J. TINBERGEN

MINIMUMPROBLEMEN IN DE NATUURKUNDE EN DE EKONOMIE

MINIMUMPROBLEMEN IN DE
NATUURKUNDE EN DE EKONOMIE

MINIMUMPROBLEMEN IN DE NATUURKUNDE EN DE EKONOMIE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS JHR. MR. W. J. M. VAN EYSINGA, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 22 MAART 1929, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JAN TINBERGEN

GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXIX

AAN MIJN VADER EN MOEDER
AAN MIJN AANSTAANDE VROUW

[Op verzoek van mijn promotor prof. Ehrenfest werd de gebruikelike voorrede vervangen door de hier volgende levensschets.]

In 1903 in Den Haag geboren, bezocht ik aldaar van 1909—1916 de lagere school van de Heer K. BAARS, waar ik de laatste drie jaren onderwijs ontving van de Heer M. VAN SPRONSEN. Ik heb aan deze tijd prettige herinneringen. Van 1916—1921 was ik leerling van de H.B.S. aan de Stadhouderslaan, onder het direkteurschap van wijlen DR. C. C. COOLHAAS en later van Dr. J. J. HALLO. Het levendige en heldere onderwijs van mijn oom, de Heer J. W. VAN EEK, heeft mijn belangstelling voor de wiskunde sterk ontwikkeld, terwijl Dr. A. H. BORGESIUS en Dr. T. VAN LOHUIZEN mij het eerste besef gaven van wat experimenteel onderzoek betekent. Hun liefde voor de problemen der natuurkunde heeft zeer aanstekelik op me gewerkt en grote invloed gehad op de keuze van mijn studierichting. Ik ben hun, evenals veel andere leraren, veel dank voor hun onderwijs verschuldigd. Speciaal wil ik daarbij nog denken aan de lessen in ekonomie van Mej. G. M COOPS, die mij, juist in de tijd dat mijn sociale belangstelling ontwaakte, de noodzaak van systematies denken ook op dit terrein heeft doen begrijpen.

Door mijn wiskundeaanleg geleid koos ik de studie in de wis- en natuurkunde. In Leiden volgde ik de belangwekkende kolleges van Prof. Dr. J. C. KLUYVER, wijlen Prof. Dr. J. P. KUENEN, Prof. Dr. W. VAN DER WOUDE, Prof. Dr. W. H. KEESOM, Dr. J. DROSTE en Dr. J. WOLTJER en deed in December 1922 kandidaatseksamen. Kort daarna had ik het geluk assistent van Prof. Dr. P. EHRENFEST te worden, wat mij gelegenheid gaf, mijn studie onder de meest gunstige omstandigheden voort te zetten, zodat ik in Julie 1925 doktoraaleksamen kon afleggen, waardoor tevens een einde kwam aan mijn assistentschap. Het was me een buitengewoon voorrecht gedurende deze periode automaties ook assistent van wijlen Prof. Dr. H. A. LORENTZ te zijn en diens terecht beroemde Maandagmorgenkolleges te kunnen bijwonen.

Het is moeilik te zeggen, hoe intensief en hoe veelzijdig de invloed van de dagelikse leiding van Prof. EHRENFEST op mij geweest is. Zijn pakkende kolleges, de echt levende diskussies op het colloquium en daarbuiten — waarbij ik vooral denk aan het gastvrije huis van Mevrouw en Prof. EHRENFEST —, de internationale sfeer, werkten krachtig op me in en leerden me vooral hoe nodig het is steeds te zoeken naar het essentiële in de problemen. In deze omgeving heerste een arbeidsvreugde die moeilik overtroffen kan worden.

Aan de reeds genoemde docenten en de vele anderen die tot mijn vorming in deze periode hebben bijgedragen betuig ik ook gaarne mijn grote dank; ik denk daarbij nog speciaal aan de welwillendheid die Prof. VAN DER WOUDE steeds betoond heeft en aan de prettige verhouding tot het Natuurkundig Laboratorium.

Niettegenstaande het vele aantrekkelike dat de studie van de natuurkunde voor me had, groeide echter meer en meer de gedachte in mij, dat ik mijn werk in maatschappelike richting moest zoeken. Het heeft mij getroffen dat ook hier weer Prof. en Mevrouw EHRENFEST degenen waren die mij hielpen de oplossing te vinden van de daardoor ontstane moeilikheid, door mij te raden, me toe te leggen op de wiskundige ekonomie en de statistiek. De tijd van Juli 1924 tot begin 1926 bracht ik zodoende gedeeltelik door met zelfstudie op dit terrein.

Van Mei 1926—Junie 1928 was ik ingevolge de wet van 13 Julie 1923, Sb. No. 357, in verplichte staatsdienst, eerst 15 maanden aan de strafgevangenis te Rotterdam (direkteur de Heer J. HAAITSMA) als hulpschrijver, daarna 10 maanden aan het Centraal Buro voor de Statistiek te Den Haag. Een woord van hartelike dank aan mijn superieuren en kollega's voor de welwillende behandeling die ik in deze enigszins moeilike tijd ondervond, is hier zeker op zijn plaats.

Voor mijn studie was de tijd doorgebracht aan het C.B.S. (direkteur Prof. Dr. H. W. METHORST) op de afdeling voor sociaal-ekonomiese statistiek (chef Mr. E. W. VAN DAM VAN ISSELT), onder de speciale leiding van Jhr. Ir. J. M. DE BOSCH KEMPER, van buitengewoon belang. Ik werd bij het konjunktuuronderzoek voor de taak gesteld de in Leiden ontvangen wiskundige en algemeen-wetenschappelike vorming toe te passen op geheel nieuwe problemen, terwijl een menigte feiten en cijfers mijn zelfstudie kwamen aanvullen.

De tijd na Junie 1928 besteedde ik in hoofdzaak aan dit proefschrift, als een voltooiïng van mijn akademiese studie in de natuurkunde. De behandeling van enkele ekonomiese problemen in het aanhangsel van dit proefschrift moge van de voorgenomen richtingsverandering getuigen — naar ik hoop op niet te onwaardige wijze.

Gaarne dank ik tenslotte Prof. Mr. D. VAN BLOM, Dr. F. M. WIBAUT, Prof. Dr. J. GOUDRIAAN Jr. en Prof. Dr. G. M. VERRIJN STUART voor hun reeds vroeger betoonde welwillendheid inzake mijn studieaangelegenheden.

INHOUD

INLEIDING

Het onderwerp van dit proefschrift werd speciaal gekozen met het oog op de analogie die de behandelde natuurkundige problemen waarschijnlik zouden vertonen met zekere ekonomiese problemen, waarop in het aanhangsel wordt gewezen.

Voornamelik is getracht, de in verschillende gebieden der natuurkunde voorkomende vraagstukken van deze soort overzichtelik bijeen te brengen, en de verschillende vormen waarin ze voorkomen naar één gezichtspunt te rangschikken. Daarbij bleek dat bepaalde kunstgrepen slechts voor enkele gebieden gebruikt werden; nagegaan is, wat hun toepassing op de andere gebieden oplevert.

Op vele punten zijn ter verduideliking van de tekst voorbeelden genoemd[1]), waaronder ettelike van algemene bekendheid, terwijl overal gestreefd is naar aansluiting met de literatuur over het betrokken gebied. Daarbij is ter wille van belangstellende lezers op verschillende plaatsen ook literatuur genoemd welke door mij slechts gedeeltelik bestudeerd is.

Onder *minimumvraagstukken* in 't algemeen zullen we in 't volgende alle vraagstukken verstaan, waarbij een zekere grootheid *stationnair* is, in 't midden gelaten, of er inderdaad een *minimum* (of een maximum) optreedt. Het gebruik van deze niet geheel exakte term werd verkozen, omdat in de meeste gevallen, die behandeld worden, inderdaad toch een minimum (of maximum) aanwezig is; en omdat zodoende een wat al te logge terminologie kon vermeden worden. We zien dan ook af van diskussies over de tweede variaties van de betrokken grootheid.

Vele natuurkundige vraagstukken nu worden beschreven door vergelijkingen die tevens de voorwaarden vormen waaronder een zekere grootheid stationnair wordt. We willen volkomen in 't mid-

---

[1]) De letters vóór de voorbeelden korresponderen met het schema op blz. 60.

den laten of dit „streven naar een minimum" in de natuur van de beschouwde problemen ligt (zoals men in elk geval voor ekonomiese problemen geneigd is, aan te nemen) of als een verrassende uitkomst moet opgevat worden; m.a.w. we zullen het niet hebben over de kwestie of er teleologies of kausaal verband optreedt, welke vraag in de vorige eeuwen in het centrum van de belangstelling heeft gestaan [2]). We houden ons in deze beschouwingen voornamelik bezig met de analogieën die de verschillende problemen vertonen tengevolge van hun zelfde formele bouw.

De vergelijkingen die de oplossing van het minimumprobleem leveren (in 't geval van variatieproblemen de zgn. vergelijkingen van EULER) zijn, wat aard en vorm betreft, afhankelik van de funktie die stationnair wordt. Het eerste hoofdstuk bespreekt enige kategorieën die men zodoende kan onderscheiden, en geeft van elk dezer enige natuurkundige voorbeelden.

Uit sommige van de bedoelde kategorieën laten zich onmiddellik zgn. *reciprociteitsbetrekkingen* afleiden; over deze betrekkingen wordt meer in 't algemeen in het tweede hoofdstuk gehandeld.

De vergelijkingen van EULER laten zich door het invoeren van bepaalde nieuwe veranderliken (*„momenten"*) in de zgn. *kanoniese* vorm en de vorm van ROUTH brengen. Deze transformaties worden in het derde hoofdstuk besproken, waarbij dan tevens minimumproblemen worden aangegeven die direkt deze andere vergelijkingen als vergelijkingen van EULER opleveren.

In een aanhangsel tenslotte worden enkele der aangeroerde kwesties nog enigszins verder uitgewerkt, terwijl tevens enige toepassingen van het voorgaande op *ekonomiese* problemen worden gegeven.

Waar niet het tegendeel uitdrukkelik vermeld is, is van alle voorkomende funkties verondersteld dat ze kontinu en met hun afgeleiden een voldoend aantal malen differentiëerbaar zijn.

---

[2]) Vgl. HELMHOLTZ, Wiss. Abh. III. blz. 203, PLANCK, Kultur der Gegenw. (Physik), blz. 692; KNESER, Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

HOOFDSTUK I

FORMULERING DER PROBLEMEN; NATUURKUNDIGE VOORBEELDEN

1 — Identiteit voor ΔI

Het is doelmatig, dit hoofdstuk te beginnen met de afleiding van een identiteit, waaromheen we onze verdere beschouwingen kunnen groeperen. We willen transformeren de uitdrukking ΔI wanneer

$$I = \int \underset{G}{\ldots\ldots} \int d\omega\, F(q_i, q_{i\lambda}, \xi_\lambda) \tag{1}$$

Hierin betekenen:

ξ_λ $(\lambda = 1 \ldots . \nu)$ de onafhankelik veranderliken van het probleem;

$d\omega = d\xi_1 \ldots . d\xi_\nu$, een element van het ν dimensionale gebied G,

q_i $(\xi_1 \ldots . \xi_\nu)$ $(i = 1 \ldots . n)$ de afhankelik veranderliken; $q_{i\lambda} = \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_\lambda}$.

De variatie van I denken we ons tot stand gekomen door de volgende twee soorten van variaties:

1°. variaties δq_i en $\delta q_{i\lambda}$ van q_i resp. $q_{i\lambda}$, bij konstante ξ_λ; het is duidelik dat daarvoor geldt:

$$\delta q_{i\lambda} = \frac{\partial \delta q_i}{\partial \xi_\lambda} \tag{2}$$

2°. variatie van het integratiegebied door in plaats van ξ te beschouwen $\xi + \Delta\xi$.

We zullen ter wille van de overzichtelikheid de sommatie over indices der q's aangeven met Σ, die over indices der ξ's met ς.

We voeren verder nog in de notaties:

g voor het randgebied van G;

N voor de „normaal" op dat randgebied naar „buiten";

(N, λ) voor de hoek tusschen N en de positieve richting ξ_λ;

$d\Omega$ voor een element van het gebied g.

Nu is ΔI opgebouwd uit twee delen: een term tengevolge van de variatie van het gebied, en een tengevolge van de variatie der q's:

$$\Delta I = \int_g \!\!\ldots\!\! \int d\Omega\, F\, \Delta N + \int_G \!\!\ldots\!\! \int d\omega \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \mathop{S}_{\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \delta q_{i\lambda} \right).$$

Onder gebruikmaking van (2) en na partiële integratie wordt dit:

$$\Delta I = \int_g \!\!\ldots\!\! \int d\Omega\, F\, \Delta N + \int_g \!\!\ldots\!\! \int \sum_i \mathop{S}_{\lambda} d\Omega \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cos(N, \lambda)\, \delta q_i +$$

$$+ \int_G \!\!\ldots\!\! \int d\omega \sum_i \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i} - \mathop{S}_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right\} \delta q_i \tag{3}$$

In plaats van δq_i gebruikt men soms

$$\Delta q_i = \delta q_i + \mathop{S} q_{i\lambda} \Delta \xi_\lambda \tag{4}$$

d.i. het verschil van de ongevariëerde q voor de ongevariëerde ξ-waarden en de gevariëerde q voor de gevariëerde ξ-waarden. Dan wordt (3):

$$\Delta I = \int_g \!\!\ldots\!\! \int d\Omega \mathop{S}_{\lambda} \cos(N\lambda)\, \Delta \xi_\lambda \left[F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} q_{i\lambda} \right] +$$

$$+ \int_g \!\!\ldots\!\! \int \sum_i \mathop{S}_{\lambda} d\Omega \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cos(N, \lambda)\, \Delta q_i + \int_G \!\!\ldots\!\! \int d\omega \sum_i \{\ldots\}\, \delta q_i \tag{5}$$

Tenzij anders vermeld zullen we echter steeds veronderstellen dat $\Delta \xi = 0$ waarmee de eerste integraal wegvalt.

---

2 — Probleemstelling en Oplossingsvergelijkingen

Beschouwen we nu het volgende probleem:

De funkties $q_i\ (\xi_1 \ldots \xi_\nu)$ zodanig te bepalen, dat

$$\Delta I = 0$$

voor alle toelaatbare waarden van δq_i.

Toelaatbaar noemen we alle δq_i welke voldoen aan de bij het probleem eventueel gestelde *randvoorwaarden*, d.z. betrekkingen voor de q_i en de $q_{i\lambda}$ in het randgebied g.

We zullen nl. in 't algemeen afzien van de gevallen waarbij de q_i en $q_{i\lambda}$ bovendien moeten voldoen aan zgn. *nevenvoorwaarden*,

d. z. betrekkingen voor de q_i en de $q_{i\lambda}$ in het gehele gebied G. (Zie daarvoor § 5).

In het gebied G zijn dus de δq_i willekeurig en dan kan aan de opgave slechts dan voldaan worden [3]) wanneer in dat gebied de q_i voldoen aan de partiële differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \mathsf{S} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} = 0 \tag{6}$$

de zgn. *vergelijkingen van* EULER.

Als voorbeelden noemen we behalve het meetkundige voorbeeld der minimumoppervlakken (vgl. blz. 13) de volgende

---

Natuurkundige Voorbeelden

A — *Evenwicht van een Elasties Kontinuum in een Krachtveld*

Het evenwicht van een dergelijk stelsel is de toestand waarvoor de potentiële energie een minimum is. Verstaat men onder:

ξ_λ ruimtekoördinaten;

G het gebied dat door het kontinuum wordt ingenomen;

q_i de uitwijking uit een zekere nulstand van het element met de koördinaten ξ;

dan laat de potentiële energie zich steeds op de vorm I brengen. In 't algemeen zal daarbij F de vorm hebben

$$F \equiv F_1 (q_{i\lambda}, \xi_\lambda) + F_2 (q_i, \xi_\lambda)$$

waarbij F_1 de elastiese energie is en F_2 de potentiële energie t.o.v. het uitwendige krachtveld.

Een fundamentele eigenschap van F_1 is, dat daarin de $q_{i\lambda}$ slechts voorkomen in de kombinatie $q_{i\lambda} + q_{\lambda i}$ [4]).

Is het kontinuum isotroop, dan zal in F_1 elke ξ ontbreken en zullen de $q_{i\lambda}$ er symmetries in voorkomen.

Voldoet het kontinuum aan de wet van Hooke, dan zal F_1 in de $q_{i\lambda}$ kwadraties zijn.

Zijn de uitwendige krachten gegeven en gelijk aan K_i (ξ), dan laat F_2 zich schrijven: $\Sigma\ K_i q_i$.

---

[3]) Vgl. HADAMARD, Leçons sur le calcul des variations, blz. 64; BOLZA, Vorl. über Var. rechnung, blz. 25.

[4]) Vgl. LOVE, Theory of Elasticity, Ch. III, blz. 100, vlg. (11); KIRCHHOFF, Mathem. Physik I, blz. 110 e.v.

Is aan al deze eigenschappen voldaan, dan heeft F dus b.v. de speciale gedaante:

$$F \equiv \tfrac{1}{2}A \sum_i q_{ii}^2 + 2B\,[-\sum_{i,k} q_{ii}\,q_{kk} + \tfrac{1}{4}\sum_{i,k}(q_{ik}+q_{ki})^2] + \sum_i K_i q_i \quad (7)$$

waarbij $\sum_{ik}$ betekent dat elk der kombinaties i, k eenmaal genomen moet worden.

B — *Bewegingsvergelijkingen van de mechanika* [5])

Is voor een mechanies stelsel

ξ de tijd,

q_i $(i = 1 \ldots . n)$ de vrije koördinaten, d.w.z. een stelsel parameters, dat juist voldoende is om de mogelike toestanden van het stelsel te beschrijven, en waarvan we veronderstellen dat ze samenhangen met de Cartesiaanse koördinaten x_j volgens vergelijkingen van de „holonome" vorm:

$$x_j = x_j\,(q_1 \ldots . q_n, \xi), \quad (8)$$

T $(q_i, \dot{q}_i, \xi)$ de kinetiese energie,

U (q_i, ξ) de potentiële energie van de krachten die bij een virtuele verplaatsing arbeid verrichten — waarvan het bestaan dus vooropgesteld wordt [6]) — en ten slotte

$L \equiv T - U$ de zgn. „*funktie van* LAGRANGE", dan zijn de bewegingsvgln. te schrijven in de vorm

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

de zgn. *vergelijkingen van* LAGRANGE, welke dus te beschouwen zijn als de vgln. van EULER voor het probleem

$$\Delta I = \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi\, L = 0$$

B'. *Bewegingsvergelijkingen van een elasties kontinuum*

Deze verkrijgen we door kombinatie der twee vorige voorbeelden; nemen we nl.

$$F = -U\,(q_i, q_{i\mu}, \xi_\lambda) + T(q_i, q_{i4}, \xi_\lambda),$$

---

[5]) Vgl. APPELL, Traîté de mécanique rationnelle II, blz. 213; WHITTAKER, Analytical Dynamics, blz. 38.

[6]) Voor de voorwaarden waaraan de in het probleem optredende krachten moeten voldoen, vgl. b.v.: MAYER, Leipz. Ber. **74** (1898); HIRSCH, Math. Ann. **50** (1898), 429; WHITTAKER, Anal. Dyn. § 31; NORDHEIM, Handb. der Physik V, § 10, 14.

waarbij $\mu = 1, 2, 3$ en $\lambda = 1, 2, 3, 4$, terwijl $\xi_1 \ldots \xi_3$ ruimtekoördinaten zijn en ξ_4 de tijd, dan is het duidelik, dat deze F de Lagrangefunktie van een elasties kontinuum van drie dimensies kan zijn .

