SPECIMEN MATHEMATICO-PHYSICUM INAUGURALE,

DE

PERCUSSIONE FLUIDORUM;

QUOD,

ADSPIRANTE SUMMO NUMINE

Ex Auctoritate MAGNIFICI RECTORIS

FRIDERICI WILHELMI PESTEL,

JURIS UTRIUSQUE DOCTORIS ET PROFESSORIS JURIS PUBLICI ET PRIVATI.

NEC NON

Consensu Amplissimi SENATUS ACADEMICI, *Nobilissimæque* FACULTATIS PHILOSOPHICÆ *Decreto*,

PRO GRADU DOCTORATUS ET MAGISTERII,

Summisque in PHILOSOPHIA & ARTIBUS LIBERALIBUS Honoribus & Privilegiis, rite ac legitimè consequendis,

PUBLICO AC SOLEMNI EXAMINI SUBJICIT

HENRICUS VINK,

ROTTERODAMO-BATAVUS.

Ad diem XV. *Februarii* MDCCLXV. *ab horâ octavâ ad decimam.* L. S.

LUGDUNI BATAVORUM,

Apud ELIAM LUZAC, 1765.

AMPLISSIMO, NOBILISSIMO,
ERUDITIONIS FAMA TOTO
ORBE CELEBRATISSIMO

V I R O

GERARDO MEERMAN, JCto,
REIP. ROTTERODAMENSIS CONSILIARIO
ET SYNDICO.

VARIIS ARTIUM ET SCIENTIARUM SOCIETATIBUS DIGNISSIME ADSCRIPTO,
ETC. ETC. ETC.

Hancce Dissertationem
sacram vult
H. V I N K.

PROOEMIUM.

Non conſtitui in hac Diſſertatione totam fluidorum percuſſionem omnesque in eâ tam obliquâ quam directâ occurrentes caſus pertractare; Unice in determinandâ jam ita diu agitatâ quæſtione, utrum vis aquæ e foramine exſilientis reſpondeat ſimplici, an duplæ altitudini, (ſive pro hac ſumatur ipſa ſuperficiei fluidi ſupra foramen altitudo, ſive illa, quæ effluentis aquæ velocitati debetur) hærebo.

Varias clariſſimorum Virorum ſententias & demonſtrationes expoſui, & ne meâ explicatione quid perdere viderentur, multis in locis propriis Authorum verbis uſus fui; tum hiſce leviſſimas meas conſiderationes adjeci, & tandem novis experimentis ſtabilitam opinionem eligere tentavi; ita ut hæcce Diſſertatio Commentarii in aliorum ſyſtemata loco inſervire poſſit.

Nullos fere citavi Authores, non eo animo, ut omnia nova in lucem proferre viderer; libenter enim fateor, me pleraque ex aliorum ſcriptis hauſiſſe, neque aliud quid a Juvene metam Academicam egrediente æquus exſpectabit Lector; præterea omnes, aut nulli citandi forent; quoniam vero tam ingens datur numerus, ne extenſæ lecturæ oſtentationem præ ſe ferre eorum citatio, quâ mire alii delectantur, videretur, ab illâ abſtinui.

Omnia pericula cum aquâ inſtitui, quæ & cum aliis fluidis tam rarioribus quam denſioribus repetere conſtitueram; temporis autem defectus a propoſito deſiſtere coëgit; eam quoque ob cauſam nulla, niſi quæ directe ad materiam pertinent, adpoſui, imo & variorum Authorum methodos inſtituendorum experimentorum, uti ſatis cognitas, ſuppoſui.

Qui modo Phyſicam a limine ſalutavit, præclarum hujus materiæ uſum tam in aggeribus conſtruendis & ab injuriâ defendendis, quam in fluviis conducendis & machinis aquariis ponendis, ſtatim perſpiciet, eamque, ſi non viribus ſuperiorem, attentâ inquiſitione omnino dignam judicabit; non mirum itaque, ſi ſumma Eruditionis lumina, uti Mariotte, Newton, s' Gravezande, Bernoulli, d' Alembert & alii ſuam peritiam ſuosque labores huic ſubjecto impendere haud dedignati fuerint.

Forſan temeritas audiet horum inſignium Virorum veſtigia premere, & me juvenem eorum litem decidere in animo habere; quum vero eorum Experientiæ & Theoriæ tantopere inter ſe mutuo differant, haud præoccupato animo easdem de novo inquiquirere venia ſit; hinc Clariſſimi Viri J. Lulofs, Præceptoris nunquam non venerandi, cui me omnia, quæ in Mathematicis valeo, debere grato animo agnoſco, conſilio inductus & auxilio fretus, innumera inſtitui experimenta, quibus verum, & an non in plerisque ſententiis paralogismus obtineat, indagare conatus ſui; certe non in omnibus æque ſucceſſu gaviſus fui, nec mirum, cum & ipſe magnus d'Alembert, quocum ſæpius pro ſuâ ſolitâ humanitate, dum Pariſiis degerem, inter multa alia etiam de hac materiâ familiariter verba feciſſe non ſine delectamento reminiſcor, tantam difficultatem imo in abſurdum abeuntem tam calculum quam experientiam ſæpe reperiſſe, candide faſſus eſt, ut, non ſolum a priori, ſed neque a poſteriori, cum & impetus aquæ pro plani percutiendi figurâ differat, hancce quæſtionem determinari poſſe, dubitaverit. Hæc quum ita ſe habeant, nonne præſtitiſſet a propoſito deſiſtere aliamque pro Specimine inaugurali eligere materiam? nimium profecto laboris impenderam, quam ut facile hoc conſilium inirem; præterea magnorum Virorum errores, qui in ſe quandoque utiles ſunt, adnotaſſe, ut poſteri evitent aliamque ingrediantur viam, non inutile duxi; pleraque etiam experimentorum, quæ inſtitueram, aliis uſibus, uti velocitatibus aquarum computandis, inſervire poſſunt.

De-

Denique & hoc addere liceat, ſuam ignorantiam confiteri non indignum Philoſopho, ubi verum adtingere nequit, imo præſtare, quam hypotheſibus ſuperſtruere, falſisque ſyſtematibus adhærere; hiſce ſaltem incautos admonui, & quousque perventum ſit, indicavi; ſic ſeriori ætati, novis inſtructæ inventis, lux adfundetur.

Si haud penitus incondita, quæque progreſſuum qualiumcumque ſpecimini, & ut Legibus Academicis morem gererem, inſervire poſſunt, propoſui, eſt quod mihi gratulor, ſin minus, in magnis voluiſſe ſat eſt.

Diſſertationem in tria Capita diſtinxi.

Primum quædam cognita & demonſtrata de naturâ fluidi continebit; cæterum vero differentiam actionis ſolidorum ab illâ fluidorum expediet.

Alterum varias variorum Authorum ſententias inquiret, quæque in iis reprehendi poſſint, notabit.

Tertium denique Experimentorum recenſionem & eventum comprehendet.

SPECIMEN MATHEMATICO-PHYSICUM
INAUGURALE.

DE

PERCUSSIONE FLUIDORUM.

CAPUT PRIMUM.

De Fluidorum Natura & Percussione in genere.

§. I.

Ut vera percussionis fluidorum idea comparetur, requiritur perfecta eorum intimæ naturæ cognitio; quam parum autem in hac enodandâ hucusque profectum sit, nullum, qui modo Physicam a limine salutavit, latet, ita ut huic ignorantiæ tanta Authorum inter se de hac materiâ discrepantia tribuenda videatur.

§. II.

NEWTONUS definivit fluidum tanquam corpus, cujus partes vi cuicumque illatæ cedunt & cedendo facile moventur inter se; alii fluidum considerarunt, uti congeriem particularum minimarum, motu intestino agitatarum, quo fit, ut inter se non sint contiguæ, sed quasi volitent, hinc minimo impulsui cedant; alii iterum statuunt, omne fluidum, neque aquâ exceptâ, constare particulis minimis sphæricis, in paucis punctis se mutuo contingentibus, lævibus, vix se adtrahentibus; cæteras, quas formarunt, hypotheses recensere supersedeo; ex omnibus hæcce seligi posset uti veritati proxima, nimirum quod fluidum constet particulis minimis, parum se adtrahentibus, hinc facile mobilibus. Num sphæricæ in omni fluido sint, nondum determinatum fuit, quum plurimorum fluidorum, inter quæ & aqua numeratur, particulæ hucusque microscopio detegi non potuerint.

§. III.

Fluida dividuntur in *Elastica* & in *non Elastica*, quæ variis ac diversis gaudent proprietatibus; unam alteramve adtingemus, ut horum fluidorum differentia eo clarius patescat: undæ vel undulationes in utroque fluido diversâ ratione oriuntur; motus enim in fluido non elastico per successivum adscensum & descensum in orbem propagatur, in fluido vero elastico per successivas condensationes & rarefactiones propagantur undulationes; analogus tamen est motus pulsuum in medio Elastico cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii ela-

elaſtici locum tenet elevationis aquarum, vis autem elaſtica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulſuum denſiſſima parti undarum altiſſimæ reſpondet. Altera differentia hæc eſt: omne corpus tremulum in medio elaſtico motum pulſuum undique in directum ſuperficialiter propagabit; in medio vero non elaſtico motum ſphæricum excitabit; reſiſtentia, quam patiuntur ſolida, in fluidis ambobus etiam diverſa eſt; quæ autem in medio elaſtico obtineat, Robins in aureo Tractatu, *Principles of Gunnery*, fuſius explicat; ſed miſſa faciamus fluida elaſtica, de aquâ differentes, quam cùm plerisque magnæ authoritatis authoribus inter non elaſtica fluida referimus, cum incompreſſibilitas elaſticitati quam maxime repugnat; neque objectio, aquæ, quæ aquæ ſuperadfunditur, particulas reſilire, multum ponderis habet, cum hoc ab aëre elaſtico intus deliteſcente oriri videatur: pro variâ autem aquæ particularum conſideratione, ſive ut durarum, ſive ut elaſticarum, magna datur in percuſſione virium differentia, ita ut hinc a diverſis authoribus pro vi venæ aqueæ determinandâ nunc dupla, nunc tripla, imo quadrupla aquæ prementis altitudo calculetur.

§. IV.

Adtentius perpendenti itaque patebit, noſtrum thema vix a priori poſſe determinari; ignoramus enim figuram, ordinationem particularum, quomodo inter ſe moveantur; & licet hoc cognoſceretur, calculus ob numerum difficillimus foret; præterea tanta datur differentia inter fluidum & congeriem corpuſculorum ſolidorum, ut experientia ſola modo nonnullas leges hydroſtaticas, quas Theoria nunquam adſecuta fuiſſet, docuerit; imo & hiſce legibus experientiâ cognitis, nondum inveniri potuit hypotheſis, quæ eas explicare & ad principia Staticæ ſolidorum reducere valuerit; hoc in cauſâ fuit, quod varii authores variis ſuperſtruxerint hypotheſibus, ut Theoriæ Praxis reſponderet, neque tamen ſucceſſu fuerint gaviſi.

§. V.

Quum igitur ſolâ Theoriâ confidere minus tutum ſit, non incongruum erit a poſteriori differentiam actionis ſolidorum ab illâ fluidorum oſtendere & nonnulla hinc elicere, quæ ad ſcopum conducunt. Sub judice lis eſt, utrum actio corporis moti definiatur per maſſam multiplicatam in velocitatem, an in hujus quadratum; maſſa fluida, quæ planum percutit, æſtimatur ex cylindro, cujus baſis eſt ſectio venæ & altitudo functio altitudinis illus, quæ debetur velocitati aquæ effluentis: ſit altitudo illa A debita velocitati V; Amplitudo venæ ω; hinc maſſa fluida, quæ in planum impingit, erit $A\omega$, quæ ducta in velocitatem exhibet actionem fluidi $= A\omega V$, quæ vero ſecundum principium virium vivarum foret $= A\omega V^2$. Vi autem legis motuum âdceleratorum habetur $A = V^2$; ergo actio fluidi in priori caſu prodiret $= \omega V^3$, id eſt, in ratione cubicâ velocitatum, vel $= \omega V^4$, id eſt, in ratione biquadraticâ juxta Leibnitzianorum Syſthema, quod in fluidis optime quadrat.

§. VI.

Fluido enim celerius moto, unaquæque particula majori cum vi agit, & præterea eodem tempore major particu-

la-

larum percutientium numerus adfertur, e. g. si aqua plano occurrens triplo plus velocitatis acquirit, unaquæque particula separatim spectata triplo majorem faciet impressionem, quod idem in solidis etiam obtinet; eodem vero tempore triplo plures particulæ jam adfluunt, contra in solidis semper eadem manet massa percutiens; ergo tota fluidi impulsio erit novies major, sive uti quadratum velocitatis 3. & hæc est ratio, ob quam fluida sæpe insignes effectus producere valeant; D'ALEMBERTIUS pro hoc argumento Demonstrationem Mathematicam invenit, quum priorem nimis vagam judicavit, uti in ejus Tractatu de *fluidorum resistentiâ* videri potest.

§. VII.

Fluidorum percussio etiam ab illâ solidorum in eo differt, quod (ex. gr. instituatur comparatio inter cylindrum solidum & inter cylindrum fluidum, qui a venâ prosiliente formatur) in cylindro solido omnes particulæ inter se unitæ simul percutiant; cylindrus vero fluidus, qui particulis disjunctis, quæ, si statim non valent planum propellere, in se ipsæ reflexæ consequentibus sunt impedimento, constat, modo agat per particulas priores sive sectionem anteriorem, atque ita quolibet momento infinite exiguo tantum lamella vel orbiculus aquæ infinitesimus percussionem faciat, cujus fluxio integrari nequit, sicque nihil proficitur.

§. VIII.

Differentia actionis solidorum ab illâ fluidorum in eo etiam præcipue consistit, quod fluida in omnem directionem sur-

ſurſum, deorſum, lateraliter premant; in quocumque ergo ſtatu vel quietis vel motus conſideremus fluida, preſſiones exſerant, neceſſe eſt; quum hæc preſſio ſit adtributum proprium fluidi, quod ideo nullo reſpectu ab ideâ fluidi ſeparari poſſit.

Hiſce dictis verbum addo; quod ſi conſtaret, fluidum recte conſiderari inſtar congeriei corpuſculorum minimorum gravitate & inertiâ donatorum, totamque fluidi actionis diverſitatem ab eâ ſolidi in hoc conſiſtere, quod particulæ fluidi ſibi mutuo adhæreſcant per tenacitatem majorem minoremve ex adtractione oriundam; neque tum rem penitus perſpectam haberemus, cum hujus adtractionis, cujus gradum & modum actionis ignoramus, calculum inire impoſſibile foret.

