# ELECTROMAGNETISCHE DRAAIINGEN

# EN UNIPOLAIRE INDUCTIE

J. A. VOLLGRAFF

ELECTROMAGNETISCHE DRAAIINGEN EN UNIPOLAIRE INDUCTIE.

# Over de Theorie der Electromagnetische Draaiingen en der Unipolaire Inductie.



PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

## Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

op GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Mr. H. B. GREVEN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Donderdag 9 Juli 1903, des namiddags te 3 uren,

DOOR

**JOHAN ADRIAAN VOLLGRAFF,**

GEBOREN TE HAARLEM.



LEIDEN,
S. C. VAN DOESBURGH.
1903.

AAN MIJNE OUDERS.

*Bij de voltooiing van dit proefschrift kwijt ik mij van den aangenamen plicht mijn dank te betuigen aan allen, die tot mijn academische ontwikkeling hebben medegewerkt.*

*U, Oud-Hoogleeraren en Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde (voor zoover ik Uwe colleges heb bijgewoond), ben ik erkentelijk voor de welwillendheid, die ik bij meer dan eene gelegenheid van U heb ondervonden.*

*In het bijzonder dank ik U, Hooggeleerde Lorentz, Hooggeachte Promotor, voor hetgeen ik van U heb geleerd en voor de hulp en belangstelling, die Gij mij gedurende mijn studietijd, ook bij de samenstelling van dit proefschrift, hebt bewezen.*

# Over de theorie der electro-magnetische draaiingen en der unipolaire inductie.

---

## INLEIDING.

Bij proeven over „electro-magnetische draaiing" wordt van een toestel, die zich in een magnetisch veld bevindt, en waarvan een of meerdere deelen om een bepaalde as kunnen bewegen, minstens één dezer deelen om die as gedraaid door middel van gesloten electrische stroomen, welker banen voor een gedeelte binnen bewegende deelen van den toestel zijn gelegen.

Onder „unipolaire inductie" wordt verstaan het omgekeerde van het bovengenoemde verschijnsel, n.l. het ontstaan van gesloten electrische stroomen, gedeeltelijk door de bewegende deelen van den genoemden toestel loopende, door het draaien van deelen van dien toestel om zijn as.

Het magnetische veld kan hierbij te danken zijn aan uitwendige magneten of stroomen, of ook aan magneten of stroomen, die van den beschouwden toestel deel uitmaken. — Er is sprake van stroomen, die gedurende de wenteling niet van richting wisselen.

Tot de toestellen, waarmede electro-magnetische draaiing wordt verkregen, behooren de volgende:

I. Toestellen met draaibare magneten.

*a*). De cylindrische magneet M. (fig. 1) is om zijn lengte-as draaibaar. De sluitdraad A B C, waarin zich een stroomgever bevindt, raakt in A en C den magneet aan, maar is niet vast met hem verbonden. De stroom, die de richting A B C heeft, doet den magneet draaien in den in de figuur aangegeven zin, als het Noordmagnetisme bij A is. Van de stroombaan ligt het gedeelte C A binnen het bewegende deel van den toestel. (A m p è r e, „Mém. s. la théorie d. phén. él. dyn." Mém. de l'Ac. de Paris 6. 1823).

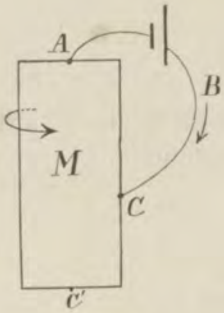

Fig. 1.

*b*). Toestel van K ö n i g (Ann. d. Phys. 60. 1897). Hoefvormige magneten, waarvan er (fig. 2) een door N A S is voorgesteld, liggen met één hunner polen (de noordpool) binnen een hollen metaalcylinder; zij zijn onderling vastverbonden en draaibaar om de as van den cylinder, door welken in de richting der beschrijvende lijnen een stroom loopt. Opdat de stroom in staat zij de magneten te doen draaien, moet hij òf door de magneten gaan (stel bij A) òf althans op zoodanige wijze (b. v. door kwik) langs de magneten loopen (wanneer deze b. v door een isoleerende laag zijn bedekt), dat de stroombaan aldaar door de beweging der magneten voortdurend wordt ver-

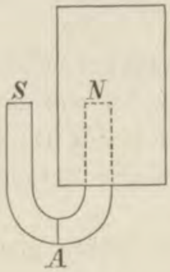

Fig. 2.

vormd. Het kwik is in dit geval het in de algemeene definitie genoemde „bewegende deel van den toestel", waarbinnen een deel der stroombaan is gelegen. De beweging van het kwik is geene draaiing, maar hangt ten nauwste samen met eene draaiing van andere deelen (de magneten) om de as.

*c*). Toestel van Faraday („Experimental Researches, etc.", ook beschreven bij Ampère t. a. p.). Een magneet N S (fig. 3) drijft in verticalen stand in een ronden bak met kwik. Een stroom loopt langs de as Z O en volgt verder b. v. de baan O C X. De magneet wordt in beweging gebracht en beschrijft een volle omwenteling om de as, om het even of de stroom in een bepaalden stand erdoor gaat, of dat de stroombanen (als de magneet met een isoleerende laag is bedekt) door geen ander bewegend deel loopen, dan het door de draaiing van den magneet in beweging gebrachte kwik.

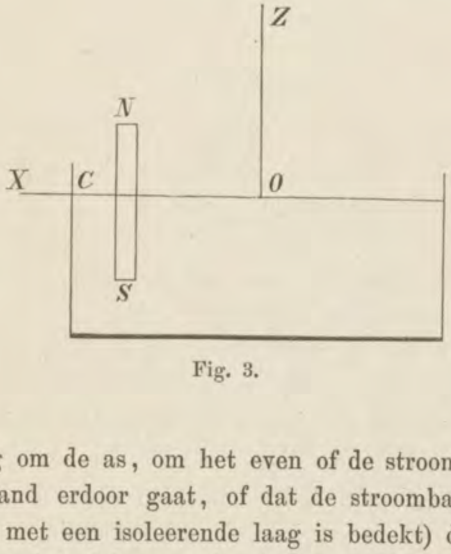

Fig. 3.

*d*). Toestel van Pohl. De stroom loopt langs de as A B (fig. 4), vervolgens langs B C, een arm, die met den verticaal geplaatsten magneet N S vastverbonden is en met dezen om de as kan draaien, dan, gesplitst, langs twee cirkelbogen door een kwikgoot van C tot D, verder langs D E, enz. Arm en magneet worden gedraaid. In dit geval gaat geen stroom door den magneet, maar wel door een vast met den magneet verbonden bewegelijk deel.

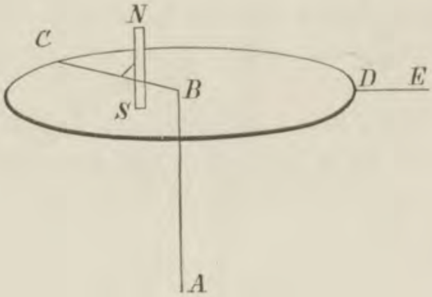

Fig. 4.

*e*). Verscheidene toestellen van Plücker (Pogg. Ann. 87. 1852 „Ueber die Reciprocität der elektromagnetischen und magneto-elektrischen Erscheinungen"), van E. Hagenbach (Ann. d. Phys. 4. 1901 „Der el. magn. Rot. Versuch und die unip. Induktion"), enz.

II. Toestellen met stilstaande magneten of geplaatst in een uitwendig magnetisch veld.

*a*) Zie fig. 1. De magneet is vast; de sluitdraad ABC, waardoor een stroom loopt, wordt in beweging gebracht. De zin der draaiing is tegengesteld aan den zin der in fig. 1 aangegeven draaiing.

*b*). Zie fig. 2. De magneten zijn vast; de cylinder, waardoor de stroom loopt, wordt gedraaid.

In gevallen als *a*) en *b*) kunnen ook de magneten en de sluitdraad of cylinder te gelijk draaibaar zijn; zij gaan dan onder elkanders invloed in tegengestelden zin draaien.

*c*). Toestel van Plücker (t. a. p.). De magneet NS (fig. 5) is langs de as geplaatst en raakt den coäxialen cylinder niet. Door den rustenden sluitdraad ACB en verder van B tot A door den cylinder loopt de stroom. Deze brengt den cylinder in beweging in den in de figuur aangegeven zin. Al naar mate men den magneet als niet of wel van den toestel deel uitmakende beschouwt, is het magnetische veld uitwendig of niet.

*d*). Toestellen door het aardmagnetisme of een ander uitwendig magnetisch veld in beweging gebracht. Zoo b. v. de toestel van fig. 4 zonder magneet en geplaatst in een magnetisch veld met krachtlijnen evenwijdig aan de as.

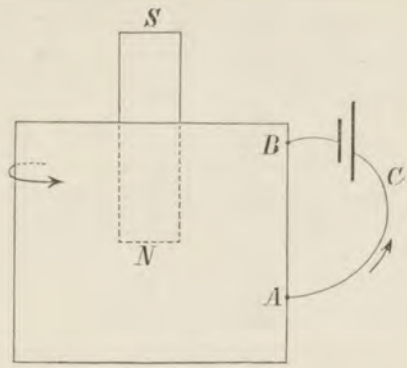

Fig. 5.

III Toestellen, waarbij geen ander magnetisch veld voor de beweging noodig is, dan het veld te danken aan de tot den toestel behoorende stroomen. (O Grotrian, Ann. d. Phys. 10. 1903 „Die Unipolar-maschine ohne Eisen"). De draaibare metalen as A B (fig. 6) draagt in het midden bij C een daarom gewonden draadklos, welke met de as vastverbonden is. Het eene uiteinde van den draad is nabij C met de as verbonden, terwijl het andere bij Q in een kwikgoot hangt. Het uiteinde A van de as is met een kwikgoot $Q_1$ door een met de as draaibaren arm verbonden. Het uiteinde B staat in een kwikbakje $Q_2$. Wordt één pool van den stroomgever E met de middelste kwikgoot verbonden, en de andere pool met $Q_1$ en $Q_2$, zoo geraakt de as in draaiing.

Stel, dat de beschouwde toestel één rustend en één bewegend deel heeft. Het blijkt, dat geene draaiing plaats heeft, wanneer beide punten, waar de beschouwde stroom van het rustende in het bewegende deel overgaat of omgekeerd, in de draaiingsas zijn gelegen; zoo b. v. in het geval van fig. 1, wanneer men den draad A B C door A B C′ vervangt, waarbij zoowel C′ als A op de as liggen. Evenmin is er draaiing bij den toestel van L e c h e r (Ann. d. Phys. 69, 1899), waarbij de stroom den weg A B C D E F G (fig. 7) volgt, van D tot E door een magneet gaande. H is een tegenwicht. Het stuk B C D E F, vastverbonden met magneet en tegenwicht, is om de as A G draaibaar, doch draait niet, daar de overgangspunten B en F op de as liggen.

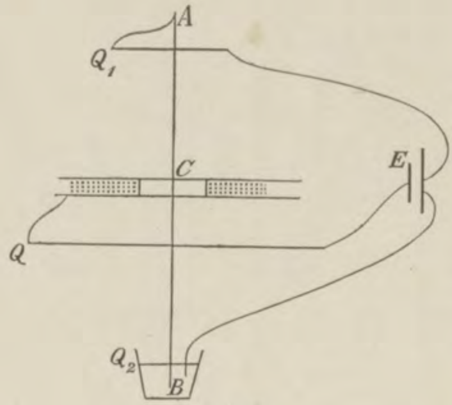

Fig. 6.

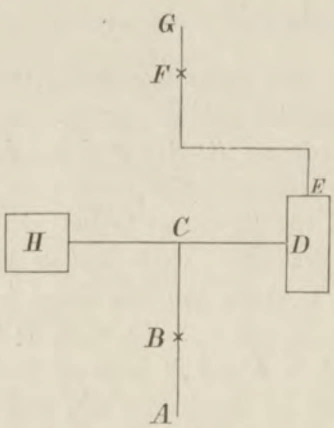

Fig. 7.

Bij toestellen als de in fig. 1, fig. 2 (magneten vast), fig. 5 afgebeelde, waarin geen geleidende vloeistoffen behoeven voor te komen (hetzij dan om den overgang van den stroom tusschen het draaibare en het stilstaande deel te vergemakkelijken), is derhalve het bestaan van minstens één »glijdend contact" eene noodzakelijke voorwaarde voor het tot stand komen der beweging.

Bij toestellen met kwikgoten (fig. 4 en fig. 6) is de uitdrukking „glijdend contact" ter aanduiding van de wijze, waarop de stroom in of uit het kwik stroomt minder juist. De rol, die de geleidende vloeistof hier speelt, is echter evenals in fig. 1 en fig. 5 theoretisch van ondergeschikt belang, daar de draaiing bij voldoend sterken stroom evengoed zou plaatshebben, indien de kwikgoten door metalen cirkels werden vervangen en de met hun uiteinde in het kwik reikende armen in plaats daarvan met deze metalen cirkels een glijdend contact hadden, of, zoo men wil, indien deze armen met hunne uiteinden juist de oppervlakte van het kwik aanraakten en er overheen gleden zonder eenige merkbare strooming teweeg te brengen. Wanneer men zich de toestellen zoo ingericht denkt, is het geoorloofd ook hier van glijdende contacten te spreken. Men kan dergelijke toestellen opzettelijk zóó construeeren, dat ook niet bij benadering van een glijdend contact kan worden gesproken. Dit doet Zöllner (Pogg. Ann. 153, 1874, en 158, 1876), de armen door kwikstralen vervangend. Bij een andere proef vervangt hij de armen door kettingen. Doel is uit hunne deformatie een besluit te kunnen trekken omtrent de plaats, waar de bewegende krachten aangrijpen.

Anders is het gesteld met toestellen, als de door fig. 3 voorgestelde. Dezen kan men zich niet geconstrueerd denken zonder behulp van eene geleidende vloeistof, die in staat is den bewegenden magneet door te laten. Dit geldt ook voor den toestel van fig. 2, als de magneten bewegelijk zijn. Het is bij dergelijke toestellen geen vereischte, dat de magneten de bewegende stroomdraden snijden, d. w. z. er òf doorheen gaan òf zich zoo bewegen, dat zij er doorheen zouden gaan, indien zij niet door een isoleerende laag waren bedekt. In het geval van fig. 3 b.v. kan ook draaiing plaats hebben, wanneer de magneet zich geheel boven het kwik bevindt, vastverbonden met een in het kwik drijvend voorwerp.

Unipolaire inductie wordt in het algemeen met dezelfde toestellen verkregen als electromagnetische draaiing.

I. Toestellen met draaibare magneten.

*a*). Zie fig. 1. De sluitdraad rust. Door draaiing van den magneet in den zin, dien de fig. aangeeft, wordt een stroom verkregen in de richting C B A.

*b*). Toestel van Fessel (Plücker „Ueber den Fesselschen el. magn. Motor" Pogg. Ann. 83, 1851). De magneet N S (fig. 8), is omgeven door een coäxialen kopercylinder, welke of niet of met den magneet verbonden draait. Draait alleen de magneet, en zijn twee punten A en B van den cylinder met een galvanometer verbonden, zoo is er geen uitslag; immers er kan geen stroom ontstaan die niet door eenig bewegend deel loopt. Draaien magneet en cylinder, zoo verkrijgt men een uitslag. Evenzoo, als magneet en cylinder geleidend verbonden zijn en gezamenlijk draaien, en behalve A

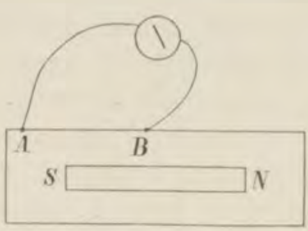


Fig. 8.

een der polen van den magneet met den galvanometer is verbonden.

II. Toestellen met stilstaande magneten of geplaatst in een uitwendig magnetisch veld.

*a*). Zie fig. 1. Door draaiing van den sluitdraad in den in fig. 1 aangegeven zin, wordt een stroom in de richting A B C opgewekt.

*b*). Zie fig. 5. Deze toestel van Plücker verschilt niet wezenlijk van den toestel van Fessel, bij welken men ook den magneet kan laten rusten. Wordt de cylinder gedraaid in den in de fig. aangegeven zin, zoo ontstaat een stroom in de richting B C A; draait daarentegen de sluitdraad in den aangegeven zin, zoo ontstaat een stroom in de richting A C B.

*c*). Zie fig. 4. De magneet is weggenomen. Er is een magnetisch veld met krachtlijnen evenwijdig aan de draaiingsas. Door draaiing van den arm B C wordt een stroom opgewekt.

Het spreekt van zelf, dat een toestel als de aard-inductor hier niet moet worden beschouwd. Immers door draaiing in het aardveld van een gesloten cirkel om een zijner middellijnen ontstaan wisselstroomen.

III. Toestellen, waarbij geen ander magnetisch veld voor de beweging noodig is, dan het veld te danken aan de tot den toestel behoorende stroomen (O. Grotrian. Ann. d. Phys. 10, 1903). De metalen as E F draagt 4 metalen schijven A, B, C, D (fig. 9). Tusschen A en D is om de as een met deze draaibare draadklos gewonden. Evenzoo tusschen D en B. De twee draadklossen staan met elkander in verbinding door draden, die geïsoleerd door D heenloopen. Met A en B zijn de klossen geleidend verbonden. Een stroomgever is met A en B verbonden; stroom gaat dientengevolge door de beide klossen, maar door geen ander deel van den toestel. Wordt nu de geheele toestel gedraaid, en verbindt men C en D met een galvanometer, zoo blijkt de wenteling der klossen in den keten. waarin zich de galvanometer bevindt, een inductiestroom op te wekken.

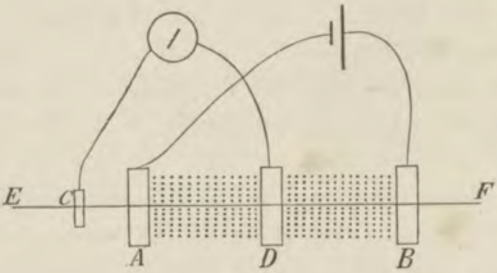


Fig. 9.

De wet van het behoud van arbeidsvermogen geeft een algemeen inzicht in het verband tusschen het bij eenzelfden toestel door een gegeven stroom uitgeoefend moment, en de door draaiing met een gegeven hoeksnelheid opgewekte electromotorische kracht.

Is $D_1$ het draaiingsmoment der door een stroom van sterkte $1$ op het bewegelijk deel uitgeoefende krachten om de as, zoo oefent de stroom $i$ het moment $D_1 i$ uit. Is nu door de wrijving de hoeksnelheid $\omega$ constant geworden, en behoeft slechts rekening gehouden te worden met de door den stroomgever geleverde energie, de Joule'sche warmte, en den arbeid van het moment, zoo is

$$Ei = i^2 r + D_1 i \omega,$$

waarin $E$ de electromotorische kracht van den stroomgever is en $r$ de weerstand in de stroomketen. Ook te schrijven

$$ir = E - D_1 \omega.$$

Het is dus, wat de stroomsterkte betreft, als bracht de draaiing met hoeksnelheid $\omega$ een electromotorische kracht

$-D_1\omega$ teweeg, in dezelfde richting werkzaam als $E$. Heet de bij eenheid van hoeksnelheid opgewekte electromotorische kracht $E_1$, zoo is dus

$$E_1 = -D_1,$$

gelijk Hagenbach (t. a. p.) opmerkt.

Is er geen wrijving, zoo zal de hoeksnelheid steeds grooter worden, zoolang nog een moment werkt; de stationaire toestand treedt in voor $i = 0$ en $\omega = \frac{E}{D_1}$. Is het wentelend deel b.v. een magneet, zoo zal, daar $D_1$ (gelijk uit het vervolg blijkt) caeteris paribus voor sterkere magneten grooter is, de zwakste magneet in dit geval de grootste hoeksnelheid verkrijgen.

Zij $T$ het traagheidsmoment van het bewegelijk deel ten opzichte van de as. De stroom worde als op elk oogenblik in de geheele baan van dezelfde sterkte beschouwd en het draaiingsmoment als boven met die sterkte evenredig. Dan is

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{D_1 i}{T} = \frac{D_1 [E - D_1\omega]}{Tr}$$

of

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{D_1^2}{Tr}\omega = \frac{ED_1}{Tr},$$

waaruit bij integratie, als men $\omega = 0$ stelt voor $t = 0$, volgt

$$\omega = \frac{E}{D_1}\left[1 - e^{\frac{-D_1^2}{Tr}t}\right].$$

Voor $t = \infty$ vindt men als boven $\omega = \frac{E}{D_1}$. Naar mate de weerstand kleiner is, is $\omega$ op een bepaald tijdstip na de sluiting dichter tot de eindwaarde genaderd.

Wil men, dat het wentelend deel een bepaalden arbeid ($A$ per tijdseenheid) levere, zoo moet

$$Ei = i^2 r + A,$$

waaruit

$$i = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4\,Ar}}{2r};$$

de hoeksnelheid bedraagt hierbij

$$\omega = \frac{A}{D_1 i} = \frac{2\,Ar}{D_1\,[E \pm \sqrt{E^2 - 4\,Ar}]}.$$

$\frac{E \mp \sqrt{\quad}}{2D}$

De bedoelde arbeidslevering kan dus bij twee verschillende hoeksnelheden en stroomsterkten plaats hebben. Uit de waarden van $i$ en $\omega$ blijkt, dat $A$ niet grooter kan zijn dan $\frac{E^2}{4r}$. Heeft $A$ deze waarde, zoo is $i = \frac{E}{2r}$ en $\omega = \frac{E}{2D_1}$. Bij gegeven stroomgever en weerstand wordt dus door het wentelend deel een maximum van arbeid geleverd, wanneer de stroom half zoo sterk is als in het geval, dat het bewegelijk deel rust, en de hoeksnelheid half zoo groot als in het geval, dat het wentelend deel geenerlei arbeid verricht (en een stationaire toestand is ingetreden). De arbeid van den stroomgever is hierbij $\frac{E^2}{2r}$, waarvan de helft in warmte overgaat, en de andere helft voor de arbeidslevering wordt gebruikt. Uit het feit, dat $A$ zulk eene grenswaarde heeft, blijkt de noodzakelijkheid om, wil men met een bepaalden stroomgever draaiing verkrijgen, door bezigen van kwikzilver of op andere wijze den wrijvingsweerstand te verminderen.

Een magneet $N_1\,S_1$ (fig. 10) worde met gegeven hoeksnelheid $\omega_1$ bewogen, en de opgewekte stroom zooals de fig. aangeeft gebezigd om den magneet $N_2$ $S_2$ in wenteling te brengen. Deze levert per tijdseenheid den arbeid $A_2$. Het maximum bedrag van dezen arbeid wordt gevraagd. $R$ is de weerstand in de stroomketen, $I$ de stroomsterkte, $\omega_2$ de hoeksnelheid van den magneet $N_2$ $S_2$. Men heeft

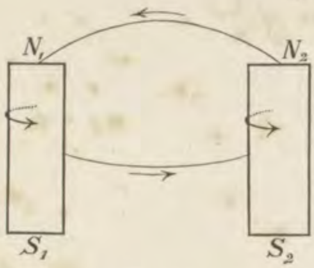


Fig. 10.

$$ID_1\,\omega_1 = I^2 R + A_2,$$

waarbij $D_1$ het moment is der door een stroom van sterkte $1$ op $N_1$ $S_1$ uitgeoefende krachten.

$$\text{Uit } \frac{\partial A_2}{\partial I} = 0 \text{ volgt } D_1\,\omega_1 = 2\,IR.$$

$$\text{Hieruit } I = \frac{D_1\,\omega_1}{2\,R} \text{ en } \qquad A_2 = \frac{D_1^2\ \omega_1{}^2}{4\,R} = {}^1\!/_2\, I\, D_1\,\omega_1.$$

In dit geval wordt dus de helft van het mechanisch arbeidsvermogen overgebracht, ongerekend het door de wrijving te loor gaande arbeidsvermogen.

De wet van het behoud van arbeidsvermogen geeft geen uitsluitsel omtrent het verband tusschen de grootte van het draaiingsmoment of van de geïnduceerde electromotorische kracht en de grootheden, die het magnetisch veld bepalen. — In de volgende hoofdstukken worden verschillende theoriën besproken, welke over deze en andere bijzonderheden licht verspreiden. Er is hierbij niet gestreefd naar een ook maar eenigszins volledig historisch overzicht. Wel werd gepoogd door toepassing op de hier besproken verschijnselen eenig inzicht te verkrijgen in den aard der theoriën, die door sommige der voornaamste physici achtereenvolgens over electromagnetische verschijnselen zijn opgesteld. Theoriën, die pogen in het mechanisme der verschijnselen door te dringen, werden buiten beschouwing gelaten, daar aan de bespreking van zulke theoriën, wil zij eenig nut opleveren, eene grondige beschouwing van in de eerste plaats beschrijvende theoriën geacht werd te moeten voorafgaan.

## HOOFDSTUK I.

### De electromagnetische draaiing volgens de formules van Ampère, Grassmann, Korteweg en v. Helmholtz.

§ 1. De theorie van Ampère, die de electromagnetische bewegingen verklaart uit eene aantrekking of afstooting van stroomelementen, in verband met de onderstelling, dat een magnetisch lichaam een lichaam is, waarin zich kleine electrische kringstroomen bevinden, wordt nog steeds door vele physici bij de bespreking van zoodanige bewegingen gebezigd. Maxwell zelf („Electricity and Magnetism" § 528) noemt Ampère's formule „a formula from which all the phenomena may be deduced, and which must always remain the cardinal formula of electro-dynamics." Zonder deze uitspraak ten volle te onderschrijven, zal toch ieder erkennen, dat ook na den opbouw van nieuwere theoriën op andere grondslagen, de genoemde formule, waar het eene eenvoudige beschrijving dier bewegingsverschijnselen betreft, hare waarde blijft behouden. Ditzelfde geldt voor de formule van Grassmann, die eene andere werking tusschen twee stroomelementen aanneemt, en van die van Biot en Savart omtrent de kracht door een stroomelement op een magneetpool uitgeoefend. Met gebruikmaking van deze formules werd in den laatsten tijd de electromagnetische draaiing o.a. besproken door

W. König (Ann. d. Phys. 2.1900 „Zwei Erwiderungen"),

H. Lorberg (Ann. d. Phys. 3. 1900 „Einige Bemerkungen zu zwei Aufsätzen von Lecher und König"),

E. Hagenbach (Ann. d. Phys. 4. 1901 „Der elektromagnetische Rotationsversuch, etc."),

G. R. Olshausen (Ann. d. Phys. 6. 1901 „Ueber die Unipolarrotation").

Ook O. Grotrian (Ann. d. Phys. 10. 1903 „Die Unipolarmaschine ohne Eisen") werpt (p. 272) de vraag op, of de formule van Ampère meer geschikt is tot beschrijving der verschijnselen dan die van Grassmann of omgekeerd.

Door Olshausen (t. a. p.) wordt buitendien de theorie van v. Helmholtz toegepast.

Hier zal worden nagegaan, welk het verband tusschen de genoemde formules is en in hoeverre het experiment tusschen haar kan beslissen.

§ 2. Twee stroomelementen $d\lambda_1$ en $d\lambda_2$ bevinden zich resp. in de punten $(x_1\ y_1\ z_1)$ en $(x_2\ y_2\ z_2)$, gelijk fig. 11 aangeeft. Hunne stroomsterkten zijn resp. $i_1$ en $i_2$, in elektromagnetische maat. Het assenstelsel is rechthoekig. Het is, ook in het vervolg, steeds zóó genomen als fig. 11 aangeeft. De afstand der twee genoemde punten is $r$; deze is positief gerekend in de richting van $(x_1\ y_1\ z_1)$ naar $(x_2\ y_2\ z_2)$.

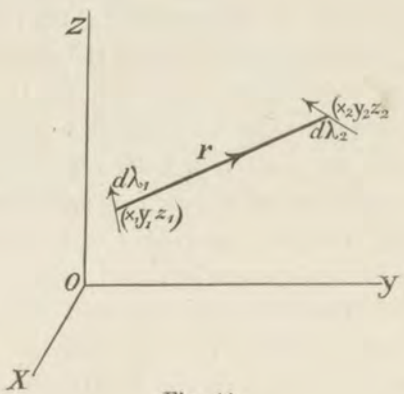


Fig. 11.

Volgens de formule van Ampère is de eerste component der door $d\lambda_2$ op $d\lambda_1$ uitgeoefende ponderomotorische kracht

$$(1)\ldots d^2X_1 = i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, \frac{x_2 - x_1}{r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial\lambda_2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right].$$

Van den stroom $\lambda_2$ zich uitstrekkende van het punt $P'_2$ $(x'_2\, y'_2\, z'_2)$ tot $P''_2\,(x''_2\, y''_2\, z''_2)$ ondervindt het element $d\lambda_1$ eene ponderomotorische kracht, waarvan de eerste component kan geschreven worden

$$(2)\ldots . dX_1 = i_1\, i_2\, d\lambda_1\left[C_2\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} - B_2\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos r''_1\, x\,.\,\cos r''_1\,\lambda_1}{r''_1} - \frac{\cos r'_1\, x\,.\,\cos r'_1\,\lambda_1}{r'_1}\right].$$

Hierin is $r''_1$ de afstand van $(x_1\, y_1\, z_1)$ tot $(x''_2\, y''_2\, z''_2)$; $r'_1$ die van $(x_1\, y_1\, z_1)$ tot $(x'_2\, y'_2\, z'_2)$. Beide zijn positief gerekend van het eerste naar het laatstgenoemde punt. De vector $(A_2\, B_2\, C_2)$ is de aan $\lambda_2$ te danken „directrix"; de eerste component van dezen vector is

$$(3)\ldots . A_2 = -\int_{P'_2}^{P''_2} d\lambda_2 \left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2}\right\}.$$

Het product dezer directrix met de stroomsterkte $i_2$ heete: de aan $\lambda_2$ te danken magnetische kracht $H_2$ — eene benaming, die bij Ampère zelf niet voorkomt.

Is $\lambda_2$ gesloten, zoo wordt de eerste component der door $d\lambda_1$ ondervonden ponderomotorische kracht

$$(4)\ldots . dX_1 = i_1\, d\lambda_1\left[H_{2z}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} - H_{2y}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right].$$

De magnetische kracht aan een gesloten stroom $\lambda_2$ te danken kan in anderen vorm worden geschreven. Volgens het theorema van Stokes is $\int \mathfrak{A}_{\lambda_2}\, d\lambda_2 = \int \mathfrak{B}_{n_2}\, d\sigma_2$, waarin $\mathfrak{B}_x = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z_2}$, enz. De tweede integratie is uitgestrekt over een oppervlak met den gesloten stroom $\lambda_2$ tot randlijn, en de normaal $n_2$ is gericht naar die zijde, vanwaar men (nabij de randlijn) den stroom van rechts naar links ziet loopen. Door hierin te stellen $\mathfrak{A}_x = 0$, $\mathfrak{A}_y = \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}$, $\mathfrak{A}_z = -\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2}$ verkrijgt men

$$(5) \dots . H_{2_x} = -i_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} d\sigma_2 .$$

Ook te schrijven, wanneer onder $\Omega_2$ de ruimtehoek verstaan wordt, waaronder $\lambda_2$ vanuit $(x_1\, y_1\, z_1)$ gezien wordt — er is evenals boven ondersteld, dat het laatstgenoemde punt niet *in* $\lambda_2$ ligt —,

$$(6) \dots . H_{2_x} = -i_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} .$$

$i_2\, \Omega_2$ is de magnetische potentiaal van $\lambda_2$. De bijdrage van $d\sigma_2$ tot $\Omega_2$ is positief te nemen, wanneer de normaal $n_2$ op dat vlakte-element met de van $(x_1\, y_1\, z_1)$ naar $d\sigma_2$ loopende rechte lijn een stompen hoek maakt.

Dezelfde magnetische kracht zou in $(x_1\, y_1\, z_1)$ worden teweeggebracht, indien in plaats van den stroom $\lambda_2$ op het vlak $\sigma_2$ een magnetische dubbellaag met $i_2$ tot moment per vlakte-eenheid aanwezig was, waarbij de hoeveelheid magnetisme $dm$ op afstand $r$ gerekend wordt eene magnetische kracht $\dfrac{dm}{r^2}$ in afstootende richting teweeg te brengen. Het vlak wordt natuurlijk ondersteld niet juist zoo gekozen te zijn, dat het door het punt $(x_1\, y_1\, z_1)$ loopt.

§ 3. Volgens de formule van Grassmann (Pogg. Ann. 64. 1845) ondervindt $d\lambda_1$ van $d\lambda_2$ eene ponderomotorische kracht, waarvan de eerste component is

$$(7)\ldots d^2X_1 = -i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \left[\frac{x_1 - x_2}{r^3}\cos\varepsilon + \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\right].$$

$\varepsilon$ is de hoek, dien de elementen $d\lambda_1$ en $d\lambda_2$ met elkander maken.

Hiervoor is ook te schrijven

$$(8)\ldots d^2X_1 = i_1\, d\lambda_1 \left[dH_{2_z}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} - dH_{2_y}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right],$$

waarin de vector met de componenten

$$(9)\ldots dH_{2_x} = -i_2\, d\lambda_2 \left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2}\right\}, \text{ enz.}$$

(verg. (3)) de aan $d\lambda_2$ te danken magnetische kracht kan worden genoemd. Uit (8) volgt, dat de kracht, die $d\lambda_1$ van den gesloten stroom $\lambda_2$ ondervindt, evengroot is als bij Ampère; de eerste component wordt gegeven door (4).

De kracht, die de gesloten stroom $\lambda_1$ van $d\lambda_2$ ondervindt, heeft tot eerste component

$$(10)\ldots d'X_1 = -i_1\, i_2\, d\lambda_2 \int d\lambda_1 \frac{x_1 - x_2}{r^3}\cos\varepsilon.$$

Deze kracht is niet dezelfde als bij Ampère, volgens wien, daar (1) ook is te schrijven in den vorm

$$(11)\ldots d^2X_1 = -i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 (x_1 - x_2)\left[\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right],$$

in plaats van (10) is te schrijven

$$(12)\ldots d'X_1 = -i_1\, i_2\, d\lambda_2 \int d\lambda_1 \left[\frac{x_1 - x_2}{r^3}\cos\varepsilon + \right.$$

$$\left. + (x_1 - x_2)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right].$$

Evenzoo blijkt het moment, dat $d\lambda_1$ van den gesloten stroom $\lambda_2$ om een gegeven as ondervindt, hetzelfde, en het moment, dat de gesloten stroom $\lambda_1$ van $d\lambda_2$ om een gegeven as ondervindt, niet hetzelfde te zijn als bij Ampère.

De krachten en momenten, door gesloten stroomen op elkander uitgeoefend, zijn volgens beide formules dezelfde.

§ 4. Men beschouwe een solenoide, bestaande uit zeer kleine gesloten stroompjes; $\delta$ is de afstand van twee opeenvolgende stroompjes, welke als evenwijdig kunnen worden beschouwd, $S$ het oppervlak van een plat vlakje met zulk een stroompje tot rand. Volgens § 2 brengt elk stroompje op afstanden, die zeer groot zijn in vergelijking met $\delta$ hetzelfde magnetische veld teweeg als een magnetische dubbellaag, welker beide deelen elk op een afstand $^1/_2\,\delta$ van het stroomvlakje zijn gelegen, en met eene hoeveelheid magnetisme $\pm M = \pm \frac{i_2 S}{\delta}$ zijn geladen. $i_2$ is de sterkte der stroompjes. Daar de werkingen van tegengesteld magnetisme $\pm M$ elkander opheffen, wanneer de met dit magnetisme geladen vlakjes samenvallen, werkt de geheele solenoide als bevonden zich de magnetische ladingen $\pm M$ op hare eindvlakken. De beide eindvlakken kunnen gerekend worden elk afzonderlijk een magnetisch veld teweeg te brengen; immers volgens (4) verandert de kracht $(dX_1\, dY_1\, dZ_1)$ niet, als men de magnetische kracht in willekeurige componenten ontbindt, hieruit volgens deze formule de bij elke component behoorende ponderomotorische kracht berekent, en vervolgens door samenstelling de totale ponderomotorische kracht zoekt.

Volgens Ampère bestaat er geen wezenlijk verschil tusschen zulk een solenoide en een magneet van denzelfden vorm met polen van sterkte $\pm M$ aan de uiteinden. Een magneet van eindige afmetingen kan dan beschouwd worden als bestaande uit een bundel van dergelijke solenoiden.

Streng genomen bestaan zoodanige solenoiden wel-is-waar niet; veeleer zijn de kringstroompjes in den magneet moleculaire stroomen en vertoonen geene rangschikking als de zooeven beschrevene; hier worde echter evenals op vele plaatsen bij Ampère zelven de minder strenge opvatting gebezigd.

Uit het § 2 gezegde volgt, dat de kracht door een pool met sterkte $M$ in het punt $(x_2\, y_2\, z_2)$ op het element $d\lambda_1$ in $(x_1\, y_1\, z_1)$ uitgeoefend is $i_1 \frac{M}{r^2} d\lambda_1 \sin r\, d\lambda_1$; hare richting is loodrecht op het vlak $(r\, d\lambda_1)$ naar de zijde, vanwaar men $d\lambda_1$ naar $r$ ziet draaien over minder dan 180° in de richting der wijzers van een uurwerk; de positieve richting van $r$ is gekozen als in fig. 11.

Men kan ook spreken van krachten door stroomelementen op polen uitgeoefend. Immers de kracht volgens de formule van Ampère door een stroomelement op een gesloten stroom uitgeoefend, en evenzoo het moment volgens die formule door een stroomelement op een gesloten stroom uitgeoefend, veranderen niet, wanneer men dien stroom door de bijbehoorende magnetische dubbellaag vervangt en aanneemt, dat de kracht, door een element op een hoeveelheid magnetisme uitgeoefend, gelijk en tegengesteld is aan de kracht, die het element van die hoeveelheid magnetisme ondervindt, en langs eene lijn werkt die door het element gaat. Zoo toch heffen de werkingen van element en dubbellaag op elkander, zooals het zijn moet, elkander op, wanneer zij vast met elkander zijn verbonden. De kracht, door $d\lambda_1$ op de pool $M$ uitgeoefend, is dus $-i_1 \frac{M}{r^2} d\lambda_1 \sin r\, d\lambda_1$ in de bovengenoemde richting.