G — *Elektrodynamiese veldvergelijkingen* [7])

Bedienen we ons van de notatie van MINKOWSKI, en verstaan we onder:

$\xi_1 \ldots \xi_4$ de drie ruimte- en de tijdkoördinaat van een wereldpunt ($\xi_4 = ict$);

$x_1 \ldots x_4$ idem van een elektries geladen materieëlement;

ρ en μ resp. rustladingsdichtheid en rustmassadichtheid van een element $dx_1 \ldots dx_4$, c de lichtsnelheid,

τ de „eigentijd", welke voldoet aan $d\tau^2 = -\dfrac{1}{c^2}\sum_1^4 i\, dx_i^2$

$s_i = \dfrac{\rho}{c}\dfrac{dx_i}{d\tau}$ [8]) de stroomkomponenten van de elektriciteit,

A_i de komponenten van de vektorpotentiaal,

$F_{ik} = -F_{ki}$ de veldsterkten ($iE_k = F_{4k} = -F_{k4}$; $H_3 = F_{12} = -F_{21}$ enz.), dan luiden de veldvergelijkingen van de elektrodynamika, zooals men weet:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} \quad (9) \qquad -s_i = \sum_k \frac{\partial F_{ki}}{\partial \xi_k} \quad (10)$$

Op verschillende wijzen kan men deze vergelijkingen verkrijgen uit minimumprincipes. Voor de door ons te volgen systematiek is het het fraaist om hier te vermelden het principe:

$$\delta I = \delta \iiiint d\xi_1 \ldots d\xi_4 \left[-\Sigma s_i A_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] = 0 \quad (11)$$

waaruit men onder vooropstelling van vgln. (9) de vgln. (10) verkrijgt, door de A_i te beschouwen als afhankelik veranderliken en de s_i als gegeven funkties van de onafhankelik veranderliken ξ_i.

Men kan ook (9) èn (10) uit één principe afleiden; hierop komen wij nader terug in § 16.

---

[7]) Vgl. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. 1903, blz. 126; LARMOR, Aether and Matter, blz. 84, 94; LIVENS, Phil. Mag. **32** (1916), blz. 195; LIVENS, Theory of Electricity, blz. 568.

[8]) De vierde komponent is dus $-ic\bar{\rho}$ waarin $\bar{\rho}$ de „bewegingslading" is.

H — *Bewegingsvergelijkingen voor materie in een elektromagneties veld* [9]).

Beschrijven we de geschiedenis van een inkoherent kontinuum elektries geladen materie met de koördinaten x_i boven gedefiniëerd, nu echter opgevat als funktie van ξ, η, ζ, τ waarbij ξ, η, ζ de beginkoördinaten en τ de eigentijd van het beschouwde element aangeven, dan luiden de bewegingsvergelijkingen:

$$\mu \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau^2} = \sum_k s_k F_{ki}$$

Deze laten zich afleiden uit een minimumprincipe

$$\delta I = \delta \iiiint d\xi d\eta d\zeta d\tau \, (L - \sum_i s_i A_i) = 0 \qquad (12)$$

waarin

$$L\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial \tau}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\, \mu(\xi, \eta, \zeta) \sum_1^4 {}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tau}\right)^2$$

de Lagrangefunktie, A_i als bekende funktie van x_i wordt beschouwd, en de x_i worden gevariëerd.

Zoals men ziet komen in de integrand slechts afgeleiden van x_i naar τ voor; zodat het in wezen het extremum van een enkelvoudige integraal is, dat beschouwd wordt. Door de integraal te beperken tot het klein gedachte volume van één elektron waarvoor $\iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \mu = m$ verkrijgt men dan ook de bewegingsvgln. van dat elektron in een gegeven veld met verwaarlozing van de reaktie van het eigen veld.

Had men niet een inkoherent doch bv. een elasties kontinuum beschouwd, dan zouden in L ook afgeleiden naar ξ, η en ζ voorkomen.

Veldvergelijkingen en bewegingsvergelijkingen uit één minimumprincipe [10])

Hoewel de principes (11) en (12) door hun gelijkluidende gemeenschappelike gedeelte $\Sigma\, s\, A$ tot kombinatie uitnodigen is deze zonder meer niet mogelik, omdat de onafhankelik veranderliken verschillend zijn en omdat bovendien de A's de eerste maal als afhankelik veranderliken en de andere maal als bekende funkties van de afhankelik veranderliken opgevat worden.

De kombinatie is wel mogelik op de volgende wijze:

---

[9]) Vgl. H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. K. Ges. Wiss. Gött. 1908, speciaal Anhang.; M. Born, Ann. d. Physik **28** (1909), blz. 571; W. Pauli Jr., Relativitätstheorie, (Enz. der math. Wiss.), § 31.

[10]) Vgl. H. A. Lorentz, Versl. A'dam XXIII (1915), blz. 1073; D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik I, K. Ges. Wiss. Gött. Math. Phys. 1915; Tresling Versl. A'dam XXV (1916) blz. 844; A. D. Fokker, Versl. A'dam XXV (1917) blz. 1067 waarin echter bovendien de gravitatievergelijkingen afgeleid worden.

We nemen een

$$I = \iiiint d\xi_1 \ldots d\xi_4 \left[L - \sum_i s_i A_i (\xi) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] \quad (13)$$

waarbij de onafhankelik veranderliken $\xi_1 \ldots \xi_4$ de bovengenoemde betekenis hebben en waarin nu

$$L \equiv \mu c^2 \sqrt{\Sigma x_{i4}^2}.$$

Als afhankelik veranderliken zijn nu te beschouwen de A_i benevens de x_i. Door variatie van A_i ontstaan op de reeds besproken wijze de veldvergelijkingen (10); door variatie van de x_i de bewegingsvergelijkingen. Daarbij moet men echter gebruik maken van de betrekking (zie aanhangsel, § 17).

$$\delta s_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(s_k\, \delta x_i - s_i\, \delta x_k \right) \quad (14)$$

welke niet door een gewoon funktioneel verband tussen s_i en x_i schijnt vervangen te kunnen worden, zodat van een niet-holonome betrekking kan gesproken worden.

3 — Randvoorwaarden

1. Zijn de q's aan geen enkele beperkende voorwaarde onderworpen, dan geldt de voor het gebied G getrokken konklusie ook voor het gebied g en moet dus ook

$$\mathop{S}_{\lambda} \cos (N, \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right)_o = 0 \quad (15)$$

wanneer we door de index 0 de waarden in het gebied g aangeven.

Men noemt dit wel met Courant de *„natuurlike randvoorwaarden"* van het probleem [11]).

2. Een ander uiterste, histories het eerst voorkomende geval, is dat waarin de q's in het gebied g voorgeschreven waarden hebben. Dan zijn de $(\delta q_i)_o = 0$
waardoor de vgl. (15) overbodig worden en vervangen worden door de genoemde randvoorwaarden

$$(q_i)_o = k_i \, (\xi_1 \ldots \xi_\nu) \quad (16)$$

3. Een kontinue reeks tussengevallen kan men naar Courant konstrueren door een iets algemener probleem dan het bovengenoemde $\Delta I = 0$ te beschouwen, nl.

$$\Delta I + t \Delta\, I^* = 0$$

[11]) R. Courant, Jahresber. der deutschen Math.-Ver. XXXIV (1925) blz. 90.

waarin $$I^* = \int \dots \int_g k(q_i, \xi_\lambda)\, d\Omega,$$

$t(\xi_\lambda)$ een parameter voorstelt die van de ξ's der punten van g kan afhangen, en waarbij geen randvoorwaarden gesteld worden. Door geschikte keuze van k kan men bereiken, dat de natuurlike randvoorwaarden van dit probleem:

$$\mathop{S}_{\lambda} \cos. (N, \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}\right)_o + t \frac{\partial k}{\partial q_i} = 0 \tag{17}$$

voor $t = \infty$ de onder 2) genoemde voorwaarden leveren. Daar ze voor $t = 0$ de voorwaarden onder 1) genoemd geven, kan men dus, door t alle tussengelegen waarden te laten doorlopen, een kontinue reeks gevallen als overgang tussen 1) en 2) vinden.

Het hier geschetste procédé laat zich het best illustreren wanneer we de formules toegepast denken op het voorbeeld van het elasties kontinuum.

Nemen we, om de gedachten te bepalen, $\nu = 2$, dan kan I blijkbaar voorstellen de potentiële energie van een elasties vlies, voorzover deze aan de elastiese krachten en de uitwendige oppervlaktekrachten toe te schrijven is. Is dat vlies dan bovendien aan de rand elasties gebonden dan kan de uit deze bindingskrachten voortkomende potentiële energie geschreven worden in de vorm

$$tI^*$$

waar t de vastheid van de binding kan betekenen.

Voor $t = 0$ is er in 't geheel geen binding; bij toenemende t wordt de binding strakker. Physies is nu volkomen duidelik, dat bij toenemende t de oplossing zal naderen tot die van het probleem, waarbij de rand vast is, d.w.z. de q's gegeven waarden hebben.

De randvoorwaarden bij de minimumprincipes der dynamika bespreken we in § 4.

Bij de elektrodynamiese minimumproblemen integreert men gewoonlik over de gehele ruimte, waardoor de in (5) optredende randintegralen automaties nul worden.

4 — Invloed van het aantal onafhankelik veranderliken

Om een overzicht te krijgen van het aantal typen van problemen waarvan in dit hoofdstuk sprake is, is het in de eerste plaats doelmatig de invloed op de vgln. (6) na te gaan, die verandering van het aantal ν der onafhankelik veranderliken ξ heeft. Het afnemen van dit aantal heeft, zoals uit de vgln. (1) en (6) blijkt, heeft tengevolge het steeds „armer'' worden van het probleem. Het aantal integraties in (1) vermindert, en het aantal termen van de vorm

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}}$$

in (6) vermindert.

Het meest volledige voorbeeld van deze verarming levert het behandelde probleem uit de elasticiteitsleer waar $\nu = 3$ een blok, $\nu = 2$ een vlies en $\nu = 1$ een draad voorstelt.

Van speciaal belang zijn naast het algemene geval de biezondere gevallen $\nu = 1$ en $\nu = 0$.

Het geval $\nu = 1$. Hier hebben we dus te maken met **minimumproblemen van enkelvoudige integralen** van de vorm:

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \; F(q_i, \; \dot{q}_i, \; \xi)$$

waarbij dus het gebied G tot een interval $\xi_0 \leq \xi, \leq \xi_1$ is geworden, de $q_{i\lambda}$ tot $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{d\xi}$, en het randgebied tot twee punten ξ_0 en ξ_1.

De formule (5) voor ΔI wordt nu:

$$\Delta I = \left[\left(F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) \Delta\xi + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i \right]_{\xi_0}^{\xi_1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right) \Delta q_i \quad (18)$$

De vergelijkingen van Euler zijn gewone differentiaalvergelijkingen geworden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

en de „natuurlike randvoorwaarden'' tot

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)_1 = 0.$$

Voorbeelden. De gemakkelikste veraanschouweliking van de betekenis van verandering van ν in het voorbeeld van de elasticiteitsleer, waarin ν het aantal dimensies is van het beschouwde elastiese kontinuum, zodat de hiergenoemde vergelijkingen speciaal gelden voor een elastiese *draad* [12]).

De natuurlike randvoorwaarden (15) van het probleem

$$\Delta I = 0$$

die uitdrukken dat aan de beide uiteinden van de draad de elastiese kracht nul is, gelden vanzelfsprekend slechts dan wanneer de draad „vrije uiteinden" geeft. Zijn de uiteinden elasties of geheel vast gebonden, dan gelden ze niet, tenzij men evenals op blz. 9 beschouwt

$$\Delta(I + tI^*) = 0$$

De bewegingsvergelijkingen van de mechanika echter zijn in tegenstelling tot de elastiese vergelijkingen, speciaal van de vorm voor $\nu = 1$. Er is zodoende dus volledige analogie tussen de *statika* van elastiese draden en de *dynamika* van puntsystemen. De in die problemen optredende grootheden zijn als volgt analoog:

	Elastiese draad	*Dynamika*
ξ	Ruimtekoördinaat	Tijd
q	Uitwijkingen	Ruimtekoördinaten
F	Potentiële energie van een draadelement	Lagrangefunktie van een tijdelement
$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = p$	Elast. spanning in de richting q.	Moment in de richting q.

Zodoende is bij de mechaniese bewegingsvgln. aan de natuurlike randvoorwaarden voldaan, als begin- en eindmoment nul zijn, wat in 't algemeen niet waar zal zijn. Men moet dus òf andere randvoorwaarden stellen, of eveneens aan de integraal I een randintegraal I^* toevoegen.

Op deze twee mogelikheden berusten twee mogelike formuleringen van het *minimum-principe der dynamika:* [13])

---

[12]) Kirchhoff, Mathem. Physik I blz. 422 wijst reeds op de analogie tussen de bewegingsvgln. van een vast lichaam dat om een punt roteert en de evenwichtsvoorwaarden voor een elastiese staaf.

[13]) Vgl. b.v. Handbuch d. Physik V blz. 76: (L. Nordheim, Die Prinzipe der Dynamik).

1. Als men vaste begin- en eindkoördinaten voorschrijft: de werkelike beweging van een mechanies stelsel is onder de naburige mogelike bewegingen met vaste begin- en eindkoördinaten en -tijden gekenmerkt door een extremum van de integraal $I = \int L d\xi$. *(Principe van Hamilton)*

2. Als men toevoegt de termen:

$$I^* \equiv -\sum_i P_{i1} q_{i1} + \sum_i P_{i0}\, q_{i0} \quad (P \text{ konstanten}) \tag{19}$$

waardoor de natuurlike randvoorwaarden worden

$$p_{i1} = P_{i1},\ p_{i0} = P_{i0} \tag{20}$$

d.w.z. vaste begin- en eindmomenten, zou men tot de formulering komen: de werkelike beweging is onder naburige mogelike met vaste begin- en eindmomenten en -tijden gekenmerkt door een extremum van $I + I^*$.

Deze laatste speciale keuze van I^* zou in het geval van de elastiese draad betekenen dat op de uiteinden een gegeven kracht P werd uitgeoefend (binding aan een oneindig ver verwijderd elasties centrum).

De gedaanteverandering die de bewegingsvergelijkingen zouden ondergaan wanneer daarin ook de ν groter werd (meerdere „tijden" naast elkaar die de beweging bepalen) is onderzocht door KÖNIGSBERGER [14]). We zullen in het volgende meermalen gelegenheid hebben door hem gevonden formules te bespreken.

Het meetkundige voorbeeld der minimumvlakken kan voor $\nu = 2$ geïnterpreteerd worden als een vraagstuk van *kapillariteit*, voor $\nu = 1$ („de kortste verbindingsweg tussen twee gegeven punten gevraagd") als *mechanies* vraagstuk (krachtvrije beweging) of wanneer men ook „niet-Euclidiese" maatstaf beschouwt als *opties* vraagstuk (de lichtstralen bewegen zich steeds

---

[14]) Vgl. L. KÖNIGSBERGER, Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängigen Variable, J. f. Math. **124** (1902), 202; Das Energieprinzip für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variablen. Sitz. ber. K. Preuss. Akad. 1904, blz. 1342; Ueber die aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringenden partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Mechanik. Sitzber. d. K. Preuss. Akad. 1905 I, blz. 250.

langs de weg van de kortste „lichttijd" Ω) en eveneens als algemener mechanies vraagstuk (gravitatietheorie!). [15])

5 — Het geval $\nu = 0$

Tenslotte is er nog reden om te spreken van het geval $\nu = 0$, waarbij de „verarming" van het probleem zodanig is dat men van ontaarding kan spreken. Er zijn nu geen onafhankelik veranderliken; het probleem kan dus ook niet zijn q te bepalen als funktie der ξ, doch het is: q te bepalen als funktie van de in F nog optredende konstanten, zó dat

$$\delta F(q_i) = 0 \tag{21}$$

We hebben hier dus te maken met „gewone" minimumproblemen, waarvan de oplossing luidt

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0$$

waartoe de vgln. van Euler nu ook inderdaad ontaard zijn. De begrippen rand en randvoorwaarden hebben hun betekenis nu verloren. In sommige opzichten zijn deze problemen echter zo volkomen een voortzetting van de reeks der integraalproblemen, dat vermelding zeker de moeite waard is.

We zullen twee kategorieën van deze vraagstukken in 't biezonder bespreken, nl.

1°. die waarbij F de speciale gedaante $\Phi(q) - \Sigma Qq$, waarin de Q konstanten zijn, heeft, zoals bv. in de thermodynamika.

Hierop komen we terug, wanneer we voor alle problemen deze gedaante van F bespreken.

2°. die waarbij de q_i aan zekere nevenvoorwaarden gebonden zijn. We gaan hier even in op de oplossing van dergelijke problemen.

Behalve aan (21) moet door de q_i dan ook nog voldaan worden aan een of meer vergelijkingen van de vorm

$$V_e(q_i) = 0 \tag{22}$$

---

[15]) Vgl. Schrödinger, Vorlesungen über Wellenmechanik; Carathéodory, Ueber den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem satze der Variationsrechnung, sitz. Ber. München, math. Abt. 1926, blz. 1; Frank, Ph. Über die Eikonalgleichung in allgemein anisotropen Medien, Ann. d. Phys. **84** (1927) 891.

Men zou uit deze vgln. enige q_i kunnen oplossen en substitueren in F, waardoor men tot een minimumprobleem zonder nevenvoorwaarden zou teruggekeerd zijn. Het aantal veranderliken zou alleen verminderd zijn.

Meer symmetries is de bekende methode waarbij ingevoerd worden de zgn. *multiplikatoren van* LAGRANGE λ_e en dan naar een extremum gevraagd wordt van

$$F + \Sigma\lambda_e V_e$$

waarbij de λ_e als (onbekende) konstanten te behandelen zijn. Men kan bewijzen dat de aan deze opgave, dus aan

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_e \lambda_e \frac{\partial V_e}{\partial q_i} = 0 \tag{23}$$

voldoende q_i juist de gezochte zijn. Daarbij moeten de λ_e geëlimineerd worden met behulp van (22). Voor het bewijs vgl. de leerboeken van differentiaalrekening [16]).

Op de gevallen van niet integreerbare differentiaalbetrekkingen in plaats van (22) (niet-holonome nevenvoorwaarden) zal hier niet ingegaan worden [17]).

Voorbeelden

C — *Thermodynamika*: evenwicht van fazen.

Wordt gevraagd naar het evenwicht van een stelsel van n fazen, die
x_i als massa,
u_i als inwendige energie en
v_i als volume hebben,

terwijl

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x_i &= x \text{ de totale massa,} \\ \Sigma u_i &= u \text{ de totale inw. energie, en} \\ \Sigma v_i &= v \text{ het totale volume} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

gegeven zijn, dan wordt de oplossing gevonden door

$$\eta\,(u_i, v_i, x_i) = \sum_i^{v} {}^{i}\, x_i\, \eta_i \left(\frac{u_i}{x_i}, \frac{v_i}{x_i}\right)$$

een max. te maken met als nevenvoorw. (24).

---

[16]) Bv. COURANT, Vorlesungen über Diff. u. Integralrechn. II, blz. 142.

[17]) Vgl. b.v. SCHERING, Ges. Werke I; blz. 193; verder NORDHEIM, Die Prinzipe der Mechanik, Handb. d. Phys. V.

De oplossing wordt

$$\frac{\partial\eta}{\partial u_i} = \lambda \qquad \frac{\partial\eta}{\partial v_i} = \mu \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \nu$$

waarin λ, μ en ν multiplikatoren van Lagrange zijn.

