1919-25

DEFORMATIES EN TRILLINGEN IN HET VASTE LICHAAM BIJ AFWIJKINGEN VAN DE WET VAN HOOKE, OOK IN VERBAND MET DE TOESTANDSVERGELIJKING.

Boek- en Steendrukkerij Eduard IJdo. — Leiden.

DEFORMATIES EN TRILLINGEN IN HET VASTE LICHAAM BIJ AFWIJKINGEN VAN DE WET VAN HOOKE, OOK IN VERBAND MET DE TOESTANDSVERGELIJKING.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS, Dr. P. C. T. VAN DER HOEVEN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG 9 JULI 1919, DES NAMIDDAGS TE KLOKKE 4 UUR,

DOOR

JAN TRESLING,

GEBOREN TE WINSCHOTEN.

LEIDEN — EDUARD IJDO — 1919.

AAN MIJNE MOEDER.

Bij het voltooien van dit proefschrift grijp ik gaarne de gelegenheid aan, openlijk mijn dank uit te spreken aan de hoogleeraren, die tot mijn vorming hebben bijgedragen.

Met veel genoegen denk ik terug aan de vele waarlijk mooie colleges, die ik gaarne gehoord heb en aan de welwillendheid, waarmede mij steeds gelegenheid tot practisch werken is gegeven, wanneer ik er om vroeg.

De laatste jaren, die ik in Leiden heb doorgebracht, waardoor ik nader met U, Prof. LORENTZ *en* Prof. EHRENFEST, *in aanraking ben gekomen, zullen mij steeds in aangename herinnering blijven.*

Uw Maandagochtend-college Prof. LORENTZ, *zal zoowel wat inhoud der voordracht betreft, als wat warmte van toon aangaat, steeds voor mij een voorbeeld blijven van maatschappelijk physisch leven.*

U hooggeschatte promotor Prof. EHRENFEST, *ben ik zeer veel dank verschuldigd. Uw welwillendheid en voortvarendheid, om steeds belangstelling voor de natuurkunde te kweeken, waar deze ontwikkeling en leiding behoefde en steeds belangstelling te voelen, waar U belangstelling zag of hoopte, heb ik ten hoogste leeren waardeeren.*

INHOUD.

HOOFDSTUK III.

HOOFDSTUK IV.

ALGEMEENE INLEIDING.

De verschijnselen, die in dit proefschrift worden besproken, zijn allen het gevolg van afwijkingen van de wet van HOOKE. „Het bevat een uitwerking, preciseering of verbetering van verhandelingen van VOIGT [1]), RAYLEIGH [2]), DEBIJE [3]), M. I. M. v. EVERDINGEN [4]), LORENTZ [5]), ORNSTEIN en ZERNIKE [6]).

In hoofdstuk I wordt de druk door trillingen van een algemeen standpunt beschouwd, een druk, die RAYLEIGH in vele gevallen heeft berekend.

Hoofdstuk II behandelt dezelfde vragen als VOIGT in bovengenoemde verhandeling. Slechts is VOIGT van een onjuisten vorm voor de potentieele energie uitgegaan, waardoor mijn berekeningen mij beter toeschijnen.

Hoofdstuk III bevat een uitwerking van de theorie van DEBIJE, over de uitzetting van vaste lichamen door warmte. Ze lost gedeeltelijk op het probleem, dat v. EVERDINGEN zich in zijn dissertatie gesteld heeft, dat hij echter niet juist heeft opgelost, daar hij ook van een verkeerde vorm van de potentieele energie is uitgegaan Ze completeert de beschouwingen van LORENTZ, in zooverre LORENTZ, niet beschikt over alle elastische gegevens,

---

1) W. VOIGT, Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität; Ann. der physik und Chemie 1894. 52 p. 536.

2) Lord RAYLEIGH 1. On the Pressure of Vibrations. Phil. Mag. March 1902. pag. 338. 2. On the Momentum and Pressure of Gaseous Vibrations, and on the Connextion with the Virial Theorem Phil. Mag. 1905. pag. 365.

3) P. DEBIJE. Zustandgleichung und Quantenhypothese, Wolfskehlvorträge, Göttingen, 1913, p 17. Leipzig Teubner.

4) M. I. M. v EVERDINGEN. De toestandvergelijking van het isotrope, vaste lichaam. Proefschrift Utrecht 1914.

5) H. A. LORENTZ. De uitzetting van vaste lichamen door warmte. Versl. Kon. Ak. Nov. 1915 XXIV, p. 671.

6) ORNSTEIN en ZERNIKE. Bijdrage tot de kinetische theorie der vaste stof, I, II, III. Versl. Kon. Ak. Febr.—Maart 1916 XXIV, p. 1561, p. 1689. Juni 1916 XXV, p. 396.

waarvoor ik in Hoofdstuk II methoden ter bepaling heb aangewezen. Er wordt een aanname gemaakt voor de potentieele energie tot zulk een benadering, als noodig is om de temperatuur-afhankelijkheid van de compressibiliteit te verkrijgen; een ontwikkellng tot hoogere termen dan v. EVERDINGEN en ORNSTEIN-ZERNIKE gebruiken.

Hoofstuk IV geeft aan, welke waarde men voor het warmtegeleidingsvermogen volgens de theorie van DEBIJE vindt, indien men zich beperkt tot warmtegeleiding in één dimensie. In dit geval kan het warmtegeleidingsvermogen nauwkeuriger worden berekend, daar men geen isotropie der straling behoeft aan te nemen.

Voor het overige kan ik naar de inleiding van ieder hoofdstuk en de inhoudsopgave verwijzen.

HOOFDSTUK I.

Over den druk door trillingen veroorzaakt.

Inleiding.

In dit eerste hoofdstuk zal ik onderzoeken welke druk op de uiteinden van een gespannen snaar of een vrije staaf uitgeoefend wordt, wanneer deze in trilling wordt gebracht, terwijl de uiteinden worden vastgehouden. De druk varieert natuurlijk met den tijd. We vragen dus naar den gemiddelden druk. Over 't algemeen zal die gemiddelde druk $\overline{L}$ als een functie van de gemiddelde elongaties worden gevonden. Zóó b.v. bij longitudinale trillingen, wanneer we ons tot 2e graads termen beperken

$$\overline{L} = L_0 + k\,\overline{\xi_{x\,gr}} + q\,\overline{\xi^2_{x\,gr}} \quad \text{cf. § 3} \ldots\ldots (1)$$

Hierin wijst $\xi_{x\,gr}$ aan de elongatie bij een uiteinde.

Bij eerste benadering zal ξ_x een periodieke functie van den tijd zijn; toch mag men niet $\overline{\xi_x}$ gelijk 0 stellen. Om onze formule voor $\overline{L}$ te kunnen toepassen, mogen we de bewegingen in de snaar niet meer als oneindig kleine trillingen opvatten.

In § 1 wordt aangetoond, hoe in 't algemeen termen als $\overline{\xi_x}$ uitgedrukt kunnen worden in gemiddelde quadratische termen der elongaties. Dit gedaan zijnde en wanneer we hebben gesubstitueerd in verg. (1), kunnen we dan de trillingen van de snaar als oneindig klein opvatten. De druk, die berekend moet worden, hebben we in quadratische termen uitgedrukt, zooals de energie dit ook bij 1e benadering is.

Bij uitwerking van deze gedachte blijkt (§ 2) de $\overline{L} - L_0$ evenredig te zijn aan de energiedichtheid.

Nemen we voor de energiedichtheid aan

$$V - V_0 = \frac{k}{2}\,\xi_x^2 + \frac{q}{3}\,\xi_x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dan wordt

$$\overline{L} - L_0 = \frac{q}{k}\,2\,(\overline{V - V_0}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

De trillingsdruk $\overline{L} - L_0$ verdwijnt dus tegelijk met q en is dus gelijk 0, wanneer de snaar aan de wet VAN HOOKE voldoet.

De evenredigheid met de energiedichtheid blijkt ten nauwste samen te hangen met de homogeniteit van de snaar, waardoor het probleem om zoo te zeggen een probleem met één vrijheidsgraad wordt. Bij zulk een evenredigheid denken we dadelijk aan de kinetische gastheorie, waar voor den druk der moleculen op den wand $= \frac{2}{3}$ energiedichtheid berekend wordt of aan de stralingstheorie, waar voor den stralingsdruk gevonden wordt $\frac{1}{3} \times$ energiedichtheid.

In deze beide gevallen is dus de evenredigheidsfactor geen materiaalconstante meer, maar een getal.

Wil men nu de moleculaire bewegingen in een gas ook opvatten als een superpositie van geluidsgolven of wil men een mechanische lichttheorie hebben, dan moeten deze die coeff. kunnen verklaren.

In het volgende wordt geen poging hiertoe gedaan, maar toch schijnt het nuttig hierop te wijzen, daar het misschien als een inleidende studie hiertoe kan dienen.

Verg. (3) kan worden opgevat als de toestandsverg. van de snaar, wanneer we n. l. de calorische toestandsverg. kennen, d. w. z. het verband tusschen energiedichtheid en temperatuur.

Hierop komen we terug in Hoofdstuk III, waar we analoge problemen als hier behandelen, maar voor driedimensionale lichamen.

In § 2 heb ik onderzocht den gemiddelden druk, die tranversale trillingen op de vastgehouden uiteinden van de snaar uitoefenen. Om zuivere transversaliteit te verkrijgen laat ik de verschillende punten van de snaar langs staven glijden, die loodrecht op die snaar staan. Ik heb dit kunstmatig probleem gesteld om het onderscheid te laten zien met den druk, uitgeoefend door „vrije transversale trillingen" (§ 4), die secundair longitudinale golven van de 2e orde voortbrengen. De druk bij de zuiver transversale trillingen blijkt over het algemeen niet evenredig aan de energiedichtheid te zijn. Laten we de staven weg, dan zullen de secundaire longitudinale trillingen weer de evenredigheid bewerken. Bij de berekening van die evenredigheidsfactor mogen we niet meer de spanning S van de snaar als een constante opvatten. Deze factor zal afhankelijk zijn van de spanningstoename bij de eenheid van uitrekking.

Men vindt

$$\overline{L} - L_0 = \frac{l\dfrac{dS}{dl} - S}{S} \; \frac{\overline{V - V_0}}{l} \quad \text{(lengtesnaar} = l\text{)}.$$

In § 3 onderzoek ik longitudinale golven naar hun druk.

Rayleigh heeft den druk uitgerekend, die transversale trillingen op een over de snaar geschoven ring uitoefenen. Hij heeft hierbij verwaarloosd de longitudinale trillingen, die tegelijk met de transversale zullen optreden en vindt een druk, die gelijk is aan de energiedichtheid. In welken zin zijn uitkomst moet worden opgevat wordt in § 5 behandeld.

§ 6. Behandelt dit geval van Rayleigh uitvoeriger. Hier wordt onderzocht, welke fractie van de transversale energie als longitudinale wordt doorgelaten.

In § 7 bereken ik denzelfden druk als speciaal-geval van de kracht, die de transversale trillingen gemiddeld op een zich bewegenden ring uitoefenen.

In § 8 wordt besproken de gemiddelde longitudinale uitwijking, die bij longitudinale trillingen de verschillende punten der snaar zullen krijgen, een probleem geheel analoog aan het zoeken van den nieuwen evenwichtsstand van een quasielastisch gebonden punt.

In § 9 wordt gezocht naar den gemiddelden druk, die geluidsgolven op een wand uitoefenen, waarbij resultaten van Rayleigh op eenvoudiger wijze worden verkregen.

§ 1. *De gemiddelde kracht op een parameter is uit te drukken in de gemiddelde quadratische uitwijkingen.*

Gegeven zij een mechanisme van $n+1$ vrijheidsgraden. De eerste n vrijheidsgraden worden bepaald door hun coördinaten $\vartheta_1 \dots \vartheta_n$. De laatste bepalen we door een coördinaat l.

De potentieele energie schrijven we

$$V = V_0 + \sum_i b_i \vartheta_i + \sum_{pq} b_{pq} \vartheta_p \vartheta_q + \sum_{pqr} b_{pqr} \vartheta_p \vartheta_q \vartheta_r.$$

waarin $\qquad b_{pq} = b_{qp} \qquad b_{pqr} = b_{prq} =$ enz.

V_0 en de b's zijn functies van l, en $b_i = 0$ voor $l = l_0$, opdat voor $l = l_0$ de stand $\vartheta_i = 0$ (i van 1 tot n) een evenwichtsstand zij.

Voor de kinetische energie schrijven we

$$T = a_{00}\,\dot{l}^2 + \dot{l}\sum_p a_{0p}\,\dot{\vartheta}_p + \sum_{pq} a_{pq}\,\dot{\vartheta}_p\,\dot{\vartheta}_q$$

de a's zijn functies van l, $\vartheta_1 \ldots . \vartheta_n$.

Een uitwendige kracht L werke op den parameter l_1, die veroorzaakt, dat gedurende de beweging l steeds zijn constante waarde l_0 behoudt. De gemiddelde L, die hiervoor noodig is $\overline{L}$, willen we berekenen in 1ᵉ benadering.

Op den parameter l toegepast, geven de vergelijkingen van Lagrange

$$L_{l=l_0} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{\partial V}{\partial l}\right]_{l=l_0}.$$

Nemen we het tijdsgemiddelde, dan kan de 1ᵉ term rechts worden weggelaten. We mogen dan schrijven

$$\overline{L_{l=l_0}} = \left[-\frac{\overline{\partial T}}{\partial l} + \frac{\overline{\partial V}}{\partial l}\right]_{l=l_0}.$$

Substitueeren we hierin de boven ontwikkelde waarde van V dan luidt deze laatste verg.

$$\overline{L}_{l=l_0} = \frac{\partial V_0}{\partial l_0} + \sum \frac{\partial b_i}{\partial l_0}\,\overline{\vartheta_i} + \sum_{pq} \frac{\partial b_{pq}}{\partial l_0}\,\overline{\vartheta_p \vartheta_q} - \frac{\overline{\partial T}}{\partial l} \ldots . (4)$$

We zien, dat hierin optreden gemiddelde 1ᵉ graadstermen.

Deze termen $\frac{\partial b_i}{\partial l_0}\,\overline{\vartheta_i}$ noodzaken ons de bewegingsverg. voor de ϑ in 2ᵉ benadering op te lossen. We kunnen echter de $\overline{\vartheta_i}$ zeer gemakkelijk in de gemiddelde quardraten en dubbele producten uitdrukken. Immers de vergelijkingen van Lagrange op ϑ_i toegepast geeft

$$0 = \frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} + b_i + 2\sum_p b_{pi}\,\vartheta_p + 3\sum_{pq} b_{pqi}\,\vartheta_p\,\vartheta_q$$

Wanneer we nu bedenken, dat b_i (voor $l = l_0$) gelijk 0 is en dat we weer bij het middelen den 1ᵉⁿ term mogen weglaten geven de n vergelijkingen, die we dan krijgen:

$$0 = -\frac{\overline{\partial T}}{\partial \vartheta_i} + 2\sum_p b_{pi}\,\overline{\vartheta_p} + 3\sum b_{pqi}\,\overline{\vartheta_p \vartheta_q} \ldots \ldots . (5)$$

de mogelijkheid om de $\overline{\vartheta_i}$ uit te drukken in gemiddelde dubbele producten.

Deze kunnen we in $\overline{L}$ substitueeren en hebben dan ons doel bereikt.

In de volgende §§ zullen we echter meest door kunstgrepen uit vergelijkingen als (4) en (5) de 1e graadstermen elimineeren.

Een 2e methode hiervoor bestaat in het invoeren van nieuwe coordinaten η_i in de plaats van ϑ_i. Deze nieuwe coordinaten zullen dan de uitwijkingen uit de evenwichtsstanden zijn, zooals die liggen bij iedere l. Hierdoor verdwijnen in de potentieele energie de lineaire termen, niet alleen voor $l = l_0$, maar voor alle waarden van l. Het komt er dus bij deze methode op aan die substitutie $\vartheta_i = \psi_i (l, \eta_1 \ldots\ldots \eta_n)$ te vinden.

Noemen we de potentieele energie in de η's uitgedrukt Φ en de kinetische energie τ.

Dan kunnen we $\overline{L}$ berekenen uit

$$\overline{L} = - \overline{\frac{\partial \tau}{\partial l}} + \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial l}}$$

en hebben hiermee ons doel bereikt.

Dat de $\overline{L}$ in dit geval dezelfde beteekenis heeft als bij de 1e methode, blijkt als volgt.

De arbeid, die de uitwendige krachten verrichten bij een virtueele verandering van l met δl en een willekeurige virtueele verandering der ϑ_i, bedraagt $L \delta l$.

Bij een virtueele verandering $\delta \eta_1 \ldots . \delta \eta_n \;\delta l$ moge ze bedragen

$$\mathrm{H}_1 \delta\eta_1 + \ldots . \mathrm{H}_n \delta\eta_n + \Lambda \delta l =$$

$$\sum_i \sum_k \mathrm{H}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \vartheta_k} \delta \vartheta_k + \left(\Lambda + \sum \mathrm{H}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial l}\right) \delta l.$$

Dit moet identiek $= L \delta l$.

$$\sum_i \sum_k \mathrm{H}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \vartheta_k} \delta \vartheta_k + \left(\Lambda + \sum \mathrm{H}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial l}\right) \delta l \equiv L \delta l \quad \ldots . \; (6)$$

Hieruit volgt in de eerste plaats:

$$\sum_i \mathrm{H}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \vartheta_k} \equiv 0. \qquad k \text{ van 1 tot } n.$$

en daar de η_i onafhankelijke functies der ϑ_k zijn,

$$\mathrm{H}_i = 0.$$

De gelijkstelling der coeff. van δl uit (6) in rechter en linker lid geeft met gebruikmaking der verg. $H_i = 0$.

$$\Lambda = L \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 2. *Gemiddelde kracht uitgeoefend op de vaste uiteinden van een snaar, die „zuiver transversaal" trilt.*

Beschouwen we eerst n massapunten op een rechte lijn, die door gespannen veeren zonder massa, wier normaallengte, d. w. z. lengte wanneer ze niet gespannen zijn, l_0 bedraagt, met elkaar zijn verbonden. In rust liggen ze onderling op een afstand $a = \dfrac{l}{n+1}$ en de uitersten ook elk op een afstand a van een vast uiteinde. We willen het tijdsgemiddelde van de kracht berekenen, die noodig is om de vaste punten op hun plaats te houden, wanneer de n massapunten transversaal trillen.

Om er ons van te verzekeren, dat de trillingen werkelijk transversaal zijn, zullen we de massapunten langs staven leiden, die op onderlingen afstand a loodrecht op de snaar staan. We zullen echter, omdat we het voor een later doel noodig hebben de kinetische en potentieele energie opstellen voor het algemeenere geval, dat de abscissen der massapunten telkens met een van punt tot punt verschillend bedrag λ_i toenemen. Hun ordinaten noemen we y_i

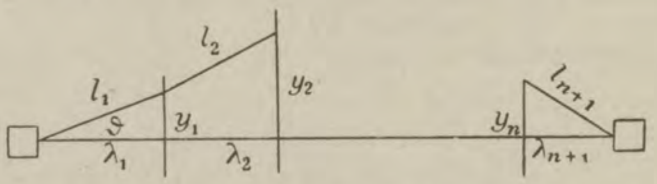

Fig. 1.

De kinetische energie bedraagt

$$T = \tfrac{1}{2} m \sum (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Voor de potentieele energie kunnen we schrijven

$$V = l_0 \sum_i f\left(\frac{l_i - l_0}{l_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

De totaallengte der ongespannen snaar stellen we L_0 en naarmate we de snaar uit meer veeren samengesteld denken zullen we van iedere veer de normaallengte kleiner nemen, zoodanig, dat toch de gezamenlijke lengte der ongespannen veeren L_0 bedraagt. De functie f zullen we dezelfde houden. Dan is de potentieele energie per lengteeenheid bij eenzelfde relatieve uitrekking dezelfde voor iedere veer.

De transversale uitwijkingen denken we ons klein ten opzichte van de lengte der veeren.

Bijkbaar hebben we

$$\overline{L} = \overline{S(l_1)\cos\vartheta} = \overline{S(l_1)\left(1 - \frac{y_1^2}{2\lambda_1^2}\right)} \dots\dots\dots\dots (9)$$

Hierin wijst het argument l_1 van S aan, dat de spanning in de eerste veer voor een lengte l_1 bedoeld is.

We kunnen ontwikkelen

$$S(l_1) = S(\lambda_1) + \lambda_1 \frac{dS}{d\lambda_1} \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{\lambda_1^2} \dots\dots\dots\dots (10)$$

immers $l_1 - \lambda_1 = \dfrac{y_1^2}{2\lambda_1}$.

Substitutie van (10) in (9) geeft

$$\overline{L} = S(\lambda_1) + \left[\lambda_1 \frac{dS}{d\lambda_1} - S(\lambda_1)\right] \overline{\frac{y_1^2}{2\lambda_1^2}} \dots\dots\dots\dots (11)$$

Uit (8) volgt

$$S(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda_1}\left[l_0 f\left(\frac{\lambda_1 - l_0}{l_0}\right)\right] = f'\left(\frac{\lambda_1 - l_0}{l_0}\right) \dots\dots (12)$$

$$\lambda_1 \frac{dS}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{l_0} f''\left(\frac{\lambda_1 - l_0}{l_0}\right) \dots\dots\dots\dots (13)$$

Substitutie van (12) en (13) in (11) geeft

$$\overline{L} = f' + \left[\frac{\lambda_1}{l_0} f'' - f'\right] \overline{\frac{y_1^2}{2\lambda^2}} \dots\dots\dots\dots (14)$$

waarbij we de aanduiding van het argument in f hebben weggelaten. Ontwikkelen we de potentieele energie naar de transversale uitwijkingen, zoo vinden we

$$\text{daar } l_i = \lambda_i + \frac{1}{2} \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{\lambda_i}:$$

$$V = l_0 \sum_i f\left(\frac{\lambda_i - l_0}{l_0}\right) + \frac{1}{2} \sum_i f'\left(\frac{\lambda_i - l_0}{l_0}\right) \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{\lambda_i} \quad (15)$$

We vinden hieruit ook de $\overline{L}$ als $\overline{L} = \frac{\overline{\partial V}}{\partial \lambda_1}$ blijkens (14).

Door de transformatie op normaalcoörd. P_s, voor 't geval dat de staven op onderling gelijke afstanden $\lambda_i = a$ staan:

$$y_\nu = \sum_s P_s \sin \frac{s \nu \pi}{n+1} \qquad (\nu \text{ en } s \text{ van 1 tot } n).$$

krijgt de potentieele energie (15) den vorm

$$V = V_0 - \tfrac{1}{2} \frac{S(a)}{a} 2(n+1) \sum_s \sin^2 \frac{\pi s}{2(n+1)} P_s^2 \ldots. \quad (15a)$$

De kinetische energie wordt

$$T = \frac{m}{2} \frac{2(n+1)}{4} \sum_s \dot{P}_s^2.$$

Wanneer we ons voorstellen, dat de beide vaste punten elk $\frac{1}{2} m$ dragen èn we bij vergrooting van het aantal massapunten de totaalmassa constant laten, kunnen we schrijven $(n+1) m = M$.

De frequenties der verschillende trillingswijzen bedragen

$$\nu_s = 2(n+1) \sin \left[\frac{\pi s}{2(n+1)}\right] \sqrt{\frac{S(a)}{M l}}. \qquad s \text{ van 1 tot } n$$

Voor $\overline{y_1^2}$ vind ik

$$\overline{y_1^2} = \sum_s \overline{P_s^2} \sin^2 \frac{\pi s}{n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Deze uitdrukking hebben we in (14) te substitueeren.

Voor hooge waarden van n en wanneer we slechts trillingen hebben in de reeks massapunten (die dan op een snaar begint te gelijken) met niet al te kleine golflengten, kunnen we de sinussen door hun argument vervangen.

(15a) wordt dan

$$V = V_0 + S(a) \frac{\pi^2}{4(n+1)} \sum \frac{s^2 P_s^2}{a} \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

(16) wordt dan

$$\overline{y_1^2} = \frac{\pi^2}{(n+1)^2} \sum \overline{s^2 P_s^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Uit (11), (17) en (18) krijgt men [in (11) is $\lambda_1 = a$]

$$\overline{L} - S(a) = \frac{a\frac{dS}{da} - S}{S} \; \frac{2\,(\overline{V - V_0})}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{A}$$

De gezochte kracht is dus in dit geval evenredig met de energie per lengteeenheid. Dus voor het geval $n = \infty$ en niet al te kleine golflengten.

Hebben we slechts één trillend massapunt, dan wordt

$$V = 2\,l_0 f\left(\frac{a - l_0}{l_0}\right) + f'\left(\frac{a - l_0}{l_0}\right)\frac{y_1^2}{a}$$

$$\overline{L} - S(a) = \left(a\frac{dS}{da} - S\right)\frac{\overline{y_1^2}}{2a^2} = \frac{a\frac{dS}{da} - S}{S}\;\frac{\overline{V - V_0}}{l}$$

dus ook weer evenredig met de energie per lengte-eenheid.

Deze uitkomst verschilt echter van die in 't vorige grensgeval door den factor 2.