Dit komt overeen met de wet van Biot en Savart, behalve wat de plaats van het aangrijpingspunt betreft; volgens Ampère ligt het in $(x_1\, y_1\, z_1)$ in het element; volgens Biot en Savart in $(x_2\, y_2\, z_2)$ in de pool. Wanneer $\lambda_1$ gesloten is, maakt dit geen verschil. Immers het verschil der twee momenten om de $Z$-as, die bij deze twee verschillende onderstellingen worden verkregen, bedraagt

$$i_1 M \int d\lambda_1 \left[ (x_1 - x_2) \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} \right\} - \right.$$

$$\left. - (y_1 - y_2) \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \right\} \right].$$

Hiervoor kan men schrijven

$$i_1 M \int d\lambda_1 \left[ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} r \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} - r \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} \frac{d \frac{1}{r}}{dr} \right]$$

of

$$i_1 M \int d\lambda_1 \left[ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} r \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{r} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial \lambda_1} \right]$$

of

$$(13) \ldots . \quad i_1 M \int d\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{z_1 - z_2}{r} \right],$$

hetgeen voor $\lambda_1$ gesloten verdwijnt.

§ 5. Bij de proeven over electromagnetische draaiing is de werkende stroom steeds gesloten, zoodat het onverschillig is of men ter berekening van de op de magneetpolen uitgeoefende krachten de formule van Ampère of die van Biot en Savart wil gebruiken. Deze laatste formule alleen is natuurlijk tot verklaring der verschijnselen ontoereikend, daar zij niets leert over de werking van magneetpolen op stroomelementen of van stroomelementen op elkander.

Daar ook het magnetisme te danken is aan het bestaan van gesloten stroomen, zijn alle werkingen terug te brengen tot die van gesloten op ongesloten stroomen. Volgens het § 3 na (9) en (12) opgemerkte, levert dus de toepassing der formule van Grassmann steeds dezelfde uitkomst op als die van Ampère's formule. [1])

Het is niet noodig deze stellingen door toepassing op bijzondere gevallen nader toe te lichten. Alleen worde er op gewezen, dat Ampère zelf, die de overeenstemming tusschen zijne formule en die van Biot en Savart, wanneer de werkende stroom gesloten is, erkent, ten onrechte des ondanks eene experimenteele beslissing omtrent de plaats van het aangrijpingspunt der op de pool werkende kracht zonder gebruikmaking van ongesloten stroomen voor mogelijk houdt. Zonder grond meent hij („Théorie des Phénomènes électrodynamiques") uit de proef van Faraday (fig. 3) te mogen opmaken, dat zijne opvatting de ware is. Hierop wijst b.v. Duhem (Leçons sur l'électricité et le magnétisme" III p. 450). Het behoeft na het bovenstaande geen betoog. — De stroom loope bij deze proef van $+\infty$ tot $O$ langs de $Z$-as, daarna langs de $X$-as, door het kwik (ev. door den magneet), enz. tot $+\infty$, en zij gesloten in het oneindige. De polen van den magneet bevinden zich in de punten $(x_2\ y_2\ \pm z_2)$. Volgens elke der genoemde formules is het op den magneet om de $Z$-as uitgeoefende moment (positief gerekend, wanneer het eene draaiing kan teweegbrengen in de richting tegengesteld aan die der wijzers van een uurwerk, gezien vanaf de positieve $Z$-as)

$$\frac{-2IMz_2}{y_2^2+z_2^2}\left[x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right],$$

[1]) Streng genomen is deze conclusie niet van toepassing op den toestel van Grotrian (fig. 6), waar de ongesloten stroom, die in beweging geraakt, deel uitmaakt van den gesloten bewegenden stroom; immers er werd steeds ondersteld, dat van verschillende stroomen sprake is. — Men kan intusschen de stroomdraden zoo fijn nemen en hunne onderlinge afstanden zoo groot denken in vergelijking met de afmetingen hunner doorsneden, dat elke stroomdraad gerekend kan worden slechts te werken op ongesloten stroombanen die buiten hem liggen en het in den text gezegde geldig blijft.

waarbij $I$ de stroom-, $M$ de poolsterkte is. Dit heeft voor alle standen van den magneet hetzelfde teeken. Hangt daarentegen de magneet (solenoide, of, als bij een t. a. p. door Ampère beschreven proef, enkele kringstroom) geheel boven het kwik, waarbij de Noordpool in $(x_2\, y_2\, z_2)$, de Zuidpool lager in $(x_2\, y_2\, z'_2)$ is gelegen, zoo wordt het moment om de $Z$-as

$$IM\left[\frac{-z_2}{y_2{}^2+z_2{}^2}\left(x_2+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{z'_2}{y_2{}^2+z'_2{}^2}\left(x_2+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z'_2{}^2}\right)\right],$$

welke uitdrukking (als $I$, evenals $M$, positief is) voor $x_2 = 0$, en ook voor $y_2 = 0$ en $x_2$ negatief, negatief blijkt te zijn, daarentegen positief voor $y_2 = 0$ en $x_2$ positief. De magneet zal dus een evenwichtsstand aannemen, in overeenstemming met het in de Inleiding opgemerkte, volgens hetwelk geen electromagnetische draaiing tot stand komt zonder dat er door eenig bewegelijk deel stroom gaat.

Eene dwaling is het, volgens de stellingen in den aanvang dezer §, wanneer Lorberg (t. a. p. pag. 529) de proef van Lecher (fig. 7) interessant noemt „als eine experimentelle Bestätigung der alten Annahme, dass die Kraft eines geradlinigen Stromteiles und folglich auch eines Stromelementes auf einen Pol nicht durch den Pol, sondern durch das Stromelement geht.”

§ 6. Loopt een stroom door een magneet, zoo zal het kunnen voorkomen, dat in een zelfde punt deze stroom en een bij het magnetisch lichaam als zoodanig behoorend stroompje tegelijker tijd aanwezig zijn; en men kan vragen, welke krachten of momenten deze beide stroomen dan op elkander uitoefenen. Hierbij is in het oog te houden, dat de stroomen niet volkomen lineair kunnen zijn, d. w. z. dat de stroom per vlakte-eenheid niet oneindig groot kan worden. Voor de magnetische kracht in $(x_1\ y_1\ z_1)$ aan den stroom $\lambda_2$ te danken is nu, als $d\tau_2$ een volume-element van $\lambda_2$ en $(u_2\ v_2\ w_2)$ den stroom per vlakte-eenheid voorstelt, te schrijven

$$(14)\ldots\ldots H_{2x} = -\int d\tau_2 \left\{ w_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} - v_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right\}, \text{ enz.},$$

waarbij men, de definitie der magnetische kracht uitbreidend, ook stroomen $(u_2\ v_2\ w_2)$, die geheel willekeurig over de ruimte verdeeld zijn, zou kunnen beschouwen. De vector $H_2$ bestaat ook in punten, die binnen het stroomgebied liggen; immers $\int \frac{1}{r^2}\, d\tau_2$, over een klein volume-element van willekeurigen vorm, waarin het beschouwde punt is gelegen, geïntegreerd, wordt eveneens klein, van de orde van de grootste lineaire afmeting van dat element. Evenzoo blijkt, dat de kracht, welke een stroomelement ondervindt van de daaraan onmiddellijk grenzende elementen, hetzij tot denzelfden hetzij tot een anderen stroom behoorende, oneindig klein is, wanneer men een oneindig klein gebied beschouwt en er rekening mee houdt, dat de stroomen niet lineair zijn. Het heeft derhalve geen bezwaar in met het in deze § genoemde feit niet uitdrukkelijk rekening te houden, hetgeen dan ook in voorafgaande § § niet geschiedde.

§ 7. Men kan, zoo men wil, in plaats van slechts van werkingen van gesloten stroomen te spreken, de formules voor de door ongesloten stroomen uitgeoefende werkingen te pas brengen. Zij in fig. 1 $m$ het magnetisme, $s_1$ de stroom buiten, $s_2$ de stroom binnen den wentelenden magneet. Zij $\{a\ b\}$ de werking van $a$ op $b$. Wij hebben dan, behalve de werking der stroomen op elkander, waarvan hier niet gesproken wordt, de werking

$$\{(s_1 + s_2)\ m\} + \{m\ s_2\}.$$

Daar de stroom $(s_1 + s_2)$ gesloten is, evenals de stroomen waardoor men $m$ kan vervangen, zullen de theoriën van Ampère en Grassmann hetzelfde resultaat opleveren. Stelt men echter de werking voor als door ongesloten stroomen uitgeoefend, dan verkrijgt men in de twee theoriën verschillende vormen voor de uitkomst.

Volgens Ampère

$$\{s_2\, m\} + \{m\, s_2\} = 0,$$

dus is de totale werking

$$\{s_1\, m\} \text{ of } -\{m\, s_1\},$$

waarbij $s_1$ (stroom in ABC) ongesloten is.

Daar men, volgens Grassmann evengoed als volgens Ampère, heeft

$$\{(s_1 + s_2)\, m\} = -\{m\,(s_1 + s_2)\},$$

wordt de totale werking volgens Grassmann evenals boven $-\{m s_1\}$, waarvoor nu echter niet $\{s_1\, m\}$ is te schrijven.

Hier zij er tevens op gewezen, dat men bij proeven, die ten doel hebben de overeenstemming tusschen theorie en waarneming aan te toonen, natuurlijk de werking der stroomen op elkander niet buiten beschouwing mag laten. In vele toestellen komen, evenals in den toestel van Pohl (fig. 4) bewegelijke armen voor, die met de magneten meedraaien. Dit is het geval bij verscheidene proeven van Hagenbach (t. a. p. b.v. pag. 246). Deze verwaarloost, zonder op die verwaarloozing te wijzen, het door de stroomen op de bewegelijke armen uitgeoefende moment. Wegens den bijzonderen aard van het „glijdend contact" is dit moment moeilijk juist te berekenen; men kan het echter meten, door den magneet te vervangen door een niet-magnetischen geleider. Zonder dit is de goede overeenstemming, die bij Hagenbach over het algemeen tusschen theorie en waarneming bestaat, niet geheel bevredigend.

§ 8. Hiermede zou de toepassing der formules van Ampère en Grassmann op de beschouwde verschijnselen als geeindigd kunnen worden beschouwd, indien het niet wenschelijk ware tot het verkrijgen van eene goede aansluiting aan de theorie van v. Helmholtz en aan de in het volgende Hoofdstuk te behandelen theorie van Neumann, eene uitdrukking op te stellen voor den bij oneindig kleine bewegingen der stroomelementen door de ponderomotorische krachten verrichten arbeid. Daarvóór worde nog de vraag besproken, in hoeverre bij de formule van Grassmann van eene werking van stroomen op magnetisme kan worden gesproken.

Daar kracht en moment, die een stroomelement van een gesloten stroom ondervindt, bij Grassmann dezelfde zijn als bij Ampère, kan men hierbij ook volgens Grassmann den gesloten stroom door een magnetische dubbellaag vervangen, en voor de krachten door magnetisme op stroomelementen uitgeoefend dezelfde waarden aannemen als bij Ampère.

Daar echter kracht en moment, die de gesloten stroom van het stroomelement ondervindt, niet gelijk-en-tegengesteld zijn aan bovengenoemde kracht en moment, kunnen in geen geval krachten door stroomelementen op magnetisme uitgeoefend voorkomen, welke als bij Ampère gelijk-en-tegengesteld zijn aan de door magnetisme op stroomelementen uitgeoefende krachten.

De kracht, die de gesloten stroom $\lambda_2$ van het stroomelement $d\lambda_1$ ondervindt, is volgens (10)

$$(15)\dots\quad d'X_2 = i_1\, i_2\, d\lambda_1 \int \mathfrak{A}_{\lambda_2}\, d\lambda_2\,,$$

waarin

$$(16)\dots\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= \frac{x_1-x_2}{r^3}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\,,\\ \mathfrak{A}_y &= \frac{x_1-x_2}{r^3}\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\,,\\ \mathfrak{A}_z &= \frac{x_1-x_2}{r^3}\frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\,. \end{aligned}\right.$$

Voor (15) is ook te schrijven

$$(17) \ldots d' X_2 = i_1 \, i_2 \, d\lambda_1 \int \mathfrak{B}_{n_2} \, d\sigma_2 ,$$

waarin

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z_2}, \text{ enz.}$$

Was nu de door $d\lambda_1$ op het magnetisme $dm$ in $(x_2 \, y_2 \, z_2)$ uitgeoefende kracht $(P_x dm \; P_y dm \; P_z dm)$, dan zou de werking van $d\lambda_1$ op een magnetische dubbellaag met zoodanige dikte $dn_2$, dat $dm \, dn_2 = i_2 \, d\sigma_2$, worden voorgesteld door

$$(18) \ldots d' X_2 = i_2 \int \frac{\partial P_x}{\partial n_2} \, d\sigma_2 .$$

Opdat (17) en (18) met elkander overeenstemmen, moet

$$(19) \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial P_x}{\partial x_2} = i_1 \, d\lambda_1 \, \mathfrak{B}_{x_2} , \\ \dfrac{\partial P_x}{\partial y_2} = i_1 \, d\lambda_1 \, \mathfrak{B}_{y_2} , \\ \dfrac{\partial P_x}{\partial z_2} = i_1 \, d\lambda_1 \, \mathfrak{B}_{z_2} . \end{cases}$$

Opdat dit mogelijk zij, moet

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{x_2}}{\partial y_2} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{y_2}}{\partial x_2}, \text{ enz.},$$

of

$$(20) \ldots \Delta \, \mathfrak{A}_z = \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z_2} \right], \text{ enz.},$$

waarin

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right).$$

Aan de vergelijkingen (20) voldoet $\mathfrak{A}$ niet. (18) kan dus niet bestaan, d. w. z. van krachten door stroomelementen op magnetisme uitgeoefend kan bij Grassmann in het geheel geen sprake zijn. De werking, die een stroomelement op een solenoïde uitoefent, hangt derhalve volgens Grassmann niet alleen af van den stand der eindvlakken, maar ook van de gedaante der solenoïde. — Ten onrechte zegt Hagenbach, die het ook verder doet voorkomen, als bestond tusschen de formules van Grassmann en Biot en Savart eene volmaakte overeenstemming, (t. a. p. pag. 273): „Die Ampère'-sche Theorie der Ersetzung des Elementarmagnets durch den Kreisstrom gilt also (?) bei Anwendung der Grassmann'schen Formel auch für die Wirkung zwischen Stromelement und Elementarmagnet", welke ook de eigenlijke bedoeling van den schrijver met deze woorden moge geweest zijn.

Een gesloten stroom kan gerekend worden op het magnetisme eener dubbellaag of op magneetpolen te werken, zooals § 4 werd nagegaan.

§ 9. Bewegen de elementen $d\lambda_1$ en $d\lambda_2$ zich ten opzichte van het omringend medium met verschuivingssnelheden $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\ \frac{\partial y_1}{\partial t}\ \frac{\partial z_1}{\partial t}\right)$ en $\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\ \frac{\partial y_2}{\partial t}\ \frac{\partial z_2}{\partial t}\right)$ resp., zoo bedraagt de ponderomotorische arbeid, dien zij in het tijdselement $dt$ op elkander verrichten,

$$(21)\ldots.d^3 A = dt\left[d^2 X_1\frac{\partial x_1}{\partial t} + d^2 Y_1\frac{\partial y_1}{\partial t} + d^2 Z_1\frac{\partial z_1}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + d^2 X_2\frac{\partial x_2}{\partial t} + d^2 Y_2\frac{\partial y_2}{\partial t} + d^2 Z_2\frac{\partial z_2}{\partial t}\right].$$

Deze arbeid verandert slechts met eene grootheid van hooger orde, wanneer bij de eindige verschuivingssnelheden eindige draaiingssnelheden komen. Immers van een moment, dat een der elementen van het andere zou ondervinden, is noch bij Ampère noch bij Grassmann sprake, en daar elk element in $dt$ over een oneindig kleinen hoek draait, ondergaan gedurende die draaiing $d^2 X_1$, enz. slechts ten opzichte van die componenten oneindig kleine veranderingen.

In (21) zullen wij vooreerst de waarden van $d^2 X_1$ enz. volgens de formule van Ampère substitueeren. Hierbij is $d^2 X_2 = -d^2 X_1$, enz. en wordt volgens (11)

$$(22)\ldots.d^3 A = -i_1\, i_2 d\lambda_1 d\lambda_2\, dt\left[\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right] r\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Wanneer de elementen niet van lengte veranderen, heeft men

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\cos\varepsilon)}{\partial t}=-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right)=-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial t}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial t}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r^2}{\partial t}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial t}\right)\right],$$

of

$$(23)\ldots.\frac{1}{r}\frac{\partial(\cos\varepsilon)}{\partial t}=-r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r^2}{\partial t}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r^2}{\partial t}\right]-\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right].$$

Dus

$$(24)\ldots.-r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}=\frac{1}{r}\frac{\partial(\cos\varepsilon)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r}{\partial t}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial t}\right]+\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right].$$

De formule (22) gaat dan over in

$$(25)\ldots.d^3A=i_1 i_2\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r}{\partial t}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial t}\right]+\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\right\}.$$

Wanneer de elementen gedurende $dt$ eene lengteverandering ondergaan, wijzigt zich deze formule. Dan heeft men

$$(26) \ldots . \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\cos\varepsilon)}{\partial t} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right],$$

terwijl in plaats van (23) geldt

$$(27) \ldots . \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial\lambda_1\,\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial\lambda_1\,\partial t}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial\lambda_1\,\partial t}\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial\lambda_2\,\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 y_2}{\partial\lambda_2\,\partial t}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial\lambda_2\,\partial t}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right] = -r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r^2}{\partial t}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r^2}{\partial t}\right] - \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right].$$

Daar men heeft

$$(28) \ldots . \frac{\partial^2 x_1}{\partial\lambda_1\,\partial t} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial t\,\partial\lambda_1} = \frac{1}{d\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial d\lambda_1}{\partial t}, \text{ enz.}$$

blijkt nu in plaats van (24) te moeten worden geschreven

$$(29) \ldots . -r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(\cos\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\cos\varepsilon}{r}\left[\frac{1}{d\lambda_1}\frac{\partial d\lambda_1}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d\lambda_2}\frac{\partial d\lambda_2}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial t}\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right];$$

zoodat in plaats van (25) algemeener is te schrijven

$$(30) \ldots . d^3 A = i_1\, i_2\, dt \left[ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\right) - \right.$$

$$- d\lambda_1\, d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left[ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left[ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial t}\right] - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1\, \partial \lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\right\}\right].$$

Is $\lambda_2$ gesloten, zoo is de op $\lambda_2$ en $d\lambda_1$ verrichte arbeid

$$(31) \ldots . d^2 A = i_1\, i_2\, dt \left[ \frac{\partial}{\partial t}\left\{ d\lambda_1 \int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\,\lambda_2 \right\} - \right.$$

$$\left. - d\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \int r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t}\, d\lambda_2 \right].$$

Zijn $\lambda_1$ en $\lambda_2$ gesloten, zoo is de arbeid

$$(32) \ldots . dA = i_1\, i_2\, dt \frac{d}{dt} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \,.$$

Ook moet nog vermeld worden, dat wanneer $\lambda_2$ ongesloten is, de op $\lambda_2$ en $d\lambda_1$ verrichte ponderomotorische arbeid is te schrijven

$$(33) \ldots . d^2 A = i_1\, i_2\, dt \left[ \frac{\partial}{\partial t}\left\{ d\lambda_1 \int_{P'_2}^{P''_2} \frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\lambda_2 \right\} + \right.$$

$$+ d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \int_{P'_2}^{P''_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left( r \frac{\partial r}{\partial t}\right) d\lambda_2 - r''_1 \frac{\partial \frac{1}{r''_1}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r''_1}{\partial t} + \right.$$

$$\left.\left. + r'_1 \frac{\partial \frac{1}{r'_1}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r'_1}{\partial t}\right\}\right].$$

Hieruit blijkt, dat wanneer $\lambda_2$ gesloten is, de arbeid der krachten, die volgens (2) kunnen gerekend worden bij de uiteinden van $\lambda_2$ te behooren, verdwijnt.

Uit (32) blijkt, dat er voor gesloten stroomen overeenstemming bestaat tusschen de formule van Ampère en de potentiaalwet van F. E. Neumann, zooals dit ook door v. Helmholtz op andere wijze is aangetoond; en wel bestaat deze overeenstemming, gelijk hij zegt (Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I. pag. 695) „für jede beliebige Art der Verschiebung eines vollkommen biegsamen, dehnbaren oder flüssigen Leiters."

§ 10. Substitueert men in (21) de waarden der krachtcomponenten volgens Grassmann, zoo blijkt door soortgelijke transformaties als in § 9 te kunnen worden geschreven

$$(34) \ldots d^3 A = i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, dt \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) - \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial y_1}{\partial t}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial z_1}{\partial t}\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2}\right)\right\} -$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial z_2}{\partial t}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right)\right\}\right].$$

Rekken de elementen zich uit, zoo blijken hieraan te moeten worden toegevoegd de termen

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial\lambda_1\,\partial t} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\right) + \frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial\lambda_1\,\partial t} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2}\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial\lambda_1\,\partial t} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial t\,\partial\lambda_1}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial\lambda_2\,\partial t} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial\lambda_2\,\partial t} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\right) + \frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial\lambda_2\,\partial t} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial t\,\partial\lambda_2}\right)\right]$$

of

$$\frac{\cos\varepsilon}{r}\left[\frac{1}{d\lambda_1}\frac{\partial d\lambda_1}{\partial t} + \frac{1}{d\lambda_2}\frac{\partial d\lambda_2}{\partial t}\right].$$

Dan gaat (34) over in

$$(35)\ldots.d^3 A = i_1\, i_2\, dl \left[ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\right) - \right.$$

$$\left. - d\lambda_1\, d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2}\ldots.\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\ldots.\right)\right]\right\} \right].$$

Zijn beide stroomen gesloten, zoo geldt evenals boven (32).

§ 11. Wij hebben tot beschrijving der electromagnetische draaiingen de formules gebezigd, die de werking aangeven van gesloten op ongesloten stroomen. Om den arbeid te leeren kennen, bij eene zeer kleine beweging van den toestel door de ponderomotorische krachten verricht, zou men in overeenstemming hiermede (31) of de daarmede overeenkomstige uit (35) af te leiden formule kunnen bezigen. Men kan echter ook anders te werk gaan, en aannemen, dat elke stroomdraad, die door een glijdend contact loopt, bij de zeer kleine draaiing zijn individualiteit behoudt; de stroomdraad moet zich dan, wat zijne elementen betreft, die in de overgangslaag welke bij het glijdend contact kan worden aangenomen zijn gelegen, verbuigen en uitrekken. Men heeft dan uitsluitend met eene werking van gesloten op gesloten stroomen te doen en (32) is van toepassing.

Als voorbeeld diene de toestel van König (fig. 2), als de magneten vast zijn en de cylinder draaibaar wordt genomen. Aan de uiteinden van den cylinder zijn cirkelvormige glijdende contacten. Elke stroomdraad moet geacht worden bij de draaiing door dezelfde beschrijvende lijn te blijven loopen en ook buiten den cylinder door dezelfde stoffelijke deeltjes te blijven gaan, zoodat een klein gedeelte van elk der cirkelomtrekken in elken stroomdraad (door eene fictieve uitrekking van dien draad) wordt ingevoegd. Dit voorbeeld zal in § 15 nog nader worden beschouwd.

Ook in den toestel van Pohl (fig. 4), waar de totale stroom kan gesplitst worden in twee gesloten stroomen, dezelfde banen volgend behalve in de kwikgoot, waar de eene langs den eenen, de andere langs den anderen cirkelboog CD loopt, kan, terwijl de arm BC met den magneet een kleine draaiing uitvoert, het door het uiteinde van dien arm beschreven cirkelboogje gerekend worden in den eenen stroomdraad door uitrekking te zijn ontstaan, uit den anderen door inkrimping te zijn verdwenen. Er is echter geen bezwaar om in zulke gevallen, zoo men dat verkiest, van een intreden van nieuwe elementen te spreken, gelijk § 16 wordt betoogd.

Uit (32) blijkt, dat bij een toestel als van Lecher (fig. 7), waar beide punten, waar de stroom in en uit het bewegelijk deel stroomt, in de draaiings-as liggen, zoodat geen uitrekking der stroomdraden of intreden van nieuwe elementen plaats heeft, de arbeid bij eene geheele omwenteling door de ponderomotorische krachten verricht nul is. Het is echter opdat draaiing plaats grijpe een vereischte, dat deze arbeid een positieve waarde hebbe.

§ 12. Voor (32) is ook te schrijven

$$(36) \dots . dA = i_1 \, dt \frac{d}{dt} \iint V_{2\lambda_1} \, d\lambda_1 ,$$

wanneer $i_2$ constant is.

$V_2$ is hierbij de aan $\lambda_2$ te danken vector-potentiaal, die voldoet aan

$$(37) \dots . V_{2x} = i_2 \int \frac{1}{r} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} \, d\lambda_2, \text{ enz },$$

dus ook aan

$$(38) \dots . \frac{\partial V_{2z}}{\partial y_1} - \frac{\partial V_{2y}}{\partial z_1} = H_{2x}, \text{ enz. (Verg. (3) ).}$$

De vergelijking (36) gaat door transformatie volgens het theorema van Stokes over in

$$(39) \dots . dA = i_1 \, dt \frac{d}{dt} \int H_{2n_1} \, d\sigma_1 .$$

Hieruit blijkt, dat de ponderomotorische arbeid op beide zich bewegende en vervormende gesloten stroomen verricht gelijk is aan het product van de stroomsterkte van een dier stroomen met de toename van het aantal aan den anderen stroom te danken en door den eersten omvatte magnetische krachtlijnen. De normaal loopt (als men den stroom voor een oogenblik vervangen denkt door de bijbehoorende magnetische dubbellaag) van het negatief naar het positief magnetisme. — Er was steeds sprake van constante stroomen; niets belet echter eene zoodanige formule b. v. toe te passen op den toestel van Pohl (fig. 4), waarin door de draaiing van den arm de stroomsterkte der beide gesloten stroomen verandert, ook al blijft hun som, d. w. z. de stroomsterkte in $AB$ en $DE$ constant; hier moet men in plaats van de werkelijke toestandsverandering, eene draaiing van den arm beschouwen, waarbij de beide afzonderlijke stroomsterkten gerekend worden eene constante waarde te behouden; zóó blijkt dat men ook in dit geval uit (39) het moment der op een bepaald oogenblik werkende krachten kan bepalen. De krachtlijnen, die in het geval van den toestel van Pohl beschouwd moeten worden, zijn natuurlijk degene, die van den magneet uitgaan.

De ponderomotorische arbeid, die volgens Ampère een gesloten en een ongesloten stroom op elkander verrichten, is gelijk aan het product van de stroomsterkte van den ongesloten stroom met het aantal door hem gesneden van den gesloten stroom afkomstige krachtlijnen. Dit blijkt uit (2) en (33) in verband met het bij deze laatste formule opgemerkte; men houde in het oog, dat het element $d\lambda_1$ op $\lambda_2$ eene kracht uitoefent tegengesteld gelijk aan de kracht die het zelf volgens (2) van $\lambda_2$ ondervindt; volgens (33) nu mag men bij het berekenen van den arbeid het deel dezer krachten, dat bij de eindpunten van $\lambda_2$ schijnt te behooren, buiten beschouwing laten. — Afzonderlijk is hierbij de arbeid op een der stroomen verricht gelijk aan het product der stoomsterkte van den ongesloten stroom met het aantal krachtlijnen, dat deze zou gesneden hebben, indien alleen de beschouwde stroom gedurende het beschouwde tijdselement had bewogen.

§ 13. Verplaatst de pool $M$ in $(x_2\, y_2\, z_2)$ zich over $(dx_2\, dy_2\, dz_2)$ en draait tevens om een as, die er doorgaat, over de hoeken $(d\alpha_2\; d\beta_2\; d\gamma_2)$, zoo zal het vast met de pool verbonden gedachte aangrijpingspunt $(x_1\, y_1\, z_1)$ der kracht, die $d\lambda_1$ volgens Ampère er op uitoefent, zich in de richtingen der coördinaatassen verplaatsen over

$$\begin{cases} dx_2 + (z_1 - z_2)\, d\beta_2 - (y_1 - y_2)\, d\gamma_2, \\ dy_2 + (x_1 - x_2)\, d\gamma_2 - (z_1 - z_2)\, d\alpha_2, \\ dz_2 + (y_1 - y_2)\, d\alpha_2 - (x_1 - x_2)\, d\beta_2. \end{cases}$$

Positief is hierbij eene rotatie gerekend, waarbij $OX$ naar $OY$ draait over 90°, enz., (cyclische letterverwisseling).

Verschuift bovendien $d\lambda_1$ in $(x_1\, y_1 z_1)$ zich over $(dx_1\, dy_1\, dz_1)$ in hetzelfde tijdselement, zoo is de hierbij verrichte arbeid te schrijven

$$(40) \ldots . \; d^2A = i_1\, M d\lambda_1 \Bigg[ \Big( dx_1 - dx_2 - (z_1 - z_2)\, d\beta_2 + \\ + (y_1 - y_2)\, d\gamma_2 \Big) \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \right\} + \ldots . \Bigg],$$

hetgeen zich herleidt tot

$$(41) \ldots . \; d^2A = i_1\, M d\lambda_1\, dt \Bigg[ - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left( \frac{x_1 - x_2}{r} \right) - \\ - \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left( \frac{y_1 - y_2}{r} \right) - \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left( \frac{z_1 - z_2}{r} \right) + \\ + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} \right\} + \ldots . \Bigg].$$

Dit blijkt het product te zijn van $i_1$ met het door het element $d\lambda_1$ in den tijd $dt$ gesneden aantal van de pool afkomstige krachtlijnen.

Is $\lambda_1$ gesloten, zoo vallen de termen met $\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$, enz. weg. Dan is de arbeid

$$(42)\ldots. dA = -i_1 \, M dt \frac{d}{dt} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1$$

of

$$(43)\ldots. dA = -i_1 \, M \frac{d\Omega}{dt} dt,$$

waarin $\Omega$ de hoek is, waaronder de stroom vanuit de pool wordt gezien. $d\sigma_1$ levert tot $\Omega$ eene positieve bijdrage, als op de zijde van $d\sigma_1$ die naar de pool gekeerd is (wanneer men voor een oogenblik de magnetische dubbellaag, die bij den stroom behoort, aanwezig denkt) positief magnetisme ligt.

Gaat de pool $N$ maal in positieve, $N'$ maal in negatieve richting door het vlak, dat de stroomlijn tot rand heeft, en keeren pool en stroomlijn ten slotte weer in hun oorspronkelijken relatieven stand terug, zoo is de hierbij verrichte ponderomotorische arbeid

$$(44)\ldots. A = 4\pi\,(N - N')\, i_1 \, M.$$

De afzonderlijk door een element $d\lambda_1$ op de pool $M$, of door de pool $M$ op het element $d\lambda_1$ verrichte ponderomotorische arbeid is gelijk aan het product van $i_1$ met het aantal van de pool afkomstige krachtlijnen, dat $d\lambda_1$ in $dt$ zou gesneden hebben, indien in het eerste geval slechts de pool, in het tweede geval slechts $d\lambda_1$ had bewogen.

§ 14. Het verband, dat bij Grassmann tusschen den ponderomotorischen arbeid en het aantal gesneden magnetische krachtlijnen bestaat, volgt uit (8). Deze formule leert, dat de op een ongesloten of gesloten stroom verrichte ponderomotorische arbeid gelijk is aan het product van zijne stroomsterkte met het aantal krachtlijnen, dat hij in het beschouwde tijdselement zou gesneden hebben, indien hij alleen had bewogen. — Voor twee gesloten stroomen kan men dat verband ook uitdrukken als in § 12.

Van den ponderomotorischen arbeid door een pool en een stroomelement op elkander verricht, kan hier volgens § 8 geen sprake zijn. De arbeid door een pool en een gesloten stroom op elkander verricht is evenals bij Ampère bepaald door (44).

§ 15. De voorstelling der krachtlijnen maakt de toepassing der theorie op vele toestellen gemakkelijk. Weder worde beschouwd de toestel van König (fig. 2), als de magneten vast zijn, en de cylinder draaibaar is. Wat het uitgeoefende moment betreft is het onverschillig of de stroom (totale sterkte $I$) continu over den cylindermantel (straal $a$) is verdeeld, of wel dat hij loopt in afzonderlijke oneindig dunne stroomdraden, elk met de sterkte $\frac{I}{2\pi}\,d\theta$ en gescheiden door intervallen $ad\theta$, welke ten opzichte van de afmetingen der doorsnede der genoemde stroomdraden oneindig groot kunnen worden gedacht. Bij draaiing van den cylinder over $d\theta$ beweegt elke stroomdraad zich evenwijdig aan zichzelf door een magnetisch veld. Volgens § 12 of § 14 is de hierbij op elken stroomdraad verrichte arbeid gelijk aan het product van zijne stroomsterkte met de integraal van de normale component der magnetische kracht over het vlakje, waarover hij zich verschoven heeft. Dit geeft voor den op alle stroomdraden bij de draaiing over $d\theta$ verrichten arbeid

$\frac{MI}{2\pi}\,d\theta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma$, als de draaiing plaats heeft in positieve richting (§ 13), en de integraal uitgestrekt is over het geheele cylindervlak (normaal naar binnen); immers elke stroomdraad komt in den stand, die oorspronkelijk door den naburigen stroomdraad werd ingenomen. Hieruit volgt voor het moment der op den cylinder werkende krachten de waarde $\frac{MI}{2\pi}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma$.

Eene nadere beschouwing leert, dat het moment door de positieve pool $M$ binnen den cylinder op dezen uitgeoefend bedraagt: $2\,MI$ verminderd met $\frac{MI}{2\pi}(\Omega_1+\Omega_2)$, waarin $\Omega_1$ en $\Omega_2$ de hoeken zijn, waaronder de uiteinden van den cylinder vanuit de pool worden gezien, beide positief genomen. Het moment door de negatieve pool buiten den cylinder op hem uitgeoefend bedraagt $\frac{MI}{2\pi}(\Omega_1^1+\Omega_2^1)$, waarin $\Omega_1^1$ en $\Omega_2^1$ de hoeken zijn, waaronder de eindcirkels van den cylinder vanuit de negatieve pool worden gezien, beide positief genomen, zoo de negatieve pool zich op de as van den cylinder, niet op het verlengde daarvan, projecteert. $\Omega_1^1+\Omega_2^1$ blijkt kleiner te zijn dan $\Omega_1+\Omega_2$. Het totale moment door den magneet N S op den cylinder uitgeoefend nadert tot $2\,MI$, als de cylinder naar beide zijden zeer lang wordt.

De voorstelling der krachtlijnen is ook nuttig om in vele gevallen zonder berekening te doen zien, dat de vorm van den sluitdraad geen invloed op de draaiing heeft. Volgens § 12 is in het geval van fig. 1, waarbij b.v. de magneet draait en de sluitdraad rust, de arbeid evenredig met het aantal door den ongesloten stroom ABC gesneden van den magneet afkomstige krachtlijnen. (Zie § 7, waarin betoogd wordt, dat de werking opgevat mag worden als eene werking tusschen den magneet en een ongesloten stroom). De polen van den magneet bevinden zich bij onderstelling aan de uiteinden, zoodat elke krachtlijn buiten den magneet (van krachtlijnen binnen den magneet is eerst in het volgende Hoofdstuk sprake) van de eene pool naar de andere of van een pool naar het oneindige loopt. Hieruit blijkt, dat de sluitdraad bij eene draaiing evenveel krachtlijnen snijdt, welke ook zijn vorm moge zijn, mits de eindpunten dezelfde blijven. — Anders gezegd: voeren twee sluitdraden, die dezelfde eindpunten hebben, elk een volledige wenteling uit ten opzichte van den magneet, zoo vormen de door hen beschreven oppervlakken te zamen een gesloten oppervlak; uit (3) blijkt, dat de aan den magneet te danken magnetische kracht binnen dit oppervlak overal voldoet aan

$$(45)\ldots\frac{\partial H_{2x}}{\partial x}+\frac{\partial H_{2y}}{\partial y}+\frac{\partial H_{2z}}{\partial z}=0,$$

waaruit volgt dat de normale integraal der magnetische kracht over het oppervlak nul is; de integraal is dus gelijk voor de beide deelen van het gesloten oppervlak, wanneer voor een hunner de normaal wordt omgekeerd; hetgeen men ook uitdrukt door te zeggen, dat de beide sluitdraden elk evenveel krachtlijnen snijden bij eene volle wenteling.

Men moet verder in het oog houden, dat het niet noodig is, dat de stroom zich werkelijk verplaatst. Zoo staat bij den toestel van Plücker (fig. 5), als de cylinder draait, de *stroom* stil, alleen de *geleidende stof* voor zoover deze stof tot den cylinder behoort, draait. Bij de berekening van den arbeid heeft men hier eene zeer kleine *virtueele* draaiing te beschouwen, waarbij de stroom meedraait.

Verricht (fig. 1) de magneet eene volle wenteling, terwijl de sluitdraad rust, zoo gaat al het Noordmagnetisme door het vlak, dat den gesloten stroom tot rand heeft en keert daarna in zijn oorspronkelijken stand terug. Volgens (44) is de hierbij verrichte arbeid $4\pi i_1 M$, het werkend moment dus $2 i_1 M$. Daarbij komt het door den magneet op de met hem bewegende stroombaan uitgeoefend moment.

Bij werkelijke proeven maakt het wat de waarde van het moment betreft waarvoor boven $2i_1 M$ is geschreven een groot verschil, waar het punt C zich op den cylindermantel bevindt; immers het is slechts een eenvoudigheidshalve ingevoerde fictie, dat al het magnetisme zou mogen worden gerekend zich aan de uiteinden van den magneet te bevinden.

§ 16. Wanneer, als bij den toestel van Pohl (fig. 4), nieuwe elementen in de stroombanen intreden, houdt (32) niet op geldig te zijn. Dit blijkt reeds uit het § 11 gezegde, volgens hetwelk men op de plaats, waar die intreding plaats heeft, eene fictieve uitzetting of inkrimping der stroomdraden kan aannemen. Niets belet echter eene virtueele verandering te beschouwen, welke in sommige gevallen (b.v. bij de proeven van Zöllner, ook in de Inleiding vermeld, waar de armen uit kwikstralen bestaan, zoodat ongetwijfeld nieuwe elementen in de stroombanen intreden) meer met de werkelijke verandering overeenkomt. Zij P (fig. 12) een punt van den gesloten stroom $\lambda_2$, AB een deel van den gesloten stroom $\lambda_1$. $\lambda_1$ opene zich bij C, zoodat het eene uiteinde naar D, het andere naar E gaat, en in DE trede een nieuw element in. De richting van den stroom zij ACB. De elementen AC en CB voeren gedurende het beschouwde tijdselement slechts een oneindig kleine draaaiing uit. Ook de richting van DE is op oneindig weinig na dezelfde als die van ACB; anders zou de stroombaan na $dt$ bij D en E merkwaardige punten vertoonen, wat bij onderstelling niet het geval is. De vergelijking (31), die betrekking heeft op $\lambda_1$ ongesloten en $\lambda_2$ gesloten, is hier geldig, en wordt

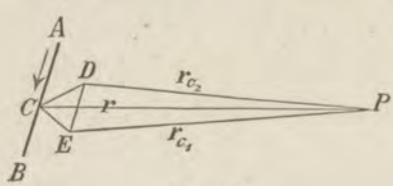

Fig. 12.

$$(46)\ldots\ldots d^2A = i_1\, i_2\, dt \left[\frac{d}{dt}\int\!\!\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \,-\right.$$

$$\left. -\int_{C_1}^{C_2} d\lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\int r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\frac{\partial r}{\partial t} d\lambda_2\right].$$

Met $C_1$ en $C_2$ zijn aangeduid de punten, die eerst in C samenvallen en zich resp. naar E en D bewegen. $\int_{C_1}^{C_2}$ is genomen over $\lambda_1$ in de richting van den stroom.

