos. \zeta) = \\
 & = \sin. i \sin. \vartheta di - \cos. i \cos. \vartheta d\vartheta + \\
 & \quad + \frac{ds}{\varrho} (a_2 \cos. \alpha + b_2 \cos. \beta + c_2 \cos. \gamma) \\
 & \quad + \frac{ds}{r} (a_2 \cos. \lambda + b_2 \cos. \mu + c_2 \cos. \nu), \\
 & - (P du + Q dv) (a_1 \cos. \xi + b_1 \cos. \eta + c_1 \cos. \zeta) + \\
 & + (R du + S dv) (a_2 \cos. \xi + b_2 \cos. \eta + c_2 \cos. \zeta) = \\
 & = - \sin. \vartheta d\vartheta + \\
 & \quad + \frac{ds}{\varrho} (a_3 \cos. \alpha + b_3 \cos. \beta + c_3 \cos. \gamma) \\
 & \quad + \frac{ds}{r} (a_3 \cos. \lambda + b_3 \cos. \mu + c_3 \cos. \nu).
 \end{aligned}
 \tag{E}$$

Deze vrij omslachtige vormen kunnen door middel van de vergelijkingen A § 3 zeer vereenvoudigd worden. Na behoorlijke herleiding geven zij dan:

$$\begin{aligned}
 & (M du + N dv) \sin. i = \\
 & = - \sin. i di - \frac{ds}{\varrho} \sin. i \sin. \vartheta; \\
 & \quad - (M du + N dv) \cos. i = \\
 & = \cos. i di + \frac{ds}{\varrho} \cos. i \sin. \vartheta; \\
 & \quad - (P du + Q dv) \cos. i + (R du + S dv) \sin. i = \\
 & = - \frac{ds}{\varrho} \cos. \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{G}$$

$$\begin{aligned}
& (M d u + N d v) \cos. i \cos. \vartheta + (P d u + Q d v) \sin. \vartheta = \\
& = -\cos. i \cos. \vartheta d i + \sin. i \sin. \vartheta d \vartheta - \frac{d s}{r} \sin. i \sin. \vartheta, \\
& - (R d u + S d v) \sin. \vartheta + (M d u + N d v) \sin. i \cos. \vartheta = \\
& = -\sin. i \cos. \vartheta d i - \cos. i \sin. \vartheta d \vartheta + \frac{d s}{r} \cos. i \sin. \vartheta, \\
& (P d u + Q d v) \sin. i \cos. \vartheta + (R d u + S d v) \cos. i \cos. \vartheta = \\
& = \cos. \vartheta d \vartheta - \frac{d s}{r} \cos. \vartheta. \\
& - (M d u + N d v) \cos. i \sin. \vartheta + (P d u + Q d v) \cos. \vartheta = \\
& = \cos. i \sin. \vartheta d i + \sin. i \cos. \vartheta d \vartheta + \frac{d s}{\rho} \cos. i - \frac{d s}{r} \sin. i \cos. \vartheta, \\
& - (R d u + S d v) \cos. \vartheta - (M d u + N d v) \sin. i \sin. \vartheta = \\
& = \sin. i \sin. \vartheta d i - \cos. i \cos. \vartheta d \vartheta + \frac{d s}{\rho} \sin. i + \frac{d s}{r} \cos. i \cos. \vartheta, \\
& - (P d u + Q d v) \sin. i \sin. \vartheta - (R d u + S d v) \cos. i \sin. \vartheta = \\
& = -\sin. \vartheta d \vartheta + \frac{d s}{r} \sin. \vartheta.
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{aligned}} \right\} \text{(G)}$$

Dit geheele stel vergelijkingen geeft aanleiding tot het volgend drietal formules van Laguerre:

$$\begin{aligned}
& (P d u + Q d v) \sin. i + (R d u + S d v) \cos. i = d \vartheta - \frac{d s}{r}, \\
& (P d u + Q d v) \cos. i - (R d u + S d v) \sin. i = \frac{d s}{\rho} \cos. \vartheta, \\
& d i + M d u + N d v = -\frac{d s}{\rho} \sin. \vartheta.
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned}} \right\} \text{(H)}$$

De eerste van het drietal wordt rechtstreeks gegeven door de 6<sup>e</sup> en 9<sup>e</sup> van het stelsel of vloeit voort uit de combinatie van de 4<sup>e</sup> en 5<sup>e</sup> of 7<sup>e</sup> en 8<sup>e</sup>; de tweede komt overeen met de 3<sup>e</sup> en de laatste met de 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup>. Door in de 4<sup>e</sup> den eersten term uit het tweede lid naar het voorste over te brengen, vervolgens voor  $M d u + N d v + d i$  de waarde in de

plaats te stellen en eveneens met de 5<sup>e</sup> te doen, verkrijgt men het nog eenvoudiger stelsel:

$$\left. \begin{aligned} Mdu + Ndv &= -di - \frac{ds}{\rho} \sin. \vartheta, \\ Pdu + Qdv &= \frac{ds}{\rho} \cos. i \cos. \vartheta + \left( d\vartheta - \frac{ds}{r} \right) \sin. i, \\ Rdu + Sdv &= -\frac{ds}{\rho} \sin. i \cos. \vartheta + \left( d\vartheta - \frac{ds}{r} \right) \cos. i. \end{aligned} \right\} (H')$$

Uit de beide laatsten van (H') volgt:

$$(Pdu + Qdv)^2 + (Rdu + Sdv)^2 = \left( d\vartheta - \frac{ds}{r} \right)^2 + \left( \frac{ds}{\rho} \cos. \vartheta \right)^2; \quad (23)$$

waarin:

$$\begin{aligned} Pdu + Qdv &= -(a_1 da_3 + b_1 db_3 + c_1 dc_3) = (a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1), \\ Rdu + Sdv &= (a_2 da_3 + b_2 db_3 + c_2 dc_3) = -(a_3 da_2 + b_3 db_2 + c_3 dc_2). \end{aligned}$$

De eerste vergelijking geeft de cosinus van den hoek, dien de raaklijn aan  $v = \text{constant}$ , en de tweede dien, welken de raaklijn aan  $u = \text{constant}$  met de volgende normaal op het oppervlak in het element  $ds$  maakt.

Nu is:

$$\cos.^2 (U, N') + \cos.^2 (V, N') = 1 - \cos.^2 (N, N'),$$

voor de sinus van den oneindig kleinen hoek den hoek zelf nemende, wordt:

$$(N, N')^2 = \left( d\vartheta - \frac{ds}{dr} \right)^2 + \left( \frac{ds}{\rho} \cos. \vartheta \right)^2. \dots (24)$$

Denkt men zich op het oppervlak de kromme lijn, wier osculatievlak in de beide punten de normaal bevat, en stellen wij hare stralen van eerste en tweede kromming door  $r'$  en  $\rho'$  voor, dan is naar het theorema van Meusnier  $\rho' \cos \vartheta = \rho$ , en naar dat van Lancret:

$$(N, N')^2 = \left( \frac{ds}{r'} \right)^2 + \left( \frac{ds}{\rho'} \right)^2 \dots, \dots (25)$$

In verband met (24) is vervolgens:

$$\frac{d s}{r'} = d \vartheta - \frac{d s}{r}.$$

De uitdrukking  $d \vartheta - \frac{d s}{r}$  is dus gelijk aan de wringing van de geodetische lijn, die met de kromme  $u = f(v)$  eene gemeenschappelijke raaklijn heeft.

Deze uitdrukking wordt *geodetische torsie* genoemd.

Wil men de formule (24) onmiddelijk uit de vergelijkingen (H) afleiden, dan stelle men voor de kromtestralen der normale doorsnede  $\vartheta = 0$ , verheffe beide tot het kwadraat en neme de som, daardoor wordt:

$$\left(\frac{d s}{r'}\right)^2 + \left(\frac{d s}{R}\right)^2 = (P d u + Q d v)^2 + (R d u + S d v)^2;$$

aan den eenen kant naar het theorema van Lancret, aan den anderen naar (23) is vervolgens:

$$(N N')^2 = \left(d \vartheta - \frac{d s}{r}\right)^2 + \left(\frac{d s}{\rho} \cos. \vartheta\right)^2.$$

### §. 8.

Een klaar bewijs van de bizondere geschiktheid der formules (H) voor de analyse op het oppervlak, is wel gelegen in de eenvoudigheid en gemakkelijheid, waarmede de belangrijkste theorema's uit deze betrekkingen worden afgeleid.

Stellen wij in de tweede  $\frac{\cos. \vartheta}{\rho} = \frac{1}{R'}$ , dan wordt de kromtestraal der normale doorsnede bepaald door:

$$\frac{d s}{R'} = (P d u + Q d v) \cos. i - (R d u + S d v) \sin. i. \quad (26)$$

Hierin de waarden voor  $du$  en  $dv$  uit  $E du = ds \cos. i$ ,  
 $G dv = ds \sin. i$  overgebracht en door  $ds$  gedeeld:

$$\frac{E G}{R'} = G P^2 \cos.^2 i + (E Q - G R) \sin. i \cos. i - E S \sin.^2 i. \quad (27)$$

of, rekening houdende met de laatste der vergelijkingen D,

$$\frac{E G}{R'} = G P^2 \cos.^2 i - 2 G R \sin. i \cos. i - E S \sin.^2 i. \quad (27')$$

Het tweede lid zal zijn grootste of kleinste waarde hebben voor een hoek  $i = \alpha$ , indien:

$$2 G P \sin. \alpha \cos. \alpha + 2 G R \cos. 2 \alpha + 2 E S \sin. \alpha \cos. \alpha = 0, \quad (28)$$

dat is voor:  $\text{tang. } 2 \alpha = -\frac{2 G R}{G P + E S}$ ,

of:  $\text{tang.}^2 \alpha + \frac{G P + E S}{G R} \text{tang. } \alpha - 1 = 0.$

Stel  $\text{tang. } \alpha_1$  en  $\text{tang. } \alpha_2$  zijn de wortels dezer vergelijking, dan blijkt uit  $\text{tang. } \alpha_1 \times \text{tang. } \alpha_2 = -1$  dat de beide richtingen onderling loodrecht zijn. Bij deze doorsneden (hoofd doorsneden) zijn dus de kromtestralen  $R_1$  en  $R_2$  bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E G}{R_1} &= G P \cos.^2 \alpha - 2 G R \sin. \alpha \cos. \alpha - E S \sin.^2 \alpha, \\ \frac{E G}{R_2} &= G P \sin.^2 \alpha + 2 G R \sin. \alpha \cos. \alpha - E S \cos.^2 \alpha. \end{aligned} \right\} (29)$$

Zij  $\varphi$  de hoek, waaronder de normale doorsnede, behorende bij de richting  $i$ , de hoofdoorsnede met den kromtestraal  $R_1$  snijdt; zoodat  $i = \varphi + \alpha$ .

Wanneer men de eerste der vergelijkingen (29) met  $\cos.^2 \varphi$ , de tweede met  $\sin.^2 \varphi$  vermenigvuldigt en bij de som voegt, uit (28):

$$0 = -2 G P \sin. \alpha \cos. \alpha \sin. \varphi \cos. \varphi - 2 G R \sin. \varphi \cos. \varphi (\cos.^2 \alpha - \sin.^2 \alpha) - 2 E S \sin. \alpha \cos. \alpha \sin. \varphi \cos. \varphi,$$



dan verkrijgt men, na  $\varphi + \alpha$  door  $i$  vervangen te hebben, de vergelijking (27). Derhalve:

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos.^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin.^2 \varphi}{R_2}, \dots \dots \dots (30)$$

zijnde de formule van Euler.