Neem ik alleen P_q van 0 verschillend, dan wordt

$$V = V_0 + \tfrac{1}{2}\,\frac{S}{a}\,2(n+1)\sin^2\frac{\pi q}{2(n+1)}\,P_q^2$$

$$y_1^2 = P_q^2 \sin^2\frac{\pi q}{n+1} = 4\,P_q^2 \sin^2\frac{\pi q}{2(n+1)}\cos^2\frac{\pi q}{2(n+1)}$$

en

$$\overline{L} - S(a) = \frac{a\frac{dS}{da} - S}{S}\cos^2\frac{\pi q}{2(n+1)}\;2\,\frac{\overline{V - V_0}}{l}.$$

De factor $\cos^2\frac{\pi q}{2(n+1)}$ loopt van dicht bij 1 (voor $q = 1$) tot dicht bij 0, wanneer q varieert van 1 tot n en n groot is. Bij eenzelfde trillingsenergie hebben dus de verschillende partiaaltrillingen een geheel verschillenden invloed op de gemiddelde kracht, die noodig is om de uiteinden vast te houden. Vooral de lange golflengten zullen tot $\overline{L}$ bijdragen.

We worden nu ook tot de volgende vraag gevoerd.

Denken we ons de staven, waarlangs de massapunten glijden onderling door oneindig sterke veeren verbonden. Dan zullen in al deze veeren voortdurend tijdens de beweging der massapunten spanningen heerschen. We vragen nu naar de gemiddelde spanning in die $(n+1)$ veeren op ieder oogenblik. Deze waarde S_p berekenen we blijkbaar als

$$S_p = \frac{1}{n+1}\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\right)_{\lambda_i = a} = S + \frac{1}{2(n+1)} \frac{a\frac{dS}{da} - S}{a^2} \sum (y_i - y_{i-1})^2$$

of

$$S_p - S(a) = \frac{a\frac{dS}{da} - S}{S} \frac{V - V_0}{l}.$$

Dit geldt op elk oogenblik, dus ook voor het tijdsgemiddelde. De S_p blijkt evenredig met de energiedichtheid onafhankelijk van de bewegingswijzen, waarin de snaar trilt.

In 't voorgaande hebben we de massapunten langs verticale staven geleid. Wanneer ze vrij trillen, zullen ze echter tegelijk kleine longitudinale bewegingen uitvoeren en door ook die in aanmerking te nemen, zullen we later zien § 4, dat dan inderdaad steeds de gevraagde S evenredig aan de gemiddelde energiedichtheid is zooals we dit hier gezien hebben in het eerste bijzondere geval. Echter is bij het vrij trillen (§ 4) de evenredigheidsfactor de helft kleiner. We zullen echter eerst onafhankelijk de longitudinale trillingen van een reeks massapunten beschouwen.

§ 3. *Longitudinale trillingen van n massapunten.*

Wanneer we de kracht $\overline{L}$ willen berekenen voor dit geval, zullen we de plaats van het i^e massapunt door de afwijking ξ_i uit zijn evenwichtsstand $i\frac{l}{n+1} = i\,a$ bepalen.

We moeten echter de potentieele energie uitdrukken in deze coordinaten ook wanneer de afstand der beide vaste uiteinden iets grooter dan l b.v. gelijk $l + \lambda$ is.

We kunnen de potentieele energie in den volgenden vorm schrijven, waarin λ dus een virtueele verplaatsing van het laatste vaste punt is:

$$V = V_0 + aS\left[\frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_2 - \xi_1}{a} + \ldots\ldots \frac{\lambda - \xi_n}{a}\right]$$

$$+ \frac{ak}{2}\left[\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{a}\right)^2 + \ldots\ldots \left(\frac{\lambda - \xi_n}{a}\right)^2\right]$$

$$+ a\frac{q}{3}\left[\left(\frac{\xi_1}{a}\right)\right]^3 + \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{a}\right)^3 + \ldots\ldots \left(\frac{\lambda - \xi_n}{a}\right)^3\Bigg]$$

Voor $\lambda = 0$ komen slechts 2e- en hoogeregraadstermen der ξ in deze uitdrukking voor, waaruit volgt, dat de ξ's uitwijkingen uit evenwichtsstanden zijn.

De $\overline{L}$ vinden we uit

$$\overline{L} = \left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda = 0}$$

. dus

$$\overline{L} = S - k\frac{\overline{\xi_n}}{a} + q\,\frac{\overline{\xi_n^2}}{a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

De $\overline{\xi_n}$ kunnen we met behulp van

$$\left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial \xi_\mu}\right)_{\lambda = 0} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

voor alle waarden van μ in gemiddelde quadratische termen uitdrukken en wel geeft

$$\Sigma\left(\mu\,\frac{\overline{\partial V}}{\partial \xi_\mu}\right)_{\lambda = 0} = 0 \qquad \text{na uitwerking}$$

$$\frac{k}{a}(n+1)\overline{\xi_n} + \frac{q}{a^2}\left[\overline{\xi_1^2} + \overline{(\xi_2 - \xi_1)^2} \ldots \overline{\xi_n^2} - (n+1)\,\overline{\xi_n^2}\right] = 0$$

dus

$$\overline{-\frac{k}{a}\,\xi_n + \frac{q}{a^2}\,\xi_n^2} = \frac{1}{n+1}\,\frac{q}{a^2}\,\left[\overline{\xi_1^2} + \overline{(\xi_2 - \xi_1)} + \ldots\, \overline{\xi_n^2}\right] \quad (21)$$

(21) in (19) gesubstitueerd geeft.

$$\overline{L} - S = \frac{q}{k}\;\frac{2\,(\overline{V - V_0})}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{B}$$

Verg. (20) drukt uit dat de gemiddelde kracht op het μ^e punt gelijk 0 is. Hieruit volgt, dat de gemiddelde spanningen tusschen elke 2 veeren aan elkaar gelijk zullen zijn en ook gelijk aan de $\overline{L}$ of in formule uitgedrukt

$$\overline{L} = \frac{1}{n+1} \sum \overline{\frac{\partial V}{\partial (\xi_i - \xi_{i-1})}}.$$

Het rechter lid uitgerekend geeft het rechter lid van verg. (21).

De 2e methode, die we in § 1 gebruikt hebben om $\overline{L}$ in quadratische termen uit te drukken, bestaat in het invoeren van nieuwe coordinaten. die, voor een willekeurige λ, de uitwijkingen uit standen aangeven, welke bij die λ evenwichtsstanden zijn en die hier met de ξ_i samenhangen door de betrekkingen

$$\xi_i = \eta_i + i \frac{\lambda}{n+1}.$$

De potenticele energie neemt dan den vorm aan:

$$V = V_0 + S\lambda + a\left(\frac{k}{2} - \frac{q}{a}\frac{\lambda}{n+1}\right)\left[\left(\frac{\eta_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{a}\right)^2 + \ldots . \left(\frac{\eta_n}{a}\right)^2\right],$$

waarbij wij natuurlijk λ^2 hebben verwaarloosd.

De formule

$$\overline{L} = \left(\overline{\frac{\partial V}{\partial \lambda}}\right)_{\lambda = 0}$$

geeft ons dus

$$\overline{L} - S = \frac{q}{n+1}\left[\overline{\left(\frac{\eta_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{a}\right)^2 + \ldots . \left(\frac{\eta_n}{a}\right)^2}\right] = \frac{q}{k}\,\frac{2\,\overline{(V - V_0)}.}{l}$$

Wel geldt altijd

$$\overline{L} = \frac{q}{n+1} \sum \overline{\frac{\partial V}{\partial (\xi_i - \xi_{i-1})}};$$

immers ook, wanneer de veeren van verschillende sterkte zijn, zal gemiddeld de spanning in die verschillende veeren gelijk zijn, maar de kunstgreep om $\overline{L}$ zoo voor te stellen, die ons bij de veeren van gelijke sterkte helpt de gemiddelde eerste graads termen weg te werken, zal ons in het algemeene geval niet meer helpen. We kunnen hier natuurlijk ook weer de 1e graadstermen in de quadratische uitdrukken, zoals algemeen in § 1 is aangetoond. Aan een eenvoudig voorbeeld kan men gemakkelijk laten zien, dat bij veeren van verschillende sterkte de $\overline{L}$ niet meer evenredig aan den energieinhoud is.

Nemen we drie veeren achter elkaar, waarvan de 1e en laatste aan vaste punten zijn verbonden.

Dan kunnen we de potentieele energie schrijven in den vorm

$$V = V_0 + \tfrac{1}{2}\left[k_1 \xi_1^2 + k_2 (\xi_2 - \xi_1)^2 + k_3 \xi_2^2\right] + \tfrac{1}{3}\left[q_1 \xi_1^3 + q_2 (\xi_2 - \xi_1)^3 - q_3 \xi_2^3\right].$$

De gevraagde kracht $\overline{L}$ bedraagt

$$\overline{L} = S - k_3 \overline{\xi_2} + q_3 \overline{\xi_2^2}.$$

De bewegingsvergelijkingen geven

$$(k_1 + k_2)\,\overline{\xi_1} - k_2 \overline{\xi_2} = -\,q_1 \overline{\xi_1^2} + q_2 \overline{(\xi_2 - \xi_1)^2}$$

$$-\,k_2 \overline{\xi_1} + (k_2 + k_3)\,\overline{\xi_2} = -\,q_2 \overline{(\xi_2 - \xi_1)^2} + q_3 \overline{\xi_2^2}.$$

Daaruit volgt

$$\overline{L} - S = \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}\left[\frac{q_1}{k_1}\overline{\xi_1^2} + \frac{q_2}{k_2}\overline{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \frac{q_3}{k_3}\overline{\xi_2^2}\right].$$

Men kan gemakkelijk inzien, dat dit niet steeds, d. w. z. bij alle mogelijke trillingswijzen evenredig is aan

$$k_1 \overline{\xi_1^2} + k_2 \overline{(\xi_2 - \xi_1)^2} + k_3 \overline{\xi_2^2}.$$

De eenvoudige eigenschap, die we boven vonden, n.l. dat de gemiddelde kracht op de uiteinden evenredig is aan de energiedichtheid is dus blijkbaar een gevolg daarvan, dat alle punten van de reeks gelijkwaardig aan elkaar zijn gebonden. Bovendien hebben we bij de afleiding er gebruik van gemaakt, dat de spanning gemiddeld in die veeren gelijk is. Beide eigenschappen geven een homogeniteit aan, waardoor 't probleem om zoo te zeggen tot een van één vrijheidsgraad wordt. Bij de gedwongen zuiver transversale trillingen in § 2 ontbrak de 2e soort homogeniteit.

Voor een continue snaar loopt de berekening als volgt:

$$V = V_0 + g\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx + \frac{k}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{q}{3}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3 dx \quad (22)$$

$$\overline{L} = g + k\,(\overline{\xi_x})_{gr} + q\,(\overline{\xi_x^2})_{gr} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Hierin staat $(\xi_x)_{gr}$ in plaats van $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=l}$.

Voor $S_i = \dfrac{\partial V}{\partial(\xi_i - \xi_{i-1})}$ kunnen we schrijven $\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_x}$,

dus
$$S_i = g + k\xi_x + q\xi_x^2.$$

Een punt, dat in den evenwichtsstand een coordinaat x heeft, zal na een verplaatsing een coordinaat x' hebben $x' = x + \xi$.

De bewegingsverg. van de snaar kunnen we schrijven in den vorm
$$\rho_0 \frac{\partial^2 x'}{dt^2} = -\frac{\partial S_i}{\partial x}.$$

Hieruit blijkt, dat $\overline{S_i}$ onafhankelijk van x is, dus ook gelijk $\overline{L}$ moet zijn en eveneens gelijk
$$\frac{1}{l}\int_0^l \overline{S_i}\, dx\,,$$
of
$$\overline{L} = g + \frac{k}{l}\int \overline{\xi_x}\, dx + \frac{q}{l}\int_0^l \overline{\xi_x^2}\, dx.$$

Door de kunstgreep van het middelen over de lengte verdwijnt uit de L de lineaire term, immers
$$\int_0^l \overline{\xi_x}\; dx = \overline{\int \xi_x\; dx} = 0.$$
dus
$$\overline{L} = g + \frac{q}{l}\int_0^l \overline{\xi_x^2}\; dx \qquad (24)$$

Ook in (22) verdwijnt door het integreeren de eerste integraal. De laatste integraal laten we in (22) weer weg, omdat het verwaarloosbaar is ten opzichte van den hoofdterm. De $\overline{L}$ uit (24) kunnen we in de zoo benaderde energie uitdrukken en vinden weer
$$\overline{L} = g + \frac{q}{k}\, 2\, \frac{V - V_0}{l}.$$

Ornstein en Zernike[1]) gebruiken ook herhaaldelijk deze kunstgreep. Ze laten echter ook wel den lineairen term weg om

[1]) Ornstein en Zernike, l. c.

een geheel andere reden, die mij niet juist schijnt te zijn. Ze zeggen namelijk l. c. pag. 1563, dat $\overline{\xi_x} = 0$. Dit is niet het geval.

Eerst

$$\int_0^l \overline{\xi_x}\, dx = \overline{\int_0^l \xi_x\, dx} = 0,$$

wanneer de eindpunten van de staaf in rust zijn. De manier, waarop zij in § 3 van hun verhandeling de „methode der eigentrillingen" toepassen, kan ik niet voor juist houden, en schijnt slechts door het samenwerken van 2 fouten [1]) tot de juiste uitkomst voor $\overline{S}$ te hebben gevoerd.

§ 4. *Voortzetting van* § 2 *over transversale trillingen.*

Wanneer we de massapunten niet langer langs de staven laten glijden, die op een onderlingen afstand a geplaatst waren, dan mogen we in de uitdrukking voor de potentieele energie de λ_i niet meer als constanten beschouwen. In den evenwichtsstand zullen ze alle de waarde a hebben. Noemen we ξ_i de longitudinale afwijking van het i^e massapunt uit dezen evenwichtsstand $i\,a$.

We hebben dus in de uitdrukking voor de potentieele energie te substitueeren $\lambda_1 = \xi_1 + a,\quad \lambda_2 = \xi_2 - \xi_1 + a,$ enz.

De transversale bewegingen kunnen we bij benadering als onafhankelijk van de longitudinale opvatten. Deze laatste echter worden door de transversale bewegingen voortgebracht. Wanneer we de transversale uitwijkingen als oneindig klein van de 1^e orde opvatten, zullen de longitudinale van de 2^e orde klein zijn.

Dit alles vindt zijn mathematische formuleering en rechtvaardiging in de volgende benaderde bewegingsvergelijkingen.

Ten eerste voor de y_i

$$m\ddot{y}_i = \frac{S(a)}{a}\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

doordat we in plaats van $\dfrac{S(\lambda_i)}{\lambda_i}$ geschreven hebben $\dfrac{S(a)}{a}$.

---

1) In de eerste plaats mogen ze n.l. niet $Q_k = P_k$ stellen, maar moeten $Q_k = 0$ nemen, daar immers de einden 0 en 2π van de staaf vast zijn. In de 2^e plaats. Daar in hun verg. (7) de lineaire term ξ_x voorkomt, mogen ze zich bij de berekening van $\overline{S}$ niet beperken, tot de door hun verg. (15) gegeven waarden van die aan hun verg. (14) slechts in 1^e benadering voldoet.

Ten tweede voor de x

$$m\ddot{\xi}_i = \frac{\partial V}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial V}{\partial \lambda_{i+1}}.$$

Uit (15) blijkt, dat het rechter lid van de 2e orde is.

Uit deze verg. volgt

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda_{i+1}}.$$

De $\overline{L}$ vinden we uit $\overline{L} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda_1}$, hetgeen uitgewerkt met de potentieele energie uit (15) geeft

$$\overline{L} = \overline{f'\left(\frac{\lambda_1 - l_0}{l_0}\right)} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{a}{l_0} f'' - f'}{a^2}\,\overline{y_1^2}.$$

In den eersten term van het rechter lid kunnen we voor λ_1 schrijven $\lambda_1 = a + \xi_1 \ldots.$ bij den 2en term kan ik in het argument der functies eenvoudig a schrijven voor λ wegens den factor y_1^2. Aldus benaderd, luidt $\overline{L}$

$$\overline{L} = f'\,\frac{a - l_0}{l_0} + \frac{\overline{\xi_1}}{l_0} f''\left(\frac{a - l_0}{l_0}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{a}{l_0} f'' - f'}{a^2}\,\overline{y_1^2} \;\ldots\; (26)$$

Den gemiddelden lineairen term kunnen we weer kwijt raken, door $\overline{L}$ te berekenen uit

$$\overline{L} = \frac{1}{n+1} \sum_i \overline{\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}}.$$

We vinden dan in voldoende benadering

$$\overline{L} = f'\,\frac{a - l_0}{l_0} + \frac{1}{2}\,\frac{a\frac{dS}{da} - S}{(n+1)\,a^2} \sum_i \overline{(y_i - y_{i-1})^2} \;\ldots.\; (27)$$

Ook in de uitdrukking van de potentieele energie (15) kunnen we in plaats van de λ_i de longitudinale afwijkingen invoeren.

We zien dadelijk dat de hierin optredende som

$$l_0 \sum_i f\left(\frac{\lambda_i - l_0}{l_0}\right) = l_0\,(n+1)\,f\left(\frac{a - l_0}{l_0}\right) = V_0.$$

De uitdrukking (15) wordt dus

$$\overline{V - V_0} = \frac{1}{2} \frac{S(a)}{a} \sum (y_i - y_{i-1})^2 \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Uit (27) en (28) volgt

$$\overline{L - S(a)} = \frac{a \dfrac{dS}{da} - S(a)}{S(a)} \; \frac{\overline{V - V_0}}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{C}$$

Men vergelijke deze uitkomst met **A** pag. 11.

We hebben dus nu een resultaat gekregen, dat weer onafhankelijk is van de bewegingswijzen, waarop de trillingen plaats vinden.

De invloed van den lineairen longitudinalen term is gemakkelijk na te gaan bij een continue snaar. In dit geval is

$$\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2_{gr}} = \frac{2}{l} \overline{\int \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Vergelijking (26) luidt dan

$$\overline{L} = S(a) + \frac{a}{l_0} f'' \times \overline{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{gr}} + \left(\frac{a}{l_0} f'' - f'\right) \frac{\overline{\int \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx}}{l}$$

$$= S(a) + \frac{a}{l_0} f'' \times \overline{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{gr}} + \left(\frac{a}{l_0} f'' - f'\right) \frac{2\,\overline{(V - V_0)}}{l\,S(a)}$$

$$= S(a) + a \frac{dS}{da} \overline{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{gr}} + \frac{a \dfrac{dS}{da} - S(a)}{S(a)} \; \frac{2\,\overline{(V - V_0)}}{l}.$$

't Vergelijken met (**C**) geeft

$$a \frac{dS}{da} \overline{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{gr}} = - \frac{a \dfrac{dS}{da} - S(a)}{S(a)} \; \frac{\overline{V - V_0}}{l}.$$

Het lineaire stuk, d.w.z. de longitudinale golf in de uitdrukking (26) voor $\overline{L}$, vermindert dus dezen druk met de helft. In § 2 was deze verwaarloosd, vandaar 't verschil tusschen **A** en **C**.

§ 5. *Druk $\overline{L_1}$ uitgeoefend door transversale trillingen op een over de snaar geschoven ring.*

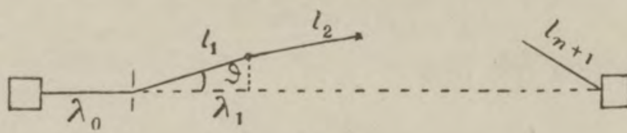

Fig. 2.

Den ring denken we ons geschoven over de eerste veer. We zien dadelijk, dat

$$\overline{L_1} = \overline{S(l_1 + \lambda_0) \times (1 - \cos\vartheta)}.$$

Bij benadering dus

$$\overline{L_1} = \overline{S(\lambda_1 + \lambda_0)\frac{y_1^2}{2\lambda_1^2}}$$

of met onze vroegere notatie

$$\overline{L_1} = S(a)\,\frac{\overline{y_1^2}}{2\lambda_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Het onderscheid met de vraag naar $\overline{L}$ springt in 't oog.

$$\overline{L_1} + \overline{L} = \overline{S(l_1 + \lambda_0)} = \overline{S(\lambda_1 + \lambda_0)} + a\frac{dS}{da}\frac{\overline{y_1^2}}{2a^2} = S(a) +$$

$$+ \overline{\xi_1}\,\frac{dS}{da} + a\frac{dS}{da}\frac{\overline{y_1^2}}{2a^2}$$

en hiervoor wordt na een berekening als in § 4 gevonden

$$\overline{L_1} + \overline{L} = \overline{S(l_1 + \lambda_0)} = S(a) + \frac{a\dfrac{dS}{da} + S(a)}{S(a)}\;\frac{\overline{V - V_0}}{l} \quad (31)$$

Denken we ons de massapunten continu verdeeld, dan is

$$\frac{y_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{gr}.$$

Verg. (30) wordt dan

$$\overline{L_1} = +\frac{1}{2}\,S\,\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2_{gr}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Bij eerste benadering is de potentieele energie

$$\overline{V} = V_0 + \frac{1}{2} S \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \partial x \dots\dots\dots\dots \quad (33)$$

Uit (29), (32), (33) volgt

$$\overline{L_1} = + 2\, \frac{\overline{V - V_0}}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{D}$$

C (pag. 16) + **D** geeft blijkbaar (31).

Form. **D** wordt door Rayleigh [1]) op eenigszins andere wijze afgeleid.

Ik merk hierbij op. Onze berekening gaat door, wanneer de ring om de p^e veer geschoven is, en we de eerste $p - 1$ massapunten alleen een longitudinale beweging toestaan, terwijl de overigen ook nog transversaal kunnen trillen.

De potentieele energie afkomstig van de longitudinale beweging van *alle* massapunten te zamen bedraagt in voldoende benadering toch V_0, alsof de beweging zuiver transversaal ware. De door den ring doorgelaten longitudinale trillingen worden door Rayleigh niet beschouwd en daarom lijkt mij de hier gegeven afleiding beter.

Bij ons beteekent in form. **D** de uitdrukking $\frac{\overline{V - V_0}}{l}$ de dichtheid van de *transversale* energie in het transversaal trillend gedeelte. Verder is er echter ook nog een longitudinale energie in somma gelijk 0, die echter met een zeker bedrag in 't vrije deel van de snaar voorkomt en met een tegengesteld bedrag in dat deel van de snaar opgehoopt is, waar de transversale trillingen worden verhinderd. Men moet nu nog bedenken, dat de longitudinale energie in het vrije deel een bepaalde fractie van de transversale energiedichtheid zou kunnen zijn, waardoor we ook weer $\overline{L_1}$ in de totale energiedichtheid zouden kunnen uitdrukken. Hoe dit samenhangt, zal in de volgende § worden besproken.

Rayleigh merkt op, dat de druk op een ring analoog is aan den stralingsdruk, dien een lichtgolf op een spiegel uitoefent. Hier zal bij een virtueele verplaatsing van den spiegel ether daar door heen dringen, zooals een deel van den gespannen snaar door den ring.

---

[1]) Lord Rayleigh, On the pressure of vibrations phil. Mag. 1902, pag. 338.

Wij zullen echter zien, dat de ring wel energie doorlaat, wat de spiegel niet doet.

Form. **D** geeft $\overline{L_1}$ onafhankelijk van de elastische eigenschappen van het medium in tegenstelling met den druk $\overline{L}$, die evenredig is aan de energiedichtheid en een factor, die daarvan wel afhangt blijkens **B** en **C**.

§ 6. *Voortzetting.*

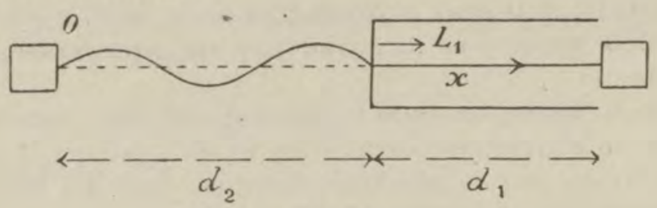

Fig. 3.

We zullen de berekening van $\overline{L_1}$ nog iets nauwkeuriger nagaan. Een snaar is met zijn uiteinden aan 2 vaste punten bevestigd. Over een gedeelte dezer snaar is een koker geschoven, die transversale trillingen in dat gedeelte verhindert op te treden.

Bij de transversale beweging van het vrijgebleven stuk zal de snaar door den koker heen en weer schuiven. Onder welke voorwaarden dit gebeurt, zal van de opening afhangen. Is deze glad, dan mogen we de onderstelling maken, dat aan weerszijden van de opening dezelfde spanning in de snaar bestaat. Daar deze echter aan weerszijden anders gericht is, moet 't vrije gedeelte der snaar een gem. druk op den koker uitoefenen. Zij de momentaandruk L_1. Dan vinden we voor de bewegingsvergelijking van het punt, dat zich in de opening bevindt

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = - L_1 + S\,(1 - \cos \vartheta)$$

en daar bij een stationaire beweging de snelheid in de opening niet onbeperkt zal toenemen, krijgen we bij het middelen

$$\overline{L_1} = \overline{S\,(1 - \cos \vartheta)}.$$

Wanneer een stukje snaar, dat in zijn evenwichtstoestand een lengte a heeft een lengte l krijgt, zal de potentieele energie van dit stuk bedragen

$$V = a\, f\left(\frac{l - a}{a}\right).$$

Grootheden, die betrekking hebben op het vrije gedeelte der snaar, zullen we met den index 2 aanwijzen, die welke betrekking hebben op het deel, dat door den koker omsloten wordt, met den index 1.