Opdat de eerste term van het tweede lid van (46) overga in het formeel gelijke tweede lid van (32), moet daarbij worden gevoegd de term $i_1\ i_2\ D E \int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, d\,\lambda_2$, ook te schrijven, op den factor $i_1\, i_2$ na,

$$-\,DE\int d\lambda_2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial^2 r}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right].$$

Dat deze term inderdaad gelijk is aan den tweeden term van het tweede lid van (46) blijkt als volgt. Deze tweede term is te schrijven, met weglating van den factor $i_1\ i_2\ dt$,

$$-\int r\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r_{c_2}}{\partial t} - \frac{\partial r_{c_1}}{\partial t}\right] d\lambda_2,$$

waarin $r$, $r_{c_1}$ en $r_{c_2}$ den afstand van P tot C, E en D resp. voorstellen. Ook te schrijven

$$\int\frac{d\lambda_2}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial\lambda_2}\left\{\frac{\partial r_{c_2}}{\partial t} - \frac{\partial r_{c_1}}{\partial t}\right\} + r\,\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left\{\frac{\partial r_{c_2}}{\partial t} - \frac{\partial r_{c_1}}{\partial t}\right\}\right].$$

Opdat deze term den verlangden vorm aanneme, moet

$$(47)\ldots\ldots \frac{\partial(r_{c_2} - r_{c_1})}{\partial t}\, dt = -\,DE\,\frac{\partial r}{\partial\lambda_1}\,.$$

Het blijkt inderdaad uit de fig. dat men $\frac{\partial(r_{c_2} - r_{c_1})}{\partial t}dt$ kan verkrijgen door D E op P C te projecteeren, zooals de laatste formule aangeeft.

Bij gevolg geldt (32) ook als nieuwe elementen in de stroombanen intreden.

Men kan dit evenzoo bewijzen, uitgaande van (35) in plaats van (46).

Het is natuurlijk niet geoorloofd tegen te werpen, dat in den toestel van Pohl een element intreedt, dat loodrecht op het aangrenzende element van den arm staat; als men de stroomdraden fijn genoeg en het tijdselement kort genoeg neemt, ligt steeds elk intredend element in het verlengde der beide aangrenzende elementen.

Zij bij dezen toestel (fig 13) A B C D een deel van de kwikgoot, (horizontale doorsnede); de punt van den draaibaren arm O E is omgebogen, zoodat het uiteinde zich in het kwik bevindt. O E F G is een stroombaan [1]). De arm wordt verplaatst naar O E′. Bij deze virtueele beweging kan de stroombaan, hetzij door uitrekking, hetzij door intreding van nieuwe elementen, geacht worden een vorm als O E′ F′ G′ aan te nemen. Daar (32) geldt is de hierbij verrichte arbeid gelijk aan het aantal door het vlakje G F E O E′ F′ G′ gaande

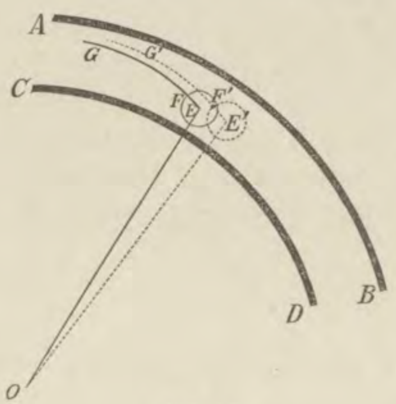

Fig. 13.

[1]) Het cirkeltje in de fig. stelt de doorsnede der punt voor met een plat vlak, dat met de oppervlakte van het kwik samenvalt.

van den magneet afkomstige krachtlijnen. Wegens de geringe breedte der kwikgoot komt het slechts op de door het vlakje O E E′ gaande krachtlijnen aan. Door het aantal dezer krachtlijnen wordt het moment bepaald.

§ 17. Nu de formules van Ampère en Grassmann beide even geschikt blijken tot het beschrijven der electromagnetische draaiing, rijst de vraag of er nog andere formules zijn. die, eveneens uitgaande van eene afstandswerking tusschen stroomelementen, en van de meergenoemde onderstelling omtrent den aard der magnetische lichamen, dezelfde bruikbaarheid bezitten.

Volgens de formule van Korteweg (Crelle's Journal 90, 1880) ondervindt $d\lambda_1$ van $d\lambda_2$ eene kracht, waarvan de eerste component is

$$(48)\ldots.d^2 X_1 = i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \left[ -E \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left\{ C(x_1 - x_2) \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \right\} + \frac{3(x_1 - x_2)}{r^3} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} \right],$$

en een moment om een erdoor gaande as, waarvan de eerste component is

$$(49)\ldots.d^2 M_{1_x} = -i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[ \mathrm{D} \left\{ (y_2 - y_1) \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (z_2 - z_1) \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \right\} \right].$$

Deze waarden volgen n. l. uit de door Korteweg gegeven formules

$$(50)\ldots.d^2 X_1 = i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \left[ -E \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} - \right.$$

$$- \frac{B - E - G}{r} (x_1 - x_2) \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} + C(x_1 - x_2) \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_1\, \partial \lambda_2} +$$

$$\left. + G \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} \right],$$

en

$$(51)\ldots\ d^2 M_{1_x} = i_1 i_2 d\lambda_1 d\lambda_2 \left[ \frac{D+H}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \left\{ (y_2 - y_1) \frac{\partial z_2}{\partial \lambda_2} - \right.\right.$$

$$\left. - (z_2 - z_1) \frac{\partial y_2}{\partial \lambda_2} \right\} + \frac{D-F}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} \left\{ (y_2 - y_1) \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} - \right.$$

$$\left.\left. - (z_2 - z_1) \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \right\} - D \left\{ \frac{\partial y_2}{\partial \lambda_2} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial z_2}{\partial \lambda_2} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \right\} \right],$$

als men gebruik maakt van de door hem [1]) afgeleide betrekkingen

$$(52)\ldots\ \left\{ \begin{aligned} & B - E - G + r\frac{dC}{dr} + \frac{3A^2}{r^2} = 0, \\ & 2D + H - Gr - F - Cr + r\frac{dD}{dr} + \frac{2A^2}{r} = 0, \\ & \frac{2A^2}{r^3} - \frac{C+G}{r} = 0, \\ & D - F + r\frac{dD}{dr} = 0, \\ & D + H = 0, \end{aligned} \right.$$

waarin gesteld is $A^2 = 1$ ter invoering van electromagnetische maat. $B \ldots H$ zijn functiën van $r$. Het ligt voor de hand te onderstellen, dat in elke der vergelijkingen (52) afzonderlijk alle termen dezelfde macht van $r$ bevatten. Voor $D = 0$, $E = 0$, $C = \frac{2}{r^2}$ gaan (48) en (49) in de formule van Ampère over, voor $D = 0$, $E = 0$, $C = \frac{1}{r^2}$ in de formule van Grassmann.

Om aan te toonen, dat formule (48) tot beschrijving der electromagnetische draaiing geschikt is, is het volgens het § 5 opgemerkte (n. l. dat de beschouwde werkingen steeds terug te brengen zijn tot die van gesloten op onge-

[1]) Voor stroomelementen zonder „stroomeinden".

sloten stroomen) voldoende aan te toonen, dat bij de werking van gesloten op ongesloten stroomen de waarde van $C$, $E$ en $D$ tot het resultaat niet afdoet.

Het element $d\lambda_1$ ondervindt van $\lambda_2$, zich uitstrekkende van $P'_2$ tot $P''_2$, een kracht met eerste component

$$(53)\ldots. dX_1 = i_1\, d\lambda_1 \left[ H_{2z} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} - H_{2y} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} + \right.$$

$$+ i_2 \int_{P'_2}^{P''_2} d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left\{ (C - \frac{1}{r^2})\, (x_1 - x_2) \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \right\} -$$

$$\left. - i_2 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \int_{P'_2}^{P''_2} E \frac{\partial r}{\partial \lambda_2}\, d\lambda_2 \right].$$

Is $\lambda_2$ gesloten, zoo wordt de eerste component der op $d\lambda_1$ werkende kracht

$$(54)\ldots. dX_1 = i_1\, d\lambda_1 \left[ H_{2z} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} - H_{2y} \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} \right],$$

in overeenstemming met (4). Natuurlijk wordt, daar het aangrijpingspunt dezer kracht in $d\lambda_1$ is gelegen, ook haar moment om een willekeurige as evengroot als volgens Ampère of Grassmann. Het door (49) bepaalde moment verdwijnt als $\lambda_2$ gesloten is. — Hiermede is het verlangde bewezen.

Men kan verder bewijzen (op soortgelijke wijze als § 9), dat de arbeid door twee gesloten stroomen volgens de formule van Korteweg op elkander verricht door (32) wordt voorgesteld. Verder, dat de werking van magnetisme op stroomelementen dezelfde is als bij Ampère, dat echter van eene werking van stroomelementen op magnetisme (zie § 8) in het algemeen niet kan worden gesproken. — Wanneer twee gesloten stroomen zich bewegen, is de door hen op elkander verrichte ponderomotorische arbeid met behulp van gesneden krachtlijnen uit te drukken evenals boven. Wanneer een gesloten en een ongesloten stroom zich bewegen is de arbeid op den ongesloten stroom verricht gelijk aan het product van zijne stroomsterkte met het aantal krachtlijnen, dat hij zou gesneden hebben, indien hij zich alleen had bewogen; de arbeid op den gesloten stroom verricht is alleen dan met behulp van gesneden krachtlijnen uit te drukken, wanneer de formule van Korteweg in een der beide vroeger behandelde formules overgaat, volgens § 12 en § 14.

§ 18. Geen bevredigende beschrijving der electromagnetische draaiingen wordt gegeven door de formule van v. Helmholtz. (Crelle's Journal 72. 1870).

Volgens deze formule is de ponderomotorische arbeid, door $d\lambda_1$ en $d\lambda_2$ bij eene standverandering op elkander verricht, gelijk aan de afname van den electrodynamischen potentiaal

$$i_1\, i_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial \lambda_1}\,\frac{\partial r}{\partial \lambda_2} + \frac{1+k}{2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_1\, \partial \lambda_2}\right],$$

waarin $i_1$ en $i_2$ gedurende het beschouwde tijdselement constant ondersteld zijn. $k$ is eene constante.

Is $\lambda_2$ gesloten, zoo is de in $dt$ door stroom en stroomelement op elkander verrichte ponderomotorische arbeid te schrijven

$$(55) \ldots .\, d^2 A = i_1\, i_2\, d\lambda_1\, dt\, \frac{d}{dt} \int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, d\lambda_2$$

of

$$(56) \ldots .\, d^2 A = i_2\, d\lambda_1\, dt\, \frac{d}{dt} \int H_{1\, n_2}\, d\sigma_2\,,$$

d. w. z. die arbeid is gelijk aan het product der stroomsterkte van den gesloten stroom met de toename van het aantal door hem omvatte aan den ongesloten stroom te danken krachtlijnen. — Afzonderlijk is hierbij de op een der stroomen verrichte arbeid gelijk aan het product der stroomsterkte van den gesloten stroom met de toename, die het aantal door hem omvatte krachtlijnen in het beschouwde tijdselement zou ondergaan hebben, indien slechts de beschouwde stroom had bewogen. — Voor twee gesloten stroomen evenals boven.

Dat de formule van v. Helmholtz niet met de waarnemingen strookt, volgt hieruit, dat bij hem in plaats van (48) en (49) wordt gevonden

$$(57)\ldots . \, d^2 X_1 = - i_1 i_2 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} + \frac{1+k}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right]$$

en

$$(58)\ldots . \, d^2 M_{1x} = - i_1 i_2 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \lambda_2} + \frac{1+k}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right],$$

in welke formules (50) en (51) overgaan voor

$$(59)\ldots . \left\{ \begin{aligned} B &= -\frac{1}{r^2}, \\ C &= \frac{1+k}{2} \frac{1}{r^2}, \\ D &= \frac{1+k}{2} \frac{1}{r}, \\ E &= \frac{1-k}{2} \frac{1}{r^2}, \\ F &= \frac{1}{r}, \\ G &= \frac{1-k}{2} \frac{1}{r^2}, \\ H &= -\frac{1+k}{2} \frac{1}{r}, \end{aligned} \right.$$

welke waarden niet voldoen aan de beide onder (52) begrepen betrekkingen

$$\frac{2}{r^3} - \frac{C+G}{r} = 0,$$

$$D - F + r\frac{dD}{dr} = 0.$$

De eerste dezer beide formules drukt, naar Korteweg aantoont, uit, dat de kracht door een gesloten stroom op een stroomelement uitgeoefend daar loodrecht op staat, hetgeen uit de proeven van v. Ettingshausen (Sitzungsberichte der Wiener Academie. 77. 1878) is gebleken. Men kan ook direct uit (57) afleiden, dat de bedoelde kracht bij v. Helmholtz niet loodrecht op het element staat. Wanneer v. Helmholtz zegt (Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I. pag. 764): „Vorausgesetzt, dass wir es nur mit geschlossenen Strömen zu thun haben, ergeben beide, Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz, genau dieselben Werthe der resultirenden Kräfte, welche jeden einzelnen Punkt des bewegten Leiters angreifen", zoo is deze conclusie, waarbij een gekunstelde redeneering over „stroomeinden" te pas komt, volgens het bovenstaande onjuist [1]).

Wat nu de electromagnetische draaiingen betreft, men beschouwe een toestel met glijdende contacten, b.v. den toestel van Plücker (fig. 5). Hierbij verandert gedurende de draaiing om redenen van symmetrie de electrodynamische potentiaal alleen door de verbuiging en uitrekking der stroomdraden, welke in de glijdende contacten plaats heeft. De op de stroombaan BA bij eene kleine draaiing verrichte arbeid is nul, daar het aantal der daarvan uitgaande

[1]) Korteweg bewijst, dat bij zijne formule geen potentiaal behoort. In de formule van Korteweg is die van Grassmann begrepen. Geheel verkeerd is dan ook wat G. Wiedemann („Die Lehre von der Elektrizität" IV § 1048) zegt, als zou voor $k = -1$ de potentiaal van v. Helmholtz overgaan in „den der Grassmann'schen Formel entsprechenden Potentialwerth".

krachtlijnen, welke door elken in den magneet aanwezigen kringstroom omvat worden, om redenen van symmetrie door geene draaiing van BA kan veranderen. Slechts op de in de glijdende contacten aanwezige stroomelementen wordt een moment om de draaiingsas uitgeoefend. Zooals v. Helmholtz zegt, moeten dus in zoodanige gevallen de geleiders worden meegesleept door „adhärirende Theile dieser Flüssigkeitsfäden". Dat zulk eene meesleeping niet plaats heeft, blijkt uit de proeven van Zöllner (zie Inleiding). Zöllners critiek van v. Helmholtz' potentiaalwet wordt door het antwoord van laatstgenoemde (Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I. pag 763 en volgende) niet ontzenuwd.

§ 19. Resumeerende:

*a*). De formules van Ampère en Grassmann leveren bij de proeven over electromagnetische draaiing dezelfde uitkomst op (§ 5); de algemeene formule van Korteweg evenzoo (§ 17);

*b*). De formules van Ampère en Grassmann (en Korteweg) zijn in overeenstemming met de voor den ponderomotorischen arbeid, door gesloten stroomen op elkander verricht, geldende potentiaalwet van Neumann (§ 9, § 10), ook als de stroomdraden van lengte veranderen, of als nieuwe elementen intreden (§ 16). — Deze wet toont dat bij een toestel als van Lecher (fig. 7) geene draaiing plaatsheeft (§ 11);

*c*). De voorstelling der krachtlijnen kan bij de formules van Ampère (§ 12) en Grassmann (§ 14) worden gebezigd; zij maakt de toepassing op vele toestellen gemakkelijk (§ 15 toestel van König) (§ 15 vorm van den sluitdraad veelal onverschillig);

*d*). De uitdrukking voor den arbeid door een stroom en een magneetpool op elkander verricht (§ 13) leert bij vele toestellen het bij eene wenteling gemiddeld op de polen werkend moment kennen (§ 15 toestel fig. 1);

*e*). De formule van Biot en Savart levert ook (voor een deel) dezelfde uitkomsten op (§ 4, § 5);

*f*). Bij de formule van Grassmann kan van de werking van een ongesloten stroom op een magneetpool niet gesproken worden (§ 8);

*g*). De formule van v. Helmholtz geeft de verschijnselen niet juist weer (§ 18). — Deze formule, die tevens betrekking heeft op inductieverschijnselen, behoeft derhalve in het volgend Hoofdstuk niet te worden beschouwd.

---

## HOOFDSTUK II.

### De unipolaire inductie volgens de formule van F. E. Neumann en volgens de krachtlijnen-theorie van Faraday.

§ 1. Evenals in Hoofdstuk I is het gewenscht de te bespreken formules in de eerste plaats algemeen te behandelen, en ze eerst daarna toe te passen op de toestellen, waarbij electromagnetische draaiing of unipolaire inductie is waar te nemen. Deze behandeling kan na de opstelling der uitdrukkingen voor den elementairen ponderomotorischen arbeid in Hoofdstuk I kort zijn [1]).

F. E. Neumann („Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme" 1845) beschouwt vooreerst de inductie door beweging van constante stroomen. Zich aansluitende bij beschouwingen van Lenz schrijft hij voor de door het element $d\lambda_1$ in $d\lambda_2$ geinduceerde electromotorische kracht

$$(1) \ldots . \frac{\partial^2 E_{\lambda_2}}{\partial\lambda_1 \, \partial\lambda_2} d\lambda_1 \, d\lambda_2 = -\varepsilon v_2 \, i_1 \, d^2 P_{12v_2} d\lambda_1 \, d\lambda_2 \,,$$

waarin $v_2$ de snelheid is, waarmede $d\lambda_2$ zich verschuift, terwijl $d^2P_{12v_2} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2$ de component in de richting $v_2$ voorstelt van $d^2P_{12} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2$, d. w. z. van de ponderomotorische kracht, die de eenheid van stroom in $d\lambda_1$ uitoefent

---

[1]) Over zelfinductie worde hier evenmin gesproken als in Hoofdstuk I over den ponderomotorischen arbeid werd gesproken, dien een stroom bij deformatie op zich zelven verricht.

op $d\lambda_2$, wanneer ook daarin de eenheid van stroom loopt. De richting der beide genoemde stroomen valt met die van $i_1$ en $i_2$ resp. samen. $\varepsilon$ is eene positieve constante, welke verder $= 1$ is gesteld, zooals zij voor electromagnetische maat blijkt te zijn.

Onder „snelheid" is hier natuurlijk niet de snelheid ten opzichte van het omringend medium te verstaan; dan toch zou in een stroomelement door de beweging van een anderen stroom geen inductiewerking kunnen plaats hebben, wat met de ervaring strijdt. Veeleer is onder $v_2$ de snelheid te verstaan, waarmede $d\lambda_2$ zich ten opzichte van het magnetisch veld van $d\lambda_1$ verschuift.

De arbeid door $\dfrac{\partial^2 E_{\lambda_2}}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} d\lambda_1\, d\lambda_2$ in $dt$ verricht is

$$\frac{\partial^2 E_{\lambda_2}}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} d\lambda_1\, d\lambda_2\, i_2\, dt$$

of

$$-v_2\, i_1\, i_2\, d^2 P_{12_{v_2}}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, dt.$$

Dit is het product van $-1$ met den ponderomotorischen arbeid die in $dt$ op $d\lambda_2$ door $d\lambda_1$ verricht zou worden, indien de snelheid $v_2$ eene absolute snelheid ware.

§ 2. Door Neumann wordt de ponderomotorische kracht genomen als bij Ampère. Volgens dezen is de op het einde van § 1 genoemde arbeid gegeven door (30) Hoofdstuk I. Zijne waarde verandert niet, indien men aanneemt, dat dezelfde standverandering plaatsgrijpt doordat alleen $d\lambda_2$ zich beweegt. Men vindt dus

$$(2) \ldots\ldots \frac{\partial^2 E_{\lambda_2}}{\partial\lambda_1\, \partial\lambda_1} d\lambda_1\, d\lambda_2 = -i_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} d\lambda_1\, d\lambda_2\right) + \right.$$

$$\left. + d\lambda_1\, d\lambda_2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\lambda_1} \frac{\partial r}{\partial t}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\, \partial\lambda_2}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right] \right\} \right].$$

Is $\lambda_1$ gesloten, zoo is de in $d\lambda_2$ opgewekte electromotorische kracht

$$(3) \ldots. \frac{\partial E_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 = i_1 \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ d\lambda_2 \int \frac{\cos \varepsilon}{r} d\lambda_1 \right\} + \right.$$

$$\left. + d\lambda_2 \int d\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial t} \right] \right].$$

Voor de in den gesloten kring $\lambda_2$ door $d\lambda_1$ opgewekte electromotorische kracht volgt uit (2)

$$(4) \ldots. \frac{\partial E_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = i_1 \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ d\lambda_1 \int \frac{\cos \varepsilon}{r} d\lambda_2 \right\} + \right.$$

$$\left. + d\lambda_1 \int d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t} \right] \right].$$

Door verwisseling der indices 1 en 2 vindt men uit (3) en (4) de door $\lambda_2$ (gesloten) in $d\lambda_1$ en de door $d\lambda_2$ in $\lambda_1$ (gesloten) opgewekte electromotorische kracht.

Twee gesloten stroomen, nog steeds constant ondersteld, blijken in elkanders banen electromotorische krachten te induceeren, die bepaald worden door

$$(5) \ldots. i_1 E_{\lambda_1} = i_2 E_{\lambda_2} = - i_1 i_2 \frac{d}{dt} \int \int d\lambda_1 d\lambda_2 \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Daar eene verandering der stroomsterkte blijkt inducеerend te werken, kan men deze formule bij onderstelling uitbreiden tot

$$(6) \ldots. E_{\lambda_1} = - \frac{d}{dt} \left\{ i_2 \int \int d\lambda_1 d\lambda_2 \frac{\cos \varepsilon}{r} \right\}.$$

Deze vergelijking drukt volgens Hoofdstuk I § 12 uit, dat $E_{\lambda_1}$ gelijk is aan de afname per tijdseenheid van het aantal door $\lambda_1$ omvatte van $\lambda_2$ afkomstige krachtlijnen [1]).

De vergelijking (3) drukt volgens diezelfde § uit, dat voor $i_1$ constant de door den gesloten stroom $\lambda_1$ in $d\lambda_2$ opgewekte electromotorische kracht gelijk is aan het (negatief genomen) aantal krachtlijnen, dat door $d\lambda_2$ per tijdseenheid wordt gesneden. — Positief werd de snijding genoemd, wanneer b.v. $d\lambda_2$ de richting der $+X$-as (fig. 11) heeft, en zich beweegt langs de $+Y$-as, terwijl de krachtlijnen evenwijdig zijn met de $+Z$-as.

Beschouwt men b.v. den toestel van Plücker (fig. 5) en laat den cylinder in den aldaar aangegeven zin draaien met hoeksnelheid $\omega$, waarbij het in den cylinder liggende deel AB van de stroombaan meedraait, zoo kan men òf (3) bezigen, òf (6) wanneer men onder $\lambda_2$ de stroomen in den magneet en onder de stroombaan $\lambda_1$ de geteekende baan ACBA verstaat, welke ondersteld wordt zich bij A en B door de draaiing uit te rekken. Op beide wijzen blijkt in de richting ABCA eene electromotorische kracht te worden opgewekt ten bedrage van het aantal krachtlijnen, dat door den magneet (van binnen naar buiten) wordt gezonden door het per tijdseenheid door AB beschreven vlak; of zoo men wil ten bedrage van $\frac{\omega}{2\pi}$ maal het aantal krachtlijnen, dat de magneet zendt door den cylindermantel, welks beschrijvende lijn AB is.

Even groot is de ponderomotorische arbeid, die door een stroom met sterkte 1 en richting ACBA per tijdseenheid op den wentelenden cylinder wordt verricht. Immers blijkens (32) Hoofdstuk I is deze arbeid $i_2 \frac{d}{dt} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} d\lambda_1 \, d\lambda_2$, en dit is op het teeken na aan $E_{\lambda_1}$ gelijk, wanneer in (6)

[1]) Men kan hierbij aannemen, dat (6) ook nog geldig blijft, wanneer nieuwe elementen in de stroombanen intreden.

$i_2$ constant wordt gesteld, zooals bij den beschouwden toestel moet worden gedaan. — Uit $E_{\lambda_1}$ verkrijgt men de bij eenheid van hoeksnelheid opgewekte electromotorische kracht door te deelen door $\omega$; evenzoo verkrijgt men door deeling door $\omega$ uit den genoemden ponderomotorischen arbeid het door den stroom 1 uitgeoefend moment. Deze electromotorische kracht en dit moment blijken dus van gelijke grootte te zijn in overeenstemming met de wet van het behoud van arbeidsvermogen (zie Inleiding).

§ 3. Beweegt een permanente magneet zich ten opzichte van een stroomelement $d\lambda_1$, zoo wordt aangenomen, dat de in $d\lambda_1$ hierdoor geïnduceerde electromotorische kracht even groot is als zij zou zijn indien in plaats van den magneet het stelsel kringstroomen (zie Hoofdstuk I § 4) aanwezig was, dat hem wat de ponderomotorische werkingen betreft kan vervangen.

Volgens Hoofdstuk I (41) is de ponderomotorische arbeid in $dt$ bij onderlinge beweging van een magneet en een element door hen op elkander verricht, als de magneet een positieve pool heeft, die zich in $(x_2\, y_2\, z_2)$ en een negatieve pool die zich in $(x'_2\, y'_2\, z'_2)$ bevindt, en als deze zich verschuiven en tevens om assen, die erdoor gaan resp. over de hoeken $(d\alpha\, d\beta\, d\gamma)$ en $(d\alpha_1\, d\beta_1\, d\gamma_1)$ draaien,

$$(7) \ldots . d^2 A = i_1\, M d\lambda_1\, dt \left[ -\frac{\partial\alpha}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \left( \frac{x_1 - x_2}{r} \right) \ldots . + \right.$$

$$+ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} \left\{ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial t} \right\} \left. \ldots . \right] -$$

$$- i_1\, M d\lambda_1\, dt \left[ -\frac{\partial\alpha'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \left( \frac{x_1 - x'_2}{r} \right) \ldots . + \right.$$

$$+ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} \left\{ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial(y_1 - y'_2)}{\partial t} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial(z_1 - z'_2)}{\partial t} \right\} \left. \ldots . \right].$$

Daar het bij Ampère slechts op de relatieve standverandering aankomt, blijft deze arbeid dezelfde als men onderstelt dat de magneet rust en de veranderde stand alleen door eene beweging van $d\lambda_1$ ontstaat. De bij de beweging van magneet en element op $d\lambda_1$ verrichte electromotorische arbeid is dus $-d^2 A$. Daar $d^2 A$ uit twee deelen bestaat, waarvan er bij elke pool één behoort, is hetzelfde met den electromotorischen arbeid het geval. Men kan dus zeggen, dat de electromotorische kracht door de pool $M$ in $d\lambda_1$ opgewekt bedraagt

$$(8)\ldots\frac{\partial E_{M\lambda_1}}{\partial\lambda_1}d\lambda_1=-M\,d\lambda_1\left[-\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{x_1-x_2}{r}\right)\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial(y_1-y_2)}{\partial t}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}\right\}\ldots\right].$$

Hieruit blijkt, dat de door een magneetpool in een ongesloten (of gesloten) geleider geïnduceerde electromotorische kracht gelijk is aan het product van $-1$ met het aantal door den stroomgeleider per tijdseenheid gesneden van de pool afkomstige krachtlijnen. Het draaien van de pool om eene erdoor gaande as werkt alleen induceerend wanneer de geleider ongesloten is.

Als in Hoofdstuk I § 13 blijkt, dat de door een pool $M$ in een gesloten baan $\lambda_1$ opgewekte electromotorische kracht bedraagt

$$(9)\ldots E_{M\lambda_1}=M\frac{d\Omega}{dt}.$$

Gaat de pool $N$ maal in positieve, $N'$ maal in negatieve richting door het vlak, dat de stroomlijn tot rand heeft, en keeren pool en stroombaan ten slotte in hun oorspronkelijken relatieven stand terug, zoo is als $i_1$ constant blijft de hierbij verrichte electromotorische arbeid $-4\pi(N-N')\,i_1\,M$.

Bij toepassing op den toestel van fig. 1 kan men niet uit deze laatste formule besluiten, dat bij draaiing van den magneet in den zin dien de fig. aangeeft, daar al het Noordmagnetisme bij een volle wenteling éénmaal gaat door het vlak dat de stroombaan tot rand heeft, een electromotorische kracht $2 \omega M$ in de richting C B A C zou worden opgewekt. Immers het deel der stroombaan, dat binnen den magneet ligt, beweegt zich voortdurend in denzelfden zin, zoodat in de stroombaan bij elke kleine draaiing een boogje van den bij C behoorenden cirkelomtrek moet geacht worden zich in te voegen. Niet alle van het magnetisme uitgaande krachtlijnen worden hier gesneden, zooals de formule $-4\pi (N-N') i_1 M$ onderstelt; de electromotorische kracht is gelijk aan het aantal der door A B C gesneden krachtlijnen. Nadert C tot de as (tusschen A en C′) [1]), zoo nadert de electromotorische kracht tot $2\omega$ M.

§ 4. In de formule van Neumann kan men ook de door Grassmann aangenomen waarde der ponderomotorische kracht substitueeren. Ook dan is als in § 1 de electromotorische arbeid in $dt$ op $d\lambda_2$ door $d\lambda_1$ verricht gelijk aan het product van — 1 met den ponderomotorischen arbeid, die in $dt$ op $d\lambda_2$ door $d\lambda_1$ verricht zou worden, indien de snelheid $v_2$ waarmede $d\lambda_2$ zich ten opzichte van het magnetische veld van $d\lambda_1$ verschuift, eene absolute snelheid ware. Hieruit volgt in verband met het Hoofdstuk I § 14 over het snijden van krachtlijnen gezegde, dat dan de in $d\lambda_2$ geïnduceerde electromotorische kracht gelijk is aan het product van — 1 met het aantal van $d\lambda_1$ afkomstige krachtlijnen door $d\lambda_2$ per tijdseenheid gesneden [2]). En hieruit, in verband met het in § 2 gevondene, valt te besluiten,

[1]) Hetgeen mogelijk is als de cylinder M op de plaats waar C er tegen sleept, ingesnoerd wordt.

[2]) Onder magnetische kracht is steeds verstaan de vector, die door (3) pag. 17 en het onmiddellijk na (3) vastgestelde is bepaald.

dat de door een gesloten stroom $\lambda_1$ in $d\lambda_2$ opgewekte electromotorische kracht dezelfde is, om het even of men de formule van Neumann door die van Ampère of door die van Grassmann aanvult. — Bij alle beschouwde toestellen wordt in beide gevallen de in elk element opgewekte electromotorische kracht dezelfde.

§ 5. E. Hagenbach (zie Hoofdstuk I § 1) komt omtrent de beweging der krachtlijnen en het verband, dat tusschen de behandelde formules bestaat, gedeeltelijk tot andere uitkomsten. — Hij stelt (t. a. p. pag. 236) eene formule op, welke uitdrukt, dat de geïnduceerde electromotorische kracht wordt gevonden door in de formule van Neumann de waarde der ponderomotorische kracht volgens Grassmann te substitueeren. Het blijkt als in § 1 (gelijk ook Hoppe, Ann. der Phys. 8, 1902, in den aanvang van zijn artikel over unipolaire inductie opmerkt), dat Hagenbach in deze formule eene relatieve snelheid moet bedoeld hebben, n. l. de snelheid ten opzichte van het magnetisch veld. Hij redeneert aldus: „Wenn der Leiter *ds* durch das magnetische Feld bewegt wird, so entsteht in demselben eine elektromotorische Kraft, und das Stromelement kann nur durch das magnetische Feld bewegt werden, wenn ihm fortwährend die zur Ueberwindung der inducirten electromotorischen Gegenkraft nötige Energie zugeführt wird. Der Satz der Erhaltung der Energie stellt somit die Forderung, dass die überwundene elektromotorische Energie und die dafür aufgewandte mechanische Energie einander gleich seien." Volgens § 2 is de in *elk* der beide elementen verrichte electromotorische arbeid aan den ponderomotorischen arbeid op het teeken na gelijk, en volgens § 4 geldt dit althans voor een der elementen wanneer het andere element rust. Aan de wet van het behoud van arbeidsvermogen kan dus niet worden voldaan zonder het bestaan eener elektromagnetische energie aan te nemen, welke door de relatieve beweging der elementen toe- of afneemt. Impliciet ontkent Hagenbach het bestaan dezer energie. Hij schijnt niet te bemerken, dat hij hier in tegenspraak komt met het algemeen aangenomene. Immers, na aangetoond te hebben dat naar hij meent uit het geciteerde de bedoelde formule volgt, zegt hij: „Das bekannte Lenz'sche Induktionsgesetz folgt also naturnotwendig [1]) aus dem Biot-Savart-schen Gesetze, wenn man den Satz der Erhaltung der Energie damit verbindet und annimmt, dass die Energie zur Leistung der mechanischen Arbeit vom Strome geliefert werden muss." Dat hij, uitgaande van eene onjuiste onderstelling, toch tot de juiste formule komt, hangt hiermede samen dat hij den arbeid, dien de ponderomotorische kracht zou verrichten indien de relatieve snelheid eene absolute ware, als den werkelijk verrichten ponderomotorischen arbeid in rekening brengt.

Het past in de theorie van Neumann, aan te nemen dat een draaiende magneet op zich zelven geene inducee-rende werking uitoefent. Volgens de proeven van Hagenbach e. a. is dan ook bij een magneet die om zijn as draait en welks uiteinde met een punt van zijn oppervlak door een rustenden draad is verbonden, de in magneet en sluitdraad opgewekte electromotorische kracht gelijk aan het (negatief genomen) aantal door den sluitdraad per tijds-

---

[1]) Uitdrukkingen als „stellig", „ongetwijfeld", „naturnotwendig" worden veelal gebezigd bij beweringen, die (gewoonlijk naar het oordeel van den spreker of schrijver zelven) aan twijfel onderhevig zijn. Analoog hiermede is het verschijnsel, dat velen schrijven: „Hieruit volgt gemakkelijk....." „Men ziet gemakkelijk in....", wanneer een deel der redeneering wordt overgeslagen, waardoor het begrijpen juist bemoeilijkt wordt. Instinctmatig schijnen wij hierbij de moeilijkheid of twijfelachtigheid van het geval door eene krachtige uitdrukking te willen compenseeren.

Ampère noemt de krachten tusschen stroomelementen werkend „forces élémentaires, dont la direction est *nécessairement* celle de la droite menée par les points matériels entre lesquels elles s'exercent."

eenheid gesneden krachtlijnen als men zich voorstelt dat deze met den magneet mededraaien. Althans deze gelijkheid bestaat nagenoeg; het worde slechts terloops vermeld, dat Grotrian (Ann. d. Phys. 6, 1901) eene 14 % grooter waarde vindt [zie Naschrift]. — Staat de magneet stil en draait de sluitdraad, zoo wordt eveneens volgens Neumann alleen in den sluitdraad een electromotorische kracht opgewekt. — Draaien magneet en sluitdraad gezamenlijk, zoo is er volgens hem geen inductie.

Hagenbach bezigt ook de voorstelling der krachtlijnen, maar op andere wijze. Hij neemt aan, dat de krachtlijnen van den magneet aan zijne draaiing niet deelnemen en dat ook binnen den magneet de geïnduceerde electromotorische kracht in elke stroombaan numeriek aan het aantal gesneden krachtlijnen gelijk is. Draait alleen de magneet, zoo wordt dus in hem eene electromotorische kracht opgewekt, niet in den sluitdraad; draait alleen de sluitdraad, zoo wordt de electromotorische kracht in den sluitdraad opgewekt, niet in den magneet; draaien beide gezamenlijk, zoo worden in sluitdraad en magneet tegengesteld gelijke krachten geïnduceerd, zoodat geen stroom ontstaat [1]). — Deze voorstelling is gekunsteld, daar stilstaande krachtlijnen slechts in geval de magneet een omwentelingslichaam is kunnen worden beschouwd. Wil

---

[1]) Dat zoowel volgens de theorie der rustende als volgens die der bewegende krachtlijnen geen stroom ontstaat, wanneer magneet en sluitdraad gezamenlijk draaien, heeft Hoppe (t. a. p. pag 664) over het hoofd gezien. Hij meent „die Frage ob ein rotirender Magnet auf seiner Oberfläche Elektrizitätsladung erzeuge" hierdoor te kunnen oplossen „dass man versucht einmal einen Strom in einer festen Leitung zu erzeugen, und dann untersucht, ob derselbe Strom entsteht, wenn diese Leitung mit dem rotirenden Magneten rotirt". Het gelukt hem experimenteel aan te toonen, dat de stroom in dit laatste geval nul is; dit was echter, gelijk Lecher (Ann. d. Phys. 9. 1902) opmerkt, volgens elke theorie te verwachten.

men den zetel der geïnduceerde electromotorische kracht in den draaienden magneet zelven zoeken, zoo ware het wellicht beter in het geheel niet van krachtlijnen te spreken.

Hagenbach komt o. a. tot de volgende conclusie:

„Bei Annahme der Grassmann'schen Formel gestaltet sich alles bei der Erklärung der Rotation und der Induction viel einfacher und übersichtlicher, weil die gleiche Auffassung für die Ableitung der Erscheinung aus der elektromagnetischen und aus der elektrodynamischen Kraft gilt, und weil auch die Vorstellung der magnetischen Kraftlinien bei der Erklärung verwendbar ist, indem das gleiche magnetische Kraftfeld aus dem Biot-Savart'schen Gesetze und aus der Grassmann'schen Formel sich ableiten lässt. — Bei Anwendung der Ampère'schen Formel gelangt man zwar auch zum richtigen durch die Erfahrung bestätigten Resultat; aber es bleibt der Widerspruch, dass der gleiche Wert des Drehungsmomentes, welcher electromagnetisch aus der Wirkung der inneren Kräfte sich ergiebt, electrodynamisch der Wirkung der äusseren Kräfte zugeschrieben werden muss."

