

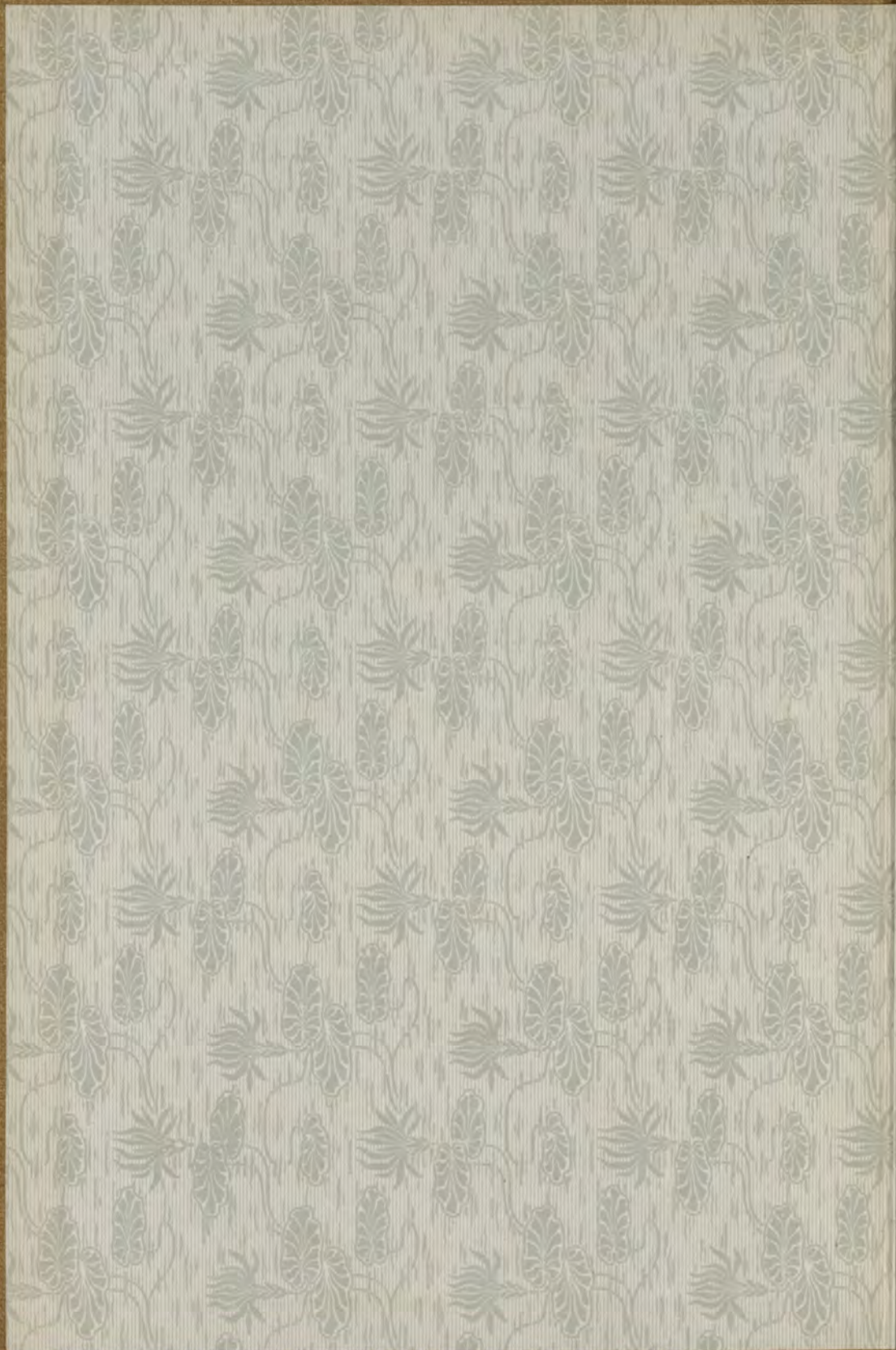
13

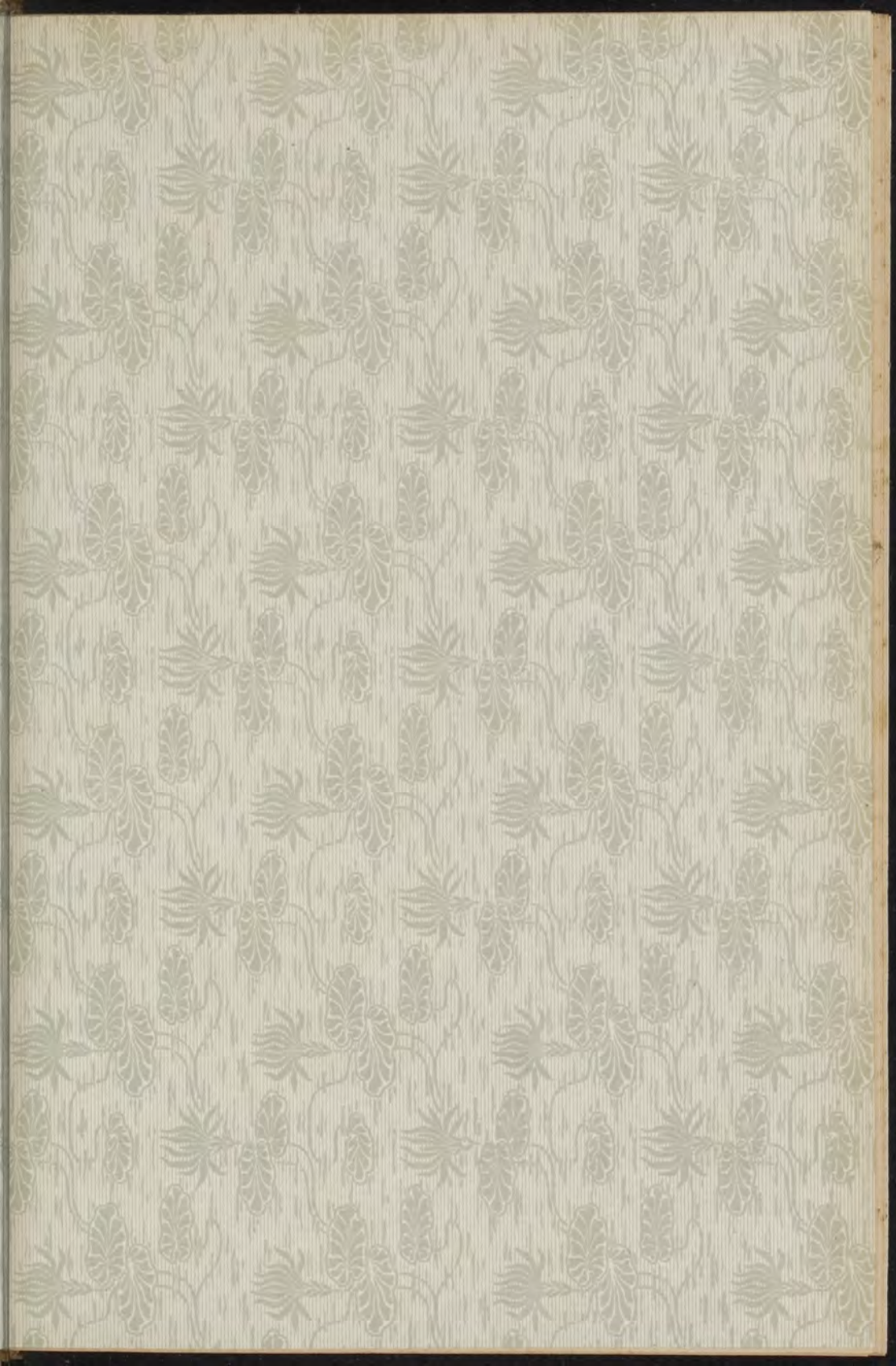
Het interferentie-vlak bij de ringen van
Newton en bij eenige andere verschijnselen.

D. P. A. VERRIJP.

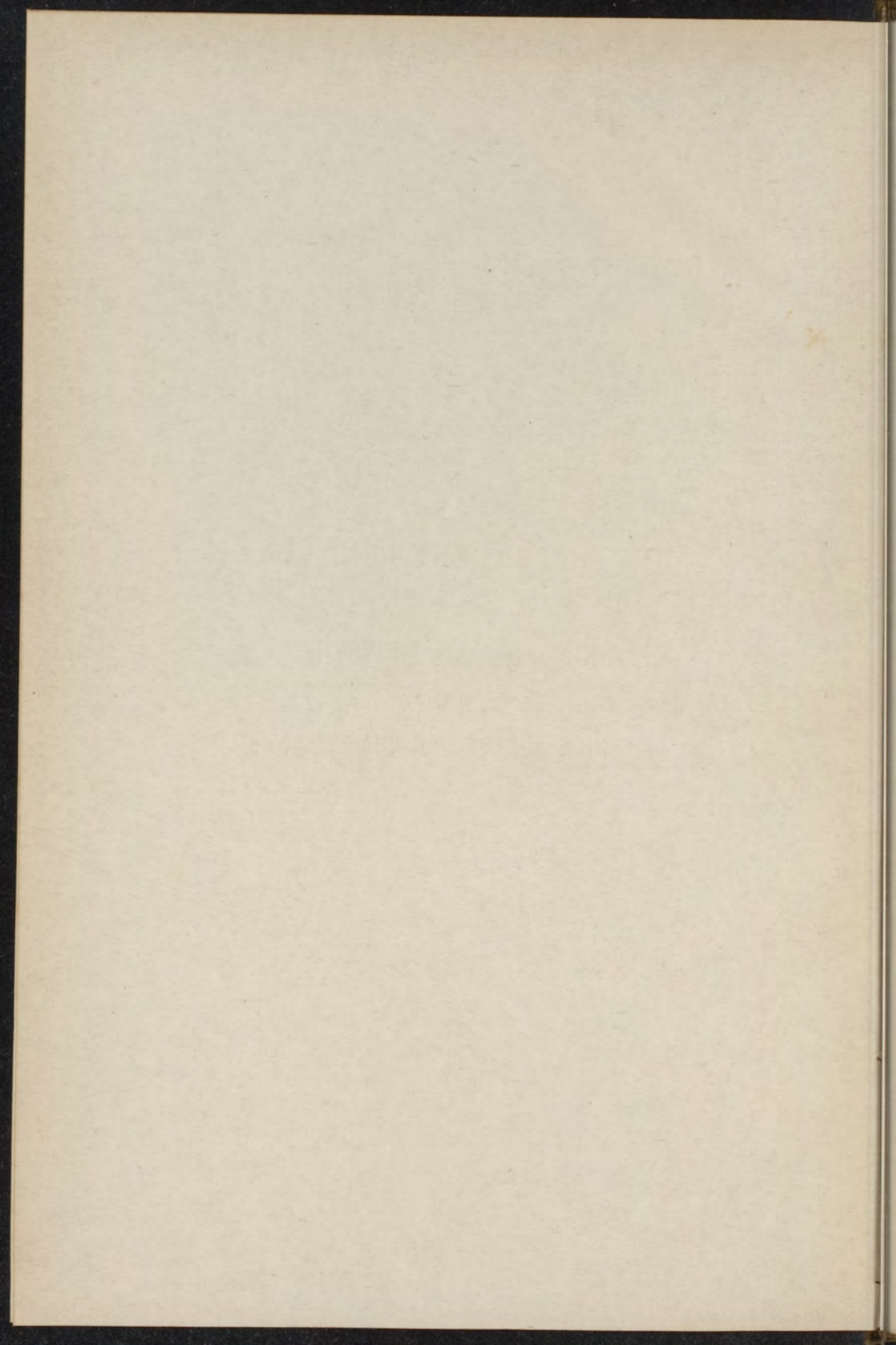
Diss Leiden

1902 nr 13





D. Leiden 1902



HET INTERFERENTIE-VLAK

BIJ DE

RINGEN VAN NEWTON

EN BIJ

EENIGE ANDERE VERSCHIJNSELEN.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

RECEIVED

HET INTERFERENTIE-VLAK

BIJ DE

RINGEN VAN NEWTON

EN BIJ

EENIGE ANDERE VERSCHIJNSELEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

MR. H. VAN DER HOEVEN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Zaterdag 14 Juni 1902, des namiddags te 4 uren,

DOOR

DIEDERIK PIETER ADRIAAN VERRIJP,

GEBOREN TE DELFT.

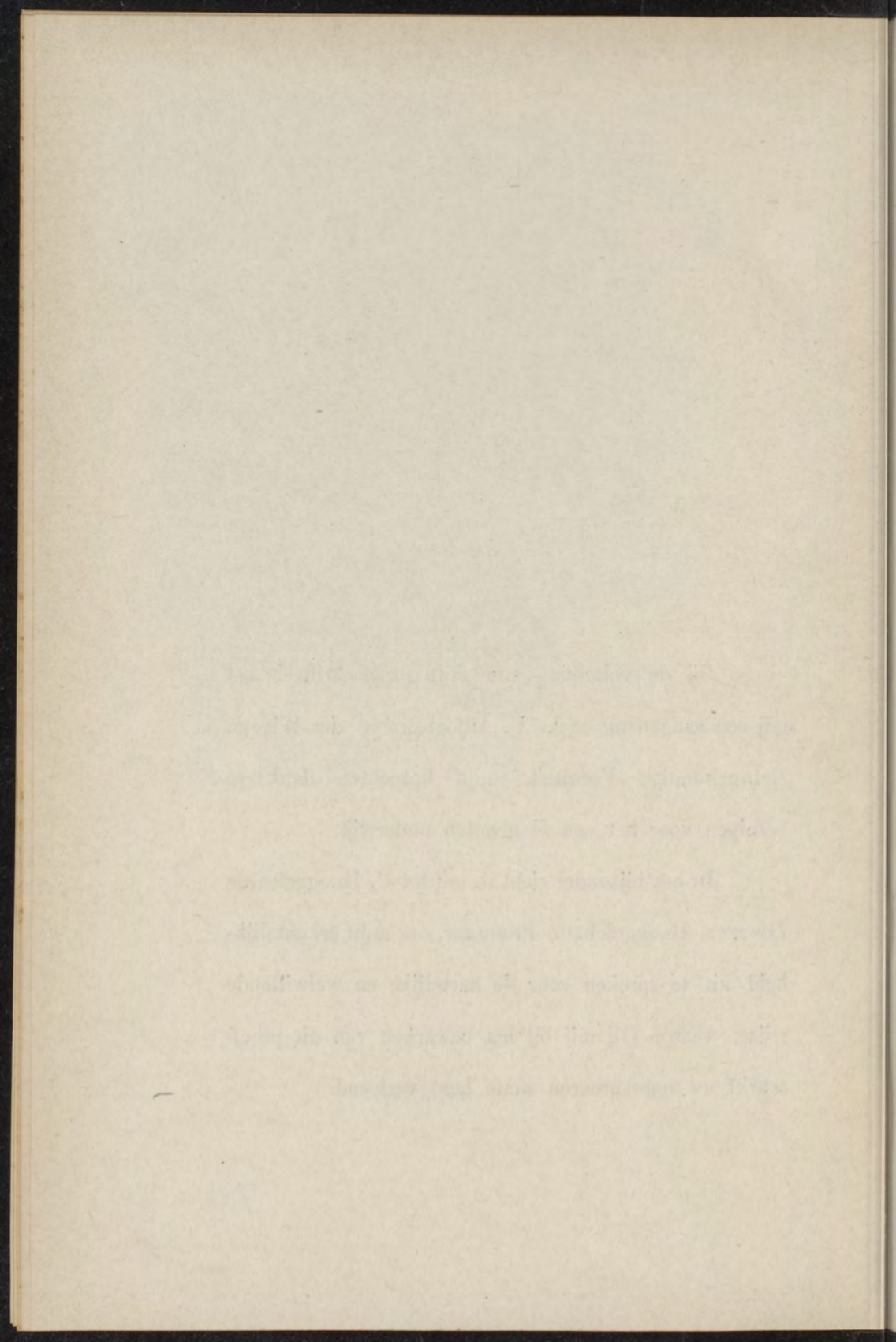
ARNHEM. — G. J. THIEME.

1902.



Bij de voltooiing van mijn proefschrift, is het mij een aangename taak, U, Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, mijn oprechten dank te betuigen voor het van U genoten onderwijs.

In het bijzonder richt ik mij tot U, Hooggeleerde LORENTZ, Hooggeschatte Promotor, om mijn erkentelijkheid uit te spreken voor de hartelijke en welwillende wijze, waarop Gij mij bij het bewerken van dit proefschrift uw onschatbaren steun hebt verleend.



INLEIDING.

§ 1. In *Wied. Ann.* Bd. XII, p.p. 1 en 201, Bd. XX, p.p. 177 en 391 hebben SOHNCKE en WANGERIN experimenteele en theoretische onderzoekingen gepubliceerd over de ringen van Newton en over de interferentie-strepen bij een wigvormig glasplaatje, in de beide eerste verhandelingen speciaal en in de beide laatste gedeeltelijk over de vraag, waar deze verschijnselen gezien worden, d. w. z. hoe men een microscoop moet instellen of het oog moet accommoderen om de ringen of strepen zoo duidelijk mogelijk te zien. Dit is een vraag, die men in 't algemeen bij alle interferentie-verschijnselen, waar men met een uitgebreide lichtbron werkt, kan doen. Daarom is een meer gemeene en tevens eenvoudiger theorie dan die van SOHNCKE en WANGERIN van belang, en ik stel mij voor die in de volgende bladzijden te ontwikkelen.

HOOFDSTUK I.

Grondbeginselen.

§ 2. Zooals reeds gezegd is, is het er om te doen, te bepalen, waar, d. w. z. *in welk vlak*, men de interferentiestrepen (rechte of kromme) het duidelijkst kan waarnemen bij een verschijnsel, waar men met een uitgebreide lichtbron werkt. Dat vlak kan reëel zijn, zoodat men, daar een scherm plaatsende, het interferentie-beeld kan opvangen; het kan ook virtueel zijn. De methoden van behandeling zijn in beide gevallen dezelfde, maar voor de voorstelling is het het gemakkelijkst te spreken als over een reëel vlak. Men moet nu natuurlijk naar een criterium omzien, waardoor men zal uitmaken, wanneer de strepen het duidelijkst gezien worden. Om dit criterium te vinden, gaan wij op de volgende wijze te werk.