De longitudinale afwijkingen beschouwen we als ∞_{klein} van de 2^e orde, de transversale van de 1^e orde.

Na een longitudinale verplaatsing ξ zal een stuk snaar ter oorspronkelijke lengte a een lengte $l_1 = a(1 + \xi_x)$ innemen. Terwijl een stuk vrije snaar van dezelfde oorspronkelijke lengte a door zijn longitudinale verplaatsing ξ en zijn tranversale verplaatsing η na die deformatie een lengte

$$l_2 = a\left(1 + \xi_x + \frac{\eta_x^2}{2}\right)$$

zal beslaan. De relatieve verlenging van de snaar rechts en links van de opening bedraagt dus resp. ξ_{x1} en $\xi_{x2} + \frac{\eta_{x2}^2}{2}$.

Voor de spanning S_1 wordt dus gevonden

$$S_1 = f'\left(\frac{l_1 - a}{a}\right) = f'(0) + \xi_{x1} f''(0),$$

terwijl de spanning aan de andere zijde bedraagt

$$S_2 = f'\left(\frac{l_2 - a}{a}\right) = f'(0) + \left(\xi_{x2} + \frac{\eta_{x2}^2}{2}\right) f''(0).$$

De conditie, dat de spanningen in de opening aan weerszijden gelijk moeten zijn, geeft dus

$$\xi_{x1} = \xi_{x2} + \frac{\eta_{x2}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

in de opening.

In het rechter gedeelte luidt de bewegingsvergelijking in voldoende benadering

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\xi_{x1} f''(0)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

In het linker deel

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial (S_2 \cos \vartheta)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\xi_{x2} f''(0) + \frac{\eta_{x2}^2}{2}\left(f''(0) - f'(0)\right)\right] \quad (36)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = \frac{\partial (S_2 \sin \vartheta)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta_{x2} f'(0)\right) = \eta_{xx2} f'(0) \quad \ldots \quad (37)$$

De tweede term in 't rechter lid van (36) geeft aan, dat een longitudinale beweging de transversale begeleidt. Echter ook wanneer $f''(0) = f'(0)$ moet zulk een beweging optreden blijkens (34).

Uit (35) en (36) vinden we, wanneer we over een voldoend langen tijd middelen

$$\overline{\xi_{x1}} f''(0) = C_1.$$

$$\overline{\xi_{x2}} f''(0) + \frac{\overline{\eta^2_{x2}}}{2} (f''(0) - f'(0)) = C_2.$$

Voor deze constanten C_1 en C_2 kan ik schrijven de linker leden dezer vergelijkingen gemiddeld over resp. het rechter en linker stuk der snaar, wier lengten resp. d_1 en d_2 mogen bedragen. Een gemiddelde over een stuk snaar zal ik met $\sim$ geschreven boven de te middelen grootheid aanduiden.

De 2 laatste vergelijkingen luiden dan

$$\overline{\xi_{x1}} f''(0) = - \overline{\xi_0} \frac{f''(0)}{d_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

$$\overline{\xi_{x2}} f''(0) + \frac{\overline{\eta^2_{x2}}}{2} (f''(0) - f'(0)) = + \overline{\xi_0} \frac{f''(0)}{d_2} + \frac{\tilde{\overline{\eta^2_{x2}}}}{2} (f''(0) - f'(0)) \quad (39)$$

ξ_0 geeft in deze vergelijkingen aan de longitudinale afwijking in de opening.

Verg. (38) en (39) zal ik toepassen op het punt der snaar, dat in de opening ligt. Trek ik (39) van (38) af en neem ik in aanmerking verg. (34), dan krijg ik

$$\frac{\overline{\eta^2_{x0}}}{2} f'(0) = - \overline{\xi_0} f''(0) \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right) - \frac{\tilde{\overline{\eta^2_{x2}}}}{2} [f''(0) - f'(0)].$$

Uit verg. (37) zie ik dat de transversale trillingen harmonisch zijn en dus $\overline{\eta^2_{x0}} = 2 \tilde{\overline{\eta^2_{x2}}}$.

De laatste verg. wordt dus

$$\frac{\tilde{\overline{\eta^2_{x2}}}}{2} [f''(0) + f'(0)] = - \overline{\xi_0} f''(0) \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right) \ldots\ldots (40)$$

Deze vergelijking leert ons, hoever een punt van de snaar gemiddeld door de opening getrokken wordt, wanneer het vrije gedeelte op gegeven wijze transversaal trilt.

In het rechter deel van de snaar bestaat ten gevolge van de elongaties een potentieele energie

$$V_1 = \int f(0)\, dx + \int f'(0)\, \xi_x\, dx = f(0)\,(d_1 + \xi_0) - f'(0)\, \xi_0,$$

of
$$V_1 = f(0)\, d_1 + [f(0) - f'(0)]\, \xi_0.$$

In het linker deel ten gevolge van elongatie en transversale uitwijking vindt men de energie

$$V_2 = f(0)\,(d_2 - \xi_0) + f'(0)\, \xi_0 + d_2 \frac{\widetilde{\eta_x^2}}{2} f'(0),$$

of
$$V_2 = f(0)\, d_2 - [f(0) - f'(0)]\, \xi_0 + d_2 \frac{\widetilde{\eta_x^2}}{2} f'(0).$$

De totale snaar bevat een trillingsenergie

$$V - V_0 = V_1 + V_2 - (d_1 + d_2)\, f(0) = d_2 \frac{\widetilde{\eta_x^2}}{2} f'(0) = \frac{1}{2} \int \eta_x^2\, f'(0)\, dx.$$

De kinetische energie bedraagt $T = \frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 dx.$

De integratie moet in beide gevallen worden uitgestrekt van $x = 0$ tot $x = d_2$.

We hebben nu in de totale snaar een mechanisme met een parameter d_2, waarop een gemiddelde kracht $\overline{L_1}$ werkt en kunnen hierop de methode van RAYLEIGH toepassen door het invoeren van normaalcoordinaten A_n:

$$\eta = \sum_n \sin A_n \frac{n \pi x}{d_2}.$$

Hierdoor wordt de totale potentieele energietoename

$$V - V_0 = \frac{1}{4} f'(0) \sum_n A_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{d_2}$$

De totale kin. energie $T = \frac{d_2}{4} \rho \sum_n \dot{A}_n^2.$

en

$$-\overline{L_1} = \left[-\frac{\partial \overline{T}}{\partial d_2} + \frac{\partial \overline{(V - V_0)}}{\partial d_2}\right] = -\frac{\overline{(V - V_0) + T}}{d_2} = -2 \frac{\overline{V - V_0}}{d_2} .. \quad (41)$$

We moeten nu echter bedenken dat $\overline{V - V_0}$ de gemiddelde potentieele energie van het geheele systeem is en willen die nu nog uitdrukken in de potentieele energie van het vrij trillende deel n. l.

$$\overline{V_2 - V_{20}} = -[f(0) - f'(0)]\,\overline{\xi_0} + d_2 \frac{\overline{\tilde{\eta}_x^2}}{2} f'(0).$$

We hebben daartoe in deze vergelijking voor ξ_0 zijn waarde uit (40) te substitueeren en vinden dan

$$\overline{V_2 - V_{20}} = \frac{d_2}{2}\,\overline{\tilde{\eta}_x^2}\left[f'(0) + \frac{[f(0) - f'(0)][f''(0) + f'(0)]}{f''(0)\,(d_1 + d_2)}\,d_1\right],$$

of

$$\overline{V_2 - V_{20}} = \overline{(V - V_0)}\left[1 + \frac{[f(0) - f'(0)][f''(0) + f'(0)]}{f''(0)\,f'(0)\,(d_1 + d_2)}\,d_1\right] \quad (42)$$

Om een algemeen resultaat te krijgen

zullen we ten eerste veronderstellen dat het vrije gedeelte d_2 groot is ten opzichte van het onvrije stuk d_1.

Dan wordt $\overline{V_2 - V_{20}} = \overline{V - V_0}$. We krijgen dus het resultaat van RAYLEIGH blijkens (41).

Veronderstellen we echter, wat ons wel het meest interesseert, d_1 groot ten opzichte van d_2, dan wijkt de uitkomst geheel van die van RAYLEIGH af.

Uit (41) en (42) vinden we als eindresultaat

$$+\overline{L_1} = \frac{2}{d_2}\,\overline{(V_2 - V_{20})} : \left[1 + \frac{[f(0) - f'(0)][f''(0) + f'(0)]}{f''(0)\,f'(0)}\,\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right] \quad (43)$$

Vergelijking (34) berust op $f''(0) \neq 0$.

Stellen we nu $f''(0) = 0$.

Dan vinden we uit (36)

$$\overline{\eta^2_{x2}} = C = \frac{\overline{\tilde{\eta}^2_{x2}}}{d_2}$$

Uit (37) volgt dat η een harmonische beweging moet zijn

dus $$\overline{\eta^2_{x2\ grens}} = 2\,\frac{\overline{\tilde{\eta}^2_{x2}}}{d_2}.$$

Uit de tegenstrijdigheid dezer laatste twee vergelijkingen volgt, dat wanneer we $f''(0) = 0$ aannemen, we niet meer mogen aannemen, dat de longitudinale beweging stationair is en mogen we dus niet meer in (36) het tijdsgemiddelde van het linker lid gelijk 0 stellen.

We kunnen $f''(0) = (0)$ als grensgeval van het vorige opvatten. Uit vergelijking (40) zien we dat $\overline{\xi_0}$ in dit geval $= \infty$ wordt.

Vergelijking (43) kunnen we dus alleen gebruiken voor $f''(0) \neq 0$. Ook zullen we $f'(0) \neq 0$ stellen, dus uitgaan van een snaar, die wanneer hij niet trilt een spanning bezit. Stelden we $f'(0) = 0$, dan hadden we de potentieele energie verder moeten ontwikkelen, dan we gedaan hebben.

Er blijven over de beide bijzondere gevallen $f(0) = f'(0)$ en $f''(0) = -f'(0)$, waarvoor de form. (43) wordt

$$\overline{L_1} = \frac{2}{d_2} \overline{(V_2 - V_{20})}$$

De beteekenis van $f(0) = f'(0)$ is dat geen energie doorgelaten wordt, omdat bij de verschuiving door de opening van den koker de energietoename, die de nieuwe massa meebrengt opgewogen wordt door het energieverlies tengevolge van de ontspanning van de snaar, die hierdoor ontstaat. Dit blijkt bij de beschouwing der formules voor $V_1 - V_{10}$ en $V_2 - V_{20}$.

De conditie $f''(0) = -f'(0)$ geeft een betrekking tusschen 1° en 2° graads term in de spanning bij een dilatatie.

Ze luidt dan $S = f'(0) - f'(0)\,\xi_x$.

§ 7. *Voortzetting.*

$\overline{L_1}$ kunnen we ook gemakkelijk vinden als een speciaal geval van den druk $\overline{L_v}$, dien de trillende snaar op een ring uitoefent, welke zich met een gegeven snelheid v beweegt.

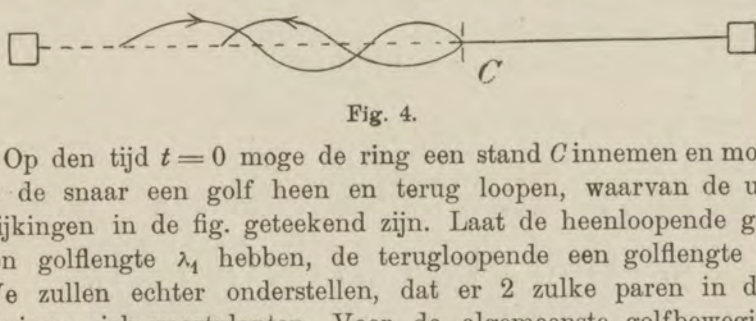

Fig. 4.

Op den tijd $t = 0$ moge de ring een stand C innemen en moge in de snaar een golf heen en terug loopen, waarvan de uitwijkingen in de fig. geteekend zijn. Laat de heenloopende golf een golflengte λ_1 hebben, de terugloopende een golflengte λ_2. We zullen echter onderstellen, dat er 2 zulke paren in den beginne zich voortplanten. Voor de algemeenste golfbeweging loopt dan de rekening gelijk we die hier geven. In de tijdseenheid zal de energie verminderen met $L_v v$.

Noemen we de dichtheid van de invallende trillingsenergie e_1 gemiddeld over eenige golflengten en laat e_{12} dezelfde beteekenis hebben in een stuk van de snaar, waar zich de heen- en teruglopende golven superponeeren. $\overline{L_v}$ is dan te berekenen uit

$$\overline{L_v}\, v = 2\, e_1\, c - e_{12}\,(v + c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Voor de heenloopende golven schrijven we

$$y_1 = A_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda_1}(x - ct) + B_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda'_1}(x - ct),$$

voor de teruglopende

$$y_2 = - A_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda_2}(x + ct) - B_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda'_2}(x + ct).$$

Aan den ring, dus voor $x = vt$, geldt de conditie

$$(y_1 + y_2)_{x = vt} = 0.$$

Hieruit volgt

$$\lambda_2 = \frac{v + c}{v - c}\lambda_1 \qquad\qquad \lambda'_2 = \frac{v + c}{v - c}\lambda'_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

De energiedichtheid bij een trilling y bedraagt

$$e = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2.$$

Voor loopende golven is

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm c \frac{\partial y}{\partial x},$$

terwijl de voortplantingssnelheid bepaald is door de betrekking $S = \rho c^2$, dus

$$e = S \overline{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Voor e_1 en e_{12} wordt dit resp.

$$e_1 = 2\pi^2 S \left[\frac{A_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{B_1^2}{\lambda_1'^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

$$e_{12} = 2\pi^2 S \left[A_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + B_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_1'^2} + \frac{1}{\lambda_2'^2}\right)\right],$$

of wanneer we in deze vergelijking de waarden van λ_2 en λ'_2 uit (45) subst.

$$e_{12} = 4\pi^2 S \left(\frac{A_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{B_1^2}{\lambda_1'^2}\right) \frac{v^2 + c^2}{(v + c)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

(46) en (47) in (44) gesubst. geeft na een kleine herleiding

$$\overline{L_v} = 2\,e_1 \frac{c-v}{c+v} = \frac{c^2-v^2}{c^2+v^2}\,e_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Voor $v=0$ krijgt men dus $\overline{L_{v=0}} = \overline{L_1} = e_{12}$: dit is form. **D** van § 5.

Voor een willekeurige waarde van v geeft form (48) de stralingsdruk van een lichtgolf, die $\perp$ op een zich met snelheid v verwijderende spiegel invalt.

In verband met de beschouwingen der beide voorafgaande §§ moeten we bedenken, dat e_{12} alleen de transversale energiedichtheid voorstelt. Met de longitudinale hebben we geen rekening te houden. Het bleek n.l., dat deze in totaal steeds $=0$ is in voor ons voldoende benadering. Form. (44) is dus geldig wanneer we onder de e alleen de transversale energiedichtheid verstaan.

§ 8. *Gemiddelde eerstegraads termen bij longitudinale trillingen.*

Voor de longitudinale trillingen hebben we den druk $\overline{L}$ berekend uit de overweging dat $\overline{L} = \overset{\approx}{S}$, waar het golflijntje een gemiddelde over de snaar aangeeft. Door dit middelen hebben we de eerstegraads-uitdrukking der verplaatsing van het 1e massapunt, die in 1e instantie in $\overline{L}$ optreedt, geëlimineerd Echter interesseert ons op zich zelf de vraag naar de standen, waarom de verschillende massapunten zullen gaan trillen. Om deze te vinden gaan we het eenvoudigst te werk indien we normaalcoordinaten invoeren door de substitutie

$$\xi_\nu = \sum_s P_s \sin \frac{\nu s \pi}{n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

De potentieele energie

$$V = V_0 + \frac{1}{2} ka\left[\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2-\xi_1}{a}\right)^2 + \ldots \left(\frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{a}\right)^2 + \left(-\frac{\xi_n}{a}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3} qa\left[\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^3 + \left(\frac{\xi_2-\xi_1}{a}\right)^3 + \ldots \left(\frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{a}\right)^3 + \left(-\frac{\xi_n}{a}\right)^3\right]$$

neemt dan, blijkens een eenigszins lange berekening, den vorm aan

$$
\left.\begin{array}{l}
V = V_0 + \frac{1}{2}\,\frac{k}{a}\,2\,(n+1)\,\sum\limits_{s} \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)}\,P_s^2 + \\[2ex]
\quad + \frac{q}{a^2}\,2\,(n+1)\sum\limits_{s\,=\,even}\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{s\pi}{2(n+1)}\,\sin^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,P_{\frac{s}{2}}^2\,P_s - \\ -\sin\frac{s\pi}{2(n+1)}\,\cos^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,P^2_{n+1-\frac{s}{2}}\,P_s \end{array}\right\} + \\[2ex]
\quad + \text{termen } P_p\,P_q\,P_r \text{ waarin geen 2 indices gelijk zijn.}
\end{array}\right] \quad (50)
$$

Om uitdrukkingen van de gemiddelde $\overline{P}_s$ te krijgen gebruiken we de betrekkingen $\overline{\frac{\partial V}{\partial P_s}} = 0$. Vermenigvuldigd met cotg $\frac{\pi s}{2(n+1)}$ luiden ze voor even waarden van s:

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{k}{a}(n+1)\sin\frac{s\pi}{n+1}\,\overline{P_s} + \frac{2q}{a^2}(n+1)\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{s\pi}{2(n+1)}\sin^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,\overline{P^2_{1\frac{s}{2}}} \\ -\cos\frac{s\pi}{2(n+1)}\cos^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,\overline{P^2_{n+1-\frac{s}{2}}} \end{array}\right\} = 0 \\[2ex]
\text{terwijl voor oneven waarden van } s\text{:} \\[1ex]
\qquad\qquad \overline{P_s} = 0.
\end{array}\right] \quad (51)
$$

Bij deze wijze van berekenen zien we nu ook, dat we de coeff. van $P_p\,P_q\,P_r$ in (50) met alle drie ongelijke indices niet hadden uit te rekenen, omdat deze in $\frac{\partial V}{\partial P_s}$ zouden geven termen als $\overline{P_p\,P_q}$, die echter gemiddeld nul zijn, omdat de frequenties van 2 verschillende normaaltrillingen verschillend zijn.

Voor de gemiddelde uitwijking krijgt men uit (49) en (51)

$$
\overline{\xi_\nu} = \sum \overline{P_s}\sin\frac{\nu s\pi}{n+1} = -\frac{q}{ka}\sum_{s\,=\,even}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{\nu s\pi}{n+1}}{\sin\frac{s\pi}{2(n+1)}}\sin^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,\overline{P^2_{\frac{s}{2}}} - \\[3ex] -\dfrac{\sin\frac{\nu s\pi}{n+1}}{\sin\frac{s\pi}{2(n+1)}}\cos^2\frac{s\pi}{4(n+1)}\,\overline{P^2_{n+1-\frac{s}{2}}} \end{array}\right.
$$

De sommatie over de even waarden van s kan vervangen worden door een sommatie over alle s van 1 tot n.

De eerste term onder het som-teeken zal waarden $\overline{P_r^2}$ geven; r loopend van 1 tot de kleinste helft van n. De 2e term waarden $\overline{P_r^2}$ waarin r loopt van n naar beneden. Tezamen juist alle waarden van 1 tot n omvattend, voor het geval n even is. Is n echter oneven, dan zal $\overline{P^2_{\frac{n+1}{2}}}$ niet voorkomen.

In den 1en term substitueeren we dus $\frac{s}{2} = r$ in den 2en term $n + 1 - \frac{s}{2} = r$.

We krijgen dan

$$\overline{\xi_\nu} = -\frac{q}{ka} \sum_{r=1}^{n} \frac{\sin \frac{2\nu r\pi}{n+1}}{\sin \frac{r\pi}{n+1}} \sin^2 \frac{r\pi}{2(n+1)} \overline{P_r^2} \quad \ldots\ldots (52)$$

Eigenlijk moest gesommeerd worden over alle waarden van r behalve voor $r = \frac{n+1}{2}$. Voor deze waarde van r wordt echter de term $\sin \frac{2\nu r\pi}{n+1}$ in den teller gelijk 0, zoodat we in de som ook dezen term mogen opnemen.

We zien $\overline{\xi_\nu} = -\overline{\xi_{n+1-\nu}}$, zoodat de gemiddelde verplaatsing der evenwichtsstanden symmetrisch is. Hebben we een continue staaf, waarin geen extreem kleine golflengten voorkomen, zoodat dus $\overline{P_r^2} = 0$ voor waarden van r, die niet meer $<< n + 1$ zijn, dan kunnen we de elongatie aan de grens vinden als $\frac{\overline{\xi_1}}{a} = \overline{(\xi_x)_{gr}}$.

Uit (52) vindt men in dit geval

$$\overline{(\xi_x)_{gr}} = -\frac{q\pi^2}{ka^2\, 2(n+1)^2} \sum r^2 \overline{P_r^2} = -\frac{q}{k} \frac{\pi^2}{2} \sum \frac{r^2 \overline{P_r^2}}{l^2}.$$

We kunnen dit vergelijken met de energiedichtheid.

$$\frac{\overline{V - V_0}}{l} = \frac{k}{2} \frac{\pi^2}{2} \sum \frac{r^2 \overline{P_r^2}}{l^2}.$$

Het vergelijken leert ons

$$\overline{(\xi_x)_{gr}} = -\frac{2q}{k^2} \frac{\overline{V - V_0}}{l}$$

in form. (23) $\quad \overline{L} = g + k\,\overline{(\xi_x)_{gr}} + q\,\overline{(\xi_x)^2_{gr}}$

geeft $k\,(\overline{\xi_x})_{gr}$ dus de bijdrage $-\frac{2q}{k}\,\frac{\overline{V-V_0}}{l}$ en de term

$$q\,(\overline{\xi_x^2})_{gr} = \frac{2q}{l}\int \xi_x^2\,\partial x = \frac{4q}{k}\left(\frac{\overline{V-V_0}}{l}\right).$$

Het lineaire lid maakt, zooals we zien, den druk de helft kleiner.

De som van de beide laatste uitdrukkingen geeft ons voor den druk het resultaat van § 3. Eenvoudiger zien we dit natuurlijk in door de voorstelling

$$\overline{L} = \overline{\widetilde{L}} = g + q\,\overline{\widetilde{\xi_x^2}} = g + \frac{q}{2}\,(\overline{\xi_x^2})_{gr}.$$

We hebben hier dus het lineaire lid expliciet uitgerekend, die we in § 3 door een kunstgreep hebben geëlimineerd.

Wanneer we het punt niet meer door zijn nummer doch door zijn coordinaat bepalen, kan ik voor (52) schrijven

$$\overline{\xi} = -\frac{q}{k\,a}\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{2\,r\,\pi\,x}{l}}{\sin\dfrac{r\,\pi}{n+1}}\,\sin^2\frac{r\,\pi}{2\,(n+1)}\,\overline{P_r^2}\,.$$

Iedere staande golf zal een gemiddelde uitwijking van een punt veroorzaken. De knoopen van de golf P_r liggen op afstanden $\frac{l}{r}, 2\,\frac{l}{r} \ldots\ldots r\,\frac{l}{r}$. Een punt, dat in zulk een knoop ligt, waarvoor dus $x =$ een zeker aantal keeren $\frac{l}{r}$, zal door die golf niet verplaatst worden blijkens deze formule.

We kunnen of een geheel getal s vinden, zóódanig, dat

$$s\,\frac{l}{r} < x < \left(s + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{r}\,,$$

of een geheel getal s_1, zóódanig, dat

$$\left(s_1 + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{r} < x < (s_1 + 1)\,\frac{l}{r}\,.$$

In 't eerste geval ligt de knoop, die het dichst bij x ligt, links van dit punt, in het 2° geval rechts daarvan.

In het eerste geval ligt de waarde van $\sin\frac{2\,\pi\,r\,x}{l}$ tusschen $\sin\,2\,\pi\,s$ en $\sin\,(2\,\pi\,s + \pi)$; is dus pos.

In het 2e geval tusschen $\sin(2\pi s_1 + \pi)$ en $\sin(2\pi s_1 + 2\pi)$; is dus negatief.

Het omgekeerde teeken geldt voor $\overline{\xi}$.

We zien dus, dat iedere golf het punt gemiddeld naar den naastbijgelegen knoop trekt. Hierdoor wordt natuurlijk de druk verminderd.

§ 9. *Druk van geluidsgolven.*

Op geheel dezelfde wijze, als ik in § 3 behandeld heb de krachten, die de longitudinale trillingen in een puntenreeks resp. staaf op de einden uitoefenen, kan de vraag naar den druk van geluidsgolven, die zich in een cylindrische ruimte volgens de as voortplanten worden aangevat.