Deze conclusie is geheel onjuist. — Hoofdstuk I § 8 bleek, dat de overeenstemming tusschen de formules van Grassmann en Biot en Savart geenszins zoo volkomen is als Hagenbach meent. — Het is verder onwaar, dat de meening van Hagenbach over den zetel der geïnduceerde electromotorische kracht in eenig verband zou staan met de formule van Grassmann (§ 4). — Het is evenmin waar, dat het een voordeel van Hagenbach's opvatting zou zijn, dat de voorstelling der krachtlijnen toepasbaar is. Integendeel is die voorstelling bij hem gekunsteld, volgens de formule van Neumann natuurlijk. — Het heeft in het geheel geen zin te zeggen, dat volgens de formule van Grassmann dezelfde opvatting geldt voor de afleiding der verschijnselen uit de electromagnetische en uit de electrodynamische kracht; daarentegen is de tegenspraak die Hagenbach in de toepassing der formule van Ampère meent te ontdekken niet aanwezig: de draaiende werking wordt bij Ampère op den magneet uitgeoefend door den sluitdraad, om het even of men den magneet als een lichaam met magneetpolen of als een lichaam met een stelsel kringstroomen gelieft te beschouwen.

Wat de meening van Hagenbach omtrent den zetel der inductie betreft, deze is geenszins ongerijmd; doch de argumenten, die hij hiervoor aanvoert, houden geen steek.

Terloops zij opgemerkt, dat de hier bedoelde krachtlijnen binnen den magneet door Maxwell lijnen van magnetische inductie worden genoemd (zie Hoofdstuk III). — Deze opmerking geldt ook voor de navolgende citaten uit Faraday.

§ 6. Faraday, de ontdekker der inductiestroomen, leidt („Experimental Researches in Electricity") het verband af, dat moet worden aangenomen tusschen de in een lineairen conductor opgewekte electromotorische kracht en het aantal door hem gesneden krachtlijnen. Hij zegt b.v. omtrent deze door hem het eerst ingevoerde lijnen:

(III. pag. 406) „The general conclusions are . . . that the lines of force well represent the nature, condition, direction, and amount of the magnetic forces: — that the effect is directly as the number of lines of force intersected, whether the intersection be direct or oblique: — that in a field of equal force, it is directly as the velocity," etc.

Dit, en ook het volgende, strookt met de theorie van Neumann, met uitzondering van wat Faraday zegt over het gedrag der krachtlijnen in draaiende magneten, waaromtrent hij de reeds besproken (thans door Hagenbach voorgestane) meening is toegedaan.

§ 3090 „When lines of force are spoken of as crossing a conducting circuit, it must be considered as affected by the *translation* of a magnet. No mere rotation of a bar magnet on its axis produces any induction effect on circuits exterior to it... The system of power about the magnet must not be considered as necessarily revolving with the magnet... The magnet may even in certain cases be considered as revolving amongst its own forces and producing a full electric effect, sensible at the galvanometer" § 220 „Thus a singular independence of the magnetism and the bar in which it resides is rendered evident"

Welke restrictie in de woorden „not necessarily" en „may in certain cases" is gelegen, is niet recht duidelijk. Op andere plaatsen spreekt Faraday, als ware het niet mededraaien der krachtlijnen, welker snijding de electromotorische kracht doet ontstaan, de eenig mogelijke interpretatie zijner proeven. Zoo b v. § 3098. .... „the small wire.. being.. the only part in which this current *could be* generated by the motion." Sterker nog spreekt deze overtuiging hieruit, dat hij voortdurend spreekt over de bekende eigenschappen der krachtlijnen binnen den magneet; de hier bedoelde kennis toch komt uitsluitend voort uit zijne proeven over unipolaire inductie. Zoo § 3116 „This method of investigation gives much insight into the internal condition of the magnet", en § 3332 „The currents which are evolved by the rotation of the magnet or of discs of metal combined with it, show that the direction of the force, which is its polarity... is the same within the magnet as in the prolongation of direction through and beyond the pole".

Dat de grootte der geïnduceerde electromotorische kracht bij Faraday in elk element evenredig is met het aantal krachtlijnen die aldaar gesneden worden, schijnt te volgen uit § 181 „It would seem, that if a bar of metal be laid in these latitudes on the surface of the earth parallel to the magnetic meridian, a current of electricity tends to pass through it from south to north, in consequence of the travelling of the bar from west to east, by the rotation of the earth."

Hoe is volgens Faraday de beweging der krachtlijnen van een magneet, die draait om een as, welke geen symmetrie-as van den magneet is? Dit blijkt niet Het gaat ook niet aan te zeggen, dat in zulk een geval van krachtlijnen in het geheel niet gesproken kan worden; immers uit het Hoofdstuk „On the Physical Character of the Lines of Magnetic Force" (§ 3243 en volgende) blijkt, dat Faraday meent in alle gevallen van zulke lijnen te mogen spreken.

Evenmin blijkt, hoe het naar de meening van Faraday is gesteld met de beweging der krachtlijnen van een om zijn as draaiende solenoide, zooals b. v. in den toestel van Grotrian (fig. 9) voorkomt. Wel zegt hij § 3120 „In this striking disposition of the forces of a magnet, as exhibited by the moving wire it exactly resembles an electro-magnetic helix, both as to the direction of the lines of force in closed circuits, and in their equal sum within and without." Hieruit is niet te zien, of de krachtlijnen der solenoide zich nu ook op dezelfde wijze bewegen als die van den overeenkomstigen magneet.

§ 7. Denkt men zich een magneet opgebouwd uit elementaire magneten, zoo is het duidelijk, dat bij draaiing van den geheelen magneet elk der elementaire magneten niet slechts een draaiing uitvoert, maar tevens eene translatiesnelheid heeft. De meening van Faraday kan dus, althans wat de krachtlijnen buiten den magneet betreft, nader gepraeciseerd worden door te onderstellen, dat elke elementaire magneetpool wel door zijne translatie, maar niet door zijne draaiing induceerend werkt. De vraag kan verder gesteld worden of deze meening overeen is te brengen met de formule van Neumann en met de voorstelling, dat een magneet een lichaam is, waarin zich elementaire kringstroomen bevinden.

Formule (8) zou volgens deze opvatting moeten veranderen in

$$(10)\ldots\frac{\partial E_{M\lambda_1}}{\partial\lambda_1}d\lambda_1 = -M\,d\lambda_1\left[\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial(y_1-y_2)}{\partial t} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}\right\}+\ldots\right].$$

Men ziet dadelijk, dat de door een magneetpool in een gesloten kring opgewekte electromotorische kracht hierdoor niet verandert.

Kan nu een tusschen twee stroomelementen werkende ponderomotorische kracht worden gevonden, waaruit, zooals (10) vereischt, voor den elementairen ponderomotorischen arbeid door een stroomelement en een pool op elkander verricht, volgt

$$(11)\ldots d^2A = i_1\,M\,d\lambda_1\,dt\left[\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial(y_1-y_2)}{\partial t} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}\right\}+\ldots\right]?$$

Uit het Hoofdstuk I § 17 over de formule van Korteweg gezegde kan op de wijze van Hoofdstuk I § 8 worden afgeleid, althans wanneer men de grootheden $B \ldots H$ zooals daar gezegd werd zoo kiest, dat alle termen van elke der vergelijkingen (52) afzonderlijk dezelfde macht van $r$ bevatten, dat van een werking van een stroomelement op magnetisme slechts gesproken kan worden, wanneer de formule van Korteweg overgaat in die van Ampère.

Bij gevolg kan slechts *die* uitdrukking voor den elementairen ponderomotorischen arbeid door een stroomelement en een pool op elkander verricht (wanneer men uit wil gaan van eene door stroomelementen op elkander uitgeoefende ponderomotorische kracht en hieruit al het overige afleiden) eene beteekenis hebben, welke met de formule van Ampère strookt. Dit is met (11) niet het geval. De gestelde vraag moet daarom ontkennend worden beantwoord.

Tot deze conclusie kan men ook op meer directen weg geraken en zonder gebruik te maken van het feit, dat in de formule van Korteweg alle formules voor de elementaire werking tusschen twee stroomelementen welke met de waarneming strookende uitkomsten opleveren, zijn begrepen.

Hiertoe is het wenschelijk eene berekening te doen voorafgaan, welke als eene proef op eenige formules van Hoofdstuk I kan worden beschouwd, en tevens dient tot bevestiging van eene bewering in Hoofdstuk III § 1.

§ 8. Volgens de bij de formule van Neumann behoorende voorstelling maken de krachtlijnen de totale beweging van het magnetisme mede. De door de zeer kleine hoeveelheid magnetisme $dm_2$ in $d\lambda_1$ geïnduceerde electromotorische kracht bedraagt volgens (8)

$$(12)\ldots\ \frac{\partial E_{dm_2\,\lambda_1}}{\partial\lambda_1}d\lambda_1 = -\,dm_2\,d\lambda_1\left[-\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{x_1-x_2}{r}\right)\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial(y_1-y_2)}{\partial t}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}\right\}\ldots\right].$$

Hieruit volgt voor de door een magnetische dubbellaag met $\lambda_2$ tot rand (waarvan $dm_2$ een der positieve elementen is) in $d\lambda_1$ opgewekte electromotorische kracht

$$(13)\ldots\ \frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}d\lambda_1 = \left(P\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}+Q\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1}+R\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right)d\lambda_1,$$

waarin

$$
(14)\ldots\left\{
\begin{aligned}
P = &-i_2\int d\sigma_2\,\frac{\partial}{\partial n_2}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\,\frac{\partial(y_1-y_2)}{\partial t}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\,\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}-\right.\\
&-\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\left[\frac{1}{r}+(x_1-x_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right]-\frac{\partial\beta_2}{dt}\left[(y_1-y_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right]-\\
&\left.-\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\left[(z_1-z_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right]\right\},\\
Q = &-i_2\int d\sigma_2\,\frac{\partial}{\partial n_2}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\,\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial t}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\,\frac{\partial(x_1-x_2)}{\partial t}-\right.\\
&-\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\left[(x_1-x_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right]-\frac{\partial\beta_2}{\partial t}\left[\frac{1}{r}+(y_1-y_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right]-\\
&\left.-\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\left[(z_1-z_2)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right]\right\},\\
R = &\ldots.
\end{aligned}\right.
$$

De magnetische dubbellaag kan (volgens Hoofdstuk I) worden vervangen door een stroom in $\lambda_2$, welke vervanging volgens § 1 van dit Hoofdstuk niet slechts bij de berekening van den ponderomotorischen arbeid, maar ook bij die van de electromotorische kracht is geoorloofd.

Een andere vorm voor de in (13) bedoelde $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}$ volgt derhalve uit (3), n.l.

$$
(15)\ldots\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}\,d\lambda_1 = -\,i_2\,d\lambda_1\int d\lambda_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left\{r\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_2}\,\frac{\partial r}{\partial t}\right\}\right].
$$

De lengte der stroomelementen is onveranderlijk ondersteld.

Op grond van de in het voorgaande medegedeelde beschouwingen is het aan geen twijfel onderhevig dat de beide vormen (13) en (15) identisch met elkander overeenstemmen en dat zelfs (gelijk uit de beschouwing der krachtlijnen blijkt) voor het geval dat $\lambda_2$ welke hier onuitrekbaar is, van vorm verandert, waarbij de magnetische dubbellaag kan gedacht worden zich mede zonder grootteverandering harer elementen te verbuigen.

Intusschen is het de moeite waard de gelijkheid van (13) en (15) door rechtstreeksche berekening te bevestigen. Ter vermijding van te groote wijdloopigheid bepalen wij ons daarbij tot het geval, dat $\lambda_2$ zich zonder vormverandering beweegt.

Voor de integraal, die in den laatsten vorm voorkomt, is te schrijven

$$(16)\ldots\int d\lambda_2\left[\left\{\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial t}\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial^2 x_2}{\partial\lambda_2\,\partial t}\right\}+\left\{\frac{\partial y_2}{\partial\lambda_2}\left[\ldots\right]\ldots\right\}+\left\{\frac{\partial z_2}{\partial\lambda_2}\left[\ldots\right]\ldots\right\}\right],$$

of wanneer de termen met $\frac{\partial^2 x_2}{\partial\lambda_2\,\partial t}$, enz. partieel geïntegreerd worden,

$$(17)\ldots\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}d\lambda_1=-\,i_2\,d\lambda_1\int\mathfrak{A}_{\lambda_2}\,d\lambda_2,$$

waarin

$$(18)\ldots\mathfrak{A}_x=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial t}\right)-$$

$$-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial y_2}{\partial t}+\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial z_2}{\partial t}\right);\text{ enz.}$$

Men kan volgens het theorema van Stokes (17) vervangen door

$$(19)\ldots\ldots \frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = -i_2\, d\lambda_1 \int \mathfrak{B}_{n_2}\, d\sigma_2,$$

waarin $\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z_2}$, enz. Eene zich bij de beweging van $\lambda_2$ aansluitende beweging van de omringende ruimte waarvan $(x_2\, y_2\, z_2)$ een punt is moet ondersteld worden, opdat de vector $\mathfrak{B}$ overal eene beteekenis hebbe. Voor deze beweging, die niet dan eene hulpvoorstelling is, is hier genomen die van een vast lichaam. — Zijn $\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$, enz. de draaiingssnelheden van $\lambda_2$ om de coördinaatassen, zoo is

$$(20)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial z_2}{\partial t}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial z_2}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial \beta_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Uit (18) volgt

$$(21)\ldots \mathfrak{B}_x = \left(\frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} -$$

$$- \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}\frac{r\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{\partial z_2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{\partial y_2}\right\} + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2}\frac{\partial\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)}{\partial z_2} - \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\frac{\partial\left(\frac{\partial z_2}{\partial t}\right)}{\partial y_2},$$

of

$$(22)\ldots\ldots \mathfrak{B}x = \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\left[- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial y_1} \frac{\partial (x_1 - x_2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1^2} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial z_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right] +$$

$$+ \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial z_1} \frac{\partial (x_1 - x_2)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1^2} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right] + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} +$$

$$+ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right] - \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right\} \frac{r \partial r}{\partial t}.$$

Hierin is

$$(23)\ldots\ldots \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right\} \frac{r \partial r}{\partial t} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} -$$

$$- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \lambda_1\, \partial t} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} - (y_1 - y_2) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1} - (z_1 - z_2) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1}\right] -$$

$$- \frac{\partial \beta_2}{\partial t}\left[\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} - (x_1 - x_2) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1}\right] - \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\left[\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} - (x_1 - x_2) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1}\right],$$

De vergelijking (22) gaat over in

$$(24) \ldots\ldots \mathfrak{B}_x = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} - (y_1 - y_2)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1} - \right.$$

$$\left. - (z_1 - z_2)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1}\right] + \frac{\partial \beta_2}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + (x_1 - x_2)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1}\right] +$$

$$+ \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\left[\frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + (x_1 - x_2)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1}\right] + \frac{\partial (x_1 - x_2)}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial z_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial y_1}\right] + \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1 \partial z_1} - \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1\, \partial \lambda_1}\right] + \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t}\left[\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial z_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial z_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1\, \partial \lambda_1}\right],$$

waarvoor ook blijkt te kunnen worden geschreven

$$(25) \ldots\ldots \mathfrak{B}_x = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{x_1 - x_2}{r}\right) \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t}\right\} \ldots\ldots\right].$$

Uit deze uitkomst volgt, dat de volgens de formules (12) of (13) en (19) voor $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ gevonden waarden met elkander overeenstemmen [1]).

---

[1]) Op dergelijke wijze kan men, aannemende dat de elementen $d\lambda_1$ zich niet uitrekken, zoodat ook de vlakte-elementen $d\sigma_1$ constant kunnen worden genomen, bewijzen wat Hoofdstuk I § 13 uit eene

§ 9. Keeren wij nu tot het § 7 gezegde terug. Zal (11) zich laten afleiden uit een geschikt gekozen ponderomotorische werking tusschen twee stroomelementen, zoo moet, evenals in § 8, de uit de waarde van $\frac{\partial E dm_2 \lambda_1}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ volgende waarde van $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ zich laten schrijven als een rand-integraal over $\lambda_2$.

Uit (10) of liever uit wat men verkrijgt door in (10) $M$ door $dm_2$ te vervangen, volgt (13), waarin

$$(26) \ldots . \quad P = -i_2 \int d\sigma_2 \frac{\partial}{\partial n_2} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} \right\}; \text{ enz.}$$

Schrijft men dit in den vorm (19) zoo heeft $\mathfrak{B}_x$ in plaats van de door (25) gegeven waarde, de waarde

$$(27) \ldots . \quad \mathfrak{B}_x = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} \right\} \ldots . \right].$$

Opdat nu $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ in den vorm (17) kunne worden

---

beschouwing der krachtlijnen werd afgeleid, n. l. dat voor den gesloten stroom $\lambda_1$ geldt

$$\int d\lambda_1 \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} \right\} \ldots . \right] =$$

$$= - \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} \right) . \ d\sigma_1 .$$

Men kan hierbij $\lambda_1$ als vervormbaar beschouwen en moet dan aan het medium, dat het door $\lambda_1$ begrensde vlak omgeeft, opdat de vector $\mathfrak{B}$ overal eene beteekenis hebbe, eene zich aan die van het vlak aansluitende beweging geven.

geschreven, moet gelijk uit het verband tusschen de vectoren $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ blijkt, Div. $\mathfrak{B} = 0$ (d. i. $\frac{\partial \mathfrak{B}x}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}y}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}z}{\partial z_2} = 0$),

dus, daar de richting van $d\lambda_1$ willekeurig kan worden gekozen, o. a. [1])

$$(28) \ldots . \Delta_2 \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial t} \right\} = 0.$$

Aan (28) is niet voldaan. — Er blijkt dus weder dat de in § 7 gestelde vraag ontkennend moet worden beantwoord.

Het heeft geen nut over deze „gepraeciseerde meening van Faraday" verder uit te weiden en te onderzoeken hoe hierbij de lijnen der magnetische inductie zich binnen den magneet zouden kunnen bewegen, vooral daar uit de woorden van Faraday schijnt te mogen worden opgemaakt, dat hij niet voor elken elementairen magneet, maar voor den geheelen magneet, het veld als niet aan de draaiing deelnemende wilde beschouwd hebben.

Het zij nog opgemerkt, dat (11) wat de werking van pool op stroomelement betreft met de formule van Ampère, wat die van stroomelement op pool betreft met de formule van Biot en Savart strookt. Volgens deze laatste formule ligt het aangrijpingspunt der op de pool werkende kracht in de pool, niet als bij Ampère in het stroomelement.

§ 10. Er moet ten slotte nog op gewezen worden, wat het eigenlijk beteekent, wanneer door draaiing van een

---

[1]) $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

magneet of ander bewegelijk deel in den unipolair-toestel een constante stroom wordt onderhouden, te spreken van eene bepaalde in elk element opgewekte electromotorische kracht. Wanneer men den in een element bestaanden stroom beschouwt als het gevolg eener in dat element werkende electromotorische kracht, waarmede de stroom evenredig is, dan is het duidelijk, dat de verdeeling der electromotorische kracht in een keten uitsluitend bepaald wordt door den weerstand der geleiders. Van dezen weerstand was tot nog toe geen sprake. Men moet echter in het oog houden dat de *totale* electromotorische kracht de som is der in dit Hoofdstuk beschouwde electromotorische kracht (el. kr. der inductie) en van een lijnintegraal der electrostatische kracht, die van de ladingen uitgaat. Er zijn n. l. volgens de voorstelling die bij Neumann's theorie behoort en algemeen bij elke theorie, die afstandswerkingen aanneemt, twee gesuperponeerde werkingen, waarvan de eene bij de stroomen en magneten behoort en van de beweging der geleiders afhankelijk is, terwijl de andere door de electrische ladingen in verband met den oogenblikkelijken stand der geleiders is bepaald. — Bij Faraday bestaan geen afstandswerkingen en is eene zoo scherpe afscheiding der twee werkingen niet mogelijk. Wel zou men, evenals § 7 werd gedaan, ook hier bij benadering kunnen gebruik maken van aan de theorie der afstandswerkingen ontleende voorstellingen. Daar echter bij Faraday voor de electromotorische kracht in engeren zin geene in elk element nauwkeurig bepaalde waarde wordt aangenomen, bestaat hiertoe geenerlei aanleiding.

Hoewel de electrostatische kracht bij Neumann onmisbaar is, is niet gezegd, dat uit de formules van § 1 en § 2 de bedoelde ladingsverdeeling kan worden berekend. Vooreerst is de fictie dat alle stroomen lineair zouden zijn hiertoe een beletsel. Ten andere zou bij eene algemeene beschouwing het feit dat eene verandering der stroomsterkte induceerend werkt niet slechts als in (6) bij gesloten stroombanen in rekening moeten worden gebracht. Men zou kunnen trachten als volgt te werk te gaan.

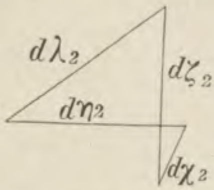

Fig. 14.

Het element $d\lambda_2$ hebbe tot componenten langs de coördinaat-assen $d\chi_2$ $d\eta_2$ $d\zeta_2$. Construeert men uit $d\lambda_2$ $d\zeta_2$ $d\chi_2$ $d\eta_2$ een gesloten lijn, zooals fig. 14 aangeeft, zoo bedraagt de in deze baan door den gesloten stroom $\lambda_1$ in de richting $d\lambda_2$ opgewekte electromotorische kracht

$$\left(\frac{\partial E_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2}\right) d\lambda_2 - \left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2}\right) d\chi_2 - \left(\frac{\partial E_{y_2}}{\partial y_2}\right) d\eta_2 - \left(\frac{\partial E_{z_2}}{\partial z_2}\right) d\zeta_2.$$

Volgens § 2 is deze electromotorische kracht ook gelijk aan de afname per tijdseenheid van het aantal van $\lambda_1$ afkomstige door de geteekende baan omvatte krachtlijnen, welke afname hier evenals dat aantal zelf van de orde $d\lambda_2^2$ is. Men mag dus schrijven

$$(29) \ldots . \left(\frac{\partial E_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2}\right) = \left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2}\right) \frac{d\chi_2}{d\lambda_2} + \ldots .$$

of

$$(30) \ldots . \left(\frac{\partial E_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2}\right) = \left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2}\right) \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} + \ldots .$$

Hieruit blijkt dat de electromotorische kracht per lengte-eenheid te vinden is uit den vector $\left[\left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2}\right), \left(\frac{\partial E_{y_2}}{\partial y_2}\right), \left(\frac{\partial E_{z_2}}{\partial z_2}\right)\right]$. Heete deze $A$. Deze vector bestaat volgens Neumann's theorie slechts in geleiders.

Neemt men nu aan, dat de electrostatische kracht een potentiaal $\phi$ heeft, waarbij de ruimtedichtheid $\rho$ en de vlaktedichtheid $\sigma_{12}$ aan grensvlakken van geleiders (als

$n_1$ en $n_2$ de van het vlak $\sigma_{12}$ naar beide zijden getrokken normalen zijn) voldoen aan

$$(31) \ldots \begin{cases} \Delta\phi = -4\pi\rho, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\phi}{\partial n_2} = 4\pi\sigma_{12}. \end{cases}$$

zoo is de totale electromotorische kracht per lengte-eenheid $(P\ Q\ R)$ bepaald door

$$(32) \ldots . P = A_x - \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \text{ enz.}$$

Laat men verder de fictie, dat alle stroomen lineair zijn, varen, en neemt aan dat de stroom per vlakte-eenheid in een bepaald punt gelijkgericht en evenredig is met $(P\ Q\ R)$, en dat b. v. de stroomen op het beschouwde oogenblik solenoïdaal verdeeld zijn, zoo zal, als nog de bedoelde evenredigheidscoëfficient onafhankelijk van de richting wordt ondersteld,

$$(33) \ldots . \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial Q}{\partial y_2} + \frac{\partial R}{\partial z_2} = 0.$$

In verband met (32) en (31) volgt hieruit

$$(34) \ldots . \rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_2} + \frac{\partial A_y}{\partial y_2} + \frac{\partial A_z}{\partial z_2}\right),$$

en

$$(35) \ldots . \sigma_{12} = \frac{1}{4\pi} A_{n_2}.$$

De vergelijking (35) drukt uit, dat de stroom aan het oppervlak der geleiders op het beschouwde oogenblik eene tangentieele richting heeft. $n_2$ is de ten opzichte van den geleider naar binnen getrokken normaal.

De waarde van $A_x$ volgt uit (3), wanneer men daarin de richting $\lambda_2$ vervangt door de richting $\chi_2$, welke bij den aanvang van het beschouwde tijdselement met de $X$-as samenvalt.

$$(36)\ldots.A_x = \left(\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_2}\right) = i_1 \left[-\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\cos\varepsilon_\chi}{r}d\lambda_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{d\chi_2}\frac{\partial d\chi_2}{\partial t}\int\frac{\cos\varepsilon_\chi}{r}d\lambda_1 + \int d\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{ r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1}\frac{\partial r}{\partial t}\right\}\right].$$

Hierin is

$$(37)\ldots.\cos\varepsilon_\chi = \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial\chi_2} + \frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial y_2}{\partial\chi_2} + \frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial z_2}{\partial\chi_2},$$

hetgeen in den tweeden term van het tweede lid van (36) niet van $\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}$ verschilt. In (36) zijn de werkende stroomen nog steeds gesloten lineair en constant ondersteld, hetgeen b.v. het geval is als de werking uitgaat van permanente magneten.

Uit (34) (35) en (36) blijkt, dat bij solenoïdale stroomverdeeling in het algemeen zoowel eene vlaktelading als ook een ruimtelading aanwezig is. De opgewekte stroomen kunnen dus niet van het oogenblik af waarop de toestel in beweging werd gezet solenoïdaal verdeeld zijn geweest.

Men verkrijgt door eene zoodanige uitbreiding der theorie van Neumann geen bevredigend geheel. De electrische ladingen zijn, zal de geheele theorie eene beteekenis hebben, onmisbaar, maar kunnen daaruit althans zonder een geheele omwerking der theorie niet worden berekend. — In allen gevalle blijkt uit (34) en (35), dat geene ladingen bestaan daar waar de stroomen solenoïdaal verdeeld zijn en geen electromotorische kracht der inductie werkt, b.v. niet in een magneet die zonder sluitdraad met constante snelheid om een symmetrie-as draait. $\Phi$ is in dit geval nul en uit (32) volgt dan dat ook $(P\,Q\,R)$ verdwijnt, zoodat er in zulk een magneet in het geheel geen stroomen worden opgewekt.

§ 11. Het in dit Hoofdstuk behandelde laat zich in het kort aldus resumeeren:

*a*). Het maakt geen verschil wat de waarde betreft der electromotorische kracht, die volgens de theorie van Neumann door een gesloten constanten stroom in een stroomelement wordt opgewekt, of men de formule van Ampère of die van Grassmann aanneemt (§ 4).

*b*). De volgens Neumann opgewekte electromotorische kracht laat zich uitdrukken door een aantal gesneden krachtlijnen (§ 2, § 3), hetgeen de toepassing op de beschouwde toestellen gemakkelijk maakt (§ 2 toestel van Plücker; § 3 toestel van Ampère (fig. 1)).

*c*). De meening van Faraday e. a. volgens wie een draaiende magneet in zich zelven eene electromotorische kracht opwekt strookt niet met de theorie van Neumann, ook niet als men deze meening tracht te praeciseeren (§ 7) en a-priori geheel onbepaald laat, welke de ponderomotorische kracht is door stroomelementen op elkander uitgeoefend (§ 9).

*d*). Bij de theorie van Neumann behoort de voorstelling, dat electrische ladingen in de bewegende geleiders worden opgewekt, doch deze laten zich, althans zonder eene geheele omwerking der theorie, niet bepalen (§ 10). — Een met constante snelheid om een symmetrie-as draaiende magneet is ongeladen en er worden geen stroomen in opgewekt.

# HOOFDSTUK III.

## Eenige algemeene beschouwingen. — Theorie van Maxwell.

§ 1. In het eerste Hoofdstuk werd bij de beschouwing der theorie van Ampère de grondformule eenvoudig aangenomen, zooals zij in de „Théorie des phénomènes électrodynamiques" is te vinden. Evenzoo werd de aequivalentie van een magneet met een lichaam waarin kringstroomen loopen zonder motiveering vooropgesteld. Als fundamenteele grootheden werden evenals bij Ampère gebezigd 1) plaatsbepalende grootheden (afstanden, hoeken), 2) elementaire draaddeeltjes en daaruit opgebouwde stroombanen en solenoïden, 3) stroomsterkten, 4) krachten tusschen de draaddeeltjes werkende. Als hulpgrootheid werd in plaats van de directrix, welke bij Ampère voorkomt, de magnetische kracht gebezigd, hetgeen geen noemenswaard verschil maakt. Verder werden eenige niet door hem gebezigde hulpgrootheden ingevoerd, n.l. de elementaire arbeid door twee stroomelementen op elkander verricht, en het aantal gesneden krachtlijnen, zijnde de integraal van de normale component der aan een stroomelement te danken magnetische kracht over het vlakje der relatieve beweging van een ander stroomelement ten opzichte van het eerstgenoemde.

Hierbij werd ook de tijd in de formules ingevoerd — De bedoelde elementaire bewegingen waren *virtueele* bewegingen, waarbij alle stroomsterkten constant bleven, en stroom en stroombaan zich gezamenlijk bewogen; de beschouwing van den daarbij verrichten arbeid had slechts ten doel het leeren kennen der bij een bepaalden stand der geleiders werkende krachten.

Het ware mogelijk geweest als fundamenteele grootheid in plaats van de electrodynamische kracht den elementairen electrodynamischen arbeid door twee stroomelementen op elkander verricht te kiezen. Dat hieruit de bij beweging van een stroomelement en een magneetpool door hen op elkander verrichte ponderomotorische arbeid onmiddellijk kan worden afgeleid is op te maken uit de berekening van Hoofdstuk II § 8. Als hulpgrootheden had men dan desverkiezende de krachten kunnen invoeren.

Daar de formule voor den elementairen electrodynamischen arbeid minder eenvoudig is dan die voor de electrodynamische kracht, ligt eene zoodanige verandering in de keus der fundamenteele grootheden niet voor de hand. Interessant is alleen het feit, dat men om eenzelfde groep van verschijnselen te beschrijven (ook al bepaalt men zich tot volkomen aequivalente beschrijvingen) niet noodzakelijk op één stel fundamenteele grootheden is aangewezen.

Evenzoo kan men, de theorie van Grassmann aannemende, de verschijnselen beschrijven door den elementairen electrodynamischen arbeid als fundamenteele grootheid voorop te stellen. Voert men hierbij de krachtlijnen als hulpgrootheden in, zoo heeft men het voordeel zich onmiddellijk eene aanschouwelijke voorstelling van de grootte van den bedoelden arbeid te kunnen vormen.

In het algemeen zullen echter verschillende stellen fundamenteele grootheden (met de daaruit door definitie afgeleide hulpgrootheden) niet als in elk der beide besproken gevallen volkomen aequivalent zijn [1]). Ook al bestaat tusschen deze verschillende systemen geen tegenspraak wat de beschrijving der tot de beschouwde groep behoorende verschijnselen betreft, zoo zullen zij zich van elkander kunnen onderscheiden op velerlei wijze, b. v. wat eenvoud of volledigheid betreft. Het is ook mogelijk, dat de beschouwde groep niet voor elk systeem van fundamenteele grootheden denzelfden omvang kan hebben; het eene systeem zal meer betrekkingen opleveren dan het andere, hetzij overtollige, hetzij zoodanige als tot uitbreiding der groep dienstig kunnen zijn of tot aanhechting der theorie aan die van andere groepen van verschijnselen; enz. — Vergelijk hetgeen Hoofdstuk IV § 4 gezegd wordt over het vervangen der magnetische polarisatie door de magnetische inductie in de grondvergelijkingen van Hertz.

§ 2. Het ware bij het nagaan der door een physicus opgestelde theoriën het meest interessant zijne gedachten te doorloopen in historische volgorde; te zien, welke fundamenteele en hulpgrootheden en welke groep van verschijnselen hem aanvankelijk voor den geest stonden, en op welke wijze gedurende het onderzoek deze voorstellingen zich bij hem uitbreidden, wijzigden, of ook door andere werden vervangen. De geschiedenis der natuurkundige gedachte op te sporen zou echter in menig geval zeer moeilijk wezen, daar de meeste physici hunne theoriën meer in kunstmatig-logischen vorm dan in de genetische (en dus ook waarlijk logische) volgorde hebben neergeschreven.

Zoo is het niet met juistheid bekend, welke de gedachtengang van Ampère bij het samenstellen zijner theorie is geweest. Van de vier proeven, waarvan hij in zijne

[1]) Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat men in bijzondere gevallen in twijfel kan verkeeren of een grootheid eer tot de fundamenteele of eer tot de hulpgrootheden is te rekenen. Men heeft hierbij voornamelijk op de bedoeling van den opsteller der theorie te letten.

„Théorie des phénomènes électrodynamiques" uitgaat, was de laatste althans bij het schrijven van dat werk nog niet door hem verricht; de derde, waarin aangetoond wordt dat de kracht door een gesloten stroom op een stroomelement uitgeoefend er loodrecht op staat, laat aan nauwkeurigheid veel te wenschen over. Maxwell zegt, dat Ampère zijne theorie samenstelde „by some process which he has not shewn us, and that when he had afterwards built up a perfect demonstration he removed all traces of the scaffolding by which he had raised it." Hertz schrijft hieromtrent (Ann. d. Phys. 23. 1884 „Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik"):

„Offenbar war sein Gedankengang nahezu dieser. Der Strom übt magnetische Kräfte aus — denn ein Magnetpol bewegt sich unter dem Einflusse des Stromes; und der Strom wird bewegt durch magnetische Kräfte — denn nach dem Prinzipe der Reaktion bewegt sich ein Stromträger unter dem Einflusse des Magnetes. Will man also nicht die unwahrscheinliche Annahme machen, dass es verschiedene Arten magnetischer Kräfte gebe, so muss sich ein Stromträger auch bewegen unter dem Einflusse derjenigen magnetischen Kräfte die ein andrer Strom ausübt, und so folgt denn die Wechselwirkung zwischen den Strömen."

Het hier gezegde berust blijkbaar niet op eenig onderzoek. Het eenige wat Hertz zonder onderzoek had mogen zeggen is dit, dat de gedachtengang van Ampère zoo had *kunnen* zijn. — In de Geschiedenis der Parijsche Academie van Wetenschappen, in de jaren volgende op Oersted's ontdekking, is niets te vinden wat op dezen gedachtengang wijst. En het blijkt ook niet, indien dit werkelijk Ampère's uitgangspunt mocht zijn geweest, hoe hij er later toe gekomen is de magnetische kracht geheel op den achtergrond te stellen; evenmin hoe hij op het denkbeeld is gekomen dat een magneet werkt als een geschikt gekozen stelsel electrische kringstroomen. — Veeleer ziet men dat het denkbeeld der „identité de l'électricité et du magnétisme" reeds vóór Oersted's ontdekking bij Ampère evenals bij andere physici bestond. Mogelijk is de volgende gedachtengang. Ampère, de proef van Oersted vernomen hebbende, en bedenkende dat de aarde op een magneet op zoodanige wijze werkt als liep een stroom langs den aequator, besloot hieruit, in verband met zijne vermoedens over de mogelijkheid van het herleiden der theorie van het magnetisme tot die van de electriciteit, dat de aarde (en evenzoo elk magnetisch lichaam) haar z. g. magnetisme te danken heeft aan het bestaan van een stelsel electrische kringstroomen [1]. Daar een stroom op een magneet werkt, werken dus ook twee stroomen op elkander en wel moet de eerste werking uit de tweede (die door waarneming gevonden kan worden) theoretisch kunnen worden afgeleid. Er is dus geen reden om aan de opmerking van Hertz uit geschiedkundig oogpunt waarde te hechten.

In zijne „Théorie des phénomènes électrodynamiques" p. 355 en 356 betoogt Ampère met nadruk, dat volgens het actie-reactie-principe alleen tegengesteld gelijke krachten mogen worden aangenomen, die volgens dezelfde lijn werken. Een ietwat algemeener „Prinzip der Reaction", zooals Hertz schijnt te bedoelen, komt mij derhalve voor niet in den geest van Ampère te zijn

Evenmin is als volkomen juist te beschouwen wat Hertz zegt in zijne „Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper" § 3:

---

[1] Zeker is het, dat Ampère eerst aan het bestaan van gewone electrische stroomen in de aarde geloofde en de instelling der magneetnaald daaraan toeschreef. Eerst later kwam hij op het denkbeeld der moleculaire kringstroomen.

„Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmässig dieselben aus Vermuthungen über die elektrische und magnetische Constitution des Aethers und das Wesen der wirkenden Kräfte, als wären dies bekanntere Dinge, herzuleiten, *wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde* Viel eher ist es zweckmässig an diese Gleichungen die weiteren Vermuthungen über die Constitution des Aethers anzuknüpfen."

Deze vergelijkingen zijn in de eerste plaats te danken aan de experimenteele onderzoekingen van Faraday. A-prioristische onderstellingen over den aether, enz zijn bij dezen physicus (die steeds getracht heeft zijne gedachten in genetische volgorde neer te schrijven) ver te zoeken. Opgesteld zijn de bedoelde vergelijkingen door Maxwell, die daarbij — dit is waar — vaak van voorstellingen ontleend aan de beschouwing van een bepaald mechanisme heeft gebruik gemaakt, doch nooit op eene wijze „als wären dies bekanntere Dinge", gelijk blijkt uit hetgeen hij in de Voorrede van zijn „Electricity and Magnetism" over het verschil tusschen Engelsche en Duitsche methoden zegt. Daar vindt men zelfs de woorden: „These physical hypotheses.... are entirely alien from the way of looking at things which I adopt" [1]).

§ 3. Poincaré („Électricité et Optique" 1901 Introduction) noemt den eisch „raisonnable" dien de Fransche geest ook aan een oorspronkelijk werk stelt: „Non seulement il n'y tolérera pas la moindre apparence de contradiction, mais il exigera que les diverses parties en soient logique-

¹) Er moet bijgevoegd worden, dat Maxwell's meeningen omtrent het nut van dergelijke mechanische voorstellingen, evenals over aard en doel der natuurkundige wetenschap in het algemeen, niet slechts in zijn vroegere verhandelingen, maar ook in zijn hoofdwerk niet steeds dezelfde zijn.

ment reliées les unes aux autres et que le nombre des hypothèses distinctes soit réduit au minimum."