Met de uit de eerste en tweede hoofdwet volgende formules

$$T_i d\eta_i = dU_i + p_i dV_i, \quad \frac{\partial\eta_i}{\partial U_i} = \frac{1}{T_i}, \quad \frac{\partial\eta_i}{\partial V_i} = \frac{p_i}{T_i}$$

wordt dit:

$$\frac{1}{T_i} = \lambda \qquad \frac{p_i}{T_i} = \mu \qquad \frac{U_i - T_i\eta_i + p_iV_i}{T_i} = \nu \tag{25}$$

waarin met U_i en V_i is bedoeld resp. $\frac{u_i}{x_i}$ en $\frac{v_i}{x_i}$, d.w.z. de inwendige energie en het volume van de massa-eenheid.

E — *Elektrostatika* [18])

Zijn van een stelsel elektriese geleiders:

x_i meetkundige koördinaten, die de ligging bepalen;

q_i de ladingen,

dan wordt de evenwichtstoestand van zo'n stelsel door een extremum van de elektrostatiese energie bepaald, welke van de vorm $F(x_i, q_i)$ is.

Als nevenvoorwaarden kunnen optreden:

$$\Sigma' q_i = k', \ \Sigma'' q_i = k'' \text{ enz.}$$

welke sommen elk op enige der geleiders betrekking hebben. Voor aldus verbonden geleiders vindt men

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{26}$$

de potentialen zijn gelijk.

F — *Elektrodynamika: net van elektriese stromen* [19]).

De gelijkstroomverdeling in een net van geleiders wordt gegeven door

$$\Delta F \equiv \Delta \ \Sigma(\tfrac{1}{2}I^2r - KI) = 0 \tag{27}$$

waarin K en r resp. zijn de (gegeven) elektromotoriese kracht en de Ohmse weerstand van en I de (te variëren) gelijkstroomsterkte in elk der geleiders, terwijl de sommatie over alle geleiders is uit te strekken. Als nevenvoorwaarden moeten genomen worden

$$\textstyle\sum I = 0$$

voor elk vertakkingspunt, waarbij de som $\sum$ te nemen is over alle in één vertakkingspunt samenkomende geleiders.

---

[18]) Vgl. Livens, Theory of Electricity, § 138. Jeans, El. & Magn. Ch. IV.

[19]) Vgl. Livens, t.a.p., blz. 294. Jeans, t.a.p. Ch. IX.

(De multiplikatoren van Lagrange blijken de (negatieve) potentialen in de vertakkingspunten te zijn).

U i t b r e i d i n g *a*. Inplaats van gelijkstromen treden wisselstromen op. Het minimumprincipe blijft van kracht, mits men — de formules in Gotiese letters schrijvende — verstaat onder:

$$\mathfrak{J} = Ie^{i(pt+\delta)}$$

$$\mathfrak{W} = W' + iW'' \left(W' = r;\ W'' = Lp - \frac{1}{pC}\right)$$

$$\mathfrak{K} = Ke^{ipt}$$

waarbij I de amplitude van de wisselstroom, $2\pi/p$ de (konstant gedachte) periode van de optredende e.m.k. en wisselstromen, δ het fazeverschil van de stroom in een bepaalde geleider met de e.m.k., L de koëfficiënt van zelfinduktie, C de kapaciteit van een geleider.

Het is duidelik dat de stroomsterkte en de e.m.k. de reële gedeelten zijn van $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{K}$; evenzo blijken de potentialen in de vertakkingspunten de reële gedeelten te zijn van de (nu komplexe) multiplitakoren van Lagrange. Echter is in 't algemeen niet het reëele gedeelte van $\mathfrak{F}$ gelijk aan de energie E van het stelsel; dit is slechts dan het geval wanneer $W' = 0$ of $W'' = 0$.

U i t b r e i d i n g *b*. Behalve zelfinduktie kan men ook wederzijdse induktie der geleiders in aanmerking nemen. Men krijgt dan de stroomverdeling uit

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\mathfrak{W}_{\beta\gamma}\,\mathfrak{J}_\beta\,\mathfrak{J}_\gamma - \sum_{\beta}\mathfrak{K}_\beta\,\mathfrak{J}_\beta\right) = 0$$

A — *Elasticiteitsleer*: diskreet elasties stelsel.

Tot een gewoon minimumprobleem komt men eveneens door van het elastiese kontinuum over te gaan tot een diskreet elasties stelsel, d.w.z. een stelsel van een eindig aantal punten, die elasties aan elkaar gebonden zijn. De rol van de ξ kan nu overgenomen worden door een of meer indices i en q_i is nu de uitwijking van het i-de punt.

De potentiele energie wordt b.v. $\frac{1}{2}\Sigma c_i\,(q_i - q_{i-1})^2$.

De verdere uitwerking zij aan de lezer overgelaten.

B — *Mechanika*. De statiese evenwichtsvergelijkingen die men als grensgeval uit de vgln. van Lagrange verkrijgt wanneer alle snelheden $\equiv 0$ worden verondersteld, vormen eveneens een voorbeeld. Het bijbehorend minimumprincipe gaat over in:

$$\delta U = 0$$

Als nevenvoorwaarden kunnen hier optreden vgln. die het lopen van bepaalde punten langs bepaalde oppervlakken voorschrijven. De betekenis der multiplikatoren van Lagrange is daarbij dat ze de grootte der door die (absoluut glad gedachte) oppervlakken ondervonden krachten aangeven.

6 — Invloed van de orde der afgeleiden [20])

Met het oog op later te bespreken analogieën is het doelmatig hier te wijzen op de uitbreiding die de oplossingsvgln. van het minimumprobleem voor een enkelvoudige integraal ondergaan, wanneer de integrand F behalve eerste, ook hogere afgeleiden bevat:

$$F(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \ldots . \; q_i^{(r)}, \xi)$$

Men vindt op geheel analoge wijze — d.w.z. door te bedenken dat

$$\delta q_i^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{d\xi^r} \delta q_i$$

en door $r \times$ partiëel integreren — dat de oplossingsvergelijkingen nu luiden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} \ldots . + (-1)^r \frac{d^{(r)}}{d\xi^r} \frac{\partial F}{\partial q_i^{(r)}} = 0 \quad (28)$$

Voorbeelden van dergelijke problemen zijn:

1. Elastiese evenwichtsvraagstukken waarbij de buiging in aanmerking genomen wordt (de kromtestraal bevat 2e afgeleiden) [21]).

2. De beweging van een elektron in zijn eigen veld. Herglotz verkrijgt door reeksontwikkeling afgeleiden van elke orde; Lorentz beperkt zich tot niet hogere dan derde afgeleiden [22]).

3. De generalisatie door Königsberger gegeven voor de mechaniese bewegingsvergelijkingen, wanneer de L ook hogere afgeleiden bevat. [23])

We zullen op deze vraagstukken echter niet dieper ingaan, aangezien dat ons te ver van ons eigenlike thema voert.

7 — Enige speciale vormen van F

Met het oog op later te bespreken toepassingen „signaleren" we hier de volgende speciale vormen van F.

---

[20]) Vgl. bv. Hadamard, Leçons, blz. 134; Bolza, Vorl. blz. 153.

[21]) Born, Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie, Diss. Gött. 1907.

[22]) Herglotz, Gött. Nachr. 1903, Heft 6 blz. 1.; Lorentz, Electrons, § 37.

[23]) Königsberger, Ueber die allg. kinetischen Potentiale, J. f. Math. 1900, blz. 141; Die Prinzipien der Mechanik, Teubner 1901; Sitz. ber. Preuss. Akad. 1904, blz. 1342, id. 1905 I, blz. 250.

1°. $F \equiv \Phi - \sum_i Q_i q_i$

waarbij de Q_i gegeven konstanten of funkties der ξ_λ zijn, en de Φ al dan niet de q_i expliciet bevat. Men gaat gemakkelik na welke wijzigingen door deze vorm van F in de vergelijkingen van Euler aangebracht moeten worden.

De betekenis der Q_i moge blijken uit de volgende voorbeelden:

$\nu = 0$. Hierbij zal de Φ ook van q afhangen, anders is er van een extremum in de gewone zin geen sprake.

C — *Thermodynamika*: evenwicht bij gegeven druk en temperatuur;
Φ inwendige energie u van een stelsel,
q_1 het (negatief genomen) volume v,
q_2 de entropie η,
Q_1 de druk p,
Q_2 de temperatuur T,
dan is F de thermodynamiese potentiaal, die bij gegeven druk en temperatuur naar een maximum streeft. Dus is

$$p = -\frac{\partial u}{\partial v}\ ,\quad T = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

E — *Elektrostatika*: evenwicht van een stelsel geleiders;
Φ elektrostatiese energie,
q_i de ladingen van de geleiders,
Q_i de potentialen,
dan wordt F tot een extremum bij gegeven potentialen.

Het verband tussen dit vraagstuk en het op blz. 16 behandelde met gegeven ladingen heeft grote analogie met het verband tussen de randvoorwaarden bij binding door gegeven krachten en binding door gegeven uitwijkingen aan de uiteinden.

$\nu = 1$. **B.** *Mechanika*. Blijft men onder F de funktie van Lagrange verstaan, dan kan de som ΣQq daarbij komen tengevolge van een uitwendig krachtveld met kracht $-Q$.

Heeft Q de speciale eigenschap dat hij slechts van nul verschillend is op de tijdstippen ξ_0 en ξ_1, en dan oneindig groot van de eerste orde is („stoot”), dan is het bijgevoegde gedeelte identiek met I^* van (19), toegevoegd om als natuurlike randvoorwaarden de vgln. (20) te verkrijgen; dan is nl.:

$$-\int_{\xi_0}^{\xi_1} Qq d\xi = P_1 q_1 - P_0 q_0$$

$\nu \geq 1$. **A.** *Elasticiteitsleer*. Ook hier hebben de $-Q$ de betekenis van een uitwendig krachtveld.

Voor het geval dat men met een isotroop elasties kontinuum te doen heeft, komen dan in de Φ alleen $q_{i\lambda}$ en geen q_i of ξ_λ voor. (Vgl. (7).)

G — *Elektrodynamika*. De F waaruit de elektrodynamiese veldvergelijkingen afgeleid worden volgens het principe van Schwarzschild zijn steeds van de aangegeven vorm. Daarbij zijn de Q_i identiek met de grootheden ς_i, de stroomkomponenten. Vgl. (11).

2° — Kwadratiese funkties

Op verschillende manieren kunnen kwadratiese funkties in de besproken problemen optreden, waardoor bepaalde vereenvoudigingen mogelik worden, die we bij de verschillende theorema's zullen vermelden. Voor een goed overzicht noemen we deze gevallen nog even.

$\nu = 0$. **E.** *Elektrostatika*: de elektrostatiese energie van een stelsel geleiders is steeds:

$$F = \sum_i \sum_k c_{ik}\, q_i\, q_k \tag{29}$$

waarbij de c_{ik} nog van de x der geleiders (blz. 16) kunnen afhangen.

$\nu = 1$. **B.** *Mechanika*. De kinetiese energie T is steeds kwadraties in de $\dot{q}_i$; komen in de vergelijkingen (8) de t niet expliciet voor, dan is T **homogeen** kwadraties; men spreekt dan van een *skleronoom* stelsel.

$\nu \geq 1$. **A.** *Elasticiteit*. Voldoet het beschouwde kontinuum aan de wet van Hooke, dan is de elastiese energie homogeen kwadraties in de $q_{i\lambda}$.

G — *Elektrodynamika*. De F waaruit de veldvergelijkingen afgeleid kunnen worden, zijn kwadraties in de $q_{i\lambda}$ ($= A_{i\lambda}$).

HOOFDSTUK II

RECIPROCITEITSBETREKKINGEN

8 — We bespreken in dit hoofdstuk een kategorie van betrekkingen die zich laten afleiden uit minimumvraagstukken waarbij F de vorm heeft:

$$F = \Phi - \Sigma i\, Q_i\, q_i$$

waarin de Q_i gegeven konstanten zijn. De hier af te leiden betrekkingen leggen verband tussen variaties van deze konstanten en de daarmee samenhangende variaties der q_i.

Het schijnt ons doelmatig, hier te beginnen met de problemen waarin

$\nu = 0$. **Funktie van een eindig aantal veranderliken.** Denken we ons de Q_i gevariëerd met een bedrag ΔQ_i en de q_i met Δq_i, dan is

$$\Delta F = \Delta\Phi - \Sigma\, Q_i\, \Delta q_i - \Sigma\, q_i\, \Delta Q_i$$

Nu is echter $\Delta\Phi - \Sigma\, Q_i\, \Delta q_i = 0$

omdat de q_i voldoen aan $\delta F = 0$ waarin δ elke willekeurige variatie der q_i betekent waarbij de Q_i niet gevariëerd worden. We houden dus over:

$$\Delta F = -\Sigma\, q_i\, \Delta Q_i$$

Passen we nu een tweede van Δ onafhankelike variatie Δ' toe, dan is

$$\Delta'\Delta F = -\Sigma \Delta' q_i\, \Delta Q_i \tag{30}$$

omdat $\Delta'\Delta Q_i = 0$; tevens is, wegens die onafhankelikheid van Δ en Δ':

$$\Delta\Delta' F = \Delta'\Delta F \tag{31}$$

Uit (30) en (31) volgt:

$$\Sigma\, \Delta' q_i\, \Delta Q_i = \Sigma\, \Delta q_i\, \Delta' Q_i \tag{32}$$

Kiezen we nu ΔQ_i zó dat alle $\Delta Q_i = 0$ behalve ΔQ_k; $\Delta' Q_i$ zó dat alle $\Delta' Q_i = 0$ behalve $\Delta' Q_l$, dan is dus:

$$\Delta' q_k \, \Delta Q_k = \Delta q_l \, \Delta' Q_l \text{ of}$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \tag{33}$$

Een overzichtelike samenvatting van deze afleiding geven de formules:

$$\Delta F \equiv \Delta(\Phi - \sum_1^n{}_i \, Q_i \, q_i) = - \sum_1^n{}_i \, q_i \, \Delta Q_i$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$$

waaruit tevens duidelik wordt dat men nog analoge betrekkingen kan vinden door uit te gaan van

$$\Delta \Phi = \sum_1^n{}_i \, Q_i \, \Delta q_i \tag{34}$$

en van alle tussenvormen:

$$\Delta(\Phi - \sum_1^k{}_i \, Q_i \, q_i) = \sum_{k+1}^n{}_i \, Q_i \, \Delta q_i - \sum_1^k{}_i \, q_i \, \Delta Q_i \tag{35}$$

Uit (34) en (35) leidt men nl. af resp.

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \quad (36) \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = - \frac{\partial q_l}{\partial q_k} \tag{37}$$

Voorbeelden: **C** — *Thermodynamika: Reciprociteitsbetrekkingen van* MAXWELL.

Verstaat men onder

Φ de inwendige energie van een thermodynamies stelsel;

q_1 het negatieve volume v,

q_2 de entropie η,

Q_1 de druk p en

Q_2 de temperatuur T, dan gaan bovengegeven reciprociteitsbetrekkingen over in de bekende vergelijkingen van Maxwell:

$$\frac{\partial \eta}{\partial p} = - \frac{\partial v}{\partial T} \; ; \; \frac{\partial T}{\partial v} = - \frac{\partial p}{\partial \eta} \; ; \; \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial T} \; , \; \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \tag{38}$$

Men kan hier ook zeer goed gevallen met meer dan twee q's beschouwen, q_3 kan b.v. zijn elektriese lading, q_4 magnetisatie, enz. De vgln. van Maxwell kunnen zodoende met analoge voor deze q's worden uitgebreid.

E — *Elektrostatika.* (Vgl. blz. 16). Is K_i de mechaniese kracht die een der geleiders ondervindt in de richting van x_i, dan is $\frac{\partial K_i}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}$; verder is

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_k} = \frac{\partial K_k}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \tag{39}$$

Beschouwt men een deel der q_i en een deel der Q_i als onafhankelik veranderliken, dan is:

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} \tag{40}$$

D — *Optika*

Gaat een lichtstraal door twee punten P_0 en P_1 met rechthoekige koördinaten q_i^0 en q_i^1, in de richtingen met richtingskosinussen λ_i^0 en λ_i^1, en zijn de lichtsnelheden voor de media van P_0 en P_1 resp. c_0 en c_1 dan geldt

$$\frac{\partial}{\partial q_i^1}\left(\frac{\lambda_i^0}{c_0}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_i^0}\left(\frac{\lambda_i^1}{c_1}\right) \tag{41}$$

Voor de afleiding vergelijk blz. 13. Voor literatuur zie men de beschouwingen van Hamilton, Bruns, Klein over het zgn. „eikonaal'' E dat met de lichttijd Ω samenhangt door de formule

$$E = \Omega + \frac{\rho_0}{c_0} - \frac{\rho_1}{c_1}$$

waarbij ρ_0 en ρ_1 resp. zijn de afstanden langs de lichtstraal gemeten van P_0 resp. P_1 tot voorwerp en beeld [24]).

9 — Gevallen $\nu > 0$: integralen

We hebben hier dus een variatieprobleem waarbij

$$I = \int_G \dots \int d\omega \, (\Phi - \Sigma \, Q_i \, q_i)$$

en denken ons weer een variatie Δ toegepast:

$$\Delta I = \int_G \dots \int d\omega \, (\Delta\Phi - \Sigma \, Q_i \, \Delta q_i - \Sigma q_i \, \Delta Q_i)$$

Wederom is om gelijke redenen als in § 8,

$$\int_G \dots \int d\omega \, (\Delta\Phi - \Sigma \, Q_i \, \Delta q_i) = 0$$

zodat we houden:

$$\Delta I = -\int \dots \int d\omega \, \Sigma \, q_i \, \Delta Q_i \tag{42}$$

---

[24]) Zie ook F. Klein, Ges. Abh. II, blz. 607.

Passen we hierop een tweede variatie Δ', onafhankelik van Δ, toe, en bedenken, dat tengevolge van die onafhankelikheid $\Delta'\Delta Q_i =$ $= 0$, $\Delta\Delta' Q_i = 0$ en $\Delta'\Delta I = \Delta\Delta' I$, dan krijgen we:

$$\int\!\!\ldots\!\!\int_G d\omega\, \Sigma\, (\Delta q_i\, \Delta' Q_i - \Delta' q_i\, \Delta Q_i) = 0 \qquad (43)$$

Kiezen we hierin speciaal

alle $\Delta Q_i = 0$ behalve ΔQ_k in een oneindig klein gebied rondom $(\xi_1 \ldots . \xi_n)$

alle $\Delta' Q_i = 0$ behalve $\Delta' Q_l$ in een oneindig klein gebied rondom $(\xi_1' \ldots . \xi_n')$ en noemen we:

$$\int\!\!\ldots\!\!\int_G d\omega\, \Delta Q_k = \Delta\mathfrak{Q}_k \quad \text{en} \quad \int\!\!\ldots\!\!\int_G d\omega\, \Delta' Q_l = \Delta'\mathfrak{Q}_l,$$

dan wordt (43):

$$\Delta q_l\, (\xi_1' \ldots \xi_n') \,.\, \Delta'\mathfrak{Q}_l = \Delta' q_k\, (\xi_1 \ldots \xi_n) \,.\, \Delta\mathfrak{Q}_k \qquad (44)$$

De betekenis van deze reciprociteitsbetrekking is voor *statiese* problemen duidelik: ze drukt de evenredigheid uit tussen de „oorzaken" $\Delta\mathfrak{Q}_k$ en $\Delta'\mathfrak{Q}_l$ en de „gevolgen" $\Delta q_l(\xi')$ en $\Delta' q_k(\xi)$.