We zullen beginnen met de behandeling van dit vraagstuk volgens de methode van LAGRANGE.

Laat ξ de uitwijking zijn op tijd t van het materieele punt x. Een massa $\rho_0\, dx$ zal na die verschuiving een dichtheid ρ hebben en een lengte $dx' = (1 + \xi_x)\, dx$ innemen, zoodat $(1 + \xi_x)\, \rho = \rho_0$.

De verdichting $$\gamma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \xi_x} - 1 = -\xi_x + \xi_x^2,$$

zoodat $$\int_0^l \gamma\, dx = \int_0^l \xi_x^2\, dx \qquad \text{terwijl} \int_0^l \gamma\, dx' = 0 \quad \ldots . \quad (53)$$

De toestandsvergelijking van het gas nemen we aan in den vorm

$$p = p_0 + a^2 \rho^0 \gamma + b\gamma^2 = p_0 - a^2 \rho_0 \xi_x + (a^2 \rho_0 + b)\, \xi_x^2 \ldots \quad (54)$$

We merken op, dat reeds een aanname $p = p_0 + a^2 \rho_0 \gamma$ een afwijking van de wet van HOOKE is.

De bewegingsvergelijking luidt $$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \ldots\ldots . \quad (55)$$

En daar de snelheid van een materieel punt steeds binnen eindige grenzen blijft, blijkt dat het tijdsgemiddelde van p voor alle materieele punten gemiddeld dezelfde is. Zoodat we de gevraagde $\overline{P}$ kunnen vinden door $\overline{p}$ over alle materieele punten te middelen.

Echter niet door $\overline{p}$ over het vat de middelen.

Dus $$\overline{P} = \frac{1}{l}\int_0^l \overline{p}\, dx = p_0 + \frac{1}{l}\int_0^l (a^2 \rho_0 + b)\, \overline{\xi_x^2}\, dx.$$

of $$\overline{P} = p_0 + \frac{a^2 \rho_0 + b}{l}\int_0^l \overline{\gamma^2}\, dx.$$

De potentieele energie bedraagt

$$\overline{V} = V_0 + \frac{a^2}{2}\rho_0 \int_0^l \overline{\gamma^2}\, dx.$$

dus

$$\overline{P} - p_0 = \frac{a^2\rho_0 + b}{a^2\rho_0} \; \frac{\overline{2(V - V_0)}}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{E}$$

Tot dezelfde resultaten komt RAYLEIGH [1]) langs anderen weg. NIEUWENHUYZEN—KRUSEMAN [2]) voert de snelheidspotentiaal Φ in waardoor zijn bewegingsvergelijking wordt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \int\frac{dp}{\rho} = 0$$

Hij gebruikt dan een redeneering, die we boven herhaaldelijk hebben toegepast, n.l. dat we de eerste term mogen weglaten, wanneer we over een voldoende tijd middelen. We mogen hier echter niet aannemen, dat Φ niet onbepaald met den tijd zal toenemen, daar Φ zelf geen physische beteekenis heeft. N.-KR. krijgt dan ook een fout resultaat.

Dat die redeneering zelfs niet juist is blijkt, wanneer we ons niet van de snelheidspotentiaal bedienen en de vergelijking in den vorm schrijven

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

of

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2 + \int\frac{dp}{\rho}\right) = 0.$$

Hier valt bij het middelen over den tijd wel de eerste term weg en we vinden dus

$$\overline{\frac{1}{2}u^2} + \int\overline{\frac{dp}{\rho}} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

waarin C een constante is onafhankelijk van x. Terwijl volgens N. KR. deze constante steeds de waarde 0 zou hebben.

Aan deze form. (56) knoopt RAYLEIGH aan en komt dan tot **E.**

[1]) RAYLEIGH, On the Momentum and Pressure of Gaseous Vibrations, and on the Connexion with the Virial Theorem. Phil. Mag. 1905 pag. 365.

[2]) J. NIEUWENHUYZEN—KRUSEMAN, Aantrekking door luchttrillingen veroorzaakt (Dissertatie).

HOOFDSTUK II.

Elastische deformatie bij afwijkingen van de wet van Hooke.

Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen we in § 1 nagaan, welken vorm we voor de potentieele energie van een elastisch lichaam moeten aannemen, wanneer we ons niet tot de tweedegraads-termen van de straincomponenten beperken en verder hoe we uit die energie de spanningen kunnen berekenen. De resultaten van deze § zijn o.a. ook te vinden bij P. Duhem [1]). Ik heb gemeend toch deze § niet te kunnen weglaten, voor de leesbaarheid van de overige.

In § 2 zal ik eenige methoden aangeven, die ons de coefficienten van de derdegraads-termen in de potentieele energie door proeven kunnen doen kennen.

In § 3 uit reeds gedane waarnemingen, voornamelijk van Poynting, de waarden van de coefficienten voor staal afleiden.

§ 1 *Aan te nemen vorm voor de potentieele energie, en de hieruit af te leiden uitdrukkingen voor de spanningscomp.*

Laat een punt x, y, z van een elastisch lichaam, door een deformatie een nieuwe stand x', y', z' aannemen gegeven door

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

of omgekeerd

$$\left.\begin{aligned} x &= b_{11}\,x' + b_{21}\,y' + b_{31}\,z' \\ y &= b_{12}\,x' + b_{22}\,y' + b_{32}\,z' \\ z &= b_{13}\,x' + b_{23}\,y' + b_{33}\,z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

$b_{ik} = \frac{A_{ik}}{A}$ wanneer A de determinant op de a_{ik} en A_{ik} de onderdeterminanten voorstellen. Noemen we de onderdeterminanten van deze reciproke substitutie B_{ik} en de determinant zelf B, dan krijgen we door de opmerking, dat deze vergelijkingen opgelost

[1]) P. Duhem: Recherches sur l'elasticité 1906.

naar de x', y', z' de oorspronkelijke moeten geven, de bekende determinantenstelling $a_{ik} = \frac{B_{ik}}{B}$,

terwijl we ook weten dat $B = \frac{1}{A}$.

Een bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

wordt gedeformeerd in een ellipsoide

$$\frac{(A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2}{A^2} + \frac{(A_{12}x + A_{22}y + A_{32}z)^2}{A^2} + \\ + \frac{(A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z)^2}{A^2} = 1.$$

De voerstraal is maximaal in die punten x, y, z van de ellipsoide, waarvoor

$$-\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{(A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2}{A^2} + \\ + \frac{(A_{12}x + A_{22}y + A_{32}z)^2}{A^2} + \frac{(A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z)^2}{A^2}$$

een maximum vertoont.

We zullen dit afkorten tot $-\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \Phi$.

Dus

$$-2\lambda x + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$-2\lambda y + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$-2\lambda z + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \qquad (2)$$

Na vermenigvuldiging respectievelijk met x, y, z en optelling blijkt, dat in die punten

$$-2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Daar $x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2\Phi$ in die punten ook $= 2$ moet zijn, zal λ het reciprokes quadraat van de assen der ellipsoide voorstellen.

Uitgeschreven luiden de vergelijkingen (2)

$$(-\lambda + b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2)x + (b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23})y + \\ + (b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33})z = 0.$$

$$(b_{21}b_{11} + b_{22}b_{12} + b_{23}b_{13})x + (-\lambda + b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2)y + \\ + (b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33})z = 0.$$

$$(b_{31}b_{11} + b_{32}b_{12} + b_{33}b_{13})x + (b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} + b_{33}b_{23})y + \\ + (-\lambda + b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2)z = 0.$$

De λ moet dus voldoen aan een 3e graadsvergelijking, die ontwikkeld luidt

$$-\lambda^3+\lambda^2\left(\begin{array}{c} b_{11}^2+b_{12}^2+b_{13}^2+ \\ +b_{21}^2+b_{22}^2+b_{23}^2+ \\ +b_{31}^2-b_{32}^2+b_{33}^2 \end{array}\right)-\lambda\left(\begin{array}{c} B_{11}^2+B_{12}^2+B_{13}^2+ \\ +B_{21}^2+B_{22}^2+B_{23}^2+ \\ +B_{31}^2+B_{32}^2+B_{33}^2 \end{array}\right)+B^2=0$$

of uitgedrukt in de coefficienten a

$$-\lambda^3+\frac{\lambda^2}{A^2}\left(\begin{array}{c} A_{11}^2+A_{12}^2+A_{13}^2+ \\ +A_{21}^2+A_{22}^2+A_{23}^2+ \\ +A_{31}^2+A_{32}^2+A_{33}^2 \end{array}\right)-\frac{\lambda}{A^2}\left(\begin{array}{c} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+ \\ +a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2+ \\ +a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 \end{array}\right)+\frac{1}{A^2}=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Voeren we nog in de afkortingen ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 bepaald door

$$2\varepsilon_1+1=a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2$$
$$2\varepsilon_2+1=a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2$$
$$2\varepsilon_3+1=a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2$$

$$\gamma_1=a_{12}\,a_{13}+a_{22}\,a_{23}+a_{32}\,a_{33}$$
$$\gamma_2=a_{13}\,a_{11}+a_{23}\,a_{21}+a_{33}\,a_{31}$$
$$\gamma_3=a_{11}\,a_{12}+a_{21}\,a_{22}+a_{31}\,a_{32}$$

en

$$J_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$
$$J_2=\varepsilon_2\,\varepsilon_3+\varepsilon_3\,\varepsilon_1+\varepsilon_1\,\varepsilon_2-\tfrac{1}{4}(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)$$
$$J_3=\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3+\tfrac{1}{4}(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3-\varepsilon_1\,\gamma_1^2-\varepsilon_2\,\gamma_2^2-\varepsilon_3\,\gamma_3^2).$$

Dan kunnen we A^2 schrijven in den vorm

$$A^2=\begin{vmatrix} 2\varepsilon_1+1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 2\varepsilon_2+1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 2\varepsilon_3+1 \end{vmatrix}=1+2J_1+4J_2+8J_3.$$

De coefficient van λ in vergelijking (3) wordt $-\dfrac{(2J_1+3)}{A^2}$.

Ter berekening van de coefficient van λ^2 in die vergelijking vatten we samen

$$A_{11}^2+A_{21}^2+A_{31}^2=$$
$$=\begin{vmatrix} a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2 & a_{12}\,a_{13}+a_{22}\,a_{23}+a_{32}\,a_{33} \\ a_{12}\,a_{13}+a_{22}\,a_{23}+a_{32}\,a_{33} & a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\varepsilon_2+1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 2\varepsilon_3+1 \end{vmatrix}=$$
$$=1+2(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+4(\varepsilon_2\,\varepsilon_3-\tfrac{1}{4}\gamma_1^2).$$

Evenzoo

$$A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 = 1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 4(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \tfrac{1}{4}\gamma_2^2)$$

$$A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 = 1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 4(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\gamma_3^2).$$

De coefficient van λ^2 wordt dus

$$\frac{1}{A^2}(3 + 4J_1 + 4J_2).$$

De quadraten der assen zullen we μ_i noemen $= \dfrac{1}{\lambda_i}\cdot$

De vergelijking voor de μ luidt dus

$$-(1 + 2J_1 + 4J_2 + 8J_3) + \mu(3 + 4J_1 + 4J_2) - \mu^2(2J_1 + 3) + \mu^3 = 0 \quad (3')$$

De potentieele energie, die het lichaam door deze deformatie gekregen heeft, zal, wanneer het lichaam isotroop is, een symmetrische functie zijn van de drie verlengingen, die het lichaam in de assenrichtingen heeft ondergaan, dus een functie van de coefficienten uit de vergelijking (3′) of ook een functie van J_1, J_2 en J_3. Ze kan dus, wanneer we ons beperken tot de 3e graadstermen, geschreven worden per oorspronkelijke volumeneenheid

$$\Phi = (\tfrac{1}{2}\lambda + \mu) J_1^2 - 2\mu J_2 + C J_1^3 + D J_1 J_2 + E J_3 \quad \ldots. \quad \mathrm{I}$$

In de deformaties uitgedrukt luiden de $\varepsilon_1 \ldots . \gamma_3$.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2\right] \\
\gamma_1 &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \\
\gamma_2 &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
\gamma_3 &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots. \quad \mathrm{II}$$

Om uit den nu gevonden vorm voor de potentieele energie te vinden, welke spanningen in 't lichaam heerschen, wanneer het gedeformeerd is, gaan we als volgt te werk.

De door (1) gegeven vervorming zullen we laten volgen door de virtueele deformatie

$$
\begin{aligned}
x'' &= (1+\varepsilon_{11})\,x' + \varepsilon_{12}\,y' + \varepsilon_{13}\,z' \\
y'' &= \varepsilon_{21}\,x' + (1+\varepsilon_{22})\,y' + \varepsilon_{23}\,z' \\
z'' &= \varepsilon_{31}\,x' + \varepsilon_{32}\,y' + (1+\varepsilon_{33})\,z' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)
\end{aligned}
$$

De spanningen zullen hierbij een arbeid verrichten

$$
\begin{aligned}
-\Big(X_x\varepsilon_{11} + Y_y\varepsilon_{22} + Z_z\varepsilon_{33} + Y_z(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32}) + Z_x(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{13}) + \\
+ X_y(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{31})\Big)\,d\tau' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)
\end{aligned}
$$

Hierin beteekent $d\tau'$ de grootte van het volume-element, dat het lichaam voor de virtueele deformatie inneemt en dat A keer grooter is dan het volume-element, waarvan we voor de deformatie (1) zijn uitgegaan en dat we $d\tau$ zullen noemen;

dus $$d\tau' = A\,d\tau.$$

Onder Y_z verstaan we de kracht in de y richting, die de massa aan den kant van kleinere z uitoefent op de massa aan den anderen kant per vlakteeenheid. De andere spanningscomponenten zijn analoog genoteerd.

Met dit bedrag (5) zal de potentieele energie toenemen. De uit (1) en (4) samengestelde deformatie kan geschreven worden

$$
\begin{aligned}
x'' &= (a_{11}+\delta a_{11})\,x + (a_{12}+\delta a_{12})\,y + \ldots\ldots \\
y'' &= (a_{21}+\delta a_{21})\,x + (a_{22}+\delta a_{22})\,y + \ldots\ldots \\
z'' &= (a_{31}+\delta a_{31})\,x + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hierin is

$$
\begin{aligned}
\delta a_{11} &= \varepsilon_{11}\,a_{11} + \varepsilon_{12}\,a_{21} + \varepsilon_{13}\,a_{31}. \\
\delta a_{12} &= \varepsilon_{11}\,a_{12} + \varepsilon_{12}\,a_{22} + \varepsilon_{13}\,a_{32}. \\
\delta a_{13} &= \varepsilon_{11}\,a_{13} + \varepsilon_{12}\,a_{23} + \varepsilon_{13}\,a_{33}. \\
\delta a_{21} &= \varepsilon_{21}\,a_{11} + \varepsilon_{22}\,a_{21} + \varepsilon_{23}\,a_{31}. \\
\delta a_{22} &= \varepsilon_{21}\,a_{12} + \varepsilon_{22}\,a_{22} + \varepsilon_{23}\,a_{32}. \\
\delta a_{23} &= \varepsilon_{21}\,a_{13} + \varepsilon_{22}\,a_{23} + \varepsilon_{23}\,a_{33}. \\
\delta a_{31} &= \varepsilon_{31}\,a_{11} + \varepsilon_{32}\,a_{21} + \varepsilon_{33}\,a_{31}. \\
\delta a_{32} &= \varepsilon_{31}\,a_{12} + \varepsilon_{32}\,a_{22} + \varepsilon_{33}\,a_{32}. \\
\delta a_{33} &= \varepsilon_{31}\,a_{13} + \varepsilon_{32}\,a_{23} + \varepsilon_{33}\,a_{33}.
\end{aligned}
$$

Uit de beteekenis der grootheden $\varepsilon_1 \ldots . \gamma_3$ blijkt dat

$$
\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= a_{11}\,\delta a_{11} + a_{21}\,\delta a_{21} + a_{31}\,\delta a_{31}. \\
\delta\varepsilon_2 &= a_{12}\,\delta a_{12} + a_{22}\,\delta a_{22} + a_{32}\,\delta a_{32}. \\
\delta\varepsilon_3 &= a_{13}\,\delta a_{13} + a_{23}\,\delta a_{23} + a_{33}\,\delta a_{33}.
\end{aligned}
$$

$$\delta \gamma_1 = a_{12}\, \delta a_{13} + a_{13}\, \delta a_{12} + a_{22}\, \delta a_{23} + a_{23}\, \delta a_{22} + a_{32}\, \delta a_{33} + a_{33}\, \delta a_{32}.$$
$$\delta \gamma_2 = a_{13}\, \delta a_{11} + a_{11}\, \delta a_{13} + a_{23}\, \delta a_{21} + a_{21}\, \delta a_{23} + a_{33}\, \delta a_{31} + a_{31}\, \delta a_{31}.$$
$$\delta \gamma_3 = a_{11}\, \delta a_{12} + a_{12}\, \delta a_{11} + a_{21}\, \delta a_{22} + a_{22}\, \delta a_{21} + a_{31}\, \delta a_{32} + a_{32}\, \delta a_{31}.$$

Hierin substitueeren we de boven neergeschreven uitdrukkingen voor de δa_{ik} en de zoo gevonden waarden van

$$\delta \varepsilon_1 \ldots\ldots \delta \gamma_3 \quad \text{in}$$

$$\delta \Phi = d\,T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_2 \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \delta \gamma_3 \right)$$

Het resultaat kunnen we rangschikken naar

$$\varepsilon_{11} \qquad \varepsilon_{22} \qquad \varepsilon_{33} \qquad \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} \qquad \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} \qquad \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$$

en dan de coefficienten van deze 6 grootheden gelijkstellen aan de coefficienten van dezelfde grootheden in (5), waardoor we het ons voorgestelde doel bereiken.

Als resultaat van deze substituties en gelijkstelling krijgen we

$$\left.\begin{aligned}
- X_x(A) &= a_{11}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{12}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{13}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + 2a_{12}\, a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + 2a_{11}\, a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + 2a_{12}\, a_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \\
- Y_y(A) &= a_{21}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{22}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{23}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + 2a_{22}\, a_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + 2a_{23}\, a_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + 2a_{21}\, a_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \\
- Z_z(A) &= a_{31}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{32}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{33}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + 2a_{32}\, a_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + 2a_{33}\, a_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + 2a_{31}\, a_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \\
- Y_z(A) &= a_{23} a_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{22}\, a_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{23}\, a_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + (a_{22} a_{33} + a_{23}\, a_{32}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + (a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{33}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + (a_{21}\, a_{32} + a_{22}\, a_{31}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \\
- Z_x(A) &= a_{11}\, a_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{12}\, a_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{13}\, a_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + (a_{12}\, a_{33} + a_{13} a_{32}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + (a_{13}\, a_{31} + a_{11}\, a_{33}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + (a_{11}\, a_{32} + a_{12}\, a_{31}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \\
- X_y(A) &= a_{11}\, a_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + a_{12}\, a_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + a_{13}\, a_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} + (a_{12}\, a_{23} + a_{13}\, a_{22}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \\
&\qquad + (a_{13}\, a_{21} + a_{11}\, a_{23}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + (a_{11}\, a_{22} + a_{12}\, a_{21}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}
\end{aligned}\right\} \text{III.}$$

De beteekenis der a_{ik} voor onze deformatie blijkt uit (1)

b.v. $\quad a_{11} = (1 + \xi_x) \qquad a_{12} = \xi_y \qquad$ enz.

terwijl in de 2e benadering $A = \sqrt{1 + 2\,J_1 + 4\,J_2}$.

§ 2. *a. Relatieve volumeverandering door alzijdigen druk.*

Wanneer we het elastische lichaam in de x richting homogeen a keer langer maken, in de y richting b keer, in de z richting c keer; dan hebben we slechts onze formule III toe te passen met $\xi_x = a$, $\eta_y = b$, $\zeta_z = c$ om de optredende spanningen te leeren kennen.

Ze luiden voor dit geval

$$\begin{aligned} -X_x(1+a+b+c) &= (1+2a)\,\Phi_{\varepsilon_1} \qquad Y_z = Z_x = X_y = 0 \\ -Y_y(1+a+b+c) &= (1+2b)\,\Phi_{\varepsilon_2} \\ -Z_z(1+a+b+c) &= (1+2c)\,\Phi_{\varepsilon_3}\ ; \end{aligned}$$

of uitgewerkt

$$\begin{aligned} -(1+a+b+c)\,X_x = (1+2\,a)\,\{(\lambda+2\,\mu)J_1 - 2\,\mu\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\} + \\ +3\,CJ_1^2 + DJ_2 + DJ_1\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3) + E\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad \ldots\ldots \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1+a+b+c)\,Y_y = (1+2\,b)\,\{(\lambda+2\,\mu)J_1 - 2\,\mu\,(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\} + \\ +3\,CJ_1^2 + DJ_2 + DJ_1\,(\varepsilon_3+\varepsilon_1) + E\varepsilon_3\varepsilon_1 \quad \ldots\ldots \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1+a+b+c)\,Z_z = (1+2\,c)\,\{(\lambda+2\,\mu)J_1 - 2\,\mu\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\} + \\ +3\,CJ_1^2 + DJ_2 + DJ_1\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + E\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \ldots\ldots \quad (8) \end{aligned}$$

Nemen we $a = b = c$

dan wordt $\qquad J_1 = 3\,a + \frac{3}{2}\,a^2$

en $\qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2\,a + a^2$.

We krijgen een normale druk p, die bepaald wordt door

$$\begin{aligned} -p = (1-a)\,\{(\lambda+2\,\mu)\,(3\,a + \tfrac{3}{2}\,a^2) - 2\,\mu\,(2\,a + a^2)\} + \\ +27\,Ca^2 + 9\,Da^2 + Ea^2 \end{aligned}$$

of

$$-p = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,a + (-\tfrac{3}{2}\,\lambda - \mu + 27\,C + 9\,D + E)\,a^2.$$

Bij de alzijdige dilatatie a bedraagt de relatieve volume-toename

$$\frac{\partial V}{V} = 3\,a + 3\,a^2 \qquad \text{dus } a = \frac{\partial V}{3V} - \left(\frac{\partial V}{3V}\right)^2.$$

We beperken ons hier en overal verder natuurlijk tot de tweedegraads-termen van de grootheden, die de deformatie bepalen, daar we in de energie alleen de derdegraads-termen opnamen.

De druk, noodig om een relatieve volumeverandering $\frac{\partial V}{V}$ teweeg te brengen, vindt men dus uit de vergelijking

$$-p = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}\frac{\partial V}{V} + \frac{1}{18}\left[-3(3\lambda + 2\mu) + 54C + 18D + 2E\right]\left(\frac{\partial V}{V}\right)^2.$$

Om de samendrukbaarheid te berekenen, heeft men deze vergelijking slechts naar $\frac{\partial V}{V}$ op te lossen. Deze oplossing luidt

$$-\frac{\partial V}{V} = \frac{3p}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3}{2(3\lambda + 2\mu)^2}\left[-3(3\lambda + 2\mu) + 54C + 18D + 2E\right]p^2. \qquad \text{A}$$

b. Eénzijdige uitrekking.

Werkt op een staaf alleen een kracht X in de x richting, dan zal deze daardoor, behalve een uitrekking a in die richting, een contractie b in de y en z richting ondergaan.

De samenhang van a en b met de gegeven kracht X vinden we uit (6), (7) en (8), waarin $X_x = -X$, $Y_y = 0$, $Z_z = 0$ en $b = c$.

$$X = \frac{(6) + (7) + (8)}{1 + J_1} = (3\lambda + 2\mu)J_1 + 2(\lambda + 2\mu)J_1^2 -$$

$$- 8\mu J_2 + 9CJ_1^2 + 3DJ_2 + 2DJ_1^2 + EJ_2 - (3\lambda + 2\mu)J_1^2,$$

of

$$X = (3\lambda + 2\mu)(a + 2b + \tfrac{1}{2}a^2 + b^2) + [2(\lambda + 2\mu) + 9C + 2D -$$

$$- (3\lambda + 2\mu)](a^2 + 4b^2 + 4ab) + (-8\mu + 3D + E)(b^2 + 2ab).$$

Vergelijking (2) leert ons den samenhang van a en b n.l.

$$0 = (\lambda + 2\mu)(a + 2b + \tfrac{1}{2}a^2 + b^2) - 2\mu(a + \tfrac{1}{2}a^2 + b + \tfrac{1}{2}b^2) +$$

$$+ 3C(a^2 + 4b^2 + 4ab) + D(b^2 + 2ab) + D(a^2 + 3ab + 2b^2) + Eab.$$

Door $(3\lambda + 2\mu)$ maal de laatste vergelijking van $(\lambda + \mu)$ maal de voorlaatste vergelijking af te trekken, bereiken we, dat in de uitdrukking voor X, de b slechts in de tweedegraads-termen voorkomt. Hierin hebben we voor b dan alleen zijn waarde in 1[e] benadering te substitueeren, dat is; $b = -\frac{1}{2}\frac{\lambda a}{\lambda + \mu}$.