Wanneer men aanneemt dat naar Maxwell's woorden »science is most easily assimilated in its nascent state" en dat derhalve bij een oorspronkelijken inhoud in het algemeen de oorspronkelijke volgorde past, zoo kan men de woorden van Poincaré niet onderschrijven. Immers — dit blijkt juist bij Maxwell op treffende wijze — eene methode die geschikt is de wetenschap vooruit te brengen bestaat hierin, dat men na uit bijzondere onderstellingen iets te hebben afgeleid, deze conclusie vooropstelt met loslating der afleiding: het gevondene wordt aangenomen algemeener geldigheid te hebben dan het volgens de afleiding heeft [1]. Zoo worden uit de theorie der afstandswerking vergelijkingen afgeleid, die daarop met loslating der afleiding worden beschouwd als behoorende bij eene theorie, waarin alle werkingen door het medium worden voortgeplant. Zoo worden in bijzondere gevallen uitdrukkingen voor de energie opgesteld en wordt daaraan dan algemeene geldigheid toegeschreven. Evenzoo wordt bij Neumann (zie voor de formules Hoofdstuk II § 2) na berekening van den potentiaal uit eene speciale onderstelling de afleiding losgelaten en de geldigheid der potentiaalwet uitgebreid tot het geval van een veranderlijken stroom Hij neemt aan „dass die Veränderung des Potentials, durch welche die Wirkung einer von der Einheit des Stroms durchströmten Leiters auf einen Magnet dargestellt wird, die Ursache und das

---

[1]) Hertz verlangt daarom in de laatstaangehaalde woorden niets onredelijks, waar hij voorstelt de Maxwell'sche vergelijkingen met loslating der afleiding voorop te stellen. In zooverre verschilt echter zijne handelwijze van die van Maxwell dat hij in zijne verhandelingen over electromagnetisme voor de verlaten voorstellingen geen nieuwe in de plaats tracht te geven. De electronentheorie (zie Naschrift) geeft wel zulke voorstellingen.

Maass des inducirten Stroms ist, *und es hierbei gleichgilt wodurch diese Veränderung des Werthes des Potentials hervorgebracht wird.*" Dit voortdurend induceeren en tastenderwijs generalizeeren is onmisbaar. Het woord „logiquement" bij Poincaré heeft blijkbaar betrekking op logisch *deduceeren*. Van veel meer belang is de bij Maxwell op te merken *logica der inductie*, waardoor met voortdurende opheffing van inwendige tegenspraak de wetenschap vooruitkomt. Het kan zeker zijn nut hebben na het bereiken van zekere uitkomsten waarbij men voorloopig wenscht te blijven, deze voorop te stellen en beter dan bij de oorspronkelijke volgorde der gedachten mogelijk was te toonen hoe de besproken verschijnselen b. v. door de verkregen formules worden omvat. Door echter een oorspronkelijk werk in dezen vorm te gieten, zou men het van het grootste deel zijner leerzaamheid berooven [1].

§ 4. Een enkel woord worde nog in aansluiting aan § 1 gezegd over het vooropstellen der energie als fundamenteele grootheid. Het groote verschil tusschen v. Helmholtz en R. Mayer, die beide met nadruk de geldigheid der wet van het behoud van arbeidsvermogen verkondigen, ligt hierin, dat Mayer de energie als fundamenteele grootheid wenscht beschouwt te zien, terwijl v. Helmholtz in zijne „Erhaltung der Kraft" de genoemde wet meent te mogen verklaren uit „der Annahme, dass alle Wirkungen in der Natur zurückzuführen seien auf *anziehende und abstossende Kräfte deren Intensität nur von der Entfernung der auf einander wirkenden Punkte abhängt.*" Zelfs beweert hij „*dass beide Sätze identisch sind*" en dat dit door hem is bewezen. Opmerking verdient dat hij deze bewering uitsprak niettegenstaande hij kennis droeg van Weber's

[1]) Op andere plaatsen spreekt trouwens Poincaré met meer waardeering over den vorm van Maxwell's werk.

wet, waarover in „Erhaltung der Kraft" VI is te lezen:

„Die elektrodynamischen Erscheinungen sind zurückgeführt worden von Ampère auf anziehende und abstossende Kräfte der Stromelemente, deren Intensität von der Geschwindigkeit und Richtung der Ströme abhängt. Seine Herleitung umfasst aber die Induktionserscheinungen nicht. Letztere sind dagegen zugleich mit den elektrodynamischen von W. Weber zurückgeführt worden auf anziehende und abstossende Kräfte der elektrischen Fluida selbst, *deren Intensität abhängt von der Näherungs- oder Entfernungsgeschwindigkeit und der Zunahme derselben. Für jetzt ist noch keine Hypothese aufgefunden worden vermöge deren man diese Erscheinungen auf constante Centralkräfte zurückführen könnte. Etc.*"

Toen zag v. Helmholtz nog niet in, dat uit het feit, dat de door Weber aangenomen krachten afhankelijk zijn van snelheid en versnelling der op elkander werkende punten, niet volgt, dat Weber's wet met de wet van het behoud van arbeidsvermogen in strijd is. De laatstaangehaalde zinsnede doet zien dat hij, Weber's wet voor onaannemelijk houdende, meende een andere elementairwet voor de electrodynamische en electromotorische krachten te moeten zoeken, waarin slechts sprake zou zijn van den oogenblikkelijken stand der op elkander werkende punten. Zijn verlangen om tot deze wet te geraken, schijnt een der redenen geweest te zijn waarom hij de in Hoofdstuk I, § 18 besproken elementaire potentiaalwet heeft opgesteld [1]). Het moet dan verder met zijne overtuiging dat alle „Wirkungen in der Natur" aan „anziehende und abstossende Kräfte deren Intensität.... etc." zouden

---

[1]) Van geen belang is hier de vraag in hoeverre Weber's wet (nevens andere wetten) in de elementaire potentiaalwet is begrepen. Evenmin behoeft ter sprake te komen wat v. Helmholtz in Borchardt's „Journal f. Math." 72 tegen de geldigheid van Weber's wet aanvoert.

te danken zijn [1]) in verband hebben gestaan, dat hij ook tijdens de aldaar vermelde polemiek met Zöllner meermalen spreekt alsof aan ieder die de potentiaalwet van Neumann aanneemt ook *zijn* elementaire potentiaalwet als de meest algemeene wet moet voorkomen die de werkingswijze van twee stroomelementen op elkander kan bepalen.

In dit verband wordt de groote nadruk begrijpelijk, waarmede v. Helmholtz aanvankelijk zijn potentiaalwet tegen gegronde critiek verdedigde. Het betrof de vraag of alle werkingen in de natuur teruggebracht moeten worden tot werkingen van punten op elkander slechts afhangende van den stand dier punten, en tevens indirect de vraag in hoeverre alle werkingen in de natuur zich op eene bepaalde voor altijd vaststaande wijze laten verklaren. Hier is van toepassing wat v. Helmholtz in zijne beschouwingen over Goethe's „Farbenlehre" zoo treffend opmerkt: „Ein so schroffer Widerspruch lässt uns vermuthen, dass hinter der Sache ein viel tiefer liegender principieller Gegensatz verschiedener Geistesrichtungen verborgen sei, der das gegenseitige Verständniss der streitenden Parteien verhindere."

Bij Maxwell treedt de energie voortdurend meer op den voorgrond [2]). Zie ook Hoofdstuk IV § 15, hoe in Hertz' theorie de ponderomotorische krachten uit de energie worden berekend. Zooals Hertz zich uitdrukt („Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper." 1890 § 12) is de plaats dezer krachten hier niet meer „in den Grundlagen", maar „in den Ausläufern der Theorie".

§ 5. Het in Hoofdstuk I en Hoofdstuk II over de mag-

---

[1]) Deze overtuiging spreekt b. v. sterk in zijn „Ueber die Theorie der Elektrodynamik" (Monatsber. d. Berl. Ak. April 1872).

[2]) Ook Faraday pleegt van „power" te spreken als van iets welks bestaan en onvernietigbaarheid geene nadere verklaring behoeft.

netische kracht gezegde moet aangevuld worden door nadere beschouwingen, wanneer men zooals Faraday (Hoofdstuk II § 6) of Hagenbach (Hoofdstuk II § 5) ook in het inwendige der magneten van krachtlijnen wil spreken. De integraal der magnetische kracht langs een gesloten lijn die éénmaal in positieve richting door een geschikt gekozen vlak met $\lambda_1$ tot rand gaat bleek (zie Hoofdstuk I § 13, waar de op een magneetpool verrichte arbeid wordt berekend) wanneer in de baan $\lambda_1$ een stroom van de sterkte $i_1$ loopt, de waarde $4\pi i_1$ te hebben. Hierbij werden stilzwijgend eenige onderstellingen gemaakt Vooreerst was de daarbij beschouwde magnetische kracht uitsluitend aan den stroom $i_1$ te danken. Men kan echter evengoed de totale magnetische kracht van het veld nemen, wanneer de gesloten stroom $i_1$ de eenige is wiens baan door elk vlak gaat, dat den gesloten integratieweg tot rand heeft. Immers andere gesloten stroomen leveren voor de integraal der magnetische kracht, welke — zie Hoofdstuk I (6) — een potentiaal heeft, een bijdrage 0, en het blijkt uit Hoofdstuk I (3), dat verschillende magnetische krachtvelden zich superponeeren, zoodat de magnetische kracht in elk punt kan beschouwd worden als de resultante der aan verschillende stroomen afzonderlijk te danken magnetische krachten.

Ten tweede werd in het midden gelaten of de stroombanen zich in lucht, in het luchtledige, of in een ander medium bevinden. De aard van het medium werd ondersteld op de grootte der magnetische kracht geen invloed te hebben. Daar deze invloed inderdaad wèl bestaat, en bij Faraday en Maxwell het medium een groote rol speelt, moet de theorie van Ampère e. a., wil men van deze eenigszins geleidelijk op die van Maxwell overgaan, hier door eene onderstelling worden aangevuld. Wij willen aannemen, dat alle werkingen, waarvan in de beide eerste Hoofdstukken sprake was, in het luchtledige plaats vonden.

Ook in deze § zij de aether het eenige medium en worde aangenomen, dat de magneten alleen als zoodanig [1]) (niet door den aard der stof waaruit zij bestaan) op de grootte der magnetische kracht in een bepaald punt van het veld invloed hebben.

Er werd in de derde plaats aangenomen, dat de bovengenoemde integratieweg niet door magneten loopt. Wij willen deze beperking laten vervallen met dien verstande, dat de integraal der magnetische kracht langs een gesloten lijn (wanneer door een willekeurig vlak met die lijn tot rand geen stroomen gaan) nul zij om het even of die lijn geheel in den aether ligt of geheel of gedeeltelijk door magneten loopt Is (fig. 15) A B C D een zoodanige gesloten lijn, waarbij A D en B C op zeer geringen afstand van elkander aan weerszijden van het oppervlak van een magneet M zijn gelegen, zoo moet derhalve (daar met A B en D C van wege hunne kleinheid geen rekening behoeft te worden gehouden) de integraal der magnetische kracht langs A D evengroot zijn als langs B C, waaruit is af te leiden, dat de tangentieele component der magnetische kracht bij het gaan door het grensvlak van een magneet geen plotselinge verandering ondergaat. Algemeener blijkt uit den genoemden eisch, waaraan de magnetische kracht moet voldoen, dat de magnetische potentiaal binnen magneten evengoed als daarbuiten bestaat.

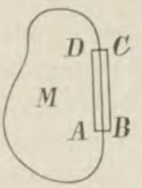

Fig. 15.

§ 6. Beschouwt men een magneet en een gesloten lineairen stroom daarbuiten, zoo is volgens Hoofdstuk I § 12, als men door de stroombaan een vlak brengt dat den magneet niet snijdt, de randintegraal van den aan den magneet

[1]) De magneten zijn hier nog steeds beschouwd als lichamen waarin kringstroomen loopen.

(evenals aan elk ander systeem van gesloten stroomen) te danken vector-potentiaal gelijk aan de oppervlakte-integraal der bij den magneet behoorende magnetische kracht over dat vlak. Wil men dat deze oppervlakte-integraal dezelfde waarde behoude wanneer caeteris paribus het vlak zoo gekozen wordt, dat het door den magneet loopt, zoo moet een tweede vector binnen den magneet worden ingevoerd, welke zich daarbuiten aan de magnetische kracht aansluit. Dezen vector noemen wij de magnetische inductie Daar men het vlak, wanneer het eenmaal door den magneet loopt, zoo vervormen kan, dat het overal buiten den magneet dezelfde gedaante behoudt, zoo blijkt de normale integraal der magnetische inductie over elk gesloten oppervlak binnen den magneet nul te moeten zijn. Derhalve moet hare divergentie binnen den magneet nul zijn Buiten sluit zij zich aan de magnetische kracht aan; anders gezegd, in den aether worden magnetische kracht en magnetische inductie door denzelfden vector voorgesteld; ook daar is derhalve hare divergentie nul. Is A B C D (fig. 16) een willekeurige gesloten lijn op het oppervlak van den magneet, zoo kan men het vlak zóó kiezen, dat het van den stroom $\lambda$ tot A B C D loope en dan zich aansluite bij het oppervlak van den magneet, hetzij daarbinnen hetzij daarbuiten. Uit de beschouwing dezer vlakken

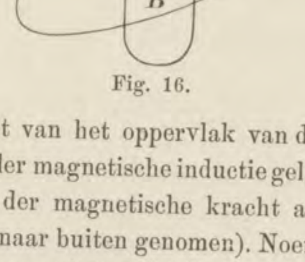

Fig. 16.

is af te leiden, dat in elk punt van het oppervlak van den magneet de normale component der magnetische inductie gelijk is aan de normale component der magnetische kracht aan de buitenzijde (beide normalen naar buiten genomen). Noemt men als C o h n („Das elektromagnetische Feld" 1900) het verschil dezer beide componenten (de laatste—de eerste) de vlakte-divergentie van den vector, en de vroeger genoemde divergentie tot onderscheiding de ruimte-divergentie, zoo kan men de beide voorwaarden, waaraan de magnetische inductie moet voldoen, samenvatten door te zeggen dat hare divergentie overal nul is.

De potentiaal aan een magneet te danken is volgens Maxwell („Electricity and Magnetism" § 385)

$$(1)\ldots. P=\iint \frac{I_n}{r}\,d\sigma-\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}\right)d\tau.$$

Deze vergelijking, die door Maxwell uit de theorie der afstandswerking wordt afgeleid, wordt hier volgens het § 5 opgemerkte als geldig beschouwd voor het geval dat de aether het eenige medium is en de magneten niet door den aard der stof waaruit zij bestaan maar uitsluitend door hun magnetisme (of zoo men wil door hunne kringstroomen) op de grootte der magnetische kracht in een bepaald punt van het veld invloed hebben. De vector $I$ (magnetisatie) is uit het magnetisme gedefinieerd zooals bij Maxwell is aangegeven.

De magnetische kracht heeft tot eerste component $H_x=-\frac{\partial P}{\partial x}$, ook binnen den magneet.

Voor de magnetische inductie ($B$) is te schrijven

$$(2)\ldots\ B_x=H_x+4\pi I_x,\text{ enz.}$$

Immers uit (1) volgt

$$(3)\ldots.\Delta P=4\pi\left(\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}\right),$$

zoodat volgens (2) de ruimte-divergentie van $B$ nul is.

De afgeleide van $P$ naar de richting der normaal vertoont aan het grensvlak een sprong: buiten den magneet is de negatieve afgeleide naar de naar buiten getrokken normaal $4\pi I_n$ grooter dan binnen den magneet. Uit (2) blijkt in verband hiermede, dat de vlakte-divergentie van $B$ nul is.

$B$ voldoet dus inderdaad aan de voorwaarden waaraan de te voren gedefinieerde magnetische inductie moest voldoen. Men kan nog vragen of deze vector algemeen voldoet aan de voorwaarde, dat zijn oppervlakte-integraal gelijk is aan de integraal van een vector-potentiaal langs den rand van het beschouwde vlak, ook als die randlijn door magneten loopt. Poincaré („Electricité et Optique" § 276) bewijst dat deze stelling ook dan geldig is, waarbij de vector-potentiaal nog steeds in elk punt (ook binnen de magneten) is te vinden door eene integratie over alle kringstroomen volgens Hoofdstuk I ( 37). Volgens het door Poincaré gegeven bewijs is dus

$$(4) \ldots . B_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \text{ enz.}$$

§ 7. De door Faraday besproken krachtlijnen, welke aan de draaiing van een magneet om zijn as niet zouden deelnemen kunnen geacht worden (zooals reeds Hoofdstuk II § 5 werd opgemerkt) de lijnen der magnetische inductie te zijn. Dit blijkt als volgt. Draait (fig. 1) de magneet om zijn symmetrie-as, zoo is de in den sluitdraad A B C (die rust) opgewekte electromotorische kracht (wanneer omtrent het medium en den magneet het ook in § 5 en § 6 onderstelde geldt) volgens Hoofdstuk II § 2 of § 5 numeriek gelijk aan het aantal per tijdseenheid door A B C gesneden krachtlijnen, wanneer deze met den magneet meedraaien. Het is hierbij om het even of men van de magnetische krachtlijnen of wel van de inductielijnen spreekt, daar immers buiten den magneet magnetische kracht en magnetische inductie overal door denzelfden vector worden voorgesteld. Zal de opvatting van Faraday dezelfde waarde voor de electromotorische kracht opleveren, zoo moet het aantal door de binnen den magneet liggende en medebewegende baan C A per tijdseenheid gesneden lijnen gelijk zijn aan het bovengenoemde aantal. Het door de medebewegende baan C A per tijdseenheid gesneden aantal rustende lijnen is gelijk met het tegengestelde teeken aan het aantal lijnen dat C A zou snijden, indien deze baan zelve rustte en de magneet de lijnen meesleepte. Het is derhalve opdat de beide opvattingen tot dezelfde uitkomst leiden een vereischte, dat bij eene draaiing van den magneet waarbij alle lijnen worden meegesleept en de geheele baan rust, de beide deelen der baan (C A en A B C) evenveel lijnen snijden en dat dit aantal voor de beide deelen een verschillend teeken hebbe. Anders gezegd: het aantal door de gesloten baan A B C A in dat geval gesneden lijnen, hetzij bij eene volle omwenteling hetzij bij een deel daarvan, is nul. Hieruit volgt, wanneer men het door A B C A bij eene volle omwenteling dezer baan beschreven gesloten oppervlak beschouwt, dat de normale integraal van den te beschouwen vector over dat oppervlak nul moet zijn. Aan dezen eisch voldoet de magnetische kracht niet, wel volgens § 6 de magnetische inductie. Om redenen van symmetrie is de normale integraal der inductie ook nul over een bij eene gedeeltelijke wenteling beschreven oppervlak. Andere vectoren die eveneens aan dezen eisch voldoen kan men verkrijgen door de magnetische inductie samen te stellen met een of anderen vector, die buiten den magneet nul is en binnen den magneet in cirkels om de as loopt, zoodat hij niets bijdraagt tot de normale integraal over een door C A bij eene wenteling beschreven oppervlak. Wij willen echter binnen den magneet geen andere vectoren beschouwen dan de magnetische kracht en de magnetische inductie. Wij kiezen derhalve de inductielijnen als lijnen beantwoordende aan Faraday's opvatting.

§ 8. Door de wijze waarop § 6 de magnetische inductie werd ingevoerd zou men allicht tot de meening komen dat het samenvallen van dezen vector (zooals hij in de theorie van Maxwell voorkomt) met de magnetische kracht overal waar geen magnetisatie bestaat, onafhankelijk is van de keus der eenheden. De vergelijking (2) [1]), die door Maxwell overal wordt gebezigd, zou deze opvatting kunnen versterken. Toch is zij niet juist. In het hier gebezigde electromagnetische maatstelsel hebben bij Maxwell beide vectoren de afmeting $[L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}]$, daarentegen heeft b.v. in het electrostatische stelsel $B$ de afmeting $[L^{-3/2} M^{1/2}]$ en $H$ de afmeting $[L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}]$. De historische gedachtengang waardoor Maxwell tot de invoering der inductie kwam is geheel verschillend van de in § 6 gevolgde redeneering en zoodanig dat een dimensieverschil als het boven bedoelde voor de hand ligt In de verhandeling „On Faraday's Lines of Force" (Cambridge Phil. Trans. X 1864) wordt in een bepaald geval de magnetische inductie voorgesteld als de snelheid eener onsamendrukbare vloeistof en de magnetische kracht als het drukverval noodig om deze vloeistof tegen den weerstand van het medium in aan het stroomen te houden. Ook in „Electricity and Magnetism" wordt er nadruk op gelegd (b.v. § 12) dat magnetische kracht en magnetische inductie vectoren van verschillenden aard zijn. De eerste wordt daar genoemd een Intensity, de tweede een Flux.

§ 9. Het is niet mogelijk hier eene poging te doen om den gedachtengang te schetsen dien Maxwell bij de samenstelling der verschillende deelen zijner theorie heeft gevolgd. In Hoofdstuk IV wordt deze theorie behandeld

---

[1]) Of liever (11) van pag. 100, waarin $I$ volgens Maxwell (niet bij ons, zie § 10) eenvoudig „magnetisatie" heet.

zooals zij met eenige wijzigingen door Hertz is gepraeciseerd. Geheel onbesproken kan de theorie van Maxwell zelven intusschen niet blijven, al ware het alleen omdat in de theorie van Hertz de vectoren $I$ en $B$ zullen worden ingevoerd, welke bij dezen physicus niet voorkomen.

De voorstelling der moleculaire kringstroomen in magneten treedt bij Maxwell geheel op den achtergrond [1]). De aandacht wordt uitsluitend gevestigd op de bij den magneet behoorende vectoren $I$, $B$ en $H$. $H$ wordt ondersteld (daar er geen stroomen zijn) irrotationeel verdeeld te zijn (d. w. z. overal een potentiaal te hebben), $B$ solenoïdaal (d. w. z. zonder divergentie). $H$ en $B$ in een bepaald punt hangen niet alleen van den stand en de eigenschappen van den magneet af, maar ook van den aard der omringende media. Onderstelt men den magneet en alle andere media isotroop, en noemt $\mu$ een in elk punt bepaalde constante, afhangende van den aard van het aldaar aanwezige medium, zoo kan men schrijven

$$(5) \ldots . B_x = \mu H_x + 4\pi I_x, \text{ enz.},$$

waarbij wij onder $I$ een onveranderlijken vector verstaan, die alleen in „permanente magneten" voorkomt. Hij kan de „magnetisatie" daarvan genoemd worden en hangt niet af van den aard der verschillende omringende media. Men ziet dat (5) met (2) overeenstemt in het speciale in § 6 beschouwde geval. $\mu$ is in het electromagnetische maatstelsel in den aether $= 1$ genomen. Wanneer $I$ overal binnen den magneet is gegeven (buiten den magneet bestaat geen $I$), zijn $B$ en $H$ overal bepaald. Het is voldoende aan te toonen dat de magnetische potentiaal zoodoende overal op een

[1]) Poincaré („Electricité et Optique" § 248) mag daarom van hem geen bewijs verlangen als het op het einde van § 6 bedoelde. — Later voert Maxwell de genoemde voorstelling in op een wijze die volgens Hoofdstuk IV § 14 niet vrij van bedenking is.

constante na bepaald is. Stel dat twee systemen van potentialen voldoen en dat het verschil dier potentialen in een willekeurig punt $\chi$ is. Uit (5) en de twee daarbij behoorende vergelijkingen volgt dan

$$(6) \ldots . \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)=0,$$

en bij een grensvlak

$$(7) \ldots . \mu_1 \frac{\partial \chi}{\partial n_1}+\mu_2 \frac{\partial \chi}{\partial n_2}=0,$$

waarbij $n_1$ en $n_2$ de resp. naar de zijde van het medium 1 en van het medium 2 getrokken normalen zijn. Grensvlakken zijn er tusschen den magneet en het medium (ook binnen den magneet als $\mu$ aldaar sprongen vertoont) en tusschen verschillende media. Volgens een bekend theorema is

$$(8) \ldots . \int \chi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\right] d\tau=-$$

$$-\int \mu \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma-\Sigma \int \chi\left(\mu_1 \frac{\partial \chi}{\partial n_1}+\mu_2 \frac{\partial \chi}{\partial n_2}\right) d\sigma_{12}-$$

$$-\int \mu\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Hierbij zijn de beide ruimte-integralen uitgestrekt over een door $\sigma$ begrensd gebied. $\sigma_{12}$ zijn vlakken binnen die ruimte. Hier denken wij ons $\sigma$ geheel in het oneindige. Twee beschouwde waarden van den potentiaal, en dus ook hun verschil $\chi$, worden ondersteld bij verwijdering van het stelsel zoo snel af te nemen, dat de eerste term van het tweede lid verdwijnt. Volgens (6) en (7) verdwijnen nog twee termen. Er blijft eene vergelijking over die eischt

$$(9) \ldots . \frac{\partial \chi}{\partial x}=0, \text{ enz.},$$

waaruit volgt dat $\chi$ overal eene constante is *Q. E. D.*

§ 10. Bij Maxwell komt overal de onderstaande vergelijking (11) en nergens de vergelijking (5) voor. Buiten magneten schrijft hij soms

$$(10) \ldots . B_x = \mu H_x, \text{ enz.},$$

soms ook brengt hij deze vergelijking in den vorm (11), $I'$ (bij hem $I$) met $H$ evenredig stellende Mij komt niettemin de b.v. door Cohn („Das electromagnetische Feld") gebezigde vergelijking (5) voor beter dan (11) in het kader der Maxwell'sche theorie te passen. Vooreerst geeft (5) geen aanleiding tot de dwaling, welke anders voor de hand zou liggen, als zouden $B$ en $H$ bij Maxwell grootheden van gelijke soort en derhalve in elk maatstelsel grootheden van dezelfde afmeting zijn. In de tweede plaats zal de stof, waaruit de magneet bestaat, voor men er een „permanenten magneet" van maakte een bepaalde $\mu$ gehad hebben [1]; waarom zou men haar dan na het ontstaan van den magnetischen toestand geen van 1 verschillende $\mu$ meer toeschrijven? Ook is als men boven (5) de vergelijking

$$(11) \ldots . B_x = H_x + 4\pi I'_x$$

verkiest, de definitie van een (eenigermate met een werkelijk bestaanden magneet overeenkomenden) „permanenten magneet" niet op eenvoudige wijze te geven [2].

Aan den anderen kant zal men geneigd zijn aan een stuk week ijzer, dat zich in een magnetisch veld bevindt, eene zekere magnetisatie toe te schrijven evengoed als aan

---

[1] Hertz in zijne „Grundgleichungen der Elektrodynamik" beschouwt slechts „permanente magneten" bestaande uit „volkomen hard staal" waarvoor hij aanneemt dat in het electromagnetische maatstelsel $\mu = 1$ is. Dan vervalt het onderscheid tusschen (2) en (5). Er is echter voor zulk eene beperking geen reden. Maxwell spreekt niet van dit volkomen harde staal.

[2] Het blijkt n.l. dat $I'$ niet in werkelijke gevallen constant kan worden geacht

een permanenten magneet. Niets belet ons, hoewel aannemende dat de verschijnselen met behulp van (5) in permanente magneten en (10) in andere lichamen op bevredigende wijze worden voorgesteld, een nieuwen vector $I'$ met behulp van (11) te definieeren, welke, zooals reeds gezegd, bij Maxwell „magnetisatie" heet. Deze is dan niet constant in de „permanente magneten", waarin $I$ constant is, en bestaat ook in week ijzer. Men kan (met Cohn) ter onderscheiding $I$ de ware magnetisatie noemen, $I'$ in week ijzer (of een andere niet permanent gemagnetiseerde stof) de schijnbare of geinduceerde magnetisatie. In een permanenten magneet kan dan $I'$ de vrije magnetisatie heeten.

Hier zal slechts (5) worden gebezigd, en $I$ de magnetisatie worden genoemd.

§ 11. Beschouwen wij nu een veld, waarin zich magneten en stroomen bevinden. Het totale veld is te splitsen in een aan de magneten en een aan de stroomen te danken veld, welke beide velden zich superponeeren. Hier behoeft dus alleen van het laatste veld sprake te zijn. De magnetische kracht voldoet daarin aan eene vergelijking, welke ook uit Hoofdstuk I (3) kan worden afgeleid, of liever uit Hoofdstuk I (14), waarbij de voorstelling dat alle stroomen lineair zouden moeten zijn vervalt. Voor Hoofdstuk I (14) is ook te schrijven

$$(12) \ldots . H_{2x} = \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{w_2}{r}\, d\tau_2 - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{v_2}{r}\, d\tau_2$$

of

$$(13) \ldots . H_{2x} = \frac{\partial V_{2z}}{\partial y_1} - \frac{\partial V_{2y}}{\partial z_1},$$

waarin als vector-potentiaal $V_2$ is genomen wat uit eene uitbreiding van Hoofdstuk I (37) tot het geval van nietlineaire stroomen volgt, n. l.

$$(14) \ldots . V_{2x} = \int \frac{u_2}{r}\, d\tau_2, \text{ enz.}$$

Uit (13) volgt

$$(14') \ldots \frac{\partial H_{2z}}{\partial y_1} - \frac{\partial H_{2y}}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{2x}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{2y}}{\partial y_1} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial z_1}\right] - \Delta V_{2x}.$$

Hierin is

$$(15) \ldots \frac{\partial V_{2x}}{\partial x_1} = -\int u_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} d\tau_2,$$

of als partieel geïntegreerd wordt over het geheele stroomgebied, waarbij de stroom door het grensvlak nul is,

$$(16) \ldots \frac{\partial V_{2x}}{\partial x_1} = \int \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} d\tau_2.$$

Bij deze partieele integratie is rekening gehouden met het feit dat de stroomcomponenten overal continu veranderen. Neemt men aan, wat tot nu toe geschiedde, dat stroomen alleen *in geleiders* plaats hebben, zoo moet bij het grensvlak van een geleider de stroom in tangentieele richting loopen.

Uit (14) volgt

$$(17) \ldots \Delta V_{2x} = -4\pi u_2$$

volgens het theorema van Poisson, en de vergelijking (14′) gaat dus over in

$$(18) \ldots \frac{\partial H_{2z}}{\partial y_1} - \frac{\partial H_{2y}}{\partial z_1} = 4\pi u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{1}{r} \left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_2}\right\} d\tau_2.$$

Maxwell neemt aan (wat ook in Hoofdstuk I werd aangenomen) dat alle stroomen gesloten zijn, dus

$$(19) \ldots \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_2} = 0 \text{ [1]}.$$

---

[1]) Eigenlijk zou hier eene vergelijking bijgevoegd moeten worden, uitdrukkende dat ook de vlakte-divergentie van den stroom nul is.

De betrekking (18) wordt dan

$$(20)\ldots\ \frac{\partial H_{2z}}{\partial y_1} - \frac{\partial H_{2y}}{\partial z_1} = 4\pi u_2$$

of met weglating van overtollige indices

$$(21)\ldots\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 4\pi u.$$

Er is bovendien in het aan de stroomen te danken veld een magnetische inductie, bepaald door

$$(22)\ldots\ B_x = \mu H_x, \text{ enz.}$$

De divergentie van $B$ is nul.

Op soortgelijke wijze als in § 9 blijkt dat wanneer de stroomen overal gegeven zijn niet meer dan één waarde van $B$ en $H$ in elk punt mogelijk is.

Beschouwen wij nu weder het veld, waarin magneten en stroomen voorkomen, zoo zien wij, dat (5) en (21) algemeen gelden. Wat in § 10 gezegd werd over ware, schijnbare en vrije magnetisatie geldt ook wanneer het magnetisch veld aan magneten en stroomen is te danken.

Er is tegenspraak tusschen de voorstelling van slechts in geleiders loopende steeds gesloten stroomen en van eene veranderlijke op het oppervlak van geleiders zich bevindende electrische lading. Deze tegenspraak wordt opgeheven door de bij Maxwell voorkomende onderstelling dat ook in niet-geleiders stroomen kunnen loopen; hij noemt ze „displacement-currents".

---

Dan had echter de afleiding van (18) zoo moeten plaats hebben, dat ook daarin die vlakte-divergentie voorkwam. Het maakt alleen uit een mathematisch oogpunt verschil of men bij de afleiding van (18) grensvlakken aanneemt, waar de normale component van den stroom eene discontinuïteit heeft of dat men deze door aannemen van een overgangslaag wegredeneert. De stroomen daarna gesloten onderstellende verkrijgt men steeds (20).

§ 12. Over de ponderomotorische krachten bij Maxwell worde hier niet of nauwelijks gesproken. De bespreking der bij hem voorkomende electromotorische kracht eischt invoering van den vector-potentiaal. Deze wordt *gedefinieerd* door (4), met toevoeging van de onderstelling dat zijne divergentie nul is. Men ziet in, door aanvankelijk de mogelijkheid van twee waarden van den vector-potentiaal in elk punt aan te nemen, dat het verschil dezer beide waarden nul moet zijn, zoodat de vector-potentiaal door de definitie ondubbelzinnig is bepaald.

Bij Neumann wordt de door den gesloten stroom $\lambda_2$ in $\lambda_1$ opgewekte electromotorische kracht bepaald door

$$E_{\lambda_1} = -\frac{d}{dt}\left[i_2 \int\int d\lambda_1\, d\lambda_2 \frac{\cos\varepsilon}{r}\right],$$

volgens Hoofdstuk II (6). Men kan ook schrijven

$$(23)\ldots E_{\lambda_1} = -\frac{d}{dt}\int\left(V_{2x}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + V_{2y}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + V_{2z}\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right) d\lambda_1\,,$$

waarin $V_{2x}$ enz. genomen zijn als in Hoofdstuk I (37).

Maxwell schrijft voor de in $\lambda_1$ door stroomen of magneten opgewekte electromotorische kracht

$$(24)\ldots E_{\lambda_1} = -\frac{d}{dt}\int\left(V_x\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + V_y\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + V_z\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right) d\lambda_1,$$

waarin de vector-potentiaal gedefinieerd is zooals in den aanvang dezer § werd gezegd.

Hij bewijst („Electricity and Magnetism" § 598) dat, wanneer de elementen $d\lambda_1$ onveranderlijk van lengte worden ondersteld, voor (24) is te schrijven

$$(25)\ldots E_{\lambda_1} = \int\left(A_x\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} + A_y\frac{\partial y_1}{\partial\lambda_1} + A_z\frac{\partial z_1}{\partial\lambda_1}\right) d\lambda_1,$$

waarin

$$(26) \ldots . A_x = B_z \frac{\partial y_1}{\partial t} - B_y \frac{\partial z_1}{\partial t} - \frac{\partial V_x}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \text{ enz.}^{1)}$$

Met het partieele afleiden van $V_x$ enz. naar den tijd wordt hier bedoeld het afleiden in de onderstelling dat het punt $(x_1\, y_1\, z_1)$ rust.

Daar de integraal in het tweede lid van (25) over een gesloten stroom is uitgestrekt, blijft hierbij de functie $\psi$ in (26) onbepaald. Maxwell zegt: „We shall find that when we know all the circumstances of the problem, we can assign a definite value to $\psi$, and that it represents according to a certain definition the electric potential at the point $(x_1\, y_1\, z_1)$". Hij komt echter verder niet op de zaak terug, zoodat niet blijkt welke deze definitie is en hoe de waarde van $\psi$ volgens hem moet worden bepaald. De aangehaalde woorden hebben, zooals in § 14 blijken zal, aanleiding gegeven tot misverstand.

§ 13. Eerst worde nog berekend welke waarde $\psi$ volgens de theorie van Neumann moet hebben, wanneer het de stroom $\lambda_2$ is die induceerend werkt zonder dat zijne stroomsterkte verandert. Bij deze theorie moet ondersteld worden (§ 5), dat het medium overal aether is; daar bovendien geen magneten in het veld zijn, mag in (26) $B$ door $H$ worden vervangen. Ook mag de Maxwell'sche $V$ door den Neumann'schen vector $V_2$ worden vervangen: deze laatste toch voldoet

---

[1]) Onder $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\, \frac{\partial y_1}{\partial t}\, \frac{\partial z_1}{\partial t}\right)$ is de snelheid verstaan van $(x_1\, y_1\, z_1)$ ten opzichte van het omringend medium, hetwelk wanneer het stoffelijk is natuurlijk door de aarde wordt meegesleept. Er is bij Maxwell overal slechts van één medium sprake, niet afzonderlijk van een stoffelijk en een aetherisch medium. De aether moet derhalve volgens zijne theorie gedacht worden aan de beweging der aarde, althans nabij de oppervlakte waar alle proeven genomen worden, deel te nemen.

aan de voorwaarde dat zijne divergentie nul is en ook voor $B = H$ aan (4). Het is dus zeker dat de waarde die de eerste component van $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1}$ bij Neumann heeft in den vorm (26) moet kunnen worden gebracht. Het maakt niets uit, dat $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1}$ bij Neumann niet de *totale* electromotorische kracht is, daar immers de electrostatische kracht, welke bij $\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1}$ moet worden gevoegd ten einde de totale electromotorische kracht te verkrijgen, een potentiaal heeft. Is $\phi$ deze potentiaal, zoo is $\psi$ de som van $\phi$ en van $\psi'$, welke laatste volgens (26) is te vinden uit

$$(27)\ldots\frac{\partial \psi'}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_1}\right) + H_z \frac{\partial y_1}{\partial t} - H_y \frac{\partial z_1}{\partial t} - \frac{\partial V_x}{\partial t}.$$

Ook hier moet $d\lambda_1$ van onveranderlijke lengte worden ondersteld. Daar volgens Hoofdstuk II (3) de waarde van $\left(\frac{\partial E_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1}\right)$ slechts afhangt van de relatieve beweging van $d\lambda_1$ ten opzichte van de elementen $d\lambda_2$, is het het eenvoudigste door aan $d\lambda_1$ en $\lambda_2$ eene gemeenschappelijke beweging te geven $d\lambda_1$ in rust te zetten. Dan wordt

$$(28)\ldots\frac{\partial \psi'}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial V_x}{\partial t},$$

waarin

$$(29)\ldots\frac{\partial V_x}{\partial t} = i_2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{r} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$$

en

$$(30)\ldots\left(\frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_1}\right) = -i_2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{r} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + $$
$$+ i_2 \int d\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t} \right\}.$$

Uit (28) volgt derhalve

$$(31) \ldots . \quad \psi' = i_2 \int d\lambda_2 \left\{ r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial r}{\partial t} \right\}.$$

§ 14. Maxwell noemt de functie $\psi$ „electric potential", niet „electrostatic potential". Zonder hierop te letten bestrijdt J. J. Thomson in het Appendix door hem toegevoegd aan de derde uitgaaf van „Electricity and Magnetism" achter § 619 de meening dat $\psi$ de electostatische potentiaal zou zijn. Hij betoogt dat bij deze opvatting b. v. in een draaienden geleidenden bol ruimteladingen zouden ontstaan, hetgeen met het niet-bestaan van ongesloten stroomen in strijd is. Vooreerst is op te merken, dat in (26) $\psi$ in geen geval den electrostatischen potentiaal *in electromagnetische maat* kan voorstellen. Beschouwt men, zooals voor de hand ligt, den term $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ evenals de overige termen als in electromagnetische maat geschreven, zoo zou wat de dimensies betreft de electrostatische potentiaal $V^2 \psi$ kunnen wezen. In een geleider met diëlectriciteitsconstante $K$, zou dan

$$(32) \ldots . \quad V^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} + 4 \pi \rho = 0$$

en bij grensvlakken

$$(33) \ldots . \quad V^2 \left\{ K_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial \psi}{\partial n_2} \right\} + 4 \pi \sigma = 0.$$

Hierin zijn $\rho$ en $\sigma$ resp. de ruimte- en vlaktedichtheid der electrische lading, en $V$ is het getal dat de verhouding der electromagnetische en electrostatische eenheden voor stroomsterkte of hoeveelheid electriciteit uitdrukt. De meening van Thomson als zou Maxwell onder $\psi$ eene functie verstaan hebben, die aan (32) en (33) voldoet, kan afkomstig wezen van Hertz, die in zijne dissertatie „Ueber die Induktion in rotierenden Kugeln" (1880) de vergelijkingen van Maxwell bezigt met dit verschil dat hij $V^2\psi$ [bij hem $\phi$ in niet-electromagnetische maat] als „die Potentialfunction der freien Electrizität" wil beschouwd hebben [1]). In de „Recent Researches on Electricity and Magnetism" (§ 437) blijkt bij Thomson de bovengenoemde dwaling nog altijd te bestaan. Ook Poincaré neemt haar over. Deze schrijft („Electricité et Optique" § 166): „La fonction $\psi$ est une fonction quelconque des coördonnées assujettie à la seule condition d'être uniforme. Maxwell admet que c'est le potentiel électrostatique résultant des masses électriques qui peuvent exister dans le champ."