Voor het verschil der beide hoofdkrommingen verkrijgt men uit (29):

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{EG} [(GP + ES) \cos. 2\alpha - 2GR \sin. 2\alpha],$$

of in verband met (28') nog eenvoudiger:

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = -\frac{2R}{E \sin. 2\alpha} \dots \dots \dots (31)$$

De som is:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{GP - ES}{EG} \dots \dots \dots (32)$$

Door vermenigvuldiging der vergelijking (29) en vermindering met het vierkant van (28), vindt men, na enkele goniometrische reductiën, voor het product:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{-EGPS - G^2 R^2}{E^2 G^2} = \frac{-EGPS + GREQ}{E^2 G^2} = \frac{RQ - PS}{EG}$$

Eerst achtgevende op (21) en vervolgens op (D) volgt:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u}}{EG} = \frac{\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial E}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{E} \frac{\partial G}{\partial u} \right)}{EG}, \dots (33)$$

zijnde het theorema van Gauss.

Wanneer wij uit de eerste der formules (H)  $du$  en  $dv$  elimineeren, komt er:

$$d\vartheta - \frac{ds}{r} = \frac{ds}{EG} [EQ \sin.^2 i + (GP + ES) \sin. i \cos. i + GR \cos.^2 i];$$

in verband met de vergelijking (28') wordt dit:

$$d\vartheta - \frac{ds}{r} = \frac{ds}{EG} \left\{ GR \cos. 2i - GR \frac{\sin. 2i}{\tan. 2\alpha} \right\} = -\frac{Rds}{E} \cdot \frac{\sin. 2(i - \alpha)}{\sin. 2\alpha},$$

het verschil der hoofdkrommingen ingevoerd zijnde:

$$d\vartheta - \frac{ds}{r} = \frac{ds}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin. 2(i - \alpha). \dots (34)$$

Deze formule is door Bertrand gevonden.

Laat men  $i$  met  $\frac{\pi}{2}$  toenemen, dan verandert slechts het teeken van den vorm; derhalve heeft de geodetische torsie in twee richtingen loodrecht op elkaar dezelfde waarde, doch met tegenovergesteld teeken.

Bij  $i = \alpha$  wordt  $d\vartheta - \frac{ds}{r} = 0$ , langs de hoofddoorsneden is dus de geodetische torsie gelijk nul.

De kromtelijn heeft in elk harer punten met de hoofddoorsnede eene gemeenschappelijke raaklijn, voor haar geldt dus:  $d\vartheta - \frac{ds}{r} = 0$ , leerende volgens Lancret, dat de hoek van torsie eener kromtelijn de differentiaal is van den hoek, dien haar osculatievlak met het oppervlak maakt; en omgekeerd, dat de lijn kromtelijn is, wanneer haar wringingshoek de differentiaal is van den hoek tusschen haar osculatievlak en het oppervlak.

Wanneer de kromtelijn vlak is, dan is  $\vartheta = \text{constant}$ , het platte vlak snijdt dan in alle punten der doorsnede het oppervlak onder denzelfden hoek.

Omgekeerd, wanneer de raakvlakken aan het oppervlak in alle punten eener vlakke doorsnede het vlak dezer doorsnede onder een standvastigen hoek snijden, dan is de doorsnede eene kromtelijn. Voorbeelden van vlakke kromtelijnen bieden ons de meridianen en parallelcirkels op een omwentelingsoppervlak, alsmede de voorname doorsneden van een oppervlak van den tweeden graad.

## §. 9.

De derde van de formules van Laguerre, met wier herleiding, wij ons nu gaan onledig houden, is voor ons doel wel de gewichtigste van het drietal. Mochten de beide eerste gereede aanleiding geven tot de beschouwing der verschillende normale doorsneden om een punt op het oppervlak, deze daarentegen zal meer opzettelijk kunnen dienen om voor de grootheid  $\frac{1}{R_g}$ , die in de leer der beweging zulk een voorname rol speelt, eene in vele opzichten bruikbare herleidingsvorm te leveren.

Allereerst vinden wij door  $\vartheta = 0$  te stellen, als vergelijking der geodetische lijn op het oppervlak:

$$di + M du + N dv = 0. \dots \dots (35)$$

Hieraan merken wij op, dat voor alle willekeurig gegeven  $du$  en  $dv$  de richting  $di$  volkomen bepaald is, derhalve door elk punt van het oppervlak een oneindig aantal geodetische lijnen loopen, en elk dezer lijnen bepaald wordt door den hoek  $i$ , dien hare raaklijn met de aangenomen coördinatenrichtingen maakt.

Als  $du$  en  $dv$  worden geëlimineerd, en  $M$  en  $N$  naar de beide eerste van (D) door de grootheden  $E$ ,  $G$  en hare differentiaalën vervangen, dan verkrijgt zij de gedaante:

$$di - \frac{ds}{EG} \cdot \frac{\partial E}{\partial v} \cos. i + \frac{ds}{EG} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \sin. i = 0. \dots (36)$$

Denzelfden vorm gebruikende voor de geodetische kromming eener schuine doorsnede, is:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = - \frac{di}{ds} + \frac{\partial E}{\partial v} \cos. i - \frac{\partial G}{\partial u} \sin. i. \dots (37)$$

Aangaande het differentiaalquotient  $\frac{d i}{d s}$  dient opgemerkt te worden, dat de differentiatie moet worden uitgevoerd langs eene kromme lijn, bijgevolg  $s$  als onafhankelijk veranderlijke voorkomt. Daardoor is:

$$\frac{\sin. \vartheta}{q} = - \left( \frac{\partial i}{\partial u} \frac{d u}{d s} + \frac{\partial i}{\partial v} \frac{d v}{d s} \right) + \frac{\partial E}{\partial v} \cos. i - \frac{\partial G}{\partial u} \sin. i. \quad (38)$$

Hieruit  $\frac{d u}{d s}$  en  $\frac{d v}{d s}$  geëlimineerd, vervolgens den gemeenen factor  $\frac{1}{E G}$  vooropgesteld en eindelijk de partieele differentiaal tialen naar  $u$  en eveneens die naar  $v$  saamgevat, dan ontstaat de vergelijking, die het eerst is gegeven door Ossian Bonnet:

$$\frac{\sin. \vartheta}{q} = \frac{\partial (E \cos. i)}{\partial v} - \frac{\partial (G \sin. i)}{\partial u} \dots \dots \dots (39)$$

Voor  $\vartheta = 0$  volgt hieruit onmiddelijk, als transformatie van (36), voor de geodetische lijn:

$$\frac{\partial}{\partial v} (E \cos. i) = \frac{\partial}{\partial u} (G \sin. i). \dots \dots \dots (40)$$

Nog eene belangrijke vereenvoudiging kunnen de vergelijkingen ondergaan, als op het oppervlak het kromlijnig coördinatenstelsel van Gauss wordt ingevoerd.

De eigenschap der geodetische lijnen, waarop dit stelsel gegrond is, luidt aldus:

Wanneer door een punt  $O$  op het oppervlak naar alle richtingen geodetische lijnen worden getrokken, vervolgens van het punt  $O$  uit op al deze lijnen stukken van gelijke lengte worden uitgezet, dan zal de kromme lijn, die de eindpunten vereenigt, al deze geodetische lijnen onder een rechten hoek snijden <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Recherches générales sur les surfaces gauches par Gauss, vertaald door E. Roger, pag. 35.

Door den geodetischen afstand, waarop een punt P van het punt O moet verwijderd zijn, is reeds bepaald, op welke kromme lijn op het oppervlak het punt P moet gelegen zijn. Er blijft dus nog over, de plaats van het punt P op deze lijn nader te bepalen.

Daartoe zou een der geodetische lijnen OA als eerste kunnen genomen, en het punt op de lijn worden aangewezen door eene lengte, van af het snijpunt met de geodetische lijn in een bepaalden zin langs de kromme gemeten.

In de plaats van deze laatstgenoemde grootheid kan ook de richting genomen worden, waarin de geodetische lijn, welke van O naar P voert, ten opzichte van de als eerste aangenomen geodetische lijn moet worden getrokken.

Bij deze beschouwingswijze is de geodetische afstand OP de voerstraal, en de hoek, die OP met OA in het punt O maakt, de anomalie.

In dit opzicht stemt het stelsel geheel overeen met de poolcoördinaten in het platte vlak.

De lijn, welke alle punten verbindt, die op een geodetischen afstand  $u$  van het punt O verwijderd liggen, voldoet aan de voorwaarde  $u = \text{constant}$  en is dus te beschouwen als eene der kromme lijnen van het stel V.

Alle punten, die met dezelfde anomalie worden bepaald, liggen op eene geodetische lijn. De anomalie als de veranderlijke  $v$  beschouwende, is ook voor deze lijn  $v = \text{constant}$ , bijgevolg de lijn voor een van het stel U te houden.

Bij enkele oppervlakken, zooals de omwentelingsoppervlakken, is het zeer gemakkelijk de betrekking aan te geven, die tusschen de anomalie en de lengte op de kromme lijn V bestaat, mits op de laatste de top, dat is het punt waar de omwentelingsas het oppervlak snijdt, tot oorsprong genomen wordt, en het oppervlak in dit punt doorlopend is, met andere woorden, de meridianen de as onder een rechten hoek snijden.

Hierop komen wij bij de toepassing terug, nu zullen wij de eigenschap gaan aantonen, waarop de voorgenomen vereenvoudiging berust.

In elk stelsel van kromlijnige coördinaten  $U$  en  $V$ , waaraan de voorwaarde verbonden is, dat de kromme lijnen  $U$  geodetische lijnen moeten zijn, is de grootheid  $E=1$ .

Deze eigenschap is zeer licht en zonder eenigen omslag aan te toonen uit de vergelijking (40) der geodetische lijn.

Wanneer men namelijk hierin den hoek  $i=0$  stelt, d. i. de te beschouwen lijn laat saamvallen met de kromme  $U$  dan is  $\sin. i=0$  en  $\cos. i=1$ , zoodat:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

De grootheid  $E$  hangt dus alleen van  $u$  af, en daar het boogelement  $ds$  nu een element is van een der lijnen  $U$ , is:

$$E^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{du^2}{du^2} = 1.$$

Gauss zelf heeft deze eigenschap langs een geheel anderen weg afgeleid <sup>1)</sup>.

---

### § 10.

Een eigenaardig bewijs dezer eigenschap, ontleend aan eene mechanische beschouwing, wordt gevonden in het Journal de Liouville T. XII, pag. 304. De beide bewegingsvergelijkingen, daartoe gebruikt, zijn meermalen door Liouville tot uitgangspunt zijner onderzoekingen gebezigd, doch zonder vermelding der afleiding (id. T. XI, pag. 345 en T. XII, p. 410).

---

<sup>1)</sup> Gauss, pag 38.

Wellicht ligt deze voor de hand, of wordt zij elders aange-  
troffen; doch afkeerig van het gebruik van formules, wier  
afkomst niet nauwkeurig wordt aangewezen, en waarvan het  
ontstaan niet zoo onmiddellijk is in te zien, heb ik gemeend  
er de volgende afleiding te moeten bijvoegen.