§. IX.

Quid autem per percuſſionem Fluidorum intelligamus, jam breviter exponendum: actio fluidi quieti, quod parietes & fundum vaſis, cui includitur, premit, ſolet adpellari preſſio, ac determinatur per altitudinem columnæ ſuperincumbentis; at diverſæ indolis preſſionem, quæque cum noſtrâ percuſſione convenit, patiuntur parietes & fundus a fluido moto; reactio ſcilicet parietum ac fundi per fluidi moti actionem excitatur, nam in quiete fluidum ſuâ tantum gravitate, niſi aliis viribus ſollicitetur, agit; in motu autem conſtitutum, uti omne corpus ſuam manifeſtat inertiam, quæ actionis & reactionis cauſa eſt, ſic & fluidum præter gravitatem ſuâ quoque inertiâ agit; hinc non mirum, preſſionem fluidi moti a Mathematicis plane diverſam ab illâ quieti deprehenſam fuiſſe, uti ex D'ALEMBERTO

col-

colligere licet, qui omnino differentes menſuras pro preſſione fluidi quieti & pro impetu moti, qui ſemper quieti preſſionem ſuperat, exhibuit.

§. X.

Summus EULERUS hanc preſſionem felici cum ſucceſſu adplicuit examinandis machinis Hydraulicis, quas primus mirum in modum in *Monum. Acad. Berolin. ann.* 1750, 1751, 1752. expoſuit: unde facile perſpicitur, illam, quam vocant percuſſionem vel impulſionem fluidorum, cum preſſione fluidi moti convenire; etenim fluidum in ſuperficiem ruens cum quâdam velocitate non ſolum hanc premit, ſed quoniam movetur, in eandem ſuam exſerit inertiam, quæ differentiam preſſionis & percuſſionis efficit; de hacce fluidorum actione legi etiam meretur BEGUELIN *in Monum. Acad. Berol. ann.* 1756.

Hæc ſunt, quæ de fluidorum indole præmittere volui; multa eaque pulcherrima addi potuiſſent; cum vero ad noſtrum thema non pertinent, brevitatis ſtudens omiſi.

CAPUT SECUNDUM.

Continens Theoriam Percussionis Fluidorum.

§. I.

Quum magni Viri hac in re dissentiunt, non temere agendum, sed circumspecte veritati studendum; primo igitur examinandæ veniunt variorum Authorum sententiæ, quatenus veris vel falsis principiis superstruxerint, eæque ordine disquisitioni subjiciendæ, quæque in iis reprehendi possint, ostendendum.

§. II.

Prima tentamina, quæ de hoc themate instituta fuerunt, cum in seriorum Authorum sententiis ut plurimum comprehendantur & Physica tunc temporis adhuc minus exculta esset, haud adtingam; horum curiosum relego ad J. B. DU HAMELII *Reg. Scient. Acad. Historiam Lib.* 1. *Sect.* 3. *Cap.* 5. ubi experimenta *Robervallii*, *Coupleti*, *Kircheri*, *Hugenii*, *Mariotti* exponuntur; statim ad recentiores Authores transeo.

§. III.

NEWTONUS, postquam pro opinione, vim aquæ in ratione simplicis altitudinis agere, prius certasset, in postremâ editione suorum *Principiorum Philosophiæ* sententiam mutavit

tavit & impetum aquæ poſuit æqualem cylindro, cujus baſis eſt area foraminis, altitudo dupla illius aquæ ſupra foramen; demonſtrationem autem ex ſuâ fictâ cataractâ petiit.

§. IV.

Ad Cataractæ vero fictionem ſic perveniſſe, cum JURINO ſuſpicamur; ex motu adcelerato gravium profluit incrementum velocitatis; cum autem per quamcumque ſectionem horizontalem eadem vel æqualis aquæ quantitas transire debeat, creſcente verſus fundum velocitate, ſectio contrahi debet atque ita generare curvam Cataracticam ſive Hyperbolen quarti gradus, ex cujus circa axin volutione oritur ſic dicta Cataracta, quæ æquatur cylindro, cujus baſis eſt foramen & altitudo dupla illius aquæ in vaſe.

§. V.

Sit enim altitudo aquæ x.
Radius ſectionis cataractæ y.
Linea data a.

Notum, in Hyperbolâ quarti gradus $xy^4 = a^5$; jam ſi peripheria circuli, cujus radius eſt unitas, vocatur p, erit area $= py^2$; conſtat autem, fluxionem ſolidi eſſe $= py^2\dot{x}$; x vero $= \frac{a^5}{y^4}$, ergo $\dot{x} = -\frac{4a^5\dot{y}}{y^5}$; hinc fluxio cataractæ prodibit $= py^2\dot{x} = \frac{-4a^5p\dot{y}}{y^3}$, cujus fluens $= \frac{2pa^5}{y^2} = \frac{2a^5}{y^4} \times py^2 =$ Cylindro, cujus baſis eſt py^2, & altitudo $2x$, ſive $2\frac{a^5}{y^4}$.

§. VI.

§. VI.

Hæc catarača ſola preſſionem exercet, nam reliqua aqua, quæ non in hac cataractâ comprehenditur, ſtagnare ſupponitur; ergo omnis aquæ effluentis vis ſecundum hanc ſuppoſitionem huic cataractæ debetur, ſicque duplæ altitudini aquæ in vaſe reſpondet.

§. VII.

Joh. Bernoulli contra demonſtravit, hancce Newtonianam explicationem, utpote legibus hydroſtaticis adverſam, ſubſiſtere non poſſe; quoniam enim conſtat, preſſiones in ſingulis locis exercitas eſſe proportionales altitudinibus, per ſe patet, latera cataractæ, niſi rigida ſint, a pondere aquarum ſtagnantium introrſum preſſum iri, cum hæ nullas habeant preſſiones oppoſitas; ergo hæ aquæ ſtagnantes ſe cum aquâ Cataractâ contentâ commiſcebunt & cataractæ figuram turbabunt.

§. VIII.

Non incongruum videtur heic loci mentionem facere de gurgite Joh. Bernoullii; Illuſtris hicce vir miratus, unde tanta difficultas adplicationis principiorum Dynamicorum in fluidis, veram cauſam detexiſſe eamque in eo conſiſtere credidit, quod pars quædam virium prementium ad formandum gurgitem, uti vocat motum illum aquæ in turbinem, qui in aquæ effluxu percipitur ad foramen effluxus, impenſa tanquam nullius momenti fuerit neglecta, quia hicce gurges,

ges ex quantitate fluidi perexiguâ formatur, vel ante transitum, ubi fluidum ex loco ampliori in angustiorem, vel post transitum, ubi ex angustiori in ampliorem transit.

Licet hicce gurges ex parvâ fluidi quantitate consletur, vis tamen, quæ ad ejus formationem requiritur, nequaquam est rejicienda, quum sensibilem in transfluentis aquæ velocitate mutationem producit; notatu autem dignum est, hanc vim non pendere ab extensione vel figurâ gurgitis, cum ejus determinationem modo ingrediantur amplitudines h & m extremæ tubi, tum & velocitas, uti in æquatione $\frac{h^2 - m^2}{2h} V^2$ patet, quæ exprimit vim motricem requisitam, ut in gurgite fiat adceleratio necessaria ad mutandam velocitatem; Insignis DAN. BEROOULLI ad pares conclusiones in Hydrodynamicâ pervenit, sed principium virium vivarum secutus est.

§. IX.

Hæc digito adtigisse sufficiat, quum inde demonstrare conatur Author, cylindrum solidum uniformiter eâ cum velocitate, quam grave sibi commissum cadendo ex altitudine lateris cylindri acquirit, per fluidum ejusdem cum cylindro densitatis motum resistentiam pati æqualem cylindri ponderi; si jam supponatur, loco cylindri solidi dari tubum, eâdem materiâ fluidâ plenum, quæ uniformiter per eundem fluit, per se patet, cylindrum hunc fluidum in effluxu ad tubi extremitatem eandem ab adlapsu ad fluidum stagnans externum & motui oppositum (quod hic cum plano venæ aqueæ opposito comparari potest) offendere resistentiam, quam offenderet ipse cylindrus solidus, pro quali haberi poteſt cylindrus fluidus per tubum fluens, dum cæteræ omnes circumſtantiæ conveniunt: hanc ergo reſiſtentiam, quæ fluido in ipſo egreſſus momento objicitur, ſic inquirit: ſupponit, vim motricem $\frac{h^2 - m^2}{2h} V^2$, quæ ad efficiendum gurgitem & adcelerandam aquam, quæ per anguſtiorem amplitudinem, ſcilicet foramen, tranſire cogitur, impenditur, eandem eſſe, quæ aquam ad effluxum ſollicitat, eamque æquari gha ſive ponderi fluidi in vaſe contenti: quo vero fundamento hæcce ſuppoſitio nitatur, non demonſtrat; multa certe hic objici poſſent; 1°. Rationi enim conſentaneum videtur, fluidum per ſpatium anguſtius ad formandam cataractam ſive gurgitem movendum ob hanc eandem rationem in hoc ſpatio adcelerari, non habita ponderis ratione; itaque pondus fluidi conſiderari nequit uti ſola vis adceleratrix, aut huic vi æquari: 2°. ſi concederetur, vim adceleratricem a pondere fluidi oriri, non tamen inde ſequeretur, hanc æqualem eſſe ponderi fluidi; nam vas ipſum ponderis partem ſuſtinet; 3°. Non video, quare inferre liceat, vim motricem ad gurgitis formationem deſtinatam eandem eſſe, quæ ad aquæ effluentis impetum producendum adhibetur; præterea cuique fluidi motum adcuratius perpendenti patebit, gurgitem proprie formari, quoniam aqua plano occurrit; nam niſi planum aquæ effluenti obſtaret, fluidum non dilataretur, ſed vena ejusdem amplitudinis, quæ tubi, maneret, ergo nullus gurges; inde etiam ſequitur, gurgitem eo ampliorem fieri, quo latius eſt planum. Eximius autem Geometra adſumit, fluidum veluti in infinitum dilatari, nam ſic phyſice, licet Mathematice adſignabilis eſſet ratio, m^2 evaneſcit re-

ſpe-

ſpectu h^2, & vis motrix evadit $= \frac{hV^2}{2} = gha$; ſecundum leges vero adcelerationis & retardationis gravium $V\dot{V} = g\dot{z}$, ubi g denotat vim naturalem adceleratricem & z altitudinem verticalem, perquam grave libere delapſum acquirit velocitatem V; ergo $V^2 = 2gz$: quo valore in æquatione ſubſtituto, erit $ghz = gha$, & $z = a$, id eſt, preſſio, quæ ſemper a velocitate fluidi effluentis dependet, reſpondet ſimplici altitudini fluidi in vaſe: quis autem non clare perſpicit, hancce ſuppoſitionem omni carere fundamento, quoniam aqua in infinitum dilatari nequit; cum itaque hac ratione m^2 reſpectu h^2 evaneſcens poni non poteſt, pateſcit, impetum aquæ in minori fore proportione, quam altitudinis aquæ ſupra fundum, quod omnibus experimentis & ipſi rationi repugnat, cum & a Bernoullio ipſo ad minimum ſimplici altitudini reſpondere adfirmatur.

Hiſce argumentorum, quæ a Joh. Bernoullio pro ſuâ ſententiâ adferuntur, inſufficientiam ſatis demonſtraſſe credo; tranſeo ad eam Dan. Bernoullii exponendam.

§. X.

Illuſtris author ſtatim conſiderat, ab aquâ effluente ſimilem fieri vaſis repulſionem ac tormenti bellici a globo expulſo; hujus vero repulſionis, cum actioni ſemper æqualis eſt reactio, menſurâ cognitâ, cognoſcitur & aquæ effluentis impetus.

Ad hunc ſcopum præmittit principium Mechanicum, quod fuſius in *Comment. Acad. Petropol.* per elaſtra explicuit, ſic audiens: *Si corpus a quiete velocitatem eandem per preſſiones directas utcumque variabiles acquiſiverit, ac ſingulæ*

 pres-

pressiones in sua tempora multiplicentur, erit summa omnium productorum semper eadem sive constans.

§. XI.

Pro faciliori intellectu supponit vas cylindricum infinitæ amplitudinis, ex quo aqua horizontaliter velocitate uniformi effluit; considerat dein punctum, ubi aqua ad maximum velocitatis gradum pervenit, nimirum ubi vena aquea maxime contracta est: hujusce venæ contractæ amplitudo sit $= 1$; tum velocitas, quæ debetur altitudini A, sit $= V$; Præterea supponitur, cylindrum aquæ effluxisse, qui pro basi habeat 1 & pro longitudine L.

Per leges adcelerationis probatur, $V\dot{V} = F\dot{A}$, ergo $V = \sqrt{2FA}$; quoniam vero proportio velocitatis ad altitudinem quæritur, & vis adceleratrix F sit gravitas ipsa, ergo constans & æqualis unitati, erit $V = \sqrt{2A}$.

Tempus æquatur spatio diviso per velocitatem; spatium vero exprimitur per longitudinem cylindri, qui effluxit, ergo $T = \frac{L}{\sqrt{2A}}$.

§. XII.

Quia per §. X. $sp\dot{t}$ est constans, erit unaquæque velocitas minima $\dot{V} =$ uni ex partibus summæ totius, id est, $p\dot{t}$ diviso per L, sive per longitudinem cylindri, quæ exprimit numerum variarum velocitatum minimarum, sive $\dot{V} = \frac{p\dot{t}}{L}$.

Ad eandem conclusionem etiam absque auxilio memorati prin-

principii Mechanici ſic pervenitur: cuique notum, vim adceleratricem agentem in corpus libere motum eſſe in ratione vis motricis diviſæ per maſſam movendam.

Sit vis motrix quæcumque $= P$; Maſſa movenda $= M$; ergo vis adceleratrix $= \frac{P}{M}$; ergo $V\dot{V} = \frac{P\dot{A}}{M}$; $\dot{A}$ vero $= V\dot{t}$, quia motus variati momento temporis vel inſtanti $\dot{t}$, quo ſpatiolum $\dot{A}$ perficitur, uniformes ſupponi poſſunt; atque ita in inſtanti $\dot{t}$ velocitas V invariata manebit; hinc recte leges motus uniformis hic adhibentur; ergo $V\dot{V} = \frac{PV\dot{t}}{M}$ & $\dot{V} = \frac{P\dot{t}}{M}$; BERNOULLI autem hic intelligit per vim motricem P eam vim, quæ aquam ad effluxum ſollicitat, ſive preſſionem motricem $= p$ ab eo ita dictam; M vero æquatur cylindro, cujus baſis eſt 1 & longitudo L; hinc $\dot{V} = \frac{p\dot{t}}{L}$. Q. D. E.