Voor *dynamiese* problemen, waarbij dan b.v. ξ_n de tijd voorstelt en $\xi_n' > \xi_n$, kan men wel $\Delta q_l(\xi')$ het gevolg noemen van de oorzaak $\Delta\mathfrak{Q}_k(\xi)$, echter niet zonder meer ook $\Delta' q_k(\xi)$ het gevolg van $\Delta'\mathfrak{Q}_l(\xi')$. We hebben hier dus eigenlik nog niet te doen met een betrekking zoals men ze redelikerwijs zou wensen: nl. een evenredigheid tussen gevolgen op het ogenblik ξ_n' en de plaatsen ξ resp. ξ' en oorzaken op het ogenblik ξ_n en de plaatsen ξ' resp. ξ.

Tot nu toe is, voorzover ik kon nagaan, alleen door HELMHOLTZ [25]) aan dit bezwaar tegemoetgekomen doordat hij zgn. *reversibele* verschijnselen beschouwt, d.z. verschijnselen die ook in omgekeerde opeenvolging in de tijd kunnen optreden. Formeel betekent dat dat alle afgeleiden naar de tijd van teken kunnen veranderen, zonder dat de formules onjuist worden. In het minimumprincipe mogen dan die afgeleiden in 't algemeen niet lineair voorkomen. Voor dergelijke verschijnselen kan men dan in de grootheden $\Delta' q_k$ en $\Delta' Q_l$ als laatste argument lezen ξ'_n resp. ξ_n in plaats van omgekeerd en neemt (44) de gewenste vorm aan.

---

[25]) VON HELMHOLTZ, Die physikalische Bedeutung des Prinzips d. kl. Wirkung, Wiss. Abh. III, blz. 238.

Voor verschijnselen waar dit niet het geval is, zal de bovengegeven afleiding niet bruikbaar zijn en „direkte" afleiding — die ondertussen heel wat gekompliceerder kan zijn — nodig zijn. Van zo'n direkte afleiding geven we in 't aanhangsel een eenvoudig voorbeeld (vgl. § 20).

Opmerking. De punten ξ en ξ' mogen zowel „binnen" in G als in het randgebied g genomen worden.

Bovendien kan de afhankelikheid der ΔQ van ξ nog op biezondere wijze gekozen worden, waardoor de integralen $\Delta\mathfrak{Q}$ degenereren tot lagere integralen. De betekenis hiervan moge blijken uit het volgende voorbeeld.

B — *Mechanika: Reciprociteitsbetrekkingen van* HELMHOLTZ [26]).

De boven gegeven vergelijkingen zijn toepasselik op de mechanika, wanneer we enkelvoudige integralen beschouwen. Daarbij kunnen we de Q_i als volgt kiezen:

$$Q_i = K_i + P_i$$

waarbij de K_i in het gehele interval $\xi_0 < \xi < \xi_1$ bestaan en de betekenis hebben van uitwendige krachten, die op het systeem werken; terwijl de P_i alleen van nul verschillen in de punten ξ_0 en ξ_1 en daar oneindig groot van de eerste orde worden, zodat

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\Phi - \sum_i K_i q_i)\, d\xi - P_{i1} q_{i1} + P_{i0} q_{i0}$$

(Men vgl. deze formulering met de tweede op blz. 13 gegeven).

Kiezen we nu in de eerste plaats alle $\Delta K = 0$ dan krijgen we reciprociteitsbetrekkingen die uitsluitend betrekking hebben op randwaarden.

Op de zoeven genoemde gronden wordt nu:

$$\Delta\mathfrak{Q}_k = \Delta P_k(\xi)$$

$$\Delta'\mathfrak{Q}_l = \Delta P_l(\xi')$$

en de reciprociteitsbetrekkingen worden:

$$\Delta q_l(\xi') \,.\, \Delta' P_l(\xi') = \Delta' q_k(\xi) \,.\, \Delta P_k(\xi)$$

---

[26]) v. HELMHOLTZ, t.a.p.

Hierin stellen voor:

$\Delta q_l(\xi')$ de variatie van q_l in het punt ξ' tengevolge van een variatie ΔQ_k van Q_k in ξ;

$\Delta' q_k(\xi)$ de variatie van q_k in het punt ξ tengevolge van een variatie $\Delta' Q_l$ van Q_l in ξ'.

Zowel ξ als ξ' kan nog zijn ξ_0 of ξ_1, waardoor drie typen van reciprociteitsbetrekkingen ontstaan:

$$\frac{\Delta q_{l0}}{\Delta P_{k0}} = \frac{\Delta' q_{k0}}{\Delta' P_{l0}}\,; \quad \frac{\Delta q_{l1}}{\Delta P_{k0}} = -\frac{\Delta' q_{k0}}{\Delta' P_{l1}}\,; \quad \frac{\Delta q_{l1}}{\Delta P_{k1}} = \frac{\Delta' q_{k1}}{\Delta' P_{l1}}$$

In de tweede plaats kunnen we alle $\Delta P = 0$ kiezen waardoor we reciprociteitsbetrekkingen krijgen voor punten in 't binnenste onderling.

In de derde plaats tenslotte kunnen we „gemengde" betrekkingen krijgen van de vorm:

$$\Delta q_l(\xi') \,.\, \Delta' \mathfrak{Q}_l = \Delta' q_k(\xi) \,.\, \Delta P_k(\xi) \tag{45}$$

waarin

$$\Delta' \mathfrak{Q}_l = \int d\xi \,.\, \Delta' K_l$$

dus een stoot voorstelt; verandering van de begin- ef eindmomenten P heeft dus een uitwerking van dezelfde orde van grootte als een stoot, zoals men verwachten moest.

We willen er tenslotte nog op wijzen dat de ΔQ_i der elektrodynamika, d.z. de Δs_i, niet volkomen willekeurig in de $\xi_1 - \xi_4$ ruimte kunnen gekozen worden, maar dat voldaan moet zijn aan de wet van het behoud van „rustlading":

$$\sum_1^4 i \, \frac{\partial \Delta s_i}{\partial \xi_i} = 0$$

Zoals reeds aangegeven op blz. 9, kan men hieraan voldoen door te kiezen de Δs van formule (14). Na enige voor de hand liggende omrekeningen komt men dan tot de betrekking

$$\Delta K_m(\xi') \,.\, \Delta' \mathfrak{X}_m(\xi') = \Delta' K_l(\xi) \,.\, \Delta \mathfrak{X}_l(\xi)$$

waarin: $\Delta \mathfrak{X} = \int .. \int d\omega \; \Delta x$, en

$K_m = - \sum_i s_i \, F_{mi}$ de „*Lorentz*-kracht" is, terwijl Δx (en dus Δs) „gelokaliseerd" gedacht zijn in ξ, $\Delta' x$ (en $\Delta' s$) in ξ'.

10 — Kwadratiese funkties

$\nu = 0$. Wanneer de q homogeen lineaire funkties der Q zijn, geldt:

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{q_k(l)}{Q_l} \tag{46}$$

waarin we met $q_k(l)$ bedoelen de waarde die q_k heeft, wanneer alle Q nul zijn behalve Q_l. Dientengevolge hebben we dan naast (33) ook:

$$\frac{q_k(l)}{Q_l} = \frac{q_l(k)}{Q_k} \tag{47}$$

d.w.z. de *reciprociteitsbetrekkingen gelden behalve voor de variaties ook voor de waarden der q_i zelf.*

Dit geval zal zich voordoen, wanneer de Φ in q homogeen kwadraties is, daar dan de vergelijkingen van Euler worden:

$$Q_i = \sum_k c_{ik}\, q_k \tag{48}$$

Voorbeelden: het elektrostatiese vraagstuk van blz. 20, de stroomverdeling in een net van geleiders (blz. 16).
Voor een meer direkte afleiding vgl. het aanhangsel, § 18.

$\nu \geq 1$. Ook voor minimumproblemen waarbij een integraal een extremum wordt zijn er dergelijke reciprociteitsbetrekkingen voor de gevallen waarin F homogeen kwadraties is in de $q_{i\lambda}$.

Men vindt nl. (zie aanhangsel, § 18) onder zekere randvoorwaarden:

$$\int \ldots \int d\omega \sum Q_i' \, q_i'' = \int \ldots \int d\omega \sum Q_i'' \, q_i' \tag{49}$$

Hierin kan men weer alle Q_i' overal $= 0$ nemen, behalve Q_k' in het punt ξ', eveneens alle Q_i'' overal $= 0$ behalve Q_l'' in het punt ξ'', en invoeren de notatie

$$\int \ldots \int d\omega Q'_k = \mathfrak{Q}'_k \qquad \int \ldots \int d\omega Q_l'' = \mathfrak{Q}_l''$$

waardoor (49) wordt:

$$q_k''(\xi')\, \mathfrak{Q}_k' = q_l'(\xi'')\, \mathfrak{Q}_l''.$$

Statiese problemen. Voor de elektrostatika en b.v. de statika van een niet-relativisties zwaarteveld betekent bovengenoemde betrekking niet anders dan de symmetrieeigenschap van de funktie van GREEN. (Vgl. bv. Riemann

Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, I blz. 241, 336). In deze gevallen immers betekent $\mathfrak{Q}$ de lading (ev. zware massa), q de potentiaal; bij gelijke $\mathfrak{Q}$'s wordt de laatste vergelijking $q''(\xi') = q'(\xi'')$.

Voorbeelden:

A' — *Dynamika van een elasties kontinuum.*

$\mathfrak{Q}_k'$ is een stoot in de richting k op het tijdruimtepunt ξ', $\mathfrak{Q}_l''$ een stoot in de richting l op het tijdruimtepunt ξ''. De uitwijkingen die „tengevolge daarvan" (vgl. blz. 24) optreden in de punten ξ'' in de richting l en ξ' in de richting k zijn dus evenredig met die stoten.

Vgl. ook Rayleigh, Theory of Sound II p. 145 die deze stelling geeft voor het geval dat

$$F = \left(\frac{\partial q}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)^2 - \frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - qQ$$

waarbij bovendien een sinusoïdale kracht en oplossing: $Q = A \sin pt$, $q = \alpha \sin pt$ vooropgesteld is, waardoor de differentiaalvergelijkingen worden $\triangle q + k^2 q = Q$.

Wij wijzen er nog op dat men bij deze speciale veronderstelling de gevallen „met wrijving" d.i. met een term $\beta \frac{\partial q}{\partial t}$ in de differentiaalvgl. toch ook op de bovengenoemde vorm kan brengen, als men nl. k komplex neemt.

G — *Elektrodynamika.* Bij toepassing van de formule (49) moet men — behalve kwesties van randwaarden — hier weer de moeilikheid oplossen, dat de s niet overal vrij gekozen kan worden. Ik ben er niet in geslaagd deze moeilikheid volkomen bevredigend op te lossen en volsta dus met er op te wijzen.

De zo te vinden reciprociteitsbetrekkingen zullen echter waarschijnlik niet gelijkluidend zijn met door Lorentz [27]) aangegeven betrekkingen, welke een asymmetrie t.o.v. de tijdkoördinaat vertonen.

---

[27]) H. A. Lorentz, Versl. A'dam IV (1895).

HOOFDSTUK III

ANDERE FORMULERINGEN VAN DE BESCHOUWDE PROBLEMEN ALS MINIMUMPROBLEMEN

11 — De in het eerste hoofdstuk besproken vraagstukken laten zich veelal op meer dan één wijze als minimumvraagstuk formuleren. We willen in dit hoofdstuk enige andere formuleringen aangeven.

Funktie van een eindig aantal veranderliken

Van deze kategorie bespreken we hier alleen de vraagstukken van de speciale vorm:

$$F = \Phi - \Sigma\, Qq$$

waarvan de oplossingen waren (§ 7):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} - Q = 0 \tag{51}$$

Veronderstellen we, dat deze vgln. oplossing toelaten naar de q_i en dat die oplossingen luiden

$$q_i = f_i(Q)$$

Vormen we hiermee de funktie $\Psi(Q)$ door in F alle q_i te vervangen door $f_i(Q)$, dan is

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} = \Sigma\, \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}\, \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} - \Sigma\, Q_k\, \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} - f_i = - f_i$$

waardoor de oplossingsvgl. zich ook laat schrijven

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial Q_i} = q_i$$

en dus het vraagstuk als

$$\delta K \equiv \delta(\Psi + \Sigma\, qQ) = 0$$

waarin de Q veranderlik en de q konstanten zijn.

Voorbeelden. C — *Thermodynamika.* Voor het evenwicht van een thermodynamies stelsel zijn o.a. twee formuleringen mogelik:

a) bij konstante druk en temperatuur wordt de thermodynamiese potentiaal een minimum.

b) bij konstant volume en inwendige energie wordt de entropie een maximum.

Deze twee formuleringen worden door bovenstaande formules gegeven, als men — in tegenstelling tot blz. 16 — zet voor: $F : -\frac{\zeta}{T}$; $\Phi : \eta$; $\dot{q}_1 : u$; $q_2 : v$; $Q_1 : \frac{1}{T}$; $Q_2 : \frac{p}{T}$.

Opmerking. De „nieuwe" funktie K is met de oude F op het teken na identiek wanneer Φ homogeen kwadraties is in de q, zoals in de elektrostatika (§ 7).

12 — Enkelvoudige integralen

De mogelike andere formuleringen van de hier bedoelde problemen worden het eenvoudigst ingezien en verkregen na transformatie van de oorspronkelike differentiaalvgln. Deze transformatie bespreken we daarom eerst.

Transformatie van ROUTH [28]).

De oorspronkelike differentiaalvgln. luiden:

$$\Gamma_i \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots . n \tag{52}$$

definiëren we nu

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1 \ldots . k \tag{53}$$

en vormen de zgn. *funktie van* ROUTH:

$$R(q_1 \ldots q_n; p_1 \ldots p_k, \dot{q}_{k+1} \ldots \dot{q}_n, \xi) = [-F(q_i, \dot{q}_i) + \sum_1^k{}^j p_j \dot{q}_j]_{\dot{q}_j = f_j} \tag{54}$$

waarbij in de rechterzijde alle $\dot{q}_j$ zijn vervangen door de funktie $f_j(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_k, \dot{q}_{k+1} \cdots \dot{q}_n, \xi)$, die men verkrijgt door (53) naar $\dot{q}_j$ op te lossen:

$$\dot{q}_j = f_j \tag{55}$$

[28]) Vgl. E. J. ROUTH, Dynamik I, 395; K. HEUN, Enz. der Math. Wiss. IV, 2, blz. 453; M. WINKELMANN und R. GRAMMEL, Hb. der Phys. V, blz. 469.

Nu zijn gelijkwaardig met de oorspronkelike n differentiaalvgln. (52) + de „definitievgln." (53) de *„differentiaalvgln.van* ROUTH":

$$\frac{\partial R}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (56') \qquad \frac{\partial R}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \qquad j = 1 \ldots k \quad (56'')$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_l} = 0 \qquad l = k+1, \ldots . n \quad (57)$$

Bewijs:

$$\frac{\partial R}{\partial p_j} = -\sum_1^k {}^m \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m}\frac{\partial f_m}{\partial p_j} + \dot{q}_j + \sum_1^k {}^m p_m \frac{\partial f_m}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} - \sum_1^k {}^m \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m}\frac{\partial f_m}{\partial q_j} + \sum_1^k {}^m p_m \frac{\partial f_m}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}$$

en dit is volgens (52)

$$= -\frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j.$$

Op volkomen analoge wijze vindt men dat

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} = -\frac{\partial F}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_l} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}$$

waaruit de vgln. (57) volgen.

Opmerking 1. In de boven gegeven beschouwingen mag ook $k = n$ zijn, zoals men gemakkelik inziet. De differentiaalvgln. worden dan alle van de vorm (56) die men de kanoniese vorm (resp. de k a n o n i e s e v e r g e l ij k i n g e n) noemt. Histories is deze transformatie voor $k = n$ het eerst uitgevoerd. Dan wordt

$$R = H\,(q_1 \ldots q_n,\ p_1 \ldots p_n,\ \xi) = -F + \sum_1^n {}^j p_j \dot{q}_j \qquad (58)$$

(in de mechanika de zgn. *funktie van* HAMILTON) en in de vgln. (56) is dan R door H vervangen. Een belangrijk voordeel van de funktie H is, dat daarin als veranderliken geen afgeleiden meer optreden.

Opmerking 2. Natuurlik kan men in plaats van „de eerste k" ook elk willekeurig k-tal koördinaten nemen.

13 — Andere formuleringen als minimumprobleem [29])

De differentiaalvergelijkingen van Routh en van Hamilton laten zich ook direkt verkrijgen als vergelijkingen van EULER bij minimumproblemen. Aangezien in die differentiaalvergelijkingen ook p en $\dot{p}$ voorkomen, moet men hier een minimumprincipe verwachten waarin zowel de p als de q voorkomen en waarbij deze onafhankelik van elkaar gevariëerd worden. Variatie toch van de q alleen terwijl de p als een funktie van q en $\dot{q}$ wordt opgevat zou neerkomen op het uitvoeren van de oorspronkelike formulering als minimumvraagstuk, slechts in andere notatie.

We vragen daarom naar de funktie K waarvoor het probleem

$$\Delta I = \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi\, K(q_i, \dot{q}_i, p_j, \dot{p}_j, \xi) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots k) \tag{59}$$

oplevert de differentiaalvgln. van Routh (56, 57). Bij de bespreking daarvan is het doelmatig de q_j $(j = 1 \ldots k)$ en de q_l $(l = k+1 \ldots n)$ goed van elkaar te onderscheiden; voor q_l schrijven we daarom r_l.

We stellen het probleem iets specialer door te verlangen, dat

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial R}{\partial q_j} + \dot{p}_j$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial \dot{p}_j} \equiv \frac{\partial R}{\partial p_j} - \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial K}{\partial r_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial K}{\partial \dot{r}_l} \equiv \frac{\partial R}{\partial r_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}_l}.$$

Ik vermocht dit probleem niet algemeen op te lossen; het is echter duidelik, dat aan de vgln. voldaan wordt door elke K van de vorm:

$$K = \sum_1^k{}_m \left[\left(\frac{\partial D}{\partial q_m} - \frac{p_m}{2}\right)\dot{q}_m + \left(\frac{\partial D}{\partial p_m} + \frac{q_m}{2}\right)\dot{p}_m\right] + R + \text{const.}$$

waarin D een willekeurige funktie van de p's en de q's is. Voor het grensgeval $k = n$ waarbij de vergelijkingen van Hamilton door (59) geleverd moeten worden, is R te vervangen door H.

---

[29]) Vgl. J. DROSTE, Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik. Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924.

Enige meermalen voorkomende vormen van D met de daarbij behorende K en de randvoorwaarden die men kan stellen, zijn:

D	K	Randvoorwaarden
$-\frac{1}{2}\sum_1^k p_l q_l$	$-\sum_1^k p_l \dot{q}_l + R$	$\Delta q_{l0} = \Delta q_{l1} = 0$
$+\frac{1}{2}\sum_1^k p_l q_l$	$+\sum_1^k \dot{p}_l q_l + R$	$\Delta p_{l0} = \Delta p_{l1} = 0$
0	$-\frac{1}{2}\Sigma(p_l \dot{q}_l - \dot{p}_l q_l) + R$	$\Delta(p_{l0}/q_{l0}) = \Delta(p_{l1}/q_{l1}) = 0.$

Voorbeeld: B. Mechanika

Het is speciaal in de mechanika dat de besproken transformaties het eerst hebben plaats gehad. De grootheden

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{60}$$

worden hier genoemd *momenten;* de namen „funktie van ROUTH" en „funktie van HAMILTON" worden speciaal voor de mechanika gebruikt.

Aan de grote betekenis van de vergelijkingen van HAMILTON moge slechts herinnerd worden door het noemen van enige literatuur over dit onderwerp [30]). Speciaal voor de beweging van elektronen in een elektromagneties veld (vgl. blz. 8) hebben ook de vergelijkingen van HAMILTON veel toepassing gevonden [31]).