Dit alles uitgerekend geeft

$$X = (3\lambda + 2\mu)\frac{\mu}{\lambda + \mu}\,a + \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left(\begin{array}{l} 3\,\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)\,(5\,\lambda + 3\,\mu) + \\ + 3\,C\,\dfrac{\mu^3}{\lambda+\mu} + \\ - \frac{3}{4}\,D\,\dfrac{\mu\lambda}{\lambda+\mu}(3\lambda + 4\mu) + \\ + \frac{3}{4}\,E\lambda^2 \end{array}\right) a^2.$$

Willen we omgekeerd weten, welke verlenging door een kracht wordt voortgebracht, dan hebben we deze vergelijking weer naar a op te lossen en vinden

$$a = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\,X - \frac{(\lambda + \mu)}{\mu^3\,(3\lambda + 2\mu)^3}\left(\begin{array}{l} 3\mu\,(3\lambda + 2\mu)\,(5\lambda + 3\mu) + \\ + 3\,C\,\dfrac{\mu^3}{\lambda+\mu} - \\ - \frac{3}{4}\,D\,\dfrac{\mu\lambda}{\lambda+\mu}(3\lambda + 4\mu) + \\ + \frac{3}{4}\,E\,\lambda^2 \end{array}\right) X^2. \quad \textbf{B}$$

De relatieve volumevergrooting bedraagt

$$\frac{\partial V}{V} = a + 2\,b + 2\,a\,b + b^2.$$

Hiervoor wordt gevonden

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,X - \frac{1}{\mu^3(3\lambda + 2\mu)^3}\left(\begin{array}{l} \frac{3}{2}\,\mu\,(3\lambda + 2\mu)\,(\lambda^2 + 11\,\mu\lambda + 6\,\mu^2) + \\ + 9\,C\,\mu^2 + \\ + \dfrac{D}{4}\,\mu\,(8\,\mu^2 - 9\,\lambda^2 - 12\,\mu\lambda) - \\ - \dfrac{E}{4}\,\mu\lambda\,(3\,\lambda + 4\,\mu) \end{array}\right) X^2. \quad \textbf{C}$$

c. 't Wringen van een cylindrische staaf.

Een cylindrische staaf met cirkelvormige doorsnede wordt per lengte-eenheid over een hoek ϑ gewrongen. We zullen de z as van een coordinatenstelsel langs de as van den cylinder leggen. Vóór de deformatie heeft de as een lengte l en de doorsnede een straal R. Beperken we ons tot een eerste benadering, dan weten we, dat het koppel, hetwelk de wringing veroorzaakt, de staaf niet uitrekt, en ook aan de punten van een doorsnede geen radiale uitwijking geeft. Gaan we echter tot een 2° benadering over, dan zal wel een verlenging en een radiale verschuiving optreden, die evenredig zullen blijken te zijn aan ϑ^2. Uit symmetriegronden zien we dit al dadelijk, doordat een gelijke maar tegengestelde wringing 't zelfde effect moet hebben.

De wringing zal dus bij eerste benadering kunnen worden voorgesteld door een deformatie

$$x' = x - \vartheta z y, \quad y' = y + \vartheta z x, \quad z' = z.$$

De torsie wordt alleen voor zeer kleine hoeken zoo voorgesteld. Willen we de energiedichtheid hieruit berekenen, dan zullen we tenslotte $z = 0$ stellen.

Bij nauwkeuriger rekening moeten we dan schrijven

$$x' = (1+s)(x - \vartheta z y) \quad y' = (1+s)(y + \vartheta z x) \quad z' = (1+q)z. \quad (9)$$

q is de relatieve lengteverandering van de staaf.

s geeft aan de relatieve radiale verplaatsing en is een functie van r. Beschouwen we ϑ als een kleine grootheid van de 1° orde, dan moeten we s en q als van de 2° orde oneindig klein opvatten. We mogen de transformatie in den boven aangegeven vorm schrijven vanwege de gelijkwaardigheid van alle richtingen in een doorsnede. De voorwaarde, dat op den omtrek van den cylinder geen druk werkt, kunnen we om dezelfde reden schrijven in den vorm $X_x = 0$ aan 't uiteinde van den straal, die langs de x as valt.

De s als functie van r bepalen we uit de voorwaarde, dat bij een verandering van s met δs, waarbij de δs voor $r = R$ gelijk 0 is, de potentieele energie niet zal veranderen. De dichtheid der potentieele energie vinden we, door uit (9) op een punt van de x as de deformatie grootheden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \gamma_3$ te berekenen en dan voor x te schrijven r.

In voldoende benadering vinden we voor die grootheden

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{d(sr)}{dr} & \varepsilon_2 = s & \varepsilon_3 = q + \frac{1}{2}\vartheta^2 r^2 \\ \gamma_1 = \vartheta r + 2\vartheta r s & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Voor de benadering moeten we ons hierin beperken tot termen van de 2° orde. Bij het berekenen van δV moeten we echter δs als een grootheid van de 1° orde opvatten en daarom in γ_1 den term $2\vartheta r s$ behouden.

Voor de potentieele energie van de geheele staaf kunnen we schrijven

$$V = 2\pi \int_0^l \int_0^R r\Phi \, dr \, dz.$$

Als functie van r wordt s bepaald uit de voorwaarde $\delta V = 0$

dus
$$\frac{\partial (r\Phi)}{\partial s} - \frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{ds}{dr}} \right) = 0.$$

of
$$r\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{ds}{dr}} - r\frac{d}{dr}\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{ds}{dr}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Deze vergelijking kunnen we met het oog op (10) omvormen als volgt

$$r\frac{\partial \Phi}{\partial s} = r\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + r\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} 2\vartheta r^2$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{ds}{dr}} = -r\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}$$

$$-r\frac{d}{dr}\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{ds}{dr}} = -r\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} - r^2\frac{d}{dr}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}.$$

De vergelijking (11) neemt dus den vorm aan

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + 2\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\vartheta r - r\frac{d}{dr}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Hierin is

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = -(\lambda + 2\mu)\left(q + s + \frac{d(sr)}{dr} + \frac{1}{2}\vartheta^2 r^2\right) + 2\mu\left(q + \frac{1}{2}\vartheta^2 r^2 + s\right) + \left(\frac{D}{4} + \frac{E}{4}\right)\vartheta^2 r^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} = (\lambda + 2\mu)\left(q + s + \frac{d(sr)}{dr} + \frac{1}{2}\vartheta^2 r^2\right) - 2\mu\left(q + \frac{1}{2}\vartheta^2 r^2 + \frac{d(sr)}{dr}\right) - \frac{D}{4}\vartheta^2 r^2$$

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\vartheta r = 2\mu\vartheta^2 r^2$$

$$-r\frac{d}{dr}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = -(\lambda + 2\mu)\left(r\frac{ds}{dr} + r\frac{d^2(sr)}{dr^2} + \vartheta^2 r^2\right) + 2\mu\left(\vartheta^2 r^2 + r\frac{ds}{dr}\right) +$$

$$+\left(\frac{D}{2} + \frac{E}{2}\right)\vartheta^2 r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Bij optelling krijgen we het linker lid van vergelijking (12). Deze vergelijking wordt dan

$$-(\lambda+2\mu)\left(r\frac{ds}{dr}+r\frac{d^2(sr)}{dr^2}\right)+\left(\frac{D}{2}+\frac{3}{4}E+2\mu-\lambda\right)r^2\vartheta^2=0$$

of

$$\frac{d\left(r^3\frac{ds}{dr}\right)}{dr}=\frac{\frac{D}{2}+\frac{3}{4}E+2\mu-\lambda}{\lambda+2\mu}r^3\vartheta^2$$

dus

$$s=s_R+\frac{1}{16}\frac{\left(D+\frac{3}{2}E+4\mu-2\lambda\right)}{\lambda+2\mu}(r^2-R^2)\vartheta^2 \ldots . \quad (14)$$

Voor de spanning X_x vinden we in voldoende benadering $-\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}$. De voorwaarde, dat op het mantelvlak van den cylinder geen uitwendige krachten aangrijpen, luidt dus $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_{r=R}=0$

Door substitutie van (14) in (13) krijgen we hieruit de betrekking

$$\lambda q+2(\lambda+\mu)s_R=\frac{1}{8}\left(D+\frac{1}{2}E-4\mu-2\lambda\right)R^2\vartheta^2.$$

Z_z wordt voldoende benaderd door $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}$.

Op de eindvlakken van den cylinder werken in totaal geen krachten, dus moet

$$\int_0^R r\,dr\,Z_z=0; \qquad \text{of} \int_0^R r\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}dr=0;$$

of uitgewerkt

$$\int_0^R r\left[(\lambda+2\mu)J_1-2\mu\left(s+\frac{d(sr)}{dr}\right)-\frac{D}{4}\vartheta^2r^2\right]dr=0 \,.. \quad (15)$$

Schrijven we voor een oogenblik ter bekorting

$$\frac{D+\frac{3}{2}E+4\mu-2\lambda}{\lambda+2\mu}=\alpha$$

dan volgt uit (14)

$$s+\frac{d(sr)}{dr}=2s_R-\frac{\alpha}{8}R^2\vartheta^2+\frac{\alpha}{4}r^2\vartheta^2.$$

Door substitutie van deze waarde voor $s + \frac{d(sr)}{dr}$ in (15) ook in den term J_1 van die vergelijking, gaat ze over in

$$\int_0^R \left\{ \begin{array}{l} \left[(\lambda + 2\mu)\, q + \lambda \left(2 s_R - \frac{\alpha}{8} R^2 \vartheta^2\right)\right] r + \\ + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\vartheta^2}{2} + \lambda\, \frac{\alpha}{4} \vartheta^2 - \frac{D}{4} \vartheta^2\right] r^3 \end{array} \right\} dr = 0$$

, dat is

$$(\lambda + 2\mu)\, q + \lambda \left(2 s_R - \frac{\vartheta^2}{8} R^2 \alpha\right) + \frac{1}{2} R^2 \left[(\lambda + 2\mu) \frac{1}{2} \vartheta^2 + \frac{\lambda \alpha}{4} \vartheta^2 - \frac{D}{4} \vartheta^2\right] = 0$$

waarbij de termen met α tegen elkaar wegvallen, dus

$$(\lambda + 2\mu)\, q + 2 \lambda s_R = -\frac{1}{4} \left(\lambda + 2\mu - \frac{D}{2}\right) R^2 \vartheta^2 \quad \ldots . \;\mathbf{D}$$

We hadden reeds de vergelijking

$$\lambda q + 2(\lambda + \mu)\, s_R = \frac{1}{8} \left(D + \frac{1}{2} E - 4\mu - 2\lambda\right) R^2 \vartheta^2 \quad \ldots . \;\mathbf{E}$$

Beide formules te zamen leeren ons de lengteuitrekking en de dwars-contractie van den cylinder kennen bij gegeven torsie.

Om nu het moment van het koppel te vinden, noodig voor een wringing ϑ, berekenen we de potentieele energie van de geheele gewrongen staaf. Ze bedraagt $2\pi \times 2\mu \frac{R^4}{16} \vartheta^2 l$. Er treden dus geen termen van den derden graad in ϑ op.

Bij een toename van ϑ met $\delta\vartheta$ verricht 't koppel een arbeid $=$ moment van het koppel $\times\ \delta\vartheta$ en dit moet gelijk de toename van de potentieele energie zijn.

We krijgen dus voor het gevraagde moment M

$$M = \frac{\pi}{2} \mu R^4 l \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \;\mathbf{F}$$

d. Buiging van een cylindrische staaf.

De ongebogen staaf leggen we weer met zijn as in de z richting. De doorsnede zij weer cirkelvormig met een straal R. Het buigende moment M zal een moment om de y as zijn.

Bij eerste benadering, zal het deel bij $z = 0$ van de staaf, die gebogen wordt, daarbij getransformeerd worden volgens

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x + a(x^2 - y^2) - c z^2 \\ y'' &= y + 2axy \\ z'' &= z + 2cxz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$2c$ is de kromming van de neutrale doorsnede.

a is hierin ter afkorting geschreven voor $a = -\frac{1}{2}\frac{\lambda c}{(\lambda + \mu)}$;

terwijl $2c = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{4}{\pi R^4} M$ aangeeft, welke kromming de as van een staaf onder een gegeven moment M aanneemt.

Beperken we ons nu niet tot een eerste benadering, dan zullen we ons kunnen voorstellen, dat de staaf eerst in zijn lengterichting σ keer grooter geworden is, en dat ze tevens een dwarscontractie heeft ondergaan. We zullen deze transformatie voorstellen door $x' = x + \Phi(xy)$ $\quad y' = y + \chi(xy)$ $\quad z' = (1 + \sigma) z$.

Gaan we nu de zoo gedeformeerde staaf in een cirkel met straal $2c$ buigen, zoodanig, dat de doorsneden ook na de buiging vlak blijven en loodrecht op den cirkel staan, waarin de as gebogen is. Dan zal door deze buiging het punt x', y', z' op de plaats x'', y'', z'' komen, bepaald door

$$\begin{aligned} x'' &= x' - c z'^2 - 2c^2 x' z'^2 \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' + 2c x' z'. \end{aligned}$$

Deze formules gelden alleen voor kleine z'. Willen we de deformaties op grootere afstanden kennen, dan kunnen we deze zelfde formules voor een verschoven en meegedraaid assenstelsel gebruiken.

Als resulteerende deformatie kunnen we nu schrijven

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x + \Phi(xy) - c(1+\sigma)^2 z^2 - 2c^2[x + \Phi(xy)]^2 (1+\sigma)^2 z^2 \\ y'' &= y + \chi(xy) \\ z'' &= z + \sigma z + 2c[x + \Phi(xy)](1+\sigma) z \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Vergelijken we dit met (16), dan kan ik schrijven

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= a(x^2 - y^2) + p(xy) \\ \chi(xy) &= 2axy + q(xy). \end{aligned}$$

en kan hierin de p en q opvatten als functies van x en y met coefficienten, die evenredig zijn aan de 2e macht, van de kromming. Evenzoo kan ik σ een constante van de 2e orde noemen.

Ons tot dergelijke tweedegraads-termen beperkende, luidt de transformatie (17)

$$\begin{aligned} x'' &= x + a(x^2 - y^2) - cz^2 - 2c^2xz^2 + p(xy) \\ y'' &= y + 2axy + \qquad\qquad\qquad\quad + q(xy) \\ z'' &= z + 2cxz + \quad 2ca(x^2-y^2)z + \sigma z \text{..........(18)} \end{aligned}$$

Voor de deformatiegrootheden wordt hieruit berekend uitgedrukt in de x, y, z en in de x'', y'', z'', omdat we ze later in dien vorm noodig hebben.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2ax + p_x + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 &&= 2ax'' + 4a^2y''^2 + p_{x''} \\ \varepsilon_2 &= 2ax + q_y + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 &&= 2ax'' + 4a^2y''^2 + q_{y''} \\ \varepsilon_3 &= 2cx + \sigma + 2ac(x^2-y^2) + 2c^2x^2 &&= 2cx'' + \sigma + 2c^2x''^2 \\ \gamma_1 &= 0 \qquad \gamma_2 = 0 && \gamma_3 = p_y + q_x \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

We zullen p en q naar de opklimmende machten van x en y ontwikkelen en bij de termen van den 3[en] graad afbreken.

We zien gemakkelijk met het oog op (18), dat die functies de gedaante moeten hebben

$$\begin{aligned} p &= P_1x + P_3x^3 + P_4xy^2 \\ q &= Q_1y + Q_3y^3 + Q_4yx^2. \end{aligned}$$

Immers ten eerste moet p een even functe van y zijn, omdat het xz vlak een vlak van symmetrie is. Verder moet p een oneven functie van x zijn, daar, bij buiging naar den tegengestelden kant, de coefficienten P (als quadratische functies van de c) onveranderd blijven; terwijl de uitwijking voor een punt met zekere x 't tegengestelde moet zijn als bij de eerste buiging voor een punt, wiens x coordinaat een tegengestelde waarde had. Een analoge redeneering wettigt ons, q in den boven aangegeven vorm te ontwikkelen.

Voor de spanningen vind ik in voldoende benadering

$$\begin{aligned} -X_x &= (1-2cx)\,\Phi_{\varepsilon_1} & -Y_z &= \frac{\partial z''}{\partial y}\Phi_{\varepsilon_2} + \frac{\partial y''}{\partial z}\Phi_{\varepsilon_3} + \Phi_{\gamma_1} \\ -Y_y &= (1-2cx)\,\Phi_{\varepsilon_2} & -Z_x &= \frac{\partial z''}{\partial x}\Phi_{\varepsilon_1} + \frac{\partial x''}{\partial z}\Phi_{\varepsilon_3} + \Phi_{\gamma_2} \\ -Z_z &= [1+(2c-4a)x]\,\Phi_{\varepsilon_3} & -X_y &= \frac{\partial y''}{\partial x}\Phi_{\varepsilon_1} + \frac{\partial x''}{\partial y}\Phi_{\varepsilon_2} + \Phi_{\gamma_3} \end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen kunnen nog vereenvoudigd worden, wanneer we bedenken, dat in de 1[e] benadering de oplossing zoodanig is dat $X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0$.

In 1[e] benadering is dus $\Phi_{\varepsilon_1} = \Phi_{\varepsilon_2} = 0$. En na een verdere kleine uitwerking zien we, dat de spanningen te vinden zijn uit

$$\left.\begin{array}{lll} -X_x=\Phi_{\varepsilon_1} & -Y_y=\Phi_{\varepsilon_2} & -Z_z=[1+(2c-4a)x]\,\Phi_{\varepsilon_3} \\ -Y_z=0 & -Z_x=-2cz\,\Phi_{\varepsilon_3} & -X_y=\mu\,\gamma_3. \end{array}\right\}\quad \ldots (20)$$

Daar geen lichamelijke krachten op de staaf werken moet

$$\frac{\partial X_x}{\partial x''}+\frac{\partial X_y}{\partial y''}+\frac{\partial X_z}{\partial z''}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x''}+\frac{\partial Y_y}{\partial y''}+\frac{\partial Y_z}{\partial z''}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x''}+\frac{\partial Z_y}{\partial y''}+\frac{\partial Z_z}{\partial z''}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

en wel moeten deze vergelijkingen gelden voor $z=0$, daar ze dan overal geldig zijn. Lettende op (19) en (20) gaat (21) over in

$$\Phi_{\varepsilon_1 x''}+2\mu(P_4+Q_4)\,x''-2c\,\Phi_{\varepsilon_3}=0$$

gaat (22) over in

$$2\mu(P_4+Q_4)\,y''+\Phi_{\varepsilon_2 y''}=0.$$

Aan (23) wordt identiek voldaan

Werken we deze vergelijkingen uit, door de waarde van de energiedichtheid er in te substitueeren, dan ontstaan de betrekkingen

$$(\lambda+2\mu)[4c^2+2(3P_3+Q_4)]-2\mu(8c^2+Q_4-P_4-4ac)+2A=0$$

$$(\lambda+2\mu)[16a^2+2(P_4+3Q_3)]-2\mu(8a^2+P_4-Q_4)=0.$$

A is hierin een afkorting

$$A=3C(4a+2c)^2+D\,\{(4a+2c)(2a+2c)+4a^2+8ac\}+E\,4ac.$$

Vier nieuwe betrekkingen tusschen de onbepaalde coefficienten, die we hebben ingevoerd, krijgen we uit de randvoorwaarden aan den omtrek van den cylinder. Daar moet namelijk

$$X_x\cos(nx)+X_y\cos(ny)=0.$$
$$Y_x\cos(nx)+Y_y\cos(ny)=0.$$

En daar X_x, X_y, Y_x, Y_y grootheden van de 2e orde zijn, mogen we hiervoor schrijven

$$X_x\,x+X_y\,y=0.$$
$$Y_x\,x+Y_y\,y=0.$$

Als vergelijking van den omtrek der doorsnede mogen we nemen, die van den cirkel $x^2+y^2=R^2$.

De 7e en laatste betrekking wordt ons geleverd door de voorwaarde

$$\int Z_z \, dx \, dy = 0.$$

Na uitwerking van deze voorwaarden en na eenige herleidingen krijgen we als resultaat de volgende betrekkingen.

$$\left.\begin{aligned}
&P_3 + Q_3 = P_4 + Q_4 \\
&(\lambda + 2\mu)(P_4 + Q_4) = -\frac{A}{4} + 2\lambda a c + \mu c^2 \\
&(\lambda + \mu)(P_4 - Q_4) = \frac{A}{2} - 2(\lambda + 2\mu) ac + 2(\lambda + \mu) c^2 \\
&3(\lambda + \mu)(Q_3 - P_3) = \frac{A}{2} - 2(\lambda + \mu) c^2 + 2\lambda a c \\
&\frac{Q_1}{R^2} - \frac{P_1}{R_2} = \frac{3(P_3 - Q_3) + P_4 - Q_4}{2} \\
&(\lambda + 2\mu)\left(\frac{P_1}{R^2} + \frac{Q_1}{R^2} + \frac{\sigma}{R^2} + 3P_3 + Q_4\right) - 2\mu\left(\frac{Q_1}{R^2} + \frac{\sigma}{R^2} + Q_4\right) = -A - 2\lambda c^2 \\
&(\lambda + 2\mu)\left(\frac{P_1}{R^2} + \frac{Q_1}{R^2} + \frac{\sigma}{R^2} + P_4 + Q_4 + 2a^2 + \tfrac{1}{2}c^2\right) - 2\mu\left(\frac{P_1}{R^2} + \frac{Q_1}{R^2} + P_4 + Q_4 + 3ac - c^2\right) = -\frac{B}{4}
\end{aligned}\right\} G$$

Hierin zijn A, B en a afkortingen voor

$$A = 3C(4a + 2c)^2 + D\{(4a + 2c)(2a + 2c) + 4a^2 + 8ac\} + E4ac$$

$$B = 3C(4a + 2c)^2 + D\{(4a + 2c)(4a) + 4a^2 + 8ac\} + E4a^2$$

$$a = -\frac{\lambda c}{2(\lambda + \mu)}.$$

Wanneer b. v. bij een bepaalde buiging gemeten worden de verlenging σ der as en de relatieve volumevergrooting

$$\frac{\partial V}{V} = P_1 + Q_1 + \sigma + (P_4 + Q_4 + 2a^2 + 2ac) R^2;$$

dan hebben we daarin, met behulp van de bovenstaande betrekkingen, een middel de combinaties A en B van de elasticiteitscoefficienten C, D en E te bepalen.

Het buigend moment bedraagt

$$M = -\int Z_z\, x\, dx\, dy.$$

Volgens (19) is

$$Z_z = -(1 + (2c - 4a)x)\,\Phi_{\varepsilon_3}.$$

Omdat we over het cirkeloppervlak moeten integreeren, zullen in den integrand de oneven machten van x en y mogen worden weggelaten. Hierdoor reduceert zich M tot

$$M = \int \left\{ (\lambda + 2\mu)(4a + 2c)x^2 - 2\mu \times 4ax^2 \right\} dx\, dy.$$

$$M = \left\{ (\lambda + 2\mu)\left(a + \frac{c}{2}\right) - 2\mu a \right\} \pi R^4 = \left\{ (\lambda + 2\mu)\frac{c}{2} + \lambda a \right\} \pi R^4.$$

Substitueeren we voor a zijn waarde $a = -\dfrac{\lambda c}{2(\lambda + \mu)}$ dan vind ik

$$M = \frac{c}{2}\,\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,\pi R^4; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{H}$$

dus bij 2^e benadering hetzelfde verband tusschen het buigend moment en den kromtestraal van den cirkel, waarin de staaf gebogen wordt, als bij 1^e benadering.

§ 3. *Berekening der waarden van de coefficienten voor staal.* Over de veranderingen in de afmetingen van een stalen staaf bij wringing zijn door Poynting [1]) proeven genomen en berekeningen uitgevoerd.

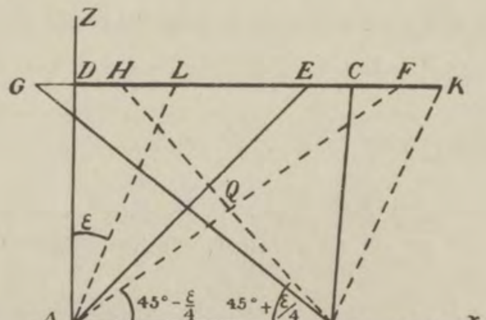

Fig. 5.

[1]) Poynting, On the changes in the dimensions of a steel were when twisted and on the pressure of distortional waves in steel. Proc. Royal Soc. (A) 86 (1912) p. 534.

In deze § zal het verband worden aangegeven tusschen de door Poynting ingevoerde elasticiteitscoefficienten p, q en de door ons gebruikte λ, μ, C, D, E. Ook Lorentz [1]) heeft de te verwachten deformaties berekend, wat echter niet geheel juist bleek te zijn [2]).

De beschouwing van Poynting is de volgende.