§. XIII.

Integrando itaque $\dot{V} = \frac{p\dot{t}}{L}$

$$\text{erit } V = \frac{pt}{L}$$

$$\text{ergo } p = \frac{LV}{t}$$

Sub-

Subſtituendo jam pro V, $\sqrt{2A}$

$$\& \text{ pro } t, \frac{L}{\sqrt{2A}}$$

$$\text{erit } p = L \frac{\sqrt{2A}}{\frac{L}{\sqrt{2A}}} = 2A.$$

Reſpondet igitur preſſio, quæ aquam conſtanter ad effluxum ſollicitat, duplæ altitudini, quæ debetur velocitati aquæ effluentis, & tanta quoque eſt vis, quâ vas repellitur.

§. XIV.

Ut porro demonſtretur, in fiſtulâ incurvatâ preſſionem obtinere eandem & æqualem ei in fiſtulâ rectâ, Author ſic ratiocinatur.

Fig. 1.

$$\text{Sit } sq = x. \quad qp = \dot{x}.$$
$$qn = y. \quad me = \dot{y}.$$

Radius oſculi elementi $en = \frac{-\dot{s}\dot{y}}{\ddot{x}}$; s ſemper denotat arcum; radius vero oſculi hic negative ponitur, quia ordonatæ ſumuntur a parte convexâ curvæ: $\dot{s}$ ponitur conſtans: jam gravitas eſt ad vim centrifugam, uti radius ad duplam altitudinem debitam velocitati in circulo, ſecundum Hugenium; in circulo enim radius, ſed in aliâ quâcunque curvâ radius oſculi adhibetur, quoniam cujuscumque curvæ curvatura in puncto cum eâ circuli comparari poteſt.

Gravitas columellæ in parte elementari fiſtulæ $en = \dot{s}$; nam fiſtulæ amplitudo per hypotheſin $= 1$, ergo longitudo $\dot{s}$ ſive elementum curvæ multiplicatum in amplitudinem, dat cylindrum ipſum $= \dot{s}$; A ſignificat altitudinem.

§. XV.

§. XV.

Ergo vis centrifuga columellæ

$$en = \frac{\dot{s}\times 2\,\mathrm{A}}{\text{Rad. Osc.}} = \frac{\dot{s}\times 2\,\mathrm{A}}{-\frac{\dot{s}\,\dot{y}}{\ddot{x}}} = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{y}}$$

; exprimatur jam hæcce vis centrifuga, quæ quippe agit in directione radii osculi, per ec perpendicularem in curvam, & ducatur co parallela ad BS; resolvatur vis ec in oc & eo; tunc ob similitudinem triangulorum eoc & emn, erit vis $oc = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{s}}$, nam oc, ec :: em, en :: uti vis oc ad vim $ec = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{y}}$ :: $\dot{y}$, $\dot{s}$.

Ergo vis secundum $oc = \frac{\frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{y}}\times\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{s}}$;

Vis autem $eo = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\dot{x}\,\ddot{x}}{\dot{y}\,\dot{s}}$; nam oe, ec :: mn, en :: vis secundum oe, ad vim secundum $ec = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\ddot{x}}{\dot{y}}$ :: $\dot{x}$, $\dot{s}$; hinc vis $oe = \frac{-2\,\mathrm{A}\,\dot{x}\,\ddot{x}}{\dot{y}\,\dot{s}} = \frac{2\,\mathrm{A}\,\ddot{y}}{\dot{s}}$, quia in triangulo rectangulo quadratum hypothenusæ $en^2 = em^2 + mn^2$, sive $\dot{s}^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2$, cujus secunda fluxio sumenda est; quoniam vero $\dot{s}$ est constans per hypothesin, erit $2\,\dot{y}\,\ddot{y} + 2\,\dot{x}\,\ddot{x} = 0$, & hinc $\dot{x}\,\ddot{x} = -\dot{y}\,\ddot{y}$; substituto itaque hoc valore, prodibit $\frac{-2\,\mathrm{A}\,\dot{x}\,\ddot{x}}{\dot{y}\,\dot{s}} = \frac{-2\,\mathrm{A}}{\dot{y}\,\dot{s}} \times -\dot{y}\,\ddot{y} = \frac{2\,\mathrm{A}\,\ddot{y}}{\dot{s}}$.

§. XVI.

Vis autem elementaris oc agit folâ in directione SB, dum altera eo pro hac directione eft negligenda; fumatur jam integrale vis elementaris oc cum conftanti tali, ut integrale unâ cum abfciffà evanefcat; tunc fluens $\frac{-2A\ddot{x}}{\dot{s}} + C = \frac{-2A\dot{x}}{\dot{s}} + C =$ fummæ virium oc; ad inveniendam conftantem ponitur $x = o$; fed tunc $em = o$; ergo $e|n = nm$, vel $\dot{x} = \dot{s}$, quia in puncto S, ubi $y = o$, en coincidit cum nm; hinc præcedens æquatio evadet, propter vim co in S evanefcentem, $= o = -2A + C$; ergo conftans $= 2A$ & integrale completum $= \frac{-2A\dot{x}}{\dot{s}} + 2A$.

§. XVII.

Ut habeatur vis in directione tangentis pro totâ fiftulâ, extendatur integrale inventum usque ad A; fed in puncto A triangulum elementare $enm =$ triangulo ABR; hinc $\frac{RB}{RA}$ ponitur pro $\frac{\dot{x}}{\dot{s}}$; ergo tota vis fecundum tangentem SB erit $= 2A - 2A \times \frac{RB}{RA}$; quoniam autem omnia corpora in curvis mota per tangentem recedere conantur, hæc vis fecundum Tangentem uti vis centrifuga ipfa confiderari poteft.

§. XVIII.

Supereft adhuc alia vis exponenda; nempe dum aqua ex vafe vaſe infinite amplo continue in fiſtulam influit velocitate uniformi reſpondente altitudini A, vas repellitur ſecundum directionem R A vi 2 A (§.XIII.); R A autem reſolutâ in tangentialem ſecundum S B, eique perpendicularem ſecundum B A, perſpicuum eſt, priorem vim ſecundum $SB = 2A \times \frac{RB}{RA}$ ſolam eſſe conſiderandam: nam EULERUS demonſtravit in Mechanicis, quod, ſi corpus, quod in canali movetur, ſollicitetur a potentiâ, cujus directio ſit normalis in curvam, celeritas neque augeatur neque minuatur; ergo potentia ſecundum B A perpendicularem in tangentialem non in conſiderationem venit; & quum S B habeat directionem communem cum vi $2A - 2A \times \frac{RB}{RA}$ a vi centrifugâ oriundâ, erit eidem addenda; atque ita ſumma $2A - \frac{2A \times RB}{RA} + \frac{2A \times RB}{RA} = 2A$ exprimet vim repellentem ſecundum directionem S B.

§. XIX.

Ut porro demonſtretur, ſub nullâ aliâ directione vas repelli, recurrendum ad vim elementarem $eo = \frac{2A\ddot{y}}{\dot{s}}$, cujus integrale, dum $\dot{s}$ conſtans ſit, $= \frac{2A\dot{y}}{\dot{s}} = 2A \times \frac{AB}{AR}$ ob triangula ſimilia ABR & *emn*; hæc autem vis *eo* præciſe annihilatur a vi 2 A vas repellente ſecundum directionem R A, ſi hæc in A B & R B reſolvatur, ob eandem rationem ac præcedentem EULERI.

§. XX.

Ponit jam Author, aquam velocitate uniformi ex cylindro verticali infinite amplo per foramen laterale effluere & perpendiculariter in planum impingere; quoniam vero particulæ insequentes impediunt priores, ne resilire possint, patet, fore, ut singulæ ad latera deflectantur, idque motu laminæ (si modo hæc satis ampla fuerit, ut tota quasi dispersa excipiatur vena) parallelo vel tantum non tali; & quia omnia sunt in statu permanentiæ, fingere licet, laminam vasi esse adfirmatam venamque lateribus circumdatam, ita ut aquæ per hiatum circularem effluere censeri possint; hoc si ita fuerit, demonstravimus, guttulas ad latus effluentes vim quidem producere repellentem secundum directionem laminæ parallelam, sed simul adparet, vim repellentem ad alterum latus huic contrariam esse & æqualem; hinc ad hanc virium repellentium classem non adtendendum; ex præcedentibus autem constat, nullam plane fieri repulsionem secundum directionem laminæ vel cylindro perpendicularem; ergo tantum lamina propellitur, quantum cylindrus repellitur; Q. D. E.; hinc itaque sequitur, pressionem venæ aqueæ in planum ruentis æquari cylindro aqueo, qui pro base habeat sectionem venæ, postquam hæc uniformem acquisivit amplitudinem, & pro altitudine duplam altitudinem velocitati aquæ effluentis debitam, postquam hæc similiter uniformis facta est; & sic habemus Theoriam ab Authore in Hydrodynamicæ sectione decimâ tertiâ traditam.

§. XXI.

§. XXI.

Ad ſententiam firmius ſtabiliendam priori alteram adhuc ſubjungit demonſtrationem, ſequenti principio Mechanico innitentem, nimirum, quod ſi corpus moveatur velocitate uniformi, directiones autem ſuas continue mutet a cauſis quibuscumque & utcumque agentibus, donec directionem acquiſiverit perpendicularem ad primam directionem; ſique ſingulæ preſſiones corpus deflectentes in duas reſolvantur claſſes, alteram parallelam primæ directioni, alteram perpendicularem; denique ſi ſingulæ preſſiones paralelæ multiplicentur per ſua tempora; ſumma productorum futura ſit conſtanter eadem & quidem æqualis ei, quæ totum motum a quiete generare aut generatum totum abſorbere valeat.

§. XXII.

Adſumatur ad libitum tempus quodcumque t, & ponatur, eo tempore effluere quantitatem ſeu maſſam aquæ $= m$; ſit potentia quæſita, quam planum ſuſtinet, quæque particulas aqueas perpetuo a via deflectit $= p$; hanc ſi multiplicaveris per tempus t, habebitur ſumma omnium potentiarum minimarum primæ fluidi directioni oppoſitarum, quæque ſingulas particulas maſſæ aqueæ m durante tempore t adfluentis a directione initiali ad angulum rectum deflectere cogunt, quæ ſumma proinde eſt $= pt$; hæc vero vis per (§. XIII.) æquatur $m\sqrt{2A}$ ſive maſſæ multiplicatæ in velocitatem; ergo $p = \frac{m\sqrt{2A}}{t}$, quæ eſt vera preſſio, quam planum ſuſtinet; hæc autem preſſio ſuâ reactione in particulas aqueas redundat, easque ad angulum rectum deflectit; vis ergo hæc deflectens eadem eſt, quam planum ſuſtinet; illâque cognitâ, & hanc perſpectam habemus.

§. XXIII.

Jam hæcce quantitas inventa $m\frac{\sqrt{2A}}{t}$ reducenda eſt ad menſuram ab Authoribus adhiberi ſolitam, nimirum ad rationem cum cylindro aqueo; ſit itaque amplitudo venæ $= 1$, tunc m erit ſpatium, quod aqua tempore t percurrit; tempus vero æquatur ſpatio diviſo per velocitatem, id eſt, $\frac{m}{\sqrt{2A}}$; ſubſtituto itaque hoc valore pro t in æquatione $\frac{m\sqrt{2A}}{t}$, prodibit $2A =$ cylindro, cujus altitudo eſt dupla illius velocitati reſpondentis & baſis $=$ Unitati. Q. D. E.

§. XXIV.

Bernoulli ad ſuam opinionem ſtabiliendam poſuit, venam aqueam prope planum ad angulum rectum deflecti; nulla autem ratio datur, cur venæ directio potius ad rectum quam ad quemcunque alium mutetur; imo ex d'Alemberti de hoc argumento disquiſitionibus, quas mox expoſituri ſumus, patebit, fluidi directionem, quando plano adcedit, huic non fieri paralelam, quo pacto non requiritur, ut vena ad angulos rectos incurvetur; ſi vero fluidum ſub aliâ quâcumque directione ad planum divergit,

ex

ex ipſo BERNOULLIO colligere licet, impetum aquæ minorem quam duplæ altitudinis rationem ſequi; conferantur ſcilicet æquationes, quas conſtruxit pro impetu obliquo; nam in hoc caſu vena oblique plano occurrit, quemadmodum contingere neceſſe eſt, quando fluidi perpendiculariter planum ferientis inflexus ſtatuatur obliquus; adtamen hicce inflexus tunc ab utrâque axeos venæ parte æqualis erit, quod in percuſſione obliquâ non deprehenditur.

§. XXV.

Optandum foret, Phyſici unitis viribus cum Geometris inflexum fluidi planum cujuscumque figuræ offendentis adcuratius perpenderent; in theoriâ enim de fluidorum reſiſtentiâ ſupponitur, fluida ſub eodem angulo planum percutere; quæritur autem, ſub quo angulo planum ED, vel gubernaculum, poſteriori parti navis DCBA adfixum, ab aquâ, cujus directio ſit PM, percutiatur, nam aqua primum fluit paralela CB, deinceps vero defluet ad latus CD; quantus autem eſt inflexus aquæ a latere CD defluentis adverſus planum ED? EULERUS contendit, partem quandam defluentis aquæ CLD quaſi tranquillam eſſe, nihilque ad movendum planum ED conferre.

§. XXVI.

Hocce locum habet ad Gubernaculum ED; nautæ enim obſervarunt, certam quantitatem aquæ CLD, quam mortuam vocant, nullo motu cieri; hinc hæc pars non tantum ad movendum gubernaculum inutilis erit, ſed & impediet,

pediet, quominus omnis aqua a latere navis defluens vim ſuam exercere poſſit; hic vero animadverto, quod ſi inflectatur gubernaculum, ab unâ parte quantitas aquæ tranquillæ decreſcat ratione anguli, quem gubernaculum cum navis ſpinâ facit, ab alterâ vero parte gubernaculi aqua mortua eo magis adcumuletur gubernaculique motui reſiſtentiam pariat; de hacce gravi materiâ ulterius conſuli poſſunt BOUGUERI *Manœuvre des Vaiſſeaux* & EULERI *Scientia navalis*, qui hocce argumentum omnibus partibus explevit.

§. XXVII.

Ante omnia vero animadvertendum, maſſam m certo tempore t effluentem (§. XXII.) haberi vix poſſe pro maſſâ impellente, cum planum modo a priori aquæ lamellâ (Cap. I. §. VII.) percutiatur; inſequentes enim lamellæ aqueæ eâdem velocitate, quâ preëuntes, incedunt, ſicque præcedentium vim non augent, niſi quatenus prioris lamellæ particulas reſilientes verſus plani ſuperficiem repellunt, quæ, dum ad latera diſpergantur, velum ſatis inſignis extenſionis efficiunt.