De definitie van H maakt mogelik de randtermen van ΔI eenvoudiger te schrijven (vgl. (18))

$$\Delta I = \left[H\,\Delta\xi + \sum_1^n {}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\,\Delta q_i \right]_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \sum_i \Gamma_i\,\Delta q_i \tag{61}$$

waarin Γ_i de linkerzijde van de vergelijkingen van LAGRANGE voorstelt (52).

[30]) Zie b.v. FUES, Störungstheorie, Handb. d. Physik V, blz. 131; BORN, Atommechanik.

[31]) Vgl. b.v. SOMMERFELD, Phys. ZS. **17** (1916), blz. 498; DEBIJE, Phys. ZS. **17** (1916) blz. 513; BURGERS, Het Atoommodel van Rutherford-Bohr (1918); P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. 111 (1926), blz. 411; W. GORDON, ZS. f. Phys. **40** (1927), blz. 117; O. KLEIN, ZS. f. Phys. **41** (1927), blz. 407.

Van de genoemde andere minimumformuleringen zijn er in de mechanika slechts weinige gebruikelik; voornamelijk het *minimumprincipe van* HELMHOLTZ, dat de volledige kanoniese vergelijkingen levert:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} \partial\xi \; [H - \Sigma p\dot{q}] = 0 \tag{62}$$

We zagen reeds, dat het zich ook laat schrijven:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi [H + \Sigma \dot{p} q] = 0 \text{ of } \delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi [H - \tfrac{1}{2}\Sigma p\dot{q} + \tfrac{1}{2}\Sigma \dot{p} q) = 0$$

14 — Principe van Hilbert en principe van de kleinste werking [32])

Er zijn in de mechanika nog enkele andere formuleringen gebruikelik die voor biezondere gevallen grote waarde hebben, en uit het oorspronkelike principe als volgt kunnen afgeleid worden:

Voeg bij de integrand — wat natuurlik steeds geoorloofd is — een konstante, en wel H_0, de waarde, die H aan het begin van de beweging heeft. Daarmee wordt het principe:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (F + H_0) d\xi = 0 \tag{63}$$

en de randtermen (vgl. blz. 33)

$$\{(-H + H_0)\Delta\xi + \Sigma p \Delta q\}\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} = (-H_1 + H_0)\Delta\xi_1 + (\Sigma p \Delta q)\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} \tag{64}$$

waardoor in de randvoorwaarden over $\Delta\, \xi_0$ niet meer behoeft te worden gesproken.

De volgende biezondere gevallen zijn nu van belang:

1°. de uitdrukkingen (8) voor x_j bevatten de tijd niet expliciet; dan is $\dot{x}_j$ homogeen lineair in de $\dot{q}$, dus T homogeen kwadraties in de $\dot{q}$. Volgens de stelling van Euler is dan

$$2T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \Sigma p \dot{q} \tag{65}$$

dus:

$$H = -L + \Sigma p\dot{q} = U - T + 2T = E \tag{66}$$

als E de totale energie van het mechaniese stelsel voorstelt.

---

[32]) Vgl. ook PLANCK, Kultur der Gegenwart, (Physik), blz. 692; Voss, Enz. der math. Wiss. IV 1, blz. 1; NORDHEIM, Handb. d. Physik, blz. 76; v. HELMHOLTZ, t.a.p.

Ons principe (63) gaat dan over in:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (L + E_0)\, d\xi = 0 \qquad (67)$$

het *principe van* HILBERT [33]) dat in woorden aldus geformuleerd kan worden: van alle bewegingen met vaste beginenergie E_0 en vaste begin- en eindkoördinaten en vaste eindtijd is de natuurlike beweging diegene die bovenstaande voorwaarde vervult. Zo geformuleerd is het ekwivalent met het principe van Hamilton; alleen is in plaats van de vaste begintijd de vaste beginenergie gekomen.

Men kan de voorwaarde van de vaste eindtijd eveneens laten vallen, doch dan moet daarvoor in de plaats geëist worden:

$$-E_1 + E_0 = 0 \qquad (68)$$

dus: begin- en eindenergie gelijk en vast.

2°. Bovendien bevat de U de tijd niet expliciet. Dan is $\frac{dH}{d\xi} = \Sigma \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} + \Sigma \dot{q} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$, daar $\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$, we hebben met een konservatief stelsel te doen. In plaats van E_0 kan nu geschreven worden E, en ons principe (67) gaat over in:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} (L + E)\, d\xi = 0$$

of

$$\delta\, 2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} T\, d\xi = 0 \qquad (69)$$

het zgn. *„principe van de kleinste werking"*, waarbij als randvoorwaarden nu, daar nu aan (68) voldaan is, alleen de $\Delta q = 0$ voor begin- en eindstand geëist behoeven te worden. De duur der bewegingen waarmee vergeleken wordt kan dus willekeurig zijn; de energie kan echter niet gevariëerd worden.

Neemt men in bovenstaande formule als onafhankelik veranderlike de afgelegde weg s in plaats van de tijd — geoorloofd als de snelheid voortdurend dezelfde is — dan levert het principe (69) de *geodetiese lijn*.

15 — Integrand met hogere afgeleiden

Van enkele der bovenverkregen resultaten willen we de analoga — voor zover ze te vinden zijn — vermelden voor het eenvoudigste geval met hogere afgeleiden (vgl. blz. 18).

Om tot een funktie H te geraken die slechts afgeleiden van één orde lager bevat dan de F, is het nu nodig, twee soorten p's in te voeren, nl.:

$$p_i^0 = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (70)$$

en

$$p_i^1 = \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (71)$$

[33]) Vgl. L. NORDHEIM und E. FUES, Die Hamilton-Jacobische Theorie, Handb. d. Physik V, blz. 118.

Lost men nu $\ddot{q}_i$ op uit de laatste vgl. en vormt

$$H = [-F + \Sigma p^0 \dot{q} + \Sigma p^1 \ddot{q}]_{\ddot{q}=g} \tag{72}$$

waarin weer $\ddot{q}$ vervangen is door de daarvoor gevonden funktie $g(p^1, q, \dot{q})$, dan leidt men gemakkelik of de *„kanoniese vergelijkingen."* [34])

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}^0 & \dfrac{\partial H}{\partial p^0} = \dot{q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}^1 & \dfrac{\partial H}{\partial p^1} = \ddot{q} \end{array}\right\} \tag{73}$$

Vraagstukken waarbij $F = \Phi - \Sigma Qq$

Men kan vragen in hoeverre de op blz. 29 genoemde „andere formulering" van het enkelvoudige minimumvraagstuk waarbij F de boven aangegeven vorm heeft, een analogon bezit voor de variatieproblemen van die gedaante.

Ter beantwoording van deze vraag zij gewezen op de formele overeenstemming tussen (I) dergelijke variatieproblemen en (II) het variatieprobleem zonder Q's voor integrand met afgeleiden van één orde hoger. Deze overeenstemming blijkt bij naast elkaar stellen van:

I	q	Q	p
II	$\dot{q}$	p^0	p^1

Evenals het nu bij geval II nodig was twee soorten p's in te voeren om tot de „andere formulering" van blz. 35 te geraken, is het in geval I nodig, in deze andere formulering zowel p èn Q te verwachten. Een formulering alleen met de Q's is onmogelik.

Voert men de reeds aangegeven (blz. 30) transformaties in geval I uit, dan komt men tot de „kanoniese" formules:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \qquad \frac{\partial H}{\partial Q} = q \tag{74}$$

waarin

$$H = [-\Phi + \Sigma Qq + \Sigma p\dot{q}]_{\dot{q}=f} \tag{75}$$

Komen geen $\dot{q}$ voor, dan gaan deze formules over in de in § 11 genoemde.

16 — Meervoudige integralen

De beschouwingen, gegeven onder 12 zijn, mutatis mutandis, ook op deze kategorie toepasselik. Ter wille van de leesbaarheid zullen we de afleiding slechts geven voor de kanoniese vergelijkingen. De oorspronkelike differentiaalvgln. luidden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_{1}^{\nu}{}_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} = 0 \qquad (i = 1 \ldots . n) \tag{6}$$

(voor de notatie zie blz. 1).

[34]) L. Königsberger, J. f. Math. **124** (1902), blz. 202 e.v.

We voeren nu in de grootheden:

$$p_{i\lambda} = \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \qquad (i = 1\ldots n,\ \lambda = 1\ldots\nu) \qquad (76)$$

en vormen de funktie

$$H(q_i, p_{i\lambda}) = [\sum_1^n{}_i \mathfrak{S}_1^\nu{}_\lambda\, p_{i\lambda}\, q_{i\lambda} - F]_{q_{i\lambda} = f_{i\lambda}} \qquad (77)$$

waarin alle $q_{i\lambda}$ zijn vervangen door de uitdrukkingen die men krijgt door de vgln. (76) op te lossen naar $q_{i\lambda}$:

$$q_{i\lambda} = f_{i\lambda}(p, q) \qquad (78)$$

We vinden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_1^n{}_i \mathfrak{S}_1^\nu{}_\lambda\, p_{i\lambda} \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_1^n{}_i \mathfrak{S}_1^\nu{}_\lambda \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial q_i} = - \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

en analoog:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i\lambda}} = q_{i\lambda}$$

waardoor de differentiaalvgln. en de „definitievgln." (76) vervangen kunnen worden door het daarmee gelijkwaardige stel

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\mathfrak{S}_1^\nu{}_\lambda \frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial \xi_\lambda} \quad (79) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{i\lambda}} = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\lambda} \quad (80)$$

$$(i = 1\ldots.n,\ \lambda = 1\ldots.\nu)$$

die we de **(gegeneraliseerde) kanoniese vergelijkingen** [35]) kunnen noemen. Merkwaardig is hierbij, dat er nu meer vgln. zijn waar H naar p gedifferentiëerd wordt, dan waar H naar q wordt gedifferentiëerd; de gelijkheid van de aantallen p's en q's is blijkbaar een toevallige eigenschap bij de enkelvoudige integralen.

Opmerking. Ook nu is het weer mogelik, slechts een gedeelte der $q_{i\lambda}$ door $p_{i\lambda}$ te vervangen, zoals bij de transformatie van ROUTH geschiedde. Men krijgt dan weer een gedeelte der vgln. in kanoniese vorm, een ander deel houdt de oorspronkelike vorm.

Ook de gegeneraliseerde kanoniese vgln. zijn direkt uit een

---

[35]) L. KÖNIGSBERGER, Die Prinzipien der Mechanik, blz. 101, vlg. (7).

minimumprincipe af te leiden, analoog met dat van HELMHOLTZ, nl. uit

$$\delta \int\int \underset{G}{\dots} \int d\xi_1 \dots d\xi_\nu \left(\sum_1^n {}^i \mathfrak{S}_1^\nu {}^\lambda p_{i\lambda} \dot{q}_{i\lambda} - H \right) = 0 \tag{81}$$

We laten hieronder de toepassing dezer formules op twee gebieden volgen.

A — *Elasticiteitsleer*

De evenwichtsvergelijkingen voor een isotroop elasties kontinuum waren af te leiden uit een minimumprincipe waarvan de F gedefiniëerd werd op blz. 6.

Wanneer we hier de p_{ik} willen gaan invoeren, stuiten we op een eigenaardigheid, nl. dat tengevolge van het voorkomen van q_{ik} en q_{ki} in slechts één kombinatie

$$q_{ik} + q_{ki}$$

de uitdrukkingen voor p_{ik} en p_{ki} volkomen identiek worden, waardoor het oplossen naar elk der q_{ik} onmogelik wordt. Daar $p_{ik} = K_{ik}$ de spanning in de richting i werkend op een vlakje $\perp$ k, is dit in volkomen overeenstemming met de bekende betrekking $K_{ik} = K_{ki}$.

Het blijkt echter toch mogelik, vergelijkingen te konstrueren die met de kanoniese vergelijkingen zeer verwant zijn, op de volgende wijze:

Slechts die p_{ik} worden ingevoerd, waarvan (bv.) $i \lessgtr k$; gevormd wordt

$$H = [\underset{i<k}{\Sigma^i \Sigma^k} p_{ik} (q_{ik} + q_{ki}) + \Sigma^i p_{ii} q_{ii} - F]$$

waarin $q_{ik} + q_{ki}$ door $f(q_i, p_{ik})$ vervangen worden kan. De kanoniese vergelijkingen worden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\underset{k}{\mathfrak{S}} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi_k} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{ik}} = q_{ik} + q_{ki}.$$

Voert men dit procédé uit voor de bovengenoemde F, dan vindt men:

$$p_{11} \equiv K_{11} = A(q_{11} + q_{22} + q_{33}) - 2B(q_{22} + q_{33})$$
$$p_{23} \equiv K_{23} = B(q_{23} + q_{32}) = p_{32}, \text{ enz.}$$

$$H=\frac{1}{4B}\sum_{1}^{3}{}_i p_{ii}^2+\frac{A-2B}{4B(-3A+8B)}\left(\sum_{1}^{3}{}_i p_{ii}\right)^2+\frac{1}{2B}\left(p_{23}^2+p_{31}^2+p_{12}^2\right)+\sum_{1}^{3}{}_i K_i q_i \quad (82)$$

De fysiese betekenis van de onmogelijkheid om de q_{ik} en de q_{ki} apart te bepalen — ook uit de evenwichtsvgln. — is, dat door de elastiese evenwichtsvoorwaarden de toestand van het kontinuum niet volkomen bepaald wordt. Deze vergelijkingen worden nl. niet verstoord door toevoeging aan de q_i van u_i welke voldoen aan:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}=0 \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}+\frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}=0$$

waarvan de meest algemeene oplossing is:

$$\begin{aligned} u_1 &= & -\alpha_3\,\xi_2 + \alpha_2\,\xi_3 \\ u_2 &= \alpha_3\,\xi_1 & -\alpha_1\,\xi_3 \\ u_3 &= -\alpha_2\,\xi_1 + \alpha_1\,\xi_3 & \end{aligned}$$

d.i. een willekeurige draaiïng.

G — *Elektromagnetiese veldvergelijkingen*

Wanneer men de bij het op blz. 7 gegeven minimumprincipe behorende kanoniese vergelijkingen wil opstellen, stuit men op een dergelijke moeilikheid als bij de elasticiteitsvergelijkingen, met dit onderscheid dat nu in F alleen de kombinatie

$$A_{ik}-A_{ki}$$

optreedt. Men vindt daardoor

$$p_{ik}\equiv -p_{ki}=A_{ik}-A_{ki}=F_{ki}$$

Door een procédé analoog met het bij het elastiese probleem hierboven gebruikte kan men nu vormen:

$$H=\sum_{1}^{4}{}^i s_i A_i+\tfrac{1}{2}\sum_{i,k} p_{ik}^2 \qquad (83)$$

waarbij nu nog komt dat $p_{ii}\equiv 0$ zodat er maar 6 verschillende p_{ik} bestaan, in overeenstemming met het bekende feit, dat er maar zes F_{ik} bestaan. De kanoniese vergelijkingen worden nu:

$$\frac{\partial H}{\partial A_i}=-\sum_{1}^{4}{}_k\frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi_k} \quad \text{of} \quad s_i=\sum_{1}^{4}{}_k\frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{ik}}=\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}-\frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \quad \text{of} \quad F_{ki}=\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}-\frac{\partial A_k}{\partial \xi_i}$$

d.w.z. deze vormen het **volledige stelsel** der veldvergelijkingen.

Het minimumprincipe, analoog met dat van HELMHOLTZ voor de mechanika, nl.

$$\Delta \iiiint d\xi_1 \ldots d\xi_4 \left[-\sum_i s_i A_i + \sum_{i,k} F_{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} + \tfrac{1}{2} F_{ik} \right) \right] = 0$$

levert ons dus eveneens alle veldvergelijkingen.

Opmerking

Zowel de elektromagnetiese als de elastiese vgln. laten zich beschouwen als biezonder geval van een vraagstuk waarbij F de meer algemene gedaante heeft:

$$F = -\Sigma a_i q_i + \tfrac{1}{2} \Sigma b_{ik} (q_{ik} + q_{ki})^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \beta_{ik} q_{ii} q_{kk} + \tfrac{1}{2} \Sigma c_{ik} (q_{ik} - q_{ki})^2$$

waarbij de sommatie bij de b_{ik} en c_{ik} uit te strekken is over elke kombinatie $i\,k$, bij de β_{ik} echter over elke i en elke k. Men verkrijgt uit deze vorm door:

1°. $b_{ik} = \beta_{ik} = 0$ te stellen de elektromagnetiese, en door

2°. $c_{ik} = 0$ te stellen de elastiese vgln.

Bij deze vorm van de F treden geen anomaliteiten op bij het invoeren van de „momenten", want nu is:

$$p_{ik} = \frac{\partial F}{\partial q_{ik}} = b_{ik} (q_{ik} + q_{ki}) + c_{ik} (q_{ik} - q_{ki}) =$$

$$= (b_{ik} + c_{ik})\, q_{ik} + (b_{ik} - c_{ik})\, q_{ki}$$

terwijl

$$p_{ki} = (b_{ik} - c_{ik})\, q_{ik} + (b_{ik} + c_{ik})\, q_{ki}$$

dus

$$p_{ki} \neq p_{ik}$$

Men vindt voor de kanoniese funktie:

$$H = \sum a_i q_i + \sum \frac{1}{8 b_{ik}} (p_{ik} + p_{ki})^2 + \tfrac{1}{2} \sum\sum B_{ik} p_{ii} p_{kk} + \sum \frac{1}{8 c_{ik}} (p_{ik} - p_{ki})^2.$$

Grensgeval 1 verkrijgt men hier door te bedenken, dat niet alleen b_{ik} en $B_{ik} = 0$ worden, maar ook $p_{ik} + p_{ki}$ waardoor de tweede som in H toch wegvalt.

Evenzo valt voor grensgeval 2 de laatste som weg, in overeenstemming met (82) en (83).

AANHANGSEL

17 — Afleiding van de betrekking $\delta s_i = \sum\limits_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} (s_k \, \delta x_i - s_i \, \delta x_k)$.

(blz. 9)

Van de vier sommen

$$\sum_k \left(s_k \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} + \delta x_i \frac{\partial s_k}{d \xi_k} - s_i \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k} - \delta x_k \frac{\partial s_i}{\partial \xi_k} \right)$$

waaruit de rechterzijde bestaat is de tweede nul tengevolge van de voor de elektriciteitsstroming geldende kontinuïteitsvergelijking.

De derde verkrijgt men als gevolg van de dichtheidsverandering, de eerste en vierde tengevolge van de snelheidsverandering bij variatie van de positie der ladingen met δx_i.

Wegens het behoud van rustlading gedurende de beweging is nl. de dichtheid dier lading omgekeerd evenredig met de inhoud van het ingenomen volumeëlement:

$$\frac{\rho}{\rho + \delta \rho} = \frac{\partial (\xi + \delta x)}{\partial (\xi)} \equiv D$$

waarin D de funktionaaldeterminant van de aangegeven veranderliken voor stelt. Men vindt:

$$D = 1 + \sum_k \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k}$$

en dus:

$$\delta \rho = -\rho \sum_k \frac{\partial \delta x_k}{\partial \xi_k} \tag{84}$$

De snelheid van de door het punt ξ stromende elektriciteit verandert uit twee oorzaken. Ten eerste omdat hetzelfde ladingselement een gewijzigde bewegingstoestand ondervindt; ten tweede omdat de ruimte t.o.v. de materie een verschuiving $\delta \xi = - \delta x$ heeft ondergaan; dus is, als $v_i = \frac{dx_i}{d\tau}$,

$$\delta v_i = \sum_k \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} v_k - \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \delta x_k. \tag{85}$$

Bedenkt men dat $s_i = \frac{\rho}{c} v_i$ dan volgt uit (84) en (85), tezamen met de betrekking $\sum_k \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \delta x_k = 0$, de te bewijzen betrekking.