Vervormen we een kubus $ABCD$ door een afschuiving over een hoek ε tot $ABKL$, dan zal de lijn GB, die de grootste contractie ondergaat, na de deformatie in BH komen, zoodanig dat hoek $ABH = 45° + \frac{\varepsilon}{4}$ is. De lijn AF, die het meest uitgerekt is, zal een hoek $45° - \frac{\varepsilon}{4}$ met AB maken. Dit geldt tot en met termen met ε^2. Op AQ zal nu alleen een normale druk en op BQ alleen een normale trekkracht werken, er zullen langs AQ en BQ geen schuifspanningen bestaan, ook niet van de 2e orde. Twee nieuwe elasticiteitsconstanten p en q worden ingevoerd door de volgende definitie: De druk op AQ zal bij 2e benadering $\mu\varepsilon + p\varepsilon^2$ bedragen, (die op BQ zal dan een grootte hebben $-\mu\varepsilon + p\varepsilon^2$, zooals Poynting uit symmetriebeschouwingen aantoont) de druk loodrecht op 't vlak van teekening zal bedragen $Y_y = q\varepsilon^2$.

Nu berekent Poynting, dat er dan op AB een normale druk $Z_z = (\frac{1}{2}\mu + p)\varepsilon^2$ en op AD een normale druk $X_x = (-\frac{1}{2}\mu + p)\varepsilon^2$ moet werken, terwijl bovendien de tangentieele spanningen $\mu\varepsilon$ bestaan.

Bovenbedoelde deformatie brengt het punt x, y, z op de plaats x', y', z', welke laatste grootheden tot in ε^2 nauwkeurig als volgt met x, y, z samenhangen

$$x' = x + \varepsilon z \qquad y' = y \qquad z' = z.$$

In I, II en III uit § 1 van dit Hoofdstuk hebben we nu de formules om bij deze gegeven deformatie de te voorschijn geroepen spanningen te berekenen. Als resultaat van die berekening vinden we

---

[1]) H. A. Lorentz, l. c.

[2]) J. Tresling, Over het gebruik van derdegraads-termen in de energie van een gedeformeerd elastisch lichaam. Versl. Kon. Ak. XXV, p. 156.

$$X_x = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\left(-\lambda - 3\mu + \frac{D}{2} - \mu\right)$$
$$Y_y = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\left(-\lambda + \frac{D}{2} + \frac{E}{2}\right)$$
$$Z_z = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\left(-\lambda - 3\mu + \frac{D}{2} + \mu\right)$$
$$Y_z = 0 \qquad Z_x = -\mu\varepsilon \qquad X_y = 0.$$

en wanneer we deze uitdrukkingen vergelijken met die, welke Poynting voor dezelfde spanningen heeft opgesteld, vinden we het verband

$$p = \frac{D}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{3\mu}{2} \qquad\qquad q = \frac{D}{4} + \frac{E}{4} - \frac{\lambda}{2}$$

Brengen we, de elasticiteitscoefficienten p, q in plaats van D en E in de vergelijkingen **D** en **E** van § 2. Zoo luiden die

$$(\lambda + 2\mu)\,q + 2\lambda s_R = \frac{1}{4}(\mu + 2p)\,R^2\,\vartheta^2.$$

$$\lambda q + 2(\lambda + \mu)\,s_R = -\frac{1}{8}(\mu - 2p - 2q)\,R^2\,\vartheta^2.$$

Poynting nam waar q en s_R bij een bepaalde staaldraad, waarvoor

$$\lambda = 9{,}77 \times 10^{11} \quad \text{en} \quad \mu = 8{,}35 \times 10^{11}$$

en kon zoodoende voor p en q de waarden berekenen, waarvoor hij vond

$$p = 1{,}67 \times 10^{12} \quad \text{en} \quad q = -0{,}70 \times 10^{12}.$$

De waarden voor D en E waren dus

$$D = 13{,}6 \times 10^{12} \quad \text{en} \quad E = -14{,}5 \times 10^{12}$$

alles in *C. G. S* eenheden.

Ik zal nu ook voor C een waarde trachten te vinden.

Poynting nam eenige hulpproeven; om de elasticiteitscoeff. te bepalen en vond voor een staaldraad, met diameter $d = 0{,}0986$ cM. bij de belastingen.

18,5	28,5	38,5	48,5	K.G.

resp. de elasticiteitsmoduli

$$E_1 = 2{,}11 \times 10^{12} \quad E_2 = 2{,}12 \times 10^{12} \quad E_3 = 2{,}09 \times 10^{12}$$
$$E_4 = 2{,}16 \times 10^{12} \quad \text{C. G. S.}$$

Schrijven we verg. (**B**) bladz. 43 ter afkorting

$$a = \alpha X + \beta X^2$$

waarin de beteekenis der α en β uit genoemde verg. blijkt.

Deze vergelijking beweert, dat de elasticiteitsmod. bij verschillende belastingen bedragen.

$$\frac{1}{E_i} = \alpha + 2\beta X_i.$$

dus

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = 2\beta_{1P_0}(X_2 - X_1). \quad \frac{1}{E_3} - \frac{1}{E_2} = 2\beta_{2P_0}(X_3 - X_2).$$

$$\frac{1}{E_4} - \frac{1}{E_3} = 2\beta_{3P_0}(X_4 - X_3).$$

Het bovenstaande tabelletje, waaruit dus 3 waarden van β gevonden kunnen worden en welke we noteerden β_{1P_0}, β_{2P_0}, β_{3P_0} luidt omgerekend in spanningen dynes/cM^2.

$$X_2 - X_1 = 1{,}28 \times 10^9. \quad X_3 - X_2 = 2{,}56 \times 10^9. \quad X_4 - X_3 = 3{,}84 \times 10^9.$$

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = -0{,}002 \times 10^{-12}. \quad \frac{1}{E_3} - \frac{1}{E_2} = 0{,}007 \times 10^{-12}. \quad \frac{1}{E_4} - \frac{1}{E_3} = -0{,}016 \times 10^{-12}.$$

Hieruit volgt voor de waarden der β.

$$\beta_{1P_0} = -8 \times 10^{-25}. \quad \beta_{2P_0} = 12 \times 10^{-25}. \quad \beta_{3P_0} = -20 \times 10^{-25}.$$

Men kan deze proeven eigenlijk voor ons doel nauwelijks gebruiken, omdat de elasticiteitsmoduli, mij daarvoor te onnauwkeurig schijnen waargenomen. Was dit niet het geval, dan zouden we natuurlijk de waarnemingen bij de kleine belasting gebruiken dus de β_{1P_0}.

Hoewel Bach [1]) ander staal gebruikt bij proeven juist over de verandering der elasticiteit bij verschillenden druk, meen ik toch, ook voor dit staal de coeff. te kunnen gebruiken, die we reeds kennen. De waarden voor β uit de gegevens van Bach noem ik β_{1Ba}, β_{2Ba}, β_{3Ba}.

Bach geeft aan voor een staaf staal No. 1.

---

[1]) C. Bach. Elasticität und Festigkeit. 7e Aufl.

Spanningsverhooging in K.G./cM².	rel. verlenging × 15000.
van 318,5 tot 955,4	4,47
van 318,5 tot 1592,4	8,94 + δ (waarneminsfout).

Uit de betrekking $a = \alpha X + \beta X^2$ kan ik met deze gegevens β afleiden.

$$X_1 = 636{,}9 \times 981 \times 10^3 \text{ dyn./cM}^2 \qquad a_1 = \frac{4{,}47}{15000}.$$

$$X_2 = 2\, X_1 \qquad a_2 = 2\, a_1 + \delta.$$

Met deze gegevens krijgt men

$$a_2 - 2\, a_1 = 2\, \beta_{1\,Ba}\, X_1^2 = \delta \quad \text{dus} \quad \beta_{1\,Ba} = \frac{\delta}{2\, X_1^2} = 8{,}6 \times \delta \times 10^{-23}.$$

Zij $\delta = \pm\, 0{,}005$; we hebben dan $\beta_{1\,Ba} = \pm\, 4 \times 10^{-25}$.

Voor chroomnikkelstaal luiden de opgaven

Spanningsverh. in K.G./cM².	rel. verlenging × 15000
van 322 tot 965	4,45
van 322 tot 1608.	8,90 + δ.

Uit deze gegevens leiden we op gelijke wijze af, ook weer voor een waarnemingsfout $\delta = \pm\, 0{,}005$ dat $\beta_{2\,Ba} = \pm\, 4 \times 10^{-25}$.

Voor een geharde chroomnikkelstaal wordt opgegeven.

Spanningsverh. in K.G./cM².	rel. verlenging × 15000
van 325 tot 1299	6,77
van 325 tot 2273.	13,62 + δ.

Ik zie dus, dat

$$\frac{\delta + 13{,}62 - 2 \times 6{,}77}{15000} = 2\, \beta_{3\,Ba}\, [(1299 - 325) \times 981000]^2$$

of

$$\beta_{3\,Ba} = (40 \pm 4) \times 10^{-25}.$$

De beteekenis van β was

$$\beta = -\frac{(\lambda + \mu)}{\mu^3\, (3\,\lambda + 2\,\mu)^3} \left(\begin{array}{l} 3\,\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)\,(5\,\lambda + 3\,\mu) + 3\, C\, \dfrac{\mu^3}{\lambda + \mu} \\ -\dfrac{3}{4}\, D\, \dfrac{\mu\,\lambda}{\lambda + \mu}\,(3\,\lambda + 4\,\mu) + \dfrac{3}{4}\, E\, \lambda^2 \end{array} \right)$$

of wanneer we de reeds bekende getallenwaarden invullen bij benadering

$$\beta = -\, 3{,}2 \times 10^{-38}\, (4{,}5 \times 10^{13} + C).$$

Bij de opgaven van BAGH vind ik dus:

$C_{1\,Ba}$ en $C_{2\,Ba}$ liggen tusschen − 3 en — 6 keer 10^{13}.

$C_{3\,Ba}$ ligt „ — 12 „ — 15 „ 10^{13}.

gemiddeld $C_{Ba} = - 7 \times 10^{13}$

terwijl uit de opgaven van POYNTING zou volgen.

$C_{1\,P_0} = - 1{,}5 \times 10^{13}$ $C_{2\,P_0} = - 8 \times 11^{13}$ $C_{3\,P_0} = + 1{,}5 \times 10^{13}$

gemiddeld $C_P = - 3 \times 10^{13}$.

HOOFDSTUK III.

Over de uitzetting van vaste lichamen door warmte en de afhankelijkheid der compressibiliteit van de temperatuur.

§ 1. *De gebruikte methode wordt aangegeven. Stelling ten opzichte van verhandelingen van* Debije, van Everdingen, Lorentz, Ornstein *en* Zernike.

Zooals bekend heeft Debije een theorie voor de soortelijke warmte opgesteld, waarin de coefficienten door de elastische eigenschappen van de stof zijn bepaald. In zijn verhandeling „Zustandsgleichung und Quantenhypothese" [1]) heeft Debije getracht op een dergelijke wijze de toestandsvergelijkingen van een vast lichaam te bepalen. Hij heeft hierbij coefficienten ingevoerd, bij een reeksontwikkeling van de grensfrequentie naar de deformatiecomponenten. Het verband tusschen die coefficienten en de elastische eigenschappen van de stof heeft hij niet aangegeven. Dit heeft later van Everdingen [2]) gedaan. Deze is echter daarbij uitgegaan van een vorm voor de potentieele energie, die niet juist is, omdat bij dien vorm, de potentieele energie een andere waarde aanneemt, wanneer het lichaam enkel gedraaid wordt. Debije zelf maakt een dergelijke fout, wanneer hij voor de ontwikkeling van de grensfrequentie naar de deformatiecomponenten schrijft

$$\nu_1 = \nu_0 \left[1 + \alpha(\xi_x + \eta_y + \zeta_z) + \frac{\beta}{2}(\xi_x + \eta_y + \zeta_z)^2 + \right. \quad ^{3)}$$

$$\left. + \gamma\left[\xi_x^2 + \eta_y^2 + \zeta_z^2 + \frac{1}{2}\left\{(\eta_z + \zeta_y)^2 + (\zeta_x + \xi_y)^2 + (\xi_y + \eta_x)^2\right\}\right]\right].$$

---

1) P. Debije. l. c.

2) M. I. M. van Everdingen. l. c.

3) l. c. Bladz. 40, form. 37.

Prof. Lorentz rekende in een college uit, dat zulk een uitdrukking niet invariant is tegen draaiing cf. § 3.

Zooals we in Hoofdstuk II hebben aangetoond, zou deze moeten luiden

$$\nu_1 = \nu_0 (1 + \alpha J_1 + \beta J_1^2 + \gamma J_2)$$

Ook wil DEBIJE de spanningscomponenten uit de vrije energie F afleiden als volgt:

$$X_x = \frac{\partial F}{\partial \xi_x} \qquad Y_z = \frac{\partial F}{\partial (\eta_z + \zeta_y)}$$

$$Y_y = \frac{\partial F}{\partial \eta_y} \qquad Z_x = \frac{\partial F}{\partial (\zeta_x + \xi_z)}$$

$$Z_z = \frac{\partial F}{\partial \zeta_z} \qquad X_y = \frac{\partial F}{\partial (\xi_y + \eta_x)}.$$

Hoe deze formules behooren te zijn, is ook in Hoofdstuk II weergegeven. ORNSTEIN en ZERNIKE [1]) hebben deze fouten vermeden. Zij zijn echter niet ver genoeg gegaan in hun benadering om een juiste uitkomst te verkrijgen. Hiertoe is noodig, dat men ook termen van de 4e orde in de potentieele energie opneemt, zooals zal blijken. Is het ons alleen te doen om een waarde voor den uitzettingscoefficient te vinden, dan is echter de benadering van ORNSTEIN en ZERNIKE voldoende en een methode van berekening van die waarde in hun verhandeling te vinden. Echter hebben genoemde schrijvers gemeend bij hun berekeningen oplossingen te mogen gebruiken voor golven, die zich in het medium voortplanten, alsof de betreffende bewegingsverg. lineair zijn. In hoe verre dit gerechtvaardigd is, is niet duidelijk. Terwijl ik mij, beroepende op waarnemingen, de beweging als een superpositie van dilatatie en eenvoudige golven opvat. Dit is ook het uitgangspunt van een verhandeling van Prof. LORENTZ [2]), die den druk van de beweging op vaste wanden nagaat. Mij schijnt het daarentegen weer natuurlijker den gemiddelden druk in een medium te berekenen, waarin de deformatie en warmtebeweging gegeven is.

Nemen we zulke termen in de uitdrukking voor de potentieele energie op met zekere coefficienten, die we ons uit elastische proeven gegeven denken. Dan maak ik mij de volgende voorstelling van hetgeen er gebeurt bij een verwarming en uitrekking.

---

[1]) ORNSTEIN en ZERNIKE. l. c.

[2]) H. A. LORENTZ. l. c.

Verwarm ik het lichaam zonder druk, dan zal het lichaam uitzetten. Ieder punt zal een trilling uitvoeren om een anderen evenwichtsstand. De nieuwe evenwichtsstand van het punt met coordinaten x, y, z zij $x' = (1 + \delta) x$, $y' = (1 + \delta) y$, $z' = (1 + \delta) z$, terwijl door zijn warmtebeweging datzelfde punt nog een uitwijking ξ, η, ζ, krijgt, die we zullen opvatten als functies van de nieuwe evenwichtsstanden. De uitzetting δ wordt bepaald door de trillingsenergie en is dus van de 2^e orde ten opzichte van de deformatiegrootheden der warmtebeweging.

Het verwarmde lichaam kunnen we uitrekken of samendrukken door een overal gelijken normalen druk. Dan zullen de evenwichtsstanden weer veranderen. 't Punt x, y, z zal nu trillen om het punt $x'' = (1 + q) x'$, $y'' = (1 + q) y'$, $z'' = (1 + q) z'$ en de trillende beweging zullen we nu beschrijven door de uitwijkingen ξ'', η'', ζ''; nu als functies van $(x'', y\ , z'')$ beschouwd.

Het is mijn bedoeling den druk p uit te rekenen, die verkregen wordt door de deformatie δ, q en de trillende beweging.

Voor $q = 0$ is $p = 0$. Deze voorwaarde doet ons δ als functie van de trillingsenergie kennen en wanneer we deze energie door een quantenstelling als Debije met de temperatuur T in verband brengen, hebben we den uitzettingscoefficient. De zoo gevonden waarde van δ kunnen we dan in de uitdrukking voor p substitueeren, die daardoor evenredig wordt met q, terwijl de evenredigheidsfactor een bekende functie van T wordt. Deze factor, d.i. de reciproke samendrukbaarheidscoefficient, is dan in zijn temperatuurafhankelijkheid bekend.

§ 2. *Toelichting der methode aan een eenvoudig geval. De energie moet de gedaante hebben* $\varepsilon = \nu f\left(\frac{\nu}{T}\right)$.

Aan een staaf kan deze rekening eenvoudig worden verduidelijkt. We denken de staaf vrij en de warmtebeweging als longitudinale golven, die er langs loopen. Een tijdsgemiddelde zal dus onafhankelijk van de plaats op de staaf zijn. De uiteinden worden niet vastgehouden, zooals we het wel deden bij de vraagstukken in Hoofdstuk I. Door het vasthouden zouden we slechts een kunstmatige inhomogeniteit te voorschijn roepen. Ik wil er hier vooral op wijzen, dat de beschouwingen een geheel phaenomenologischen grondslag hebben. Een constante homogene uitrekking, waarop gesuperponeerd verschillende longitudinale golven loopen, waartusschen dan nog een zekere energieverdeeling bestaat, zóó lijkt het ons, dat de verschijnselen kunnen worden beschreven. Bij deze opvatting bemoeien we ons niet verder met de bewegingsvergelijking van de staaf. We nemen aan, dat deze zoodanig is, dat ze niet strijdt met de boven aangegeven opvatting van de warmtebeweging.

De potentieele energie bedrage

$$\int \Phi \, dx = \int \left(\tfrac{1}{2} \alpha \xi_x^2 + \tfrac{1}{3} \beta \xi_x^3 + \tfrac{1}{4} \gamma \xi_x^4\right) dx,$$

de spanning is dus

$$S = \alpha \xi_x + \beta \xi_x^2 + \gamma \xi_x^3.$$

De staaf wordt zonder spanning verwarmd. 't Punt x zal dan om 't punt $x' = x(1 + \delta)$ trillen. Bij het aanbrengen van een gegeven spanning S_1, zal het om het punt $x'' = (1 + q) x'$ trillen. De totale uitwijking zal dan zijn

$$\xi = [q + \delta (1 + q)] x + \xi'' (x'')$$

en dus

$$\xi_x = q + \delta (1 + q) + \xi''_{x''} (1 + q)(1 + \delta)$$

of afgekort $\qquad \xi_x = s + r \xi''_{x''}$

met $\qquad s = q + \delta (1 + q) \qquad r = (1 + q)(1 + \delta).$

Ik vind derhalve, wanneer ik mij de warmtebeweging zuiver sinusvormig voorstel en dus bij het nemen van een tijdsgemiddelde 1e graadstermen weglaat, ook ξ_x^3 weglaat en ter bekorting de accenten niet neerschrijf

$$\overline{S_1} = \alpha s + \beta (s^2 + r^2 \overline{\xi_x^2}) + \gamma (s^3 + 3 s r^2 \overline{\xi_x^2}).$$

Ik mag geen hoogere termen dan de 3e orde in q, δ en ξ_x behouden. De δ wordt bepaald doordat we weten dat voor $q = 0$ $\overline{S_1} = 0$. Deze conditie geeft

$$0 = \alpha \delta + \beta (\delta^2 + (1 + 2\delta) \overline{\xi_x^2}) + \gamma (\delta^3 + 3 \delta \overline{\xi_x^2})$$

Hieruit volgt, dat δ in eerste benadering bepaald wordt door

$$\alpha \delta + \beta \overline{\xi_x^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ik mag dus δ als een grootheid van de 2e orde beschouwen.

Zoo benaderend vind ik voor $\overline{S_1}$ de waarde

$$\overline{S_1} = \alpha (\delta + q + \delta q) + \beta [q^2 + 2 q \delta + (1 + 2q) \overline{\xi_x^2}] + \gamma (q^3 + 3 q \overline{\xi_x^2}).$$

De bedoeling is de samendrukbaarheidscoefficient te berekenen. Ik beschouw dus de deformatie q als een virtueele, die ik alleen tot de eerste macht behoud. Met behulp van de betrekking (1) krijg ik zoodoende

$$\overline{S}_1 = q\left[\alpha + \left(-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha}\beta + 2\beta + 3\gamma\right)\overline{\xi_x^2}\right] \text{[1]} \dots\dots \quad (2)$$

De betrekking (1) leert: zonder spanning bedraagt de verlenging per lengte-eenheid

$$\delta = -\frac{\beta}{\alpha}\overline{\xi_x^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Voeren we in de beide laatste verg. de temperatuur in, dan hebben we formules voor de uitzettingscoeff. en de afhankelijkheid der compressibiliteit van de temp. Het optreden van γ wijst er op, dat we voor het laatste doel inderdaad ook nog vierdegraads-termen in de potentieele energie noodig hadden.

Om deze verlenging op te heffen is dus druk noodig en wel

$$S = \alpha\delta = -\beta\overline{\xi_x^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Hetzelfde, wat we in Hoofdst. I vonden voor den druk uitgeoefend door trillingen in een snaar met vaste uiteinden, al waren we à priori niet zeker hetzelfde te zullen vinden, wegens de andere opvattingen, waarvan we hier uitgaan.

Ofschoon we tot nu toe aan loopende golven gedacht hebben, (wat mij het natuurlijkst lijkt), moeten we toch, wanneer we in (2) voor $\overline{\xi_x^2}$ de temperatuur in voeren, om van bepaalde frequenties te kunnen spreken, staande golven beschouwen. Zoo zullen we ook later in het driedimensionale geval handelen.

Speciaal voor de staaf met vaste uiteinden merk ik nog het volgende op.

Ter berekening van het spectrum zoeken we eerst de bewegingsvergelijking.

De spanning bedraagt voor $q = 0$

$$S = \alpha[\delta + (1+\delta)\xi_x] + \beta \times 2\delta\xi_x = \alpha\delta + [\alpha + \delta(\alpha + 2\beta)]\xi_x.$$

De bewegingsvergelijking luidt dus

$$\rho' \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = [\alpha + \delta(\alpha + 2\beta)]\xi_{xx}.$$

---

[1]) Dit is niet voldoende nauwkeurig (zie pag. 72) en wordt later ook verbeterd. Het eerste deel van deze § dient ook slechts ter orientatie.

Hierbij zijn de accenten bij de x weggelaten. De beteekenis van ρ' volgt uit $\rho'(1+\delta)=\rho$.

Beschouwen we alle mogelijke staande golven, die in de uitgerekte snaar van een lengte $l'=(1+\delta)\,l$ kunnen bestaan, dus de golven

$$\xi_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{l'} \sin\nu_n t$$

voor alle geheele waarden van n, dan vind ik voor 't spectrum

$$\rho'\,\nu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l'^2}\left[\alpha + \delta(\alpha+2\beta)\right]$$

of

$$\rho\,\nu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\left[\alpha + 2\beta\delta\right]$$

dus voor $\delta = 0$

$$\frac{\partial \log \nu_n}{\partial \delta} = \frac{\beta}{\alpha} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (5)$$

een voor alle bewegingswijzen gelijk bedrag.

Vergelijking (4) kan ook geschreven worden in den vorm

$$S = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\overline{E}}{l} \quad \text{verg. } \mathbf{B} \text{ pag. } 13$$

of met behulp van (5)

$$S = -\frac{\partial \log \nu}{\partial \delta}\,\frac{\overline{E}}{l} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (6)$$

Ter verkrijging van deze laatste vergelijking moeten we den factor $\frac{\partial \log\nu}{\partial\delta}$ berekenen uit een energie, waarin derdegraadstermen waren opgenomen Verder kunnen we nu deze termen verwaarloozen en de werkelijke beweging beschouwen als superpositie van de verschillende eigen trillingen, die geheel onafhankelijk van elkaar zijn. Ik schrijf dan ook voor E de som van de partieele energieen $E=\sum \varepsilon_n$.

We willen nu voor de staaf een vrije energie $F \times l$ invoeren Het ligt voor de hand, ook F als een som te beschouwen, waarvan ieder deel de vrije energie van één eigen trilling bevat. Dus $F=\sum \Phi_n$.

Met Debije zullen we nu Φ_n als een functie van T en ν_n opvatten. Wanneer de staaf uitgerekt wordt, zal van de n^e trillingswijze de frequentie veranderen. De ν_n zullen dus functies van de uitrekking δ zijn en zoodoende wordt de Φ_n een functie van temp. en uitrekking. Uit de vrije energie kunnen we den druk op de uiteinden vinden als

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \delta} = -\sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \nu_n}\frac{\partial \nu_n}{\partial \delta} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial \delta}\sum \frac{\partial \Phi_n}{\partial \log \nu_n}.$$

Vergelijking (6) geeft ons voor den druk, wanneer we daarin substitueeren

$$\frac{\overline{E}}{l} = \sum \frac{\overline{\varepsilon_n}}{l} = \sum \left(\Phi_n - T\frac{\partial \Phi_n}{\partial T}\right)$$

de betrekking

$$S = -\frac{\partial \log \nu}{\partial \delta}\sum_n \left(\Phi_n - T\frac{\partial \Phi_n}{\partial T}\right).$$

Het gelijkstellen van de beide uitdrukkingen voor S geeft ons een differentiaalvergelijking, waaraan de Φ_n moeten voldoen n.l.

$$\sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \log \nu_n} = +\sum_n \left(\Phi_n - T\frac{\partial \Phi_n}{\partial T}\right)$$

of

$$\sum_n \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \log \nu_n} - \Phi_n + T\frac{\partial \Phi_n}{\partial T}\right) = 0.$$

Wanneer we nu bedenken, dat Φ_n alleen van ν_n en van geen andere ν afhangt, zien we dat de uitdrukking tusschen haakjes voor één speciale waarde van n alleen functie van T kan zijn.