Wanneer een punt zich beweegt onder het bestaan eener  
krachtfunctie is:

$$v^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = 2U + C.$$

De grootheden  $du$  en  $dv$  invoerende, en om factoren te  
vermijden, die bij de afleiding de vormen noodeloos omslachte-  
r maken, en bovendien de symmetrie der einduitkomsten  
verstoren, de grootheden  $E^2$  en  $G^2$  door de geaccentueerde  
letters vervangende, wordt:

$$\frac{E' du^2 + G' dv^2}{dt^2} = 2U + C. \dots \dots (41)$$

Om voor de nieuwe coördinaten de bewegingsvergelijkin-  
gen op te stellen, gaan wij (41) totaal differentieeren; men  
verkrijgt dan:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial E'}{\partial u} \frac{du}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\partial G'}{\partial u} \frac{du}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \\ & + \frac{\partial E'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\partial G'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \\ & + 2E' \frac{du}{dt} d\left( \frac{du}{dt} \right) + 2G' \frac{dv}{dt} d\left( \frac{dv}{dt} \right) \end{aligned} \right\} = 2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{du}{dt} + 2 \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{dt}. (42)$$

Hierin zijn de termen met  $E'$  en eveneens die met  $G'$  onder  
elkaar geplaatst ten gerieve der omschrijving en tot bevoor-  
dering van een duidelijk inzicht bij de verdere herleiding.

Wanneer men nu in elke kolom term 3 met tweemaal de  
som van 1 en 2, tot een enkelen term gemaakt, verbindt, en  
daarna weer 1 en 2 elk eenmaal aftrekt, dan blijft de waarde  
van het eerste lid onveranderd.

Hierdoor wordt:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{du}{dt} \left\{ E' d \left( \frac{du}{dt} \right) + \frac{du}{dt} d. E' \right\} - \\
 & \quad - \left( \frac{\partial E'}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial E'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \\
 + & 2 \frac{dv}{dt} \left\{ G' d \left( \frac{dv}{dt} \right) + \frac{dv}{dt} d. G' \right\} - \\
 & \quad - \left( \frac{\partial G'}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial G'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & 2 \frac{du}{dt} \left\{ E' d \left( \frac{du}{dt} \right) + \frac{du}{dt} d. E' \right\} - \\ & \quad - \left( \frac{\partial E'}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial E'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \\ & + 2 \frac{dv}{dt} \left\{ G' d \left( \frac{dv}{dt} \right) + \frac{dv}{dt} d. G' \right\} - \\ & \quad - \left( \frac{\partial G'}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial G'}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 } \right. = 2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{du}{dt} + 2 \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{dt}.
 \end{aligned}$$

In aanmerking genomen dat de vormen tusschen  $\{ \}$  de differentiaalën zijn van producten, verkrijgt men nu nog met een enkele verplaatsing van termen:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{d. \left( E' \frac{du}{dt} \right)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial u} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{du}{dt} = \\
 & \quad = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{dt}; \\
 + & \left[ \frac{d. \left( G' \frac{dv}{dt} \right)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{dv}{dt} = \\
 & \quad = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{dt};
 \end{aligned}$$

waaruit voortvloeit:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d. \left( E' \frac{du}{dt} \right)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial u} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{\partial U}{\partial u}, \\
 & \frac{d. \left( G' \frac{dv}{dt} \right)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{\partial U}{\partial v}.
 \end{aligned} \right\} (43)$$

Ingeval er geen uitwendige versnelling op het bewegende punt werkt, is  $U=0$  en de baan eene geodetische lijn. De vergelijkingen worden dan vereenvoudigd tot:



$$\left. \begin{aligned} \frac{d \cdot \left( E' \frac{du}{dt} \right)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial u} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2, \\ \frac{d \cdot \left( G' \frac{dv}{dt} \right)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

Nemen wij nu nog aan, dat de doorloopen baan eene der kromme lijnen  $U$  is, dan moet aan beide vergelijkingen gelijktijdig voldaan worden door  $v = \text{constant}$ .

Uit de tweede blijkt, dat dit niet anders mogelijk is dan door  $\frac{\partial E'}{\partial v} = 0$ , terwijl de eerste ons leert, dat  $E'$  alleen functie moet zijn van  $u$ , en dan is weer  $E' = 1$ .

Nog vloeit uit de formules voort, dat, ingeval de kromme lijnen  $u = \text{constant}$  ook geodetische lijnen zijn, insgelijks  $G' = 1$  moet zijn.

De formules toch moeten dan ook kunnen dienen voor de beweging langs zulk eene geodetische lijn  $u = \text{constant}$ .

In dat geval is het hoogelement eener willekeurige kromme op het oppervlak  $ds^2 = du^2 + dv^2$ , eene betrekking, geheel in overeenstemming met die van het platte vlak. Zij wijst aan, dat deze eigenschap aan de ontwikkelbare oppervlakken toekomt.

Het is ook een speciaal karakter van de ontwikkelbare oppervlakken, dat twee groepen van lijnen, die elkaar recht-hoekig snijden, tegelijkertijd geodetische lijnen kunnen zijn.

Wat de vergelijking der geodetische lijn betreft, deze wordt met het verkregen resultaat onder een uiterst beknopten vorm gebracht.

Na weglating van den term, die krachtens den factor  $\frac{\partial E}{\partial v}$  gelijk nul wordt, verkrijgt zij de gedaante:

$$di + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{ds \sin. i}{G} = 0, \dots \dots \dots (45)$$

of dewijl  $ds \sin. i = G dv$ :

$$\frac{di}{dv} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0, \dots \dots \dots (46)$$

zijnde eene betrekking, die de verandering aangeeft van den hoek  $i$ , gevormd door de raaklijn aan de te beschouwen geodetische lijn en de raaklijn aan de door het punt getrokken kromme  $U$ .

In dezelfde onderstelling, namelijk dat de kromme lijnen  $U$  geodetische lijnen zijn, is de formule voor de geodetische kromming eener willekeurige kromme op het oppervlak:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = - \frac{di}{ds} - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\sin. i}{G}. \dots \dots \dots (47)$$

Opmerkelijk is, dat elke vormverandering van het oppervlak, waarbij de grootheden  $E$  en  $G$  dezelfde waarde behouden en de orthogonaliteit der coördinatenrichtingen niet verloren gaat, geene verandering brengt in de waarde der geodetische kromming van de gewijzigde baan.

De vergelijking (47), onder behoud der voorwaarden geldig voor elk willekeurig oppervlak, is nog vatbaar voor belangrijke, doeltreffende en telkens verschillende wijzigingen op bol-, cilinder-, kegel- en omwentelingsoppervlakken.

Doch deze afzonderlijke transformatiën en de daaraan ontleende eigenschappen en gevolgtrekkingen zullen wij inlassen bij de afdeelingen der beweging, waarbij zij behooren, en thans de algemeene beschouwingen besluiten met de afleiding der bewegingsvergelijkingen van Serret.

Daartoe zullen wij de versnelling, welke op het bewegende punt werkt, door  $P$  (niet te verwarren met de vorige algemeene functie  $P$ , die in het vervolg niet meer zal voorkomen) haar verschil in richting met de normaal door  $\gamma$  en den hoek, dien hare projectie op het raakvlak aan het oppervlak met de raaklijn aan de baan maakt, door  $\alpha$  voorstellen; zoodat  $N = P \cos. \gamma$ ,  $T = P \sin. \gamma \cos. \alpha$ ,  $D = P \sin. \gamma \sin. \alpha$ , en naar § 2.

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{R} &= W + P \cos. \gamma, \\ \frac{dv}{dt} &= P \sin. \gamma \cos. \alpha, \\ \frac{v^2}{R_g} &= P \sin. \gamma \sin. \alpha. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (K)$$

Uit de tweede dezer vergelijkingen  $dt$  elimineerende met behulp van de betrekking  $v = \frac{ds}{dt}$ , zoo wordt deze na vermenigvuldiging met 2:

$$2v dv = 2P \sin. \gamma \cos. \alpha ds,$$

en na deeling door de derde:

$$\frac{2v dv}{v^2} = \frac{2}{\tan. \alpha} \cdot \frac{ds}{R_g}.$$

Hierin voor  $\frac{ds}{R_g}$  de geodetische contingentiehoek ingevoerd en dan geïntegreerd <sup>1)</sup>:

$$v = C \cdot e^{\int \frac{e_g}{\tan. \alpha} \dots \dots \dots} (48)$$

Eene merkwaardige uitdrukking, waarin de grootte van  $P$  niet voorkomt, en waardoor de snelheid alleen schijnt af te hangen van de richting der versnelling en van den vorm der baan.

Deelen wij echter de derde vergelijking door de eerste, dan blijkt uit de verhouding  $\frac{R}{R_g} = \frac{P \sin. \gamma \sin. \alpha}{W + P \cos. \alpha}$ , dat de vorm van de baan, zoowel van de grootte als van de richting van  $P$  afhangt, derhalve de grootte, door tusschenkomst van den geodetischen contingentiehoek, impliciet in de snelheids-formule voorkomt.

<sup>1)</sup> Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure par P. Serret 2<sup>e</sup> partie, § 1, 144.

Om voor eene bepaalde baan de wet van de versnelling te vinden, waaronder het punt de gegeven baan zal doorloopen, leiden wij uit 1 en 3 van (K) nog af:

$$P^2 = \left( \frac{v^2}{R_g \sin. \alpha} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{R} - W \right)^2, \dots (49)$$

of uit 3, voor de projectie der versnelling op het raakvlak:

$$P \sin. \gamma = \frac{v^2}{R_g \sin. \alpha} \dots (50)$$

Bij de toepassing der formules zullen wij met de beweging op den bol aanvangen.

## § 11.

Den straal van den bol als eenheid genomen, is de midelpuntsvergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \dots (1)$$

Om elk punt op den bol te bepalen door poolsafstand  $u$  en lengte  $v$ , dienen de transformatie-vergelijkingen:

$$x = \sin. u \cos. v, \quad y = \sin. u \sin. v, \quad z = \cos. u. \dots (2)$$

Deze vergelijkingen eerst naar  $u$  en dan naar  $v$  partieel differentieerende, komt er:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial u} = -\cos. u \cos. v, & \frac{\partial x}{\partial v} = -\sin. u \sin. v, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = -\cos. u \sin. v, & \frac{\partial y}{\partial v} = \sin. u \cos. v, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = -\sin. u, & \frac{\partial z}{\partial v} = 0; \end{array} \right\} (3)$$

waaruit blijkt, dat  $E = 1$ ,  $G = \sin. u$  en  $\frac{\partial G}{\partial u} = \cos. u$ .