§. XXVIII.

Haud minorem certe meretur adtentionem ſententia D'ALEMBERTI, qui cum D. BERNOULLIO ſtatim obſervat, quod, ubi vena aquea perpendiculariter in planum incurrit, omnes ejus particulæ a plano recedant ſecundum lineas directioni plani fere paralelas.

Intricata atque arctiſſima argumentorum, quæ a D'ALEM-

LEMBERTO adhibentur, inter se connexio extensiorem, quam Dissertationis limites concedunt, exigeret explicationem; hinc varia loca, ex quibus demonstrationes petuntur, ex ipsius Tractatu, cui titulus est *de la Resistance des fluides*, modo citabo & Lectorem ad hæc relegabo.

§. XXIX.

Sit AB orificium, e quo aquæ cum velocitate uniformi effluunt ad percutiendum planum CD; modo dimidium plani & orificii brevitatis ergo consideratur, quoniam ab alterâ parte idem obtinet. *Fig. 3.*

Hæcce Figura comparetur cum Figurâ decimâ tertiâ Authoris, ubi corpus fluido immersum idem officium præstat, ac planum nostrum CD, nimirum particulis aqueis e suâ viâ detorquendis; clarissime etiam demonstratur, (§. XXXVI, XXXVII & LII. ad figuram 15 operis citati) velocitatem secundum AC in puncto D esse infinite parvam & $=0$ considerandam.

§. XXX.

EULERUS hoc ipsum brevius sic demonstrat: curvæ motus semper considerari potest uti a duabus potentiis productus, quarum una, quæ secundum tangentem, *tangentialis*, altera, quæ in directione ad curvam perpendiculari agit, *normalis* audit; ut vero corpus in canali incurvo incedere cogatur, vis tangentialis, per quam corpus in rectâ a centro recedere conatur, annihilari debet; vi autem annihilatâ, velocitas certe erit $=0$; AC vero hic directionem tangentis curvæ designat; ergo velocitas paralela directioni AC$=0$.

§. XXXI.

Velocitas ſecundum AC jam ita determinari poteſt, ut per curvam exprimatur; curva autem exprimitur per rationem abſciſſæ & ordinatæ inter ſe; hinc per CP (x) & PM (y); functio autem ex x & y formata talis eſſe debet, ut fiat $=0$, ſi $x=0$; hinc omnes functionis termini per x multiplicandi ſunt.

§. XXXII.

Demonſtratur etiam, (§. XXXVI. operis jam memorati, comparandâ noſtrâ figurâ cum decimâ quartâ Authoris) velocitatem in curvâ BMD eſſe conſtantem; ſint enim Mm, mm' duo latera curvæ a particulâ M duobus tempuſculis æqualibus & conſecutivis deſcripta, ſitque mn in lineâ rectâ cum Mm; porro conſideretur velocitas mn, uti compoſita ex velocitate reali mm' & velocitate $m'n$, quæ deſtruenda eſt, ut corpus maneat in curvâ; $m'n$ itaque perpendicularis eſt in curvam, ergo $mn=mm'$, id eſt, vis adceleratrix vel retardatrix ſecundum mm' erit $=0$; atque ita velocitas in cæteris elementis ſimul ſumptis vel in totâ curvâ erit conſtans, uti hic demonſtratum fuit, velocitatem eandem fuiſſe in duobus conſecutivis curvæ elementis.

§. XXXIII.

Quoniam orificium AB ſupponitur parvum, & omnes par-

particulæ ſectionis AB eandem habent velocitatem verticalem, non multum a veritate aberrabitur, ſi ſupponatur, omnes particulas ſectionis cujuscumque ad AB parallelæ etiam eandem poſſidere velocitatem verticalem; adeo ut, ſi Pp ſit ſpatium a particulâ inſtanti $\dot{t}$ deſcriptum, PMmp ſit etiam conſtans & proportionale $\dot{t}$; hinc perſpicuum, quod ſi $\dot{t}$ conſtans, Mm quoque debeat eſſe conſtans; quia velocitas in BMD eſt conſtans; ergo Mm eſt proportionale PMmp, unde ſequens curvæ æquatio conſtruitur.

§. XXXIV.

Sit $Ap = x$, $PM = y$, $BM = s$, $AB = a$. Quum curvæ area elementaris ſemper ſit æqualis ordinatæ multiplicatæ in fluxionem abſciſſæ, hinc area elementaris $MPpm = y\dot{x}$; hæc vero eſt (ex præced.) in ratione $\dot{s}$; ergo ad æquationem formandam ponatur $y\dot{x} = C\dot{s}$; ut jam inveniatur quantitas pro C ſubſtituenda, ſic procedendum.

§. XXXV.

Liquet, quod, ubi $\dot{x} = \dot{s}$ (id eſt, inſtanti, quo curva generari incipit, incrementum abſciſſæ eo primo momento æquale ſtatui poteſt fluxioni curvæ ipſius) tunc $y = a$; nam ad initium canalis orificium eſt ipſa ordinata & hinc $a = C$; ergo $y\dot{x} = a\dot{s}$; notum autem ob triangulum rectangulum, $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$; ergo ſi quadratum præcedentis æquationis ſumatur, & loco $\dot{s}^2$ ponatur $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$, habebitur $y^2\dot{x}^2 = a^2\dot{x}^2 + a^2\dot{y}^2$; ergo $\dot{x} = \frac{a\dot{y}}{\sqrt{y^2 - a^2}}$.

§. XXXVI.

Sit velocitas particularum in $A = V$; jam quum per Hydraulica conſtat, velocitates eſſe in ratione inverſâ amplitudinum vaſis, per quas feruntur aquæ, erit velocitas in $PM = \frac{Va}{y}$.

§. XXXVII.

Author pag. 24. ejusdem operis demonſtrat, preſſionem in punctum quodcumque canalis $= \int \dot{s} \times \frac{-\dot{u}}{\dot{t}} = \int -\dot{s} \times \frac{\dot{u}}{\dot{t}}$; s hic notat ſpatium, $\dot{u}$ velocitatem particulæ & $\dot{t}$ tempus; in noſtro caſu $\dot{s} = \dot{x}$, & cum $u = \frac{Va}{y}$, erit $\dot{u} = -\frac{Va\dot{y}}{y^2}$; hinc preſſio in punctum $M = \int -\dot{x} \times \frac{-Va\dot{y}}{\dot{t}y^2} = \int \frac{V^2a^2\dot{y}}{y^3}$, (quia $\dot{x} = \frac{aV\dot{t}}{y}$, ſupra enim invenimus $y\dot{x} = a\dot{s}$, $\dot{s}$ vero $= V\dot{t}$) quod multiplicandum per y, ut habeatur preſſio omnium particularum in amplitudine PM contentarum; prior enim fluens modo denotat preſſionem unius particulæ minimæ; ergo preſſio in $PM = y\int \frac{V^2a^2\dot{y}}{y^3}$; ſed $\int V^2a^2y^{-3}\dot{y} = \frac{-V^2a^2y^{-2}}{2} + C = \frac{-V^2a^2}{2y^2} + C$.

§. XXXVIII.

§. XXXVIII.

Statim adparet, quod hæc vis evanefcat, ubi $y = a$; nam ad orificium, unde aqua effluit, nondum preffionis vis datur; ergo $C = \frac{V^2 a^2}{2a^2}$; ergo integrale completum $= \frac{-V^2 a^2}{2y^2} + \frac{V^2 a^2}{2a^2} = V^2 a^2 \times \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2}\right)$; ergo tota preffio $= y V^2 a^2 \times \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2}\right)$.

§. XXXIX.

Hoc autem modo obtinet, fi AB & PM funt æquales; fi vero AB non $=$ PM, a priori quantitate fubtrahenda eft preffio, quæ provenit a parte BbM; hæc autem fic invenitur: nimirum preffio verticalis pro quocumque curvæ puncto fuperius inventa $= V^2 a^2 \times \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2}\right)$ multiplicanda eft per elementum ordinatæ $= \dot{y}$, five per exceffum orificii; hæc autem quantitas integrata dabit quantitatem a priori fubtrahendam $= V^2 a^2 \dot{y} \times \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{1y^2}\right) = \int \frac{V^2 a^2 \dot{y}}{2a^2} - \int \frac{V^2 a^2 \dot{y}}{2y^2} = \int \frac{V^2 \dot{y}}{2} - \int \frac{V^2 a^2 \dot{y}}{2y^2}$; jam $\int \frac{V^2 \dot{y}}{2} = \frac{V^2 y}{2}$ & $\int \frac{-V^2 a^2 y^{-2} \dot{y}}{2} = \frac{-V^2 a^2 y^{-1}}{-2} = \frac{V^2 a^2}{2y}$; ergo totum integrale $V^2 a^2 y \times \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2}\right) = \frac{V^2 y}{2} + \frac{V^2 a^2}{2y} + C.$

§. XL.

§. XL.

Hic iterum patet, quod ſi $y = a$, tota preſſio, ſcilicet in orificio, evaneſcat; ergo $\frac{V^2 y}{2} + \frac{V^2 a^2}{2y} + C = \frac{V^2 a}{2} + \frac{V^2 a^2}{2a} + C = o$; hinc $C = -\frac{V^2 a}{2} - \frac{V^2 a^2}{2a}$; ergo integrale completum $= \frac{V^2 y}{2} + \frac{V^2 a^2}{2y} - \frac{V^2 a}{2} - \frac{V^2 a^2}{2a} = \frac{V^2}{2} \times (y - a) + \frac{V^2 a^2}{2y} - \frac{V^2 a^2}{2a}$; ſed $V^2 = 2ph$; p hic ſignificat vim adceleratricem aquæ ſive ipſius pondus; h vero altitudinem, quæ debetur velocitati V; ergo preſſio in PM, ſi hicce valor ſubſtituatur, erit (poſtquam hæc poſterior quantitas a priori ſubtracta fuerit; prodibit nimirum tunc pro preſſione lamellæ PM, $\frac{V^2 y}{2} - \frac{V^2 a^2}{2y} - \frac{V^2 y}{2} + \frac{V^2 a}{2} - \frac{V^2 a^2}{2y} + \frac{V^2 a^2}{2a}) = phy - \frac{pha^2}{y} - phy + pha - \frac{pha^2}{y} + pha = 2pha - \frac{2pha^2}{y}$.

§. XLI.

Jam ex præcedenti Theoriâ ſequentes fieri poſſunt concluſiones: ex æquatione $\dot{x} = \frac{a\dot{y}}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ (§. XXXV.) patet, quod ubi $x = AC$, id eſt, ubi vena ad planum pervenit, $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ non ſit $= o$, ſaltem niſi y ſupponatur infinitum, quod phy-

physice fieri nequit, nam si in triangulo rectangulo non Hypothenusa, sed alterum latus sumatur pro radio, tunc tertium latus erit tangens alterius anguli; hinc si Mn radius, Fig 4.
nm erit tangens; jam $\dot{x}, \dot{y}$ :: Radius vel unitas, ad tangentem anguli nMm; ergo $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{\text{Tang. } n\text{M}m}$.

§. XLII.

Clare jam perspicitur, quod, ut curva evadat plano CD parallela, angulus nMm debeat esse rectus; tangens autem recti est infinite magnus; hinc $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{\infty} = 0$; quoniam vero y infinitum fieri nequit, erit $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 a^2}}$, Ergo non $= 0$; neque ideo curva plano parallela evadet, sed cum eodem efficiet angulum eo acutiorem, quo majorem ratione orificii planum habeat extensionem; perspicuum enim, angulum Mmn jam in considerationem venire; quoniam enim curva jam plano adcessit, hic proprie est angulus, quem cum plano format; si jam $\dot{y}$ pro radio sumatur, erit $\dot{y}, \dot{x}$ :: 1, ad Tang. anguli M$mn = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}$; ubi vero $\sqrt{y^2 - a^2}$ parvum sit ratione a, $\frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ sive Tangens Mmn major erit, atque ideo angulus Mmn etiam major; Si ergo y sit parvum ratione a, $y^2 - a^2$ etiam erit parvum;

si

ſi vero y ſit magnum reſpectu dividendi a, tunc tangens evadet minimus & angulus acutiſſimus; quo acutior vero eſt angulus, quem curva cum plano format, eo magis curva ad ſitum plano parallelum adcedit; cum tamen illa extenſiò ſatis magna ſit & vocata b, habebitur $2pha - \frac{2pha^2}{b}$ pro fluidi preſſione; y hic mutatur in b, quia in C ordinata y ipſum planum evadit; ergo ſi b multo majus ſit quam a, liquet, preſſionem futuram paulo minorem quam $2pha$, ſive dupla altitudo velocitati aquæ effluentis debita; quod cum experimentis KRAFTII convenit.

Non comprehendo, quomodo acutiſſimo D'ALEMBERTO, neque ulli authorum poſt eum, non in oculos incurrerit, hancce concluſionem multis in caſibus in abſurdum abire; ſi enim ſupponatur foramen, unde exſilit vena aquea, majus ratione plani, vel ſi circumferentia foraminis ſtatuatur æqualis ei plani, preſſio evadit nulla, nam ſi $a = b$, $2pha - \frac{2pha^2}{b} = 0$, quod omni rationi & experientiæ contrarium eſt; quo enim amplior eſt vena, eo impulſionis vis eſt major; ergo hæcce D'ALEMBERTI formula mihi Primo videtur non in uſum vocari poſſe, niſi ubi planum eſt infinite magnum reſpectu foraminis effluxionis.

§. XLIII.

Quoniam Illuſtris D'ALEMBERT ſuam expreſſionem aliquantulum ab illâ BERNOULLII differre obſervat, in hanc ulterius ſic inquirit; ſupponit BERNOULLI, curvas per unamquamque fluidi particulam deſcriptas conſiderari poſſe, uti canales, per quos corpus movetur; ſit igitur AMD canalis,

lis, in quo movetur corpusculum m; sit V altitudo debita velocitati in M; jam quærenda est summa omnium potentiarum momentanearum axi parallelarum. *Fig. 5.*

§. XLIV.

Sit potentia tangentialis in $M = p$, & variabilis secundum quamcumque legem; agat illa potentia tangentialis secundum Mn; decomponatur in Mq, parallelam ad AC, & in qn; ergo Mn, $Mq :: p$, ad vim secundum $Mq :: \dot{s}$, (nam fluxio arcus semper est æqualis fluxioni tangentis) $\dot{x}$; ergo vis secundum $Mq = \frac{p\dot{x}}{\dot{s}}$; sed vis multiplicata per fluxionem temporis dat fluxionem velocitatis; ergo $\frac{p\dot{x}}{\dot{s}} \times \dot{t}$ $=$ fluxioni velocitatis in directione parallela ad AC.