Hierbij zullen we onderstellen, dat aan onze differentiaalvergelijking voldaan moet worden identiek in T en alle ν's, terwijl we slechts weten, dat de som over het spectrum van de staaf genomen, moet verdwijnen. In deze onderstelling mogen we dus de differentiaalvergelijking splitsen in de n volgende

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \log \nu_n} - \Phi_n + T\frac{\partial \Phi_n}{\partial T} = 0.$$

Terwijl we voor een systeem van één vrijheidsgraad voor de vergelijking, waaraan de vrije energie moet voldoen, steeds kunnen opstellen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \log \nu} - \Phi + T\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0\,;$$

een vergelijking, waaraan identiek in ν en T moet worden voldaan, daar we ν steeds willekeurig kunnen kiezen.

Na een kleine herleiding krijgt deze vergelijking de gedaante

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial \log \nu} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log T} = 1$$

of

$$\frac{\partial (\log \Phi - \frac{1}{2} \log \nu - \frac{1}{2} \log T)}{\partial \log \nu} + \frac{\partial (\log \Phi - \frac{1}{2} \log \nu - \frac{1}{2} \log T)}{\partial \log T} = 0$$

dus

$$\frac{\partial \log \frac{\Phi}{\sqrt{\nu T}}}{\partial \log \nu} + \frac{\partial \log \frac{\Phi}{\sqrt{\nu T}}}{\partial \log T} = 0.$$

Hieruit volgt

$$\log \frac{\Phi}{\sqrt{\nu T}} = \psi (\log \nu - \log T) = \psi \left(\log \frac{\nu}{T} \right),$$

waarin ψ een willekeurige functie aangeeft, zooals in de volgende formules χ en f.

We zien dus, dat

$$\Phi = T \chi \left(\frac{\nu}{T} \right)$$

terwijl $\varepsilon = \Phi - T \frac{\partial \Phi}{\partial T}$ de gedaante moet hebben van $\varepsilon = \nu f \left(\frac{\nu}{T} \right)$ een verschuivingswet, waaraan de quantenhypothese

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad \text{voldoet.}$$

§ 3. *Splitsing der energie in longitudinale en transversale. Berekening der voortplantingssnelheden.*

Bij het driedimensionale probleem zal ik eerst de bewegingsvergelijkingen in een elastisch medium afleiden op een wijze, zooals prof LORENTZ dat op een college 1917/18 heeft gedaan en die mij voor ons doel het eenvoudigst lijkt.

Voeren we in de afkortingen

$$\begin{array}{lll} \xi_x = x_x & \zeta_y + \eta_z = y_z & \zeta_y - \eta_z = \omega_x \\ \eta_y = y_y & \xi_z + \zeta_x = z_x & \xi_z - \zeta_x = \omega_y \\ \zeta_z = z_z & \eta_x + \xi_y = x_y & \eta_x - \xi_y = \omega_z \end{array}$$

$$x_x + y_y + z_z = P$$

$$x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} (x_y^2 + y_z^2 + z_x^2) = Q$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = R.$$

De in Hoofdstuk II ingevoerde invarianten J_1 en J_2 kan ik uitdrukken in P, Q en R. Wanneer we alleen grootheden van de 1e en 2e orde behouden, luiden die

$$J_1 = P + \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{4} R$$

$$J_2 = \frac{P^2}{2} - \frac{Q}{2}.$$

In deze benadering kan ik dus de potentieele energie, wanneer we niet juist van den ongedwongen toestand uitgaan, schrijven in den vorm

$$V = \int U\, dx\, dy\, dz = \int (U_1 + \varkappa P + \tfrac{1}{2} \alpha P^2 + \gamma Q + \beta R)\, dx\, dy\, dz.$$

en de kin. energie

$$\int T d S = \tfrac{1}{2} \int \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

Dan leid ik af uit het principe van Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int (T - U)\, dS = 0$$

dat

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_y} \right)$$

enz.

of na uitwerking

$$\rho \ddot{\xi} = (\alpha + \gamma - 2\beta) \frac{\partial P}{\partial x} + (\gamma + 2\beta) \Delta \xi \qquad \text{enz.}$$

met de afkorting

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

Voor longitudinale golven in de richting l, m, n met voortplantingssnelheid v_l:

$$\xi = M\, l \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_l} \right)$$

$$\eta = M\, m \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_l} \right)$$

$$\zeta = M\, n \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_l} \right) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

geven deze vergelijkingen een voortplantingssnelheid

$$\rho v_l^2 = (\alpha + 2\gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Voor transv. golven in de l, m, n richting, gepolariseerd in een richting l', m', n':

$$\xi = N l' \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_{tr}}\right).$$

$$\eta = N m' \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_{tr}}\right)$$

$$\zeta = N n' \cos \nu \left(t - \frac{lx + my + nz}{v_{tr}}\right) \qquad ll' + mm' + nn' = 0$$

geven de bewegingsvergelijkingen een voortplantingssnelheid

$$\rho v_{tr}^2 = \gamma + 2\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Voor longitudiale golven bestaan voor de tijdsgemiddelden de betrekkingen

$$\overline{P^2} = \overline{Q} \text{ en } \overline{R} = 0$$

In de uitdrukking voor de potentieele energie zullen we voor de longitudinale golven dus substitueeren

$$\overline{R} = 0 \qquad \overline{P^2} = P_l^2 \qquad \overline{Q} = P_l^2 .$$

Voor transversale golven gelden de betrekkingen

$$\overline{P^2} = 0 \qquad \overline{R} = 2\overline{Q} .$$

In de uitdrukking voor de potentieele energie geven dus de transversale golven bijdragen

$$\overline{P^2} = 0 \qquad \overline{Q} = Q_{tr} \qquad \overline{R} = 2\,Q_{tr} .$$

De gemiddelde potentieele energie neemt dan den vorm aan, wanneer we $\overline{P}$ weglaten, omdat P een zuiver periodieke functie van den tijd is:

$$V = \int (U_0 + (\tfrac{1}{2}\,\alpha + \gamma)\,P_l^2 + (\gamma + 2\,\beta)\,Q_{tr})\,dx\,dy\,dz \ldots (9)$$

Deze formules zullen we later blijken noodig te hebben.

§ 4. *Vorm voor de energie, wanneer trillingen zich op een deformatie superponeeren.*

Wanneer we ons tot termen van den 4^{en} graad beperken, kunnen we de potentieele energie schrijven in den vorm

$$\int \Phi \, dx\, dy\, dz = \int [(\tfrac{1}{2}\lambda + \mu) J_1^2 - 2\mu J_2 + C J_1^3 + D J_1 J_2 + E J_3 + \\ + F J_1^4 + G J_1^2 J_2 + H J_1 J_3 + K J_2^2] \, dx\, dy\, dz.$$

Ik stel me voor, dat een punt x, y, z een uitwijking krijgt als in § 1 beschreven. De geheele plaatsverandering bedraagt dan

$$\begin{aligned} \xi &= x\delta + q(1+\delta)x + \xi''(x''\, y''\, z'') &\quad \text{waarin } x'' &= (1+q)(1+\delta)x \\ \eta &= y\delta + q(1+\delta)y + \eta''(x''\, y''\, z'') & y'' &= (1+q)(1+\delta)y \\ \zeta &= z\delta + q(1+\delta)z + \zeta''(x''\, y''\, z'') & z'' &= (1+q)(1+\delta)z \end{aligned}$$

Kort ik af $\quad \delta + q(1+\delta) = s \qquad (1+q)(1+\delta) = r;$

dan worden de deformatiegrootheden

$$\begin{array}{lll} \xi_x = s + \xi''_{x''}\, r & \xi_y = \xi''_{y''}\, r & \xi_z = \xi''_{z''}\, r \\ \eta_x = \eta''_{x''}\, r & \eta_y = s + \eta''_{y''}\, r & \eta_z = \eta''_{z''}\, r \\ \zeta_x = \zeta''_{x''}\, r & \zeta_y = \zeta''_{y''}\, r & \zeta_z = s + \zeta''_{z''}\, r \end{array}$$

Deze grootheden moet ik in de uitdrukking voor de potentieele energie substitueeren, die dan afhankelijk wordt van $\xi''_{x''}$ enz. Hiervan zal ik echter de accenten weer weglaten.

Ik vind

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s + \tfrac{1}{2}s^2 + r^2[\xi_x + \tfrac{1}{2}(\xi_x^2 + \eta_x^2 + \zeta_x^2)] \\ \varepsilon_2 &= s + \tfrac{1}{2}s^2 + r^2[\eta_y + \tfrac{1}{2}(\xi_y^2 + \eta_y^2 + \zeta_y^2)] \\ \varepsilon_3 &= s + \tfrac{1}{2}s^2 + r^2[\zeta_z + \tfrac{1}{2}(\xi_z^2 + \eta_z^2 + \zeta_z^2)] \\ \gamma_1 &= r^2(\eta_z + \zeta_y) \\ \gamma_2 &= r^2(\xi_z + \zeta_x) \\ \gamma_3 &= r^2(\eta_x + \xi_y). \end{aligned}$$

Met deze uitdrukkingen kan ik de grootheden J_1, J_2, J_3 vormen, terwijl ik nog afkort

$$s + \tfrac{1}{2}s^2 = \sigma.$$

Ik vind

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= 3\sigma + r^2 J_{10} \\ J_2 &= 3\sigma^2 + 2r^2 J_{10} + r^4 J_{20} \\ J_3 &= \sigma^2 r^2 J_{10} + \sigma r^4 J_{20}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Aan de J_i heb ik in de rechter leden een index 0 toegevoegd, omdat deze invarianten daar uit de grootheden $\xi''_{x''}$ enz. gevormd zijn.

Deze waarden heb ik in de uitdrukking voor de potentieele energie te substitueeren. Het is mijn bedoeling dan de voortplantingssnelheden te leeren kennen, die in het door de dilataties $(1 + \delta)$ en $(1 + q)$ gedeformeerde medium kunnen optreden en wel heb ik deze slechts in eerste benadering noodig.

Deze substitutie geeft voor de potentieele energie per volume-eenheid

$$
\begin{aligned}
&(\tfrac{1}{2}\lambda + \mu)\left[18\, q\delta + 6\, q\, J_{10} + (1 + 4\, q)\, J_{10}^2\right] \\
&\quad - 2\mu\left[6\, q\delta + 2\, q\, J_{10} + (1 + 4\, q)\, J_{20}\right] \\
&\quad + 9\, C\, q\, J_{10}^2 + 3\, D\, q\, J_{20} + E\, q\, J_{20} + 2\, D\, q\, J_{10}^2.
\end{aligned}
$$

Ik heb in deze uitdrukking behouden alleen 2^e^ graadstermen van de warmtebeweging, 1^e^ graadstermen in q. Men bedenke, dat δ later zal blijken te zijn een 2^e^ graadsterm van de warmtebeweging.

De samenhang van J_{10}, J_{20} en J_{10}^2 met de in § 3 ingevoerde grootheden P, Q en R blijkt te zijn

$$J_{10} = P + \tfrac{1}{2}\,(Q + \tfrac{1}{2}\, R).$$

$$J_{20} = \frac{P^2}{2} - \frac{Q}{2}.$$

$$J_{10}^2 = P^2.$$

zoodat voor longitudinale golven

$$\overline{J_{10}} = \tfrac{1}{2}\, P_l^2 \qquad \overline{J_{20}} = 0 \qquad \overline{J_{10}^2} = P_l^2 \;\ldots\ldots\; (11)$$

en voor transversale golven

$$\overline{J_{10}} = Q_{tr} \qquad \overline{J_{20}} = -\tfrac{1}{2}\, Q_{tr} \qquad \overline{J_{10}^2} = 0 \;\ldots\; (12)$$

De potentieele energie neemt daardoor den vorm aan

$$\int\left[3\delta q\,(3\lambda + 2\mu) + \left[\frac{1}{2}\,\lambda + \mu + q\left(\frac{7}{2}\,\lambda + 5\mu + 9\,C + 2\,D\right)\right] P_l^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\mu + q\left(3\,\lambda + 6\,\mu - \frac{3}{2}\,D - \frac{E}{2}\right)\right] Q_{tr}\right] dx\, dy\, dz$$

of

$$U = \int\left[3\,\delta q\,(3\lambda + 2\mu) + \left[\frac{1}{2}\,\lambda + \mu + q\,(2\lambda + 2\mu + 9C + 2D)\right] P_l^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\mu + q\left(3\,\lambda + 3\,\mu - \frac{3}{2}\,D - \frac{E}{2}\right)\right] Q_{tr}\right] dx''\, dy''\, dz'' \;..\mathrm{I}$$

We hebben hiermee de energie in een vorm gekregen, waaruit gemakkelijk de voortplantingssnelheden zijn te vinden. Verg. form. (9) § 3.

§ 5. *Uitzetting tengevolge der trillingen. Compressibiliteit afhankelijk van de trillingsenergie.*

Ter berekening van den gemiddelden druk gaan we terug tot den vorm in het begin van de vorige § aan de potentieele energie gegeven. In ons medium, dat dus eerst in alle richtingen δ keer uitgerekt is en vervolgens nog eens q keer, zullen zich op deze deformaties warmtegolven superponeeren. Bewegen deze golven zich in alle richtingen gelijkmatig, dan zullen de tijdsgemiddelden van de schuifspanningen gelijk $=0$ zijn en de trekspanningen op ieder oppervlak, hoe ook georienteerd, onderling gelijk, zoodat ik van een druk kan spreken, die te berekenen is als de gemiddelde trekspanning op drie onderling loodrechte vlakte-elementjes dus $$3\,p = X_x + Y_y + Z_z.$$

Door optelling van de eerste 3 vergelijkingen voor die spanningen uit Hoofdstuk II vind ik

$$\sqrt{1+2J_1+4J_2} \times 3p = (2\varepsilon_1+1)\Phi_{\varepsilon_1} + (2\,\varepsilon_2+1)\,\Phi_{\varepsilon_2} + 2(\varepsilon_3+1)\,\Phi_{\varepsilon_3}$$
$$+ 2\,\gamma_1\,\Phi_{\gamma_1} + 2\gamma_2\,\Phi_{\lambda_2} + 2\,\gamma_3\,\Phi_{\gamma_3}$$
$$= 2\,(\varepsilon_1\,\Phi_{\varepsilon_1} + \varepsilon_2\,\Phi_{\varepsilon_2} + \varepsilon_3\,\Phi_{\varepsilon_3} + \gamma_1\,\Phi_{\gamma_1} + \gamma_2\,\Phi_{\gamma_2} + \gamma_3\,\Phi_{\gamma_3}) + \Phi_{\varepsilon_1} + \Phi_{\varepsilon_2} + \Phi_{\varepsilon_3}$$

Daar Φ uit reeksen homogene termen bestaat is de uitdrukking tusschen haakjes gemakkelijk te vormen. Ook de operatie $\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3}\right)$ op de verschillende vormen is gemakkelijk neer te schrijven met behulp van

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3}\right) J_1 = 3.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3}\right) J_2 = 2\,J_1.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3}\right) J_3 = J_2.$$

Het resultaat van de berekening van $3p$ is dan

$$
\begin{array}{llll}
(\frac{1}{2}\lambda+\mu)\,(4J_1^2 & +6J_1 & -4J_1^3-6J_1^2 & -12J_1J_2+9J_1^3)- \\
-2\mu\,(4J_2 & +2J_1 & -4J_1J_2-2J_1^2 & -4J_1J_2+3J_1^3)+ \\
+C\;(6J_1^3 & +9J_1^2 & -9J_1^3\ldots\ldots\ldots)+ & \\
+D\;(6J_1J_2 & +(3J_2+2J_1^2) & -3J_2J_1-2J_1^3)+ & \\
+E\;(6J_3 & +J_2 & -J_1J_2\ldots\ldots\ldots)+ & \\
+F\;(& +12J_1^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+ & & \\
+G\;(& +(6J_1J_2+2J_1^3)\ldots\ldots\ldots\ldots)+ & & \\
+H\;(& (3J_3+J_1J_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+ & & \\
+K\;(& 4J_2J_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) & &
\end{array}
$$

waarbij de termen uit de eerste kolom afkomstig zijn van de uitdrukking

$$2\,(\varepsilon_1\,\Phi_{\varepsilon_1}+\ldots\ldots\gamma_1\Phi_{\gamma_1}+\ldots\ldots);$$

die uit de 2e kolom van

$$\Phi_{\varepsilon_1}+\Phi_{\varepsilon_2}+\Phi_{\varepsilon_3}\,;$$

terwijl de overige termen ontstaan bij deeling door $\sqrt{1+2J_1+4J_2}$ of vermenigvuldiging met $(1-J_1-2J_2+\frac{3}{2}J_1^2)$.

Gerangschikt naar de grootheden J_1, J_1^2 enz. luidt deze uitdrukking

$$
\begin{aligned}
3p=(3\lambda+2\mu)J_1+(-\,8\mu+3D+E)\,J_2+(-\,\lambda+2\mu+ \\
+9\,C+2\,D)\,J_1^2+(\tfrac{5}{2}\lambda-\mu-3\,C-2\,D+12\,F+2\,G)\,J_1^3+ \\
+(-\,6\lambda+4\mu+3D-E+6G+H+4K)\,J_1J_2+(6E+3H)\,J_3 \quad (13)
\end{aligned}
$$

Hierin hebben we voor J_1, J_2 enz. de waarden uit (10) te substitueeren of in voldoende benadering

$$
\begin{aligned}
J_1&=3(\vartheta+q)+6\vartheta q+(1+2q)\,J_{10} \\
J_2&=6\vartheta q+2\,q\,J_{10}+(1+4\,q)\,J_{20} \\
J_1^2&=18\vartheta q+6\,q\,J_{10}+(1+4\,q)\,J_{10}^2 \\
J_1^3&=9\,q\,J_{10}^2 \\
J_1J_2&=2\,q\,J_{10}^2+3\,q\,J_{20} \\
J_3&=q\,J_{20}
\end{aligned}
$$

terwijl we hierin voor de tijdsgemiddelden $\overline{J_{10}^2}$, $\overline{J_{10}}$ en $\overline{J_{20}}$ de waarden uit (11) en (12) kunnen invoeren, waardoor we krijgen

$$\begin{aligned}
J_1 &= 3(\delta + q) + 6\delta q + \tfrac{1}{2}(1+2q)P_l^2 + (1+2q)\,Q_{tr}.\\
J_2 &= 6\delta q \qquad\qquad + q P_l^2 - \tfrac{1}{2}\,Q_{tr}.\\
J_1^2 &= 18\delta q \qquad\qquad (1+7q)P_l^2 + 6q\,Q_{tr}.\\
J_1^3 &= \qquad\qquad 9qP_l^2.\\
J_1 J_2 &= \qquad\qquad 2qP_l^2 - \tfrac{3}{2}q\,Q_{tr}.\\
J_3 &= \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}q\,Q_{tr}.
\end{aligned}$$

In deze vergelijkingen is overal een tijdsgemiddelde bedoeld, zonder dat we dit expres hebben aangeduid. In 't vervolg zullen we overal, om de letters niet te overladen met aanhangels, onder alle grootheden hun tijdsgemiddelde verstaan.

Deze waarden gesubstitueerd in (13) geeft ons voor $3p$

$$3p = (9\lambda + 6\mu)\delta + \left(\frac{\lambda}{2} + 3\mu + 9C + 2D\right)P_l^2 + \left(3\lambda + 6\mu - \frac{3}{2}D - \frac{E}{2}\right)Q_{tr} +$$

$$+\,q\left[\begin{array}{l} 9\lambda + 6\mu + (27C + 9D + E)\,6\delta + \\ + \left(\dfrac{13}{2}\lambda + 7\mu + 36C + 5D - E + 108F + 30G + 2H + 8K\right)P_l^2 + \\ + \dfrac{1}{2}(18\lambda + 20\mu + 108C + 15D - 3E - 18G - 6H - 12K)\,Q_{tr} \end{array}\right]$$

Volgens de methode van DEBIJE zullen we later P_l^2 en Q_{tr} als functies van de temperatuur bepalen. Deze trillingsenergiëen blijken dan ook nog van de uitrekking δ en q af te hangen. We kunnen dus ontwikkelen

$$P_l^2 = (P_l)^2_{q=\delta=0} + \left(\frac{\partial P_l^2}{\partial q}\right)_{q=\delta=0} \times q + \left(\frac{\partial P_l^2}{\partial \delta}\right)_{q=\delta=0} \times \delta \quad \text{en}$$

$$Q_{tr} = (Q_{tr})_{q=\delta=0} + \left(\frac{\partial Q_{tr}}{\partial q}\right)_{q=\delta=0} \times q + \left(\frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta}\right)_{q=\delta=0} \times \delta$$

Den laatsten term kunnen we in beide vergelijkingen weer verwaarloozen, omdat δ van de orde P_l^2 en Q_{tr} is (zooals dadelijk blijkt), waarvan we quadraten stelselmatig hebben weggelaten.

De δ wordt bepaald uit de voorwaarde, dat, voor $q = 0$, de druk p gelijk 0 moet zijn, dus

$$(9\lambda + 6\mu)\delta + \left(\frac{\lambda}{2} + 3\mu + 9C + 2D\right)P_{l_0}^2 + \left(3\lambda + 6\mu - \frac{3}{2}D - \frac{E}{2}\right)Q_{tr_0} = 0 \quad \text{II.}$$

wanneer we dus $P_{l_0}^2$ en Q_{tr_0} als functies van de temp. kennen, geeft deze betrekking ons den uitzettingscoefficient; terwijl

$$3p = q\left[\begin{array}{l}(9\lambda + 6\mu) + 6\,(27\,C + 9\,D + E)\,\mathfrak{d} + \\ + \left(\frac{13}{2}\lambda + 7\mu + 36\,C + 5D - E + 108\,F + 30\,G + 2H + 8K\right)P_{l_0}^2 + \\ + \frac{1}{2}\,(18\lambda + 20\mu + 108\,C + 15D - 3\,E - 18\,G - 6H - 12\,K)\,Q_{tr_0} + \\ + \left(\frac{\lambda}{2} + 3\mu + 9C + 2D\right)\left(\frac{\partial P_l^2}{\partial q}\right)_0 + \left(3\lambda + 6\mu - \frac{3}{2}D - \frac{E}{2}\right)\left(\frac{\partial Q_{tr}}{\partial q}\right)_0\end{array}\right] \quad \text{III.}$$

met de waarde uit $\mathfrak{d}$ uit II.

§ 6. *Invoering der temperatuur.*

Het verband tusschen P_l^2, Q_{tr} en de temp. wordt naar Debije als volgt bepaald. De longitudinale en transversale trillingsenergie in een volume V bedraagt (verg. I).

$$\Phi_l\,V = \left[\frac{1}{2}\lambda + \mu + q\,(2\lambda + 2\mu + qC + 2D)\right]P_l^2\,V = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi\,V}{v_l^3}\int_0^{\nu_{\max.}}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\,d\nu \quad (14)$$

$$\Phi_{tr}\,V = \left[\mu + q\left(3\lambda + 3\mu - \frac{3}{2}\,D - \frac{E}{2}\right)\right]Q_{tr}\,V = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 4\pi V}{v_{tr}^3}\int_0^{\nu_{\max.}}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\,d\nu \quad (15)$$

Immers zonder den factor $\frac{1}{2}$ geven de rechterleden de bedragen aan, die Debije toekent aan de geheele longitudinale, respectievelijk transversale trillingsenergie, het kinetische deel inbegrepen.

In § 3 hebben we de voortplantingssnelheden in een medium berekend (vergelijk 7, 8, 9 en I), waaruit blijkt, (daar in ons medium een dichtheid $\rho'' = \rho\,(1 - 3\,q)$ heerscht) dat

$$\rho\,(1 - 3q)\,v_l^2 = \lambda + 2\,\mu + q\,(4\,\lambda + 4\,\mu + 18\,C + 4\,D).$$

$$\rho\,(1 - 3q)\,v_{tr}^2 = \mu + q\left(3\,\lambda + 3\,\mu - \frac{3}{2}\,D - \frac{E}{2}\right).$$

of

$$v_l^2 = \frac{1}{\rho}\,[\lambda + 2\,\mu + q\,(7\,\lambda + 10\,\mu + 18\,C + 4\,D)] \;\ldots\; (16)$$

$$v_{tr}^2 = \frac{1}{\rho}\left[\mu + q\left(3\,\lambda + 6\mu - \frac{3}{2}\,D - \frac{E}{2}\right)\right] \;\ldots\ldots\; (17)$$

Uit (14) en (15) volgt dus

$$P_l^2 = \frac{4\pi}{\rho v_l^5}(1+3q)\int_0^{\nu_{\max.}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\nu \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$Q_{tr} = \frac{4\pi}{\rho v_{tr}^5}(1+3q)\int_0^{\nu_{\max.}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\nu \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

De $\nu_{\max}$ is als functie van q gegeven door de voorwaarde, dat het totaal aantal mogelijke trillingswijzen in het volume V drie keer het aantal moleculen in dit volume V zal zijn, dus

$$3N = \frac{4\pi V}{3}\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}\right)(\nu_{\max.})^3$$

Zij m de massa van één molecuul, dan kan ik schrijven

$$(\nu_{\max.})^3 = \frac{9(1-3q)}{4\pi m}\,\rho\,\frac{1}{\left(\frac{1}{v_l^3}+\frac{2}{v_{tr}^3}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Uit (16, 17, 18, 19, 20) kan ik dus de waarden van $\left(\frac{\partial P_l^2}{\partial q}\right)_0$ en $\left(\frac{\partial Q_{tr}}{\partial q}\right)_0$ vinden.