Deze waarden, overgebracht in (47), geven voor de geodetische kromming van de baan:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\varrho} = -\frac{d i}{d s} \frac{\sin. u}{\text{tang. } u}, \dots \dots \dots (4)$$

en voor den geodetischen contingentiehoek:

$$\text{of: } \left. \begin{aligned} e_g &= -d i - \cos. u d v, \\ e_g &= -d i - \frac{\text{tang. } i}{\text{tang. } u} d u. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Uit de algemeene formules  $\frac{\cos. \vartheta}{\varrho} = \frac{1}{R}$  en  $\frac{\sin. \vartheta}{\varrho} = \frac{1}{R_g}$  volgen voor den bol, door  $R = 1$  te stellen:

$$\varrho = \cos. \vartheta \text{ en } R_g = \cotg. \vartheta,$$

en door beide in het kwadraat op te tellen, voor den contingentiehoek:

$$\varepsilon = \sqrt{d s^2 + e_g^2}.$$

Door de formule der geodetische torsie:

$$d \vartheta - \frac{d s}{r} = \frac{d s}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin. 2(i - \alpha)$$

blijkt, daar  $R_1 = R_2$ , dat van elke spherische kromme de geodetische torsie gelijk nul is, derhalve alle geodetische lijnen op een bol vlakke kromme lijnen zijn.

De eigenschap  $d \vartheta - \frac{d s}{r} = 0$  geeft voor den straal der wrijving de betrekking:

$$r = \frac{d \vartheta}{d s}.$$

Deze vermenigvuldigende met den vorm, die voortvloeit uit de differentiatie van  $\varrho = \cos. \vartheta$  ten opzichte van  $s$ , geeft:

$$r \frac{d \varrho}{d s} = -\sin. \vartheta,$$

waaruit volgt:

$$\varrho^2 + \left( r \frac{d \varrho}{d s} \right)^2 = 1; \dots \dots \dots (6)$$

zijnde eene betrekking tusschen de stralen van 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup> kromming eener spherische lijn <sup>1)</sup>.

Is  $\varrho = \text{constant}$ , dan zijn ook  $R_\varrho$  en  $\vartheta$  constant, terwijl  $r = \infty$ ; derhalve is de spherische kromme vlak, d. i. een kleine cirkel op den bol.

In de onderstelling, dat de projectie der versnelling in ieder punt van de baan gelegen is in het vlak der kromme U (meridiaanvlak) van dat punt, is de integratie, voorkomende in de algemeene snelheidsformule (48), uitvoerbaar.

Dan toch is  $\alpha = i$  en naar (5):

$$\frac{e_\varrho}{\text{tang. } \alpha} = \frac{d i}{\text{tang. } i} - \frac{\cos. u \, d u}{\sin. u}.$$

Geïntegreerd:

$$l v = -l \cdot \sin. i - l \sin. u,$$

overgebracht in (48):

$$v = \frac{c}{\sin. i \sin. u} \dots \dots \dots (7)$$

Hierbij moet worden opgemerkt, dat de hoek  $i$  geteld wordt in den zin van  $+d u$  naar  $+d s$ , zoodat bij tegelijk toeneemende  $u$  en  $s$  de hoek  $i$  scherp, en bij afnemende  $u$  met aangroeiende  $s$ , stomp is.

In het eerste geval heeft de baan haar bolle, in het laatste haar holle zijde naar den oorsprong gekeerd.

Formule (7) is opgesteld in de onderstelling, dat de hoek  $i$  scherp is, de baan dus tot de tegenovergestelde pool  $O'$  nadert, en bovendien de versnelling naar den kant van  $O'$  gericht is.

Nadert de baan tot den oorsprong  $O$ , waarheen ook de versnelling gericht is, dan heeft men het teeken van  $R_\varrho$  te veranderen, maar dan is ook  $\alpha = \pi - i$ , zoodat de formule voor de snelheid dezelfde blijft.

<sup>1)</sup> Schell. curven dopp. krumm, pag. 44.

Door den spherischen afstand van de pool tot aan den grooten cirkel, die de baan in het betreffende punt aanraakt, in de beschouwing op te nemen, wordt (7):

$$v = \frac{c}{\sin. p} \dots \dots \dots (8)$$

Evenzoo kan ook de uitdrukking voor de geodetische kromming met behulp van de betrekking  $\sin. p = \sin. i \sin. u$  onder een gunstiger gedaante worden gebracht.

Wanneer namelijk in (4)  $ds$  wordt vervangen naar  $ds = \frac{du}{\cos. i}$ , vervolgens beide breuken onder een noemer worden gebracht, dan volgt:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = - \frac{\sin. u \cos. i \, di + \sin. i \cos. u \, du}{\sin. u \, du},$$

waarin de teller de differentiaal is van bovenvermelde betrekking voor  $\sin. p$ . Alzoo:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = - \frac{d. \sin. p}{\sin. u \, du}, \dots \dots \dots (9)$$

en voor den geodetischen kromtestraal:

$$R_g = - \frac{\sin. u \, du}{d. \sin. p} \dots \dots \dots (10)$$

De projectie der versnelling op het raakvlak voldoet aan de betrekking:

$$P \sin. \gamma = \frac{v^2}{R_g \sin. i}, \dots \dots \dots (11)$$

en in verband met (8) en (10):

$$P \sin. \gamma = \pm \frac{c^2 d. \sin. p}{\sin.^3 p \, du} \dots \dots \dots (12)$$

De weerstand van het oppervlak, dat is de drukking, die het bewegende punt op het oppervlak uitoefent, wordt bepaald door:

$$W = \frac{v^2}{1} - P \cos. \gamma = \frac{c^2}{\sin.^2 p} - P \cos. \gamma. \dots (13)$$

Als toepassing van formule (12) zullen wij nagaan, hoedanig de versnelling moet zijn, opdat het punt een spherische ellips beschrijve, waarvan het middelpunt samenvalt met den oorsprong.

De vergelijking van deze ellips verkrijgen wij onder den geschiksten vorm, wanneer wij de lijn beschouwen als doorsnede van den bol en den elliptischen kegel, waarvan de top ligt in het middelpunt van den bol.

De centrale projectie van deze doorsnede op het raakvlak in den oorsprong is een ellips, namelijk de doorsnede van het raakvlak met den elliptischen kegel.

Wanneer  $a, b$  de halve assen zijn, en het middelpunt tot pool genomen wordt, is de poolvergelijking van deze ellips:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \sin.^2 \varphi} \dots \dots \dots (14)$$

De lengte der loodlijn uit de pool op de raaklijn in het punt  $(r, \varphi)$  neergelaten is:

$$p'^2 = \frac{a^4 b^4}{r^2 (a^4 \sin.^2 \varphi + b^4 \cos.^2 \varphi)} = \frac{a^2 b^2 (a^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \cos.^2 \varphi)}{a^4 \sin.^2 \varphi + b^4 \cos.^2 \varphi}$$

waaruit:

$$p'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2} \dots \dots \dots (15)$$

Deze betrekking der vlakke ellips is bijzonder geschikt om op de spherische overgebracht te worden.

De grootheden  $p', r, a, b$  zijn de centrale projectiën en ook de tangenten van de overeenstemmende grootheden in de spherische ellips, zoodat voor deze:

$$\text{tang. } p^2 = \frac{a^2 \beta^2}{a^2 + \beta^2 - \text{tang.}^2 u} ; \dots \dots \dots (16)$$

waarin gemakshalve de tangenten der halve spherische assen (als constanten) door de enkele letters zijn voorgesteld.



Om uit (16) eene uitdrukking af te leiden voor  $\frac{d \sin. p}{d u}$ ,  
geven wij haar de gedaante:

$$\sin.^2 p (\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \text{tang.}^2 u) = \alpha^2 \beta^2. \dots (17)$$

Door differentiatie volgt hieruit:

$$(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \text{tang.}^2 u) d \sin. p - \sin. p \text{ tang.} u \frac{d u}{\cos.^2 u} = 0,$$

en door vereenvoudiging met behulp der vergelijking (17):

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{\sin.^2 p} d \sin. p = \sin. p \sin. u \frac{d u}{\cos.^3 u},$$

waaruit:

$$\frac{d \sin. p}{d u} = \frac{\sin.^3 p \sin. u}{\alpha^2 \beta^2 \cos.^3 u} \dots \dots \dots (18)$$

Deze waarde overgebracht in (12) geeft:

$$P \sin. \gamma = \frac{c^2 \sin. u}{\alpha^2 \beta^2 \cos.^3 u} \dots \dots \dots (19)$$

als de voorwaarde, waaraan de component der versnelling in  
de richting der raaklijn aan den meridiaan moet voldoen.

Komt nog de beperking er bij, dat de versnelling even-  
wijdig moet zijn aan de as, dan is  $\gamma = u$  of  $= \pi - u$  en:

$$P = \frac{c'}{\cos.^3 u} \dots \dots \dots (20)$$

De waarde voor den geodetischen kromtestraal wordt ver-  
kregen door substitutie van (18) in (10), alzoo:

$$R_g = \alpha^2 \beta^2 \frac{\cos.^3 u}{\sin.^3 p}$$

Aan de uiteinden van de as  $2 \alpha$  is  $u = p = \alpha$ , of  $2 \beta$ ,  
 $u = p = \beta$ , zoodat:

$$R_{g \alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad R_{g \beta} = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Uit de betrekking der lineaire excentriciteit  $b^2 + c^2 = a^2$

volgt,  $a$  beschouwt als zijde van den driehoek, waarvan de hoekpunten gelegen zijn in het middelpunt van den bol, het brandpunt en het uiteinde der as  $b$  der ellips in het raakvlak:

$$\text{tang.}^2 \beta + \text{tang.}^2 \gamma = \text{sec.}^2 \beta + \text{sec.}^2 \gamma - 2 \text{sec.} \beta \text{sec.} \gamma \cos. \alpha,$$

waaruit ter bepaling van de spherische brandpunten voortvloeit:

$$\cos. \alpha = \cos. \beta \cos. \gamma.$$

De drukking, door het bewegende punt in de laatste onderstelling op het oppervlak uitgeoefend, is:

$$\begin{aligned} W &= \frac{v^2}{1} + P \cos. u = c^2 \left( \frac{1}{\sin.^2 p} + \frac{1}{a^2 \beta^2 \cos.^2 u} \right) \\ &= c^2 \left( \frac{a^2 \beta^2 + a^2 + \beta^2 - \text{tang.}^2 u}{a^2 \beta^2} + \frac{\text{sec.}^2 u}{a^2 \beta^2} \right) \\ &= c^2 \frac{(1 + a^2)(1 + \beta^2)}{a^2 \beta^2} = \text{constant.} \end{aligned}$$

Als nog  $a$  en  $\beta$  door  $\text{tang.} a$  en  $\text{tang.} \beta$  vervangen worden, volgt

$$W = \frac{c^2}{\sin.^2 a \sin.^2 \beta}.$$

Wanneer het punt gedwongen wordt een spherische ellips te beschrijven tengevolge eener versnelling, evenwijdig aan de as der ellips, dan is de drukking, door het punt op het oppervlak uitgeoefend, overal standvastig.