§. XLV.

Vis Centrifuga in $M = \frac{2mV}{R}$ (§.XIV), quæ multiplicata in fluxionem temporis $\dot{t}$ dat iterum fluxionem velocitatis a vi centrifugâ oriundæ $= \frac{2mV\dot{t}}{R}$.

§. XLVI.

Sit MC in directione vis centrifugæ, quæ est perpendicularis in curvam; MC ergo exprimat vim centrifugam; decomponatur in RC, parallelam ad AC, & in RM; jam *Fig. 6.*

CM, RC :: $\frac{2 m V \dot{t}}{R}$, ad vim ſecundum RC; hic bene adtendendum, quod (uti in §. XIV.) R deſignet radium oſculi.

§. XLVII.

Quum angulus CMm, quia CM in curvam eſt perpendicularis, quippe exprimens vim centrifugam, rectus eſt, erit $=$ MRC; ſique demittatur ex vertice perpendicularis in hypotenuſam, hæc duo triangula CMn & Mmn erunt ſimilia: eodem modo probatur, & RMC ſimile eſſe hiſce duobus; ergo CM, RC :: Mm, nm :: $\dot{s}$, $\dot{y}$ :: $\frac{2 V m \dot{t}}{R}$, ad vim centrifugam ſecundum RC $= \frac{2 V m \dot{t}}{R} \times \frac{\dot{y}}{\dot{s}}$; ſed $\dot{t} = \frac{\dot{s}}{\sqrt{2 V}}$; ergo $\frac{2 V m \dot{t}}{R} \times \frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{2 V m \dot{y}}{R \sqrt{2 V}} = \frac{m \dot{y} \sqrt{2 V}}{R}$: ſumma ergo preſſionum ſecundum AC eſt $= \frac{m \dot{y} \sqrt{2 V}}{R} + \frac{p \dot{x} \dot{t}}{\dot{s}}$ (§. XLIV); ſumitur hic R $= \frac{-\dot{y} \dot{s}}{\ddot{x}}$ (uti §. XIV.); $p \dot{t}$ autem $= \frac{-m \dot{V}}{\sqrt{2 V}}$; (vis enim adceleratrix (§. XII.) $=$ vi motrici diviſæ per maſſam, $= \frac{p}{m}$, quæ multiplicata in fluxionem temporis dat fluxionem velocitatis $= \frac{p \dot{t}}{m} = \frac{-\dot{V}}{\sqrt{2 V}}$, quia velocitas $= \sqrt{2 V}$, cujus fluxio eſt negativa, quia velocitas decreſcit ſecundum

dum tangentem, & hinc $p\dot{t} = \frac{-m\dot{V}}{\sqrt{2V}}$;) hisce ergo valoribus substitutis, tota pressio secundum $AC = \frac{-m\ddot{x}\sqrt{2V}}{\dot{s}}$ $- \frac{m\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}\sqrt{2V}}$, cujus integrale sic invenitur.

§. XLVIII.

$-\frac{m}{\dot{s}}$ est constans; $\ddot{x}\sqrt{2V} + \frac{\dot{V}}{\sqrt{2V}} \times \dot{x}$ comparari potest cum $x\dot{y} + y\dot{x}$, quæ est fluxio xy; patet, in uno termino dari vicissim fluxionem alterius; nam $\ddot{x}$ est fluxio $\dot{x}$ & $\frac{\dot{V}}{\sqrt{2V}}$ est fluxio $\sqrt{2V}$; ergo fluens erit $-\frac{m}{\dot{s}}$ $\times\ \dot{x}\sqrt{2V} + C$.

§. XLIX.

Vocetur velocitas in B, sive in foramine $\sqrt{2k}$; patet, pressionem in B adhuc nullam esse; ergo in B $\sqrt{2V} = \sqrt{2k}$ *Fig. 7.* & $\dot{s} = \dot{x}$; ergo $-\frac{m}{\dot{s}} \times \dot{x}\sqrt{2V} + C = -m\sqrt{2k} + C = 0$; ergo $C = m\sqrt{2k}$ & integrale completum erit $= \frac{-m}{\dot{s}}\dot{x}\sqrt{2V}$ $+ m\sqrt{2k}$; jam si $\frac{\dot{x}}{\dot{s}} = 0$, uti contingit, quando fluidum adtingit planum, (quod sic probatur; $\dot{s}$, $\dot{x}$ :: 1, Cos. mMn; hic autem hypotenusa pro radio sumitur; patet etiam, quod, ut fluidum plano parallelum evadat, angulus mMn debeat esse rectus; sed Cos. anguli recti est $=0$; ergo $\frac{\dot{x}}{\dot{s}}=0$.) pressio in iis punctis est $=m\sqrt{2k}$; & si velocitas supponitur constans vel uniformis, non habebit fluxionem; ergo $\dot{V}=0$, & $V=k=$ velocitati initiali; ergo $-m\ddot{x}\frac{\sqrt{2V}}{\dot{s}}-\frac{m\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}\sqrt{2v}}$ fiet $=-\frac{m\ddot{x}\sqrt{2k}}{\dot{s}}$, (altero termino evanescente, quia per $\dot{V}$ vel o multiplicatur) cujus integrale est $-\frac{m\dot{x}\sqrt{2k}}{\dot{s}}+C$.

Patet autem ex præcedentibus, pressionem in B vel in orificio esse nullam, & semper fluxionem abscissæ in initio curvæ esse æqualem fluxioni arcus; Ergo $-m\sqrt{2k}+C=0$, & $C=m\sqrt{2k}$; Pressio autem sic correcta erit $-\frac{m\dot{x}\sqrt{2k}}{\dot{s}}+m\sqrt{2k}=m\sqrt{2k}\times\left(1-\frac{\dot{x}}{\dot{s}}\right)=m\sqrt{2k}$, si $\frac{\dot{x}}{\dot{s}}=0$; Ergo summa omnium pressionum momentanearum a B usque in D erit in omnibus casibus $=m\sqrt{2k}$.

§. L.

Sit jam velocitas uniformis aquæ effluentis $=\sqrt{2A}$; ad libitum sumatur tempus quodcumque t & supponatur eo tempore

pore effluere quantitatem aquæ $= m$; ſit p potentia, quæ ſuſtinet planum; habebitur $pt = m\sqrt{2A}$: Cum vero maſſa m exeat uniformiter tempore t cum velocitate $\sqrt{2A}$ ex foramine 1, erit $1 \times \sqrt{2A} \times t = m$, & $t = \frac{m}{\sqrt{2A}}$; Ergo $p = \frac{m\sqrt{2A}}{\frac{m}{\sqrt{2A}}} = 2A$;

Tanta eſt preſſio aquæ ſecundum Bernoullium, unde concludit, eam eſſe æqualem ponderi cylindri, cujus baſis eſt foramen & altitudo dupla illius, quæ aquæ effluentis velocitati debetur.

§. LI.

Videtur hæcce Theoria ad ſequentes propoſitiones reduci poſſe.

Primo inſtanti $\dot{\theta}$ temporis cujuscumque t effluant per orificium AB particulæ aliquot, quarum unaquæque ſit $= n$ & numerus $= \int n$; patet, quod, ſi orificium ſupponatur diviſum in portiones minimas $\dot{\alpha}$, habebitur $n = \dot{\theta} \times \dot{\alpha} \times \sqrt{2A}$; nam in eodem inſtanti particula exeuns n eo major erit, quo velocitas $\sqrt{2A}$ eſt major; ergo ob eandem cauſam tempore quocumque t vel $\int \dot{\theta}$ numerus particularum exeuntium erit $= \int \alpha t \sqrt{2A}$.

§. LII.

Jam unaquæque particula n, poſtquam per orificium AB exiit, pervenit ad planum CD deſcribendo curvam quamcunque velocitate quâcumque eâ cum circumſtantiâ, quod, cum ad planum adcesserit, ejus motus evadat plano CD fere parallelus; tunc summa pressionum particulæ cujuscumque $\dot{\alpha}$ a transitu per orificium AB, usque dum pervenerit ad planum CD, erit $\dot{\alpha}\sqrt{2A}$: nam pressio hic, uti quantitas motus, per massam $\dot{\alpha}$ & velocitatem $\sqrt{2A}$ mensuratur; summaque pressionum omnium particularum $\dot{\alpha}$, quæ eodem tempore ex orificio AB effluunt, erit $=\int\dot{\alpha}\sqrt{2A}$; ergo tempore t pressio erit $=\int\dot{\alpha}\sqrt{2A}\times\sqrt{2A}\times t$, nam pro toto canali jam quæritur pressio, hinc $\int\dot{\alpha}\sqrt{2A}$ multiplicanda est per longitudinem canalis sive spatium percursum $=t\sqrt{2A}$; ergo tota pressio $=\int\dot{\alpha}\times 2A\times t$.

§. LIII.

Ex antecedentibus patet, pressionem a Bernoullio determinatam esse summam pressionum, quas particulæ eodem tempore ex vase effluentes in planum exercent a momento, quo orificio exeunt, usque dum planum CD adtigerint; d'Alemberto autem videtur, summam earum pressionum non repræsentare veram pressionem, quæ hic locum obtinet; summa enim earum pressionum, non agit nisi tempore finito, id est, tempore, quod particulæ impendunt ad perveniendum ab orificio usque ad planum CD; hic vero requiritur pressio momentanea, id est, ea, quam eodem instanti in planum exercent omnes particulæ, quæ eo instanti replent spatium ABCD; hæcce pressio ab eâ Bernoullii differt; consideremus enim particulas, quæ curvam BMD describunt, uti totam curvam instanti quocumque obtegentes, & quæramus pressionem, quam eo instanti in planum exer-

exercent; tunc inveniemus eandem BERNOULLII methodum sequentes.

§. LIV.

1°. Quod pressio a vi centrifugâ orienda sit $= \frac{-2V\ddot{x}}{\dot{s}}$; Fig. 8.

sit enim RM perpendicularis in curvam & repræsentet vim centrifugam, erit hæc $= \frac{2V\dot{s}}{R} = \frac{-2V\dot{s}\ddot{x}}{\dot{s}\dot{y}}$ (§. XIV.) $= \frac{-2V\ddot{x}}{\dot{y}}$; decomponatur autem RM in directionem pressionis suæ in curvam & in RP. Tunc RM, RP :: Mn, nm :: $\dot{s}$, $\dot{y}$; quia RMP & mMn sunt triangula similia; ergo $\dot{s}$, $\dot{y}$ :: $\frac{-2V\ddot{x}}{\dot{y}}$, ad pressionem quæsitam $= \frac{-2V\dot{y}\ddot{x}}{\dot{y}\dot{s}}$ $= \frac{2V\ddot{x}}{\dot{s}}$.

§. LV.

2°. Pressio a vi tangentiali orienda sic determinatur; sit Fig. 9.

MT in directione tangentis $= p = \frac{-m\dot{V}}{t\sqrt{2V}}$ (§. XLVII.) $= \frac{-\dot{s}\dot{V}}{t\sqrt{2V}}$; sitque pressio in curvam a gravitate orienda MP, hinc in solum perpendicularis; jam MT, MP :: $\dot{s}$, $\dot{x}$ (§. XLVII.) :: $\frac{-\dot{s}\dot{V}}{t\sqrt{2V}}$, ad pressionem a vi tangentiali oriun-

dam

dam $= \frac{-\dot{s}\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}t\sqrt{2V}} = \frac{-\dot{V}\dot{x}}{t\sqrt{2V}} = \frac{-\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}}$; nam $\dot{t} = \frac{\dot{s}}{\sqrt{2V}}$;

ergo preſſio particulæ cujuscumque eſt $= \frac{-2V\ddot{x}}{\dot{s}} - \frac{\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}}$;

ſc. æquatur ſummæ preſſionum a vi tangentiali & centrifugâ oriundarum ſecundum directionem PM plano perpendicularem, cujus ſummæ integrale hoc artificio adproximatur.

§. L V I.

$x\dot{\dot{y}} = x\dot{y} + y\dot{x} - y\dot{x}$, & integrando erit $\int x\dot{y} = xy - \int y\dot{x}$;

eodem modo ſumatur fluens prioris termini $-2\frac{V\ddot{x}}{\dot{s}}$, quæ

erit $-\frac{2V\dot{x}}{\dot{s}} + \int\frac{2\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}}$; hinc ipſa fluens prioris termini

preſſionem exprimens erit $= -\frac{2V\dot{x}}{\dot{s}} + \int\frac{2\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}} - \int\frac{\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}} + C$

$= -\frac{2V\dot{x}}{\dot{s}} + \int\frac{\dot{V}\dot{x}}{\dot{s}} + C.$

§. L V I I.

Fig. 3. Notum, preſſionem nullam dari in B, ubi $\dot{x} = \dot{s}$ & $\dot{V} = 0$, uti & $V = k$; ergo $-2k + C = 0$, & $C = 2k$; hinc

integrale completum $= \frac{-2V\dot{x}}{\dot{s}} + 2k + \int\frac{\dot{x}\dot{V}}{\dot{s}}$; ubi vero $\dot{V}$

eſt negativum, id eſt, ſi velocitas decreſcat ab A verſus B, illa

illa quantitas erit minor quam $-\frac{2V\dot{x}}{\dot{s}} + 2k$; ergo pressio in curvâ erit $= 2k - P$; (P suppositâ quantitate positivâ $= \frac{2V\dot{x}}{\dot{s}} + \int\frac{-V\dot{x}}{\dot{s}}$ ob V negativum.) Ergo quoniam numerus curvarum æqualis est numero punctorum orificii AB, sequitur, ut, si istud orificium $= 1$, pressio futura sit $1 \times (2k - P)$, id est, minor illâ BERNOULLII & conformior cum nostrâ.

§. LVIII.

Fatendum tamen, quod, ubi velocitas adcrescat ab A versus B, hæcce posterior formula daret expressionem majorem quam $2k$, quod BERNOULLII Regulæ contrarium; præterea hæcce eadem formula §. præc. inventa cum illâ BERNOULLII convenit, ubi $\dot{t} = 0$, id est, ubi velocitas supponitur constans in omnibus curvis; hæcce vero posterior hypothesis, uti & ipsa methodus, quam plurimis subjicitur difficultatibus; præterea hæcce BERNOULLIANA methodus vitiosa est, quum vis centrifuga non intrare debeat valorem pressionis, neque multiplicandum igitur per $\frac{\dot{y}}{\dot{s}}$ & $\frac{\dot{x}}{\dot{s}}$.

§. LIX.