Nergens geeft Maxwell te kennen, dat $\psi$ aan vergelijkingen als (32) en (33) zou voldoen. Veeleer hangt bij hem volgens § 612 en § 613 de ruimte- en vlaktelading met de diëlectrische verplaatsing $\mathfrak{D}$ $(f\,g\,h)$ samen door de vergelijkingen

$$(34)\ldots.\rho=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$$

---

1) Het verdient opmerking dat Hertz niet zegt dat hij de vergelijkingen van Maxwell onveranderd overneemt, zoodat eene vergissing bij hem niet behoeft te worden ondersteld. De vergelijking $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, welke bij Maxwell algemeen geldt, geldt bij hem, gelijk hij § 2 zegt, en met het oog op zijne opvatting omtrent de beteekenis van $V^2\psi$ ook niet anders mogelijk is, alleen voor stationaire stroomingen. — Hertz beroept zich op Jochmann, die (§ 8) de door Hertz gebezigde vergelijkingen uit de wet van Weber heeft afgeleid. Of Hertz zelf de wet van Weber aanneemt blijkt niet. — De splitsing van het veld in een electromagnetisch en een electrostatisch veld, zooals deze hier bij Hertz voorkomt, is niet in den geest van Maxwell, wel (zie Hoofdstuk II § 10) in den geest van Neumann.

en

$$(35) \ldots . \sigma = \vartheta_{n_1} + \vartheta_{n_2},$$

en volgens § 608 is de diëlectrische verplaatsing met de electromotorische kracht $A$ verbonden door de vergelijking

$$(36) \ldots . \vartheta = \frac{K}{4\pi} A$$

in isotrope lichamen.

Uit (34), (35) en (36) volgen (32) en (33) slechts dan, wanneer de componenten der electromotorische kracht geen andere termen bevatten dan die uit den potentiaal $\psi$ zijn afgeleid [1]).

§ 15. Er zijn geen voldoende gegevens om uit te maken wat Maxwell wèl bedoeld heeft. Eene gissing die mij waarschijnlijk voorkomt kan intusschen worden gemaakt. In de verhandeling „On Physical Lines of Force" (Phil. Mag. 1861), welke eene vergelijking bevat die grootendeels

---

[1]) G. Bakker („Théorie de l'Induction électrique". Arch. Néerl. II, 5, 1900) bewijst, dat $\psi$ in (26) de electrostatische potentiaal is Hij gaat uit van de stelling dat zich in elk electromagnetisch veld eene hoeveelheid electrostatische energie $^1/_2 \int \psi \rho d\tau$ bevindt. Er is geen reden om dit aan te nemen en het is niet in overeenstemming met wat Maxwell (§ 630 en § 631) over de electrostatische energie zegt. Deze heeft bij hem den vorm $^1/_2 \int \psi \rho d\tau$ alleen in een zuiver electrostatisch veld. Hij bewijst dat daarvoor ook is te schrijven $- ^1/_2 \int \left( f \frac{\partial \psi}{\partial x} + g \frac{\partial \psi}{\partial y} + h \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau$ en wordt er op die wijze toe geleid met loslating der afleiding aan te nemen, dat in een willekeurig electromagnetisch veld, waarin $A$ de electromotorische kracht is, de „electrostatische energie" de met het vorige niet strijdige maar daar geenszins uit voortvloeiende waarde $^1/_2 \int \left( A_x f + A_y g + A_z h \right) d\tau$ heeft. Deze uitdrukking bevat geen potentiaal meer.

met (26) overeenkomt (het eenige verschil is dat in plaats van $B$ is geschreven $\mu H$) wordt gezegd: „$\psi$ is a function of $(x\,y\,z\,t)$, which is indeterminate as far as regards the solution of the original equations, but which may always be determined in any given case from the circumstances of the problem. *The physical interpretation of $\psi$ is, that it is the electric tension at each point of space.*" Dit kan beteekenen, dat $\psi$ eene grootheid is, welke (evenals de electrostatische potentiaal in het electrostatisch veld) eene ponderomotorische kracht bepaalt. Deze onderstelling wint aan waarschijnlijkheid, wanneer men bedenkt dat in „Electricity and Magnetism" § 619 voor de eerste component der per volume-eenheid werkende ponderomotorische kracht is geschreven

$$(37) \ldots . X = B_z v - B_y w - e\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - m\frac{\partial\Omega}{\partial x_1},$$

waarin behalve de twee eerste termen van het tweede lid, die vervallen als door het beschouwde volume-element geen stroom loopt, en de vierde term, die vervalt zoo het niet magnetisch is, een term voorkomt die uitdrukt, dat de ponderomotorische kracht per eenheid van lading op het volume-element werkende uit den potentiaal $\psi$ is af te leiden. — Fitz-Gerald schrijft in plaats van (37)

$$(38) \ldots . X = B_z v - B_y w + eA_x - m\frac{\partial\Omega}{\partial x_1},$$

welke correctie na Maxwell's dood in den text is opgenomen, zonder dat gebleken was dat men hier met eene vergissing van Maxwell te doen had [1]).

Het blijft hierbij onzeker waarom naar Maxwell's

---

[1]) Het doet hier niet ter zake, dat (38) met de waarnemingen beter overeenkomt dan (37) daar ook bij beweging van een geladen lichaam door een magnetisch veld (b.v. bij de kathodenstralen) daarop eene ponderomotorische kracht blijkt te werken.

meening deze de ponderomotorische kracht bepalende potentiaal in (26) moet voorkomen.

§ 16. Wanneer $B$, $V$, en de snelheid $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t}\right)$ in elk punt op elk tijdstip gegeven zijn, zoo kan men vragen of de in (25) en (26) voorkomende vector $A$ in elk punt bepaald zal zijn, indien aan (26), behalve de reeds § 11 ingevoerde hypothese, dat de electriciteit onsamendrukbaar is, de vergelijkingen worden toegevoegd, die het verband tusschen stroomsterkte en electromotorische kracht uitdrukken, benevens wellicht eene voor de hand liggende onderstelling omtrent het verdwijnen der normale integraal van een der beschouwde vectoren over een vlak in het oneindige.

De bedoelde vergelijkingen zijn bij Maxwell (in isotrope lichamen, waarvan hier voortdurend sprake is)

$$(39) \ldots . u = CA_x + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial A_x}{\partial t}, \text{ enz.}$$

waarin $C$ en $K$ constanten zijn. In volmaakte geleiders is $K = 0$, in volmaakte diëlectrica $C = 0$. Indien men discontinuïteitsvlakken wegredeneert (hetgeen wij hier willen doen), heeft de tweede term van het tweede lid van (39) overal eene bepaalde beteekenis. De divergentie van den vector wiens eerste component $\left(C + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) A_x$ is, is volgens het zooeven gezegde nul. Volgens (26) is derhalve de divergentie van den vector $Q$, wiens eerste component $\left(C + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x}$ bedraagt, in elk punt bepaald. Wanneer $\psi'$ het verschil is van twee waarden die $\psi$ in eenzelfde punt hebben kan, zoo is de divergentie van den vector $Q'$, wiens eerste component $\left(C + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial x}$ is, overal nul.

Men heeft

$$(40)\ldots\ldots -\int\left[Q'_x\frac{\partial\psi'}{\partial x}+Q'_y\frac{\partial\psi'}{\partial y}+Q'_z\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right]d\tau=$$

$$=-\int\psi' Q'_n\,d\sigma+\int\psi'\left[\frac{\partial Q'_x}{\partial x}+\frac{\partial Q'_y}{\partial y}+\frac{\partial Q'_z}{\partial z}\right]d\tau.$$

Neemt men nu aan, dat $\int Q'_n\,d\sigma$ over een vlak in het oneindige nul is, zoo blijkt het eerste lid van (40) nul te zijn. D. w. z.

$$(41)\ldots\int C\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=-$$

$$-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int K\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Daar het eerste lid positief of nul is, kan de grootheid

$$(42)\ldots\ldots\frac{1}{8\pi}\int K\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$$

niet anders dan afnemen.

Wij willen een stationairen toestand beschouwen zooals b.v. bestaat, wanneer een volmaakt geleidende bol in een volmaakt diëlectricum met constante hoeksnelheid om een as wentelt, om welke de lijnen der magnetische inductie symmetrisch verdeeld zijn; er bestaat tusschen bol en diëlectricum een overgangslaag, welker hoeksnelheid zich nabij den bol aan de hoeksnelheid van dezen aansluit en aan haar buiten-oppervlak nul is; de bol heeft overal denzelfden geleidingscoëfficient $C$, het diëlectricum overal dezelfde diëlectriciteits-constante $K$. Het is trouwens duidelijk dat er voor niet-stationaire toestanden moeilijk een geval te bedenken is, waarin $B$, $V$ en de snelheid $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial y_1}{\partial t}\frac{\partial z_1}{\partial t}\right)$ in elk punt op elk tijdstip gegeven zijn. Nu is het tweede lid van (41) nul, dus ook het eerste, d. w. z. $\psi'$ is constant binnen den bol. Buiten den bol heeft men volgens (26) $\Delta\psi' = 0$, zoodat $\psi'$ hier verdeeld is als een electrostatische potentiaal. Hieruit is af te leiden dat in twee mogelijke gevallen dezelfde stroomen bestaan, doch dat de ladingen op het oppervlak van den bol verschillend kunnen zijn; het verschil der beide ladingsdichtheden is hierbij in elk punt van het boloppervlak even groot.

Uit de vergelijkingen (4), (5), (19), (21), (26), (34), (35), (36), (37), (39) is de voorstelling der afstandswerking geheel verdwenen. Onbevredigend is bij dit systeem van vergelijkingen het feit dat met de wet van het behoud van arbeidsvermogen geen rekening is gehouden. Het blijkt niet in hoeverre door die vergelijkingen aan de genoemde wet wordt voldaan.

§ 17. In de „Recent Researches" (§ 433 en volgende) bepaalt Thomson de functie $\psi$ in het boven beschreven geval van den met constante hoeksnelheid wentelenden volmaakt geleidenden bol. De lijnen der magnetische inductie zijn evenwijdig met de omwentelingsas, en de magnetische inductie heeft in elk punt binnen en buiten den bol dezelfde waarde. De overgangslaag, waarvan nu niet als in § 16 is ondersteld, dat $C$ en $K$ daarin geleidelijk van waarde veranderen [1]), doch alleen, dat de hoeksnelheid daarin continu afneemt, wanneer men zich verder van het middelpunt van den bol verwijdert, heeft evenals in § 16 den vorm van een bolschaal.

Thomson onderstelt dat een oppervlakte-lading alleen voorkomt aan de binnenbegrenzing der laag; deze bestaat

[1]) Deze onderstelling was trouwens in § 16 bij de behandeling van den stationairen toestand overbodig.

dus bij hem uit een volmaakt diëlectricum. Men kan vragen of (voor een oneindig dunne laag) dezelfde waarde wordt gevonden voor de vlakte-dichtheid in een punt van het buitenoppervlak der laag in de onderstelling dat de laag volmaakt geleidend is als bij de bovengenoemde onderstelling in het overeenkomstige punt der binnenbegrenzing door Thomson wordt gevonden. Thomson zegt (§ 439): „In the special case... when the layer of this medium is indefinitely thin, the results will be the same whether this medium is an insulator or conductor", doch weidt verder hierover niet uit. Wij willen dit hier nagaan.

Thomson stelt[1])

$$(43) \ldots\ldots \psi = \phi + \left(V_x \frac{\partial x}{\partial t} + V_y \frac{\partial y}{\partial t} + V_z \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

en bewijst dat binnen den bol, waar $K = 0$ en derhalve Div. $A = 0$, uit (26) volgt

$$(44) \ldots\ldots \Delta\phi = 0.$$

Is de richting der inductielijnen de positieve richting der $Z$-as, zoo wordt volgens (4)

$$(45) \ldots\ldots \begin{cases} V_x = -\,{}^1/_2\, By, \\ V_y = {}^1/_2\, Bx, \\ V_z = 0. \end{cases}$$

Is $\omega$ de hoeksnelheid zoo heeft men binnen den bol

$$(46) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -\,\omega y, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \omega x, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

---

[1]) De index 1 der coördinaten ($x_1\, y_1\, z_1$), die in (26) nog voorkomt, is in het vervolg weggelaten.

Substitutie dezer waarden in (26) levert op

$$(47)\dots\begin{cases} A_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ A_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ A_z = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Is $a$ de straal van den bol en $(b—a)$ de dikte der overgangslaag, die voorloopig eindig ondersteld is, zoo kan men binnen die laag nemen

$$(48)\dots\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -S.\left(b^3\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+y\right), \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -S.\left(b^3\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+x\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

waarin $S = -\dfrac{\omega a^3}{b^3 - a^3}$. Hier is $\omega$ de hoeksnelheid, $r$ de afstand van een punt tot het middelpunt van den bol.

Door substitutie van (45) en (48) in (26) blijken in de overgangslaag te gelden

$$(49)\dots\begin{cases} A_x = \dfrac{1}{2}\,S.B.\,b^3\,(x^2+y^2)\,\dfrac{\partial\frac{1}{r^3}}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \\ A_y = \dfrac{1}{2}\,S.B\;b^3\,(x^2+y^2)\,\dfrac{\partial\frac{1}{r^3}}{\partial y} - \dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \\ A_z = \dfrac{1}{2}\,S.B.b^3\,(x^2+y^2)\,\dfrac{\partial\frac{1}{r^3}}{\partial z} - \dfrac{\partial\phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Uit Div. $A = 0$ vindt men dat ook daar (44) geldt.

Buiten de bolschaal, waar het diëlectricum rust, gelden (47) en (44).

Een normale strooming kan voor $r = b$ niet plaats hebben. Dus is, voor $r = b$, $A_r = 0$ of volgens (49)

$$(50) \ldots \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r = b} = -\frac{3}{2} S.B. b^3 \left(\frac{x^2 + y^2}{r^4}\right)_{r = b}.$$

Noemen wij $\phi_1$ de waarde van $\phi$ voor $a > r$, $\phi_2$ die van $\phi$ voor $b > r > a$, $\phi_3$ die van $\phi$ voor $r > b$, en $\beta$ den hoek, dien $r$ met de positieve $Z$-as maakt, zoo is voor het laatste ook te schrijven

$$(51) \ldots \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)_{r = b} = -\frac{3}{2} S.B. b (1 - \cos^2 \beta).$$

Daar $A_r$ voor $r = a$ continu moet wezen, moet blijkens (47), die voor $a > r$ geldt, en (49), die voor $b > r > a$ geldt, $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ een sprong vertoonen voor $r = a$. Men moet hebben

$$(52) \ldots \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)_{r = a} = \frac{3}{2} S.B. \frac{b^3}{a^2} (1 - \cos^2 \beta).$$

Overal geldt (44); men mag dus, lettende op het feit, dat ten gevolge van (51) en (52) alle termen die $\cos \beta$ in eene andere macht dan de tweede bevatten, moeten wegvallen, schrijven

$$(53) \ldots \phi_1 = E r^2 (3 \cos^2 \beta - 1) + E',$$

$$(54) \ldots \phi_2 = \left(\frac{F''}{r^3} + F r^2\right) (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{F'''}{r} + F',$$

$$(55) \ldots \phi_3 = \frac{G''}{r^3} (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{G'''}{r} + G',$$

waarin alle $E$, $F$, en $G$ constanten zijn. Deze willen wij bepalen.

Daar in $\phi_1$, $\phi_2$ en $\phi_3$ in elk der drie gebieden eene onbepaalde constante moet voorkomen, welke noch voor de stroomcomponenten noch voor de ladingsdichtheden beteekenis heeft, mogen wij aannemen

1) dat $\phi_3$ in het oneindige verdwijnt,

2) dat in het punt op de $+Z$-as, waar $r=b$ is, $\phi_2=\phi_3$,

3) dat in het punt op de $+Z$-as, waar $r=a$ is, $\phi_1=\phi_2$.

Hieruit volgt in verband met (53), (54) en (55)

$$(56) \ldots . \quad G'=0,$$

$$(57) \ldots . \quad 2\,\frac{G''}{b^3}+\frac{G'''}{b}=\frac{2F''}{b^3}+2\,F\,b^2+\frac{F'''}{b}+F',$$

$$(58) \ldots . \quad 2\,Ea^2+E'=\frac{2\,F''}{a^3}+2\,F\,a^2+\frac{F'''}{a}+F'.$$

Uit (51) volgt de voorwaarde

$$(59) \ldots . \left(-\frac{3\,F''}{b^4}+2\,Fb\right)(3\cos^2\beta-1)-\frac{F'''}{b^2}=$$
$$=-\frac{3}{2}\,S.\,B.\,b\,(1-\cos^2\beta),$$

welke zich splitst in

$$(60) \ldots . -\frac{3\,F''}{b^4}+2\,Fb=\frac{1}{2}\,b\,S.\,B$$

en

$$(61) \ldots . \quad \frac{3\,F''}{b^4}-2\,Fb-\frac{F'''}{b^2}=-\frac{3}{2}\,b\,S.\,B.$$

Uit (52) volgt de voorwaarde

$$(62) \ldots . \, 2\,Ea\,(3\cos^2\beta-1)-\left(\frac{-3\,F''}{a^4}+2\,Fa\right)(3\cos^2\beta-1)+$$
$$+\frac{F'''}{a^2}=\frac{3}{2}\,S.\,B.\,\frac{b^3}{a^2}\,(1-\cos^2\beta),$$

welke zich splitst in

$$(63) \ldots . \, 2\,Ea+\frac{3\,F''}{a^4}-2\,Fa=-\frac{1}{2}\,S.\,B.\,\frac{b^3}{a^2}$$

en

$$(64)\ldots -2\,Ea-\frac{3\,F''}{a^4}+2\,Fa+\frac{F'''}{a^2}=\frac{3}{2}\,S.\,B.\,\frac{b^3}{a^2}.$$

Uit (60) en (61), of ook uit (63) en (64), volgt

$$(65)\ldots F'''=S.\,B.\,b^3.$$

De vergelijking (65) kan (61) en (64) vervangen.

Is $Q$ de totale lading van den bol, welke zich geheel op het buitenoppervlak der overgangslaag moet bevinden, zoo heeft men

$$(66)\ldots Q=-\frac{K}{4\pi}\int\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right]_{r=b}d\sigma,$$

waarbij over het genoemde boloppervlak wordt geïntegreerd. Substitutie van (55) in (66) levert op, daar bekend is

$$\int_0^\pi (3\cos^2\beta-1)\sin\beta\,d\beta=0,$$

$$(67)\ldots G'''=\frac{Q}{K}.$$

Wij hebben dus voor de 9 constanten die in (53), (54) en (55) voorkomen de 7 vergelijkingen (56), (57), (58), (60), (63), (65) en (67).

Uit deze vergelijkingen is af te leiden

$$(68)\ldots\left\{\begin{aligned}
&E=\frac{1}{20\,a^3\,b^5}\left[S.\,B.\,b^3\{5a^3(b^2-a^2)+4\,(b^5-a^5)\}+6\,(F'-E')a\,(b^5-a^5)\right],\\
&F=\frac{1}{20\,b^5}\left[S.\,B.\,b^3\,\{-9\,a^2+5\,b^2\}-6\,(F'-E')\,a^3\right],\\
&F''=-\frac{a^2}{10}\left[3\,S.\,B.\,b^3+2\,(F'-E')\,a\right],\\
&F'''=S.\,B.\,b^3,\\
&G'=0,\\
&G''=-\frac{Q}{2K}\,b^2+\frac{3}{4}\,S.\,B.\,b^3\,(b^2-a^2)+{}^1/_2\,b^3\,F'-{}^1/_2\,a^3\,(F'-E'),\\
&G'''=\frac{Q}{K}.
\end{aligned}\right.$$

Behalve de reeds ingevoerde voorwaarden, heeft men ook nog deze, dat (voor $r = a$ zoowel als voor $r = b$) de tangentieele component van $A$ continu moet zijn. Immers de snelheid verandert overal continu; volgens (24) en (25) — men kan n.l. in (24) met behulp van (4) de lijn-integraal vervangen door een oppervlakte-integraal over het vlak met $\lambda_1$ tot rand — is derhalve de integraal van $A$ langs een lijn, die een oneindig klein oppervlak begrenst en bij een der grensvlakken van de overgangslaag op dergelijke wijze gekozen is als de lijn $A\ B\ C\ D$ in fig. 15 (pag. 92), oneindig klein van dezelfde orde als het oppervlakje. Daaruit volgt de bedoelde voorwaarde door eene redeneering als op pag. 92 werd gevolgd.

De eerste termen van de uitdrukkingen (49) leveren geen bijdrage tot de tangentieele component van $A$, zoodat deze component, in de grenslaag evengoed als in den bol, alleen uit de afgeleide der functie $\phi$ in de bedoelde tangentieele richting (welke hier in het meridiaanvlak ligt) is te vinden.

Uit de vergelijkingen (53), (54) en (55) verkrijgt men derhalve de beide betrekkingen

$$(69) \ldots \quad \begin{cases} Ea^2 = \dfrac{F''}{a^3} + Fa^2, \\[2mm] \dfrac{G''}{b^3} = \dfrac{F''}{b^3} + Fb^2. \end{cases}$$

In verband met (68) vindt men hieruit

$$(70) \ldots \quad \begin{cases} E' = \dfrac{Q}{Kb} + S.B.\dfrac{b^2}{a}(b-a), \\[2mm] F' = \dfrac{Q}{Kb} - S.B.b^2. \end{cases}$$

Men verkrijgt dus

$$(71)\ldots\left\{\begin{aligned} E &= \frac{S.\,B.}{20\,a^3\,b^2}\Big[5\,a^3\,(b^2-a^2)-2\,(b^5-a^5)\Big],\\ F &= \frac{S.\,B.}{20\,b^2}\Big[-3\,a^2+5\,b^2\Big],\\ F'' &= -\frac{1}{10}\,S.\,B.\,a^2\,b^3,\\ G'' &= \frac{1}{4}\,S.\,B.\,b^3\,(b^2-a^2),\end{aligned}\right.$$

waarin nog steeds

$$(72)\ldots.S = -\frac{\omega\,a^3}{b^3-a^3};$$

terwijl voor de vergelijkingen (53), (54) en (55) moet worden geschreven

$$(73)\ldots\left\{\begin{aligned} \phi_1 &= Er^2\,(3\cos^2\beta-1)+\frac{Q}{K}\frac{1}{b}+S.\,B.\,\frac{b^2}{a}\,(b-a),\\ \phi_2 &= \left(\frac{F''}{r^3}+Fr^2\right)(3\cos^2\beta-1)+\frac{S.B.b^3}{r}+\frac{Q}{K}\frac{1}{b}-S.\,B.\,b^2,\\ \phi_3 &= \frac{G''}{r^3}\,(3\cos^2\beta-1)+\frac{Q}{Kr}.\end{aligned}\right.$$

Volgens (47), (49) en (73) bestaan er in den bol en in de overgangslaag stroomen.

Dat in de overgangslaag, wanneer deze geleidend is, stroomen moeten bestaan, is trouwens uit (49) onmiddellijk te zien, daar deze vergelijkingen voor $A=0$ met elkander strijden.

De dichtheid der lading in een punt van het buitenoppervlak der laag wordt bepaald door

$$(74)\ldots.\sigma_b = -\frac{K}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right]_{r=b}$$

of

$$(75)\ldots\ldots\sigma_b = \frac{3\,KG''}{4\pi\,b^4}\,(3\cos^2\beta - 1) + \frac{Q}{4\pi\,b^2}.$$

Elke stroomlijn ligt geheel in één meridiaanvlak. Wanneer men volgens (73) de aequipotentiaal-vlakken [1]) binnen den bol construeert, zoo ziet men dat de electriciteit voortdurend van den bol naar de overgangslaag stroomt en omgekeerd. De dubbele kegel die door $3\cos^2\beta - 1 = 0$ wordt voorgesteld deelt den bol in drie deelen; in het eene (nabij den aequator) stroomt de electriciteit b.v. van den bol naar de laag, in de beide andere (nabij de polen) in dat geval van de laag naar den bol.

Wij willen nu overgaan tot het geval dat de laag oneindig dun is. Volgens (72) wordt $S$ hierbij oneindig groot. Daaruit volgt dat $F$ en $F'$ oneindig groot worden. $\frac{F'}{r^3} + Fr^2$ blijft evenwel eindig. Er loopen in de laag stroomen van eindige sterkte, waarbij eene oneindig kleine hoeveelheid warmte ontwikkeld wordt.

$G''$ blijft eindig en verkrijgt de waarde

$$(76)\ldots\ldots G'' = -\frac{1}{6}\,B.\,\omega\,a^5.$$

Uit (75) volgt derhalve

$$(77)\ldots\ldots\sigma_b = \frac{Q}{4\pi\,a^2} - \frac{K}{8\,\pi}\,a\,B.\,\omega\,(3\cos^2\beta - 1).$$

Vergelijkt men deze ladingsdichtheid (voor het geval dat de totale lading $Q$ nul is) met de door Thomson in het geval dat de laag uit ~~dezelfde stof als het omgevend~~ diëlectricum een volmaakt bestaat gevonden waarde, zoo ziet men dat de hier gevonden

---

[1]) Omwentelings-hyperboloïden.

ladingsdichtheid even groot is als in het geval van Thomson.

Het vermoeden van Thomson, dat de aard der overgangslaag tot op zekere hoogte onverschillig is, wordt dus door de berekening bevestigd. De geldigheid der vergelijking (26) voor diëlectrica (welke geldigheid Thomson om andere redenen meent te moeten betwijfelen) is derhalve bij zijne berekening niet ondersteld.

## HOOFDSTUK IV.

---

### Theorie van Hertz.

§ 1. De theorie van Maxwell is door Hertz zoo gewijzigd en vereenvoudigd, dat zij tot een goed sluitend geheel is geworden. Hertz kent aan zijne theorie slechts waarde toe „vom Standpunkt der systematischen Ordnung aus", gelijk hij aan het einde van zijne „Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper" (1890) zegt. Evenals bij Maxwell is er bij hem in elk punt slechts ééne snelheid, zoodat men kan zeggen (Hoofdstuk III § 12 Noot) dat stof en aether zich gezamenlijk bewegen. „Die richtige Theorie", voegt hij er t. a. p. bij, „dürfte vielmehr eine solche sein, welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet". De reden waarom hij niet getracht heeft deze „richtige Theorie" te ontwikkelen is naar hij zegt deze, dat hij daartoe te veel willekeurige hypothesen zou hebben moeten opstellen.

Het blijkt niet of Hertz overhelde tot de meening, dat de aether, zooals de electronentheorie onderstelt, „absoluut" rust. Ik meen van niet; immers in den aanvang van de genoemde verhandeling zegt hij: „Die gleichzeitig eintretenden *Bewegungen des Aethers*.... können nach unserer Anschauung nicht ohne Einfluss sein und von diesen haben wir keine Kenntniss. Damit ist schon gesagt, dass ohne die Einführung willkürlicher Annahmen über die *Bewegung des Aethers* die aufgeworfene Frage (nl. de vraag of de theorie ook op bewegende lichamen van toepassing is) zur Zeit überhaupt nicht behandelt werden könne. Es lassen uns ferner die wenigen vorliegenden Andeutungen über die *Bewegung des Aethers* vermuthen, dass die gestellte Frage streng genommen zu verneinen sei. Es scheint nämlich aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Inneren der greifbaren Materie *sich* unabhängig von dieser *bewege*, etc." De tegenzin tegen het aannemen eener absolute rust, die uit deze woorden schijnt te blijken, kan afkomstig wezen van v. Helmholtz, die nog in 1894 [1]) (Ann. d. Phys. 53) eene theorie van aetherstroomingen ontwikkelde, en in 1881 in de „Zusätze" tot zijne „Erhaltung der Kraft" schreef: „Wenn eine Kraft abhängig gemacht wird von der absoluten Bewegung, d. h. von einer veränderten Beziehung einer Masse zu etwas, was nie Gegenstand einer möglichen Wahrnehmung werden kann, nämlich zum unterschiedslosen leeren Raum, so erscheint mir dies als eine Annahme, die die Aussicht auf vollständige Lösung der naturwissenschaftlichen Aufgaben aufgiebt."

In zijn laatste werk „Die Prinzipien der Mechanik" komt Hertz met een enkel woord op de hier besproken quaestie terug. Hij zegt („Vorwort des Verfassers"): „So ist.... der Versuch verfrüht, *die Bewegungsgleichungen des Aethers* auf die Gesetze der Mechanik zurückführen zu wollen, solange man sich nicht eindeutig darüber verständigt hat, was man mit diesem Namen (bedoeld is: m. d. N. „Gesetze der Mechanik") bezeichnet haben will."

§ 2. Er is derhalve verband tusschen de meeningen die

---

[1]) Eigenlijk 1893.

Hertz over de opstelling van eene „richtige Theorie" der electromagnetische verschijnselen had en de beschouwingen in zijne „Prinzipien der Mechanik." Een enkel woord over deze beschouwingen is daarom hier op zijn plaats.

„Alle Physiker", zoo begint zijn Vorwort, „sind einstimmig darin, dass es die Aufgabe der Physik sei, die Erscheinungen der Natur auf die einfachen Gesetze der Mechanik zurückzuführen. Welches aber diese einfachen Gesetze sind, darüber herrscht nicht mehr die gleiche Einstimmigkeit."

Merkwaardig is het dat Hertz meent te kunnen zeggen, dat alle physici omstreeks 1894 overeenstemden in de meening dat gestreefd moest worden naar een zelfde hun niet helder voor den geest staand doel. Men ziet echter gemakkelijk in, dat Hertz zich hier te absoluut uitdrukt. Zijne bedoeling zal veeleer geweest zijn, dat het wenschelijk ware dat alle physici omtrent het doel hunner wetenschap tot overeenstemming konden geraken. De „Prinzipien der Mechanik" moeten dan dienen om door vaststelling van de grondslagen der mechanica deze overeenstemming mogelijk te maken.

Over de vraag welk doel volgens Hertz de physici eendrachtig moeten nastreven wordt eenig licht verspreid door zijne voordracht „Ueber die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität" (1889), waar hij alzoo spreekt: „Der heutigen Physik liegt die Frage nicht mehr ferne, ob nicht etwa alles was ist aus dem Aether geschaffen (?) sei? *Diese Dinge sind die äussersten Ziele unserer Wissenschaft, der Physik.* Es sind... *die letzten* vereisten *Gipfel* (?) ihres Hochgeberges." Hij stelt verder de vraag of het ooit mogelijk zal zijn deze hoogste toppen te bereiken. „Wir wissen es nicht", zegt hij. Hij schijnt bijna te denken dat het mogelijk is.

Hier is van toepassing wat hij in dezelfde voordracht over een ander wetenschappelijk streven zegt: „Man mag über die Richtigkeit desselben denken wie man will, die Gesamtheit dieser Bestrebungen bildete ein in sich geschlossenes System voll wissenschaftlichen Reizes. *Wer einmal in den Zauberkreis desselben hineingeraten war*, *blieb in demselben gefangen*," — eene treffende uitspraak, in hare absoluutheid bijna vergelijkbaar met de aangrijpende woorden die Dante boven de poorten der hel schreef.

Deze voordracht van Hertz levert een merkwaardig voorbeeld op van het feit, dat wij de toovercirkels waarin anderen gevangen zijn soms vrij duidelijk kunnen onderscheiden en terzelfder tijd uit het oog verliezen dat wij zelf krachtens onze menschelijke natuur in het cordon onzer gevestigde meeningen min of meer zijn ingesloten. Vandaar tegenspraak en misverstand die door voortdurende wrijving van gedachten moeten worden opgeheven.

Zeker is het dat deze toovercirkels niet zóó onverbrekelijk zijn als Hertz beweert. Opmerking verdient het dat v. Helmholtz in het „Vorwort" dat hij bij het laatste (posthume) werk van Hertz voegde, voor het imperialistisch streven van zijn leerling geenerlei geestdrift aan den dag legt. In geheel anderen geest sprekende dan in sommige vroegere geschriften (zie Hoofdstuk III § 4) zegt hij: „Englische Physiker, wie Lord Kelvin in seiner Theorie der Wirbelatome, und Maxwell in seiner Annahme eines Systems von Zellen mit rotierendem Inhalt, die er seinem Versuch einer mechanischen Erklärung der elektromagnetischen Vorgänge zu Grunde gelegt hat, haben sich offenbar durch ähnliche Erklärungen besser befriedigt gefühlt, als durch die blosse *allgemeinste Darstellung* der Thatsachen und ihrer Gesetze, wie sie durch die Systeme der Differentialgleichungen der Physik gegeben wird. *Ich muss gestehen dass ich selbst bisher an dieser letzteren Art der Darstellung festgehalten und mich dadurch am besten gesichert fühlte.*"

§ 3. In zijne „Grundgleichungen der Electrodynamik" beoogt Hertz „die blosse Darstellung der Thatsachen und ihrer Gesetze."

Er is sprake van een stelsel van lichamen, waarin willekeurige bewegingen plaats hebben.

Zij $\mathfrak{E}$ de electrische, $\mathfrak{H}$ de magnetische kracht, $\mathfrak{K}$ de magnetische polarisatie, $\mathfrak{B}$ de magnetische inductie, $\mathfrak{D}$ de diëlectrische verplaatsing (bij Hertz is $4\pi\,\mathfrak{D}$ electrische polarisatie genoemd), $\mathfrak{C}$ de totale stroom, $\mathfrak{J}$ de geleidingsstroom, $\mathfrak{w}$ eene bewegingssnelheid. Evenals vroeger wordt het electromagnetische maatstelsel gebezigd. De theorie van Hertz onderstelt binnen het door hem beschouwde gebied van verschijnselen (zie § 4) de geldigheid der vergelijkingen

$$(1)\ldots\ldots \int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi \int \mathfrak{C}_n\, d\sigma$$

en

$$(2)\ldots\ldots \int \mathfrak{E}_s\, ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{K}_n\, d\sigma.$$

De beide eerste leden zijn geïntegreerd over een gesloten lijn, de beide tweede leden over een willekeurig door die lijn begrensd vlak. De magnetische polarisatie is door lineaire vergelijkingen met de magnetische kracht verbonden; in isotrope stoffen, die hier bijna voortdurend beschouwd worden, is zij $\mu\,\mathfrak{H}$, waarin $\mu$ dezelfde constante is als in Hoofdstuk III. De totale stroom in (1) bestaat uit geleidings- en diëlectrischen verplaatsingsstroom, zoodat men voor (1) ook kan schrijven

$$(3)\ldots\ldots \int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi \int \mathfrak{J}_n\, d\sigma + 4\pi \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n\, d\sigma.$$

In (2) en (3) moet, bij het afleiden naar den tijd, worden ondersteld, dat de gesloten lijn door de stofdeeltjes, waardoor zij loopt, wordt meegesleept. Hertz zegt: „Wo wir im Raume greifbare Materie nicht vorfinden, dürfen wir

< der Geschwindigkeit > jeden willkürlichen Werth beilegen, welcher mit den gegebenen Bewegungen an der Grenze des leeren Raums vereinbar und von gleicher Grössenordnung ist. Wir dürfen z. B. für < die Geschwindigkeit > diejenigen Werthe setzen, welche sich im Aether finden würden, wenn sich derselbe wie irgend ein beliebig gewähltes Gas bewegte". Deze uitspraak is waarschijnlijk te verklaren uit den wensch van Hertz (zie § 1) om de beweging van den aether niet nauwkeuriger te bepalen dan in zijne theorie volstrekt noodig is. Men mag intusschen, zal men steeds tot eene bepaalde uitkomst geraken, eene zoodanige willekeurige keuze niet doen. Wanneer een magneet in aether draait, zoo verkrijgt, als men een gesloten lijn beschouwt, die voor een gedeelte binnen den magneet ligt en zich kan vervormen en uitrekken, het tweede lid van (2), dus ook het eerste, een waarde die afhangt van de beweging die aan den aether buiten den magneet met het daarin liggende deel der lijn wordt toegeschreven. Evenals in Hoofdstuk III ligt het voor de hand hier eene oneindig dunne uit aether bestaande overgangslaag aan te nemen, hetgeen wij willen doen.

De vergelijking (1) of (3) komt voor rustende lichamen overeen met Maxwell's vergelijking (21) Hoofdstuk III; de divergentie van den stroom is nul.