18 — Reciprociteitsbetrekkingen voor kwadratiese Φ

Tot de afleiding van de op blz. 27 genoemde reciprociteitsbetrekkingen voor het geval dat Φ in q homogeen kwadraties is kan men zeer overzichtelik aldus geraken:

Tengevolge van (48) is de „polaire vorm":

$$F(q' \,|\, q'') \equiv \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k c_{ik}\, q_i' \, q_k'' \qquad (c_{ik} = c_{ki})$$

zowel gelijk aan $\sum q_k'' Q_k'$ als aan $\sum q_i' Q_i''$ of bij andere notatie voor de sommatieindex:

$$\sum_l q_l'' Q_l' = \sum_l q_l' Q_l''.$$

Kiest men nu alle Q' nul behalve Q_i' en alle Q'' nul behalve Q_k'', dan vindt men (47).

Voor de gevallen $\nu \geq 1$ leidt men de analoge, op blz. 27 genoemde stelling (49) als volgt af:

$$\sum_i \int \ldots \int d\omega\, Q_i' \, q_i'' = \sum_i \int \ldots \int d\omega \mathop{S}_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right)' q_i'' =$$

$$= \sum_i \mathop{S}_\lambda \int \ldots \int d\omega \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right)' \cdot q_i'' \right] - \sum_i \mathop{S}_\lambda \int \ldots \int d\omega \left(\frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \right)' \cdot q_{i\lambda}''.$$

Hierin wordt de eerste integraal tot een randintegraal waarvan we veronderstellen dat hij gelijk nul is, terwijl in de tweede, tengevolge van de aangenomen eigenschap van F (homogeen kwadraties in de $q_{i\lambda}$), verwisseling der enkele en dubbele akcenten geoorloofd is. In de oorspronkelike integraal mag dit dus ook, waarmee de stelling bewezen is.

Opmerking 1: Men ziet gemakkelijk in, dat in plaats van Q_i ook gezet kan worden $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ waarmee de stelling een algemener karakter heeft verkregen.

Opmerking 2: De integrand van de laatste term is hier weer de „polaire uitdrukking":

$$\sum_i \mathop{S}_\lambda \sum_k \mathop{S}_\mu c_{i\lambda,\, k\mu}\, q_{k\mu}' \, q_{i\lambda}''$$

welke voor $q_{i\lambda}' = q_{i\lambda}''$ overgaat in $2F'$.

19 — Betrekkingen van de vorm $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}$.

Het schijnt ons hier de meest geschikte plaats te wijzen op een type van betrekkingen dat enigszins herinnert aan de door ons besproken reciprociteitsbetrekkingen.

Is bij een eenvoudig minimumprobleem van het op blz. 14 besproken type de Φ behalve van de q's afhankelik van zekere parameters x — we laten waar dat hier geen verwarring kan stichten de indices bij de q en de x weg —, dan is:

$$\delta F = \delta[\Phi\,(q, x) - \Sigma\, Qq] = \Sigma\, \frac{\partial\Phi}{\partial q}\,\delta q + \Sigma\, \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x - \Sigma\, Q\delta q - \Sigma\, q\delta Q.$$

Volgens de oplossingsvergelijkingen (51) wordt dit:

$$\delta F = \Sigma\, \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x - \Sigma\, q\delta Q \tag{86}$$

Stelt men daarnaast:

$$\delta\Phi = \Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\partial x + \Sigma\, Q\delta q \tag{87}$$

en beschouwt men nu het geval dat Φ **in de** q **homogeen kwadraties is,** dan is

$$\Sigma\, Qq = \Sigma\, \frac{\partial\Phi}{\partial q}\,q = 2\Phi,\ \text{dus}\ F = -\Phi$$

waaruit met (86) en (87) blijkt:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_Q = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_q \tag{88}$$

d.w.z. bij konstante Q is de invloed op Φ van een verandering δx juist tegengesteld gelijk aan die invloed bij konstante q.

Een interessant voorbeeld geeft de **elektrostatika.** Zijn q de ladingen van enige geleiders, x meetkundige koördinaten en is Φ de elektrostatiese energie van het stelsel, dan is aan de voorwaarde voor Φ voldaan. Q_i is dan de potentiaal van de i-de geleider, en vgl. (88) leert, dat een verschuiving van een der geleiders de elektrostatiese energie juist tegengesteld verandert, naarmate men de ladingen dan wel de potentialen der geleiders konstant houdt.

Een tweede geval waarin vgl. (88) geldt is dat van een stelsel **elektriese stromen** die elkaar wederkerig induceren. Zijn q de stroomsterkten, x weer meetkundige koördinaten der geleiders, Φ de energie van het stelsel, dan zijn de Q de elektromotoriese krachten in de ketens.

Een derde geval tenslotte is dat, waarin
x de q (blz. 6) van een **mechanies stelsel** zijn,
q de $\dot{q}$ van dat stelsel, en
Φ de T, dan is $Q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ een moment; wanneer nu T homogeen kwadraties in de $\dot{q}$ is, (vgl. blz. 20) geldt dus:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_p = -\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_{\dot{q}}$$ [36]

Is het stelsel nu bovendien in de betrokken koördinaat „cyklies", d.w.z. dat in de potentiële energie die q niet voorkomt, dan volgt uit de laatste vergelijking:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_p = -\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_{\dot{q}}$$

waarvan de betekenis als volgt kan worden geïnterpreteerd: de energieverandering nodig voor een bepaalde kleine verandering van de q is bij konstant gehouden momenten juist *tegengesteld gelijk* aan die bij konstant gehouden snelheden: toevoer in 't ene geval betekent afvoer in 't andere geval.

20 — Direkte afleiding van een „dynamiese reciprociteitsbetrekking"

Als voorbeeld van wat wij op blz. 25 noemden een direkte afleiding van een reciprociteitsbetrekking tussen twee oorzaken en twee gevolgen geven we het volgende eenvoudige geval, dat ondertussen zelf een reversibel verschijnsel is, waarvoor de direkte afleiding niet noodzakelijk is. Het betreft een stelsel diskrete stoffelike punten, elasties gebonden aan zekere evenwichtsstanden, door krachten evenredig met de uitwijking.

In plaats van de gereduceerde koördinaten x_h dier punten — welke gelijk zijn aan $s_h \sqrt{m_h}$, waarbij s_h de uitwijking en m_h de massa is — kan men invoeren koördinaten X_h volgens

$$x_h = \Sigma \gamma_{hH} X_H \qquad (\gamma_{hH} = \gamma_{Hh})$$

zodat de potentiële energie wordt:

$$\Psi = \tfrac{1}{2} \Sigma p_H^2 X_H^2$$

De krachtvrije beweging van zo'n stelsel, wanneer op het tijdstip 0 alle $x = 0$ zijn, wordt gegeven door

$$X_H = B_H \sin p_H t$$

Denken we ons een dergelijke beweging ontstaan door een stoot op 't tijdstip o gelijk aan $\mathfrak{Q}_h$ langs de oorspronkelike koördinaten, dan vindt men gemakkelijk voor B_h:

$$B_H = \frac{\mathfrak{Q}_H}{p_H}, \qquad \text{waarbij} \qquad \mathfrak{Q}_H = \sum_k \gamma_{Hk} \mathfrak{Q}_k,$$

---

[36]) Vgl. HERTZ, Ges. Werke III, blz. 238, Nr. 555.

waardoor de beweging kan beschreven worden door de vergelijkingen:

$$x_h = \sum_H \sum_k \gamma_{hH}\, \gamma_{Hk}\, \frac{1}{p_H}\, \mathfrak{Q}_k \sin p_H t$$

Hieruit leidt men — daar $\gamma_{Hk} = \gamma_{kH}$ — af, dat

$$\frac{\partial x_h(t)}{\partial \mathfrak{Q}_k} = \frac{\partial x_k(t)}{\partial \mathfrak{Q}_h}$$

welke betrekking een reciprociteitsbetrekking van de door ons gewenste soort is.

21 — Nivellerings-, behouds- en divergentie-theorema's

Onder deze namen resp. voor de gevallen $\nu = 0$, $\nu = 1$ en $\nu \geq 2$ willen we de volgende klasse van theorema's schetsmatig aangeven, waarbij we het doelmatigst beginnen bij de enkelvoudige integralen ($\nu = 1$).

Bedoelde theorema's hebben in dit geval de gedaante

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \tag{89}$$

waarbij f de een of andere funktie van de q en de $\dot{q}$ is. Men kan ze zo uitspreken dat f konstant is voor alle ξ's, of dat er een „behoud van f" plaats heeft. Natuurlik moeten zekere voorwaarden vervuld zijn opdat zo'n theorema geldt.

Voorbeelden zijn er vele in de mechanika. We noemen de wet van 't behoud van hoeveelheid van beweging, de perkenwet, de wet van 't behoud van energie. Voorwaarde voor de laatste is (zie blz. 35) dat de funktie van Lagrange L de ξ niet expliciet bevat.

Voor eenvoudige minimumproblemen ($\nu = 0$) kan men als hiermede analoog beschouwen die theorema's waarin de gelijkheid van zekere f voor alle waarden van de index i beweerd wordt (vgl. blz. 17). Als voorbeeld noemen we uit de thermodynamika de nivellering van drukkingen, temperaturen en thermodynamiese potentialen in de verschillende fazen van een stelsel (vgl. blz. 16), of uit de elektrostatika die van potentialen van verbonden geleiders (blz. 16) [37]). In de kinetiese gastheorie laten zich ook fraaie voorbeelden aanhalen.

Voor meervoudige integralen ($\nu \geq 2$) kan men als met de genoemde theorema's analoog beschouwen de theorema's van de vorm:

$$\mathfrak{S}_\lambda \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda} = 0$$

die we boven met „divergentietheorema's" hebben aangeduid. Als voorbeeld

---

[37]) Voor het optiese voorbeeld (blz. 13) vindt men de wetten van terugkaatsing en breking.

·rmelden we hier een uitbreiding van de „wet van het behoud van energie" uit de mechanika:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda} \frac{\partial \Omega_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\lambda} = 0 \tag{90}$$

waarbij

$$\Omega_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} F - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_{i\lambda}} \cdot q_{i\mu} \tag{91}$$

$$\left(\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 \text{ voor } \lambda \neq \mu \\ 1 \text{ voor } \lambda = \mu \end{cases}\right)$$

die geldt wanneer F van de ξ_λ expliciet niet afhangt.

Past men deze formules toe op de F waaruit de elektromagnetiese veldvergelijkingen worden verkregen (blz. 7) dan krijgt men een stelling zonder physiese betekenis. Doelmatiger is het dan ook om in dat geval een enigszins andere weg te bewandelen waardoor men tot de formules kan komen:

$$\sum_\lambda \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\lambda} = \sum_\lambda s_\lambda F_{\lambda\mu}$$

waarbij $T_{\lambda\mu}$ de spanningsenergietensor is. [38])

22 — Voortgezette transformatie der vgln. van Routh

Men kan uit de differentiaalvergelijkingen van Routh door voortgezette transformatie tot nog andere formuleringen der oorspronkelike vergelijkingen geraken.

Lost men nl. uit (56″) de q_j op:

$$q_j = g_j(q_l, \dot q_l, p_j, \dot p_j) \tag{92}$$

en vormt men:

$$M(p_j, \dot p_j, q_l, \dot q_l) \equiv [R + \sum_1^k {}_j\, q_j \dot p_j]_{q_j = g_j} \tag{93}$$

(voor de notatie vgl. blz. 30) dan kan men de vgln. van Routh vervangen door (92) benevens:

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial M}{\partial \dot p_j} = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial q_l} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial M}{\partial \dot q_l} = 0 \tag{94}$$
$$1 \leq j \leq k \qquad\qquad k+1 \leq l \leq n$$

waarvan het geval voor $k = n$ vermeld wordt door J. Droste [39])

[38]) Zie voor een uitvoerige behandeling van deze problemen: E. Bessel-Hagen, Ueber die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Math. Ann. **84** (1921) blz. 258; E. Noether, Invar. Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918, blz. 235; F. Klein, Ges. Math. Abh. I, Abh. XXXI, XXXII; D. Hilbert, Gött. Nachr. 1915, blz. 395—407.

[39]) Droste, t.a.p.

Men kan de oorspronkelike differentiaalvergelijkingen dus ook afleiden uit een minimumprobleem $\Delta J \equiv \Delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} M d\xi = 0$ met de veranderliken p_l en q_l, waarvoor geldt:

$$M = -F + \sum_1^k \frac{d}{d\xi}(p_j\, q_j) \tag{95}$$

$$J = -I + \sum_1^k (p_{j1}\, q_{j1} - p_{j0}\, q_{j0}). \tag{96}$$

Men vergelijke de formuleringen op blz. 13 en in § 9!

Op analoge wijze kan men te werk gaan bij minimumvraagstukken voor meervoudige integralen. Schrijft men voor

$$\mathfrak{S}_1^{\nu}{}_{\lambda} \frac{\partial p_{k\lambda}}{\partial \xi_\lambda}$$

de afkorting p_k en vormt men:

$$M \equiv [H + \sum_1^n p_i\, q_i] \tag{97}$$

dan kan men de kanoniese vergelijkingen vervangen door de vgln.

$$\frac{\partial M}{\partial p_{i\lambda}} - \mathfrak{S}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial M}{\partial p_{i\lambda\mu}} = 0 \tag{98}$$

waarbij

$$p_{i\lambda\mu} = \frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial \xi_\mu}. \tag{99}$$

Voorwaarden voor de doorvoerbaarheid van de transformatie van Routh en de voortgezette transformatie zijn resp.

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_j\, \partial \dot{q}_l} \right\| \neq 0 \qquad\qquad \left\| \frac{\partial^2 R}{\partial q_j\, \partial q_l} \right\| \neq 0$$

als we ons beperken tot enkelvoudige integralen.

Hieraan wordt o.a. niet voldaan door F en R's die in de betrokken argumenten van de 0-de of 1e graad zijn. Voor R vallen hieronder o.a. beweging van een mechanies stelsel in een konstant krachtveld, en het principe van Schwarzschild voor de elektrodynamika.

23 — Toepassing van de besproken theorema's op ekonomiese vraagstukken

In de volgende bladzijden willen we trachten te schetsen hoe ook in de theoretiese ekonomie vraagstukken optreden van de struktuur der door ons besproken natuurkundige problemen, en hoe tengevolge daarvan voor de ekonomie een nuttig gebruik gemaakt kan worden van de voor de natuurkundige problemen afgeleide konklusies.

We zullen daarbij in geen enkel opzicht aanspraak maken op systematiek of volledigheid in ekonomiese zin. Men beschouwe het hier volgende uitsluitend als voorbeelden ter illustratie van de bovenstaande bewering.

We zullen alleen vraagstukken bespreken waarin slechts één ofelimiteitsfunktie optreedt, d.w.z. waarin slechts één persoon of organisatie aktief optreedt. In die gevallen kan nl. geen twijfel bestaan aan het karakter van minimumvraagstuk — er wordt gestreefd naar een maximum ofelimiteit in elk dier gevallen — terwijl overigens alle ekonomiese problemen waarin meerdere ofelimiteiten optreden opgelost worden door terug te grijpen op de eerstgenoemde soort.

In beginsel is de funktie die een maximum gemaakt moet worden, een funktie van een eindig aantal veranderliken, zoals de goederenhoeveelheden die het subjekt op elk van een aantal dagen zal bezitten, enz. We hebben dus in 't algemeen te maken met minimumproblemen van een funktie van een eindig aantal veranderliken.

Het aantal veranderliken is echter, wanneer niet van bepaalde vereenvoudigende hypothesen wordt gebruik gemaakt, zó groot, dat in vele gevallen een goede benadering en een veel eenvoudiger behandeling mogelik is door te veronderstellen dat dat aantal oneindig groot is. In speciale gevallen voert dat tot minimumproblemen voor integralen.

Problemen met een eindig aantal veranderliken

Het grootste deel van de bestaande wiskundig-ekonomiese literatuur houdt zich bezig met problemen van deze kategorie. We kunnen dus beginnen met naar deze literatuur te verwijzen [40]).

Als illustratie van de formele overeenstemming met sommige natuurkundige vraagstukken bespreken we nog het volgende voorbeeld.

Koëxistentie van ondernemingsvormen.

Zeker produkt worde vervaardigd met behulp van twee produktiegoederen 1 en 2, en wel zodanig dat een eenheid aandelenkapitaal gekombineerd met ξ_1 resp. ξ_2 van de twee goederen 1 en 2 oplevert een hoeveelheid produkt $\varphi(\xi_1, \xi_2)$.

De prijzen van 1, 2 en produkt zijn gegeven en onbeïnvloedbaar y_1, y_2, y_0.

Probleem A. De beste ξ_1 en ξ_2 te bepalen.

Noemen we $y_0\,\varphi = \Psi(\xi_1, \xi_2)$

---

[40]) L. WALRAS, Eléments d'Economie Politique; S. JEVONS, Theory of Political Economy; V. PARETO, Manuel d'économie politique; BOWLEY, The Mathematical Groundwork of Economics; K. WICKSELL, Vorlesungen über Nationalökon. Theor. Teil I; A. DE PIETRI-TONELLI, Jahrb. f. Nat. ökon. u. Stat. 1928, blz. 377, en vele anderen.

dan is de winst per eenheid van aandelen-kapitaal (het rendement)

$$\rho = \Psi(\xi_1, \xi_2) - y_1 \xi_1 - y_2 \xi_2.$$

Dit wordt een maximum als ξ_1 en ξ_2 voldoen aan:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} = y_1 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} = y_2. \tag{100}$$

Biezonder geval. De vgln. (100) leveren een dubbel stel oplossingen, nl. ξ_1', ξ_2' en ξ_1'', ξ_2''.

Naar aanleiding daarvan stellen we nu

Probleem B.. Wanneer kunnen deze twee bedrijfssoorten naast elkaar bestaan? [41])

Beschouwen we daartoe een maatschappij op aandelen met een kapitaal m waarvan m' belegd is in de eerste soort ondernemingen, m'' in de tweede soort, zodat $$m = m' + m'' \tag{101}$$

Wanneer nu de totale winst

$$w = m' \rho' + m'' \rho''$$

door een denkbeeldige verandering van m' en m'' waarbij aan (101) voldaan wordt niet verandert, dan zal het naast elkaar bestaan der twee vormen ekonomies gewettigd zijn. Dit is het geval als

$$\rho' = \rho''$$

d.w.z. de rendementen gelijk zijn.

Deze vergelijking houdt in, daar q' en q'' alleen afhangen van de konstanten y_1 en y_2, dat er tussen die twee prijzen een bepaald verband bestaat:

$$f(y_1, y_2) = 0 \tag{102}$$

Hieraan wordt voldaan door een enkelvoudige oneindigheid van toestanden die men de **koëxistentielijn** zou kunnen noemen.

Ter kompletering van de zo meteen te noemen analogie met de thermodynamika, noemen we nog een

Probleem C

Welke verhouding tussen m' en m'' heerst in de evenwichtstoestand?

Tengevolge van het feit dat de ρ's niet van de m's afhangen, is deze verhouding onbepaald. Ze zou bepaald zijn, wanneer men b.v. als nieuwe eis stelde, dat de totale hoeveelheid produkt of de totale hoeveelheid 1 of 2 een bepaalde grootte moet hebben.

De hier gegeven formules zijn nu volkomen identiek met thermodynamiese, wanneer men verstaat onder

ξ_1 de entropie van de massaeenheid van een stof

---

[41]) Vgl. b.v. J. Goudriaan Jr., Diss. Delft, 1922. J. v. Gelderen, Voorlezingen over tropisch-koloniale staathuishoudkunde, § 1 (bev. rubber).