§ 3. Wij beschouwen een of andere proef, waarbij de lichtstralen, die van een lichtbron L uitgaan, ergens, na op

deze of gene wijze teruggekaatst of gebroken te zijn, in een vlak V tot interferentie komen. Daartoe moeten zij op twee wijzen van L naar V kunnen gaan (b.v. terugkaatsing aan 't boven- en 't benedenvlak eener luchtlaag).

§ 4. *Grondstelling.* Wanneer een punt P in de lichtbron en een punt Q in het vlak V gekozen worden, is er één bepaalde weg, waarlangs het licht op de eerste wijze, en eveneens één bepaalde weg, waarlangs het op de tweede wijze van P naar Q kan komen *). Voor elk dier wegen heeft het licht een bepaalden tijd noodig; stel die tijden t_1 en t_2 .

Wanneer de brekende en terugkaatsende oppervlakken gegeven zijn, zijn t_1 en t_2 functiën van de coördinaten van P en Q. Die tijden zijn even groot voor den overgang van P naar Q, als zij zouden zijn voor den overgang van Q naar P.

§ 5. Het phase-verschil in Q wordt bepaald door $t_1 - t_2$. Was er maar één lichtpunt P, dan zou er altijd in Q versterking of verzwakking plaats hebben, dus een interferentie te zien zijn. Maar de lichtbron heeft een zekere uitgebreidheid en als P' een tweede punt der lichtbron is, zal $t_{1(P'Q)} - t_{2(P'Q)}$ niet dezelfde waarde hebben als $t_{1(PQ)} - t_{2(PQ)}$. Het phaseverschil, waarmede de twee van P naar Q gaande stralen interfereeren, kan verschillen van dat tusschen de twee van P' komende lichtstralen, en zoo kan het komen, dat, als het eerste paar stralen in Q licht geeft, het tweede

*) Wij sluiten de gevallen, waarin, op eene der beide wijzen, het licht langs meer dan één weg van P naar Q kan gaan (twee geconjugeerde punten bij eene lens) uit.

paar stralen daar duisternis teweegbrengt. Dan zal het interferentie-verschijnsel onzichtbaar kunnen worden.

Men moet bedenken, dat, al heeft de lichtbron misschien een groote uitgestrektheid, in een bepaald punt Q toch allicht slechts van een deel der lichtbron licht kan komen; een of ander diaphragma, b.v. de pupil van den waarnemer of de opening van een door hem gebruikt microscoop, kan dat deel beperken. In het vervolg zal onder L dit «werkzame» deel verstaan worden.

Wanneer nu, terwijl men Q vasthoudt, en het punt P over L verplaatst, het verschil $t_1 - t_2$ niet veranderde, zou natuurlijk het interferentie-verschijnsel in Q met de grootste duidelijkheid te voorschijn komen. En is aan deze voorwaarde niet voldaan, dan zal de duidelijkheid des te grooter zijn, naarmate $t_1 - t_2$ minder verandert.

§ 6. Men kan zich de zaak duidelijker voorstellen, wanneer men zich in de nabijheid der lichtbron L een oppervlak voorstelt, dat de meetkundige plaats is van alle punten P, voor welke, terwijl Q wordt vastgehouden, t_1 een bepaalde waarde heeft, en een tweede oppervlak, waarvoor t_2 een bepaalde waarde heeft. Van deze oppervlakken verkrijgt men nu het best een denkbeeld, wanneer men zich verbeeldt, dat de stralen omgekeerd van Q naar L gaan.

Wanneer nl. een bundel stralen van Q uitgaat (zie fig. 1) en deze b. v. door een oppervlak O teruggekaatst worden, zullen de stralen a , b , c enz. alle loodrecht staan op zekere oppervlakken, in de figuur door gestippelde lijnen aange-

geven. Deze zijn de golffronten, behorende bij de van Q uitgaande lichtbeweging, en alle punten van zulk een oppervlak S worden van Q uit in denzelfden tijd bereikt. Omgekeerd zullen ook trillingen, van de verschillende punten van S uitgaande, in denzelfden tijd Q bereiken.

Dat er zulke oppervlakken zijn, voor welker punten dus de „optische afstand” tot Q even groot is, en die de lichtstralen loodrecht snijden, geldt algemeen, welke en hoevele terug-

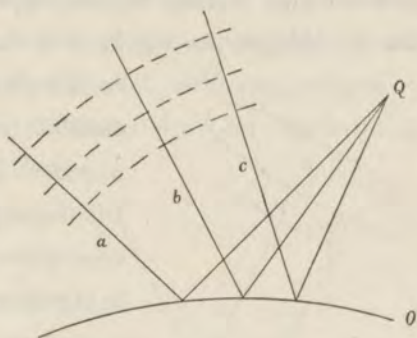


Fig. 1.

kaatsingen en brekingen de stralen ook ondergaan hebben. Gelukkig blijkt de kennis dezer oppervlakken, die bij verschillende verschijnselen zeer ingewikkeld kunnen zijn, bij ons onderzoek niet in bijzonderheden noodig te zijn en wel, omdat wegens de beperking van het werkzame deel der lichtbron slechts een klein deel der oppervlakken te pas komt, zoo klein, dat men het wel als plat mag beschouwen.

§ 7. Wanneer het licht, zooals bij de interferentieverschijnselen op twee wijzen van de lichtbron naar Q kan gaan, zullen er in de ruimte bij de lichtbron tweërlei oppervlakken S_1 en S_2 kunnen worden geconstrueerd. De oppervlakken S_1 zijn de golffronten van licht, dat op de eerste wijze van Q naar L ging, de oppervlakken S_2 de

golffronten van licht, dat op de tweede wijze van Q naar L liep. Voor een oppervlak S_1 is t_1 en voor een oppervlak S_2 is t_2 constant.

Zij nu P een punt dicht vóór de lichtbron (zie fig. 2). Door dat punt kunnen wij een oppervlak S_1 en een oppervlak S_2 brengen en wij kunnen nu vooreerst beweren, dat

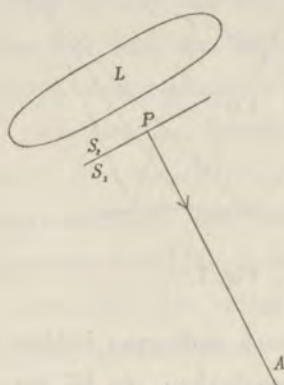


Fig. 2.

de interferentie-strepen *volkomen duidelijk* in Q te zien zullen zijn, wanneer S_1 en S_2 samenvallen. Dit begrijpt men terstond, wanneer men zich als lichtbron een lichtgevende schijf, langs S_1 (en S_2) geplaatst, voorstelt. Immers dan blijft bij verplaatsing langs die schijf het verschil $t_1 - t_2$ constant. Maar het is ook waar, wanneer de lichtbron L op eenigen afstand achter $S_1 - S_2$ staat. Dan moeten nl. de van L uitgaande trillingen dit laatste vlak passeeren en men kan dan (principe van Huygens) de punten van $S_1 - S_2$ als middelpunten van trilling beschouwen.

Wanneer zullen S_1 en S_2 samenvallen? Een lichtstraal, die loodrecht op S_1 van een punt van dit oppervlak uitgaat, zal zeker op de eerste wijze het punt Q bereiken en eveneens zal een lichtstraal, die in een richting loodrecht op S_2 van dit oppervlak vertrekt, in Q komen op de tweede wijze. De oppervlakken S_1 en S_2 , nl. de gedeelten daar-

van, die in aanmerking komen en die als plat beschouwd kunnen worden, zullen samenvallen, wanneer hunne normalen dit doen, d. w. z. wanneer *eenzelfde* lichtstraal PA zoowel op de eene als op de andere wijze in Q komt.

Hieruit volgt een middel om punten Q op te zoeken, waarin de interferentie met de grootste duidelijkheid zichtbaar is. Men bedenke daarbij, dat weliswaar wegens de uitgebreidheid van het werkzame deel der lichtbron de invallende stralen verschillende richtingen hebben, maar dat die richtingen toch niet veel uiteenloopen, zoodat men wel van een gemiddelde richting kan spreken. Laat nu in die gemiddelde richting een straal PA (zie fig. 3) vallen op de inrichting, die ons de interferentie-verschijnselen zal geven. Uit dien straal ontstaan twee stralen AB en CD en wanneer deze elkaar *snijden* in een punt Q , voldoet dit aan de genoemde voorwaarde.

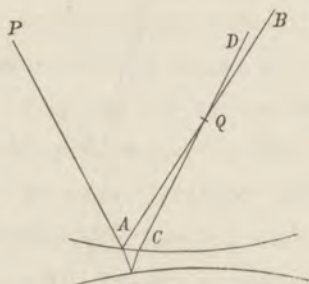


Fig. 3.

Uit dien straal ontstaan twee stralen AB en CD en wanneer deze elkaar *snijden* in een punt Q , voldoet dit aan de genoemde voorwaarde.

§ 8. Laten wij nu aannemen, dat de twee stralen, zooals AB en CD , die uit dien invallenden straal ontstaan, elkaar *kruisen*, dan is er geen punt Q meer te vinden, waar het interferentie-verschijnsel zoo duidelijk te voorschijn komt als in het boven beschouwde geval.

Daaruit volgt, dat de twee oppervlakken S_1 en S_2 (fig. 4), die bij een willekeurig punt Q behooren, in P , dus vlak

vóór de lichtbron een zekeren hoek met elkaar zullen maken. Dienzelfden hoek maken de twee normalen PA en PB met elkaar, d. w. z. de twee stralen, die, van P uitgaande, Q kunnen bereiken. Laat nu de lichtbron langs het gebroken vlak CPD vallen en laat C en D de uiterste

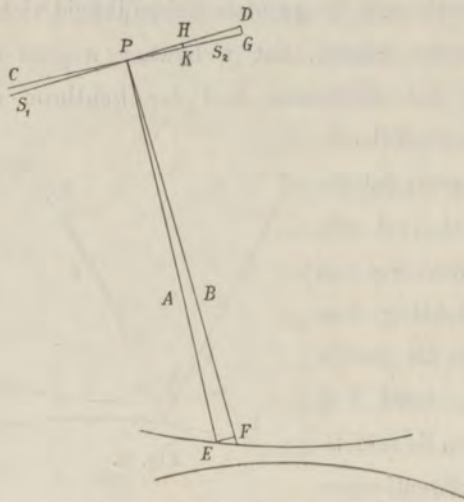


Fig. 4.

punten van het werkzame deel daarvan zijn. Zij PD, de halve breedte van het werkzame deel, = b en $\angle DPS_2 = \angle APB = \delta$. Deze hoek mag als zeer klein beschouwd worden, zoodat

$$t_2 + \frac{DG}{V} = t_2 + \frac{b \cdot \delta}{V}$$

als V de voortplantingssnelheid van het licht is. Het tijdsverschil, dat het phaseverschil bepaalt, is dus voor de twee lichtstralen, die van P naar Q loopen, $t_1 - t_2$, maar voor de twee lichtstralen, die van D naar Q gaan, $t_1 - t_2 - \frac{b \cdot \delta}{V}$. Eveneens voor de twee, die van C naar Q gaan, $t_1 - t_2 + \frac{b \cdot \delta}{V}$.

Daar nu het interferentie-verschijnsel in Q des te duidelijker zal zijn, naarmate dit phase-verschil voor het eene punt der lichtbron en voor het andere minder verschilt, zal het des te duidelijker zijn, naarmate $b \cdot \delta$ kleiner is.

Verder moeten wij bedenken, dat in ons oog wegens de begrenzing door het in § 5 vermelde diaphragma alle lichtstralen komen, die het beschouwde punt Q binnen een zekeren kegel treffen. Dit zijn stralen, die van een zeker deel der lichtbron afkomstig zijn, welk deel des te grooter afmetingen heeft, naarmate de lichtbron verder afligt. Wij mogen daarom stellen, dat b evenredig is met den afstand PE in fig. 4, stel:

$$b = c \times PE.$$

Dan is, zoo $EF \perp PB$ is:

$$b \delta = c \times PE \cdot \delta = c \times EF.$$

Ons criterium komt dus hierop neer, dat EF zoo klein mogelijk moet zijn. Bij de bepaling der lengte van EF kan men nu verder gerust aannemen, dat het punt P op oneindigen afstand ligt, zoodat de daarheen loopende lijnen

EP en FP evenwijdig aan elkander zijn. Men komt op deze wijze tot het volgende criterium:

Beschouw een willekeurig punt Q en zoek in een bundel van evenwijdig aan elkander invallende lichtstralen twee stralen op, waarvan de eene op de eene wijze en de andere op de tweede wijze in Q komt. Bepaal den afstand EF dezer twee evenwijdige stralen. Dan zal de interferentie in Q des te duidelijker zijn, naarmate EF kleiner is.

§ 9. Ten slotte kan het geval zich voordoen, dat de stralen AB en CD (zie fig. 5), die uit den invallenden straal PA

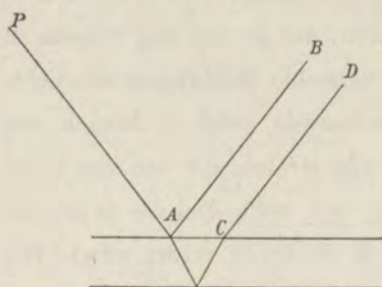


Fig. 5.

ontstaan, *evenwijdig* loopen. In dit geval snijden bij een ongewapend oog de stralen elkaar het eerst in het netvlies, zoo dit oog in staat is zich op oneindigen afstand te accommodeeren, zoodat aan de voorwaarde van

volkomen duidelijke interferentie voldaan is. Ook kan men het verschijnsel opvangen op een scherm, dat in het hoofdbrandvlak eener lens geplaatst is, of men kan dit in het hoofdbrandvlak eener lens optredend verschijnsel door een loupe waarnemen.

Wij zullen er thans toe overgaan, de hier gestelde grondbeginselen toe te passen op eenige interferentie-verschijnselen, in het bijzonder op de ringen van Newton.

HOOFDSTUK II.

De interferentie-plaatsen bij de ringen van Newton in het centrale invalsvlak.

§ 10. De inrichting, welke wij kiezen, is die van SOHNCKE en WANGERIN. Zij bestaat uit een planconvexe lens, die met haar plat vak op een tafel is gelegd en een planparallele glasplaat, die horizontaal op het convexe lensoppervlak ligt.

De invallende lichtstralen maken een hoek ϑ met de normaal der glasplaat, worden aan het bovenvlak van deze gebroken en aan het benedenvlak deels teruggekaatst, deels in de luchtlaag tusschen plaat en lens gebroken; het teruggekaatste licht wordt aan het bovenvlak der glasplaat nogmaals in de lucht gebroken en treedt dan in het waarnemingsinstrument, welks as weder een hoek ϑ met de normaal op de glasplaat maakt. Het in de luchtlaag tusschen glasplaat en lens doorgelaten licht wordt aan het boven-

vlak dezer lens teruggekaatst, aan het benedenvlak der plaat weder in deze laatste gebroken en treedt ten slotte, aan het bovenzvlak der plaat gebroken, in de lucht uit om met de eerste stralen te interfereeren, hetzij dan reëel of virtueel.

Van herhaalde terugkaatsingen zien wij voorloopig wegens het daarmee gepaard gaande intensiteitsverlies af.

In dit hoofdstuk zullen wij nu de vraag oplossen, waar de interferentie het duidelijkst zal zijn van de stralen, die in het „centrale invalsvlak”, d. i. het invalsvlak gaande door het aanrakingspunt van de lens en de plaat, op de inrichting vallen. Gemakshalve zullen wij aanvankelijk de dikte der glasplaat $= 0$ stellen. Zooals wij straks zullen zien, kunnen wij daarna op eenvoudige wijze onze uitkomst corrigeeren voor het geval de dikte der plaat $= d$ is.

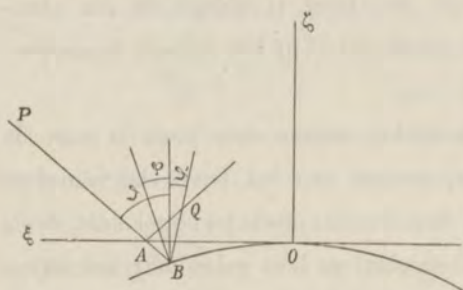


Fig. 6.

Daar nu een invallende straal PA (zie fig. 6) gesplitst wordt in twee stralen, die elkaar ten slotte *snijden*, komen wij te verkeerren in het geval van § 7

van het vorige hoofdstuk. Om dan de in die § besproken punten Q te vinden, voeren wij een rechthoekig coördinaatstelsel $\xi\zeta$ in, waarvan de oorsprong het aanrakingspunt

is van de lens en de glasplaat, de ξ -as de projectie van PA op het vlak der glasplaat, met de positieve zijde naar het licht gekeerd, terwijl de positieve ζ -as naar boven loopt. Noemen wij de coördinaten van het punt A, waar de invallende straal zich splitst ξ_1 , ($\zeta_1 = 0$), die van het punt B, waar de in de luchtlaag zich voortplantende straal teruggekaatst wordt ξ_2 , ζ_2 en die van Q: ξ , ζ . Zij verder φ de hoek, dien de normaal in B op het lensoppervlak met de ζ -as maakt en ϑ' deze hoek voor de lijn BQ; noem r den straal van het lensoppervlak, dan heeft men, zoo men termen met φ^3 verwaarloost,

$$\xi_2 = r \sin \varphi = r \varphi$$

en

$$\zeta_2 = - (r - r \cos \varphi) = - 2 r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi = - \frac{1}{2} r \varphi^2.$$

Verder is:

$$\xi_2 = \xi + (\zeta - \zeta_2) \operatorname{tg} \vartheta'$$

of

$$\xi_2 = \xi + \zeta \operatorname{tg} \vartheta' + \frac{1}{2} r \varphi^2 \operatorname{tg} \vartheta'$$

en daar:

$$\vartheta' = \vartheta - 2 \varphi,$$

zoo heeft men:

$$r \varphi = \xi + \zeta \operatorname{tg} (\vartheta - 2 \varphi) + \frac{1}{2} r \varphi^2 \operatorname{tg} (\vartheta - 2 \varphi),$$

waaruit volgt:

$$\varphi = \frac{\xi}{r} + \frac{\zeta}{r} \operatorname{tg} \vartheta - 2 \frac{\zeta}{r} \varphi \sec^2 \vartheta + \frac{1}{2} \varphi^2 \operatorname{tg} \vartheta.$$

Bij deze laatste ontwikkeling is $\frac{\zeta}{r}$ van dezelfde orde ondersteld als φ .