De vergelijking (2) komt overeen met Maxwell's vergelijking (24) Hoofdstuk III met dit verschil, dat bij Hertz de magnetische polarisatie is geschreven, waar Maxwell de magnetische inductie schrijft. Wij willen voorloopig alleen isotrope lichamen beschouwen. Volgens (5) Hoofdstuk III valt de magnetische polarisatie met de magnetische inductie samen overal waar laatstgenoemde vergelijking geldt en waar de magnetisatie $I$ nul is. De beide vectoren vallen niet samen in werkelijk bestaande permanente magneten noch ook in ijzer en andere lichamen, welker magnetische toestand niet geheel bekend is, wanneer men overal de waarde der magnetische kracht en van een of eenige constanten kent. Van al deze lichamen zegt Hertz in de eerste zijner beide verhandelingen (§ 14) dat de theorie streng genomen op hen niet toepasselijk is. Ook § 1 heet het: „Gewisse Erscheinungen, z. B. die des permanenten Magnetismus.. erfordern, dass die.. magnetischen Zustände eines jeden Punktes durch mehr als eine Variable dargestellt werden. Solche Erscheinungen treten eben darum aus dem Rahmen unserer Betrachtung.... heraus." Evenwel beschouwt Hertz, om dergelijke lichamen niet geheel buiten bespreking te laten, een ideaal lichaam, het „volkomen weeke ijzer", en een ander ideaal lichaam, het „volkomen harde staal", welke beide de eigenschap bezitten, dat hun magnetische toestand volkomen bekend is, wanneer overal de magnetische kracht bekend is en wanneer eenige constante waarden zijn gegeven. Voor het volkomen week ijzer is de eenige constante die gegeven moet zijn, evenals bij andere paramagnetische lichamen, de grootheid $\mu$ (die in dat ijzer veel grooter is dan in de bedoelde andere lichamen). Voor het volkomen harde staal wordt aangenomen, dat $I$ overal eene onveranderlijke waarde heeft, en dat de vergelijking (5) Hoofdstuk III geldt, waarbij $\mu = 1$. Wij willen, evenals in Hoofdstuk III, onder „permanente magneten" lichamen verstaan die met het volkomen harde staal van Hertz overeenkomen behalve hierin dat $\mu$ in die lichamen elke waarde kan hebben[1]). De overige lichamen, die wij in het veld aanwezig denken, bezitten wat hun magnetischen toestand betreft de ideale eigenschap die Hertz aan het week ijzer toekent.

§ 4. De vergelijking (2) en de Maxwell'sche vergelijking

[1]) In deze „permanente magneten" (wellicht juister „ware magneten" te noemen) behoeft de magnetisatie $I$ niet met den tijd constant te blijven. Zie pag. 130.

$$(4) \ldots . \int \mathfrak{E}_s \, ds = - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n \, d\sigma$$

komen volgens het in § 3 gezegde met elkander overeen in lichamen, waarin geen magnetisatie bestaat.

Daar het vlak, waarover in het tweede lid van (2) wordt geïntegreerd, op de randlijn na willekeurig is, onderstelt (2), dat $\int \mathfrak{H}_n \, d\sigma$ over een willekeurig gesloten vlak geïntegreerd eene onveranderlijke waarde bezit, zoodat de divergentie der magnetische polarisatie overal eveneens onveranderlijk moet zijn Uit (5) Hoofdstuk III, ook te schrijven

$$(5) \ldots . \mathfrak{B}_x = \mathfrak{H}_x + 4\pi \, I_x,$$

en de daarbij behoorende vergelijkingen volgt, daar de divergentie der magnetische inductie bij Maxwell nul is,

$$(6) \ldots . \text{Div.} \, \mathfrak{H} = - 4\pi \, \text{Div.} \, I.$$

Ook de divergentie der magnetisatie moet dus, zal (2) kunnen gelden, overal onveranderlijk zijn. Hoogstens zou de vector $I$ zoo mogen veranderen als zou kunnen geschieden wanneer die vector de strooming in een onsamendrukbare vloeistof voorstelde. Eene zodanige verandering (waarbij gesloten $I$-lijnen aan de bestaande magnetisatie zouden worden toegevoegd) zou onwaarneembaar zijn [1]).

Deze beperking in de verandering der magnetisatie bestaat niet, wanneer men de vergelijking (2) door de vergelijking (4) vervangt, hetgeen wij in het vervolg doen willen. Door

---

[1]) Men moet in het oog houden dat de vector $I$ — die ook in § 3 in aansluiting aan Hoofdstuk III werd ingevoerd — evenmin als de vector $\mathfrak{B}$ bij Hertz voorkomt. Zie het vervolg dezer §. De onwaarneembaarheid van veranderingen van $I$ waarbij de divergentie van dien vector overal dezelfde blijft, pleit er voor om met Hertz slechts aan de divergentie van dien vector eene beteekenis toe te kennen.

deze wijziging worden de grenzen der theorie uitgebreid, zoodat zij willekeurige veranderingen der magnetisatie kan omvatten. Het moet intusschen opgemerkt worden dat, naar mate het gebied der verschijnselen waarop de theorie betrekking heeft ruimer genomen wordt, het tevens onzekerder wordt of waarneming en theorie op bevredigende wijze met elkander in overeenstemming zijn. Het streven van Hertz was er blijkbaar op gericht het aantal niet uit elkander definieerbare vectoren tot een minimum te beperken. Hij noemt eerst slechts de electrische en magnetische krachten. Electrische en magnetische polarisatie definieert hij met behulp van de vergelijkingen die hare evenredigheid met (in anisotrope stoffen: hare lineaire afhankelijkheid van) de electrische en magnetische kracht resp. uitdrukken. De geleidingsstroom wordt eveneens door hem *gedefinieerd* als een (in lichamen, die geen inwendige electromotorische kracht bezitten, zooals bij temperatuurverval of bij chemische veranderingen optreedt, welke electromotorische krachten hier niet beschouwd zullen worden) met de electrische kracht evenredige (in anisotrope stoffen: als eene door lineaire vergelijkingen met de electrische kracht verbonden) grootheid. Ook „electriciteit" en „magnetisme" voert hij *bij definitie* in. Ware electrische lading noemt hij per volume- of vlakte-eenheid $\frac{1}{4\pi}$ maal de divergentie der electrische polarisatie; vrije electrische lading per volume- of vlakte-eenheid $\frac{1}{4\pi}$ maal de divergentie der electrische kracht. Op geheel dezelfde wijze wordt uit de magnetische kracht en magnetische polarisatie de dichtheid van het per volume- of vlakte-eenheid aanwezige vrije of ware magnetisme bepaald. Uit (6) blijkt dat waar magnetisme volgens de theorie van Hertz slechts voorkomt in permanente magneten.

Hier zullen slechts de ware electriciteit en het ware magnetisme van Hertz worden beschouwd, en hierbij zal eenvoudig van electrische lading en magnetisme worden gesproken. In plaats van het magnetisme zal ook de vector $I$ kunnen worden gebezigd. De sterkte van den geleidingsstroom zal met de electrische (of electromotorische) kracht evenredig zijn als bij Hertz. Electrische en magnetische polarisatie zullen, waar niet het tegendeel wordt gezegd, beschouwd worden als met de electrische en magnetische kracht resp. evenredig. Wij schrijven

$$(7) \ldots . \quad u = \lambda \mathfrak{E}_x, \text{ enz.}$$

$$(8) \ldots . \quad \rho = \text{Div.}\ \mathfrak{D},$$

$$(9) \ldots . \quad m = \frac{1}{4\pi} \text{Div.}\ \mathfrak{B} = -\text{Div.}\ I,$$

waarin $\rho$ (bij oppervlakken $\sigma$) de dichtheid der electrische lading, $m$ het magnetisme per volume- of vlakte-eenheid voorstelt. $u$ is de eerste component van den stroom. $\lambda$ is een constante. Verder is

$$(10) \ldots . \quad \mathfrak{D} = K \mathfrak{E}_x,$$

waarin $K$ een constante is.

§ 5. Een verschil tusschen de vergelijkingen (2) en (4) bestaat in het volgende. Wordt een inductiestroom opgewekt in een draadring door het insteken van een magneet, zoo kan men, wanneer (4) geldt, het oppervlak met den draadring tot randlijn zóó kiezen, dat de magneet het bij zijne beweging doorboort; immers de normale component der magnetische inductie is binnen en buiten den magneet aan zijn oppervlak dezelfde, zoodat door elke oneindig kleine beweging, ook die waarbij de magneet het oppervlak doorboort, slechts een oneindig zwakke stroom wordt opgewekt. Geldt daarentegen (2), zoo zou, daar de normale component der magnetische polarisatie deze continuïteit niet vertoont, door een oneindig kleine beweging, waarbij de magneet het oppervlak doorboort, een stroom van eindige sterkte kunnen worden geïnduceerd. Derhalve moet, wanneer men (2) aanneemt, het beschouwde oppervlak zóó worden gekozen, of gedacht worden zich zóó te vervormen, dat de magneet het niet doorboort. Algemeener: bij toepassing van (2) moet het beschouwde oppervlak steeds zóó worden gekozen, dat er geen magnetisme doorheen gaat. Men kan dit verkrijgen door het oppervlak, althans voor zooverre het door magneten gaat, zich met die magneten te laten bewegen en vervormen, zoodat het steeds door dezelfde stofdeeltjes gaat. — Wij zullen bij toepassing van (4) het oppervlak zich evenzoo met de stof laten bewegen en vervormen. Noodig is dit echter hier, daar de divergentie der magnetische inductie nul is, alleen voor de randlijn.

Wanneer een gesloten vlak, geheel of gedeeltelijk binnen magneten gelegen, zich met die magneten vervormt, blijft volgens het zooeven gezegde de hoeveelheid magnetisme (bij magneten, die hier beschouwd worden) binnen dat vlak onveranderd. Volgens (9) kan men dit uitdrukken door te zeggen dat $\int I_n \, d\sigma$ over het gesloten vlak met den tijd niet verandert. Wanneer men — Hertz spreekt hierover niet — zich het magnetisme denkt als bestaande uit positieve en negatieve zeer dicht bij elkander gelegen ladingen van gelijke grootte, zoo ligt het voor de hand $I_n \, d\sigma$ voor elk vlakte-elementje afzonderlijk bij de vervorming onveranderlijk te onderstellen. Deze laatste onderstelling heeft volgens de theorie zooals Hertz die inkleedt geen bepaalden zin, daar bij hem (zie § 4) slechts de divergentie van $I$ een beteekenis heeft.

§ 6. De vergelijkingen (3) en (2) kunnen ook als volgt worden geschreven

$$(11) \ldots . \int \mathfrak{H}_s \, ds = 4\pi \int \mathfrak{J}_n \, d\sigma + 4\pi \int \underline{\dot{\mathfrak{D}}}_n \, d\sigma$$

en

$$(12) \ldots . \int \mathfrak{E}_s \, ds = - \int \underline{\dot{\mathfrak{B}}}_n \, d\sigma .$$

Hoe de vectoren $\underline{\dot{\mathfrak{D}}}$ en $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ afhangen van $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{B}$ en van de beweging van het beschouwde medium, waaraan $d\sigma$ deelneemt, blijkt als volgt.

Hebben de punten van het medium de verplaatsingen $q$, en is $\mathfrak{A}$ een met tijd en plaats veranderlijke vector, zoo is

$$(13) \ldots . \delta \{ \mathfrak{A}_n \, d\sigma \} = \underline{\delta \mathfrak{A}}_n \, d\sigma ,$$

waarin $\underline{\delta \mathfrak{A}}$ een vector blijkt te zijn, onafhankelijk van grootte en richting van $d\sigma$, welks waarde als volgt is te bepalen.

$$\delta \{ \mathfrak{A}_n \, d\sigma \} = \delta \mathfrak{A}_x . \cos x n . d\sigma + \mathfrak{A}_x \, \delta (\cos x n . d\sigma) + \ldots .$$

$$= \left[ \delta_0 \mathfrak{A}_x + \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} q_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} q_y + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} q_z \right) \right] \cos x n \, d\sigma +$$

$$+ \mathfrak{A}_x \, \delta (d\sigma_{yz}) + \ldots ,$$

waarin $\delta_0$ betrekking heeft op de verandering in een vast punt. $d\sigma_{yz}$ is de projectie van $d\sigma$ op het $Y$-$Z$-vlak.

$$\delta (d\sigma_{yz}) = d\sigma_{yz} \left( \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial q_y}{\partial x} d\sigma_{zx} - \frac{\partial q_z}{\partial x} d\sigma_{xy} .$$

Dus

$$\underline{\delta \mathfrak{A}}_x = \delta_0\, \mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} q_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} q_y + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} q_z + \mathfrak{A}_x \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) -$$

$$- \mathfrak{A}_y \frac{\partial q_x}{\partial y} - \mathfrak{A}_z \frac{\partial q_x}{\partial z} = q_x \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{A}_x q_y - \mathfrak{A}_y q_x) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{A}_z q_x - \mathfrak{A}_x q_z) + \delta_0\, \mathfrak{A}_x.$$

Dus

$$(14) \ldots . \underline{\delta \mathfrak{A}} = \delta_0\, \mathfrak{A} + q.\ \mathrm{Div.}\, \mathfrak{A} + \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{A}.\, q].$$

$\delta$ wordt eene verandering per tijdseenheid als $q$ eene snelheid is. Dus

$$(15) \ldots . \underline{\dot{\mathfrak{D}}} = \dot{\mathfrak{D}} + \rho.\ \mathfrak{w} + \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{D}.\, \mathfrak{w}],$$

waarin $\dot{\mathfrak{D}}$ de verandering van $\mathfrak{D}$ per tijdseenheid voorstelt in een niet medebewegend punt.

Evenzoo

$$(16) \ldots . \underline{\dot{\mathfrak{B}}} = \dot{\mathfrak{B}} + \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{B}.\, \mathfrak{w}],$$

waarbij gebruik is gemaakt van Div. $\mathfrak{B} = 0$.

Uit (1) is af te leiden

$$(17) \ldots . \mathrm{Rot.}\, \mathfrak{H} = 4\pi\, \mathfrak{C},$$

waarin volgens (15)

$$(18) \ldots . \mathfrak{C} = \mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{C}_c + \mathfrak{R}.$$

Hierin stelt $\mathfrak{J}$ den geleidings-, $\dot{\mathfrak{D}}$ den verschuivings-, $\mathfrak{C}_c = \rho\, \mathfrak{w}$ den convectie-, $\mathfrak{R} = \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{D}.\, \mathfrak{w}]$ den z. g. Röntgen-stroom voor [1]).

[1]) Dat elk dezer 4 stroomen magnetische werking heeft, is door Eichenwald (Ann. d. Phys. 11. 1903, „Ueber die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im electrostatischen Felde") zeer bevredigend aangetoond. Hierbij geldt echter de vergelijking (15) niet onveranderd: zij moet worden gewijzigd zooals de electronentheorie verlangt. Zie over deze wijziging het Naschrift.

Evenzoo volgt uit (4) in verband met (16)

$$(19) \ldots . \mathrm{Rot.}\, \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} - \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{B}.\, \mathfrak{w}].$$

Bij Hertz komt in de met (19) analoge vergelijking een term voor die de divergentie bevat der magnetische polarisatie. Van dezen term heet het bij hem, dat hij „als eine durch convectiv bewegten Magnetismus erregte elektrische Kraft gedeutet werden und zur Erklärung gewisser Erscheinungen der unipolaren Induction herangezogen werden muss." Uit het in § 4 gezegde is intusschen duidelijk, dat de vergelijking (19), waarin een zoodanige term ontbreekt, tot geheel dezelfde uitkomsten moet voeren.

§ 7. Daar de vergelijking (4) of (19) overeenkomt met de vergelijking (24) van Hoofdstuk III, kan uit (19) niet anders gevonden worden dan wat ook volgens de aldaar gevolgde methode van Thomson kan worden berekend.

In Hoofdstuk III werd een bol beschouwd draaiende in een veld, waarin de lijnen van magnetische inductie uniform waren verdeeld. Er was geen sprong in de tangentieele component der magnetische inductie nabij het oppervlak van den (weekijzeren) bol. De $\mu$ had dus binnen en buiten den bol dezelfde waarde.

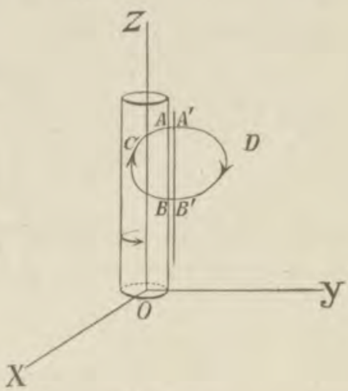

Fig. 17.

Hier willen wij een rondom symmetrischen magneet beschouwen (fig 17), om de $Z$-as draaiende met de constante hoeksnelheid $\omega$. Het omringend medium draaie met de constante hoeksnelheid $\omega'$ in dezelfde richting. Er moet een overgangslaag worden aangenomen, zoodat de hoeksnelheid overal continu verandert. Deze laag (dikte A A′) is aan de rechterzijde der fig. voorgesteld. Beschouwt men nu een gesloten lijn B C A A′ D B′, zoo zal deze bij de draaiing eene vormverandering ondergaan. De lijntjes A A′ en B B′ worden uitgerekt en de integraal der magnetische inductie over het door de gesloten lijn omvatte oppervlak verandert. Uit (4) is af te leiden

$$(20)\ldots\ldots \int \mathfrak{E}_s\, ds = \frac{\omega - \omega'}{2\pi}\Big[\textit{inductie door het door } A\ B \textit{ beschreven cylindervlak van buiten naar binnen}\Big].$$

Hierbij is geïntegreerd over de baan in de door pijlen aangegeven richting. „Inductie door" is geschreven voor „integraal der magnetische inductie over". Men kan ook schrijven

$$(21)\ldots\ldots \int \mathfrak{E}_s\, ds = \frac{\omega - \omega'}{2\pi}\Big[\textit{inductie door de vlakken der door } A \textit{ en } B \textit{ beschreven cirkels, van binnen naar buiten}\Big],$$

Draait de magneet in aether, zoo kan men in het tweede lid van (20) ook schrijven [*aantal door A B of A D B bij eene geheele wenteling gesneden magnetische krachtlijnen*]. Men ziet dat dit overeenkomt met het volgens de theorie van Neumann gevondene (Hoofdstuk III § 5).

Is het veld vóórdat de magneet of het week-ijzeren lichaam draait gegeven, zoo wordt het natuurlijk, wanneer een sluitdraad is aangebracht, door de opgewekte stroomen eenigszins gewijzigd.

Dat het oorspronkelijke veld evenzoo gewijzigd wordt als de sluitdraad ontbreekt en er geen stroomen zijn, blijkt als volgt. De magneet verkrijgt op zijn oppervlak ladingen van de orde $(\omega - \omega')$. Hierdoor ontstaat een convectiestroom van de orde $(\omega - \omega')^2$. Eene verandering van dezelfde orde ontstaat hierdoor in den loop der inductielijnen. Hierdoor komt weder eene lading van de orde $(\omega-\omega')^3$ op het oppervlak, enz. Natuurlijk moeten opdat deze berekening geoorloofd zij deze ladingen eene convergente reeks vormen. Bij de hoeksnelheden, die wij aan magneten geven kunnen, is dit zeker het geval, en behoeft zelfs met ladingen van hooger orde dan $(\omega-\omega')$ geen rekening te worden gehouden.

§ 8. Wij willen een gelijkmatig gemagnetiseerden bol beschouwen waarin $\mu=1$ (fig. 18), draaiende met constante hoeksnelheid $\omega$. De magnetisatie $I$ loope in de richting der negatieve $Z$-as. De Aarde wordt hier als zulk een bol beschouwd; de noordpool bevindt zich dan in B. Gevraagd wordt de electromotorische kracht in A B A (pijlen), wanneer A op den aequator ligt. De sluitdraad B A draait niet mede.

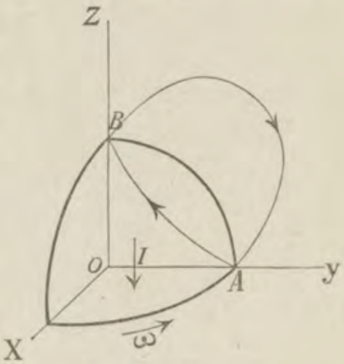

Fig. 18.

Deze electromotorische kracht is

$$(22)\dots\int\limits_{ABA}\mathfrak{E}_s\,ds=\frac{\omega}{2\pi}\left[\textit{inductie door het aequatorvlak van boven naar beneden}\right].$$

De inductie binnen den bol is als volgt te berekenen. Uit (9) blijkt, dat magnetisme zich alleen op het oppervlak van den bol bevindt. De magnetische potentiaal is

$$(23)\dots\; P=\iint\frac{I_n}{r}\,d\sigma,$$

geïntegreerd over het boloppervlak. Men verkrijgt $P$ door de som te nemen der N e w t o n'sche potentialen van twee bollen met dichtheden $D = \frac{I}{dz}$ en $-D$, waarvan de eerste met den gegeven bol samenvalt en de tweede een middelpunt O′ op de $Z$-as heeft, waarbij O O′ $= dz$. Zie fig. 19. De potentiaal van den tweeden bol in het beschouwde punt $P$ is gelijk aan dien van den eersten (met het omgekeerde teeken) in $P'$, waarbij $P' P = dz$ evenwijdig is met $O O'$.

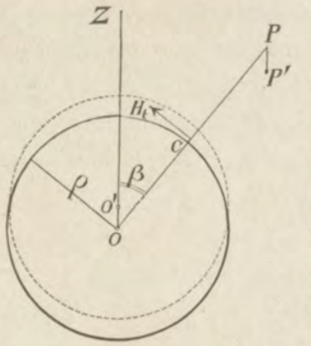


Fig. 19.

Zoo vindt men wanneer $P$ buiten den bol ligt uit (23)

$$(24) \ldots \; P = -\frac{4\pi \, I \rho^3}{3 R^2} \cos\beta,$$

waarbij $O P = R$, terwijl $\rho$ de straal van den bol is en $\beta$ de hoek tusschen $O P$ en $O Z$. — Voor den potentiaal in een punt $P^1$ binnen den bol vindt men

$$(25) \ldots \; P_1 = -\frac{4\pi \, Iz}{3}.$$

Hieruit volgt binnen den magneet

$$(26) \ldots \begin{cases} H_x = 0, \\ H_y = 0, \\ H_z = \frac{4\pi I}{3}, \end{cases}$$

dus

$$(27) \ldots \; B_{-z} = H_{-z} + 4\pi I = \frac{8\pi I}{3}.$$

De vergelijking (22) geeft

$$(28) \ldots \int_{ABA} \mathfrak{E}_s \, ds = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{8\pi^2 \, I\rho^2}{3}.$$

Bij de Aarde is $\omega = \dfrac{2\pi}{24.60^2}$ en $2\pi\rho = 4.10^9$.

$I$ willen wij berekenen uit de waarde 0,2, welke als grootte der horizontale component van de magnetische kracht in een punt boven het oppervlak der Aarde waar $\beta = 45°$ kan worden aangenomen. De horizontale component is te nemen als $H_t$ in de fig. Uit de waarde van $P$ volgt

$$(29)\ldots\ \begin{cases} H_x = -\dfrac{4\pi\, I\, \rho^3\, z\, x}{R^5}, \\ H_y = -\dfrac{4\pi\, I\, \rho^3\, z\, y}{R^5}, \\ H_z = \dfrac{4\pi I \rho^3}{R^5}\left[\dfrac{R^2}{3} - z^2\right]. \end{cases}$$

Hieruit wordt gevonden voor een punt in het $X$-$Z$-vlak

$$(30)\ldots\ H_t = \left(\frac{x H_z - z H_x}{\rho}\right)_{R=\rho}$$

of

$$(31)\ldots\ 0{,}2 = \frac{4\pi\, Ix}{3\rho} \text{ voor } x = \tfrac{1}{2}\rho\sqrt{2}.$$

Men kan hieruit vinden

$$(32)\ldots\ I = 0{,}07.$$

De vergelijking (28) levert nu op

$$(33)\ldots\ \int\limits_{ABA} \mathfrak{E}_s\, ds = 86.10^{11},$$

d. i. 86000 Volt. Dit stemt voldoende overeen met de waarde die Lord Kelvin opgeeft (Phil. Mag. 1851 „Mechanical Theory of Electrolysis"), n. l. 88000 Daniell.

§ 9. Beschouwt men in het geval van fig. 17 of fig. 18 een gesloten lijn, die geheel binnen of geheel buiten den draaienden magneet ligt, zoo blijkt $\int \mathfrak{E}_s \, ds$ voor zulk een lijn nul te zijn. De electrische kracht heeft dus binnen den magneet een potentiaal; evenzoo daarbuiten. Men kan b.v. in het geval van fig. 18 dezen potentiaal binnen den magneet definieeren als de lijn-integraal der electrische kracht van het beschouwde punt naar het punt $B$ met eene constante waarde $C$ vermeerderd; hierbij moet de lijn van het punt naar $B$ geheel binnen den magneet loopen. Buiten den magneet kan men den potentiaal definieeren als de lijn-integraal der ~~magnetische~~ kracht van electrische het beschouwde punt naar het oneindige. Men kan hierbij $C$ zoo kiezen dat de beide potentialen in $B$ even groot zijn. In een willekeurig punt op het oppervlak van den bol vertoont de potentiaal een sprong; anders toch zou $\int \mathfrak{E}_s \, ds$ ook nul zijn voor een lijn die gedeeltelijk binnen den bol ligt.

Draait een magneet zonder sluitdraad, zoo zijn er binnen dien magneet (als wij gelijk overal in dit Hoofdstuk aannemen dat de grenslaag uit een diëlectricum bestaat) geen electrische krachten. Immers voor elke gesloten lijn binnen den magneet geldt $\int \mathfrak{E}_s \, ds = 0$. Gesloten stroomen kunnen dus binnen den magneet niet bestaan. Evenmin kunnen er ongesloten stroomen bestaan, daar tot in het onbepaalde toenemende opeenhoopingen van electriciteit, hetzij binnen den magneet hetzij op zijn grensvlak, hiervan het gevolg zouden wezen.

De door (21) gegeven waarde van $\int \mathfrak{E}_s \, ds$ bepaalt dus in dit geval het verschil der waarden die de buitenpotentiaal in twee punten op het oppervlak van den magneet heeft. Men houde hierbij in het oog, dat het geen verschil maakt of de lijn-integraal wordt uitgestrekt over de lijnelementen die zich in de grenslaag bevinden of niet, daar de electrische kracht bij onderstelling overal eene eindige waarde heeft.

Het veld is volkomen bepaald, wanneer gegeven zijn 1) alle ladingen $\rho$ in diëlectrica (waarbij men ook vlakteladingen eenvoudigheidshalve als ruimteladingen kan opvatten), 2) de totale lading van elken conductor in het veld; onder deze conductoren, welke geen van alle van plaats veranderen, kunnen magneten zijn die om hun symmetrie-assen draaien.

Dit blijkt uit de vergelijking

$$(34)\ldots\int\phi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]d\tau=$$

$$=-\int K\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,d\sigma-\int K\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Het veld is begrensd door een conductor op potentiaal nul. Deze kan in het oneindige liggen en heeft ook dan een eindige lading.

Neemt men in (34) voor $\phi$ het verschil van twee mogelijke waardenstelsels van den potentiaal, zoo is $\phi$ voor alle conductoren (ook voor de beschouwde draaiende magneten) constant. Voor de conductoren blijkt $\int \mathfrak{E}_s\, ds$ nul te zijn voor elke gesloten lijn daarbinnen, en besluiten wij evenals boven dat de binnenpotentiaal constant is. Een verschil tusschen binnen- en buitenpotentiaal (hier eenvoudig potentiaal genoemd) bestaat bij de conductoren niet. Bij de draaiende magneten wordt door (21) de potentiaal in elk punt (op een constante na) bepaald. De eerste term van het tweede lid van (34) neemt dus den vorm $-\phi\int K\frac{\partial\phi}{\partial n}\,d\sigma$ voor elken conductor of magneet aan, en dit verdwijnt, daar de totale lading voor elk hunner gegeven is. Het eerste lid van (34) verdwijnt, daar de lading in elk punt van het diëlectricum gegeven is. Er blijft eene vergelijking over die eischt, dat $\phi$ constant is, dus nul, daar in het oneindige de potentiaal deze waarde heeft. De potentiaal is dus door het gegevene ondubbelzinnig bepaald.

Evenzoo is het veld bepaald wanneer gegeven zijn 1) alle ladingen in diëlectrica, 2) de potentiaal van elken conductor, 3) de potentiaal in één bepaald punt bij elken draaienden magneet. Immers de eerste term van het tweede lid verdwijnt nu daar $\phi = 0$ wordt in elk punt van elken draaienden magneet of conductor. Het eerste lid verdwijnt als in het vorige geval, zoodat ook nu de potentiaal ondubbelzinnig bepaald blijkt te zijn.

§ 10. Wij willen weder de Aarde beschouwen (fig. 19, § 8). Wanneer men aanneemt dat de atmosfeer tot op zekere hoogte geheel aan de beweging der Aarde deelneemt, zoo ziet men, door een gesloten lijn te beschouwen, geheel binnen het medebewegende deel der atmosfeer gelegen, dat aldaar een potentiaal bestaat. Volgens pag. 141 is er binnen de Aarde geen electrische kracht. Beschouwt men vervolgens een gesloten lijn, gedeeltelijk binnen de Aarde gedeeltelijk binnen het medebewegend deel der atmosfeer gelegen, zoo blijkt dat de potentiaal in alle punten op het oppervlak der Aarde evengroot moet wezen [1]). Om te berekenen hoe groot hierbij de electrische kracht in elk punt buiten de Aarde, en hoe groot de ladingsdichtheid in elk punt op het oppervlak der Aarde en elders wordt, zou men de beweging en verdere gesteldheid van hoogere deelen der atmosfeer moeten kennen. Men zou hieromtrent verschillende onderstellingen kunnen maken, en de uitkomsten der berekening kunnen vergelijken met hetgeen

---

[1]) Van een rustenden sluitdraad (zooals § 8 werd ingevoerd) is hier geen sprake.

nabij het aardoppervlak in de atmosfeer wordt waargenomen.

Hier willen wij alleen het fictieve geval beschouwen dat de Aarde omgeven is door een niet mededraaiend medium met overal dezelfde diëlectriciteitsconstante $K$. De Aarde is weder beschouwd als een gelijkvormig gemagnetiseerde bol, waarin $I = 0{,}07$.

Zij $V_A$ de buitenpotentiaal aan het aardoppervlak op op den aequator. In een ander punt $C$ der Aarde is hij dan, gelijk blijkt uit de grootte der inductie door het aequatorvlak en door het bij dat punt behoorende met den aequator evenwijdige vlak,

$$(35) \ldots\ldots V_\rho = V_A + \frac{4\pi}{3} \omega I \rho^2 \cos^2 \beta.$$

De potentiaal voldoet buiten de Aarde, daar de afwezigheid van ruimteladingen is ondersteld, aan $\Delta V = 0$ en moet den vorm hebben

$$(36) \ldots\ldots V = \frac{D}{R^3} (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{D'}{R}.$$

Eene additieve constante is niet aanwezig, daar de potentiaal op oneindigen afstand nul is. Uit de overeenstemming, die voor $R = \rho$ tusschen (35) en (36) moet bestaan, volgen voor de constanten $D$ en $D'$ de waarden

$$(37) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{4\pi}{9} \omega I \rho^5, \\[2ex] D' = \rho \left( V_A + \frac{4\pi}{9} \omega I \rho^2 \right), \end{array} \right.$$

zoodat

$$(38) \ldots\ldots V = \frac{4\pi}{9} \frac{\omega I \rho^3}{R} \left[ \frac{\rho^2}{R^2} (3 \cos^2 \beta - 1) + 1 \right] + \frac{\rho}{R} V_A.$$

Volgens (8) en (9) is de ladingsdichtheid op het oppervlak der Aarde bepaald door

$$(39) \ldots\ldots \sigma = -K \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)_{R = \rho}$$

of

$$(40)\ldots.\frac{1}{K}\sigma=\frac{4\pi}{9}\omega I\rho[9\cos^2\beta-2]+\frac{V_A}{\rho}.\ ^{1})$$

Wil men dat de totale lading nul zij, zoo kan men uit (40) vinden

$$(41)\ldots.V_A=-\frac{4\pi}{9}\omega I\rho^2.$$

Invulling der waarden die $\omega$, $I$ en $\rho$ voor de Aarde hebben geeft

$$(42)\ldots.V_A=-2{,}8.10^{12}.$$

De potentiaal aan den aequator zou dus bedragen -- 28000 Volt. Aan elk der polen vindt men 56000 Volt. De ladingsdichtheid aan den aequator zou voor $K=1$ worden $-1{,}3.10^4$, overeenkomend met die op een bol van 10 c.M. straal geladen tot ongeveer $-\frac{1}{1000}$ste Volt, en door een medium met $K=1$ omgeven. De ladingsdichtheid aan de polen zou, voor $K=1$, $2{,}7.10^4$ bedragen.

Het blijkt verder bij de gemaakte onderstellingen, dat de potentiaal aan den aequator op 1000 M. boven den grond 13 Volt hooger moet zijn dan aan het oppervlak. Neemt men daarentegen aan, dat de Aarde een totale van nul verschillende lading bezit, van zoodanig bedrag dat de potentiaal aan den aequator nul wordt, zoo zou aldaar op 1000 M. boven den grond de potentiaal 9 Volt bedragen.

§ 11. Onderstellen wij dat de beschouwde bol omgeven

---

¹) De formule (40) komt, bij substitutie van (41), overeen met de waarde die Thomson („Recent Researches" § 434) vindt in een week-ijzeren bol, waarin $B$ overal dezelfde waarde heeft als hier.

is door een grooteren rustenden geleidenden bol (straal $\rho_1$). De bollen zijn concentrisch. Bij Hertz hebben slechts potentiaalverschillen eene bepaalde beteekenis n. l. die van integralen der electrische kracht langs een gegeven baan. Wij willen in de ruimte tusschen beide bollen de lijnintegraal der electrische kracht van een punt $P$ naar een willekeurig punt van den grooten bol den potentiaal in $P$ noemen. Op den kleinen bol geldt evenals boven (35). In de ruimte tusschen de twee bollen vindt men voor den potentiaal

$$(43)\ldots.\ V = \left(\frac{D}{R^3} + D''' R^2\right)(3\cos^2\beta - 1) + \frac{D'}{R} + D''.$$

De grensvoorwaarden geven voor de 4 constanten de waarden

$$(44)\ldots.\ \begin{cases} D = \dfrac{4\pi}{9}\,\omega\, I \dfrac{\rho^5\,\rho_1^5}{\rho_1^5 - \rho^5}, \\[2ex] D' = \dfrac{\rho\,\rho_1}{\rho_1 - \rho}\left[V_A + \dfrac{4\pi}{9}\,\omega\, I\,\rho^2\right], \\[2ex] D'' = -\dfrac{\rho}{\rho_1 - \rho}\left[V_A + \dfrac{4\pi}{9}\,\omega\, I\,\rho^2\right], \\[2ex] D''' = -\dfrac{4\pi}{9}\,\omega\, I \dfrac{\rho^5}{\rho_1^5 - \rho^5}. \end{cases}$$

Is de diëlectriciteitsconstante van het medium tusschen de twee bollen $K$, zoo wordt de ladingsdichtheid op den binnenbol volgens (39)

$$(45)\ldots.\ \sigma_\rho = K\left[(3\cos^2\beta - 1)\left\{\frac{3\,D}{\rho^4} - 2\,D'''\rho\right\} + \frac{D'}{\rho^2}\right].$$

De totale lading op dien bol is nul voor $D' = 0$.

De ladingsdichtheid op den grooten bol (aan de binnenzijde) bedraagt

$$(46)\ldots.\ \sigma_{\rho_1} = -K\left[(3\cos^2\beta - 1)\left\{\frac{3\,D}{\rho_1^4} - 2\,D'''\rho_1\right\} + \frac{D'}{\rho_1^2}\right].$$

Ook deze verdwijnt voor $D' = 0$. Het was trouwens van te voren bekend, dat de totale lading aan de binnenzijde van den grooten bol op het teeken na gelijk moest worden aan de totale lading van den kleinen bol.

Voor $D' = 0$ is

$$(47) \ldots .\ V_A = - \frac{4\pi}{9} \omega I \rho^2 .$$

Het potentiaalverschil tusschen den aequator van den kleinen bol en den grooten bol, is dus onafhankelijk van $\rho_1$, den straal van dezen laatsten. Evenzoo is derhalve het potentiaalverschil tusschen den grooten bol en een willekeurig punt van den kleinen bol onafhankelijk van $\rho_1$. — Dat dit niet meer geldt wanneer $D' \gtrless 0$, ziet men onmiddellijk door het geval te beschouwen waarin beide bollen rusten.

Stel b. v. dat een ongeladen bol van 10 c.M. straal binnen een grooteren rustenden bol wentelt met eene snelheid van 100 omdraaiingen per seconde. Gevraagd wordt de grootte van het potentiaalverschil tusschen de pool van den kleinen bol en den grooten bol, hetwelk volgens (35) en (47) wordt voorgesteld door

$$(48) \ldots .\ V_{\text{pool}} = + \frac{8\pi}{9} \omega I \rho^2 .$$

De kleine bol draait evenals boven om een as evenwijdig met de inductielijnen binnen dien bol in een zin die met de richting tegengesteld aan die der inductielijnen samenhangt volgens de regel van den kurketrekker. De groote bol is een geleider, zoodat de potentiaal aldaar constant moet zijn.

Met de aangegeven waarden van $\omega$ en $\rho$ vindt men

$$(49) \ldots .\ V_{\text{pool}} = + 17{,}6 . 10^4 \ I .$$

Voor $I = 10$ [1]) zou dus het bedoelde potentiaalverschil 176 Millivolt bedragen. Het schijnt aannemelijk, dat het veld niet merkbaar verandert, als men, ten einde den potentiaal aan de pool van den draaienden bol te bepalen, een geïsoleerden draad vandaar langs de as laat loopen door den omhullenden bol.

Maakt men een oogenblik contact tusschen de pool van den draaienden bol en den grooten bol, zoo zal $V_{\text{pool}} = 0$ worden. Wij willen berekenen hoeveel electriciteit hierbij door den sluitdraad gaat.

Volgens (35) en (44) is

$$(50) \ldots . \quad D' = \frac{\rho \rho_1}{\rho_1 - \rho} \left[ V_\rho + \frac{4\pi}{9} \omega I \rho^2 (1 - 3\cos^2 \beta) \right],$$

ook te schrijven

$$(51) \ldots . \quad D' = \frac{\rho \rho_1}{\rho_1 - \rho} \left[ V_{\text{pool}} - \frac{8\pi}{9} \omega I \rho^2 \right].$$

Door de sluiting wordt

$$(52) \ldots . \quad D' = - \frac{8\pi}{9} \omega I \frac{\rho^3 \rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

De totale lading op den binnenbol is $4\pi K D'$. Deze lading bedraagt dus

$$(53) \ldots . \quad \mathrm{E}_\rho = - \frac{32\pi}{9} \omega I K \frac{\rho^3 \rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

De kleine bol was aanvankelijk ongeladen. Dus is eene hoeveelheid electriciteit $-E_\rho$ bij de sluiting van den kleinen naar den grooten bol gestroomd. — Is in het boven besproken numerieke voorbeeld de groote bol van 20 cM. straal, en de diëlectriciteitsconstante van het medium tusschen

---

[1]) Volgens Gérard („Leçons sur l'électricité" I. Ch. IV) is in een stuk staal van 1 c.M². doorsnede en 10 c.M. lengte hoogstens te verkrijgen $I = 225$.

de beide bollen 1, zoo bedraagt deze hoeveelheid ongeveer $\frac{1}{7} 10^7 I$. Zij is voor $I = 10$ gelijk aan de hoeveelheid, die zich bevindt op een in aether geplaatsten bol van 10 cM. straal, geladen tot een potentiaal van $\frac{1}{7}$de Volt. Men kan deze hoeveelheid tot een willekeurig bedrag vergrooten door $\rho_1$ tot $\rho$ te doen naderen. De door den grooten bol ontvangen lading gaat naar de binnenzijde; immers de lading op de binnenzijde van den grooten bol moet numeriek gelijk zijn aan de lading van den kleinen bol.