Als de oorsprong der coördinaten gelegen is in een der brandpunten van de spherische ellips, dan is de hoek  $i$  of  $\pi - i$  het complement van den halven hoek, gevormd door de spherische voerstralen, die het punt der beschouwing met de beide brandpunten vereenigen. Dus wordt:

$$\begin{aligned} \sin. i &= \cos. \frac{1}{2} (u, u') = \sqrt{\frac{\sin. (a + \gamma) \sin. (a - \gamma)}{\sin. u \sin. u'}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin. (a + \gamma) \sin. (a - \gamma)}{\sin. u \sin. (2a - u)}}. \end{aligned}$$

Deze waarde, gesubstitueerd in  $\sin. p = \sin. i \sin. u$ , geeft tot poolvergelijking der spherische ellips:

$$\sin.^2 p = \frac{\sin. u}{\sin. (2\alpha - u)} \sin. (\alpha + \gamma) \sin. (\alpha - \gamma). \quad (21)$$

Gedifferentieerd en tot bekorting  $\sin. (\alpha + \gamma) \sin. (\alpha - \gamma) = k$  gesteld:

$$2 \sin. p d. \sin. p = k \frac{\sin. 2\alpha du}{\sin.^2 (2\alpha - u)},$$

waaruit volgt:

$$\frac{d \sin. p}{du} = \frac{k \sin. 2\alpha}{2 \sin. p \sin.^2 (2\alpha - u)}.$$

Ten slotte uit deze nog den factor  $\sin.^2 (2\alpha - u)$  door middel van (21) geëlimineerd, wordt nog eenvoudiger:

$$\frac{d \sin. p}{du} = \frac{\sin. 2\alpha \sin.^3 p}{2k \sin.^2 u}.$$

De projectie der versnelling op het raakvlak moet derhalve voldoen aan de voorwaarde:

$$p \sin. \gamma = \frac{c^2 \sin. 2\alpha}{2k \sin.^2 u} \dots \dots \dots (22)$$

Wanneer de versnelling evenwijdig is aan de as, wordt:

$$P = \frac{c'}{\sin.^3 u} \dots \dots \dots (23)$$

De geodetische kromtestraal verkrijgt in dit geval tot waarde:

$$R_g = \frac{2k}{\sin. 2\alpha} \frac{\sin.^3 u}{\sin.^3 p}.$$

Om te onderzoeken, onder welke omstandigheden het punt op den bol zich langs een loxodroom (de lijn, die alle meridianen onder denzelfden hoek snijdt) zal bewegen, heeft men in de formule:  $\sin. p = \sin. i \sin. u$  den factor  $\sin. i$  als standvastig te beschouwen.

Daardoor wordt, de versnelling als boven in het meridiaanvlak nemende:

$$\frac{d \sin. p}{d u} = \sin. i \cos. u,$$

$$R_g = \frac{\text{tang. } u}{\sin. i},$$

en

$$P \sin. \gamma = \frac{v^2}{\text{tang. } u} = \frac{c^2}{\sin.^2 i \sin.^2 u \text{ tang. } u}.$$

Met inachtneming, dat  $\sin. i$  standvastig is, geven wij aan de betrekking, waaraan de projectie der versnelling moet voldoen, den vorm:

$$P \sin. \gamma = \frac{c' \cos. u}{\sin.^3 u}.$$

De versnelling zelf, als zij evenwijdig is aan de as, wordt bepaald door:

$$P = \frac{c' \cos. u}{\sin.^4 u}.$$

Ten slotte zullen wij de beweging op het boloppervlak bepalen in de onderstelling, dat de versnelling standvastig is in grootte en in richting.

Nemen wij de as in de richting van den vertikaal en tot versnelling, die der zwaartekracht  $g$ , dan is het vraagstuk teruggebracht tot dat van den spherischen slinger.

De oorsprong der coördinaten is genomen in het hoogste punt op het oppervlak, derhalve  $\gamma = u$ .

De bewegingsformulen zijn:

$$v = \frac{c}{\sin. i \sin. u},$$

$$g \sin. u = \frac{v^2}{R_g \sin. i},$$

$$W = \frac{v^2}{1} - g \cos. u.$$

Uit de tweede dezer, in verbinding met de eerste, volgt:

$$R_g = \frac{c^2}{g \sin.^3 p}.$$

De vergelijking dezer uitkomst met die der geodetische kromtestralen van spherische ellipsen leert ons, dat de baan eens spherischen slingers nimmer een spherische ellips kan zijn.

Alleen, wanneer  $u$  constant is, zijn de verschillende vormen  $R_g$  in overeenstemming te brengen; de baan wordt dan een horizontale cirkel.

In dit geval leert ons de 2<sup>e</sup> formule, daar  $\sin. i = 1$ ,  $q = \cos. \vartheta$  en  $R_g = \cot g. \vartheta$ , dus:

$$\frac{v^2}{\cos. \vartheta} \sin. \vartheta = g \sin. u;$$

ten eerste, dat bij de cirkelvormige beweging de snelheid standvastig, derhalve de beweging eenparig is; ten tweede, dat voor zulk eene beweging vereischt wordt, dat van de centrifugaalversnelling ten opzichte van de as, geprojecteerd op eene richting loodrecht op den straal van den bol, de projectie gelijk zij aan de component der versnelling volgens dezelfde richting.

Nu is ook  $u = \frac{\pi}{2} + \vartheta$  derhalve:

$$\frac{v^2}{q} = g \cot g. \vartheta.$$

De hoeksnelheid  $\omega$  en den verticalen afstand  $h$  van het middelpunt tot aan het vlak van den horizontalen cirkel ingevoerd, is:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

De duur eener geheele omwenteling is:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

De baan kan nimmer een groote cirkel zijn, want voor  $h=0$  is  $T=0$  en  $v=\infty$ , het punt zou dan met oneindige snelheid in een oneindig kleine tijdruimte zijn weg moeten afleggen.

De gang, dien wij tot hertoe gevolgd hebben, leidt ook tot een duidelijke en eenvoudige voorstelling der formules bij de slingerbeweging, wanneer de baan niet meer cirkelvormig is.

Vooraf brengen wij in herinnering, dat:

$$\text{tang. } i = \frac{G \, dv}{d u} = \frac{\sin. u \, dv}{d u} = \frac{\sin. u}{\frac{d u}{d v}},$$

waarin  $dv$  is te beschouwen als de standhoek tusschen twee opvolgende meridiaanvlakken.

Uit de betrekking voor den geodetischen kromtestraal:

$$\frac{\sin. u \, d u}{d \cdot \sin. p} = \frac{c^2}{g \sin.^3 p},$$

leiden wij door integratie af:

$$\cos. u - \cos. u_0 = -\frac{c^2}{2g \sin.^2 p} + A, \dots \dots \dots \text{(I)}$$

waarin  $A$  de constante der integratie. Door substitutie van  $\sin.^2 p = \sin.^2 i \sin.^2 u$ , en na eenige herleiding wordt (I):

$$\frac{1}{\sin.^2 i} = \frac{\sin.^2 u [2g A + 2g (\cos. u_0 - \cos. u)]}{c^2}.$$

Maar:

$$\frac{1}{\sin.^2 i} = 1 + \text{cotg.}^2 i = 1 + \frac{\left(\frac{d u}{d v}\right)^2}{\sin.^2 u};$$

deze waarde overgebracht in de vorige, geeft:

$$\left(\frac{d u}{d v}\right)^2 = \sin.^2 u \frac{\sin.^2 u [2g A + 2g (\cos. u_0 - \cos. u)] - c^2}{c^2},$$

waaruit:

$$d v = \pm \frac{c \, d u}{\sin. u \sqrt{\sin.^2 u [2g A + 2g (\cos. u_0 - \cos. u)] - c^2}}. \text{(II)}$$

Uit:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{\sin. i \sin. u},$$

volgt:

$$ds \sin. i = \frac{c dt}{\sin. u}.$$

Doch  $ds \sin. i = \sin. u du$ , zoodat tusschen  $dv$  en  $dt$  de betrekking bestaat:

$$dv = \frac{c dt}{\sin.^2 u} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Hierin komt echter nog een derde veranderlijke grootheid  $\sin.^2 u$  voor, en om nu eene betrekking tusschen slechts twee veranderlijke te verkrijgen, stellen wij de waarden van  $dv$  uit II en III aan elkaar gelijk, alsdan is:

$$dt = \pm \frac{\sin. u du}{\sqrt{\sin.^2 u [2gA + 2g(\cos. u_0 - \cos. u)] - c^2}} \dots \text{(IV)}$$

Het is voor het vervolg doelmatiger om hierin  $u$  door  $\pi - u'$  te vervangen. Door dezen boog  $u'$  (de uitwijking) wordt dan de hoek gemeten, dien de bewegende straal met de as maakt.

De formule ondergaat hierdoor eene uiterst geringe wijziging en wordt met weglating der accenten:

$$dt = \pm \frac{\sin. u du}{\sqrt{\sin.^2 u [2gA + 2g(\cos. u - \cos. u_0)] - c^2}} \dots \text{(V)}$$

De constanten worden bepaald door de initiale omstandigheden; zoo is bijvoorbeeld in (I) voor  $u = u_0$ :

$$\left[ \frac{c^2}{\sin.^2 p} \right]_0 = 2gA,$$

$$\text{of dewijl } \left[ \frac{c}{\sin. p} \right]_0 = v_0^2:$$

$$2gA = v_0^2.$$

Nemen wij tot bepaling der constante  $c$  nog aan, dat  $u_0$  de grootste waarde is, welke  $u$  in den geheelen omloop hebben kan en bovendien, dat de initiale snelheid aan het punt is medegedeeld in eene richting, loodrecht op het vlak van den eersten meridiaan, dan is in:

$$v_0^2 = \left[ \frac{c^2}{\sin.^2 i \sin.^2 u} \right]_0$$

de hoek  $i$ , bij het verlaten van den eersten meridiaan, als rechte hoek te beschouwen, waardoor:

$$c^2 = v_0^2 \sin.^2 u_0.$$

In (V) beide constanten vervangende, komt er:

$$dt = \pm \frac{\sin. u \, du}{\sqrt{\sin.^2 u [v_0^2 + 2g(\cos. u - \cos. u_0)] - v_0^2 \sin.^2 u_0}}; \quad (\text{VI})$$

zijnde de bekende formule voor de spherische slingerbeweging (zie o. a. Durege of Schell).

Wanneer de uitwijkingen zoo klein zijn, dat  $\sin. u = u$  mag gesteld worden, dan is:

$$\cos. u = 1 - \frac{u^2}{2} \quad \text{en} \quad \cos. u - \cos. u_0 = \frac{u_0^2 - u^2}{2}.$$

Deze veranderingen in de vergelijking (VI) aangebracht zijnde, wordt:

$$dt = \pm \frac{d. u^2}{\sqrt{(-v_0^2 + g u^2)(u_0^2 - u^2)}},$$

voorts  $u_0 = \alpha$  en  $\frac{v_0^2}{g} = \beta^2$  gesteld:

$$dt = \pm \frac{d. u^2}{\sqrt{g} \sqrt{(\alpha^2 - u^2)(u^2 - \beta^2)}} \dots \quad (\text{VII})$$

Deze uitdrukking moet bestaanbaar zijn, derhalve moet de waarde van  $u$  steeds tusschen die van  $\alpha$  en  $\beta$  liggen.



De integratie der vergelijking VII en de bijzonderheden, welke daarbij zijn op te merken, zijn o. a. vrij uitvoerig vermeld in Duhamel's Cours de mécanique, T. I, pag. 446—452.

---

§ 12.

Het omwentelingsoppervlak zij ontstaan door de wenteling eener vlakke kromme lijn om eene as, mede in het vlak dezer kromme gelegen. Het punt, waarin de beschrijvende lijn door de as gesneden wordt, nemen wij tot oorsprong en de beschrijvende lijnen of meridianen zijn de geodetische lijnen U.