Nu is bij eerste benadering:

$$\varphi = \frac{\xi}{r} + \frac{\zeta}{r} \operatorname{tg} \vartheta,$$

alzo:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\xi}{r} + \frac{\zeta}{r} \operatorname{tg} \vartheta - 2 \frac{\zeta}{r} \left(\frac{\xi}{r} + \frac{\zeta}{r} \operatorname{tg} \vartheta \right) \sec^2 \vartheta + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{r} + \frac{\zeta}{r} \operatorname{tg} \vartheta \right)^2 \operatorname{tg} \vartheta. \end{aligned}$$

Verder heeft men:

$$\xi_1 = \xi + \zeta \operatorname{tg} \vartheta$$

en ook:

$$\xi_1 = \xi_2 - \zeta_2 \operatorname{tg} \vartheta,$$

alzo:

$$\xi + \zeta \operatorname{tg} \vartheta = r \varphi + \frac{1}{2} r \varphi^2 \operatorname{tg} \vartheta.$$

Hierin de gevonden waarde van φ substitueerende verkrijgt men eene vergelijking, die men kan ontbinden in de twee vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \xi + \zeta \operatorname{tg} \vartheta &= 0 \\ \zeta &= -\cot \vartheta \cdot \xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

en

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \xi \\ \xi &= \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Blijkbaar heeft men hier te doen met twee rechte lijnen, die beide door het aanrakingspunt van de lens en de glasplaat gaan.

§ 11. Aan de vergelijkingen (1) en (2) dienen wij nu nog een correctie aan te brengen wegens de dikte d der planparallele glasplaat.

Het behoeft wel geen betoog, dat de breking tot aan het punt A aan het verschijnsel niets verandert.

Verder is het bekend, dat, wanneer de lichtstralen in een zelfde door de normaal gaand plat vlak liggen, de verschuiving, welke de schijnbare plaats van een punt ondergaat, wanneer men het door een planparallele glasplaat beschouwt, afhankelijk is van de dikte d der plaat, haar brekingsexponent n en den invalshoek ϑ of den brekingshoek ϑ_1 , doch onafhankelijk van de plaats, waar het punt zich werkelijk bevindt. Daar nu de lichtstralen hier alle in het centrale invalsvlak liggen en alle de glasplaat moeten passeeren, zoo is de verschuiving voor elk punt, hetzij reëel of virtueel, gelijk aan die van het aanrakingspunt O. Zij bedraagt nl. in de richtingen der beide assen:

$$\zeta_o = d \left\{ 1 - \frac{\cos^3 \vartheta}{n \cos^3 \vartheta_1} \right\}, \quad \xi_o = -d(n^2 - 1) \operatorname{tg}^3 \vartheta_1$$

(Vgl. BAUER, Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen Lichtpunktes.

Pogg. Ann. Bd. CLIII. pp. 572—588)

of,

$$\delta_1 = d \left\{ 1 - \frac{\cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1} \right\}, \quad \delta_2 = d \left\{ 1 - \frac{\cos^3 \vartheta}{n^3 \cos^3 \vartheta_1} \right\}$$

stellende (met de physische beteekenis, dat de coördinaten

van het „tweede beeldpunt” N *) van O zijn $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \delta_1$, zie fig. 7),

$$\zeta_o = \delta_1 \cos^2 \vartheta + \delta_2 \sin^2 \vartheta, \quad \xi_o = -(\zeta_o - \delta_1) \operatorname{tg} \vartheta.$$

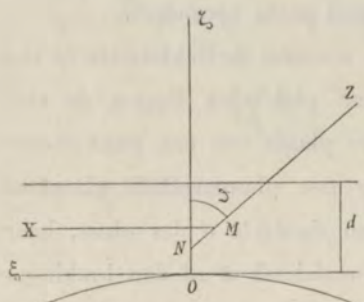


Fig. 7.

Deze zijn dus de coördinaten van het „eerste beeldpunt” M van O, en door dit punt hebben wij nu slechts lijnen te trekken evenwijdig aan de lijnen (1) en (2) om de gevraagde meetkundige plaats der punten Q te verkrijgen.

Deze zal dus bestaan uit het stelsel lijnen:

$$\begin{aligned} & \zeta - \zeta_o = -\cot \vartheta \cdot (\xi - \xi_o) \\ \text{of} & \zeta = -\cot \vartheta \cdot \xi + \delta_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \zeta - \zeta_o = -\cot \vartheta \cdot (\xi - \xi_o) \\ \text{of} & \zeta = -\cot \vartheta \cdot \xi + \delta_1 \end{aligned}} \right\} \dots (3)$$

en

$$\begin{aligned} & \zeta - \zeta_o = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} (\xi - \xi_o) \\ \text{of} & \zeta = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \xi + \frac{\delta_1 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + 2 \delta_2 \sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \zeta - \zeta_o = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} (\xi - \xi_o) \\ \text{of} & \zeta = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \xi + \frac{\delta_1 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + 2 \delta_2 \sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \end{aligned}} \right\} (4).$$

Voeren wij nog even een nieuw coördinatenstelsel XZ in met M tot oorsprong, terwijl de X-as evenwijdig aan de ξ -as en eveneens met de positieve zijde naar het licht

*) d. i. het beeldpunt van O voor de van dit punt uitgaande stralen, die met de normaal gelijke hoeken maken. Zie verder § 12.

gekeerd is, en de Z-as evenwijdig aan de as van het waarnemingsinstrument en met de positieve zijde naar boven, dan zijn de transformatie-formules:

$$\xi = \xi_0 + x - z \sin \vartheta, \quad \zeta = \zeta_0 + z \cos \vartheta$$

en worden de vergelijkingen (3) en (4):

$$x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en

$$z = \frac{1}{2} x \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dit resultaat stemt met het door SOHNCKE en WANGERIN verkregene volkomen overeen. Vergelijking (5) levert hunne „donkere centrale vlek”, vergelijking (6) de „hoofdrechte”.

HOOFDSTUK III.

De interferentie-plaatsen bij de ringen van Newton buiten het centrale invalsvlak.

§ 12. Daar, zooals men gemakkelijk inziet, de stralen, die uit een invallenden straal buiten het centrale invalsvlak gelegen ontstaan, elkaar in 't algemeen zullen kruisen, zullen wij thans het criterium moeten gaan toepassen, dat in § 8 van het eerste hoofdstuk is afgeleid.

Daarbij zullen wij niet aanstonds, zooals dat in het vorige hoofdstuk gedaan is, de dikte der glasplaat $= 0$ stellen. Immers een dergelijke handelwijze zou alleen dan gemak opleveren, indien door de dikte der glasplaat alle interferentie-punten een zelfde verschuiving ondergingen. De moeielijkheid hierbij is echter, dat een bundel stralen (zelfs een oneindig smalle bundel), die van zoo'n punt q uitgaat na den doorgang door een glasplaat niet homocentrisch blijft. Kiest men in den bundel twee stralen qL_1 en qL_2

uit, die een oneindig kleinen hoek met elkander maken, dan zullen de daaruit ontstane uittredende stralen elkander snijden, wanneer het vlak L_1 q L_2 met het invalsvlak samenvalt of loodrecht daarop staat. (In het laatste geval kan men ook zeggen, dat $q L_1$ en $q L_2$ gelijke hoeken met de normaal op de glasplaat maken). Het eerste geval deed zich in het vorige hoofdstuk voor. De verschuiving was voor alle punten gelijk en evenwijdig aan OM (zie fig. 7). Deed zich het tweede geval voor, dan zou men een verschuiving hebben gelijk en evenwijdig aan ON . Maar in het algemeen kan men zeggen, dat noch het een noch het ander zal plaats hebben, en dan zullen de uittredende stralen elkander kruisen.

Wat blijkbaar op het verschijnsel geen invloed uitoefent, is weder de breking der stralen tot aan het benedenvlak der glasplaat.

§ 13. Voor de volgende berekening wordt een rechthoekig coördinatenstelsel aangenomen, waarvan de oorsprong het aanrakingspunt O van het lensoppervlak en het benedenvlak der glasplaat is (zie fig. 8). Dit vlak zelf zij het $\xi\eta$ -vlak; als ξ -as wordt genomen de projectie van den in O aankomenden straal, met de positieve zijde naar het licht gekeerd. De positieve ζ -as gaat naar boven.

Laten de richtingscosinussen der beide invallende stralen, die ten slotte in Q interfereeren, zijn $-\alpha$, $-\gamma$, en laten ze na de breking aan het bovenvlak der glasplaat zijn $-\alpha_1$, $-\gamma_1$, dan is:

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \alpha \quad \text{en} \quad \gamma_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

De in A ($\xi_1 \eta_1 \zeta_1$) aan het benedenvlak der glasplaat gereflecteerde straal heeft de richting $-\alpha_1, +\gamma_1$, wordt in E aan het bovenvlak der plaat weer in de lucht gebroken en krijgt dan de richting $-\alpha, +\gamma$. De in B ($\xi_2 \eta_2 \zeta_2$) aan het benedenvlak der glasplaat in de lucht-laag tusschen plaat en lens gebroken straal krijgt weer de

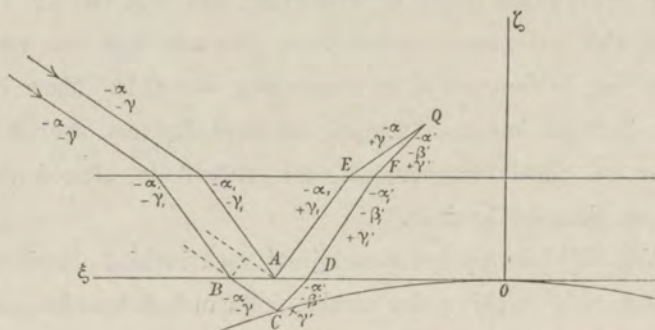


Fig. 8.

richting $-\alpha, -\gamma$, wordt in C ($\xi_3 \eta_3 \zeta_3$) aan het lensoppervlak gereflecteerd en krijgt dan de richting $-\alpha', -\beta', +\gamma'$. In D wordt hij weder in de glasplaat gebroken in de richting $-\alpha'_1, -\beta'_1, +\gamma'_1$, zoodat:

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n} \alpha', \quad \beta'_1 = \frac{1}{n} \beta' \quad \text{en} \quad \gamma'_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma'^2},$$

terwijl hij dan in F weder in de lucht treedt in de richting $-\alpha', -\beta', +\gamma'$.

Terwijl nu α, γ en α_1, γ_1 als constant aangezien kunnen worden, hangen de waarden van $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ van de ligging van C op het lensoppervlak af. De ligging

van C nu kunnen wij aangeven door zijn spherische coördinaten φ , ψ , waarbij wij de ζ -as tot pool-as nemen. Dan zijn de richtingscosinussen van de door C getrokken normaal:

$$\sin \varphi \cos \psi, \quad \sin \varphi \sin \psi \quad \text{en} \quad \cos \varphi.$$

Nu vinden wij met behulp van spherische trigonometrie voor α' , β' , γ' de volgende waarden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2 U \sin \varphi \cos \psi, \\ \beta' &= -2 U \sin \varphi \sin \psi, \\ \gamma' &= -\gamma + 2 U \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

waarbij $U = \alpha \sin \varphi \cos \psi + \gamma \cos \varphi$ *).

Alzoo:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2 \gamma \varphi \cos \psi, \\ \beta' &= -2 \gamma \varphi \sin \psi, \\ \gamma' &= \gamma + 2 \alpha \varphi \cos \psi, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

waarbij termen met φ^2 verwaarloosd zijn.

§ 14. Wij beschouwen na deze voorbereidingen een bepaald punt Q, waarvan de coördinaten ξ , η , ζ zijn, en hebben den afstand te berekenen van de op het bovenvlak der plaat invallende stralen, die ten slotte in Q hetzij reëel (als in onze figuur) of virtueel interfereeren. Tot dit doel hebben wij vooreerst de betrekking tusschen ξ , η , ζ en φ , ψ te ontwikkelen. De rechthoekige coördinaten ξ_3 , η_3 , ζ_3 van het punt C zijn in φ en ψ uitgedrukt:

*) Is β niet nul, dan is $\beta' = \beta - 2 U \sin \varphi \sin \psi$,

$$U = \alpha \sin \varphi \cos \psi + \beta \sin \varphi \sin \psi + \gamma \cos \varphi,$$

$$\text{dus: } \beta' = \beta - 2 \gamma \varphi \sin \psi$$

$$\gamma' = \gamma + 2 \alpha \varphi \cos \psi + 2 \beta \varphi \sin \psi.$$

$$\xi_3 = r \sin \varphi \cos \psi = r \varphi \cos \psi, \quad \eta_3 = r \sin \varphi \sin \psi = r \varphi \sin \psi,$$

$$\zeta_3 = -r(1 - \cos \varphi) = -\frac{1}{2} r \varphi^2.$$

Nu kan men voor deze coördinaten gemakkelijk een tweede uitdrukking vinden in ξ , η , ζ , als men nl. van Q over F en D naar C gaat, aldus:

$$\xi_3 = \xi + \frac{\alpha'}{\gamma'} (\zeta - d) + \frac{\alpha'_1}{\gamma'_1} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma'} r \varphi^2,$$

$$\eta_3 = \eta + \frac{\beta'}{\gamma'} (\zeta - d) + \frac{\beta'_1}{\gamma'_1} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} r \varphi^2.$$

Hierbij merken wij nog eens op, dat deze uitdrukkingen hetzelfde zijn, hetzij Q reëel of virtueel is. Stelt men de beide voor ξ_3 en η_3 verkregen uitdrukkingen aan elkander gelijk, dan verkrijgt men:

$$r \varphi \cos \psi = \xi + \frac{\alpha'}{\gamma'} (\zeta - d) + \frac{\alpha'_1}{\gamma'_1} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma'} r \varphi^2,$$

$$r \varphi \sin \psi = \eta + \frac{\beta'}{\gamma'} (\zeta - d) + \frac{\beta'_1}{\gamma'_1} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} r \varphi^2.$$

Hierin moet men nu de boven gegeven waarden van α' , β' , γ' , α'_1 , β'_1 , γ'_1 substitueeren en daarna naar machten van φ ontwikkelen. Termen van de derde orde worden verwaarloosd en $\frac{d}{r}$ wordt als van dezelfde orde als φ opgevat.

De vergelijkingen gaan daardoor over in de volgende:

$$r \varphi \cos \psi = u + 2 \varphi \cos \psi (\delta_1 - \zeta) +$$

$$+ 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \varphi \cos \psi \cdot (\delta_2 - \zeta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} r \varphi^2,$$

$$r \varphi \sin \psi = \eta + 2 \varphi \sin \psi (\delta_1 - \zeta),$$

waarbij ter afkorting is geschreven:

$$\delta_1 = d \left\{ 1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right\}, \quad \delta_2 = d \left\{ 1 - \frac{\gamma^3}{n^3\gamma_1^3} \right\},$$

$$u = \xi + \frac{\alpha}{\gamma} (\zeta - \delta_1).$$

Daar nu $\frac{\delta_1}{r}$ en $\frac{\delta_2}{r}$ van dezelfde orde als $\frac{d}{r}$, dus als φ zijn, zoo verkrijgt men bij eerste benadering:

$$\varphi \cos \psi = \frac{u}{r} \quad \text{en} \quad \varphi \sin \psi = \frac{\eta}{r},$$

$\frac{u}{r}$ en $\frac{\eta}{r}$ zijn dus ook van de orde $\frac{d}{r}$.

Bij verdere benadering verkrijgt men dus:

$$\begin{aligned} \varphi \cos \psi = \frac{u}{r} + 2 \frac{u}{r} \cdot \frac{\delta_1 - \zeta}{r} + 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot \frac{u}{r} \cdot \frac{\delta_2 - \zeta}{r} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{u^2 + \eta^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\varphi \sin \psi = \frac{\eta}{r} + 2 \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\delta_1 - \zeta}{r},$$

nauwkeurig tot en met termen van de 2^e orde. De gezochte betrekking tusschen φ , ψ en ξ , η , ζ is hiermede ontwikkeld.