Liceat ad §. LII. observare, quod Illustris D'ALEMBERT neque sic tollat difficultatem, quam (§. XXVII.) objecimus; præterea si pressio æquivaleat summæ pressionum, quas particulæ eo tempore effluentes in planum exercent a momento, quo ex orificio exeunt, usque dum planum adtigerint, certum eſt, preſſionem debere eſſe proportionalem diſtantiæ inter orificium vaſis & inter planum; quod experientiæ non eſt conſentaneum; tandem nullam perſpicio dari cauſam, quæ antecedentium particularum impetum per vim ſequentium, eâdem, ſi non minori, velocitate motarum, augere poſſit.

§. L X.

Hæ ſunt præcipuæ de aquæ impetu Theoriæ; inter omnes tamen, quas recenſui & explanavi, plurimum adridet illa D'ALEMBERTI; nimirum in caſibus, ubi plani extenſio multum ſuperat illam orificii effluxus; etenim ad plures circumſtantias, quas alii omiſerunt, adtendit; eo enim conformior cum Naturæ legibus videtur eſſe Theoria Mathematica, quo plures complectitur circumſtantias; etſi abſtractiores Theoriæ Geometris magis placent quam complexiores, adtamen a Phyſicis non ſatis adcurate ſæpe examinantur.

§. L X I.

Ex præcedentibus igitur conſtat, ab Authoribus comparationem inſtitui inter pondus cylindri aquei & vim venæ, & quidem hanc ob cauſam, quia altitudinem cylindri conſiderant tanquam altitudinem, ex quâ corpus libere cadendo acquirit ipſam aquarum effluentium velocitatem; aquæ vero effluentes nunquam eum velocitatis gradum adtingunt, niſi omnes ſeponantur reſiſtentiæ & foramen ſtatuatur infinite parvum, quod phyſice fieri nequit; ergo non tam altitudo aquæ ſupra foramen, quam quidem illa, quæ reali aquæ effluentis velocitati reſpondet, conſideranda eſt.

§. LXII.

§. LXII.

Foramen effluxus etiam non respondet amplitudini venæ in calculo; quum enim vena ad aliquam a foramine distantiam contrahatur, & ibi, licet omni rigore nunquam fiat, velocitas particularum fere constans videatur, loco foraminis amplitudo venæ contractæ est consideranda in virium computationibus: hæc autem venæ contractio pro parte prævenitur adposito tubulo, pro cujus vario respectu foraminis diametro etiam velocitas differt; consulatur DAN. BERNOULLII Hydrodynamica; Neque absque tubulo venæ contractæ ratio ad eam foraminis semper eadem est, sed a diversis pendet circumstantiis; NEWTONUS eam constanter posuit uti 1 ad $\sqrt{2}$, vel 21 ad 25; alii ut 21 ad $25\frac{1}{2}$; 5 ad 6; $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$; 41 ad 52 &c.; iterum & de hisce ad eundem Authorem relegamus Lectorem.

§. LXIII.

Ex hisce perspicitur, unde tanta opinionum differentia proveniat: sc. varii Authores altitudinem aquæ supra foramen cum eâ, quæ velocitati aquæ effluentis debetur, & orificium effluxus cum venâ contractâ confuderunt; hæc autem est differentia cylindri correcti ab ita dicto non correcto, & vera videtur causa errorum, quia, si hæcce distinctio non observatur, pleraque experimenta simplicem in cylindro altitudinem probare videntur; an non & aliæ dentur, merito dubitatur, quum plures productum a meis aliorumque experimentis diversum acceperint, & tamen ad retardationes probe adtenderint.

CAPUT TERTIUM.

Comprehendens Experimenta circa Percussionem Fluidorum.

§. I.

Jam ad experimenta transeo, quorum eventum ingenue tradam, licet quibusdam in locis non conveniant neque inter se, neque cum Theoriâ; omnem tamen adhibui adtentionem, iisque instituendis adstitit dexterrimus Artifex Leidensis J. Paauw, A. L. M. & Philosophiæ Doctor, ita ut ignorem, cui impedimento infelicem nonnullorum successum, licet s'Gravesandiano majorem, adtribuam, nisi quod machinâ non sufficientis altitudinis & foraminulis minoribus usus fuerim, cum & D. Bernoulli probe observaverit, velocitatem aquæ per minima foramina effluentis multum a Theoriâ aberrare; imo Cl. Lulofs ingentibus prorsus machinis instituit experimenta circa quantitatem aquæ effluentis, quæ longe differebant ab experimentulis, quæ in Collegiis Physicis exhibentur, quæque forsan aliquando publicæ luci est traditurus; Instituta fuerunt prope pagum de Oudewetering; aquarum receptaculum erat Lacus Harlemensis, vasculum, quo mensurabatur aquæ effluentis quantitas, erat quinquaginta fere doliorum; scopus erat cataractarum effectum indagare: iisdem vero in majori, quam nostra, machinâ, ubi minimus error non tam insignem producit differentiam

in

in virium computatione, repetendis tempus defuit; ubi dein plus otii concedatur, forsan hoc thema ulterius pro viribus expedire conabor; interim hæcce tentamina benevolo accipiantur animo, etiam atque etiam rogo.

§. II.

Usus fui pyxide ligneâ, 16 pollices longâ, 10 lata, 18 alta, 16 vero ad oras incisas; unum datur foramen horizontale & quinque lateralia unum supra alterum tres pollices inter se distantia; inferius vero 1 pollicem a fundo est remotum; cæterum eodem modo ac in Machinâ s'GRAVESANDIANA ponuntur duæ sectiones transversales ad turbationem ex motu per infusionem oriundam præcavendam; hisce foraminibus varii adaptantur tubi, quorum uti & lamellarum perforatarum iisdem superinpositarum diametros in experimentorum recensione indicabo; hisce autem methodo s'GRAVESANDIANA cylindrus varii mutabilisque ponderis duobus filis suspensus, BERNOULLIANA vero & MARIOTTIANA plana vectibus adfixa opponuntur ad venam aqueam excipiendam.

§. III.

Antequam ad experimentorum producta recensenda transeo, haud incongruum videtur nonnulla de methodis, quibus instituta fuerint, præmittere, & calculum, quem varii Authores ad suas conclusiones stabiliendas inierint, breviter repetere.

s'GRAVESANDIUS nullam sui adserti, nimirum *vim aquæ esse in ratione simplicis altitudinis velocitati debitæ*, demonstrationem a priori proponit; unice comparationem instituit

 inter

inter pressionem fluidi tranquilli in fundum vasis, cui includitur, & inter distantiam, per quam cylindrus ex suo situ horizontali in obliquum a vi venæ aqueæ propellitur; hæcce distantia in ipsius experimento fuit $1\frac{1}{4}$ pollicis; cylindrus suspenditur duobus filis 29 pollices longis.

Latera trianguli, quod a filis sic oblique tractis formatur, comparari possunt cum actionibus vel potentiis; ergo latus verticale exprimet gravitatem, latus vero alterum vel distantia, perquam cylindrus ex situ suo horizontali propulsus fuerit, denotabit impetum venæ aqueæ: jam hæcce ratio instituitur; pondus cylindri sive 2760 gr. est ad aquæ impetum, uti 29, ad $1\frac{1}{4}$ sive uti 116, 5; ergo impetus aquæ = 119 granis. Hancce actionem experimento detectam dein Auctor confert cum illâ, quæ sepositis omnibus retardationibus obtineret quaeque ex quantitate aquæ certo tempore effluentis determinatur; quantitas autem aquæ, quæ 10″ effluxit eâdem velocitate, quâ in experimento, æquavit $41\frac{1}{4}$ uncias, quæ ex pondere pedis cubici aquæ = 63 ℔ 7 unc. 2 drachm. 2 scrup. cognito inveniuntur comprehendere circiter 75 pollices cubicos.

Jam conferuntur 75 pollices cubici cum cylindro, cujus diameter est = foramini effluxus sive 0, 43 poll., cujus vero altitudo sequenti ratione invenitur; 7, 22, sive diameter circuli ad circumferentiam, uti 0, 43, 1, 35 = circumferentiæ foraminis, quæ multiplicata in dimidium radium dat aream = 0, 145125 poll. cubic. ergo 75 poll. cub. = cylindro, cujus basis est 0, 145125 & altitudo x;

$$\text{ergo } x = \frac{75}{0,145125} \text{ poll. cub.} = 517 \text{ poll.} = 42 \text{ ped.},$$

quod ab Authoris producto fere duos pedes differt, quoniam nonnulla parvi momenti brevitatis gratiâ in calculo omisimus.

Apud

Apud omnes autem conſtat, $V^2 = 60\ A$; ubi A deſignat altitudinem velocitati V debitam, ſi corpus ex altitudine 15 pedum tempore 1″ ceciderit; jam cum 10″ percurruntur 42 pedes, 1″ abſolvuntur modo 4; ergo $A = \frac{4 \times 4 \text{ ped.}}{60 \text{ poll.}}$ $= 3, 2$ pollices; hæc vero eſt altitudo quæſita cylindri, cujus pondus iterum præcedenti modo invenitur $= 127$ gr. Si itaque 8 grana pro retardationibus ſubtrahantur, patebit, impetum aquæ proxime reſpondere ſimplici altitudini velocitati aquæ debitæ. Hucusque Authorem ſecuti fuimus; noſtra vero experimenta, eâdem omnino methodo inſtituta, plerumque duplicem aquæ effluentis velocitati debitam altitudinem probant; ignoro itaque, quæ ſit cauſa, quæ eventum adeo diverſum in Authoris experimento produxerit, cum a nobis omnis adhibita fuit exactitudo tam in velocitate determinandâ ex quantitate aquæ effluentis, quam in diſtantiâ, per quam cylindrus ex ſitu propulſus fuerit, probe circino menſurandâ; Illuſtris autem s'GRAVESANDII auctoritati ſummorum virorum non ſolum auctoritatem opponimus, ſed & ipſam ſanam rationem, quâ hæcce ſententia conſiſtere nequeat: etenim extra omne dubium poſitum eſt, aquam in motu poſitam majorem exercere preſſionem quam in quiete; ſecundum vero Authorem contrarium obtineret; aquæ enim quietæ preſſio eſt in ratione columnæ ſupra foramen; altitudo vero, quæ debetur velocitati aquæ effluentis, ſæpe dimidium modo æquat veræ altitudinis in vaſe; ergo in ſyſtemate Authoris aquæ motæ preſſio modo dimidia foret preſſionis aquæ tranquillæ, quod omni ſanæ Theoriæ & Experientiæ repugnat. Hiſce ſatis, ſententiam, aquæ impetum in ratione ſimplicis altitudinis aquæ effluentis velocitati debitæ ſtatuentem, idoneis rationibus non eſſe ſufſultam, demonſtraſſe exiſtimamus.

§. IV.

§. I V.

s' GRAVESANDIANA methodus determinandæ velocitatis ex quantitate aquæ certo tempore effluentis præſtare videtur BERNOULLIANÆ ex jactus amplitudine; quantitas enim aquæ ſemper conſtans manet neque tantam patitur ab aëre reſiſtentiam, acquidem jactus, cujus amplitudo pro minimâ circumſtantiâ variat; præterea ſi differentis diametri foramina adhibentur, non niſi magnâ cum difficultate in uſum vocari poteſt hæcce methodus; unice cum fructu inſervire poſſet ad velocitatem pro eodem tubo ſed diverſâ aquæ altitudine determinandam.

§. V.

Quod ad inſtrumenta adtinet, videtur per vectem, ſi alia uſum non vetarent, melius actionem exprimi poſſe, quam per ſuſpenſionem cylindri; hic enim modo pondus ad pondus adplicatur, cum in vecte ſemper datur actio ex pondere multiplicato in diſtantiam a centro motus computanda.

§. V I.

Ad experimenta vero BERNOULLIANA & MARIOTTIANA adtendens obſervavi, difficulter prima fronte diſtingui poſſe, num æquilibrium detur nec ne; hocce autem vitium correxi imponendo hypomochlio ſtylum fixum, mobilem vero ipſi ſtateræ; ſi jam hi ſtili ſibi mutuo e directo opponuntur, datur æquilibrium: Præterea in hiſce cum KRAF-

TIO

TIO deprehendi, tantam hic vigere adtractionem inter tubum & planum, contra quod vena impingit, ut unâ & dimidiâ unciâ ſuperari non potuerit, quod incommodum in s'GRAVESANDII experimento, ubi cylindrus per diſtantiam a foramine extra adtractionis terminum propellitur, non obtinet; hinc ad hoc impedimentum præcavendum in experimento BERNOULLIANO planum 3 lineas, & in MARIOTTIANO 7 a tubo removi; differentia vero in effectu prodit, cum maxima vis in effluxu horizontali prope tubum datur; in verticali vero eo major, quo longius a tubo, quia tunc altitudo columnæ in planum ruentis augetur; hæc vero, quum in parvâ diſtantiâ vix diſcrimen producant, calculare omiſi: hanc adtractionem adhibendis planis eburneis tollere fruſtra conatus fui, quum inde nihil imminuta fuerit.

§. VII.

Statera MARIOTTIANA ad minimum ſuperpondium non ſatis mobilis eſt, quod adhibendis longioribus vectis brachiis corrigeretur.

§. VIII.

Differentia datur inter actionem fluidi horizontaliter projecti & inter eam, ubi fluidum horizontali foramine effluit, cum in hacce fluidum ſuâ quoque gravitate, cujus actio in jactu horizontali quaſi ſuſpenditur, atque ideo majori vi agit; hinc vi aquæ pondus ipſius venæ aqueæ addendum putat magnus D'ALEMBERTIUS: non incongruum itaque paulo penitius hanc rem exponere judico. In noſtris experimentis foramen fuit circulare, quod D'ALEMBERTIUS rectangulare adſumit; hinc ſupputationes noſtræ diverſam ab illâ D'ALEMBERTII formulam ſuppeditarunt.

§. IX.