Wanneer nu een dezer meridianen als eerste wordt aangenomen, is elk punt op het oppervlak bepaald door den geodetischen afstand  $u$  van den oorsprong, gemeten langs den meridiaan, waarop het punt zich bevindt, en den hoek, waaronder deze in den oorsprong den eersten meridiaan snijdt.

Deze hoek is tevens standhoek tusschen de beide meridiaanvlakken, wanneer de raaklijnen aan de beschrijvende lijnen in den oorsprong loodrecht staan op de as, en al aanstonds is  $G dv = r dv$ , als  $r$  de straal is van de paralleldoorsnede, waarvan  $G dv$  het element is. Derhalve:

$$G = r \text{ en } \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{dr}{du},$$

$r$  onafhankelijk zijnde van  $v$ .

Overgebracht in (47) en  $ds$  geëlimineerd:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = - \frac{\cos. i \, di}{du} - \frac{\sin. i \, dr}{r \, du} \dots \dots (1)$$

Deze formule blijft onveranderd gelden, wanneer de raaklijnen in den top niet meer loodrecht staan op de as.

Het element van den parallelcirkel toch is, wanneer  $d\varpi$  de hoek is tusschen twee opvolgende stralen van dezen cirkel:

$$G dv = r d\varpi.$$

Partieel gedifferentieerd naar  $u$ , wordt:

$$\frac{\partial G}{\partial u} dv = \frac{dr}{du} d\varpi.$$

Beide vergelijkingen geven door deeling:

$$\frac{\partial G}{\partial u} : G = \frac{dr}{du} : r,$$

en de substitutie hiervan in (47) voert onmiddellijk tot (1).

Eene eigenschap der geodetische lijnen op omwentelingsoppervlakken ligt voor de hand. Voor deze is:

$$-\cos. i di - \frac{\sin. i dr}{r} = 0,$$

of:

$$\frac{-\cos. i di}{\sin. i} = \frac{dr}{r}.$$

Geïntegreerd:

$$r \sin. \left( \frac{\pi}{2} - i \right) = C, \dots \dots \dots (2)$$

zijnde de stelling van Clairaut <sup>1)</sup>:

voor elk punt eener geodetische lijn is het product van den straal des parallelcirkels en den sinus van het azimuth standvastig.

Deze stelling zou men kunnen aanwenden tot berekening van den geodetischen contingentiehoek, doch eenvoudiger wordt deze uit (47) verkregen, door  $G = r$  en  $du = ds \cos. i$  te stellen, gevende:

$$e_g = -di - \frac{\sin. i dr}{\cos. i r}, \dots \dots \dots (3)$$

<sup>1)</sup> Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1755.

Wanneer nu wederom wordt aangenomen, dat de richting der versnelling steeds in het meridiaanvlak is gelegen, dan is in (48):

$$\int \frac{e_g}{\text{tang. } a} = - \int \frac{d i}{\text{tang. } i} - \int \frac{d r}{r} \\ = - l r \sin. i.$$

Het punt beweegt zich met eene snelheid:

$$v = \frac{c}{r \sin. i} \dots \dots \dots (4)$$

In de formule der geodetische kromming:

$$\frac{1}{R_g} = \pm \left( \frac{d i}{d s} + \frac{\sin. i}{r} \frac{d r}{d u} \right)$$

den hoek  $\varphi$  invoerende, waaronder de raaklijn aan den meridiaan de as snijdt, is:

$$\frac{1}{R_g} = \pm \left( \frac{d i}{d s} + \frac{\sin. i \sin. \varphi}{r} \right).$$

Voor de parallelcirkels en loxodromen is  $\frac{d i}{d s} = 0$ , derhalve:

$$\frac{1}{R_g} = \pm \frac{\sin. i \sin. \varphi}{r} = \pm \frac{\sin. i}{l}, \dots \dots \dots (5)$$

zijnde  $l$  de lengte van de raaklijn van het punt tot aan haar snijpunt met de as.

De geodetische kromming eens parallelcirkels is constant, en bijgevolg is deze lijn niet geodetisch.

Wanneer een of meer van de parallelcirkels tegelijk geodetische lijnen zijn, dan is voor deze  $l = \infty$  en  $\frac{1}{R_g} = 0$ . Voor de loxodroom is, in het snijpunt met zulk een parallelcirkel, naar (5) eveneens  $\frac{1}{R_g} = 0$ ; haar osculatievlak bevat de normaal, derhalve heeft zij twee elementen met de geodetische lijn gemeen, aldaar verandert ook het teeken van  $R_g$ .

De waarde van  $\frac{1}{R_g}$  bij parallelcirkels en loxodromen, in (50) overgebracht, geeft voor de component der versnelling langs de raaklijn aan den meridiaan de betrekking:

$$P \sin. \gamma = \frac{v^2}{r} \sin. \varphi, \dots \dots \dots (6)$$

en in verband met (4):

$$P \sin. \gamma = \frac{c^2 \sin. \varphi}{r^3 \sin.^2 i} = \frac{c'}{r^3} \sin. \varphi. \dots \dots \dots (7)$$

Indien de as van het oppervlak vertikaal is en  $P = g$ , de versnelling der zwaartekracht, dan is in (6):

$$g = \frac{v^2}{r} \text{tang. } \varphi,$$

of:

$$v = \sqrt{g \cdot r \cotg. \varphi}.$$

Deze snelheid, aan het punt medegedeeld in eene richting loodrecht op het vlak van den eersten meridiaan, zal het punt met standvastige snelheid een horizontalen cirkel doen doorloopen.

De tijd, waarin eene omwenteling wordt volbracht, is:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r \text{tang. } \varphi}{g}},$$

of dewijl  $r \text{tang. } \varphi$  de lengte is van de subnormaal der meridiaandoorsnede:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Sn}{g}}.$$

Een enkelvoudige slinger, waarvan de lengte gelijk is aan de subnormaal, zal in denzelfden tijd eene schommeling heen en weer volbrengen.

Aan de parabool komt de eigenschap toe, dat de subnormaal in al hare punten eene standvastige lengte heeft; dienvolgende zal het omwentelingsoppervlak, ontstaan door de

wenteling eener parabool om hare as in vertikalen stand, voor de horizontale cirkelvormige beweging deze bizonderheid hebben, dat alle cirkels in denzelfden tijd door een punt worden afgelegd, wanneer het punt door de initiale omstandigheden tot zulk een cirkelbeweging gedwongen wordt.

Als  $p$  de halve parameter voorstelt, dan is de hoeksnelheid, dewijl  $S n = p$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{p}}.$$

Gesteld nu, dat de meridiaan, waarop zich het punt in een gegeven oogenblik bevindt, op dat zelfde oogenblik mede begon te wentelen om de as met eene eenparige hoeksnelheid  $\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}$ , dan zou het punt met betrekking tot dezen beweegbaren meridiaan steeds in rust zijn.

Hierin ligt de oplossing van een vraagstuk, dat wel niet rechtstreeks tot dit onderwerp behoort, maar waartoe de bovenvermelde bizonderheid aanleiding geeft.

Wanneer een parabool, wier as de richting heeft van den vertikaal, om de as eenparig ronddraait met eene hoeksnelheid  $\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}$ , dan zal een zwaar punt, op deze wentelende lijn met eenige snelheid geplaatst, zich op die lijn eenparig voortbewegen.

In elk punt van de parabool toch wordt door hare wenteling de invloed der zwaartekracht op het bewegende punt opgeheven.

Het element eener willekeurige kromme lijn op het oppervlak wordt naar de ingevoerde coördinaten bepaald door:

$$ds^2 = du^2 + (r d\omega)^2, \dots \dots \dots (8)$$

en daar  $ds \cos i = du$ :

$$du^2 \operatorname{tang}^2 i = (r d\omega)^2, \dots \dots \dots (9)$$

Is nu  $z = f(r)$  de vergelijking van den meridiaan, waarbij de omwentelingsas als Z-as is aangenomen, dan is het element van dezen:

$$du^2 = dz^2 + dr^2 = dr^2 \left\{ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right\}$$

of:

$$du^2 = dr^2 [1 + f'(r)^2]. \dots \dots \dots (10)$$

Door gelijkstelling der beide waarden van  $du^2$  krijgt men eene differentiaalvergelijking van de projectie der willekeurige kromme op een vlak, loodrecht op de as van omwenteling:

$$d\varpi = \text{tang. } i \frac{dr}{r} \sqrt{1 + f'(r)^2}. \dots \dots \dots (11)$$

Hierin komt, behalve de grootheden  $\varpi$  en  $r$ , ook de veranderlijke hoek  $i$  voor, zoodat in algemeenen zin de vergelijking weinig bruikbaar oplevert. Nemen wij echter aan, dat de kromme op het oppervlak een loxodroom is, dan is hoek  $i$  standvastig, en hangt het al of niet integabel zijn van (11) af van de mindere of meerdere samengesteldheid der meridiaanvergelijking.

Om bijvoorbeeld de projectie op een parallelvlak te bepalen van de loxodroom op een omwentelingskegel waarvan de tophoek  $2\beta$  is, heeft men:

$$\frac{dz}{dr} = \cotg. \beta \text{ en } \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2} = \frac{1}{\sin. \beta},$$

waardoor:

$$d\varpi = \frac{\text{tang. } i \, dr}{\sin. \beta \, r},$$

gevende na integratie:

$$r = C e^{\frac{\sin. \beta}{\text{tang. } i} \varpi}.$$

De projectie is dus een logarithmische spiraal.

Wanneer omgekeerd de projectie van de loxodroom op een parallelvlak door hare vergelijking  $\varpi = f_1(r)$  gegeven is, en

nu gevraagd wordt, de vergelijking van den meridiaan op te sporen, heeft men in (11)  $\frac{d\sigma}{dr}$  slechts door  $f'_1(r)$  te vervangen en vervolgens  $\frac{dz}{dr}$  op te lossen.

Men vindt dan:

$$\text{tang. } i \, dz = dr \sqrt{r^2 f'^2_1(r) - \text{tang.}^2 i} \dots (12)$$

Als toepassing kan men nu bepalen, welke de meridiaan van het oppervlak moet zijn, opdat de projectie van de loxodroom op een parallelvlak de spiraal zij:  $r = a \sigma^2$ .

Alsdan is:

$$\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 = [f'_1(r)]^2 = \frac{1}{4ar}$$

In (12) gesubstitueerd, wordt de vergelijking van den meridiaan:

$$\text{tang. } i \, dz = dr \sqrt{\frac{r}{4a} - \text{tang.}^2 i},$$

waarvan de integraal is:

$$\frac{9 \text{ tang.}^2 i}{a^2} z^2 = \left(\frac{r}{a} - 4 \text{ tang.}^2 i\right)^3,$$

en dit is de vergelijking van de ontwondene eener parabool.

Uit de formule  $P \sin. \gamma = \frac{v^2}{R_g \sin. i}$ , waarin  $\frac{1}{R_g}$  is te vervangen door  $\frac{\sin. i \sin. \varphi}{r}$ , zullen wij trachten na te gaan, welke voorwaarden moeten vervuld zijn, opdat het bewegende punt op het oppervlak een loxodroom beschrijve.