§ 15. Om nu den gezochten afstand tusschen de beide invallende stralen te berekenen, hebben wij de coördinaten der punten B en A te berekenen. Die van B vinden wij terstond uit die van C, aldus:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \xi_3 - \frac{\alpha}{\gamma} \zeta_3 = r \varphi \cos \psi + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} r \varphi^2 = \\ &= u + 2u \frac{\delta_1 - \zeta}{r} + 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} u \frac{\delta_2 - \zeta}{r} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{u^2 + \eta^2}{r}, \\ \eta_2 &= \eta_3 = r \varphi \sin \psi = \eta + 2\eta \frac{\delta_1 - \zeta}{r}.\end{aligned}$$

De coördinaten van het punt A vinden wij uit die van Q door van Q over E naar A te gaan:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi + \frac{\alpha}{\gamma} (\zeta - d) + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} d = \xi + \frac{\alpha}{\gamma} (\zeta - \delta_1) = u, \\ \eta_1 &= \eta.\end{aligned}$$

Men zal nu gemakkelijk inzien, dat de gezochte afstand D gevonden wordt uit:

$$D = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 \gamma^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}.$$

Nu is:

$$r(\xi_2 - \xi_1) \gamma = 2u(\delta_1 - \zeta) \gamma + 2 \frac{\alpha^2}{\gamma} u(\delta_2 - \zeta) + \alpha(u^2 + \eta^2)$$

en

$$r(\eta_2 - \eta_1) = 2\eta(\delta_1 - \zeta),$$

en wij zouden hieruit den gezochten afstand kunnen opmaken. Voor het volgende is het echter dienstig een nieuw coördinatenstelsel in te voeren overeenkomende met het stelsel, dat wij in het vorige hoofdstuk hebben gebezigd. Het beeldpunt M van O zij dus weder de oorsprong, de X-as heeft de richting der ξ -as en is positief naar het licht toe, de Z-as heeft de richting der as van het waarnemings-

instrument en is positief naar boven, terwijl de Y-as die der η -as heeft. De transformatie-formules zijn dan:

$$\xi = \xi_o + x - z \sin \vartheta, \quad \zeta = \zeta_o + z \cos \vartheta, \quad \eta = y,$$

waarin weer:

$$\zeta_o = \delta_1 \cos^2 \vartheta + \delta_2 \sin^2 \vartheta, \quad \xi_o = -(\zeta_o - \delta_1) \operatorname{tg} \vartheta$$

is. Dan wordt:

$$u = \xi + (\zeta - \delta_1) \operatorname{tg} \vartheta = x,$$

$$\delta_1 - \zeta = (\delta_1 - \delta_2) \sin^2 \vartheta - z \cos \vartheta,$$

$$\delta_2 - \zeta = (\delta_2 - \delta_1) \cos^2 \vartheta - z \cos \vartheta,$$

en daardoor verkrijgt men na substitutie en herleiding:

$$r(\xi_2 - \xi_1) \gamma = (x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz,$$

$$r(\eta_2 - \eta_1) = 2y \{(\delta_1 - \delta_2) \sin^2 \vartheta - z \cos \vartheta\}.$$

Hieruit volgt nu verder:

$$\begin{aligned} r^2 D^2 = & [(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz]^2 + \\ & + [2y \{(\delta_1 - \delta_2) \sin^2 \vartheta - z \cos \vartheta\}]^2 \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

§ 16. Nu zal volgens het criterium van § 8 de interferentie zoo duidelijk mogelijk te zien zijn, indien deze grootheid zoo klein mogelijk wordt. Voor de toepassing van dit criterium stellen wij ons voor, dat wij de plaats der duidelijkste interferentie opzoeken, door het waarnemingsinstrument in de richting der as te verschuiven. Dan zijn x en y constant, terwijl alleen z veranderlijk is. Men zal dus wel inzien, dat de interferentie-plaatsen zullen liggen op een oppervlak, welks vergelijking is:

$$\frac{\partial (r^2 D^2)}{\partial z} = 0,$$

dus:

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) - \\ - 2(\delta_2 - \delta_1) \cos \vartheta \sin^2 \vartheta y^2 = 0. \quad . \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

Deze vergelijking stemt volkomen overeen met die van het door SOHNCKE en WANGERIN gevonden interferentie-vlak. Zij schrijven de vergelijking ook wel in den vorm:

$$\left. \begin{aligned} x(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) - 2z_1 y^2 \cos^2 \vartheta = 0 \\ \text{of} \\ \{ (x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz \} \cdot x - 2y^2 \cos^2 \vartheta (z_1 + z) = 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

waarin:

$$z_1 = \frac{(\delta_2 - \delta_1) \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}$$

met de physische beteekenis, dat de coördinaten van het tweede beeldpunt N van O zijn: $x = 0, y = 0, z = -z_1$.

Bij SOHNCKE en WANGERIN leeren wij verder, dat dit oppervlak van den derden graad een regelvlak is met de dubbellijn MN tot eene richtlijn, terwijl de andere RS de vergelijkingen heeft:

$$x = \frac{2z_1 \cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta}, \quad z = z_1 \cot^2 \vartheta$$

en dus met de y -as evenwijdig is. Merken wij nog op, dat de in het vorige hoofdstuk verkregen hoofdrechte ook op het oppervlak ligt, hetgeen we gemakkelijk inzien door $y = 0$ te stellen. Een andere merkwaardige rechte is de

„dwarsrechte”, welke door N gaat en evenwijdig aan de Y-as loopt. Men kan zich dan het oppervlak zoo ontstaan denken, dat een rechte lijn zich beweegt langs de eindige lijn MN en de oneindige RS, terwijl ze de eerste in een punt T en de tweede in T' snijdt, zoodanig dat:

$$RT' = \pm \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} MN \sqrt{\frac{MT}{TN}}$$

§ 17. Ten slotte zullen wij nog eens even het geval van herhaalde terugkaatsingen beschouwen.

Tot nog toe hebben wij slechts de interferentie van die stralen in rekening gebracht, die aan het bovenzvlak van de luchtlaag tusschen plaat en lens gereflecteerd zijn en die, welke na ééne reflectie aan het lensoppervlak uit de luchtlaag treden. Men kan nu ook aantonen, dat herhaalde terugkaatsingen van deze laatste stralen binnen de luchtlaag ons resultaat volstrekt niet doen veranderen. Wij hebben hierbij te bedenken, dat, wanneer men het vlak zoekt, waar de interferentie in dit geval het duidelijkst te voorschijn komt, weder de daarbij behoorende waarde van D een minimum moet worden.

Stel nl. voor (zie fig. 9) de spherische coördinaten van de punten C, C', C'' . . . C^(k-1), waarin de verschillende terugkaatsingen op het lensoppervlak plaats hebben, φ , ψ ; φ' , ψ' ; φ'' , ψ'' ; . . . $\varphi^{(k-1)}$, $\psi^{(k-1)}$. De invallende straal in C heeft de richtingscosinussen $-\alpha$, $-\gamma$, na de reflectie in C zijn ze $-\alpha'$, $-\beta'$, $+\gamma'$. In C' heeft de invallende

straal de richting $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$, de gereflecteerde $-\alpha''$, $-\beta''$, $+\gamma''$ enz., in $C^{(k-1)}$ heeft de invallende straal de richting $-\alpha^{(k-1)}$, $-\beta^{(k-1)}$, $-\gamma^{(k-1)}$, de gereflecteerde $-\alpha^{(k)}$, $-\beta^{(k)}$, $+\gamma^{(k)}$.

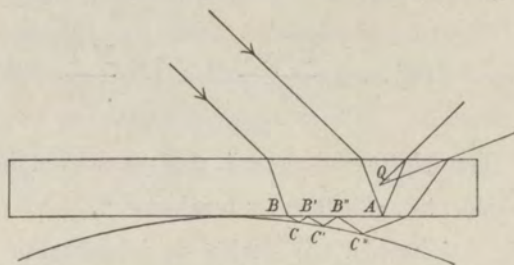


Fig. 9.

Van C naar C' over B' gaande heeft men nu :

$$\begin{aligned} r \sin \varphi \cos \psi - \frac{\alpha'}{\gamma'} 2 r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi &= \\ &= r \sin \varphi' \cos \psi' + \frac{\alpha'}{\gamma'} 2 r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi', \\ r \sin \varphi \sin \psi - \frac{\beta'}{\gamma'} 2 r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi &= \\ &= r \sin \varphi' \sin \psi' + \frac{\beta'}{\gamma'} 2 r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi'. \end{aligned}$$

Ontwikkellende naar machten van φ en φ' , vindt men (termen van de derde orde verwaarloozende)

$$\begin{aligned} \varphi' \cos \psi' &= \varphi \cos \psi - \frac{\alpha}{\gamma} \varphi^2, \\ \varphi' \sin \psi' &= \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Dergelijke betrekkingen zullen steeds tusschen twee op elkaar volgende punten C bestaan, zoodat men algemeen voor $C^{(h)}$ heeft :

$$q^{(h)} \cos \psi^{(h)} = q \cos \psi - h \cdot \frac{\alpha}{\gamma} q^2,$$

$$q^{(h)} \sin \psi^{(h)} = q \sin \psi.$$

De waarden van α' , β' , γ' zijn door de vergelijkingen (B) in § 13 bepaald. α'' , β'' , γ'' hangen echter op dezelfde wijze van α' , β' , γ' , q' , ψ' af, als α' , β' , γ' van α , β , γ , q , ψ . (Zie de noot in § 13). Wij hebben alzoo :

$$\alpha' = \alpha - 2 \gamma q \cos \psi,$$

$$\alpha'' = \alpha' - 2 \gamma' q' \cos \psi'.$$

Uit beide volgt in verband met de bovenstaande uitdrukkingen voor $q' \cos \psi'$ en $q' \sin \psi'$:

$$\alpha'' = \alpha - 2 \cdot 2 \gamma q \cos \psi.$$

Op dezelfde wijze voortgaande verkrijgt men ten slotte algemeen :

$$\alpha^{(h)} = \alpha - h \cdot 2 \gamma q \cos \psi,$$

$$\beta^{(h)} = - h \cdot 2 \gamma q \sin \psi,$$

$$\gamma^{(h)} = \gamma + h \cdot 2 \alpha q \cos \psi.$$

Zijn nu $\alpha_1^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$, $\gamma_1^{(k)}$ de richtingscosinussen van den straal, die uit den straal $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$ door breking in de glasplaat ontstaat, dan vindt men :

$$\begin{aligned}
 & r \varphi^{(k-1)} \cos \psi^{(k-1)} = \\
 = & \xi + \frac{\alpha^{(k)}}{\gamma^{(k)}} (\zeta - d) + \frac{\alpha_1^{(k)}}{\gamma_1^{(k)}} d + \frac{1}{2} r \{ \varphi^{(k-1)} \}^2 \frac{\alpha^{(k)}}{\gamma^{(k)}}, \\
 & r \varphi^{(k-1)} \sin \psi^{(k-1)} = \\
 = & \eta + \frac{\beta^{(k)}}{\gamma^{(k)}} (\zeta - d) + \frac{\beta_1^{(k)}}{\gamma_1^{(k)}} d + \frac{1}{2} r \{ \varphi^{(k-1)} \}^2 \frac{\beta^{(k)}}{\gamma^{(k)}}.
 \end{aligned}$$

Met behulp van bovenstaande uitdrukkingen voor

$$\varphi^{(h)} \cos \psi^{(h)}, \quad \varphi^{(h)} \sin \psi^{(h)}, \quad \alpha^{(h)}, \quad \beta^{(h)}, \quad \gamma^{(h)}$$

ontwikkelt men nu deze vergelijkingen naar machten van φ (termen van de derde orde verwaarloozende); lost men dan daaruit $\varphi \cos \psi$ en $\varphi \sin \psi$ op, dan vindt men:

$$\begin{aligned}
 \varphi \cos \psi &= \frac{u}{r} + k \cdot 2 \frac{u}{r} \cdot \frac{\delta_1 - \zeta}{r} + \\
 &+ k \cdot 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot \frac{u}{r} \cdot \frac{\delta_2 - \zeta}{r} + (k - \frac{1}{2}) \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{u^2 + \eta^2}{r^2}, \\
 \varphi \sin \psi &= \frac{\eta}{r} + k \cdot 2 \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\delta_1 - \zeta}{r}.
 \end{aligned}$$

De coördinaten van het punt B zijn verder:

$$\begin{aligned}
 \xi_2 &= r \varphi \cos \psi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} r \varphi^2 = \\
 = & u + k \cdot 2 u \frac{\delta_1 - \zeta}{r} + k \cdot 2 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot u \cdot \frac{\delta_2 - \zeta}{r} + k \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{u^2 + \eta^2}{r}, \\
 \eta_2 &= r \varphi \sin \psi = \eta + k \cdot 2 \eta \frac{\delta_1 - \zeta}{r}.
 \end{aligned}$$

De coördinaten van het punt A zijn:

$$\xi_1 = u, \quad \eta_1 = \eta,$$

zoodat:

$$r(\xi_2 - \xi_1)\gamma = k \cdot 2u(\delta_1 - \zeta)\gamma + \\ + k \cdot 2 \frac{\alpha^2}{\gamma} u(\delta_2 - \zeta) + k \cdot \alpha(u^2 + \eta^2)$$

en

$$r(\eta_2 - \eta_1) = k \cdot 2\eta(\delta_1 - \zeta).$$

De hier gevonden uitdrukkingen voor $r(\xi_2 - \xi_1)\gamma$ en $r(\eta_2 - \eta_1)$ zijn dus k maal zoo groot als de overeenkomstige uitdrukkingen bij ééne reflectie, en dientengevolge zal de vergelijking:

$$\frac{\partial (r^2 D^2)}{\partial z} = 0$$

volkomen dezelfde worden als die, welke we in het eerst besproken geval verkregen hebben.

HOOFDSTUK IV.

Duidelijkheid der interferenties bij de ringen van Newton.

§ 18. Zooals we weten, zijn de interferenties in het centrale invalsvlak volkomen duidelijk, buiten het centrale invalsvlak in 't algemeen niet. Toch wenschen we in dit laatste geval wel iets meer van die duidelijkheid te weten te komen, n.l. hoe het daarmede gesteld is in verschillende punten van het interferentie-vlak. De grootheid, waarvan dit afhangt, is, zooals uit hoofdstuk I volgt, D . Wij nemen dus voor bepaalde waarden van x en y de kleinste waarde van $r^2 D^2$, die bereikt kan worden en vergelijken die dan met de overeenkomstige waarde van $r^2 D^2_{\min}$ voor andere waarden van x en y . Schrijven wij daartoe (7) in den vorm:

$$r^2 D^2 = \{(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz\}^2 + \{2y(z + z_1) \cos \vartheta\}^2 \quad (10)$$

en elimineeren we hieruit met behulp van (9) de coördinaat z , dan komt er na herleiding:

$$r^2 D^2 = \frac{y^2 \cos^2 \vartheta}{x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta} \{ (x^2 + y^2) \sin \vartheta + 2 x z_1 \}^2 \quad (11).$$

Stellen wij hierin:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha,$$

dan verkrijgt men:

$$r^2 D^2 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta} \times \rho^2 (\rho \sin \vartheta + 2 z_1 \cos \alpha)^2 \quad (12).$$

Daar voor $\alpha = 0^\circ$ en $\alpha = 180^\circ$ deze uitdrukking nul wordt, is de duidelijkheid in het centrale invalsvlak volkomen; dit resultaat was bekend.

Voor $\alpha = 90^\circ$ wordt:

$$r^2 D^2 = \rho^4 \sin^2 \vartheta,$$

een uitdrukking, die bij wassenden afstand van het centrum sterk toeneemt. De interferentie zal dus in de dwarsrichting aanmerkelijk zwakker zijn dan in de hoofdrichting en ook spoediger ophouden dan in deze laatste. Ook zien we, dat bij wassenden invalshoek het verschijnsel onduidelijker wordt.

Het behoeft wel nauwelijks vermelding dat het centrale invalsvlak ten opzichte der duidelijkheid een symmetrie-vlak is. Immers, $r^2 D^2$ heeft voor gelijke waarden van α met tegengestelde teekens dezelfde grootte.

Vergelijkt men twee overeenkomstige punten van de naar het licht toegekeerde en van het licht afgekeerde helften,

d. w. z. twee punten, waarvoor ϱ dezelfde waarde heeft, maar de α 's elkaars supplement zijn, dan wordt, daar z_1 een positieve grootheid is, $(\varrho \sin \vartheta + 2 z_1 \cos \alpha)^2$ voor de scherpe waarde van α grooter dan voor de stompe. Alzoo zal van zulke punten het dichtst bij het licht zijnde een kleinere duidelijkheid vertoonen dan het andere.

Van belang is vervolgens nog de opmerking, dat er *buiten* het centrale invalsvlak ook punten zijn, waarvoor de duidelijkheid *volkomen* is. Immers (12) wordt nog nul, indien

$$\varrho \sin \vartheta + 2 z_1 \cos \alpha = 0.$$

Alsdan is

$$\frac{\varrho}{\cos \alpha} = -\frac{2 z_1}{\sin \vartheta} \dots \dots \dots (13).$$

Uit vergelijking (9) vinden wij nu verder, dat

$$z = -z_1 \dots \dots \dots (14).$$

De vergelijkingen (13) en (14) leeren ons, dat de bedoelde punten op een cirkel liggen, die door N (het tweede beeldpunt van O) gaat en waarvan het vlak evenwijdig is met het XY-vlak; hij ligt in de van het licht afgekeerde helft.

Overigens ziet men uit (12), dat in 't algemeen bij standvastige α de waarde van $r^2 D^2$ met wassende ϱ zal toenemen. Beweegt men zich dus in een of andere richting van het centrum uit, dan zal het verschijnsel in 't algemeen steeds zwakker worden.

De hier verkregen resultaten stemmen weder met die van SOHNCKE en WANGERIN overeen.

HOOFDSTUK V.

De interferentie-plaatsen bij een wigvormig glasplaatje.

§ 19. De verschijnselen bij een wigvormig glasplaatje met kleinen hoek worden door SOHNCKE en WANGERIN in hunne eerste onderzoekingen slechts terloops besproken. In hun lateren arbeid behandelen zij deze verschijnselen meer in 't bijzonder. Ook wij zullen daarom onze methode hierop toepassen.

Wij nemen daartoe (zie fig. 10) een rechthoekig coördinatenstelsel $\xi \eta \zeta$ aan met den oorsprong in de ribbe van de wig. Deze ribbe zij de η -as, de ξ -as nemen we in het bovenvlak van het plaatje en wel positief naar die zijde, naar welke de dikte van de wig toeneemt. De ζ -as nemen we positief naar boven. Verder zij de ribbe van het licht afgekeerd. Laat de in Q interfereerende stralen aanvankelijk de richtingscosinussen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ hebben. De in A ge-

reflecteerde straal heeft dan de richting $-\alpha - \beta, +\gamma$, terwijl die van den in B in het plaatje gebroken straal $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$ is. Men heeft dan:

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \alpha, \quad \beta_1 = \frac{1}{n} \beta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

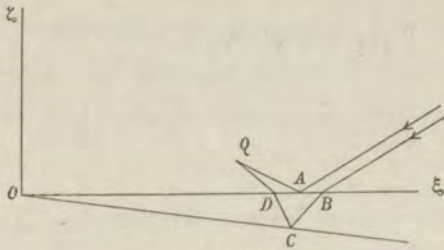


Fig. 10.

Deze laatste straal wordt in C aan de onderzijde van het plaatje gereflecteerd en krijgt dan de richting $-\alpha'_1, -\beta'_1, +\gamma'_1$. Daar de norma-

maal op dit benedenvlak tot richtingscosinussen heeft $\sin \epsilon, 0, \cos \epsilon$, zoo vindt men gemakkelijk:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos 2\epsilon - \gamma_1 \sin 2\epsilon = \frac{1}{n} \alpha - 2\gamma_1 \epsilon,$$

$$\beta'_1 = \beta_1 = \frac{1}{n} \beta,$$

$$\gamma'_1 = \alpha_1 \sin 2\epsilon + \gamma_1 \cos 2\epsilon = \gamma_1 + \frac{2}{n} \alpha \epsilon.$$

Bij deze ontwikkeling zijn de termen met ϵ^2 verwaarloosd.

In D wordt deze laatste straal nu verder in de lucht gebroken. Noemen wij dan de richting $-\alpha', -\beta', +\gamma'$, zoo heeft men tusschen α', β', γ' en $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ dezelfde betrekkingen als tusschen α, β, γ en $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Alzoo verkrijgt men, bij dezelfde verwaarloozing als zooeven:

$$\alpha' = \alpha - 2n\gamma_1 \varepsilon, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma + 2n\gamma_1 \frac{\alpha}{\gamma} \varepsilon.$$

Hiermede hebben wij de richtingsconstanten der verschillende stralen in α , β en γ uitgedrukt.