Substituties in p geeft de gezochte betrekking, waarvan de coefficienten te ingewikkeld zijn om de gedaante expliciet neer te schrijven.

Bij het gebruik van de termen van de 4ᵉ orde had ik de ontwikkeling overal tot q^2 kunnen doorvoeren, echter zelfs wanneer ik mij tot q beperk, heb ik ze noodig blijkens III. Dit kan men direct zoo zien. Vierdegraads-termen in de energie geven derdegraads-termen in den druk. Als factor van q mag ik dan tweedegraads-termen van de trillingsdeformatie behouden en deze heb ik noodig daar het mij juist te doen is om de temperatuurafhankelijkheid van dezen factor. Ter verkrijging van een waarde voor de uitzettingscoefficient, kan ik mij blijkens II tot de derdegraads-termen beperken.

§ 7. *Toetsing van de berekende waarde voor den uitzettings-coeff. aan het experiment.*

In de betrekking II wil ik nog $P_{l_0}^2$ en Q_{tr_0} in de totale trillingsenergie $E = 2(\Phi_l + \Phi_{tr})$ uitdrukken.

Korten we af $$4\pi \int_0^{\nu_{\max.}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{hT}} - 1} d\nu = \Phi$$

Uit (14) en (15), (18) en (19) ziet men dan, dat voor $q = 0$. dat

$$P_{l_0}^2 = \frac{1}{\rho v_l^5} \Phi \qquad Q_{tr_0} = \frac{1}{\rho v_{tr}^5} \Phi \qquad E = \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}\right) \Phi$$

of

$$P_{l_0}^2 = \frac{1}{\rho v_l^5} \frac{E}{\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}\right)} \qquad Q_{tr_0} = \frac{1}{\rho v_{tr}^5} \frac{E}{\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}\right)}$$

Drukken we de voortplantingssnelheden uit in de elasticiteits-coefficienten dus

$$\rho v_l^2 = \lambda + 2\mu \qquad \rho v_{tr}^2 = \mu$$

dan wordt, na kleine herleiding, gevonden

$$P_{l_0}^2 = \frac{\mu^{\frac{5}{2}} \times E}{(\lambda + 2\mu)\mu\left[\mu^{\frac{3}{2}} + 2(\lambda + 2\mu)^{\frac{3}{2}}\right]} \quad Q_{tr_0} = \frac{(\lambda + 2\mu)^{\frac{5}{2}} \times E}{(\lambda + 2\mu)\mu\left[\mu^{\frac{3}{2}} + 2(\lambda + 2\mu)^{\frac{3}{2}}\right]} \tag{20}$$

In de betrekking II stelt $3\,\mathfrak{z}$ voor de relatieve volumevergrooting dus $\frac{\Delta V}{V_0}$.

II wordt dus na substitutie der waarden (20)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{E}{(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\mu\left[\mu^{\frac{3}{2}} + 2(\lambda + 2\mu)^{\frac{3}{2}}\right]} \left[\left(\frac{\lambda}{2} + 3\mu + 9C + 2D\right)\mu^{\frac{5}{2}} + \right.$$
$$\left. + \left(3\lambda + 6\mu - \frac{3}{2}D - \frac{E}{2}\right)(\lambda + 2\mu)^{\frac{5}{2}}\right].$$

De uitzettingscoefficient is dus evenredig met de soortelijke warmte.

In § 4 van Hoofdstuk II heb ik getallenwaarden voor de coefficienten berekend: Substitueer deze in de laatste verg. Neem in aanmerking, dat de soortelijke warmte van staal bedraagt 0,12 cal.

Ik vind dan met $C = C_{Ba} = -7 \times 10^{13}$
voor den lineairen uitzettingscoeff. de waarde 0,000016
en met $C = C_{P_0} = -3 \times 10^{13}$ de waarde 0,000008.

De proefondervindelijk bekende waarde 0,000012, ligt er tusschen in. Het zou zeer gewenscht zijn, den gang van den elasticiteitsmodulus nauwkeuriger te bepalen, dan Poynting het gedaan heeft. Onze berekeningen wijzen er op, dat quantitatieve overeenstemming tusschen theorie en experiment niet onmogelijk is.

Het eigenaardige van onze beschouwingen is, dat we de temperatuur achteraf invoeren. Eerst beschouwen we een systeem, zooals we die kennen bij een eindig aantal vrijheidsgraden. Dit systeem heeft een potentieele energie. Er is nog geen plaats voor het begrip vrije energie.

De variatie der potentieele energie geeft mij de arbeid der krachten. Bij een gegeven deformatie, bestaande uit een gelijkmatige uitrekking en daarop gesuperponeerde trillingen, kan ik vragen naar de grootte der spanningscomponenten. De trillingen in verband gebracht met de temperatuur, leert mij kennen $p = f(q\,T)$: één van de toestandsvergelijkingen van de vaste stof. Het is mijns inziens geheel hiermee in overeenstemming, wanneer ik de voortplantingssnelheden bereken op de wijze, zooals ik dit hier gedaan heb. Ik zou hier het liefst willen denken aan golven, die zich langs massapunten kunnen voortplanten, welke door veeren aan elkaar zijn verbonden, systemen, zooals we ze in hoofdstuk I beschouwden.

Wanneer we nu voor de energie een vorm schrijven met coefficienten, die bepaald worden door methoden in Hoofdstuk II besproken, dan hebben we slechts te bedenken, dat de energie en vrije energie bij het absolute nulpunt samenvallen, en dus die coefficienten door isotherme methoden bij het absolute nulpunt te vinden zijn. Wat we dus in het vorige Hoofdstuk de energie noemden, gebruiken we hier in dien zin, dat het ook de vrije energie bij $T = 0$ voorstelt

HOOFDSTUK IV.

Over Debije's theorie van het warmtegeleidingsvermogen.

§ 1. *Voor de berekening van het warmtegeleidingsvermogen in éen dimensie, mag geen isotropie der straling worden aangenomen.*

Aan zijn bekende voordracht op het Wolfskehlcongres heeft DEBIJE een aanhangsel gevoegd over het warmtegeleidingsvermogen. Wij kunnen zijn ideeën, gespecificeerd voor het geval, dat geleiding slechts in één richting plaats vindt, als volgt kort samenvatten.

Ik spreek over het geleidende lichaam als over een staaf. De warmtebeweging kunnen we in ieder punt van de staaf opvatten als te bestaan uit naar rechts en naar links loopende golven. De naar rechts loopende golven zullen in een bepaald punt per tijdseenheid een hoeveelheid energie K_r door de vlakte-eenheid transporteeren, de naar links loopende een hoeveelheid K_l. De tijdseenheid denken we ons groot ten opzichte van de periode der trillingen. K_r zal ongelijk zijn aan K_l, daar er in zulke punten, waar $K_r = K_l$, geen energiestrooming plaats vindt. K_r en K_l zullen in verschillende punten van de staaf verschillende waarden kunnen hebben. De intensiteit K eener straling zal onderweg afnemen en wel over een weg x volgens een wet $K_0 e^{-\frac{x}{l}}$, waarin l een dempingsfactor aangeeft. Deze demping denken we ons veroorzaakt door inhomogeniteiten in de staaf. Passeert de straling een volumeelement Δ, dan gaat ze verzwakt voort. De hoeveelheid energie, die er per tijdseenheid minder uitgaat, dan er inkomt, moet dus per tijdseenheid door dit volumen worden gereflecteerd. Het bedrag hiervan is $K_0 \frac{\Delta}{l}$.

Aan den anderen kant weten we uit beschouwingen van RAYLEIGH, over de verstrooiing door onregelmatigheden in de staaf, de hoeveelheid gereflecteerde energie en kunnen dus l in verband brengen met die onregelmatigheden.

Een golf $\xi = A \cos \nu \left(t - \frac{x}{q}\right)$ moge stuiten op een stuk staaf ter lengte Δ, waarin een dichtheid ρ en elasticiteit E heerscht, die afwijken van de normale waarden ρ_0, E_0, welke de staaf buiten dat stuk Δ heeft. De relatieve afwijkingen stellen we

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \varepsilon \qquad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \gamma.$$

Het element Δ strekt zich uit van $x = 0$ tot $x = \Delta$.

Er zal dan naar den kant der negatieve x een golf gereflecteerd worden

$$\xi = \frac{A}{4}(\varepsilon + \gamma)\left[\cos \nu \left(t + \frac{x - 2\Delta}{q}\right) - \cos \nu \left(t + \frac{x}{q}\right)\right] \text{[1]}$$

die een hoeveelheid energie

$$K_0 \frac{\Delta}{l} = q\, \frac{A^2}{16} \rho \nu^2 (\varepsilon + \gamma)^2 \left(1 - \cos \frac{2\nu\Delta}{q}\right)$$

gemiddeld door de vlakte-eenheid terugzendt [2].

De opvallende golf heeft een stralingsintensiteit

$$K_0 = \frac{q \rho A^2 \nu^2}{2}$$

Eliminatie van A geeft voor de gezochte waarde van l de betrekking

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{1}{8}(\varepsilon + \gamma)^2 \left(1 - \cos \frac{2\nu\Delta}{q}\right).$$

Is Δ klein ten opzichte van de golflengte, dan kunnen we den cosinus ontwikkelen en vinden

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{(\varepsilon + \gamma)^2}{4} \, \frac{\nu^2 \Delta^2}{q^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

---

[1]) Aan den positieven kant zal de totaalbeweging zijn, ons beperkende tot termen in ε^2 en γ^2

$$\xi = \left\{A + \frac{1}{16} A (\gamma + \varepsilon)^2 \left[\cos\left(\frac{2\Delta\nu}{q}\right) - 1\right]\right\} \cos \nu \left(t - \frac{x}{q} + \frac{l}{q} - \frac{l}{q_1}\right) -$$
$$- \frac{1}{16} A (\gamma + \varepsilon)^2 \sin \frac{2\Delta\nu}{q} \sin \nu \left(t - \frac{x}{q} + \frac{l}{q} - \frac{l}{q_1}\right)$$

q_1 is de voortplantingssnelheid in het element Δ.

[2]) De in noot 1 gevonden beweging straalt natuurlijk hetzelfde bedrag minder.

Ik zal nu een verband leggen tusschen de hoeveelheid energie, die in totaal per tijdseenheid door een vlakte-element df in den oorsprong naar rechts gaat: $K_{r0} - K_{l0}$ en den energiegradient, die daar bestaat Den energiestroom kan ik ook berekenen door samen te tellen de bedragen, die alle volumenelementen door df reflecteeren.

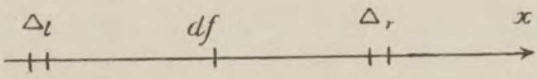

Fig. 6.

De hoeveelheid energie, die per tijdseenheid naar rechts door df gaat, is dus straling, die in 't linker deel gereflecteerd is en bedraagt

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{l}} \frac{K_l(-x)}{l}\, dx$$

terwijl op dezelfde wijze berekend naar links een energiestroom

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{l}} \frac{K_r}{l}\, dx$$

bestaat.

In totaal stroomt dus naar rechts een hoeveelheid energie

$$W = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{l}} \frac{K_l(-x)}{l}\, dx - \int_0^\infty e^{-\frac{x}{l}} \frac{K_r}{l}\, dx.$$

Daar K_r en K_l afhangen van de plaats, kunnen we deze functies naar opklimmende machten van x ontwikkelen en schrijven

$$K_r = K_{r_0} + xK'_{r_0} \qquad K_l(-x) = K_{l_0} - xK'_{l_0}.$$

Wanneer we deze waarden van K_r en K_l in de integranden substitueeren, kunnen we de integraties uitvoeren en vinden dan voor de gezochte energiestrooming W

$$W = K_{l_0} - K_{r_0} - l(K'_{r_0} + K'_{l_0}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Andererzijds weten we

$$W = K_{r_0} - K_{l_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Uit beide vergelijkingen vinden we door optelling

$$W = -\frac{l}{2}(K'_{r_0} + K'_{l_0}) \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

De energie per volume-eenheid in een bepaald punt bedraagt

$$u = \frac{K_r + K_l}{q}.$$

Substitueeren we nu voor $K'_r + K'_l$ de waarde $q\frac{\partial u}{\partial x}$

Dan wordt er een verband gelegd tusschen energiegradient en warmtestroom, aldus

$$W = -\frac{l}{2}q\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{l}{2}q\frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Zij c de soortelijke warmte per massaeenheid, dan kan ik schrijven

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \rho c.$$

en de laatste vergelijking geeft mij als waarde voor het warmtegeleidingsvermogen λ

$$\lambda = \frac{l}{2}q\rho c \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

Hadden we $K_{r_0} = K_{l_0}$ gesteld in navolging van de aanname van Debije, dat de straling isotroop zou zijn, dan moesten we uit (2) besluiten tot $K'_{r_0} + K'_{l_0} = 0$

en zou $W = -l(K'_{r_0} + K'_{l_0})$.

Dit is een twee keer zoo groot bedrag als (4) aangeeft.

We zouden een twee keer grootere waarde voor λ gevonden hebben en deze uit een verg. als (5) waarin echter $\frac{\partial u}{\partial T} = 0$ zou zijn.

Substitueer ik voor l de waarde uit (1) dan vindt men

$$\lambda = \frac{2q^2}{(\varepsilon + \gamma)^2 \Delta \nu^2} q\rho c.$$

Bij het geldig zijn van de wet van Hooke vindt men gemakkelijk

$$\varepsilon = -\gamma$$

en wordt dus het warmtegeleidingsvermogen ∞.

Wanneer echter voor het verband tusschen spanning S en uitrekking ξ_x wordt aangenomen

$$S = E_0\xi_x + \frac{\alpha}{2}E_0\xi_x^2,$$

x de coordinaat van het massapunt in rust zijnde, vindt men

$$\varepsilon = -\gamma(1+\alpha).$$

Deze betrekking tusschen ε en γ zullen we in λ invoeren, waardoor er komt

$$\lambda = \frac{2q^2}{\alpha^2\gamma^2\,\Delta\nu^2}\,q\,\rho\,c \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De $\overline{\gamma^2\Delta}$ kan men als volgt uit statistische beschouwingen vinden.

§ 2. *Berekening van* $\overline{\gamma^2\Delta}$.

Voor de verstrooiing van de invallende golven op het volume-element Δ is het alleen van belang, welke uitrekking dit element heeft ondergaan en is het onverschillig, welke mogelijke uitrekkingen binnen dit volume-element hebben plaats gevonden. De energie in het volume-element bij een deformatie zal wel degelijk hiervan afhankelijk zijn.

Laat het lineaire volume Δ een aantal n moleculen bevatten, op een onderlingen afstand d, zoodat $n\,d = \Delta$. Deze zullen door een verplaatsing uit de evenwichtsstanden een potentieele energie krijgen. Zijn deze longitudinale verplaatsingen b.v. ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, δ; dan kan voor de potentieele energie geschreven worden

$$\beta\xi_1 + \beta(\xi_2 - \xi_1) + \ldots\ldots\ldots + \beta(\delta - \xi_{n-1}) +$$
$$+ \frac{E_0}{2d}\xi_1^2 + \frac{E_0}{2d}(\xi_2 - \xi_1)^2 + \ldots\ldots + \frac{E_0}{2d}(\delta - \xi_{n-1})^2.$$

We kunnen deze energie ook in andere coordinaten $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$, δ uitdrukken, bepaald door

$$\xi_p = \frac{p}{n}\delta + \eta_p \qquad p \text{ van } 1 \text{ tot } n-1.$$

De potentieele energie neemt hierin de waarde aan

$$\beta\delta + \frac{E_0}{2d}\left[\frac{\delta^2}{n} + \eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \ldots \eta_{n-1}^2\right] \ldots\ldots \quad (8)$$

Hieruit blijkt, dat door afspliting van $\frac{\delta^2}{n}$ in de potentieele energie, de overige termen als een som van $(n-1)$ quadraten kunnen worden voorgesteld. Immers de som der n quadr. termen $\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \ldots\, \eta_{n-1}^2$ is een quadratische vorm in slechts $n-1$ veranderlijken.

De $\overline{\delta^2}$ vinden we als gemiddelde in een kanonisch ensemble

$$\overline{\delta^2} = \frac{\int \delta^2 e^{-\frac{\delta^2 E_0}{2ndkT}} d\delta}{\int e^{-\frac{\delta^2 E_0}{2ndkT}} d\delta} = \frac{nd}{E_0} kT = \frac{\Delta kT}{E_0}$$

dus

$$\overline{\gamma^2 \Delta} = \frac{kT}{E_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Bij het middelen in het kanonisch ensemble heb ik voor de energie eenvoudig geschreven $\frac{E_0}{2d} \frac{\delta^2}{n}$. De termen, die η bevatten vallen bij het middelen in teller en noemer tegen elkaar weg. Terwijl het lineaire lid $\beta\delta$ weggelaten moest worden, omdat het systeem moleculen onder invloed staat van een uitwendige spanning β, die bij een uitrekking δ de arbeid $\beta\delta$ verricht. We kunnen ons dit verduidelijken door te denken, dat het 1[e] molecuul aan een vast punt is verbonden en dat aan het n^e massapunt een lichaam hangt van gewicht β. Nemen we dit gewicht op in ons systeem, dan zal door de vormverandering δ, $\eta_1 \ldots . \eta_{n-1}$

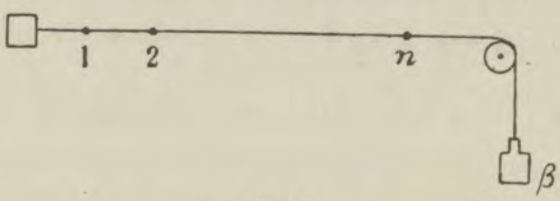

Fig. 7.

de toename van de energie $\beta\delta$ minder bedragen, dan we boven hebben gevonden verg. (8).

Hierdoor is dus ons middelen gerechtvaardigd.

Substitueeren we de waarde van $\overline{\gamma^2 \Delta}$ uit (9) in (7), dan krijgt men als eindresultaat

$$\lambda = \frac{2 q^2 E_0}{\alpha^2 \nu^2 kT} q \rho c.$$

De wijze, waarop ik hier formule (9) heb afgeleid, schijnt mij iets duidelijker toe dan die, welke Debije geeft.

Debije zelf zegt: Wanneer we het kleine volume-element Δ

uitrekken tot de grootte $\Delta + \delta$, dan bevat dit volume-element een energie $\frac{1}{2} E_0 \frac{\delta^2}{\Delta}$ (volgens de boven gegeven afleiding cf (8) echter ook nog andere termen). De waarschijnlijkheid van een uitrekking tusschen δ en $\delta + d\delta$ is dan

$$C e^{-\frac{1}{2} E_0 \frac{\delta^2}{\Delta k T}} d\delta ,$$

waaruit voor het quadratisch-gemiddelde van δ gevonden wordt

$$\overline{\delta^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{E_0 \delta^2}{\Delta k T}} \delta^2 \, d\delta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{E_0 \delta^2}{\Delta k T}} d\delta} = \frac{\Delta k T}{E_0} \qquad \text{(10)}$$

dit is onze form. (9).

Echter volgens Debije zou nu de gemiddelde energie van het volume-element Δ bedragen

$$\frac{1}{2} E_0 \frac{\overline{\delta^2}}{\Delta} = \frac{1}{2} k T \qquad \text{(11)}$$

De gemiddelde energie zou dus onafhankelijk zijn van de grootte van Δ, wat blijkbaar absurd is. Uit (8) volgt echter, dat de *energiedichtheid* evenredig is aan $\frac{1}{2} k T$.

Is $\frac{1}{2} E_0 \frac{\delta^2}{\Delta}$ echter niet gelijk aan de energie, dan moet vergelijking (10) ook anders gemotiveerd worden, zooals we boven gedaan hebben, door de energie in den vorm (8) als een som van de quadraten te' ontwikkelen, waarvan $\frac{1}{2} \frac{E_0 \delta^2}{\Delta}$ één term is.

Wilden we de gemiddelde zwaartepuntsenergie berekenen van een gas in zijn geheel, dan zouden we daarvoor ook $\frac{1}{2} k T$ gevonden hebben voor iedere richting en onafhankelijk van het aantal moleculen, die tot die energie bijdragen.

De motiveering hiervan zou geschieden geheel op de wijze, zooals ik hier heb uitgevoerd.

STELLINGEN.

I.

Voor éénatomige gassen kan men berekenen, dat isotrope geluidsgolven een druk uitoefenen gelijk aan $\frac{2}{3}$ keer de energiedichtheid.

De berekening, die RAYLEYGH hiervan geeft, vereischt van kinetisch standpunt nadere motiveering.

RAYLEIGH. On the Momentum and Pressure of Gaseous Vibrations Phil. Mag. Sept. 1905, blz. 365.

II.

Het is onbevredigend, dat men in de kinetische gastheorie voor dubbelmoleculen de betrekking $pv = \frac{1}{3} Nm\,\overline{s^2}$ aanneemt, zonder dat hierin een grootheid voorkomt, die rekening houdt met de binding van de moleculen.

III.

De afleiding, die LANGEVIN geeft voor de gemiddelde in tijd t afgelegde quadratische weg, zou correct ten einde gebracht, een tegenstrijdigheid bevatten.

LANGEVIN. Compt. Ren. **146**, 1908, pag. 530.

IV.

ORNSTEIN maakt in § 2 van zijn verhandeling over de Br. beweging een gebruik van de betrekking $\frac{d^2u}{dt^2} = -\rho^2 u + w$, zooals die door VAN DER WAALS Jr. niet bedoeld is.

ORNSTEIN : Over de BROWNsche beweging Versl. Kon. Ak. XXV, pag. 1008.
VAN DER WAALS Jr. Over de theorie der Br. beweging. Versl. Kon. Ak. XXVI, pag. 1319.

V.

De bewering van ORNSTEIN en ZERNIKE, dat een staaf geen warmteweerstand verschillend van nul kan hebben, is juist. Voorondersteld wordt hierbij, dat de bewegingsvergelijking voor trillingen in de staaf afleidbaar is uit een potentieele energie en aldus de warmtegeleiding tot stand zou moeten komen.

ORNSTEIN en ZERNIKE. Bijdrage tot de kin. theorie van het vaste lichaam, II. Versl. Kon. Ak. 1916, XXIV, pag. 1689.

VI.

In de electronentheorie der metalen vereischt het begrip „vrij electron" een nadere verklaring.

VII.

Zeer terecht wijst BAEDEKER op de groote voordeelen, die de vergelijking $e = \frac{R}{F} lg \frac{p_A}{p_B}$ heeft boven $e = \frac{R}{F} lg \frac{n_A}{n_B}$.

Hierin beteekenen:

e = electromotorische kracht in thermoketen met temperatuurverschil 1°.

R = absolute gasconstante.

F = constante van FARADAY.

p_A = dampdruk der electronen boven het metaal A.

p_B = dampdruk der electronen boven het metaal B.

n_A = electronendichtheid in metaal A.

n_B = electronendichtheid in metaal B.

BAEDEKER. Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. Wissenschaft. Heft 35. 1911, pag. 93.

VIII.

Wanneer op een systeem van één vrijheidsgraad, de kracht een term bevat evenredig aan de snelheid, is het niet mogelijk een waarschijnlijkheidsverdeeling aan te geven, zóódanig, dat op een positieven tijd, de kans op een positieve snelheid even groot is, als op denzelfden negatieven tijd, de kans op een even groote negatieve snelheid.

IX.

Het te hulp roepen van een „ordenend beginsel", ter verklaring van het ontstaan van den onwaarschijnlijken toestand der wereld is logisch onjuist.

X.

Om met een spectrometer een nauwkeurigheid van 1″ in het meten der hoeken te bereiken, kan de vergrooting van den kijker kleiner dan 60 keer worden genomen.

Müller-Pouillet. 10e Auflage, pag. 179.

XI.

De stelling, dat de integraal $\int_{x_0}^{\infty} f\,(x\,\alpha)\,d\,x$ een continue functie van α zou zijn, indien $f\,(x\,\alpha)$ een continue functie van x en α is en wanneer de integraal voor alle waarden van α convergeert, is fout.

Serret-Scheffers. Lehrbuch der Diff. und Intregralrechnung II 1907, pag 179 v.g.g.

XII.

Het zou gewenscht zijn aan de Universiteiten voor het candidaats-examen, de colleges in te richten voor halve jaren.