Omtrent de versnelling is reeds vastgesteld, en onder die voorwaarde is bovengemelde formule verkregen, dat zij steeds moet gelegen zijn in het meridiaanvlak van het punt der beschouwing. Nu zullen wij haar in het vlak ook nog eene bepaalde richting geven en drie gevallen stellen, als:

- 1°. de versnelling is loodrecht op de as;  
 2°. de versnelling is evenwijdig aan de as;  
 3°. de versnelling gaat uit van een vast punt op de as.  
 In het eerste geval is  $\gamma = \varphi$  en naar (7):

$$P = \frac{c'}{r^3}.$$

Geen enkele grootheid, die op den meridiaan en bijgevolg op den vorm van het oppervlak betrekking heeft, wordt in deze formule meer aangetroffen. Op elk oppervlak zal de baan een loxodroom zijn, wanneer de versnelling loodrecht op de as, en omgekeerd evenredig is met de derde macht van den afstand tot de as.

Wanneer de initiale omstandigheden berekend zijn, om het punt een parallelcirkel te doen beschrijven, is de drukking op het oppervlak:

$$W = \frac{c^2}{R r^2 \sin.^2 i} - \frac{c^2}{r^3 \sin.^2 i} \cos. \gamma. \dots (13)$$

Maar:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos. \vartheta}{r}, \text{ en } \vartheta = \gamma$$

zijnde, wordt:

$$W = 0.$$

Het oppervlak ondergaat geene drukking, en het punt verkeert in dat geval der vrije centrale beweging, waarbij de baan een cirkel is.

Indien het oppervlak bolvormig is, en alle omstandigheden vervuld zijn, onder welke het punt een cirkel zou beschrijven, uitgenomen deze, dat de initiale snelheid loodrecht is op het vlak van den eersten meridiaan, waarvoor nu de voorwaarde in de plaats treedt, dat zij in het raakvlak aan den bol een hoek  $i$  maakt met de raaklijn aan den eersten meridiaan, dan zal het punt een loxodroom beschrijven zonder eenige drukking op het oppervlak uit te oefenen.



Ligt de initiale snelheid in het meridiaanvlak, dan doorloopt het punt dezen meridiaan. en zijne projectie op de as heeft dan eene eenparige beweging.

In het tweede geval, wanneer de versnelling evenwijdig is aan de as, wordt de wet der versnelling, waaronder het punt een loxodroom zal beschrijven, bepaald door de betrekking:

$$P = \frac{c'}{r^3} \text{ tang. } \varphi. \dots \dots \dots (14)$$

Bij den omwentelingskegel is  $\text{tang. } \varphi = \text{tang. } \beta$  d. i. constant en de versnelling moet omgekeerd evenredig zijn aan de derde macht van den afstand.

Voor de omwentelingsparaboloïde, die ontstaat door de wenteling eener parabool  $y^2 = 2px$  om de X-as, is  $\text{tang. } \varphi = \frac{p}{y}$ , en de versnelling moet zijn,  $r$  door  $y$  vervangende:

$$P = \frac{c'}{y^4},$$

dat is omgekeerd evenredig met de vierde macht der ordinaat.

Is het oppervlak beschreven door de ontwondene eener parabool  $ky^2 = x^3$ , welke om de Y-as draait, dan is  $x = r$  en  $\text{tang. } \varphi = \frac{2ky}{3x^2}$ , waardoor:

$$P = \frac{2kc'y}{3x^5},$$

en wanneer de X-as, omwentelingsas is,

$$y = r, \text{ tang. } \varphi = \frac{3x^2}{2ky} \text{ en } P = \frac{3c'x^2}{2ky^4},$$

$$P = \frac{3kc'}{2x^4}.$$

In het eerste geval is de versnelling recht evenredig met de eerste macht der abscis en omgekeerd met de vijfde macht der ordinaat; in het tweede geval moet zij omgekeerd even-

redig zijn aan de vierde macht der abscis. De omwentelingsas is als abscissen-as beschouwd.

Wederkeerig kan uit (14) ook worden afgeleid, welke kromme lijn de meridiaandoorsnede moet zijn, opdat de baan op het oppervlak, bij eene bepaalde versnelling, een loxodroom zij. Men heeft dan voor P de gestelde voorwaarde in te voeren en *tang. φ* op te lossen.

Wordt bijvoorbeeld gevraagd, het omwentelingsoppervlak te bepalen, waarop een punt, onder de werking der zwaartekracht, steeds een loxodroom beschrijft, dan moet:

$$g = \frac{c'}{r^3} \text{ tang. } \varphi.$$

Bij gebruik van rechthoekige coördinaten met den vertikaal als X-as wordt de vergelijking:

$$g \, dx = c' \frac{dy}{y^3},$$

waaruit door integratie:

$$x y^2 = \text{constant.}$$

De vorm dezer vergelijking wijst aan, dat de meridiaan een hyperbool is.

Door de versnelling, evenwijdig aan de omwentelings- of abscissenas, achtereenvolgens omgekeerd evenredig aan de 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> macht der abscissen te stellen, verkrijgt men door integratie respectievelijk:

$$y^2 = C_1 x, \quad y^2 = C_2 x^2 \quad \text{en} \quad C_3 y^2 = x^3,$$

d. i. de parabool, de rechte lijn en de ontwondene der parabool.

In het derde geval, wanneer namelijk de versnelling uitgaat van een vast punt op de as, worden de betrekkingen, waaraan de versnellingen moeten voldoen om het punt loxodromen te doen beschrijven, veel minder eenvoudig.

Zij de meridiaan van het oppervlak eene parabool  $y^2 = 2px$ , het punt, waarvan de versnelling uitgaat, in den top en  $\psi$  de

hoek door den voerstraal, waarvan de lengte is  $\lambda$ , met de X-as gevormd, dan is  $\gamma = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \psi)$ , en:

$$P \cos. (\varphi - \psi) = \frac{c'}{y^3} \sin. \varphi.$$

Nu is:

$$\frac{\sin. \varphi}{\cos. (\varphi - \psi)} = \frac{1}{\text{tang. } \varphi \cos. \psi + \sin. \psi} = \frac{\sec. \psi}{\text{tang. } \varphi + \text{tang. } \psi},$$

en:

$$P = \frac{c'}{y^3} \times \frac{\sec. \psi}{\text{tang. } \varphi + \text{tang. } \psi}.$$

Stellen wij hierin  $\text{tang. } \varphi = \frac{p}{y}$ ,  $\text{tang. } \psi = \frac{y}{x}$  en  $x \sec. \psi = \lambda$ , dan wordt de wet der versnelling uitgedrukt door:

$$\begin{aligned} P &= \frac{c'}{y^2} \times \frac{\lambda}{p x^2 + y^2} \\ &= \frac{c' \lambda}{2 p^2 x^2 (x + 2)}. \end{aligned}$$

Op de beide omwentelingsoppervlakken, die ontstaan door de ontwondene der parabool  $k y^2 = x^3$  beurtelings om de X- en Y-as te laten wentelen, is:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \pm (\varphi - \psi).$$

De vergelijking, die de voorwaarde uitdrukt, waaraan de versnelling moet voldoen, opdat de baan een loxodroom zij, is:

$$P = \frac{c'}{r^3} \times \frac{\sec. \psi}{\text{tang. } \varphi + \text{tang. } \psi}.$$

Wanneer de wenteling om de X-as plaats heeft, is  $r = y$ ,  $\text{tang. } \varphi = \frac{3x^2}{2ky}$ ,  $\text{tang. } \psi = \frac{y}{x}$  en  $\sec. \psi = \frac{\lambda}{x}$  te stellen, waardoor:

$$P = \frac{2kC'}{y^2} \times \frac{\lambda}{3x^3 + 2ky^2},$$

en door middel van de meridiaanvergelijking:

$$P = \frac{2 k c' \lambda}{5 k y^4} = \frac{2 c' \lambda}{5 y^4}.$$

In het andere geval wordt op gelijke wijze gevonden:

$$P = \frac{3 c'}{x} \times \frac{\lambda}{3 x^2 + 2 k y^2} = \frac{3 c' \lambda}{5 x^4}.$$

De geodetische kromtestraal der loxodroom wordt berekend uit:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin. i \sin. \varphi}{r} = \frac{\sin. i}{r} \times \frac{\text{tang. } \varphi}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi}}.$$

Zoo is, de meridiaan eene parabool zijnde:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin. i}{y} \times \frac{P}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

### § 13.

Om de uitdrukkingen van de geodetische kromming en contingentiehoek voor de beschouwing van enkele banen op kegeloppervlakken geschikt te maken, zijn de beschrijvende lijnen als de geodetische lijnen  $U$  te nemen, en wordt elk punt op het oppervlak door zijn geodetischen afstand van den top en door de lengte van de kromme lijn  $V$ , waarop het punt gelegen is, in den eenvoudigsten en doelmatigsten vorm bepaald.

Bij de ontwikkeling van het kegelvlak tot een plat vlak komen alle punten van de lijn  $u = \text{constant}$  op een cirkel te liggen, die  $u$  tot straal heeft.

Voor een element dezer kromme heeft men, wanneer  $dv$  de hoek tusschen twee opeenvolgende beschrijvende lijnen voorstelt:

$$d\sigma_2 = G dv = u dv,$$

zoodat:

$$G = u, \text{ en } \frac{\partial G}{\partial u} = 1. \dots \dots \dots (1)$$

De algemeene betrekking (46) der geodetische lijnen leert ons, dat voor deze op kegelvlakken:

$$di = -dv. \dots \dots \dots (2)$$

Laten wij den hoek  $i$  met  $\frac{1}{2} \pi$  toe of afnemen, al naar gelang deze scherp of stomp is, dan verandert de betrekking (2) niet. Op het kegelvlak heeft men dus twee stellen elkaar rechthoekig snijvende geodetische lijnen, in overeenstemming met de eigenschap, die wij vroeger bij de ontwikkelbare oppervlakken in het algemeen hebben aangetroffen.

De geodetische kromming eener willekeurige kromme lijn op het kegeloppervlak wordt naar (47) voorgesteld door:

$$\frac{\sin. \vartheta}{\rho} = -\frac{di}{ds} - \frac{\sin. i}{u}. \dots \dots \dots (3)$$

Hieruit volgt voor den geodetischen contingentiehoek, daar  $ds \sin. i = u dv$ :

$$e_g = -di - dv, \dots \dots \dots (4)$$

of:

$$e_g = -di - \frac{\text{tang. } i \, du}{u}.$$

Bij de beweging op kegelvlakken is de integratie der algemeene snelheidsformule (48) uitvoerbaar in de onderstelling, dat de projectie der versnelling op het raakvlak in ieder punt van de baan de richting heeft van de beschrijvende lijn des kegels.

Indien de versnelling het bewegende punt tot den top doet naderen, heeft de baan hare holle zijde naar den oorsprong gekeerd, en zouden de geodetische kromtestraal en contingentiehoek in tegenovergestelden zin moeten genomen worden, doch in dit geval is  $\alpha = \pi - i$ , zoodat steeds:

$$\int \frac{e_g}{\text{tang. } a} = - \int \frac{d i}{\text{tang. } i} - \int \frac{d u}{u}$$

$$= - l. \sin. i - l u,$$

waardoor:

$$v = \frac{c}{u \sin. i} = \frac{c}{p} \dots \dots \dots (5)$$

Door  $p$  wordt de lengte der loodlijn voorgesteld, die uit den top op de raaklijn aan de baan is neergelaten.

De formule der snelheid stemt overeen met die der centrale beweging in het platte vlak.