Wij zullen thans de coördinaten der punten A en B in die van Q moeten uitdrukken. Wat de coördinaten van B betreft, zullen wij van Q over D en C naar B gaan.

Noemen wij de coördinaten van A: ξ_1, η_1, ζ_1 , die van B: ξ_2, η_2, ζ_2 , die van C: ξ_3, η_3, ζ_3 , die van D: ξ_4, η_4, ζ_4 en die van Q: ξ, η, ζ , dan heeft men:

$$\xi_1 = \xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta, \quad \eta_1 = \eta + \frac{\beta}{\gamma} \zeta, \quad \zeta_1 = 0.$$

Verder is:

$$\xi_4 = \xi + \frac{\alpha'}{\gamma'} \zeta = \xi + \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{2n\gamma_1(\alpha^2 + \gamma^2)\varepsilon}{\gamma^3} \right\} \zeta,$$

$$\eta_4 = \eta + \frac{\beta'}{\gamma'} \zeta = \eta + \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{2n\gamma_1\alpha\beta\varepsilon}{\gamma^3} \right) \zeta,$$

$$\zeta_4 = 0.$$

Nu is:

$$\zeta_3 = -\xi_3 \operatorname{tg} \varepsilon = -\xi_3 \varepsilon,$$

dus:

$$\xi_3 = \xi_4 - \frac{\alpha'_1}{\gamma'_1} \zeta_3 = \xi_4 + \frac{\alpha'_1}{\gamma'_1} \xi_3 \varepsilon = \xi_4 + \frac{\alpha}{n\gamma_1} \xi_3 \varepsilon.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n\gamma_1} \varepsilon \right) \xi_4 = \xi + \frac{\alpha}{n\gamma_1} \varepsilon \xi + \\ &+ \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha^2 \varepsilon}{n\gamma_1 \gamma} - \frac{2n\gamma_1(\alpha^2 + \gamma^2)\varepsilon}{\gamma^3} \right\} \zeta. \end{aligned}$$

Verder is:

$$\begin{aligned}\eta_3 &= \eta_4 - \frac{\beta'_1}{\gamma'_1} \zeta_3 = \eta_4 + \frac{\beta'_1}{\gamma'_1} \xi_3 \varepsilon = \eta_4 + \frac{\beta}{n\gamma_1} \xi_3 \varepsilon = \\ &= \eta + \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{2n\gamma_1\alpha\beta\varepsilon}{\gamma^3} \right) \zeta + \frac{\beta}{n\gamma_1} \varepsilon \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right), \\ \zeta_3 &= -\xi_3 \varepsilon = - \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right) \varepsilon.\end{aligned}$$

Vervolgens is:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \xi_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \zeta_3 = \xi_3 - \frac{\alpha}{n\gamma_1} \zeta_3 = \\ &= \xi + \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{2n\gamma_1(\alpha^2 + \gamma^2)\varepsilon}{\gamma^3} \right\} \zeta + 2\frac{\alpha}{n\gamma_1} \varepsilon \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right), \\ \eta_2 &= \eta_3 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \zeta_3 = \eta_3 - \frac{\beta}{n\gamma_1} \zeta_3 = \\ &= \eta + \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{2n\gamma_1\alpha\beta\varepsilon}{\gamma^3} \right) \zeta + 2\frac{\beta}{n\gamma_1} \varepsilon \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right), \\ \zeta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Tot het berekenen van den afstand der in A en B invallende stralen, hebben wij weder noodig te kennen $\xi_2 - \xi_1$ en $\eta_2 - \eta_1$. Nu is:

$$\begin{aligned}\xi_2 - \xi_1 &= \left\{ 2\frac{\alpha}{n\gamma_1} \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right) - \frac{2n\gamma_1(\alpha^2 + \gamma^2)}{\gamma^3} \zeta \right\} \varepsilon, \\ \eta_2 - \eta_1 &= \left\{ 2\frac{\beta}{n\gamma_1} \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right) - \frac{2n\gamma_1\alpha\beta}{\gamma^3} \zeta \right\} \varepsilon.\end{aligned}$$

Stelt men nu:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin \vartheta \cos \mu, & \beta &= \sin \vartheta \sin \mu, & \gamma &= \cos \vartheta, \\ \sin \vartheta_1 &= \frac{1}{n} \sin \vartheta, & & & & \text{(dus } \gamma_1 = \cos \vartheta_1),\end{aligned}$$

waarin ϑ den hoek van inval, μ het azimuth van het invalsvlak voorstelt, voert men verder in plaats van het coördinatenstelsel ξ, η, ζ een ander X, Y, Z in, waarvan de X-as met de ξ -as, de Y-as met de η -as samenvalt, terwijl de Z-as evenwijdig aan de as van het waarnemingsinstrument loopt, zoo wordt:

$$\xi = x - z \sin \vartheta \cos \mu, \quad \eta = y - z \sin \vartheta \sin \mu, \quad \zeta = z \cos \vartheta.$$

De uitdrukkingen $\xi_2 - \xi_1$ en $\eta_2 - \eta_1$ gaan dan over in:

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{2 \sin \vartheta \cos \mu}{n \cos \vartheta_1} \varepsilon x - 2 n \cos \vartheta_1 (\operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^2 \mu + 1) \varepsilon z,$$

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{2 \sin \vartheta \sin \mu}{n \cos \vartheta_1} \varepsilon x - 2 n \cos \vartheta_1 \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin \mu \cos \mu \cdot \varepsilon z.$$

Noemt men nu weder den afstand der in A en B invallende stralen D, dan wordt deze grootheid weer gevonden uit een vergelijking van de gedaante:

$$D^2 = (p \cos \vartheta)^2 + q^2.$$

De beteekenis van p en q is gemakkelijk in te zien en men heeft:

$$p = (\xi_2 - \xi_1) \cos \mu + (\eta_2 - \eta_1) \sin \mu,$$

$$q = (\eta_2 - \eta_1) \cos \mu - (\xi_2 - \xi_1) \sin \mu.$$

Hieruit volgt, dat:

$$p \cos \vartheta = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1} \varepsilon x - 2 n \cos \vartheta_1 \cos \mu \sec \vartheta \cdot \varepsilon z,$$

$$q = 2 n \cos \vartheta_1 \sin \mu \cdot \varepsilon z.$$

Alzoo :

$$D^2 = \left(\frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1} \varepsilon x - 2 n \cos \vartheta_1 \cos \mu \sec \vartheta \cdot \varepsilon z \right)^2 + \\ + (2 n \cos \vartheta_1 \sin \mu \cdot \varepsilon z)^2 \dots \dots (15).$$

Ter bepaling van de vergelijking van het interferentievlak kunnen wij hier dezelfde redeneering volgen als in hoofdstuk III. Men heeft dus als vergelijking voor dit vlak :

$$\frac{\partial D^2}{\partial z} = 0$$

of

$$z = \frac{\sin \vartheta \cos \mu}{n^2 \cos^2 \vartheta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^2 \mu)} x \dots \dots (16).$$

De vergelijking is blijkbaar die van een plat vlak, gaande door de ribbe van het wigvormig plaatje. De helling van dit vlak ten opzichte van dit plaatje hangt, behalve van ϑ en n , ook van μ af, zoodat, wanneer men het invalsvlak draait, zonder dat de invalshoek veranderd wordt, het interferentievlak om de ribbe der wig draait. Het vlak blijft echter steeds boven het plaatje liggen, zoodat we hier overal reële interferenties hebben.

§ 20. Bespreken we nog even de duidelijkheid der interferenties bij het wigvormig plaatje.

Elimineeren we de coördinaat z uit (15) met behulp van (16), dan verkrijgt men :

$$D^2 = \frac{4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \mu}{n^2 \cos^2 \vartheta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^2 \mu)} \varepsilon^2 x^2 \dots \dots (17).$$

Men ziet dat deze grootheid, bij willekeurige x , slechts voor $\vartheta = 0$ en $\mu = 0$ nul wordt, dat alzoo slechts bij loodrecht op het oppervlak van het plaatje vallende stralen of bij een anderen invalshoek slechts voor het geval, dat het invalsvlak loodrecht op de ribbe der wig staat, de interferenties volkomen duidelijk worden. Overigens neemt de duidelijkheid voor aangroeiende μ af, evenzoo met aangroeiende x .

Ook hier zijn de resultaten weer dezelfde als die van SOHNCKE en WANGERIN.

HOOFDSTUK VI.

Vergelijking van onze theorie met die van Sohncke en Wangerin.

Daar wij bij de toepassing van onze theorie op de in de vorige hoofdstukken besproken verschijnselen steeds dezelfde resultaten hebben gevonden als SOHNCKE en WANGERIN, terwijl hunne methode van onderzoek toch geheel verschillend is van de onze, is het wel van belang de oorzaak van die overeenkomst op te sporen. Wij zullen ons in dit hoofdstuk met deze kwestie bezig houden.

In de eerste plaats is het daarvoor noodig een overzicht van hunne theorie te geven.

In hunne eerste onderzoekingen (Bd XII) redeneeren zij op de volgende wijze:

„Er vallen op de inrichting een oneindig aantal platte golven. Trekt men door een punt in de ruimte lijnen evenwijdig aan alle golfnormalen, zoo zullen die lijnen een zekere kegelruimte continu vullen. Door een punt Q

gaan dus niet twee stralen, maar oneindig vele. Interfereeren kunnen echter slechts zulke stralen, die uit dezelfde invalende platte golf ontstaan zijn en uit elk golf-front krijgen wij slechts twee stralen. Door Q gaan daarom oneindig veel stralenparen zoodanig, dat de stralen van een paar met elkander interfereeren. Beschouwen wij nu twee willekeurige interfereerende stralenparen, zoo zal in 't algemeen het phase-verschil van het ééne paar niet hetzelfde zijn als het phase-verschil van het andere. Stelt men het waarnemingsinstrument dus op een willekeurig punt in, zoo zal de interferentie meer of minder duidelijk zijn. Voor welk punt Q wordt nu de interferentie het duidelijkst? De stralen zullen om de as van het waarnemingsinstrument geheel symmetrisch liggen. Men zal dus vooral deze as in het oog moeten houden. Langs deze as gaan twee stralen van Q uit, de ééne is op een andere wijze door de inrichting gegaan als de andere. Deze twee stralen, „de hoofdstralen” genoemd, interfereeren niet met elkander, daar ze niet uit 't zelfde golf-front ontstaan zijn. Elke hoofdstraal echter heeft een straal, waarmee hij interfereert; deze hoofdstralen behooren dus tot twee verschillende interfereerende stralenparen, „de hoofdparen” genoemd. Nu wordt aangenomen, dat het ééne hoofdpaar hetzelfde „optisch verschil” moet hebben als het andere, zal de interferentie zoo duidelijk mogelijk zijn. Bepaalt men op deze wijze de plaats der *minima*, dan verkrijgt men twee vergelijkingen tusschen de drie coördinaten van het punt Q, nl.:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \text{en} \quad \Delta_1 = \Delta_2 = h \lambda$$

(Δ_1 en Δ_2 de wegverschillen der paren, h een willekeurig geheel getal en λ de golflengte voorstellende)".

Merken *wij* terloops op, dat één vergelijking voldoende is om de voorwaarde voor de grootste duidelijkheid van elke interferentie in 't algemeen (d. w. z. niet speciaal een minimum) uit te drukken.

„Vraagt men eindelijk naar den invloed van de andere interfereerende stralenparen, dan zullen de andere paren, zoo Q in 't centrale invalsvlak ligt, zich juist zoo gedragen als de hoofdparen. Voor andere punten Q is dit niet meer zoo, en in deze omstandigheid ligt de oorzaak van het verschijnsel, dat voor punten buiten het centrale invalsvlak de interferentie minder duidelijk is dan in dat vlak.”

§ 21. Ofschoon deze theorie resultaten heeft opgeleverd, die met de waarnemingen goed overeenstemden, schijnt een daarop gevolgde strijd met FEUSSNER oorzaak geweest te zijn, dat zij gemeend hebben hunne theorie onafhankelijk te moeten maken van het principe der hoofdparen. In Bd XX vindt men dan ook de volgende beschouwing: „Twee in Q interfereerende stralen, die van hetzelfde punt der lichtbron zijn uitgegaan, hebben in Q het wegverschil Δ . De door die stralen in dit punt teweeggebrachte licht-intensiteit heeft tot formule:

$$M^2 + N^2 - 2 M N \cos \left(\frac{\Delta}{\lambda} 2 \pi \right).$$

Door Q gaan echter niet slechts twee interfereerende stralen, maar bij niet-puntvormige lichtbron oneindig veel paren. Wat is nu de resulterende intensiteit in Q? Om die te vinden, verbindt men Q met alle randpunten van de opening van het waarnemingsinstrument. De door deze verbindingslijnen ontstane kegel bevat bij voldoende uitgebreidheid der lichtbron alle werkzame stralen. Hij snijdt uit een om Q met den straal I beschreven bol een klein vlakje F. Door elk punt van F gaat dan een straal, die met zijn bijbehorenden een intensiteitsuitdrukking van bovenstaanden vorm geeft, en zoo komt men tot de totale intensiteit in Q:

$$I = m \iint \left\{ M^2 + N^2 - 2 M N \cos \left(\frac{\Delta}{\lambda} 2 \pi \right) \right\} dF,$$

waarbij de integratie over het gansche vlakje F uitgestrekt moet worden. De opmerking wordt gemaakt, dat het vlakje F voor de stralen, die op de ééne wijze door de inrichting zijn gegaan niet hetzelfde is als het vlakje F_1 voor de stralen, die op de andere wijze zijn gegaan en die interfereeren met de stralen, die op F vallen. Daar echter bij dunne plaatjes het verschil tusschen F en F_1 een grootheid van hoogere orde is, kan men beide vlakjes als samenvallend beschouwen.

Om bovenstaande integraal verder te ontwikkelen, wordt voorop gesteld, dat Q ligt op de as van het waarnemingsinstrument, welke as den bol in O snijdt. Verder worden spherische coördinaten φ , ψ ingevoerd met O als pool. De spherische straal van F zij φ_1 , dan is dus φ_1 de hoek,

waaronder men den straal van de opening van het waarnemingsinstrument van Q uit ziet. Wij nemen aan, dat q_1 zoo klein is, dat slechts eerste machten van deze grootheid in rekening gebracht behoeven te worden; dan wordt:

$$dF = \sin q \, d q \, d \psi = q \, d q \, d \psi,$$

dus:

$$I = m \int_0^{q_1} \int_0^{2\pi} \left\{ M^2 + N^2 - 2 M N \cos \left(\frac{\Delta}{\lambda} - 2 \pi \right) \right\} q \, d q \, d \psi.$$

Bij de uitvoering der integratie nu worden M en N als constant aangezien, en wat Δ betreft wordt bewezen, dat, wanneer men daarin q^2 verwaarloost, men een uitdrukking verkrijgt van den vorm:

$$\Delta = A + B q \cos \psi + C q \sin \psi.$$

Dit geschiedt aldus: Noemen wij de richting van Q O: $-a, -b, +c$, die van een willekeurigen straal uit Q: $-\alpha, -\beta, +\gamma$, dan zijn α, β en γ functiën van $a, b, c, q \cos \psi$ en $q \sin \psi$. Nu is bekend:

$$\Delta = f(\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma),$$

zoodat men voor Δ een uitdrukking krijgt van bovenstaanden vorm. De intensiteit wordt nu:

$$I = \pi q_1^2 m \left[M^2 + N^2 - \frac{2 M N}{\pi q_1^2} \int_0^{q_1} \int_0^{2\pi} \cos \left\{ \frac{2 \pi}{\lambda} (A + B q \cos \psi + C q \sin \psi) \right\} q \, d q \, d \psi \right].$$

Deze uitdrukking laat zich herleiden tot:

$$I = \pi q_1^2 m \left\{ M^2 + N^2 - 2 M N \cos \left(\frac{2 \pi}{\lambda} A \right) \cdot \frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1} \right\},$$

waarbij \mathcal{J}_1 de Besselsche functie met den index 1 is en nog ter afkorting is geschreven:

$$u_1 = q_1 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{B^2 + C^2}.$$

Nu is de intensiteit een maximum, wanneer

$$A = (h + \frac{1}{2}) \lambda \text{ en tegelijk } \frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1} \text{ een maximum is.}$$

Minima van intensiteit vindt men, waar

$$A = h \lambda \text{ en tegelijk } \frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1} \text{ een maximum is.}$$

Nu heeft de functie $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ ontelbaar veel maxima, die

met aangroeiende waarden van u_1 steeds kleiner worden. De absoluut grootste waarde neemt de uitdrukking aan voor $u_1 = 0$ (nl. de waarde 1). Het naastbijzijnde maximum ligt bij $u_1 = 8,4$ (nl. 0,0645). De volgende maxima heeft men voor waarden van u_1 , die ongeveer 2π verschillen. Men kan nu verder beredeneeren, *dat het minimum van $B^2 + C^2$ met een zeer kleine fout de plaats der grootste duidelijkheid oplevert*".

Deze tweede theorie heeft resultaten opgeleverd, die met de eerste volkomen overeenkomen en de grond hiervoor wordt door SOHNCKE en WANGERIN als volgt opgegeven:

„De bovenstaande ontwikkeling (tweede theorie) komt hierop neer, dat het phase-verschil van een willekeurig paar interfereerende stralen naar machten van de afwijking van

de as ontwikkeld wordt, en dat de wijziging, die dit veranderende phase-verschil in de intensiteit brengt, zoo klein mogelijk wordt gemaakt. In de eerste theorie werd dit slechts van twee paren van interfereerende stralen gevorderd, nl. de hoofdparen. De verder gaande eisch der tweede theorie houdt den beperkten eisch der eerste in zich; dat men echter bij de tweede tot juist dezelfde resultaten zou komen als bij de eerste, was a priori niet in te zien. Toch is gebleken, dat de hypothese der eerste theorie een gerechtvaardigde hulphypothese is."

§ 22. Wij zullen nu beginnen met de tweede theorie van SOHNCKE en WANGERIN met de onze te vergelijken.