ξ_2 het volume en

$\Psi(\xi_1 \xi_2)$ de inwendige energie daarvan;

y_1 de negatieve temperatuur

y_2 de druk.

Dan wordt „probleem *A*" de vraag hoe temperatuur en druk afhangen van volume en entropie in een evenwichtstoestand van de betr. stof. Daarbij is dan ρ de thermodynamiese potentiaal, die immers bij konstante y_1 en y_2 tot een extremum wordt. Het „biezondere geval" komt overeen met het geval van de mogelikheid van twee fazen van dezelfde stof. „Probleem *B*" vraagt naar de koëxistentie-voorwaarde. Daarbij is b.v.

m' de massa van bv. de vloeibare

m'' die van de dampvormige faze.

In de evenwichtstoestand wordt

w de totale thermodynamiese potentiaal tot een extremum, en dit is het geval wanneer de thermodynamiese potentialen per massaeenheid ρ' en ρ'' gelijk zijn.

Koëxistentie is zodoende alleen mogelik als er tussen druk en temperatuur een verband (102) bestaat, bekend als de dampspanningskromme.

„Probleem *C*" herinneert er aan dat elke verhouding tussen de massa's der twee fazen voor kan komen en dat die verhouding slechts dan bepaald is als naast de totale massa ook nog gegeven is de totale inwendige energie, of het volume of de entropie.

Tengevolge van deze overeenstemming zijn alle algemene konklusies uit de natuurkundige vergelijkingen ook toepasselik op het besproken ekonomiese geval, bv. de reciprociteitsbetrekking:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1}$$

welke ons dus in staat stelt de verandering van ξ_2 ten gevolge van y_1-verandering te berekenen uit de verandering van ξ_1 tengevolge van y_2-verandering.

24 — Nivelleringstheorema's

Een grote rol spelen in de ekonomie de bovengenoemde (blz. 45) *nivelleringstheorema's*. Veelal zijn de omstandigheden waaronder zij optreden aldus te formuleeren:

De ofelimiteitsfunktie $\omega(x_1 \ldots . x_n)$ tot een maximum te maken onder de nevenvoorwaarde

$$x_1 + x_2 + \ldots . + x_n = \text{const.}$$

De oplossing volgens de multiplikatoren-methode van Lagrange levert:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \lambda \quad \text{of} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \ldots . = \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \tag{103}$$

„nivellering der grensnuttigheden".

We willen op dit theorema voor enkele speciale gevallen iets nader ingaan, en zullen in 't biezonder de twee volgende gedaanten van ω onderscheiden

(1) $$\omega = \sum_1^n i \int_0^{x_i} y_i\,(x_i)\,dx_i$$

De formules (103) leveren dan:

$$y_1 = y_2 = \ldots . = y_n \qquad (104)$$

dus „nivellering van de y_i".

Voorbeeld: Verdeling van produktieve krachten over verschillende takken van produktie.

x_i de hoeveelheid arbeid (of ook kapitaal) besteed voor produktie voor de behoefte i;

y_i de **meeropbrengst,** van de laatste (kleine) eenheid arbeid (ev. kapitaal).

ω is dan inderdaad de totale opbrengst naar welks maximum gestreefd wordt.

Verdeling van produktieve krachten over verschillende takken heeft dus zó plaats, dat de meeropbrengsten der laatste eenheden — de „grensmeeropbrengsten per eenheid" — zich nivelleren.

(2) $$\omega = \sum_1^n i\, y_i\,(x_i)\,.\,x_i$$

De formules (103) leveren dan:

$$y_1 + x_1 \frac{dy_1}{dx_1} = y_2 + x_2 \frac{dy_2}{dx_2} = \ldots . \qquad (105)$$

dus nivellering van de aangegeven vormen, niet van de y_i.

Voorbeelden

a) Verdeling van produktieve krachten (zie boven).

x_i de hoeveelheid arbeid (of kapitaal) besteed voor produktie voor de behoefte i (van het goed i).

y_i de **gemiddelde** opbrengst per eenheid.

ω is dan wederom de totale opbrengst.

De gemiddelde opbrengsten worden dus niet genivelleerd. Voor het geval men met kapitaalsverdeling (belegging in verschillende takken) te doen heeft, betekent y_i bv. de hoogte van het dividend.

De dividenden zullen zich dus, ook bij vrije beweeglikheid van het kapitaal **niet nivelleren,** en de vgln. (105) doen zien, dat de afwijkingen daarvan des te belangrijker zullen zijn, naarmate de x_i groter zijn, dus b.v. naarmate grotere kapitalen onder eenzelfde kontrolerende macht staan. In 't algemeen zijn de dy/dx negatief; de evenwichts-y_i zullen dus hoger zijn in een elastiese dan in een niet-elastiese tak van produktie, aangezien voor de laatste $\frac{dy}{dx} = 0$ is.

b) Verkopen op verschillende markten.

x_i de hoeveelheden van één goed, verkocht door eenzelfde subjekt op elk der markten i.

y_i de prijs die daar te bedingen is bij een aanbod van x_i.

Op dit geval zijn onze formules ook toepasselik, waarmee aangetoond is, dat **nivellering der prijzen** niet het voordeligst voor het subjekt is. De staties-ekonomiese mogelikheid van **dumping** is hiermee verklaard.

Gemakkelik is in te zien, dat ook voor het *kopen* op verschillende markten hetzelfde geldt: het is niet ekonomies, zoveel op elke markt te kopen, dat de prijzen gelijk geworden zijn.

25 — Extremum van enkelvoudige integralen

Slechts in zeer enkele publikaties worden ekonomiese vraagstukken wiskundig behandeld, waarin naar het extremum van een integraal wordt gevraagd [42]. Het komt ons voor dat er toch inderdaad vraagstukken zijn waarin deze wijze van behandelen aangewezen is. De volgende beschouwingen mogen dit aannemelik maken.

Opdat een ekonomies vraagstuk zich in de vorm van een variatieprobleem laat brengen, moeten blijkbaar de volgende voorwaarden vervuld zijn:

1. Er moet, zoals we hier steeds veronderstelden, slechts één ofelimiteitsfunktie in optreden;

2. Deze moet behoorlik benaderd kunnen worden door een bepaalde integraal;

3. Van de grootheid die als funktie van de onafhankelik veranderlike gevraagd wordt, moet ook de afgeleide voorkomen in de integrand;

4. Deze gevraagde grootheid moet aan de randen gegeven waarden bezitten (of er moet aan de natuurlike randvoorwaarden voldaan zijn).

Wat de eerste voorwaarde betreft herinneren we er de lezer aan dat daaraan voldoen niet alleen de vraagstukken waarin slechts één persoon optreedt, die zich bevindt tegenover gegeven omstandigheden, doch ook ieder probleem waarin één georganiseerde groep optreedt, en elk monopolievraagstuk.

Aan de tweede voorwaarde is zeer zeker voldaan voor een belangrijke kategorie van vraagstukken, nl. diegene waar de ofelimiteit is de winst, gedurende een zeker tijdvak gemaakt. Deze totaalwinst is de som van de winsten in de achtereenvolgende tijdselementen van dat tijdvak gemaakt (eventueel gekorrigeerd met een rentefaktor) en kan daarom, zodra een groot aantal tijdselementen optreedt, met grote benadering door een integraal over de tijd worden beschreven.

Waar zodoende gesproken wordt over het verloop van bepaalde grootheden met de tijd, zijn het dus speciaal **dynamiese** problemen die op deze wijze beschreven worden.

---

[42]) Bv. EVANS, Proc. N.A.S. **11** (1925) blz. 90; C. F. ROOS, Proc. N.A.S. **13** (1927), blz. 281 welke echter buitengewoon theoreties gehouden zijn.

Wat de derde voorwaarde betreft, hieraan wordt m.i. voldaan door o.a. de volgende drie kategorieën van vraagstukken:

a) zulke waarbij rekening gehouden wordt met **voorraden;** noemt men deze x, dan stelt $\dot{x}$ het dagelikse produktiesurplus voor, dat in de winst inderdaad voorkomt;

b) zulke waarbij rekening gehouden wordt met de extrakosten welke een **verandering** der dagelikse produktiekwanta meebrengt; is zo'n kwantum x, dan is de verandering $\dot{x}$;

c) zulke waarbij rekening gehouden wordt met de **vertraging** welke er tussen verschillende ekonomiese grootheden bestaat; is $x\ (t)$ één zo'n grootheid, dan is de andere vaak $f\ [x\ (t - \vartheta)]$, wat in sommige gevallen voldoende benaderd kan worden door $f\ [x - \vartheta \dot{x}]$.

Aan de vierde voorwaarde wordt voldaan door **periodieke problemen,** waarvan vooral interessant zijn problemen betrekking hebbende op de aanpassing aan **seizoen-** en **konjunktuurschommelingen** [43]), en verder door problemen waar doelbewust naar een zekere (nieuwe) evenwichtsstand wordt gestreefd.

In het volgende willen we een greep doen uit de problemen die aan bovenstaande eisen voldoen en wel voorbeelden geven van elk der drie onder 3° genoemde soorten. Problemen waarin andere onafhankelik veranderliken dan de tijd voorkomen, hoewel zeer goed denkbaar, laten we buiten beschouwing.

26 — Voorraadproblemen

Beschouwen we het volgende probleem:

Een onderneming verkoopt elke tijdseenheid een hoeveelheid ξ van de door haar geproduceerde waar tegen een prijs $p\ (\xi, t)$ die dus van ξ en van de tijd moge afhangen. Daarnaast houdt ze een voorraad x, wat elke tijdseenheid de kosten $K\ (x, t)$ meebrengt, welke eventueel ook van de tijd afhangen. Dientengevolge bedraagt de produktie per tijdseenheid $\xi + \dot{x}$. De produktiekosten daarvan noemen we $k\ (\xi + \dot{x}, t)$.

Gevraagd zijn x en ξ als funkties van de tijd t.

De oplossing zal geleverd worden door die x en ξ die over een zeker tijdvak T zo groot mogelik maken de winst:

$$w = \int_0^T dt \{ \xi\ p(\xi, t) - K\ (x, t) - k\ (\xi + \dot{x}, t) \} \qquad (106)$$

waarbij T voldoet aan de boven genoemde vierde voorwaarde, dus b.v. de periode van een seizoen- of konjunktuurschommeling is. Noemen we het eerste argument van k zolang y, dan is de oplossing gegeven door:

$$-\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \qquad (107)$$

---

[43]) Althans voor het geïdealiseerde beeld ervan dat men als grondslag voor diskussies over stabilisatie bv. moet aannemen.

$$p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \qquad (108)$$

Om de waarde van deze vgln. nader te belichten, beschouwen we in de eerste plaats twee **grensgevallen:**

I. $K(x, t) \equiv 0$: voorraadvorming wordt op geen wijze belemmerd. Dan wordt (107):

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \text{konst.} = c$$

d.w.z. er wordt zo geproduceerd, dat op elk ogenblik de grenskosten konstant zijn; wat, bij afhankelikheid van k van t, nog niet betekent, dat er steeds evenveel geproduceerd wordt; verder:

$$p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - c = 0$$

d.w.z. de verkochte hoeveelheden worden gevonden door aan te nemen dat de produktieprijs gelijk aan deze konstante grenskosten is. Bevat bv. $p(\xi, t)$ de tijd niet expliciet, dan is ξ konstant.

II. Geen voorraden kunnen gehouden worden. Dit staat gelijk met het vooropstellen van $x = \dot{x} = 0$ waarmee de eerste vgl. vervalt en de tweede overgaat in de bekende vergelijking voor voorraadloze produktie, die zo vaak gebruikt wordt om de monopolieprijs te bepalen, voor 't geval dat ξ het gehele aanbod voorstelt.

De volgende gevallen schijnen nog interessant:

III. De drie termen van de integrand zijn **expliciet afhankelik** van t, en wel een **periodieke funktie** van t. De vgln. stellen ons dan in staat tot een nadere analyse van **seizoenschommelingen,** of lichten ons in omtrent de **konjunktuurpolitiek** van een onderneming die (of een groter produktiekomplex dat) t.o.v. het geheel der maatschappij klein is [44]).

Voor een systematiek van de seizoenschommelingen is het aanbevelenswaardig de volgende indelingsprincipes te gebruiken:

1°. *a*) alleen $p(\xi)$ hangt van de t af: seizoenafhankelikheid van de **behoefte:** bv. steenkool.

b) alleen $k(\xi + \dot{x})$ hangt van de de t af: seizoenafhankelikheid van de **produktieomstandigheden:** landbouw.

c) gemengde gevallen.

2°. Voorraadvorming al dan niet mogelik (melk tegenover tarwe) (vgl. de onder I en II genoemde gevallen).

Het zal de lezer niet moeilik vallen de biezondere eigenschappen van elk dezer gevallen uit de formules af te lezen. Op een enkele konklusie willen we, bij wijze van voorbeeld, de aandacht vestigen.

---

[44]) Zodat het konjunktuurverloop van p, K en k als niet beinvloedbare funktie van t mag vooropgesteld worden.

Elimineert men $\frac{\partial k}{\partial y}$ uit (107) en (108), dan vindt men:

$$K'(x) = \frac{d}{dt}\left(p + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi}\right). \qquad (109)$$

Voor het veel voorkomende geval, dat $\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$ gerekend kan worden — de produktie van de betr. onderneming is klein t.o.v. de gehele vraag — staat hier:

$$K'(x) = \dot{p} \qquad (110)$$

Men kan nu veilig aannemen dat de voorraadkosten $K(x)$ ruwweg voldoen aan: $\frac{d^2K}{dx^2} > 0$ — een diskussie daarvan zou hier te veel plaats innemen — en dan volgt dus uit (110) b.v., dat de voorraad zijn maximum bereikt als p zijn grootste stijging heeft en zijn minimum als p zijn grootste daling ondervindt; in goede overeenstemming met wat eenvoudige redenering zou doen verwachten.

Overigens is formule (110) een voorbeeld voor het door KARSTEN gepropageerde „kumulatief verband" tussen konjunktuurgrootheden [45]).

IV. De integrand is niet expliciet afhankelik van de tijd. Interessant is o.i. de vraag: **zijn er in dit geval toch periodieke oplossingen mogelik?** Dit toch zou o.a. betekenen dat **stabilisatie van een** voor het beschouwde produktiekomplex **endogene konjunktuur ongewenst** is.

Het antwoord wordt het beste gegeven door het volgende speciale voorbeeld: kiest men:

$$K(x) \equiv A + Bx + \tfrac{1}{2}Cx^2 \qquad p = P - Q\xi$$

$$k(y) \equiv a + by + \tfrac{1}{2}cy^2$$

dan komt er als oplossing $x = x_o + z$ als z voldoet aan

$$z = \frac{2cQ}{(2Q + c)C}\,\ddot{z}.$$

Wanneer $\frac{cQ}{(2Q + c)C} < 0$ levert dit een periodieke oplossing, waarvan de amplitude slechts beperkt wordt door de overweging dat de aangenomen benaderingen juist moeten blijven.

Interessant is nog dat de grootheden A, B, a, b, en P op de periode van die schommeling geen invloed hebben.

27 — Wrijvingsproblemen

Onder deze naam willen we samenvatten die problemen waarbij rekening gehouden wordt met de kosten welke **veranderingen** in de produktie per

[45]) Journ. of the Amer. Stat. Ass. Maart 1924, blz. 14.

tijdseenheid meebrengen — door nodig geworden uitbreiding van installatie in de eerste plaats, en daarnaast door andere onkosten verbonden aan produktieuitzetting of -inkrimping.

Is van een onderneming

x de produktie per tijdseenheid en dus

$\dot{x}$ de verandering per tijdseenheid in die produktie, dan is in 't algemeen de winst in een zeker tijdperk:

$$W = \int_0^T w(x, \dot{x}, t)\, dt \tag{111}$$

als $w(x, \dot{x}, t)$ de winst per tijdseenheid is.

Het produktieplan voor de periode $0 < t < T$ — verondersteld, dat aan de randvoorwaarden voldaan is — wordt dus

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{112}$$

Deze vgl. geeft dus aan, hoe de aanpassing van de produktiekwantiteit aan veranderende omstandigheden (aangegeven door de aanwezigheid van t in de funktie w) plaats heeft, als rekening gehouden wordt met de „veranderingskosten". Het is doelmatig deze of te scheiden van de overige termen die in w voorkomen, waarom we schrijven:

$$w(x, \dot{x}, t) = \varphi(x, t) - \psi(x, \dot{x}, t); \qquad \psi = 0 \text{ voor } \dot{x} = 0 \tag{113}$$

We willen omtrent de wijze van aanpassing nog een enkele nadere konklusie afleiden voor het geval, dat t niet expliciet voorkomt, en daartoe bovendien gebruik maken van de veronderstellingen dat

1°.
$$\frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{\psi}{\dot{x}}\right) > 0 \tag{114}$$

d.w.z. dat uitbreiding per eenheid meer kost dan inkrimping kan opbrengen.

en 2°. φ één maximum bezit (voor $x = x_0$), zoals dat bijna steeds het geval is.

Uit het niet expliciet voorkomen van t volgt, dat een eerste integraal van de diff. vgl. is

$$\varphi - \psi + \dot{x}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} = K \tag{115}$$

Nu laat zich aantonen, — we kunnen op deze diskussie hier niet ingaan, als liggend te ver buiten het terrein van onze beschouwingen — dat er slechts één waarde van K is die een oplossing levert welke W tot een maximum maakt; alle andere waarden maken W tot een minimum. Voor de ekonomie is dus alleen deze K bruikbaar [46]); zijn waarde is $\varphi(x_0)$. Hieruit kan men

[46]) De hieruit volgende beperking van het aantal oplossingen tot ∞^1 maakt, dat men slechts de aanvangs-x kan geven, niet de aanvangs-$\dot{x}$, wat m.i. echter geen bezwaar is.

tenslotte afleiden, dat **de aanpassing geschiedt zonder schommeling;** men toont nl. gemakkelik aan dat $\dot{x} = 0$ wordt pas dan wanneer ook alle hogere afgeleiden nul worden. De achtergrond van deze uitkomst is, dat **stabilisatie** de beste konjunktuurpolitiek is voor elk georgasaniseerd produktiekomplex waarvan de winst opgebouwd is als in (111), (113) en (114), werd vastgesteld.

28 — Vertragingsproblemen

Bij ettelike onderzoekingen op konjunktuurstatisties gebied is tussen twee grootheden x en y het volgende verband gevonden: [47]).

$$y\,(t) = f\,[x(t-\vartheta)]$$

waarbij dan nog vaak f nagenoeg lineair was. Bv.

x: groothandelsprijzen

y: lonen of rente.

Bij de behandeling van het vraagstuk of stabilisatie van dergelijke grootheden nuttig is komt men tot detailproblemen van de struktuur der volgende slechts als voorbeelden bedoelde problemen:

I. Gegeven: de schommelingen van kleinhandelsprijzen, bedrijvigheid en uurloon zijn in korrelatie; de kleinhandelsprijzen volgen de bedrijvigheid na een tijd η, de lonen volgen de kleinhandelsprijzen na een tijd ϑ. In formules:

kleinhandelsprijzen: $p\,(t)$

bedrijvigheid: $u\,(t) = A + \alpha p\,(t + \eta)$

loon: $l\,(t) = B + \beta p\,(t - \vartheta)$

Gevraagd: bij welke beweging der prijzen is de koopkracht van de totale loonsom

$$\int_0^T \frac{ul}{p}\,dt$$

genomen over een gehele konjunktuurperiode, de grootste [48])?