Sit p pondus pollicis cubici aquei; ſit 1, n, ratio radii ad ſemicircumferentiam; patet elementum vel fluxionem ſolidi ex circumvolutione venæ aqueæ generati eſſe $= n y^2 \dot{x}$; hinc pondus columnæ $= p \int n y^2 \dot{x}$; ſed $\dot{x} = \frac{a \dot{y}}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ (§. XXXV. Cap. II.); ergo pondus quæſitum $= apn \int \frac{y^2 \dot{y}}{\sqrt{y^2 - a^2}}$

$$= apn \times \overline{\tfrac{1}{2} y \sqrt{y^2 - a^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \times \text{Hyp. Log. } \overline{y + \sqrt{y^2 - a^2}}} + C.$$

Ad determinandam conſtantem obſervandum, pondus evaneſcere, quando $y = a$; hinc naſcetur $C = -\frac{1}{2} a^2$ Hyp. Log. a; ergo pondus quæſitum erit $= apn \times \overline{\tfrac{1}{2} b \sqrt{b^2 - a^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \times \text{Hyp. Log. } \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}}$; invenimus autem, impulſum horizontalem ex foramine circulari eſſe $= 2npha^2 - \frac{2npha^4}{b^2}$; ergo impulſus verticalis erit

$$2npha^2 - \frac{2npha^4}{b^2} + apn \times \overline{\tfrac{1}{2} b \sqrt{b^2 - a^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Hyp. Log. } \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}}.$$

Ut ſupputationum praxis eo facilior reddatur, omitti poteſt a^2 reſpectu b^2, quoniam pleraque orificia ſatis parva ſunt ratione plani, in quod aqua incurrit; hinc

hinc sequentem obtinemus formulam $2npha^2 + apn \times \overline{\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ Hyp. Log. } \frac{2b}{a}} = 2npha^2 + \frac{apn}{2} \times \overline{b^2 + a^2 \text{ Hyp. Log. } \frac{2b}{a}}$.

§. X.

Exempli causâ supputationem ex primo experimento subductam propono.

Pondus pollicis cubici aquæ statuatur $= 282$ granis $= p$.

$n = 3, 141.$

$a = 0, 25$ poll.

$h = 14, 11.$

Ergo $2npha^2$ (quoniam rejicimus quantitatem perexiguam $\frac{2npha^4}{b^2}$, si planum est majoris extensionis respectu foraminis) $= 1562$ granis; in primo autem experimento tubi orificium non fuit instructum lamellâ perforatâ, hinc vena contracta, licet minus sensibilis, in ipso tubo orta fuit, ad quam orificium reducendum est; sed juxta NEWTONUM orificium est ad venam contractam in ratione $\sqrt{2}, 1 :: 1, 41, 1$; ergo quantitas inventa dividenda est per $1, 41$, & tunc prodeunt 1108: porro ex iisdem invenitur

$\left. \begin{array}{l} b^2 = 0, 390. \\ a^2 = 0, 0625. \end{array} \right\}$ hic enim modo dimidium orificii & plani consideratur.

Log. Hyp. $\frac{2b}{a} =$ Log. Hyp. $5 = 1, 6094379$;

ergo $\tfrac{1}{2}apn$ ($b^2 + a^2$ Log. Hyp. $\frac{2b}{a}$) $= (110, 7225)$

 $\times$ (o

$\times$ (0, 390 + 1, 609437 $\times$ 0,0625) = 55 circiter; ergo totus impulſus æquatur 1108 + 55 = 1163 gr., quod ſatis adcedit praxi: eodem modo reliqua producta calculavi.

§. XI.

Jam ad experimentorum recenſionem transeo.

Prima tabula exhibet quantitates aquæ, quæ 20 ſemiminutis ſecundis ex variis tubis & foraminibus effluxerunt; ex earumque recenſione patebit, ab adtritu magis minui velocitatem in tubis longioribus quam brevioribus; fere enim ſemper major aquæ quantitas eodem tempore ex brevioribus effluxit; differentia autem in noſtris tubis tam exigua eſt, ut vix ullum diſcrimen in virium determinatione inde producatur; hinc in experimentis, ubi percuſſionem inquiſivi, ea cum tubis duorum pollicum inſtituta non expediam, cum impetus ex tubis duorum & trium pollicum fere æqualis fuerit; forſan notabilius prodiret diſcrimen in tubis majoribus & longitudine magis diverſis, quod in minoribus vix obſervari potuerit.

§. XII.

Secundæ Tabulæ prima columna exponit altitudines velocitati debitas ex primâ tabulâ methodo s'GRAVESANDIANA calculatas; ſecunda & tertia columna indicant, quantum duo cylindri differentis ponderis e ſitu horizontali remoti fuerint; quarta vero pondus ad æquilibrium vectis methodo BERNOULLIANA requiſitum declarat.

§. XIII.

§. XIII.

In Tertiâ Tabulâ prima columna proponit Theoriam s'GRAVESANDIANAM, altera BERNOULLIANAM, tertia NEWTONIANAM, quarta & quinta praxin s'GRAVESANDIANAM, ſexta BERNOULLIANAM.

§. XIV.

Quartâ Tabulâ MARIOTTI Theôria ſtatuens, vim aquæ verticaliter effluentis æquare pondus cylindri, cujus baſis eſt foramen, & altitudo illa aquæ ſupra foramen, tum D'ALEMBERTII Theoria ſupra expoſita cum experientiâ comparatur; prima itaque columna exhibet altitudines velocitati debitas, altera Theotiam ex his ſimplicibus altitudinibus, tertia illam ex verâ aquæ in vaſe altitudine computatam ſc. MARIOTTI, quarta vero D'ALEMBERTI ſyſthema proponit; quinta pondus notat, quod ad æquilibrium vectis alteri brachio adpoſitum requirebatur; ſexta denique ipſum experimentorum eventum oſtendit.

§. XV.

Ex prædictis itaque periculis ſequentes deduci poſſunt concluſiones.

1°. Ex tubis brevioribus in ſaltibus horizontalibus major aquæ quantitas effluit quam ex longioribus ab eâdem altitudine & ex eodem foramine; contrarium vero obtinet in jactibus verticalibus; nec cauſa latet, quum in tubis longioribus major adtritus ab aquâ, quæ in horizontalibus jactibus e ſuâ viâ detorquetur ſicque magis contra tubi latera adteritur; in verticalibus autem aqua non tantum in tubi latera agit, cum ſponte ſuâ viâ naturali labitur; præterea tubus longior in hoc caſu etiam majorem reddit aquæ delabentis altitudinem.

2°. Per tubum conicum, cui apertura anterior eſt æqualis, poſterior vero dupla cylindri, major effluit quantitas aquæ, quia volumen ejusmodi coni truncati ſuperat volumen cylindri deſcripti. Inſuper notandum, per tubos cylindricos majores, cui imponuntur lamellæ perforatæ foraminibus æqualibus aperturis anterioribus cylindricorum minorum, fere æqualem effluere quantitatem ac per hos; ita ut non diameter tubi, ſed potius apertura effluxus ad quantitatem majorem effluentis aquæ facere videatur.

3°. Per tubum Conicum, cujus apertura poſterior æqualis diametro tubi cylindrici, major effluit aquæ quantitas, quam per eundem cylindricum, cui imponitur lamella pertuſa foramine diametri anterioris aperturæ conici.

4°. Major invenitur velocitas ex tubo conico, quam ex cylindrico diametri æqualis poſteriori aperturæ conici; ſique tubo conico imponatur lamina pertuſa foramine 0,215 poll., major adhuc datur velocitas, quam per eundem cylindricum, cui lamina pertuſa foramine 0,43 poll. diametri imponitur.

5°. Major eſt velocitas per tubum cylindricum minorem, cui imponitur lamina pertuſa foramine diametri 0,215 poll., quam per eundem absque lamina; nam tubus lamellâ perforatâ inſtructus ad tubum conicum truncatum adcedit.

6°. Velocitas per tubum cylindricum majorem, cui imponuntur laminæ pertuſæ foraminibus 0,43 & $\frac{1}{4}$ poll., fere æqualis eſt.

7°. In

7°. In tubis conicis minuitur velocitas, si iisdem imponatur lamina pertusa foramine minori quam est diameter aperturæ anterioris tubi, in cylindricis vero minoribus, lamellâ pertusâ foramine 0,215 poll. impositâ, velocitas augetur.

8°. In omnibus experimentis major semper invenitur vis per tubum conicum, quam per cylindricum majorem, cui imponitur lamella foramine æqualis diametri, ac est apertura conici anterior, instructa.

9°. In Experimentis s'GRAVESANDIANIS vires semper inveniuntur majores, quam simplex altitudo velocitati debita; sæpissime, imo semper cum cylindro majori, cui etiam magis confidi potest, uti dupla.

10°. In BERNOUILLIANIS ab altitudine 15 poll. vires fere semper sunt duplâ altitudine velocitati debitâ majores; ab altitudine 9 pollic. sæpe duplâ minores, ut plurimum vero majores, exceptis tubis minoribus.

11°. In MARIOTTIANIS velocitas per tubum cylindricum minorem cum laminâ pertusâ foramine 0,215 poll. major fuit, quam per eundem absque laminâ & quam per majorem cylindricum cum laminâ pertusâ eodem foramine; vires eâdem fere fuerunt ratione ac velocitates in iisdem casibus. Vires tandem per conicum semper majores fuerunt, quam per tubum cylindricum majorem cum iisdem aperturis exterioribus.

12°. In percussionibus verticalibus D'ALEMBERTI Theoria proxime ad praxin adcedit.

13°. Omnia vero experimenta inter se collata plerumque pro duplâ altitudine aquæ effluentis velocitati debitâ stare videntur; atque ita quæstionem propositam determinare co-

na-

natus fui, nimirum percussionem aquæ proxime calculari ex dupla altitudine aquæ effluentis velocitati debitâ multiplicatâ in venam correctam; sive ut authorum verbis utar, vires percutientes æquari cylindro, cujus basis est area venæ contractæ & altitudo dupla illius, quæ debetur velocitati aquæ effluentis.

T A N T U M.

THESES.

I.

Essentia Corporis Physici non est extensio.

II.

Lux & ignis inter se differunt.

III.

Salium Effervescentia, Metallorum Solutio ex adtractione explicantur.

IV.

Non omnes maculæ Soli inhærescunt.

V.

Vera longitudo maris ex declinatione acus magneticæ hucdum erui nequit.

H VI.

VI.

Imo præter adcuratissimum Horologium ad eam determinandam plura desiderantur.

VII.

Elementa Differentialia uti o consideranda sunt.

VIII.

Sine Analysi Sublimi nulla salus in Physicâ Mathematicâ.

TABULA PRIMA.

Effluxit tempore 20 Semiminutorum Secundorum quantitas aquæ ex tribus Experimentis media sumpta in Pyxide Lignea 16 pollices longa, 10 lata, 18 ad supremam oram, 16 vero ad oras incisas alta.

	E primo foramine 1 poll. a fundo distanti.	*E secundo 4 poll. a fundo.*	*E tertio 7 poll. a fundo.*	*E quarto 10 poll. a fundo.*	*E quinto 13 poll. a fundo.*	*E foramine horizontali in fundo vasis.*
Per Tubum 3 poll. longum Diam. 6. lin. — —	6 lib. $5\frac{1}{2}$ unc.	5 lib. 14 unc.	5 lib. 2 unc.	4 lib. $2\frac{1}{2}$ unc.	3 lib. 0 unc.	7 lib. $4\frac{1}{2}$ unc.
— — — — — — cum Lamina pertusa foramine Diametri 0, 43 poll.	4 lib. $\frac{1}{2}$ unc.	3 lib. 13 unc.	3 lib. $3\frac{1}{2}$ unc.	2 lib. 11 unc.	1 lib. 15 unc.	4 lib. $8\frac{1}{4}$ unc.
— — — — — — — — — — — — — $\frac{1}{4}$ poll.	1 lib. $5\frac{1}{4}$ unc.	1 lib. $3\frac{3}{4}$ unc.	1 lib. $1\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. $14\frac{1}{8}$ unc.	0 lib. $9\frac{5}{8}$ unc.	1 lib. $8\frac{1}{8}$ unc.
— — — — — — — — — — — 0, 215 poll.	0 lib. 15 unc.	0 lib. 14 unc.	0 lib. $12\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. $9\frac{15}{16}$ unc.	0 lib. $7\frac{1}{4}$ unc.	1 lib. $\frac{7}{8}$ unc.
Per Tubum 2 poll. longum Diam. 6 lin. — —	6 lib. 7 unc.	6 lib. $2\frac{1}{4}$ unc.	5 lib. 3 unc.	4 lib. 3 unc.	3 lib. $\frac{3}{4}$ unc.	7 lib. $4\frac{1}{4}$ unc.
— — — — — cum Lam. pert. for. 0, 43 poll.	4 lib. $1\frac{1}{4}$ unc.	3 lib. $14\frac{3}{4}$ unc.	3 lib. $4\frac{1}{4}$ unc.	2 lib. $11\frac{1}{2}$ unc.	1 lib. $15\frac{1}{2}$ unc.	4 lib. $7\frac{1}{4}$ unc.
— — — — — — — — — — — — — $\frac{1}{4}$ poll.	1 lib. 6 unc.	1 lib. $4\frac{1}{4}$ unc.	1 lib. $1\frac{1}{2}$ unc.	0 lib. $14\frac{3}{8}$ unc.	0 lib. $10\frac{3}{4}$ unc.	1 lib. 8 unc.
— — — — — — — — — — — — 0, 215 poll.	0 lib. $15\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. 14 unc.	0 lib. $12\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. 10 unc.	0 lib. $7\frac{1}{2}$ unc.	1 lib. $\frac{5}{8}$ unc.
Per Tubum cylindr. 3 poll. longum Diam. 3 lin.	1 lib. $4\frac{3}{4}$ unc.	1 lib. $2\frac{5}{8}$ unc.	1 lib. $0\frac{5}{8}$ unc.	0 lib. $13\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. $9\frac{1}{4}$ unc.	1 lib. $7\frac{7}{8}$ unc.
— — — — cum Lam. pert. for. 0, 215 poll.	1 lib. $0\frac{1}{8}$ unc.	0 lib. 15 unc.	0 lib. $13\frac{1}{8}$ unc.	0 lib. $10\frac{3}{4}$ unc.	0 lib. $7\frac{7}{8}$ unc.	1 lib. $2\frac{1}{2}$ unc.
Per Tubum conicum 3 poll. longum Diametri 6 lin. a parte poster. & 3 ab anteriori.	1 lib. $10\frac{1}{2}$ unc.	1 lib. $9\frac{1}{2}$ unc.	1 lib. $6\frac{1}{16}$ unc.	1 lib. 2 unc.	0 lib. $12\frac{1}{2}$ unc.	1 lib. $15\frac{1}{2}$ unc.
— — — — cum Lam. pert. for. 0, 215 poll.	1 lib. 2 unc.	1 lib. $\frac{3}{4}$ unc.	0 lib. $14\frac{1}{4}$ unc.	0 lib. 12 unc.	0 lib. $8\frac{3}{4}$ unc.	1 lib. 5 unc.

TABULA QUARTA.

Methodo MARIOTTIANA.

Planum adhibitum fuit Diametri $1\frac{1}{4}$ Pollicis.

Ab Altitudine 16 Pollicum aquæ verticaliter effluxerunt.

Vectes fuerunt inter se, uti 1 poll. $3\frac{1}{2}$ lin. ad 9 poll. $10\frac{1}{2}$ lin.