Naar onze methode worden de twee in fig. 4 door S_1 en S_2 voorgestelde oppervlakken beschouwd, die bij een zeker punt Q, waar men het interferentie-verschijnsel wil waarnemen, behooren. Er wordt aangenomen, dat de „werkzame" deelen dezer vlakken zoo liggen, dat, wanneer men het werkzame deel van S_1 op S_2 projecteert, de projectie geacht kan worden met het werkzame deel van S_2 samen te vallen, m. a. w. dat de ligging der werkzame deelen van S_1 en S_2 in projectie *niet* is, zooals van de cirkels M_1 en M_2 in de figuren 11a en 11b (AB stelt de snijlijn van S_1 en S_2 voor).

De werkzame deelen van S_1 en S_2 beantwoorden aan den door SOHNCKE en WANGERIN beschouwden kegel, die door Q en de randpunten van de opening van het waar-

nemingsinstrument bepaald is en de onderstelling, dat de werkzame deelen niet noemenswaard ten opzichte van elkaar „verschoven” zijn, d. w. z. niet liggen, zooals in fig. 11, beantwoordt hieraan, dat de vlakjes F en F_1 niet noemenswaard van elkander verschillen.

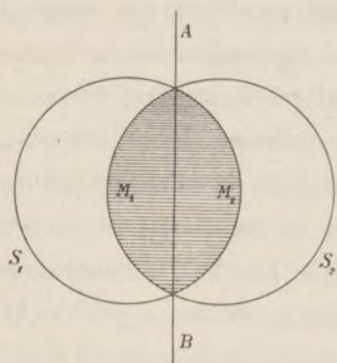


Fig. 11a.

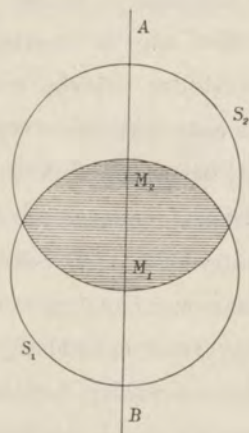


Fig. 11b.

De begrenzing der werkzame deelen is cirkelvormig, zooals men gemakkelijk aantoot, daar de eene terugkaatsing op een plat vlak en de andere, nl. bij de ringen van Newton, op een zwak gekromd oppervlak plaats heeft. Het punt P in fig. 4 kan het middelpunt zijn, immers men kan het tweede vlak S_2 altijd brengen door het middelpunt van het werkzame deel van het eerste.

Wij beschouwen de werkzame deelen van S_1 en S_2 als plat, zoodat het door het lijntje HK in fig. 4 voorgestelde phase-verschil een lineaire functie is van de coördinaten

in S_1 . (Het komt er, daar $\angle H P K$ zeer klein is, niet op aan, of men $H K \perp S_1$ of $\perp S_2$ trekt.) Met deze door ons gemaakte onderstelling komt overeen, dat SOHNCKE en WANGERIN Δ voorstellen door een lineaire functie van $\varphi \cos \psi$ en $\varphi \sin \psi$. Immers, deze uitdrukkingen beantwoorden aan de coördinaten in het integratie-gebied.

Men kan de resulterende intensiteit als een integraal voorstellen, waarbij men, omdat een goniometrische functie der coördinaten over een cirkelvlak geïntegreerd moet worden, tot Besselsche functiën komt, en daarna uit de uitkomst afleiden, wanneer de duidelijkheid der interferentie-strepen het grootst is. Dit is de methode van SOHNCKE en WANGERIN. Maar men kan zijn doel vlugger bereiken, wanneer men zegt (wat onmiddellijk duidelijk is en eene gemakkelijk voor een ieder verstaanbare theorie geeft), dat de interferentie des te duidelijker zal zijn, naarmate de grootste waarde, die $H K$ in fig. 4 aanneemt, d. i. $D G$, kleiner is.

Nu kan men voor de uitdrukking voor Δ schrijven, als men

$$B = \sqrt{B^2 + C^2} \cos \alpha \quad \text{en} \quad C = \sqrt{B^2 + C^2} \sin \alpha$$

stelt,

$$\Delta = A + \varphi \sqrt{B^2 + C^2} \cos(\psi - \alpha).$$

De grootste waarde van den tweeden term is $\varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2}$, dus daar φ_1 constant is, heeft men $\sqrt{B^2 + C^2}$ zoo klein mogelijk te maken. Het blijkt dus, dat de twee methoden

op hetzelfde neerkomen; de grootheid $\varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2}$ is niet anders dan de lijn D G.

Merken wij verder op, dat de factor c in § 8 van hoofdstuk I eigenlijk niets anders is dan φ_1 , dan zal het duidelijk zijn, dat $EF^2 = B^2 + C^2$. Het is dus zelfs *precies* dezelfde grootheid, die zoowel bij ons als bij SOHNCKE en WANGERIN zoo klein mogelijk moet zijn.

§ 23. De reden, die SOHNCKE en WANGERIN voor de overeenstemming der uitkomsten van de beide door hen gevolgde methoden opgeven, schijnt niet zeer overtuigend. De volgende beschouwing stelt, naar het mij voorkomt, de zaak beter in het licht, althans in het geval, dat men de dikte der glasplaat verwaarloost.

Zij Q een punt, waar men de interferentie waarneemt, en wel een punt, waarvan de ligging aan het *eerste* criterium van SOHNCKE en WANGERIN voldoet. Beschouw het eerste hoofdpaar en laat de stralen, die dit samenstellen van een punt P van het vlak S_1 komen; breng door dat punt ook het vlak S_2 . Let vervolgens op het tweede hoofdpaar, dat in Q tot interferentie komt; de stralen van dit paar komen ook van een zelfde punt, dat wij op S_1 kunnen aannemen, daar wij de lichtbron met S_1 kunnen laten samenvallen. Lag nu dit punt, zooals H, in fig. 4, dan zou de lengte van H K aangeven, hoeveel het phase-verschil van dit tweede hoofdpaar verschilt van het phase-verschil van het eerste. Maar wanneer het punt Q aan het eerste criterium van

SOHNCKE en WANGERIN voldoet, is het phase-verschil van het eene hoofdpaar gelijk aan dat van het andere, dus moet $HK = 0$ zijn, alzoo moet H in de snijlijn van S_1 en S_2 liggen. Derhalve kan het eerste criterium van SOHNCKE en WANGERIN zoo worden uitgedrukt: *Gaat men in het punt Q over van het eene hoofdpaar naar het andere, dan verplaatst zich het punt P langs de snijlijn der vlakken S_1 en S_2 .*

Nu loopt in het eerste hoofdpaar de eene straal en in het tweede hoofdpaar de andere straal langs de as van het waarnemingsinstrument. Het punt P voor het eene hoofdpaar is dus het middelpunt van het werkzame deel van S_1 en het overeenkomstige punt P' voor het andere hoofdpaar het middelpunt van het werkzame deel van S_2 . Daar nu is aangenomen, dat de middelpunten der werkzame deelen van S_1 en S_2 slechts zeer weinig (in vergelijking van de afmetingen dier deelen) uiteenliggen, kunnen wij den overgang van het eene hoofdpaar tot het andere als oneindig klein beschouwen.

Het verdient nog opmerking, dat de snijlijn van S_1 en S_2 loodrecht op het vlak EPF staat; derhalve verplaatst zich bij den overgang van het eene hoofdpaar tot het andere, wanneer aan het eerste criterium van SOHNCKE en WANGERIN voldaan is, het punt P in een richting loodrecht op het vlak EPF .

Wij zien nu van de dikte der glasplaat af, zoodat de eerste weg, dien de stralen volgen, eenvoudig een terugkaatsing aan een meetkundig plat vlak wordt. Wij duiden

stralen, die op deze eerste wijze in een punt Q komen, aan door den index 1, stralen, die door het boloppervlak (zooals bij de ringen van Newton) teruggekaatst worden, door den index 2, teruggekaatste stralen door latijnsche, de invallende stralen, waaruit ze ontstaan, door grieksche letters.

Zij nu (zie fig. 12) LM de as van het waarnemingsinstrument en Q een punt daarop, dat aan het eerste criterium van SOHNCKE en WANGERIN voldoet. Langs de as LQ loopen twee stralen, die elk tot een hoofdpaar behooren. Wij noemen deze a_1 en a_2 , en den straal, die met a_2 een hoofdpaar vormt, b_1 ; de invallende stralen, waaruit deze drie ontstaan, α_1 , α_2 en β_1 . De stralen α_2 en β_1 zijn van een zelfde punt van de lichtbron afkomstig en komen dus b. v. overeen met PE en PF in fig. 4.



Fig. 12.

Daar wij de lichtbron als ver verwijderd aanmerken, kunnen wij zeggen, dat α_2 en β_1 evenwijdig aan elkaar zijn.

Verder gaan α_1 en β_1 door het spiegelbeeld van Q met betrekking tot het reflecteerende platte vlak.

Zij Q' een punt, dat een weinig verder op LM ligt. In dat punt komt de straal a_2 , die uit α_2 afkomstig is; verder

is er onder al de in de richting van α_2 invallende stralen één te vinden, die op de eerste wijze loopende in Q' komt. Zij die straal γ_1 en de in Q' komende straal, die er uit ontstaat, c_1' .

Daar zoowel α_1 als c_1 in het punt Q' komen, moeten α_1 en γ_1 elkaar in het spiegelbeeld van Q' ten opzichte van het reflecteerende vlak snijden.

Het blijkt dus, dat α_1 gesneden wordt zoowel door β_1 als door γ_1 . Maar β_1 en γ_1 zijn beide evenwijdig aan α_2 . Dus ligt γ_1 in het vlak, dat door α_1 en β_1 gebracht wordt.

Zooals werd opgemerkt, komen de stralen α_2 en β_1 met PE en PF in fig. 4 overeen;

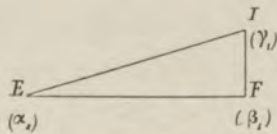


Fig. 13.

zij loopen naar het ver verwijderde punt P . De straal α_1 , tot het andere hoofdpaar behoorende, moet loopen naar een punt, dat men krijgt door P

loodrecht op het vlak (α_2, β_1) te verplaatsen; derhalve staat het vlak (α_1, β_1) of, wat hetzelfde is, het vlak (γ_1, β_1) loodrecht op het vlak (α_2, β_1) .

De drie stralen α_2 , β_1 en γ_1 zijn evenwijdig. Stel, dat zij loodrecht op het vlak der tekening staan (zie fig. 13) en dit in E , F en I snijden, dan is $\angle EFI = 90^\circ$, dus $EI > EF$.

Nu zijn α_2 en β_1 twee lichtstralen van dezelfde richting, die in Q komen, α_2 en γ_1 lichtstralen van dezelfde richting, die in Q' komen; door aan te toonen, dat $EF < EI$, hebben

wij dus bewezen, dat een punt, dat aan het eerste criterium van SOHNCKE en WANGERIN voldoet, tevens aan ons, dus ook aan hun tweede criterium voldoet.

Wanneer men de dikte der glasplaat in aanmerking neemt, is de zaak niet zoo eenvoudig, maar toch is het bovenstaande wel voldoende om te doen inzien, dat de twee criteria op hetzelfde kunnen neerkomen.

HOOFDSTUK VII.

Verdere beschouwingen.

§ 24. Het is de moeite waard uit te rekenen, of inderdaad de werkzame deelen der oppervlakken S_1 en S_2 niet noemenswaard ten opzichte van elkaar verschoven zijn.

Wanneer het punt Q aan ons criterium, dus ook aan dat van SOHNCKE en WANGERIN voldoet, is de verschuiving $M_1 M_2$ (zie fig. 11a en fig. 11b) in de richting der snijlijn AB van S_1 en S_2 , zoodat men iets verkrijgt als in fig. 11b. Het inderdaad werkzame deel der lichtbron, dat aan de interferentie deelneemt, beantwoordt aan het deel der figuur, dat door arceeringen is aangegeven. Dit strekt zich steeds aan weerszijden van AB uit tot een afstand, die evenredig is met den afstand EP in fig. 4, zoodat onze beschouwingen nog geen verandering ondergaan. [Ook met fig. 11a zou dit het geval zijn.]

Maar nu zou wellicht het uiteenschuiven der werkzame deelen wel eens zoo ver kunnen gaan, dat de cirkels geheel

buiten elkaar vielen; dan zou er geen interferentie meer te zien zijn. En vallen de middelpunten der cirkels, zooals in fig. 11b, reeds op aanmerkelijken afstand van elkaar, dan ziet men het interferentie-verschijnsel minder duidelijk en wel omdat over het interferentie-beeld het uniform verdeelde licht verspreid is, dat van de sikkelvormige deelen afkomstig is. Deze omstandigheid nu zou kunnen maken, dat onze beschouwingen in de §§ 18 en 20 eenigszins gewijzigd moesten worden.

Bij een gegeven stand der as van het waarnemings-instrument zijn de punten M_1 en M_2 bepaald. Hoe groot de cirkels dan zijn, dus hoe ver zij over elkaar vallen, hangt verder van de opening van het instrument, gezien van uit het punt Q, af.

Nu geven ongelukkigerwijze SOHNCKE en WANGERIN in hunne uitvoerige onderzoekingen over de Newtonsche ringen in *Wied. Ann.* Bd XII niet de afmetingen op, die men noodig heeft om deze laatste grootheid te berekenen. Zij zeggen van het microscoop alleen, dat het een 25voudige vergrooting gaf. Nu hebben zij bij hunne onderzoekingen in *Wied. Ann.* Bd. XX ook een microscoop gebruikt van dezelfde vergrooting. Mocht dit microscoop hetzelfde zijn geweest als het eerste, dan vinden wij op blz. 423 voor de tangens van de halve opening φ_1 :

$$\frac{2,5}{21,75} = \frac{1}{8,7}$$

en dit getal mogen wij nu ook wel nemen voor den schijn-

baren straal der cirkels M_1 en M_2 , gezien van uit het punt E in fig. 4.

Wat den schijnbaren afstand der punten M_1 en M_2 , gezien van uit hetzelfde punt E, betreft, om dezen te vinden, zouden wij moeten bepalen de richting $-a$, $-b$, $-c$ van een op de inrichting invallenden straal, die, na op het lensoppervlak gereflecteerd te zijn, ten slotte in Q (fig. 8) $-\alpha$, $+\gamma$ tot richtingscosinussen heeft. Die richting wordt ons geleverd door dergelijke formules als de vergelijkingen (A) in § 13. De hoek, dien de invallende stralen $(-\alpha, -\gamma)$ en $(-a, -b, -c)$ met elkaar maken, is dan de gezochte hoek. Doch men gevoelt wel (en de berekening leert ook, dat het geoorloofd is), dat wij hiervoor kunnen nemen den hoek, dien de richtingen $(-\alpha, +\gamma)$ en $(-\alpha', -\beta', +\gamma')$ in fig. 8 met elkaar vormen. Noemen wij dien hoek δ , dan is:

$$\cos \delta = \alpha \alpha' + \gamma \gamma'.$$

Hierin de uitdrukkingen (A) voor α' en γ' in § 13 substitueerende, vindt men:

$$\cos \delta = 1 - \frac{1}{2} (2 \varphi \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 \cos^2 \psi})^2,$$

dus:

$$\sin \delta = \delta = 2 \varphi \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 \cos^2 \psi}.$$

Hierin kunnen wij nu wel

$$\varphi \cos \psi = \frac{x}{r} \quad \varphi \sin \psi = \frac{y}{r}$$

(zie blz. 23 en 25) stellen, en dan wordt δ bij elke ge-

geven instelling van het microscoop gemakkelijk gevonden *). Bij bepaalde α , γ en φ is δ blijkbaar het grootst, zoo $\psi = 0^\circ$, dus:

$$\varphi = \frac{x}{r}, \quad y = 0 \quad \text{en} \quad \delta = 2 \cdot \frac{x}{r};$$

terwijl δ het kleinst is, zoo $\psi = 90^\circ$, dus:

$$x = 0, \quad \varphi = \frac{y}{r} \quad \text{en} \quad \delta = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \cos \vartheta.$$

De schijnbare afstand der punten M_1 en M_2 is dus in het centrale invalsvlak grooter dan in het loodrecht daarop staande „centrale dwarsvlak.”

Nemen wij b. v. de waarnemingen op blz. 25 in *Wied. Ann.* Bd. XII, dan bedroeg de grootste waarde van x 15 mM. Nu was $r = 2100$ mM, dus in het eene geval:

*) De bovenbedoelde formules, overeenkomende met de vergelijkingen (A) in § 13 zijn:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 2 U' \sin \varphi' \cos \psi', \\ b &= 2 U' \sin \varphi' \sin \psi', \\ c &= -\gamma + 2 U' \cos \varphi', \\ U' &= -\alpha \sin \varphi' \cos \psi' + \gamma \cos \varphi'. \end{aligned}$$

φ' , ψ' zijn hier de spherische coördinaten van een punt C' op het lensoppervlak in fig. 8, zoodanig gelegen, dat een straal, in dit punt op het oppervlak vallende, na reflectie de richting $-\alpha$, $+\gamma$ heeft en door A gaat.

Men vindt dan voor den hoek δ' tusschen $(-\alpha, -\gamma)$ en $(-\alpha, -b, -c)$:

$$\sin \delta' = \delta' = 2 \varphi' \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 \cos^2 \psi'}.$$

Daar nu $\varphi' \cos \psi'$ en $\varphi' \sin \psi'$ met grootheden van hoogere orde verschillen van $\varphi \cos \psi$ en $\varphi \sin \psi$, zoo mogen wij voor ons doel schrijven:

$$\delta' = \delta.$$

$$\delta = 2 \cdot \frac{15}{2100} = \frac{1}{70}.$$

De grootste waarde voor y bedroeg 7,5 mM, dus in het andere geval:

$$\delta = 2 \cdot \frac{7,5}{2100} \cos 54 \frac{3}{4}^\circ = \frac{1}{243}.$$

In het eerste geval bedroeg dan:

$$\frac{\delta}{\varphi_1} = \frac{1}{70} : \frac{1}{8,7} = \frac{1}{8}$$

en in het tweede:

$$\frac{\delta}{\varphi_1} = \frac{1}{243} : \frac{1}{8,7} = \frac{1}{28}.$$

Men ziet dus, dat het sneller afnemen van de duidelijkheid der interferenties in de dwarsrichting dan in de hoofdrichting *niet* het gevolg kan geweest zijn van de verschuiving ten opzichte van elkander der werkzame deelen van de vlakken S_1 en S_2 . Veeleer zou door deze verschuiving het omgekeerde moeten plaats hebben. Hier komt nog bij, dat het wel kan zijn en, zooals we straks zullen zien, zelfs zeer waarschijnlijk is, dat de halve opening van het verlichtingsapparaat, gezien van uit E , niet eens $\frac{1}{8,7}$ heeft bedragen. Wij kunnen dit niet met volkomen juistheid beoordeelen, daar SOHNCKE en WANGERIN den afstand EP niet opgeven. Mocht het zoo zijn, dan hebben er waarschijnlijk *geen* deelen der vlakken S_1 en S_2 bestaan, die niet aan de interferentie deelnamen. Wij kunnen dus gerust onze beschouwingen in de §§ 18 en 20 onveranderd laten.