De oplossing van dit probleem voert ons tot een variatieprobleem, wanneer we de benadering invoeren:

$$p(t + \eta) = p + \eta\dot{p}$$

wat voor tijden ε die in vergelijking tot T klein zijn, geoorloofd is. Voor η en ϑ is dit het geval. ϑ is hoogstens $\frac{1}{7}$ van T, η is veel kleiner. Het probleem wordt nu:

$$\delta \int_0^T \frac{dt}{p}\,\{A + \alpha(p + \eta\dot{p})\}\,\{B + \beta(p - \vartheta\dot{p})\} = 0$$

---

[47]) „Korrelatie met lag", Zie bv. WAGEMANN, Konjunkturlehre. Vgl. ook MORGENSTERN, Wirtschaftsprognose, blz. 61.

[48]) De achtergrond van dit probleem is: heeft de arbeidersklasse belang bij stabilisatie of niet?

Daar hierin de t niet expliciet voorkomt, is een eerste integraal:

$$\frac{AB}{p} + \alpha B + \beta A + \alpha\beta p + \frac{\alpha\beta\vartheta\eta}{p}\,\dot{p}^2 = \text{konst.}$$

Hiervan is de oplossing:

$$p = p_o + \mathfrak{A} \sin \frac{t - t_o}{\sqrt{\vartheta\eta}}$$

waarbij

$$p_o^{\,2} = \mathfrak{A}^2 + \frac{AB}{\alpha\beta}.$$

Dit stellen golven voor met een periode van $2\pi\sqrt{\vartheta\eta}$, d.i. korter dan de werkelike konjunktuurgolven. Vraagt men nu uitsluitend naar die oplossingen die tevens de periode van de werkelike konjunktuurgolven hebben, dan blijft slechts het grensgeval over: $\mathfrak{A} = 0$,

waarbij dus $p = \sqrt{\dfrac{AB}{\alpha\beta}}$ en waarbij dus stabilisatie bestaat.

II. Gegeven: Het loon l past zich vertraagd aan bij de prijs p van de produkten van een zekere onderneming:

$$l = f\,[p(t - \vartheta)]$$

De omzet V van deze onderneming, hangt, behalve van de prijs p die ze vraagt, ook af van de loonstandaard van haar arbeiders, die gedeeltelik als kopers optreden:

$$V = V(p, l) = v(p, p - \vartheta\dot{p})$$

wanneer we wederom $p\ (t - \vartheta)$ benaderen door $p - \vartheta\dot{p}$.

Gevraagd: de voor deze onderneming voordeligste prijspolitiek.

Veronderstellen we dat de overige naast de lonen voorkomende produktiekosten konstant blijven, dan kunnen we voor de in het tijdvak $0 < t < T$ te maken winst schrijven:

$$W = \int_0^T dt\; w(p,\ p - \vartheta\dot{p}).$$

Noemen we het tweede argument van w hierbij q, dan wordt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q} + \vartheta\dot{p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\right) - \vartheta^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\,\ddot{p} = 0.$$

Veronderstelt men weer dat in w de tijd niet expliciet voorkomt, dan laat zich weer de integraal vinden

$$w + \vartheta\dot{p}\,\frac{\partial w}{\partial q} = k$$

en als konklusie van een wiskundige diskussie, waarbij gebruik gemaakt wordt van de onderstelling, dat $w(p, \acute{p})$ één maximum heeft, komt men nu tot de konklusie: voor het geval dat in de omgeving van dat maximum $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} < 0$ is stabilisatie het voordeligst; voor $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} > 0$ is schommeling het voordeligst.

De grootheid die hier de doorslag geeft is dus de richting waarin de loongevoeligheid van de winst verandert bij toenemend loon.

Problemen als het hier schetsmatig aangegevene worden nodig zodra men zich een idee wil vormen over het nut van stabilisatie voor de maatschappij in zijn geheel. Bij diskussies over dit onderwerp [49]) wordt meermalen de invloed van buiten een bedrijf staande faktoren — zoals in ons voorbeeld het loonnivo — als onveranderlik beschouwd. Zodra men grootere komplexen beziet, is dit echter niet geoorloofd.

Inplaats van via het loonnivo kan ook via de rentestand, en nog vele andere faktoren, langs een omweg het prijsnivo ,,terugwerken"; het vraagstuk van de konjunktuurpolitiek der centrale bank bevat eveneens volkomen analoge elementen.

We beëindigen hier de voorbeelden van variatieproblemen in de ekonomie en gaan ter wille van de omvang van deze beschouwingen niet in op de vraag of ook minimumproblemen van meervoudige integralen in de ekonomie optreden.

---

[49]) Vgl. Dr. A. MÜLLER, Ökon. Theorie der Konjunkturpolitik, Leipzig 1926.

SCHEMA VAN DE GEBRUIKTE VOORBEELDEN *)

Paragraaf	A. Elastic.	B. Mech.	C. Thermod.	D. Optika	E. Elektrostat	Elektrodynamika			Hfdst.
						F. Stroomnet	G. Veldvgln.	H. Bew. vlgn.	
2 Probleem	Statika	Dyn.	Evenw.	Straleng.	Ev. geleid.	Stat. verd.	Niet-hom.		
3 Randvw.	Randbind.	Vaste $q(p)$	—	—	—	—	Veld 0		
4 $\nu \geqq 2$	Blok, vlies	Königsb.	—	—	—	—	●	Koher.	
4 $\nu = 1$	Draad	Lagrange	—		—	—	—	Inkoh.	
5 $\nu = 0$	Diskreet	Statika	v, u konst.	Fermat	Lad.konst.	Min.warmte	—	—	I
6 Hogere afg.	Buiging	Königsb.	—	—	—	—	—	El.eigenveld	
7 Kwadr. F	Hooke	●	—	—	●	●	●		
7 $F = \Phi - \Sigma Qq$	Uitwendig krachtveld		p, T konst.		Pot. konst.	Geg. e.m.k.	●		
				Hamilton,	Rec. betr. tussen intens.				
8-9 Rec. betr.	—	Helmh.	Maxwell	Bruns	en kwant.				
10 Kwad. F.	Rayleigh		—	—	Id. eindig		Lorentz		II
11-16 Andere f.	Kanon. vorm	Routh Hamilton Hilbert Kl. werk.	$v, u \rightarrow p, T$		lad. → pot.	$I \rightarrow K$	Niet-hom. en hom. vgln.		III
19 $\delta \Phi = - \delta \overline{\Phi}$		Cycl. st.	—	—	●	●			
20 Niveller.		Beh. v. en.	$p_1 = p_2$ enz.	Breking	Niv. pot.	Niv. potv.	Bessel-H.		Ah.

*) Ter wille van de overzichtelikheid is er naar gestreefd elk voorbeeld zoveel mogelik door een enkel — voor de ingewijde lezer begrijpelik — woord aan te geven. De letters vóór de vb. in de tekst korresponderen met dit schema.
— uiteraard onmogelik. ● alle problemen in deze kolom behoren tot de links genoemde kategorie.

REGISTER

(VGL. OOK INHOUD BLZ. XI EN SCHEMA BLZ. 60)

STELLINGEN

I

De vervanging van het variatiebeginsel $\delta\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} F(q, \dot{q}, \xi)\, d\xi = 0$ door $\delta\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} M(p, \dot{p}, \xi)\, d\xi = 0$, waarbij $p = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$ en $M = -F + \Sigma \frac{d}{d\xi}(pq)$, zoals door DROSTE is aangegeven *), is ook toepasselik op meervoudige integralen. De door DROSTE aangegeven vervanging is echter in belangrijke speciale gevallen niet door te voeren.

*) Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik, Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924, formules (5) en (8).

II

Bij de bovengenoemde vervanging kan men in plaats van alle ook enige der q_i vervangen door p_i.

III

De differentiaalvergelijkingen van ROUTH *) kunnen uit een variatiebeginsel worden afgeleid.

*) Handbuch der Physik V, blz. 469.

IV

De stationnaire verdeling van een wisselstroom van gegeven amplitude en periode over een net van geleiders met gegeven weerstand, kapaciteit, zelfinduktie en wederkerige induktie is door een minimumprincipe te beschrijven; de energie wordt echter in 't algemeen geen extremum.

V

Het principe van HILBERT kan iets algemener worden geformuleerd door in plaats van E_0 te lezen H_0, de als gegeven te beschouwen beginwaarde van de funktie van Hamilton.

Vgl. Dit proefschrift, formules (67) en (63).

VI

De reciprociteitsbetrekkingen, aangegeven door RAYLEIGH *), laten zich generaliseren tot reciprociteitsbetrekkingen voor stootvormige evenwichtsverstoringen in elastiese media waarin slechts omkeerbare veranderingen plaats hebben.

*RAYLEIGH, Theory of Sound II, blz. 145.
Dit proefschrift, blz. 28.

VII

De grondvergelijkingen der hydrodynamika

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

laten zich niet direkt uit een minimumprincipe zonder niet-holonome nevenvoorwaarden afleiden.

VIII

Het begrip „derivaat'' zoals dat door PERRON gedefiniëerd wordt, is, ook in het geval van een funktie van meerdere veranderliken, te verkiezen boven het begrip „afgeleide''.

O. PERRON, Sitzungsber. math. Abt. Bayer. Akad. Wiss. 1926, blz. 309.

IX

De traagheidsellips van een vlakke figuur met twee onderling loodrechte symmetrieassen kan slechts voor punten op een dier assen tot een cirkel worden.

X

Bij de analyse der Röntgenopnamen ter bepaling van de kristalstruktuur van β-mangaan stuit men op moeilikheden van speciale aard.

Vgl. Arne Westgren en Gösta Phragmén, Zs. f. Phys. *33* (1925), blz. 777.

XI

De verstoring der suprageleiding door een magneties veld dient zowel voor transversale als voor longitudinale velden bestudeerd te worden.

Vgl. W. Tuyn, Diss. Leiden 1924, blz. 92; en Versl. A'dam XXXVII, blz. 476.

XII

De door Fischer aan indexcijfers gestelde eis van reversibiliteit mist ekonomiese grond.

De berekening der indexcijfers van groothandelsprijzen, zoals deze door het Centraal Buro voor de Statistiek geschiedt, is mathematies voldoende nauwkeurig.

Vgl. Dr. A. Spanjer, De Economist, April 1928.

XIII

Verdeling van kapitaal over verschillende bedrijfstakken geschiedt niet op de voor de belegger voordeligste wijze, wanneer hij er naar streeft, de laatste eenheden in elk der takken evenveel te doen opbrengen.

XIV

De vraagstukken van konjunktuurstabilisatie zijn in hun eenvoudigste vorm variatieproblemen.

XV

Het afwijkende gedrag van de naoorlogse konjunktuurbeweging van de buitenlandse handel van Duitsland moet waarschijnlik toegeschreven worden aan het niet synchroon verlopen van de konjunktuur in Duitsland met die van andere landen.

Vgl. Soc. Econ. Kroniek, 1926, 2e kw., blz. 91.
MITCHELL, Business Cycles I (1927), blz. 445.

IN DIT PROEFSCHRIFT AANGEHAALDE LITERATUUR [1])

Blz.

APPELL, P., Traîté de mécanique rationelle II 6
BESSEL—HAGEN, E., Ueber die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Math. Ann. **84** (1921), blz. 258 46
BLISS, G. A. Calculus of variations (beknopt leerboek) . . . . .
BOLTZMANN, L., Die Druckkräfte in der Hydromechanik, u.s.w. Ges. Abh. III, blz. 666 (betr. kwesties als in vgl. (14).)
BOLZA, O., Vorlesungen über Variationsrechnung 5, 18
BORN, M., Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie, Diss. Gött. 1907 18
——, Die träge Masse und das Relativitätsprinzip, Ann. der Phys. **28** (1909), blz. 571 8
——, Atommechanik, Springer 1927 33
BOWLEY, A. L., The mathematical Groundwork of Economics . 48
BURGERS, J. M., Het atoommodel van Rutherford-Bohr, Diss. Leiden 1918 33
CARATHÉODORY, C., Ueber den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem Satze der Variationsrechnung, Sitz. ber. München, math. Abt. 1926, blz. 1 14
COURANT, R., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung II, blz. 142 15
——, Ueber direkte Methoden bei Variations- und Randwertproblemen, Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. XXXIV (1925), blz. 90 9
DEBYE, P., Die Feinstruktur wasserstof-ähnlicher Spektren, Phys. ZS. **17** (1916), blz. 512 33
DIRAC, P. A. M., Relativity Quantum Mechanics with an appl. to Compton scattering, Proc. Roy. Soc. **111** (1926), blz. 405 33
DROSTE, J., Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik, Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924 . . . . 32, 46
EVANS, C. G., Economics and the calculus of variations. Proc. N.A.S. **11** (1925), blz. 90 52
FOKKER, A. D., De virtueele verplaatsingen van het electromagnetische en van het zwaartekrachtsveld bij de toep. v. h. var. beginsel v. Hamilton, Versl. A'dam XXV (1917), blz. 1067 8
FRANCK, PH., Ueber die Eikonalgleichung für anisotrope Medien, Ann. d. Physik **84** (1927) blz. 891 14
FUES, E., Störungstheorie, Handb. d. Physik V, blz. 131 33
——, zie L. NORDHEIM.

[1]) Bij wijze van aanvulling zijn aan deze literatuurlijst nog enkele artikelen enz. toegevoegd die in de tekst niet genoemd zijn, zo nodig met een korte aanduiding van de inhoud. Overigens verwijzen de blz. naar de plaats in dit proefschrift waar de betr. literatuur aangehaald is.

Blz.

GELDEREN, J. VAN, Voorlezingen over tropisch-koloniale staathuishoudkunde 49
GORDON, W. Der Compton-Effekt nach der Schrödingerschen Theorie Z.S. f. Phys. **40** (1927), blz. 117 33
GOUDRIAAN Jr., J., De doelmatigheid van de Amsterdamsche broodvoorziening, Diss. Delft 1922 49
GRAMMEL, R. zie WINKELMANN.
HADAMARD, J., Leçons sur le calcul des variations 5, 18
HAGEN, zie BESSEL.
HELMHOLTZ, H. VON, Studien zur Statik monozyklischer Systeme, Wiss. Abh. III.
——, Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Wiss. Abh. III, blz. 203 . . . . 2, 24, 25,34
HERGLOTZ, Zur Elektronentheorie, Göttinger Nachr. 1903, Heft 6, blz. 1 18
——, Ueber die Integralgleichungen der Elektronentheorie, Math. Ann. **65** (1908), blz. 87 18
HERTZ, H., Mechanik, Ges. Werke III, blz. 238, Nr. 555 . . . 44
HEUN, K., Ansätze und allg. Methoden der Systemmechanik, Enz. d. Math. Wiss. IV, blz. 453 30
HILBERT, D., Die Grundlagen der Physik I, K. Ges. Wiss. Gött. Math. Phys. 1915 . . . . 8, 46
HIRSCH, A. Die Existenzbedingungen des verallg. kin. Potentials, Math. Ann. **50** (1898), blz. 429 6
JEANS, Electricity and Magnetism 16
JEVONS, S., Theory of political economy 48
KARSTEN, K. G., The Harvard Business Index: a new interpretation, Journ. of the Am. Stat. Ass. Maart 1924, blz. 14 . . . 55
KIRCHHOFF, G., Mathematische Physik 5, 12
KEMPE, A., Het beginsel der kleinste werking in verband met de bewegingsvergelijkingen van Lagrange en Hamilton, Leiden 1878 . . . .
KLEIN, F. Ges. math. Abh. I, II 23, 46
KLEIN, O., Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips, Z.S. f. Phys. **41** (1927), blz. 407 33
KÖNIGSBERGER, L., Ueber die allg. kinetischen Potentiale, J. f. Math. 1900, blz. 141 18
——, Die Prinzipien der Mechanik, Teubner 1901 . . . . 18, 37
——, Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängigen Variable, J. f. Math. **124** (1902) blz. 202 . . . . . . 13, 36
——, Das Energieprinzip für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variablen. Sitz. ber. K. Preuss. Akad. 1904, blz. 1342 13
——, Ueber die aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringenden partiellen Differentialgleichungen der allg. Mechanik, Sitz. ber. d. K. Preuss. Akad. 1905 I, blz. 250 13, 18
LARMOR, Aether and Matter 7
LIVENS, G. H., Theory of Electricity 16
——, On the Principle of Least Action in the Theory of Electrodynamics, Phil. Mag. **32** (1916) blz. 195 7
LORENTZ, H. A., Electrons 18
——, Het theorema van Poynting over de energie in het electromagn. veld, enz. Versl. A'dam IV (1895) blz. 176 . . 28
——, Het beginsel van Hamilton in Einsteins theorie der zwaartekracht, Versl. A'dam XXIII (1915), blz. 1073 8

Blz.

LOVE, A. E., H., Theory of Elasticity 5
MAYER, A., Leipz. Ber. **74** (1898) (Voorwaarden waaraan krachten moeten voldoen opdat de bewegingsvgln. de vorm van Lagrange aannemen) 6
MINKOWSKI, H., Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. K. Ges. Wiss. Gött. 1908 8
MORGENSTERN, O., Wirtschaftsprognose 57
MÜLLER, A., Oekonomische Theorie der Konjunkturpolitik . . . 59
NOETHER, E., Invariante Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918, blz. 235 46
NORDHEIM, L., Die Prinzipe der Dynamik, Handb. der Physik V, blz. 43 . . . . 6, 12, 15
——, und FUES, E., Die Hamilton-Jacobische Theorie, Handb. d. Physik V, blz. 91. 35
PARETO, V., Manuel d'économie politique 48
PAULI Jr., W., Relativitätstheorie, Enz. d. math. Wiss. V 19 . . 8
PIETRI TONELLI, A. DE, Bestimmung des wirtschaftlichen Gleichgewichts der Güterumwandlungen. Bekannte, Unbekannte und Gleichungen. Jahrb. für Nat. ökon. u. Stat. **129** (1928), blz. 377 48
PLANCK, M., Das Prinzip der kleinsten Wirkung, Kultur der Gegenwart (Physik), blz. 692 34
RAYLEIGH, Theory of Sound 28
RIEMANN-WEBER, Die part. Differentialgleichungen der Physik I, blz. 242 (symmetrie eigenschap van de funktie van Green) 27
ROOS, C. F., Proc. Nat. Ac. Sc. **13** (1927), blz. 280 52
ROUTH, E. J., Dynamik I 30
SCHRÖDINGER, E., Vorlesungen über Wellenmechanik 14
SCHWARZSCHILD, K., Gött. Nachr. 1903, blz. 126 (Elektromagn. veld. vgln. uit een variatieprobleem) 7
SCHERING, E., Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte deren Mass von der Bewegung abhängt. Ges. Werke I, blz. 193 . . 15
SOMMERFELD, A., Zur Theorie des Zeeman-Effekts der Wasserstoflinien, Phys. ZS. **17** (1916), blz. 498 33
THIRRING, H., Elektrodynamik bewegter Körper, u.s.w. Handb. d. Physik XII blz. 315 (bij de stof van blz. 8) . . . .
TONELLI, zie PIETRI.
TRESLING, J., De vergl. der electronentheorie in een gravitatieveld van Einstein, afgeleid uit een variatieprincipe, enz. Versl. A'dam XXV (1916), blz. 844 8
VOSS, A., Die Prinzipien der rationn. Mechanik Enz. d. math. Wiss. IV, 1, blz. 3 34
WAGEMANN, E., Konjunkturlehre 57
WALRAS, L., Eléments d'économie politique 48
WHITTAKER, H., Analytical Dynamics 6
WICKSELL, K., Vorlesungen über Nationalökonomie 48
WINKELMANN, M. und GRAMMEL, R. Kinetik der starren Körper, Handb. d. Physik V, blz. 373 30
ZERNER, F', Die Elektronentheorie. Handb. d. Physik XII, blz. 181. (bij blz. 8).