	Altitudo velocitati debita ex quantitate aquæ effluentis calculata.	*Theoria ex simplici altitudine velocitati debitâ computata.*	*Theoria* MARIOTTI *ex verâ aquæ in vase altitudine computata.*	*Theoria* D'ALEMBERTI, *quæ simul pondus columnæ aqueæ in computatione comprehendit.*	Ad æquilibrium requirebatur pondus.	Praxis.
Per Tubum 6 pollices longum Diam. 6 linearum.	14, 11 poll.	781 gr.	885 gr.	1163 gr.	168 gr.	1284 gr.
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 43 poll.	9, 24	386	670	820	120	917
— — — — cum lam. pert. for. Diam. $\frac{1}{4}$ poll.	9, 52	131	175	302	39	298
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	8, 19	84	164	188	26	199
Per Tubum conicum 3 poll. long. Diam. 6 & 3 lin.	15, 84	214	175	343	50	382
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	12, 8	131	164	282	35	268
Per Tubum cylindricum 3 poll. long. Diam. 3 lin.	8, 97	124	175	216	30	229
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	9, 8	100	164	220	28	214

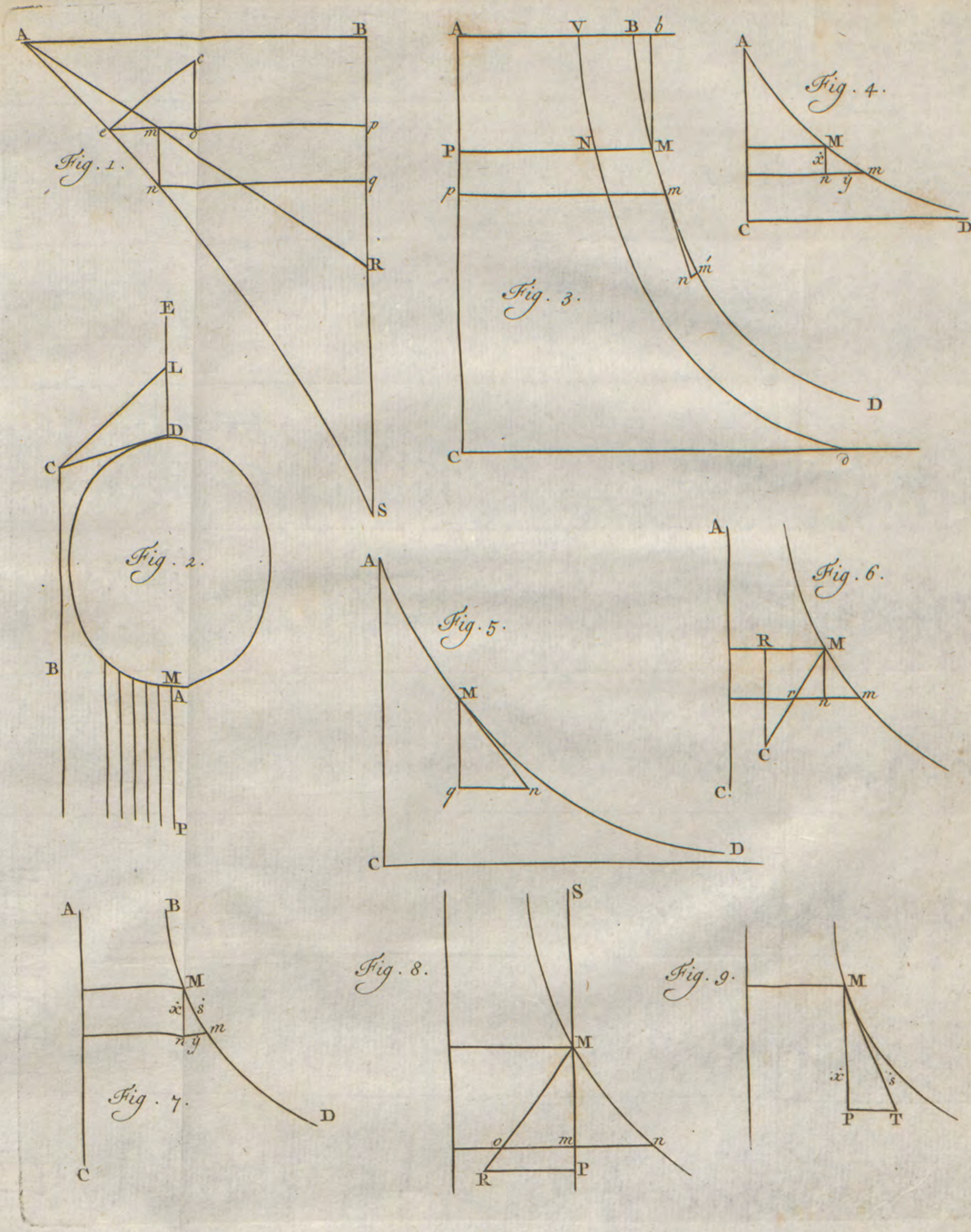
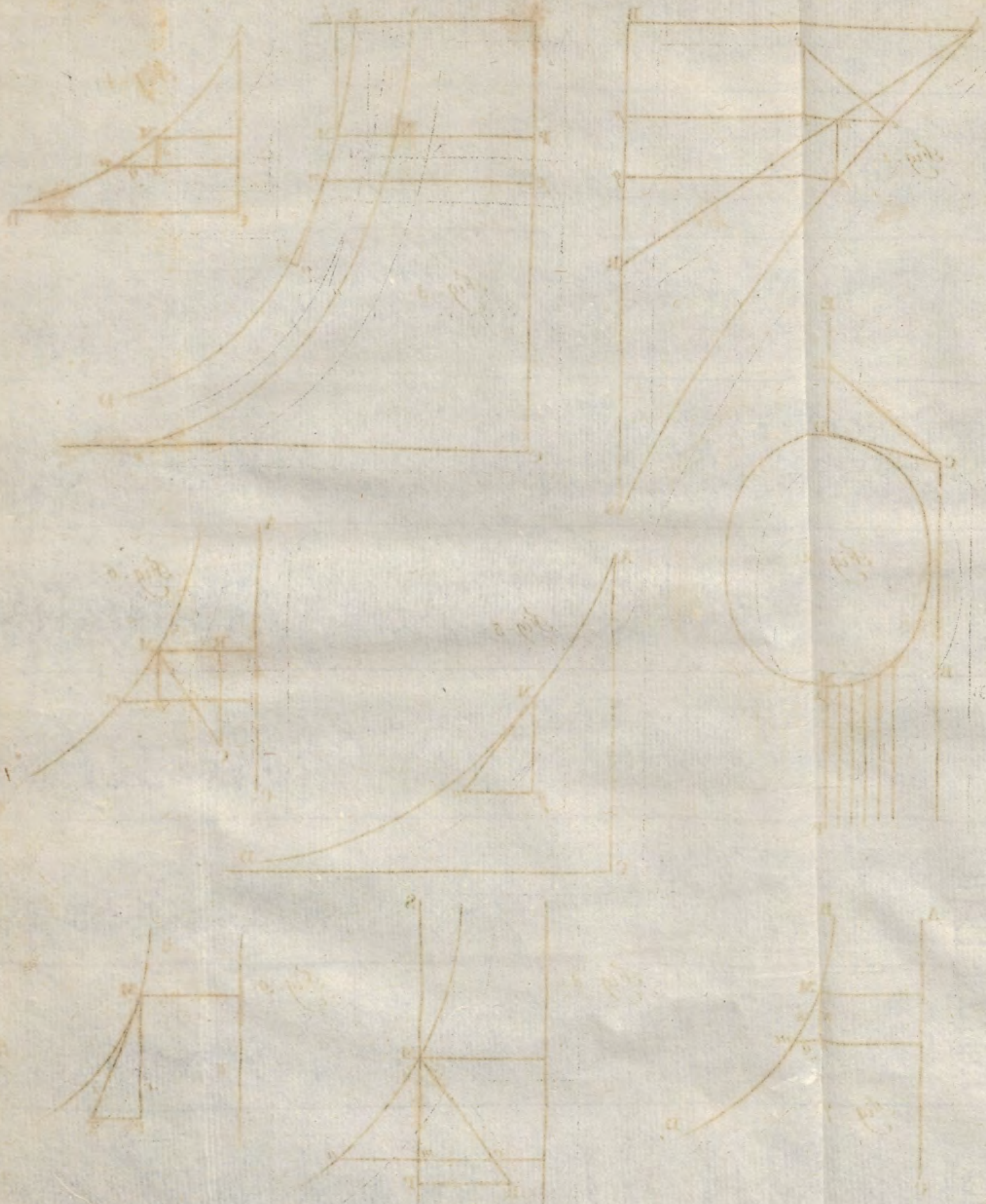


Fig. 1.
A B c e m o p n q R S
Fig. 2.
E L D C B M A P
Fig. 3.
A V B b P N M p m n m' C o D
Fig. 4.
A M x m n y C D
Fig. 5.
A M q n C D
Fig. 6.
A R M r n m C C
Fig. 7.
A B M x s m n y D C
Fig. 8.
S M o m n R P
Fig. 9.
M x s P T



TABULA TERTIA.

	s' Gravesandiana *Theoria ex ſimplici altitudine velocitati debitâ computata.*	Bernoulliana *Theoria ex duplici altitudine velocitati debitâ computata.*	Newtoniana *Theoria ex duplici altitudine aquæ ipſâ in vaſe computata.*	Praxis s' Gravesandiana. Cum Cylindro 9664 gr.	 Cum Cylindro 12900 gr.	Praxis Bernoulliana.
Ab Altitudine 15 Pollicum.						
Per Tubum 3 poll. longum Diam. 6 linearum. —	589 gr.	1178 gr.	1658 gr.	805 gr.	948 gr.	1045 gr.
— — — — cum lam. pert. foram. Diam. 0, 43 poll.	310	620	1256	734	758	740
— — — — cum lam. pert. foram. Diam. 3. lin.	102	204	392	260	252	252
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215. poll.	66	136	306	165	173	166
Per Tubum conicum 3 poll. longum, a poſteriori parte Diam. 6, ab anteriori 3 lin.	159	318	392	331	331	321
— — — — cum lam. pertusâ for. Diam. 0, 215 poll.	94	188	306	213	221	200
Per Tubum cylindricum 3 poll. longum Diam. 3. lin.	95	190	392	154	173	179
— — — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	76	152	306	118	128	163
Ab Altitudine 9 Pollicum.						
Per Tubum 3 poll. longum Diam. 6 linearum. —	383 gr.	766 gr.	992 gr.	604 gr.	633 gr.	611 gr.
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 43 poll.	192	384	752	446	460	439
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 3 lin. — —	64	128	248	173	182	144
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll. —	41	82	184	115	115	97
Per Tubum conicum 3 poll. longum Diam. 6 & 3 lin.	113	226	248	259	268	183
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	68	136	184	186	211	110
Per Tubum cylindricum 3 poll. long. Diam. 3 lin.	56	112	248	158	161	98
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	51	102	184	115	115	89

TABULA SECUNDA.

Planum fuit adhibitum Diametri $1\frac{1}{4}$ Pollicis.

Ab altitudine 15 Pollicum.

	Altitudines velocitatibus aquæ effluentis debitæ ex quantitate calculatæ.	Methodo s' GRAVESANDIANA. *Fila, e quibus Cylindri suspenduntur, fuerunt 34 poll. longa.* Cylindrus pendens 20 unc. 64 gr.	Cylindrus pendens 26 unc. 420 gr.	Methodo BERNOULLIANA. *Vectes fuerunt inter se : : 7 poll. $5\frac{1}{2}$ lin., ad 14 poll. 4 lin.* Ad æquilibrium requirebatur pondus
		E situ remoti fuerunt distantia.		
Per Tubum 3 pollices longum Diametri 6 linear.	10, 65 poll.	2 poll. 10 lin.	2 poll. 6 lin.	4 unc. 90 gr.
— — — — cum laminâ pertusâ for. Diam. 0, 43 poll.	7, 44	2 poll. 7 lin.	2 poll. 0 lin.	2 unc. 464 gr.
— — — — — cum lam. pert. foram. Diam. 3 linear.	7, 40	0 poll. 11 lin.	0 poll. 8 lin.	1 unc. 5 gr.
— — — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	6, 49	0 poll. 7 lin.	0 poll. $5\frac{1}{2}$ lin.	0 unc. 320 gr.
Per Tubum conicum 3 poll. long. a posteriori parte Diam. 6 lin. & ab anteriori 3 lin.	11, 55	1 poll. 2 lin.	0 poll. $10\frac{1}{2}$ lin.	1 unc. 136 gr.
— — — cum laminâ pertusâ for. Diam. 0, 215 poll.	9, 24	0 poll. 9 lin.	0 poll. 7 lin.	0 unc. 386 gr.
Per Tubum cylindricum 3 poll. long. Diam. 3 lin.	6, 96	0 poll. $6\frac{1}{2}$ lin.	0 poll. $5\frac{1}{2}$ lin.	0 unc. 344 gr.
— — — cum laminâ pertusâ for. Diam. 0, 215 poll.	7, 45	0 poll. 5 lin.	0 poll. 4 lin.	0 unc. 314 gr.

Ab altitudine 9 Pollicum.

		Fila fuerunt 28 poll. longa.		
Per Tubum 3 pollices longum Diam. 6 linearum.	6, 96 poll.	1 poll. 9 lin.	1 poll. $4\frac{1}{2}$ lin.	2 unc. 215 gr.
— — — cum laminâ pertusâ for. Diam. 0, 43 poll.	4, 60	1 poll. $3\frac{1}{2}$ lin.	1 poll. 0 lin.	1 unc. 365 gr.
— — — — — cum lam. pert. foram. Diam. 3 linear.	4, 80	0 poll. 6 lin.	0 poll. $4\frac{3}{4}$ lin.	0 unc. 278 gr.
— — — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	4, 05	0 poll. 4 lin.	0 poll. 3 lin.	0 unc. 188 gr.
Per Tubum conicum 3 poll. long. Diam. 6 & 3 lin.	8, 17	0 poll. 9 lin.	0 poll. 7 lin.	0 unc. 352 gr.
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	6, 72	0 poll. $6\frac{1}{2}$ lin.	0 poll. $5\frac{1}{2}$ lin.	0 unc. 212 gr.
Per Tubum cylindricum 3 poll. longum Diam. 3 lin.	4, 05	0 poll. $5\frac{1}{2}$ lin.	0 poll. 5 lin.	0 unc. 190 gr.
— — — — cum lam. pert. for. Diam. 0, 215 poll.	5, 00	0 poll. 4 lin.	0 poll. 3 lin.	0 unc. 172 gr.