Toch is het niet geheel juist, indien SOHNCKE en WANGERIN beweren, dat het verschil tusschen de vlakjes F en F_1 een grootheid van *hooger* orde is.

§ 25. De opmerking van SOHNCKE en WANGERIN in *Wied. Ann.* Bd. XX, p. 186, dat de functie

$$\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$$

behalve voor $u_1 = 0$ nog vele andere (zwakkere) maxima heeft, geeft nog tot eene interessante beschouwing aanleiding.

Om die duidelijk te maken, nemen wij een eenvoudig interferentie-verschijnsel, zooals de spiegelproef van Fresnel. Laat L_1 en L_2 de twee gelijke virtueele lichtbronnen hierbij zijn, A het midden van $L_1 L_2$, S het scherm, O het midden van het verschijnsel, dus $AO \perp L_1 L_2$, terwijl P in S op een afstand x van O ligt. Stel verder $AO = l$, $L_1 A = b$, dan vindt men gemakkelijk:

$$L_1 P - L_2 P = \frac{2 b x}{l}.$$

De intensiteit in P is dan:

$$i = m \cos^2 \left(\frac{2 b}{l \lambda} \pi x \right),$$

waarin m van de intensiteit van L_1 en L_2 afhangt.

Stel, dat wij L_1, L_2 met behoud van hun onderlingen afstand een eind ξ in de richting der positieve x ver-

schuiven, dan moeten wij in de uitdrukking voor i x door $(x - \xi)$ vervangen en wordt de intensiteit in P:

$$i' = m \cos^2 \left\{ \frac{2b}{l\lambda} \pi (x - \xi) \right\}.$$

Laat nu de proef genomen worden met een breede spleet als lichtbron, waarvan $R_1 S_1$ en $R_2 S_2$ de virtueele beelden zijn. Die beelden zouden wel over elkander kunnen vallen. Beschouw twee bij elkaar behoorende elementen $d\xi$, beide op een afstand ξ van de middens L_1 en L_2 resp. van $R_1 S_1$ en $R_2 S_2$ gelegen. Voor de lichtsterkte, die deze in P geven, vindt men, als men in de uitdrukking voor i' m door $m d\xi$ vervangt:

$$m \cos^2 \left\{ \frac{2b}{l\lambda} \pi (x - \xi) \right\} d\xi.$$

De totale lichtsterkte in P is dus, $R_1 S_1 = R_2 S_2 = 2p$ stellende:

$$\begin{aligned} I &= m \int_{-p}^{+p} \cos^2 \left\{ \frac{2b}{l\lambda} \pi (x - \xi) \right\} d\xi = \\ &= m p + \frac{l\lambda}{4b\pi} m \sin \frac{4b\pi p}{l\lambda} \cos \frac{4b\pi x}{l\lambda}. \quad (18). \end{aligned}$$

De lichtsterkte wisselt dus nog altijd met x . Stelt $\left[\sin \frac{4b}{l\lambda} \pi p \right]$ de absolute waarde van den ingesloten sinus voor, dan is de grootste waarde van I, als men $\frac{l\lambda}{4b\pi} = \alpha$ stelt:

$$I_{\max} = m \left\{ p + \alpha \left[\sin \frac{p}{\alpha} \right] \right\}$$

en de kleinste:

$$I_{\min} = m \left\{ p - \alpha \left[\sin \frac{p}{\alpha} \right] \right\};$$

alzo de verhouding:

$$k = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + \frac{\alpha}{p} \left[\sin \frac{p}{\alpha} \right]}{1 - \frac{\alpha}{p} \left[\sin \frac{p}{\alpha} \right]}. \quad \dots \quad (19).$$

Zij bepaalt de „zichtbaarheid” der interferentie-strepen. Voor p zeer klein is k zeer groot; de minima zijn dan nagenoeg donker. Wordt p grooter, dan neemt de zichtbaarheid af. Maar het eigenaardige is, dat op dit afnemen weer een toenemen volgt; immers voor $p = \pi \alpha$, is $k = 1$, dus de lichtsterkte der maxima gelijk aan die der minima, maar daarna wordt weer $k > 1$. Men ziet het ook aan (18).

Voor $p = \frac{l\lambda}{4b}$ is overal $I = mp$ (uniforme verlichting), maar voor grootere breedte der lichtbron komt de afhankelijkheid van x weer te voorschijn. De strepen verdwijnen weer voor $p = 2\pi\alpha$, komen weer voor den dag enz.; alleen bij elke nieuwe verschijning zijn zij weer flauwer.

Dergelijke beschouwingen, experimenteel bevestigd, geeft A. A. MICHELSON in *Phil. Mag.* Vol. XXX, 5th ser. p. 1: On the application of Interference-Methods to Astronomical Measurements; Vol. XXXI, 5th ser. p. 256: Visibility of Interference-Fringes in the Focus of a Telescope; Vol. XXXI, 5th ser. p. 338, Vol. XXXIV, 5th ser. p. 280:

On the application of Interference-Methods to spectroscopic Measurements.

Bovenstaande beschouwing is ook wel elementair in te kleeden. Stellen wij ons daartoe voor evenwijdige lijnen a, b, c, d enz. op onderling gelijke afstanden in een plat vlak gelegen en dat de lichtbron langs dit vlak valt. Laat nu bij de breedte ac der lichtbron het interferentie-verschijnsel verdwijnen; dit komt, doordat de eene helft ab licht geeft, waar de andere bc duisternis voortbrengt. Voeg nu nog bij de lichtbron een deel $cd = ab$, dan zal dit nieuwe deel interferentie-strepen geven, die men zal zien op het uniform verlichte veld, dat ac geeft; enz.

Zoo iets geldt nu in alle gevallen, en daarmede in verband staan de verdere maxima van:

$$\frac{2 J_1(u_1)}{u_1}$$

M. a. w. om nog weer tot fig. 4 terug te keeren, wanneer wij uitgaan van het geval, dat DG zoo klein mogelijk is, en dan door wijziging der omstandigheden DG geleidelijk vergrooten, zal er een oogenblik komen, waarop de strepen geheel zijn verdwenen, maar bij verdere vergrooing zullen zij weer te voorschijn komen.

Daar echter de werkzame deelen der vlakken S_1 en S_2 cirkels zijn, kunnen wij niet zulk een eenvoudige elementaire interpretatie van het verschijnsel geven als boven bij de spiegelproef van Fresnel. Wij zullen ons

daarom aan de beschouwing der functie $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ houden.

§ 26. Zooals SOHNCKE en WANGERIN meedeelen, worden de maxima van de functie $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ steeds kleiner; deze maxima heeft men voor waarden van u_1 , die gelijk zijn aan 0, 8,4, terwijl de volgende telkens ongeveer 2π grooter worden.

Nu is:

$$\varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{u_1}{\frac{2 \pi}{\lambda}}$$

$\varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2}$ stelt de lijn DG en $\sqrt{B^2 + C^2}$ de lijn EF voor (zie fig. 4). Stel nu, dat wij het microscoop in de behoorlijke richting hebben ingesteld op een punt van het interferentie-vlak. Daar nu een duidelijke interferentie eischt, dat $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ een maximum is, kunnen wij andere, ofschoon zwakkere, interferenties verkrijgen, door òf met behoud van dezelfde instelling van het microscoop de opening van dit instrument te vergrooten, òf zonder vergrooting der opening het microscoop in de richting zijner as te verschuiven. Wij zullen alleen het laatste doen.

De absoluut grootste waarde heeft de functie $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ voor $u_1 = 0$, dat is dus, zoo

$$\sqrt{B^2 + C^2} = 0.$$

Dit stemt met ons resultaat overeen, dat de interferentie dan het allerduidelijkst is, zoo $DG = 0$, dus $EF = 0$. Dit verschijnsel nu heeft men in het interferentievlak bij de ringen van Newton volkomen in het centrale invalsvlak en buiten dit vlak heeft men het bijna, zoo DG en dus EF maar zeer weinig van 0 verschillen.

Het volgende maximum heeft men bij $u_1 = 8,4$. Dan is:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2} &= \frac{8,4}{\frac{2\pi}{\lambda}} \\ &= \frac{4}{3} \lambda. \end{aligned}$$

In en buiten het centrale invalsvlak zal dus het tweede (flauwere) maximum van duidelijkheid der interferenties plaats hebben, zoo

$$D = EF = \frac{\frac{4}{3} \lambda}{\varphi_1}.$$

In het centraal invalsvlak heeft men volgens (7):

$$\pm r D = x^2 \sin \vartheta - 2 x z,$$

dus:

$$z = \frac{1}{2} x \sin \vartheta \pm \frac{\frac{4}{3} \lambda r}{2 x \varphi_1}$$

Daar nu

$$z = \frac{1}{2} x \sin \vartheta$$

de vergelijking der hoofdrechte is, zoo zal dus de verschuiving van het microscoop in de richting zijner as gelijk moeten zijn aan

$$\frac{\frac{4}{3} \lambda r}{2 x \varphi_1}.$$

Neemt men $\lambda = 0,000589$ mM, $r = 2100$ mM en $\varphi_1 = \frac{1}{8,7}$ (?), dan wordt deze verschuiving $\frac{7,17}{x}$ mM. Nemen wij nu een waarneming, die voor $x = 7$ mM verricht werd, en dit is wel zoo ongeveer de gemiddelde afstand van het centrum, waarop die waarnemingen verricht werden, dan krijgt men voor die verschuiving ongeveer 1 mM. Voor kleinere φ_1 of wanneer de verlichtingscirkel (d. i. de opening van het verlichtingsapparaat) binnen de cirkels M_1 en M_2 (fig. 11b) is gevallen, moest de verschuiving grooter zijn geweest.

Om ons een oordeel te vormen over de verschuiving buiten het centrale invalsvlak, vragen wij eens naar de grootte van D in de dwarsrechte. Voor punten van deze lijn is

$$D = \frac{y^2 \sin \vartheta}{r}$$

(zie blz. 33). Nemen wij $\vartheta = 54\frac{3}{4}^\circ$, $r = 2100$ mM en $y = 5$ mM, dan vindt men $D = 0,0097$ mM. Nu heeft het tweede maximum plaats voor

$$D = \frac{\frac{4}{3} \lambda}{\varphi_1} = 0,0068 \text{ mM,}$$

zoo $\varphi_1 = \frac{1}{8,7}$. Daar nu $0,0097 > 0,0068$, is er dus geen sprake van, dat men het tweede maximum door verschuiving van het microscoop zou kunnen bereiken. $D = 0,0097$ mM zal veeleer dicht bij een verder maximum plaats hebben.

Deze maxima zal men hebben bij waarden van D , die ongeveer $\frac{\lambda}{q_1}$ verschillen. De verschuiving, noodig om het derde maximum, d. i. voor $D = \frac{7}{3} \frac{\lambda}{q_1} = 0,0119 \text{ mM}$, te verkrijgen, zou dan volgens (10) gelijk zijn aan:

$$z + z_1 = \frac{\pm \sqrt{r^2 D^2 - y^4 \sin^2 \vartheta}}{2 y \cos \vartheta} = \pm 2,5 \text{ mM.}$$

Uit deze beschouwingen zou volgen, dat, moest $q_1 = \frac{1}{8,7}$ genomen worden, SOHNCKE en WANGERIN bij hunne experimenteele onderzoekingen over de ringen van Newton op de dwarsrechte niet eens in de buurt van $u_1 = 0$ zijn gekomen. Dan zou men ook niet op de kleinste waarde van u_1 , maar op het maximum der laagste orde van de functie $\frac{2 \mathcal{J}_1(u_1)}{u_1}$ hebben ingesteld. Doch dan zou het verschil van de door hen waargenomen en berekende waarden van z niet bijna overal minder dan 1 mM hebben bedragen, maar grootten hebben gehad als b.v. bovenstaande 2,5 mM. En er is nog meer. Het bovenstaande dubbele teeken wijst er op, dat er twee plaatsen in de richting der Z-as beide het meest en *even* duidelijk en soms op aanmerkelijken afstand van elkaar zouden geweest zijn. Nu komt het mij voor, dat de experimentator dit toch wel bemerkte zou hebben. Doch hiervan leest men nu juist niet.

Dit alles wijst er op, dat q_1 zeker kleiner is geweest

dan $\frac{1}{8,7}$, d. w. z., dat òf de halve opening van het microscoop, gezien van uit het beschouwde punt Q, òf wat mij naar de latere waarnemingen (zie *Wied. Ann.* Bd. XX, p. 423) het meest waarschijnlijk voorkomt, de halve opening van het verlichtingsapparaat, gezien van uit het punt E, in fig. 4 kleiner is geweest. Dan kunnen de meeste waarnemingen wel in de buurt van $u_1 = 0$ hebben plaats gehad.

Het komt mij intusschen voor, dat de uitspraak in *Wied. Ann.* Bd. XII, p. 24, „dat men soms den indruk krijgt, dat de onbepaaldheid der ringen door het gelijktijdig optreden van verscheidene zich kruisende ringsystemen veroorzaakt wordt,” wellicht in beschouwingen als bovenstaande haar verklaring kan vinden.

SOHNCKE en WANGERIN deelen in *Wied. Ann.* Bd. XII, p. 12 mede, dat men met het ongewapend oog en met een verrekijker meer ringen in de dwarsrichting ziet dan met een microscoop. Het komt mij voor, dat dit komt, doordat bij het ongewapend oog de werkzame deelen der vlakken S_1 en S_2 kleiner zijn dan bij het microscoop, ja waarschijnlijk kleiner zijn geweest dan de verlichtingscirkel. Daardoor wordt ook DG kleiner en wij weten, dat een duidelijk zichtbare interferentie vereischt, dat DG klein is.

HOOFDSTUK VIII.

Over eenige andere verschijnselen.

§ 27. In *Wied. Ann.* Bd. XXIII, p. 49 heeft LUMMER een verhandeling gepubliceerd onder den titel: Ueber eine neue Interferenzerscheinung an planparallelen Glasplatten und eine Methode, die Planparallelität solcher Gläser zu prüfen. Het verschijnsel, hierin behandeld, is in 't kort dit:

Het door een natriumvlam uitgezonden licht wordt door een oogspiegel zoo op een goede planparallele glasplaat geworpen, dat het door deze gereflecteerd door de opening van den oogspiegel in het daarachter geplaatste oog komt. Is het oog op oneindig geaccommodeerd, dan zal het het onduidelijke beeld der opening door een groot aantal prachtige afwisselend lichte en donkere ringen omgeven zien. In plaats van het oog kan ook een op oneindig ingestelde verrekijker gebruikt worden, door welks oculair de in het focale vlak van het objectief zich bevindende ringen vergroot gezien worden. Verder kan de oogspiegel ook door

een vlakken, zelfs doorzichtigen glasspiegel vervangen worden, welke toelaat het midden van het ringsysteem te zien en het oog veroorlooft zich te bewegen. Verdere bijzonderheden doen voor ons doel niet ter zake.

LUMMER geeft van dit verschijnsel de volgende verklaring:

Zij SF de as van de lens L (zie fig. 14), waarvan het brandpunt in F ligt; loodrecht daarop staat de planparal-

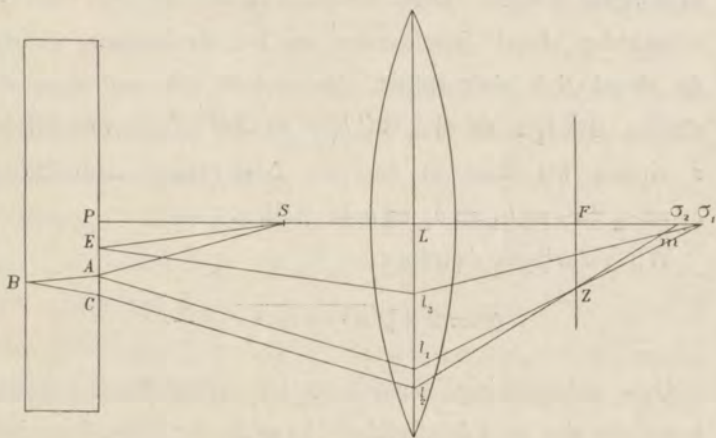


Fig. 14.

lelle plaat P . Een in S zich bevindend lichtend punt zendt b.v. een straal SEl_3m uit, die aan de voorzijde van de plaat gereflecteerd is en een straal $SABC l_2m$, die aan de achterzijde teruggekaatst is. Men kan dan het optisch wegverschil van beide stralen berekenen, waarvoor hij vindt:

$$\Delta = 2d \operatorname{tg} b_2 \cos e_1 - \frac{2nd}{\cos b_2} - E(\sin e_1 - \sin e_2)^2 - \frac{\lambda}{2},$$

waarin e_1, e_2, b_1, b_2 inval- en brekingshoeken der stralen

SE en SA voorstellen, d de dikte der plaat, n haar brekingsindex en E de afstand PS is.

In deze vergelijking zijn E, d en n constanten. Het phase-verschil in m hangt dus slechts af van e_1, e_2, b_1, b_2 , voor dit bepaalde stralenpaar. Van zulke stralenparen vormen die een bepaalde klasse, waarvan de stralen, die tot zoo'n paar behooren, vóór het vallen op de lens aan elkander evenwijdig loopen. Deze ontstaan ieder uit één van S uitgaanden straal. Beschouwen wij het stralenpaar, waarin de straal SA zich splitst. Dit wordt gevormd door de stralen $SA l_1 z$ en $SABC l_2 z$ en het phase-verschil in z vinden wij door in de voor Δ gevonden uitdrukking $e_1 = e_2 = e$ en $b_1 = b_2 = b$ te stellen.