De waarde der geodetische kromming wordt in zeer eenvoudigen vorm voorgesteld, wanneer de baan de bijzondere eigenschap heeft van alle beschrijvende lijnen onder een standvastigen hoek te snijden.

Uit (3) volgt, door  $d i = 0$  te stellen:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin. i}{u} \dots \dots \dots (6)$$

Brengen wij deze waarde in (50) over, dan wordt  $P \sin. \gamma = \frac{v^2}{u}$ , en in verband met (5):

$$P \sin. \gamma = \frac{c'}{u^3} \dots \dots \dots (7)$$

Om het punt een kegelloxodroom te doen beschrijven, moet de versnelling naar den top omgekeerd evenredig zijn met de derde macht van den afstand tot den top.

De naam kegelloxodroom is hier in algemeenen zin aan bedoelde kromme lijn gegeven, dat is zonder de beperking, dat het oppervlak een omwentelingskegel moet zijn.

Wordt het kegelvlak ontrold tot een plat vlak, dan gaat de baan in een logarithmische spiraal over, zooals blijkt uit de eigenschappen, die de eerste met de laatste gemeen heeft.

Zoo is naar (6):

$$R_g = \frac{1}{\sin. i} u,$$

d. i. de geodetische kromtestraal is evenredig met den voerstraal.

Gedifferentieerd geeft dit:

$$d.R_g = \frac{1}{\sin. i} du,$$

vervolgens gedeeld door het baanelement  $ds = \frac{1}{\cos. i} du$ , wordt:

$$\frac{dR_g}{ds} = \frac{1}{\tan. i} = \text{constant},$$

d. i. de geodetische kromtestraal  $R_g$  is evenredig met de lengte van den boog  $s$ , van zeker punt uitgerekend.

De kromme snijdt alle voerstralen onder een constanten-hoek, eene eigenschap, die eveneens aan de logarithmische spiraal toekomt. <sup>1)</sup>

Als het oppervlak een recht kegelvlak is, dan is de projectie van de loxodroom op een parallelvlak, zooals in de vorige § gebleken is, ook een logarithmische spiraal.

Onder zekere initiale omstandigheden en bij dezelfde wet der centripetale versnelling, naar den oorsprong gericht, wordt ook deze vlakke kromme lijn door het punt beschreven <sup>2)</sup>.

Wanneer  $i = \frac{\pi}{2}$ , is de baan op het oppervlak een parallelcirkel en de beweging eenparig; daartoe wordt vereischt, dat de initiale snelheid in het raakvlak loodrecht zij op de beschrijvende lijn en zoodanig, dat  $\left[ \frac{v^2}{R_g} \right]_0$  gelijk is aan de versnelling, die aldaar op het punt werkt.

De formule voor den weerstand van het oppervlak wordt, na substitutie der waarde van  $v$  uit (5):

<sup>1)</sup> J. de Gelder, Hoogere meetk. pag. 372.

<sup>2)</sup> Van Geer, Onderzoek eener biz. omst. der centrale beweging, pag. 51.

$$W = \frac{c^2}{R u^2 \sin.^2 i} - P \cos. \gamma. \dots \dots \dots (8)$$

Hierin kan  $R \sin.^2 i$  door een andere waarde worden vervangen.

Uit de formule van Euler:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos.^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin.^2 \varphi}{R_2},$$

vindt men voor het kegelvlak,  $R_1 = \infty$  zijnde:

$$R \sin.^2 \varphi = R_2;$$

alzoovoor den kromtestraal der normale doorsnede, behoorende bij de richting  $\varphi = i$ :

$$R \sin.^2 i = R_2. \dots \dots \dots (9)$$

Deze kromtestraal der hoofddoorsnede loodrecht op de beschrijvende lijn ingevoerd, wordt:

$$W = \frac{c^2}{u^2 R_2} - P \cos. \gamma. \dots \dots \dots (10)$$

Op het rechte kegelvlak, waarvan de tophoek is  $2\beta$ , wordt:

$$R_2 = u \text{ tang. } \beta,$$

en

$$W = \frac{c^2}{u^3 \text{ tang } \beta} - P \cos. \gamma \dots \dots \dots (11)$$

Deze formule blijft ook geldig voor het willekeurig kegelvlak, wanneer onder  $\beta$  de halve tophoek van den osculatiekegel wordt bedoeld, d. i. van den rechten kegel, die het gegeven oppervlak aanraakt langs de beschrijvende lijn, waarop het punt zich op het oogenblik der beschouwing bevindt.

Wanneer een scherpe hoek om een zijner beenen wentelt, dan beschrijft het andere been een recht kegelvlak; een punt, dat zich op de beschrijvende lijn met eenparige snelheid voortbeweegt zal, wanneer de omwenteling gelijkmatig plaats heeft, op het oppervlak eene kromme lijn beschrijven, waarvan



de ontrolling tot een vlakke kromme lijn en de projectie op eene parallel-doorsnede beide archimedische spiralen zijn <sup>1)</sup>).

Uit de formule  $P \sin. i = \frac{v^2}{R_g \sin. a}$  kan op zeer eenvoudige wijze de wet der versnelling worden bepaald, waaronder het punt deze kromme lijn tot baan zal hebben, wanneer ondersteld wordt, dat de aantrekking uitgaat van den top.

De archimedische spiraal heeft de eigenschap van elken voerstraal onder een hoek  $\psi$  te snijden, zoodanig dat de tangens van dien hoek evenredig is aan den voerstraal.

De kromme op het oppervlak behoudt dezelfde eigenschap; dientengevolge geldt voor deze, dewijl zij hare holle zijde naar den top gekeerd heeft, de betrekking ( $a = \pi - i$ ):

$$\text{tang.}(\pi - i) = c' u. \dots \dots \dots (12)$$

Uit formule (5):

$$v^2 = \frac{c^2}{u^2 \sin.^2 i} = \frac{c^2 (1 + \text{tang.}^2 i)}{u^2 \text{tang.}^2 i}, \dots \dots (13)$$

leiden wij af, in verband met gemelde betrekking (12),  $c' = \frac{c}{c}$  stellende:

$$v^2 = \frac{c'^2}{u^4} + \frac{c^2}{u^2} \dots \dots \dots (14)$$

Hierdoor wordt de snelheid in elk punt van de baan bepaald in eene functie van den afstand tot den top.

De geodetische kromming is:

$$\frac{1}{R_g} = \cos. i \frac{d i}{d u} + \frac{\sin. i}{u},$$

waaruit:

$$\frac{1}{R_g \sin. i} = \frac{1}{\text{tang.} i} \frac{d i}{d u} + \frac{1}{u} \dots \dots \dots (15)$$

Uit  $\text{tang}(\pi - i) = c' u$  leiden wij door differentiatie en deeling door de oorspronkelijke vergelijking af:

<sup>1)</sup> J. de Gelder pag. 418.

$$\frac{1}{\text{tang. } i} \frac{d i}{d u} = \frac{\cos.^2 i}{u}.$$

Deze waarde in de vorige vergelijking gesubstitueerd, geeft:

$$\frac{1}{R_g \sin. i} = \frac{\cos.^2 i + 1}{u} \dots \dots \dots (16)$$

Als wij nu deze uitdrukking tegelijk met die van  $v$  uit (5) in (50) overbrengen, wordt de wet der versnelling verkregen in den vorm:

$$P \sin. \gamma = \frac{c^2}{u^3 \text{ tang.}^2 i} + \frac{c^2}{u^3 \sin.^2 i}.$$

De eerste term wordt door de betrekking (12) aanstonds herleid tot  $\frac{c'^2}{u^5}$ , terwijl de tweede term naar aanleiding van (13) en (14) wederom in twee deelen wordt gesplitst, namelijk  $\frac{c'^2}{u^5}$  en  $\frac{c^2}{u^3}$ , zoodat ten slotte:

$$P \sin. \gamma = \frac{2 c'^2}{u^5} + \frac{c^2}{u^3}; \dots \dots \dots (17)$$

zijnde eene wet van centripetale versnelling, welke geheel in overeenstemming is met die, waaronder in het platte vlak de archimedische spiraal zal worden beschreven, als de aantrekking uitgaat van de pool.

Ook de formules der snelheid zijn in beide gevallen volkomen dezelfde als die bij de banen, welke door ontwikkeling in het platte vlak worden verkregen.

In het algemeen zal elk punt, dat gedwongen is zich op het oppervlak te bewegen onder den invloed eener versnelling, uitgaande van den top, ook dan, wanneer het kegelvlak is ontwikkeld tot een plat vlak, onder gelijken invloed in het platte vlak met dezelfde snelheid de kromme lijn beschrijven, die de ontwikkeling is van de baan op het oppervlak.

## STELLINGEN.

---

### I.

De geodetische torsie der kromtelijnen is in al hare punten gelijk nul; evenwel behoeven deze daarom nog geene geodetische lijnen te zijn.

### II.

Het is verkieslijker de kromtelijnen te bepalen als kromme lijnen op het oppervlak, die met de hoofddoorsneden gemeenschappelijke raaklijnen hebben, dan de definitie van Monge te volgen.

### III.

Ten onrechte beschouwt Schell (Theorie der bew. u. kr. p. 368) de kegelloxodroom als eene geodetische lijn.

## IV.

Het bewijs van het theorema van Meusnier, door Serret (Théorie nouv. géom. et méc. p. 276) gegeven, is onvolledig.

## V.

In Schlömilch's Geometrie des Raumes wordt onder § 12 een gebrekkige beschrijving gegeven van de regelmatige twaalf- en twintig vlakken.

## VI.

De ervaring is een onmisbaar hulpmiddel, om geometrische grondstellingen tot een duidelijk begrip te brengen.

## VII.

Het begrip »rechte lijn» is niet, gelijk Baltzer in »die Elemente der Mathematik» p. 4 opmerkt, zoo eenvoudig, dat het niet voor definitie zou vatbaar zijn.

## VIII.

Naar eene verklaring van het ontstaan van den Galvanischen stroom zal eerst dan met vrucht kunnen worden gezocht, als de Chemische en Electriche verschijnselen onder bewegingsformulen zijn gebracht.

## IX.

Het is zeer onwaarschijnlijk, dat er tusschen de hardheid, het soortelijk gewicht en het atoomgewicht van metalen, zulk een eenvoudige betrekking zou bestaan, als door S. Boltone (Les Mondes 1873 XXXI pag. ~~74~~) wordt aangegeven. - 720

## X.

De wet van Dulong en Petit, volgens welke het product van soortelijke warmte en atoomgewicht een getal oplevert, dat voor alle enkelvoudige vaste stoffen constant zou zijn, is aan ernstige bedenkingen onderhevig.

## XI.

Door het ongelijkwaardig optreden van dezelfde atomen wordt aan de theorie der valentie veel van hare waarde ontnomen.

## XII.

De schadelijke uitwerking van het gloeiend stoken van kachels, moet worden toegeschreven aan het kooloxyde, ontstaan door desoxydatie van koolzuur uit het lokaal.

## XIII.

Het middel, om een verarmden bodem weer vruchtbaar te

maken, door het uitzaaien en later omploegen van plantsoorten met diep indringende wortels, wordt in ons land te weinig in toepassing gebracht.

#### XIV.

Het gelijktijdig uitzaaien op denzelfden bodem van twee plantsoorten, respectievelijk met sterk ontwikkelende hoofden bijwortels, kan niet leiden tot het verkrijgen van een ruimeren oogst.

---