Wij verkrijgen daardoor:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \frac{\lambda}{2}.$$

Deze uitdrukking, die ook zonder verwaarloozing geldt, kenmerkt zich door de afwezigheid van E, den afstand van het lichtende punt. Zooals we gezien hebben, hangt het phase-verschil in een willekeurig snijpunt van een stralenpaar slechts af van de invalshoeken der stralen, die dit paar vormen. Nemen wij nu aan, dat de in m en z elkaar snijdende stralen duisternis voortbrachten, dan komen met deze donkere plaatsen in het vlak der figuur twee donkere cirkels in de ruimte overeen, welke cirkels door de punten m en z bij wenteling van fig. 14 om de as der lens L worden beschreven. Er zullen dus, wanneer eenmaal

interferenties optreden, cirkels moeten ontstaan in vlakken, die loodrecht op $F \sigma_2$ staan.

In werkelijkheid heeft men nu niet met lichtende punten, maar met lichtbronnen te doen, die als uit oneindig vele lichtende punten bestaande moeten worden gedacht. Men kan dan vooreerst het geval beschouwen, dat een evenwijdig aan de plaat staand lichtend vlak aanwezig is.

De loodrechte afstand zij weer E . Nu gaan van elk punt oneindig veel stralenparen naar de lens. Met elk lichtend punt correspondeert een kegel achter het focale vlak, waarbinnen alle snijpunten dier stralenparen gelegen zijn. Die kegels zullen, als van verschillende punten afkomstig, gedeeltelijk door elkander liggen. In punten als z en m komen dus tegelijk een groot aantal stralenparen, afkomstig van verschillende lichtende punten. Daar nu E voor alle lichtende punten hetzelfde is, zoo zullen stralenparen, waarvoor e_1 en e_2 dezelfde waarden hebben, in hun snijpunt dezelfde helderheid geven. Gaan we na, of stralenparen van deze eigenschap zich in hetzelfde punt en in wat voor een punt kunnen snijden. Bekend is, dat alle stralen, die vóór de lens evenwijdig loopen, achter de lens in een punt van het focale vlak vereenigd worden. Daaruit volgt van zelf, dat in punten als m alleen stralenparen elkander kunnen snijden, waarvan de gezamenlijke stralen in onderling verschillende richtingen naar de lens zijn gegaan. Hieruit volgt dus, dat de wegverschillen van die paren ook onderling moeten verschillen. Een lichtend vlak, als

aangenomen is, brengt dus in alle punten buiten het focale vlak een gelijkmatige helderheid teweeg, desgelijks dus een lichtbron, die als uit een oneindig aantal lichtende vlakken bestaande kan gedacht worden.

Anders is het met punten van het focale vlak. In een punt van dit vlak vereenigen zich slechts stralen, waarvoor $e_1 = e_2 = e$ is, en daar het phase-verschil voor een zoodanig punt onafhankelijk van E is, zal de geheele lichtbron in dit punt dezelfde helderheid teweeg brengen.

Interferentie-verschijnselen heeft men dus alleen in het focale vlak, daarbuiten niet, en hiermede heeft LUMMER de zaak verklaard.

Deze verklaring is tamelijk omslachtig. Met de door ons in hoofdstuk I ontwikkelde theorie is het verschijnsel terstond verklaard. Volkomen duidelijk toch zal men in een punt een interferentie-verschijnsel waarnemen, indien de beide stralen, die met elkander interfereeren, in een punt voor de lichtbron hetzelfde golfvront hebben, d. w. z. wanneer de normalen van hunne golfvronten samenvallen. Nu splitst zich een straal, langs deze normaal gaande, bij een planparallele plaat in twee stralen, die van deze plaat af evenwijdig loopen. Wij komen dus te verkeerren in het geval van § 9 van hoofdstuk I, en derhalve zal men het interferentie-verschijnsel het duidelijkst zien in het focale vlak eener lens, d. i. dus òf in 't focale vlak van 't objectief van een kijker, òf in 't netvlies van een oog, dat op oneindigen afstand geaccommodeerd is.

Hiermede wordt de afleiding van het optisch wegverschil in een punt als m overbodig. Wij hebben dit nu alleen in een punt als z te kennen. En voor dit geval kan men de formule:

$$\Delta = 2 d \sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \frac{\lambda}{2}$$

gemakkelijk vinden.

§ 28. Bij het volgende drietal verschijnselen kunnen we kort zijn. Zij treden op bij een toestel van LUMMER (Ueber die Theorie und Gestalt neu beobachteter Interferenzcurven, *Wied. Ann.* XXIV, p. 417), den interferentiaalrefractor van JAMIN en een toestel van A. A. MICHELSON (*American Journ. of Science* 3^d Ser. Vol. XXII, p. 120 of zie ook: H. A. LORENTZ, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux in de *Archives Néerlandaises*, tome XXI, p. 165). Bij deze toestellen heeft men te doen met platte oppervlakken, waarvan wij mogen aannemen, dat zij alle loodrecht op een zelfde (horizontaal) vlak staan. Wij bepalen ons verder tot lichtstralen, die in dit laatste vlak loopen.

De toestel van LUMMER (fig. 15) bestaat uit twee even dikke planparallele platen d_1 en d_2 , die een zekeren hoek met elkaar maken. Een invallende lichtstraal P A splitst zich ten slotte in de stralen 1, 2, 3 en 4, die evenwijdig zijn. Interferenties kunnen dus het duidelijkst plaats hebben in het focale vlak eener lens. De stralen 2 en 3 inter-

fereeren bij monochromatisch licht op het netvlies van een op oneindigen afstand geaccommodeerd oog of in het focale vlak van het objectief van een op oneindig ingestelden verrekijker; de stralen 1 en 4 interfereeren ook bij wit licht.

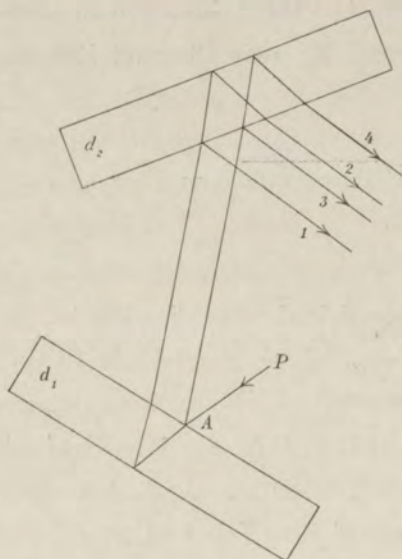


Fig. 15.

Veel overeenkomst met den toestel van LUMMER vertoont de interferentiaal refractor van JAMIN (fig. 16), met dit onderscheid, dat de platen d_1 en d_2 een

zeer kleinen hoek met elkander maken. Een straal P A

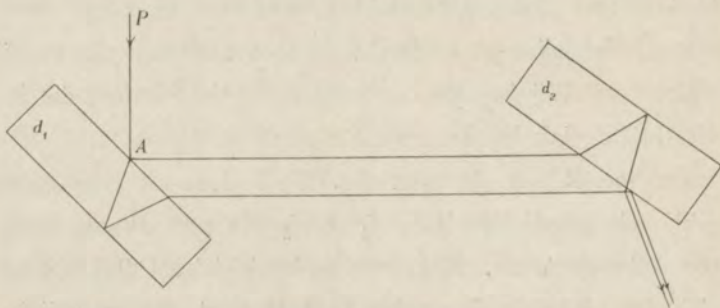


Fig. 16.

splijst zich ten slotte in twee evenwijdige stralen, die op

overeenkomstige wijze door den toestel gegaan zijn als de stralen 1 en 4 in fig. 15. Ook hier kan men de beste interferenties hebben in het focale vlak eener lens, als nl. elke plaat planparallel is.

De toestel van MICHELSON (fig. 17) bestaat uit twee even dikke evenwijdig geplaatste planparallele platen d_1 en d_2 en twee zilverspiegels R_1 en R_2 . Deze staan loodrecht op de stralen, die

er op vallen. Een invalende straal PA splitst zich in B in twee stralen, die aldus loopen: de een langs $BCDCBQ$ en de ander langs $BEFGFEQBQ$. Ook hier heeft men, als de spiegels R_1 en R_2 vol-

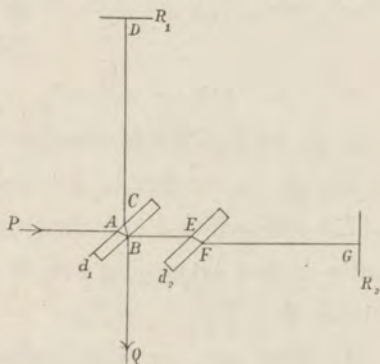


Fig. 17.

komen loodrecht op de stralen staan, de duidelijkste interferenties in het focale vlak eener lens.

§ 29. In *Wied. Ann.* Bd. XXIII p. 513 behandelt LUMMER onder den titel „Ueber eine neue Interferenzerscheinung” het volgende verschijnsel.

De van een lichtbron S afkomstige stralen (zie fig. 18) laat men door een glasplaat g naar een planparallele glasplaat P reflecteeren. Deze reflecteert de stralen weder naar de achromatische lens L van tamelijk grooten brandpuntsafstand (20—50 cM.). In de lens L gebroken, gaan

de stralen verder tot aan den zilverspiegel R, die loodrecht op de optische as van de lens staat. Vervolgens worden zij naar L teruggekaatst en bereiken na den doorgang

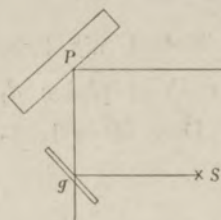


Fig. 18.

door L weder de plaat P, waar zij deels gereflecteerd, deels doorgelaten worden. Beschouwen we het eerste, daar het hierbij optredend verschijnsel het fraaist is, dan komen de

door P teruggekaatste stralen weder naar *g* terug, gaan door *g* en komen dan in het zich achter *g* bevindende oog. Is dit behoorlijk geaccommodeerd, dan ziet men interferentie-strepen evenwijdig aan de doorsnede van plaat P en spiegel R.

De loop van een invallenden straal SA kan het ge-

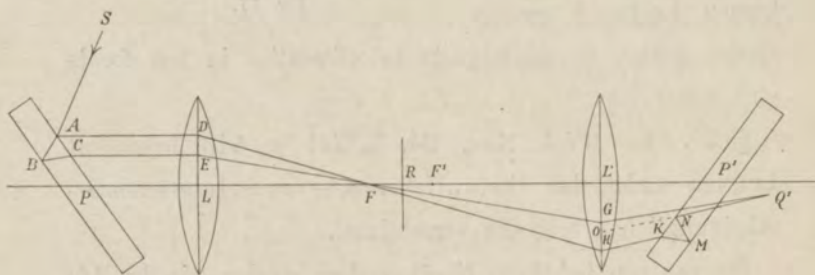


Fig. 19.

makkelijkst worden voorgesteld als in fig. 19. De straal SA valt zoo in, dat de gereflecteerde straal AD evenwijdig aan de as van de lens L loopt. Zij F het tweede

brandpunt der lens L en laten L' en P' de spiegelbeelden zijn van L en P ten opzichte van den zilverpiegel R , terwijl Q' het spiegelbeeld is van een punt Q ten opzichte van het voorvlak van P' , dan volgt de gereflecteerde straal AD den weg $ADFHKMNQ'$, terwijl de gebroken straal AB den weg $ABCEFGQ'$ volgt.

Wij zullen nu de plaats van Q' nader bepalen. Zij φ de hoek, dien de normaal op P met de as der lens maakt, dan vindt men gemakkelijk: —

$$DE = \frac{d \sin 2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}},$$

zoo n de brekings-exponent der plaat P is. Stellen wij verder $LF = f$ en $FR = a$, dan is:

$$GH = \frac{f + 2a}{f} \cdot \frac{d \sin 2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Zij O het snijpunt van $Q'N$ (verlengd) met GH en noemen wij de hoeken, die GQ' en OQ' met de as LL' vormen, resp. ε_1 en ε_2 , dan is:

$$OH = \frac{d \sin 2 (\varphi + \varepsilon_2)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 (\varphi + \varepsilon_2)} \cdot \cos \varepsilon_2},$$

dus

$$OG = \frac{f + 2a}{f} \cdot \frac{d \sin 2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} - \frac{d \sin 2 (\varphi + \varepsilon_2)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 (\varphi + \varepsilon_2)} \cdot \cos \varepsilon_2}.$$

Noemt men den afstand tot L' , waarop de stralen GQ' en HK de as LL' achter L' snijden q , dan is:

$$q = \frac{f(f + 2a)}{2a},$$

en daar

$$L'G = \frac{f + 2a}{f} \cdot LE,$$

$$L'H = \frac{f + 2a}{f} \cdot LD,$$

zoo vindt men:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{2a}{f^2} \cdot LE,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{2a}{f^2} \cdot LD.$$

Zij x de afstand van Q' tot $L'G$, dan is:

$$x = \frac{OG}{\operatorname{tg} \varepsilon_2 - \operatorname{tg} \varepsilon_1}.$$

Zoo men nu grootheden van de tweede en hoogere orde ten opzichte van ε_2 verwaarloost, verkrijgt men na eenige herleiding hieruit:

$$x = f - \left\{ 2 \cot 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2(n^2 - \sin^2 \varphi)} \right\} \cdot LD \dots (20).$$

Is $LD = 0$, dan is $x = f$, maar is LD niet $= 0$, dan is ook x niet $= f$. De factor van LD is b.v. voor $\varphi = 45^\circ$ en $n = 1,5$: $\frac{1}{3,5}$.

LUMMER zegt waargenomen te hebben, dat het inferentieverschijnsel in het eerste focale vlak plaats had. Onze berekening leert echter, dat het vlak der duidelijkste interferenties niet geheel met het focale vlak samenvalt.

STELLINGEN.

I.

In *Wied. Ann.* Bd XII publiceeren SOHNCKE en WANGERIN waarnemingen en daarop steunende berekeningen omtrent de richting der hoofdrechte bij de ringen van Newton. Deze berekeningen hadden anders verricht moeten zijn.

II.

Men kan zeer eenvoudige bewijzen geven voor de formules voor Δ (optisch wegverschil der interfereerende stralen) bij de ringen van Newton en bij een wigvormig glasplaatje. (Zie *Wied. Ann.* Bd. XX, p. 189 en p. 193).

III.

De formule voor Δ in LUMMER's verhandeling: Ueber eine neue Interferenzerscheinung an planparallelen Glasplatten u. s. w., *Wied. Ann.* Bd. XXIII p. 56, regel 9, is onjuist.

IV.

De afleiding der formule van LUMMER voor Δ in zijn verhandeling: Ueber die Theorie und Gestalt neu beobachteter Interferenzcurven, *Wied. Ann.* Bd. XXIV, p. 422, (I), is noodeloos onslachtig. Hetzelfde kan gezegd worden van de formule voor Δ bij den interferentiaalrefractor van Jamin in WÜLLNER'S *Lehrbuch der Experimentalphysik*.

V.

MAXWELL'S behandeling der capillariteit in zijn: *Theory of Heat* is niet aan te bevelen.

VI.

Er is uit een mathematisch oogpunt geen grens te trekken tusschen de theorieën, die een werking op een afstand en die, welke een voortplanting der werkingen door een middenstof aannemen.

VII.

Het bewijs van SOHNCKE EN WANGERIN van de stelling, dat het minimum van $B^2 + C^2$ met een zeer kleine fout de plaats der grootste duidelijkheid oplevert (*Wied. Ann.* bd. XX, p. 187), is foutief.

VIII.

Bij machtsverheffing van de leden eener vergelijking kan men wortels verduisteren.

IX.

De behandeling der goniometrie en trigonometrie laat in de meeste leerboeken veel te wenschen over, wat betreft:

1. De inleiding. 2. De algemeene geldigheid der formules. 3. Grondformules en afgeleide formules.

X.

Noch de hoogere burgerschool, noch het gymnasium voldoen aan het beoogde doel. De eerste wil een school voor algemeene ontwikkeling zijn en ze is er een, waar de exacte vakken een te ruime plaats innemen. Het tweede wil een voorbereiding geven voor de universiteit, doch men leert er vakken, die voor een groot gedeelte der leerlingen hoegenaamd geen waarde hebben. Gewenscht ware, in plaats van beide inrichtingen, een middelbare school met vierjarigen cursus, waar de leerling een werkelijk algemeene ontwikkeling opdeed, zonder overlading met vakken en zonder eenzijdigheid; verder tweejarige voorbereidingscholen voor verschillende richtingen.

XI.

Het plaatselijk schooltoezicht moest niet de macht bezitten in te grijpen in het inwendige van de school, als daar zijn de handhaving van tucht, en het toelaten en bevorderen van leerlingen.

XII.

Veel meer waarde dan methoden en leerboeken hebben *personen*. Daarom heeft een theoretische paedagogie weinig waarde.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I.	
Grondbeginselen	2
HOOFDSTUK II.	
De interferentie-plaatsen bij de ringen van Newton in het centrale invalsvlak	11
HOOFDSTUK III.	
De interferentie-plaatsen bij de ringen van Newton buiten het centrale invalsvlak	18
HOOFDSTUK IV.	
Duidelijkheid der interferenties bij de ringen van Newton	32
HOOFDSTUK V.	
De interferentie-plaatsen bij een wigvormig glasplaatje	35
HOOFDSTUK VI.	
Vergelijking van onze theorie met die van SOHNCKE en WANGERIN	42
HOOFDSTUK VII.	
Verdere beschouwingen	56
HOOFDSTUK VIII.	
Over eenige andere verschijnselen	70
STELLINGEN	81

INDEX

Introduction 1

Chapter I 10

Chapter II 25

Chapter III 45

Chapter IV 65

Chapter V 85

Chapter VI 105

Chapter VII 125

Chapter VIII 145

Chapter IX 165

Chapter X 185

Chapter XI 205

Chapter XII 225

Chapter XIII 245

Chapter XIV 265

Chapter XV 285

Chapter XVI 305

Chapter XVII 325

Chapter XVIII 345

Chapter XIX 365

Chapter XX 385

Chapter XXI 405

Chapter XXII 425

Chapter XXIII 445

Chapter XXIV 465

Chapter XXV 485

Chapter XXVI 505

Chapter XXVII 525

Chapter XXVIII 545

Chapter XXIX 565

Chapter XXX 585

Chapter XXXI 605

Chapter XXXII 625

Chapter XXXIII 645

Chapter XXXIV 665

Chapter XXXV 685

Chapter XXXVI 705

Chapter XXXVII 725

Chapter XXXVIII 745

Chapter XXXIX 765

Chapter XL 785