§ 12. Een belangrijke wijziging door Hertz in de theorie van Maxwell aangebracht bestaat in het feit, dat hij ter berekening van de ponderomotorische krachten de wet van het behoud van arbeidsvermogen vooropstelt. Ook neemt hij voor de energie niet geheel dezelfde waarde aan als Maxwell.

Het komt mij de moeite waard voor deze quaestie eenigszins uitvoerig te bespreken Hierbij zal ook de vervanging van het magnetisme door electrische kringstroomen ter sprake komen.

Volgens Maxwell § 389 is de potentieele energie van magneten, geplaatst in een veld waarin de magnetische kracht een potentiaal heeft,

$$(54) \ldots \quad U = -\int (\mathfrak{H}_x I_x + \mathfrak{H}_y I_y + \mathfrak{H}_z I_z)\, d\tau,$$

waarbij de integratie uitgestrekt is over alle magneten.

De magnetisatie hangt hierbij met de hoeveelheden magnetisme, waarvan uitgegaan wordt, samen door (9). Potentieele energie wil hier zeggen een zoodanige grootheid, dat de arbeid der ponderomotorische krachten op de magneten werkend bedraagt $-\delta U$. Als magnetische kracht is in (54) voor elken magneet de uitwendige magnetische kracht te nemen.

Het blijkt (§ 632 of Appendix I na § 646), dat men ook kan schrijven voor de magnetische energie van een geheel aan magneten te danken veld

$$(55)\ldots.\ U = -{}^1/_2 \int (\mathfrak{H}_x I_x + \ldots.)\, d\tau,$$

waarbij overal de totale magnetische kracht is genomen. $\partial U$ toch heeft volgens (55) dezelfde waarde als volgens (54).

In § 633 wordt deze $U$ getransformeerd. Maakt men bij deze transformatie van de vergelijking (5) gebruik, zoo vindt men uit (55)

$$(56)\ldots.\ U = \frac{1}{8\pi} \int \mu\, \mathfrak{H}^2\, d\tau.$$

Maxwell bezigt in plaats van (5) eene vergelijking waarin $\mathfrak{H}$ in plaats van $\mathfrak{B}$ of $\mu\,\mathfrak{H}$ is geschreven [1]) en komt tot de waarde $U = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2\, d\tau$, welke door niemand wordt aangenomen.

Voor de kinetische energie van stroomen wordt door Maxwell (§ 634) gevonden

$$(57)\ldots.\ T = {}^1/_2 \int (V_x u + V_y v + V_z w)\, d\tau,$$

waarin $V$ de vector-potentiaal is.

Uit

$$(58)\ldots.\ 4\,\pi u = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z},\ \text{enz.}$$

---

[1]) Zie Hoofdstuk III § 8. Daar hij verderop (zie § 14 (76)) een vorm voor deze energie aanneemt, waarin wèl een $\mu$ onder het $\int$-teeken voorkomt, zou men kunnen vermoeden dat hij in § 633 de bedoelde vergelijking voor de magnetische inductie als een bijzonder geval van de meer algemeene vergelijking (5) heeft beschouwd.

en uit het feit, dat de rotatie van den vector-potentiaal in het beschouwde veld (waarin alléén stroomen aanwezig zijn) $\mu \mathfrak{H}$ bedraagt, vindt men nu

$$(59)\dots\; T = \frac{1}{8\pi}\int \mu\, \mathfrak{H}^2\, d\tau.$$

Deze electrokinetische energie wordt dus voorgesteld door dezelfde uitdrukking als de boven vermelde potentieele energie in een veld, waarin zich alléén magneten bevinden.

De arbeid der ponderomotorische krachten is in het geval der stroomen $\delta T$, zooals Maxwell (§ 580) uit de vergelijking van Lagrange besluit. De stroomsterkten zijn hierbij — ook verderop in dit Hoofdstuk — constant ondersteld.

Beschouwt men nu aan de eene zijde eenige magnetische dubbellagen, aan de andere zijde de daarmede aequivalente electrische stroomen (d w. z. de stroomen die, als het medium in beide gevallen overal hetzelfde is, overal dezelfde magnetische inductie teweegbrengen), zoo kan men bewijzen, dat deze electrische stroomen dezelfde ponderomotorische krachten ondervinden als de dubbellagen. Dit volgt uit

$$(60)\dots\; -\delta U = \delta T,$$

eene vergelijking, die men bewijzen kan (zie § 13) door $U$ en $T$ uit te drukken met behulp van de magnetische inductie. Als bij Cohn) „Das elektromagnetische Feld" pag. 300) wordt gevonden

$$(61)\dots\; T = \frac{1}{8\pi}\int \frac{\mathfrak{B}^2}{\mu}\, d\tau$$

en

$$(62)\dots\; U = -\frac{1}{8\pi}\int \frac{\mathfrak{B}^2}{\mu}\, d\tau + 2\pi \int \frac{I^2}{\mu}\, d\tau,$$

waaruit (60) volgt. Immers $I$ is overal constant ondersteld.

§ 13. De vraag rijst of het omtrent de aequivalentie van stroomen en dubbellagen gezegde stand houdt in een anisotroop medium, waarbij in de vergelijking (5) is te schrijven

$$(63) \ldots \mathfrak{B}_x = \mu_{11}\mathfrak{H}_x + \mu_{12}\mathfrak{H}_y + \mu_{13}\mathfrak{H}_z,$$

en evenzoo

$$\mathfrak{B}_y = \mu_{21}\mathfrak{H}_x + \mu_{22}\mathfrak{H}_y + \mu_{23}\mathfrak{H}_z,$$

$$\mathfrak{B}_z = \mu_{31}\mathfrak{H}_x + \mu_{32}\mathfrak{H}_y + \mu_{33}\mathfrak{H}_z.$$

Hierbij is als bij Hertz ondersteld

$$(64) \ldots \mu_{12} = \mu_{21}, \text{ enz.}$$

Uit (63) en de bijbehoorende vergelijkingen is af te leiden

$$(65) \ldots \mathfrak{H}_x = \mu'_{11}\mathfrak{B}_x + \mu'_{12}\mathfrak{B}_y + \mu'_{13}\mathfrak{B}_z, \text{ enz.},$$

waarbij

$$(66) \ldots \mu'_{12} = \mu'_{21}, \text{ enz.}$$

De vergelijking (55) kan in het hier beschouwde geval door eene dergelijke transformatie als in § 12 werd bedoeld overgaan in

$$(67) \ldots U = \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\,d\tau.$$

Evenzoo kan men, (57) aannemende en onderstellende dat de rotatie van den vector-potentiaal de magnetische polarisatie is, op dergelijke wijze als in het geval der isotrope media vinden

$$(68) \ldots T = \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \ldots)\,d\tau,$$

zoodat de formeele overeenstemming tusschen $U$ en $T$ bewaard blijft.

Men kan nu inderdaad bewijzen, evenals in § 12, dat de som van $U$ en $T$, wanneer $I$ constant is, eene constante waarde bezit. Wij willen hiertoe ter onderscheiding de $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{K}$, die bestaan in het geval dat in het veld alleen stroomen aanwezig zijn, met accenten voorzien.

Bewezen moet worden

$$(69) \ldots\ldots \int (\mathfrak{H}_x \mathfrak{K}_x + \ldots\ldots + \mathfrak{H}'_x \mathfrak{K}'_x + \ldots\ldots)\, d\tau = \text{const.}$$

De vergelijkingen (63), (64), (65) en (66) gelden ook voor de $\mathfrak{H}'$ en $\mathfrak{K}'$.

De $\mathfrak{B}$ is in beide gevallen overal dezelfde. Men heeft (vector-vergelijking)

$$(70) \ldots\ldots \mathfrak{B} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + 4\pi I.$$

Daar $\mathfrak{B}$ solenoidaal verdeeld is en $\mathfrak{H}$ een potentiaal heeft is

$$(71) \ldots\ldots \int (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \ldots\ldots)\, d\tau = 0.$$

Het eerste lid van (69) verandert door er het eerste lid van (71) tweemaal af te trekken in

$$(72) \ldots\ldots \int (\mathfrak{H}_x [\mathfrak{K}_x - \mathfrak{B}_x] + \ldots\ldots + \mathfrak{B}_x [\mathfrak{H}'_x - \mathfrak{H}_x] + \ldots\ldots)\, d\tau.$$

Hierin is

$$(73) \ldots\ldots \mathfrak{H}_x [\mathfrak{K}_x - \mathfrak{B}_x] = -4\pi\, \mathfrak{H}_x I_x$$
$$= 4\pi I_x [\mu'_{11} (4\pi I_x - \mathfrak{B}_x) + \mu'_{12} (4\pi I_y - \mathfrak{B}_y) + \mu'_{13} (4\pi I_z - \mathfrak{B}_z)].$$

Verder is in (72)

$$(74) \ldots\ldots \mathfrak{B}_x [\mathfrak{H}'_x - \mathfrak{H}_x] = 4\pi\, \mathfrak{B}_x [\mu'_{11} I_x + \mu'_{12} I_y + \mu'_{13} I_z].$$

Door substitutie van deze en dergelijke waarden gaat (72) over in

$$(75) \ldots\ldots 16\pi^2 \int (\mu'_{11} I_x^2 + \mu'_{22} I_y^2 + \mu'_{33} I_z^2 + \\ + 2\mu'_{12} I_x I_y + 2\mu'_{23} I_y I_z + 2\mu'_{31} I_z I_x) \, d\tau,$$

zoodat aan (69) voldaan is. *Q. E. D.*

Het verdient opmerking dat bij de laatste substitutie de vergelijkingen (66) moesten gebezigd worden. Wanneer $\mathfrak{K}$ eene willekeurige functie van $\mathfrak{H}$ was, zouden (69) en (60) niet gelden. Men zou wellicht algemeen kunnen nagaan, welk het verband tusschen magnetische inductie, magnetische polarisatie en magnetisatie wezen moet, opdat voor aequivalente stroomen en magnetische dubbellagen de vergelijking (60) geldig zij, zoodat zij dezelfde ponderomotorische krachten ondervinden.

§ 14. In § 637 en § 638 (Magnetic and Electrokinetic Energy compared") gaat Maxwell verder. Hij beweert dat het z.g. magnetisme moet geacht worden te bestaan uit de aequivalente stroomen; natuurlijk moet hierbij (daar eene voortdurende warmte-ontwikkeling in de magneten niet bestaat) gedacht worden aan dubbellaagjes en aequivalente stroomen van moleculaire afmetingen. „We shall find", zegt hij, „that we obtain a perfectly consistent system only when we abandon that theory [the old theory of magnetism] and adopt Ampère's theory of molecular currents." Alle magnetische energie zou hierbij eigenlijk electrokinetische energie zijn; behalve de potentieele electrostatische energie zou in het veld alleen aanwezig zijn de kinetische energie (59). Eigenlijk schrijft Maxwell

$$(76) \ldots\ldots T = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \ldots\ldots) \, d\tau;$$

dit gaat echter, daar geen magnetisatie bestaat in (59) of (61) over. (Er worden in deze § weder alleen isotrope stoffen beschouwd.)

Neemt men aan dat dit waar is, zoo zal, wanneer de magnetische energie met $\delta T$ toeneemt, de arbeid der ponderomotorische krachten $+\delta T$ bedragen. Daar de energie $2\,\delta T$ niet zonder verbruik van een even groote hoeveelheid energie in het systeem kan ontstaan, zal, wanneer geen stroomen in het veld zijn, door de magneten eene hoeveelheid $-\ 2\,\delta T$ van eene andere soort energie moeten worden geleverd. Bij *gewone* electrische stroomen wordt aan de wet van het behoud van arbeidsvermogen voldaan doordat, bij gelijk verbruik van chemische energie, de ontstaande hoeveelheid warmte grooter of kleiner is dan die hoeveelheid chemische energie. Hoe heeft echter deze compensatie plaats in het geval der hypothetische met geen warmte-ontwikkeling gepaard gaande stroompjes? Alvorens te zeggen, dat de hypothese van Ampère in zijne theorie uitnemend past (ja zelfs dat alléén bij invoering van die hypothese een goed sluitend geheel wordt verkregen), moest Maxwell op deze vraag antwoord geven. Dit doet hij niet; het is derhalve onjuist dat het hem gelukt zou zijn magnetische en electrische verschijnselen op bevredigende wijze door middel eener moleculaire theorie onder één gezichtspunt te vereenigen. — Men kan op dergelijke wijze aantoonen dat in een veld waarin zich magneten en stroomen bevinden, wanneer men het magnetisme wegredeneert, eene compensatie van de bovenbedoelde soort zou moeten plaats hebben.

Zulk eene compensatie behoeft *niet* plaats te hebben, wanneer men voor de energie de waarde (59) neemt en het magnetisme als zoodanig laat bestaan. Er zouden wellicht proeven te verzinnen zijn ten doel hebbende het onderzoek van de vraag of eene zoodanige compensatie in de natuur bestaat. Aangetoond is haar bestaan niet.

Te recht maakt Hertz geen verschil tusschen eene *potentieele* energie die bestaan zou in het geval dat slechts magneten, en eene *kinetische* energie die bestaan zou in het geval dat slechts stroomen in het veld zijn. Immers, beschouwt men een veld, waarin zich magneten en stroomen bevinden, zoo ware het gekunsteld de magnetische energie in twee soorten te verdeelen. Mogelijk zou een zoodanige splitsing wel zijn, daar — zie b. v. Cohn p. 282 — de totale magnetische energie de som is van de energiën, die resp. alleen aan de magneten en alleen aan de stroomen zijn te danken.

§ 15. Wij willen derhalve de formule van Hertz voor de magnetische energie aannemen en evenzoo de formule voor de electrische energie

$$(77) \dots . E = \frac{1}{8\pi} \int K \mathfrak{E}^2 \, d\tau .$$

welke ook bij Maxwell voorkomt. Maxwell noemt het potentieele energie, bij Hertz is deze nadere omschrijving onnoodig.

Hertz („Grundgleichungen für bewegte Körper" § 6) onderstelt ter berekening der bij de magnetische energie behoorende ponderomotorische krachten, dat de verschillende volume-elementen drukken op elkander uitoefenen. Hij laat het systeem van aanvangs- in eindtoestand overgaan in twee stadia. In het eerste stadium, dat alleen beschouwd behoeft te worden, sleepen de stoffelijke volume-elementen hunne krachtlijnen mede. Juister gezegd: men kan de magnetische polarisatie verdeelen in een deel waarvan de divergentie nul is, en een deel dat alleen bestaat waar magnetisme is en aldaar met de dichtheid van dat magnetisme samenhangt volgens (9); de volume-elementen sleepen in het eerste stadium hun magnetisme mede en tevens de lijnen, waardoor het eerste deel der magnetische polarisatie kan worden voorgesteld. Hierbij treedt geen inductie op, daar elke gesloten lijn, steeds door dezelfde stofdeeltjes gaande, eenzelfde aantal lijnen blijft omvatten, terwijl door het medebewegend vlak met die lijn tot rand geen magnetisme gaat. In het tweede stadium hebben geen stoffelijke bewegingen plaats, zoodat geen ponderomotorische arbeid verricht wordt.

Op deze wijze vindt Hertz voor een isotroop blijvend lichaam, waarin $\mu$ onafhankelijk van de dichtheid is, voor de bij de magnetische energie behoorende spanningen

$$(78)\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}^2 - 2\,\mathfrak{H}_x^2), \\ Y_y &= \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}^2 - 2\,\mathfrak{H}_y^2), \\ Z_z &= \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}^2 - 2\,\mathfrak{H}_z^2), \\ X_y &= Y_x = -\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y, \\ Y_z &= Z_y = -\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z, \\ Z_x &= X_z = -\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x. \end{aligned} \right.$$

Niets belet in plaats van deze spanningen de daarmede correspondeerende krachten te beschouwen, die per volume-eenheid werken, nl.

$$(79)\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} f_x &= -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z}\right), \\ f_y &= -\left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_y}{\partial z}\right), \\ f_z &= -\left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right), \end{aligned} \right.$$

waarvoor in verband met (78) wordt gevonden

$$(80) \ldots . \; f_x = m\,\mathfrak{H}_x + \mu\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{C}_y - \mu\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{C}_z - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2\,\frac{\partial \mu}{\partial x}, \text{ enz.}$$

Evenzoo volgt uit de electrische energie voor de per volume-eenheid werkende kracht

$$(81) \ldots . \; \phi_x = e\,\mathfrak{E}_x + \frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) -$$

$$- \frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2\,\frac{\partial K}{\partial x}, \text{ enz.}$$

Door Poincaré („Electricité et Optique" § 325) wordt op andere wijze de wet van het behoud van arbeidsvermogen toegepast, en in plaats van $f$ voor de uit de magnetische energie volgende per volume-eenheid werkende kracht $f'$ gevonden

$$(82) \ldots . \; f'_x = m_s\,\mathfrak{H}_x + \mathfrak{H}_z\,\mathfrak{C}_y - \mathfrak{H}_y\,\mathfrak{C}_z, \text{ enz.}$$

waarin

$$(83) \ldots . \; m_s = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right]$$

de dichtheid is van het schijnbare magnetisme.

Poincaré beschouwt hierbij slechts onvervormbare lichamen als hebbende een $\mu \gtrless 1$. Wat de krachtcomponenten

$$m\,\mathfrak{H}_x - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2\,\frac{\partial \mu}{\partial x}, \text{ enz.}$$

en

$$m_s\,\mathfrak{H}_x, \text{ enz.}$$

betreft, hiervan is door Cohn („Das elektromagnetische

Feld" p. 101) aangetoond, dat zij voor alle onvervormbare lichamen, die zich in een medium waarin $\mu = 1$ bevinden, dezelfde resultanten en momenten opleveren, zoodat de uitkomst van Poincaré wat dit betreft met die van Hertz niet strijdt, maar alleen minder algemeen is. Wat echter het overig deel der krachten (82) betreft, hierin ontbreekt bij Poincaré ten onrechte de factor $\mu$. Eene dergelijke opmerking geldt voor de vergelijking die Poincaré in plaats van (81) vindt. De wijze waarop Poincaré de wet van het behoud van arbeidsvermogen toepast is dan ook niet onbedenkelijk. Hij schrijft de verandering, die de magnetische energie in het geheele stelsel per tijdseenheid ondergaat, in den vorm

$$(84) \ldots . \int U_0 \, d\tau + \int (f'_x \mathfrak{w}_x + f'_y \mathfrak{w}_y + f'_z \mathfrak{w}_z) \, d\tau$$

en zegt (§ 324): „La première intégrale exprime l'énergie fournie par la pile moins l'énergie dépensée sons forme de chaleur de Joule, effet Peltier, etc. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que ce terme est indépendant de la vitesse de la matière. Il a donc même expression que dans le cas des milieux en repos .... La seconde intégrale représente le travail des forces extérieures que nous avons invoquées pour équilibrer les actions mécaniques produites par le champ." Het blijkt bij de verdere berekening niet, dat de totale aangroeiing der magnetische energie inderdaad door Poincaré zóó gesplitst zou wezen, dat het eerste deel geen en het tweede deel uitsluitend arbeid van ponderomotorische krachten bevat [1]).

§ 16. Wij zullen thans het in geval van electromagnetische

---

[1]) Cohn („Das elektromagnetische Feld" p. 518) vindt voor de ponderomotorische kracht eene (meer algemeene) uitdrukking, die (in het hier beschouwde geval) met (80) overeenkomt.

draaiing werkende moment berekenen. De kracht (81), die niet bestaat zoolang de toestel rust, blijve hierbij buiten beschouwing. De toestel bestaat uit een magneet, symmetrisch rondom de Z-as en om deze draaibaar. Een stroom van gegeven sterkte loopt door magneet en sluitdraad. De dichtheid van het magnetisme is gegeven; het bestaan van den stroom heeft daarop geen invloed, immers voor de magnetische polarisatie die bij den stroom behoort geldt Div. $\mathfrak{M} = 0$. De termen met $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ en $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, welke in de overgangslaag bestaan, leveren geen bijdrage tot het moment op. Dat moment bedraagt

$$(85) \ldots\ldots M_z = \int d\tau \Big[ m\,(x\,\mathfrak{H}_y - y\,\mathfrak{H}_x) + \\ + \mu \left\{ \mathfrak{C}_z\,(x\,\mathfrak{H}_x + y\,\mathfrak{H}_y) - \mathfrak{H}_z\,(x\,\mathfrak{C}_x + y\,\mathfrak{C}_y) \right\} \Big],$$

over den geheelen magneet te integreeren;
ook te schrijven

$$(86) \ldots\ldots M_z = \int d\tau \left[ mr\,\mathfrak{H}_s + \mu r\,(\mathfrak{H}_r\,\mathfrak{C}_z - \mathfrak{H}_z\,\mathfrak{C}_r) \right],$$

waarin de richtingen $r$ en $s$ genomen zijn zooals fig. 20 aangeeft. Daar voor $\mathfrak{C} = 0$ de magneet niet in beweging raakt, is voor $\mathfrak{H}_s$ alleen de aan den stroom te danken component der magnetische kracht te schrijven; deze is met $\mathfrak{C}$ evenredig. Daar de „magneet" evenmin in beweging raakt als hij niet magnetisch is, zoo is in $\mathfrak{H}_z$ en $\mathfrak{H}_r$ alleen de bij den magneet behoorende magnetische kracht te nemen. Het geheele moment is dus met de stroomsterkte evenredig.

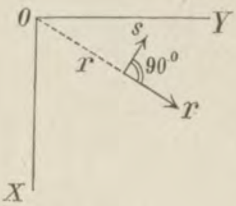

Fig. 20.

Wij kunnen het moment splitsen in twee deelen. Het eerste, dat overeenkomt met wat vroeger werd genoemd het door den stroom op den magneet uitgeoefende moment, bedraagt, wanneer voor $d\tau$ wordt geschreven $dr\,ds\,dz$,

$$(87)\ldots.\ M_{1_z} = \int dz \int m\,r\,d\,r \int \mathfrak{H}_s\,ds.$$

Hierin is voor $\mathfrak{H}$ uitsluitend de aan den stroom te danken magnetische kracht te nemen. Wij willen het geval beschouwen, dat niet meer dan één lineaire stroomdraad bestaat; men kan zoo men wil gemakkelijk overgaan tot de beschouwing van een willekeurige stroomverdeeling. $\int \mathfrak{H}_s\,ds$ is uitgestrekt over cirkels om de $Z$-as, en levert de waarde 0 op voor alle cirkels, die de stroombaan niet omvatten, daarentegen de waarde $4\pi i$ voor alle overige cirkels. Men verkrijgt derhalve

$$(88)\ldots.\ M_{1_z} = 4\,\pi i \int dz \int m\,r\,d\,r,$$

waarbij de integraties uitgestrekt zijn over dat deel van den magneet, dat begrepen is tusschen zijn oppervlak en het omwentelingsoppervlak dat men verkrijgt door de stroombaan om de $Z$-as te laten draaien. De totale hoeveelheid magnetisme in dat deel bedraagt

$$(89)\ldots.\ \mathfrak{M} = \int dz \int 2\pi\,m\,r\,d\,r,$$

zoodat

$$(90)\ldots.\ M_{1_z} = 2i\,\mathfrak{M},$$

in overeenstemming met Hoofdstuk I § 15.[1])

---

[1]) Wanneer men, als in Hoofdstuk IV § 5 — niet volgens de theorie van Hertz — aanneemt, dat het magnetisme bestaat uit positieve en negatieve zeer dicht bij elkander gelegen ladingen van gelijke grootte, zoo verschilt $\mathfrak{M}$ blijkbaar slechts hierdoor van 0,

Hierin is voor $\mathfrak{M}$ ook te schrijven de negatieve integraal der ruimte-divergentie van de magnetisatie $I$, uitgestrekt over het bedoelde volume, + de integraal van $I_n$ (normaal naar buiten) over het buitenoppervlak (magneetoppervlak) van dat volume uitgestrekt. Hieruit volgt dat men voor $\mathfrak{M}$ ook de integraal mag nemen van $I_n$ over het door de stroombaan beschreven omwentelingsoppervlak, waarbij de normaal ten opzichte van het meergenoemde volume naar binnen loopt.

Het tweede deel van het moment, overeenkomend met wat vroeger werd genoemd het door den magneet op den stroom uitgeoefend moment, bedraagt

$$(91)\ldots\; M_{2_z} = \int d\tau.\mu r(\mathfrak{H}_r\, \mathfrak{C}_z - \mathfrak{H}_z\, \mathfrak{C}_r).$$

Beschouwen wij weder het omwentelingsoppervlak dat men verkrijgt door de stroombaan om de $Z$-as te doen wentelen; zij, evenals boven, $n$ de normaal aan dat oppervlak en $dl$ een element van den meridiaan daarvan. Voor (91) blijkt te kunnen worden geschreven

$$(92)\ldots\; M_{2_z} = \frac{i}{2\pi} \int 2\pi r\, dl.\mu \mathfrak{H}_n,$$

De som van $M_{1_z}$ en $M_{2_z}$ is gelijk aan het product van $\frac{i}{2\pi}$ met de integraal van $(4\pi I_n + \mu \mathfrak{H}_n)$ of $\mathfrak{B}_n$, genomen

---

dat een zeker aantal magnetische moleculen met één pool binnen, met de andere buiten het in den text bedoelde volume liggen. Ook de met $M_{1_z}$ correspondeerende electromotorische kracht $-2\omega\mathfrak{M}$ kan dan slechts bestaan, doordat de bedoelde magnetische moleculen den genoemden stand hebben. Deze gaan met één pool door het vlak dat de stroombaan tot rand heeft. De naam „unipolaire inductie" is afkomstig van Weber, die (in 1839) het verschijnsel op de hier beschreven wijze verklaarde.

over het door de stroombaan beschreven omwentelingsoppervlak (normaal naar binnen evenals boven), dus ook aan het product van $\frac{i}{2\pi}$ met de integraal van $\mathfrak{B}_n$ over het omwentelingsoppervlak beschreven door een op het oppervlak van den magneet of buiten den magneet getrokken lijn, die de beide punten waar de stroom in en uit den magneet treedt verbindt.

Door deze uitkomst met (21) te vergelijken (voor het geval dat $\omega' = 0$), ziet men dat voldaan is aan den (reeds in de Inleiding gestelden) eisch, dat het moment op het teeken na gelijk is aan het product van $\frac{i}{\omega}$ met de bij denzelfden magneet, wanneer deze met de hoeksnelheid $\omega$ wordt rondgedraaid, opgewekte electromotorische kracht.

# NASCHRIFT.

## Wijziging der vergelijkingen van Hertz.

De theorie van Hertz is, naar hij zegt, slechts van toepassing op electromagnetische verschijnselen in engeren zin. Zijne woorden: „Es scheint .... aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Innern der greifbaren Materie sich unabhängig von dieser bewege" hebben blijkbaar op optische verschijnselen betrekking. „Anders", voegt hij erbij, „liegt die Sache, wenn wir uns ausgesprochenermaassen begnügen, die electromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne in dem Umfange darzustellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind. Wir dürfen behaupten, dass unter den so eingeschränkten Erscheinungen sich keine findet, welche uns zwingt, eine von der ponderabeln Materie unabhängige Bewegung des Aethers im Inneren derselben zuzugeben."

Deze woorden zijn thans niet meer geldig. Zie b. v. Hoofdstuk IV § 6 Noot.

In de electronentheorie wordt de aether beschouwd als niet deelende in eenige beweging der stof, waardoor het mogelijk wordt optische en andere verschijnselen te omvatten, welke de theorie van Hertz niet omvat.

Hertz zelf schijnt het voor mogelijk te hebben gehouden, zonder in het mechanisme der verschijnselen door te dringen de theorie op geschikte wijze tot dat doel te wijzigen. Hij zegt (Anmerkung 29 op de meergenoemde verhandelingen): „Zweckmässig(er) dürfte es sein die Polarisation des Aethers als die eine, die Polarisation der ponderabeln Materie als zweite Variable einzuführen."

Om de hier uitgesproken gedachte uit te werken, zou men wellicht het verstandigst doen uit te gaan van de beschouwing der nieuwe (b. v. optische) verschijnselen, welke men door de theorie wenscht te omvatten.

Niets belet echter — nu de electronentheorie reeds heeft aangewezen in welken zin naar eene wijziging der vergelijkingen moet worden gezocht — ook zonder beschouwing van zulke verschijnselen te overleggen, welke verandering in de grondvergelijkingen zou kunnen worden gebracht, wanneer de totale (electrische of magnetische) polarisatie beschouwd wordt als bestaande uit de som van twee deelen: een bij de stof en een bij den aether behoorende polarisatie.

Laat $\frac{1}{4\pi} \times$ (de electrische polarisatie), d. i. de diëlectrische verplaatsing, voorgesteld worden door $\mathfrak{D}$ en de magnetische polarisatie door $\mathfrak{B}$, en laten de indices *st* en *ae* resp. op stof en aether betrekking hebben.

De grondvergelijkingen, waarmede tot nog toe gewerkt werd, zijn

$$(1)\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \int \mathfrak{E}_s\, ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma, \\ \int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi \int \mathfrak{J}_n\, d\sigma + 4\pi \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n\, d\sigma, \end{array}\right.$$

of

$$(2)\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \text{Rot. } \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{w}\,\text{Div. } \mathfrak{B} - \text{Rot } [\mathfrak{B}.\mathfrak{w}], \\ \text{Rot. } \mathfrak{H} = 4\pi\,\mathfrak{C}, \end{array}\right.$$

waarin

$$(3)\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C} = \mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{C}_c + \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{C}_c = \mathfrak{w}\,\text{Div. } \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{r} = \text{Rot. } [\mathfrak{D}.\mathfrak{w}]. \end{array}\right.$$

Deze vergelijkingen mogen in het algemeen niet vervangen worden door

$$(1')\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\int \mathfrak{E}_s\, ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{K}_{st_n}\, d\sigma,\\ \int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi \int \mathfrak{J}_n\, d\sigma + 4\pi \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_{st_n}\, d\sigma,\end{array}\right.$$

of

$$(2')\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\text{Rot. } \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{K}}_{st} - \mathfrak{w}\ \text{Div. } \mathfrak{K}_{st} - \text{Rot. } [\mathfrak{K}_{st} \cdot \mathfrak{w}],\\ \text{Rot. } \mathfrak{H} = 4\pi\, \mathfrak{C}',\end{array}\right.$$

waarin $\mathfrak{w}$ weder de snelheid der stof voorstelt en verder

$$(3')\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{C}' = \mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}_{st} + \mathfrak{C}_c + \mathfrak{k}',\\ \mathfrak{C}'_c = \mathfrak{w}\ \text{Div. } \mathfrak{D}_{st},\\ \mathfrak{k}' = \text{Rot. } [\mathfrak{D}_{st} \cdot \mathfrak{w}].\end{array}\right.$$

Immers het behoort juist tot het kenmerkende van Maxwell's theorie, dat een electrische of magnetische stroom, alleen bestaande uit $\dot{\mathfrak{D}}_{ae}$ of $\dot{\mathfrak{K}}_{ae}$, in een gesloten kring een magnetomotorische of electromotorische kracht opwekt. Wanneer men dit niet aanneemt, kan men de optische verschijnselen niet door de theorie verklaren.

Men kan echter, de vergelijkingen (1) of (1′) latende varen, beproeven in plaats van (2′) te schrijven

$$(2'')\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\text{Rot. } \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{K}} - \mathfrak{w}\ \text{Div. } \mathfrak{K} - \text{Rot. } [\mathfrak{K}_{st} \cdot \mathfrak{w}],\\ \text{Rot. } \mathfrak{H} = 4\pi\, \mathfrak{C}'',\end{array}\right.$$

waarin

$$(3'')\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{C}'' = \mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{C}_c'' + \mathfrak{k}'',\\ \mathfrak{C}_c'' = \mathfrak{C}_c = \mathfrak{w}\ \text{Div. } \mathfrak{D},\\ \mathfrak{k}'' = \mathfrak{k}' = \text{Rot. } [\mathfrak{D}_{st} \cdot \mathfrak{w}].\end{array}\right.$$

Hierbij voldoen de tweede leden der vergelijkingen (2″) nog steeds aan de voorwaarde dat hunne divergenties nul zijn, hetgeen met het oog op de eerste leden noodig is. Aan deze voorwaarde zou in het algemeen niet voldaan zijn wanneer men in de eerste vergelijking (2″) en in de tweede vergelijking (3″) schreef Div. $\mathfrak{U}_{st}$ en Div. $\mathfrak{D}_{st}$ resp., zonder tevens aan te nemen dat Div. $\mathfrak{U}_{ae}$ en Div. $\mathfrak{D}_{ae}$ nul zijn. Wanneer men deze laatstgenoemde onderstellingen niet maakt, zoo kan men in het geval van een om zijn symmetrie-as met constante hoeksnelheid wentelenden permanenten of tijdelijken magneet, waarbij $\dot{\mathfrak{U}}_{ae}$, $\dot{\mathfrak{U}}_{st}$ en $\dot{\mathfrak{U}}$ nul zijn, de eerste vergelijking (2″) niet in den vorm der eerste vergelijking (1′) brengen. Er wordt dan in een met den magneet meedraaienden sluitdraad een stroom opgewekt, hetgeen volgens de proef van Hoppe niet het geval is (zie pag. 60 en pag. 62 Noot).

Men zal a-priori geneigd zijn in alle termen, waarin de snelheid der stof $\mathfrak{w}$ voorkomt, in plaats van $\mathfrak{U}$ te schrijven $\mathfrak{U}_{st}$, terwijl niets belet de vergelijkingen

$$(4) \ldots. \left\{ \begin{array}{l} \text{Div. } \mathfrak{U}_{ae} = 0, \\ \text{Div. } \mathfrak{D}_{ae} = 0, \end{array} \right.$$

die met deze onderstelling gepaard moeten gaan, aan te nemen. Dit willen wij doen. Men kan dan in den tweeden term van het tweede lid der eerste vergelijking (2″) naar willekeur Div. $\mathfrak{U}$ of Div. $\mathfrak{U}_{st}$ schrijven; deze vergelijking is voor $\dot{\mathfrak{U}}_{st} = \dot{\mathfrak{U}} = 0$ in den vorm der eerste vergelijking (1′) te brengen; wij komen alzoo niet in tegenspraak met de proef van Hoppe.[1])

---

[1]) Het is intusschen gewenscht, dat deze proef herhaald worde. Men moet in het oog houden, dat Hoppe het niet-bestaan van een

Hierbij zij opgemerkt, dat de tweede vergelijking (2''), waarin de uitdrukking van den Röntgen-stroom ten opzichte van de theorie van Hertz is gewijzigd, overeenkomt met eene vergelijking, die in de electronentheorie wordt gevonden Zie Lorentz „Fundamental equations for electromagnetic phenomena" (Kon. Ac. v. Wet. Sept. 1902). Eene vergelijking overeenkomende met de eerste vergelijking (2'') is in de electronentheorie niet gevonden, hetgeen hiermede samenhangt, dat het parallelisme tusschen electrische en magnetische grootheden in de electronentheorie niet in dezelfde mate bestaat als bij Hertz of Heaviside.

Het bleek (Hoofdstuk IV), dat in plaats van de eerste vergelijking (2) ook mag worden geschreven

$$(5) \ldots . \ \mathrm{Rot.}\, \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} - \mathrm{Rot.}\, [\mathfrak{B} . \mathfrak{w}],$$

waarin

$$(6) \ldots . \ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi I,$$

en de magnetisatie onveranderlijk wordt ondersteld. Evenzoo

---

stroom wilde aantoonen, veel sterker dan de stroom, die volgens de eerste vergelijking (2''), als men de onderstellingen (4) niet maakt, zou zijn opgetreden.

Houdt men met de proef van Hoppe geen rekening, zoo zou men ook kunnen onderstellen, dat de magnetische polarisatie in den aether (in het electromagnetisch maatstelsel) aan de magnetische kracht gelijk is. Uit de verderop opgestelde vergelijking (12) zou dan volgen dat de stroom, door unipolaire inductie in een uniform gemagnetiseerden bol opgewekt, volgens de gewijzigde theorie van Hertz 50 % sterker is, dan volgens de theorie van Hertz. Een nadere beschouwing leert, dat bij deze onderstelling de stroom (bij gelijke waarde van $\mathfrak{B}$) veel minder van de volgens Hertz' theorie berekende waarde afwijkt, wanneer de bol van week ijzer is en in een uitwendig magnetisch veld draait.

Daar Hoppe een tijdelijken magneet bezigde, zou bij zijn proef de stroom volgens deze onderstelling zeer zwak wezen. Bij eene herhaling dezer proef zou men een permanenten magneet moeten bezigen. Faraday („Experimental Researches" § 3092) nam bij een dergelijke proef geen stroom waar.

kan hier in plaats van de eerste vergelijking (2′) worden geschreven

$$(7) \ldots\ldots \mathrm{Rot.}\,\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}}_{st} - \mathrm{Rot.}\,[\mathfrak{B}_{st}\,\mathfrak{w}],$$

waarin

$$(8) \ldots\ldots \mathfrak{B}_{st} = \mathfrak{H}_{st} + 4\pi I,$$

en Div. $\mathfrak{B}_{st} = 0$. Dat een vector $\mathfrak{B}_{st}$, waarvan de divergentie nul is, kan worden ingevoerd, volgt, in verband met de eerste vergelijking (4), uit (6), wanneer men van beide leden de divergentie neemt.

Voor de eerste vergelijking (2″) kan men, in verband met (4) en (7), schrijven

$$(9) \ldots\ldots \mathrm{Rot.}\,\mathfrak{E} = -(\dot{\mathfrak{B}}_{st} + \dot{\mathfrak{H}}_{ae}) - \mathrm{Rot.}\,[\mathfrak{B}_{st}.\,\mathfrak{w}]$$

of

$$(10) \ldots\ldots \mathrm{Rot.}\,\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} - \mathrm{Rot.}\,[\mathfrak{B}_{st}.\,\mathfrak{w}].$$

Hierbij blijft het geheel onbeslist hoe de magnetische polarisatie in den aether of in de stof met de magnetische kracht samenhangt. Men zou geneigd kunnen zijn de magnetische polarisatie in den aether evenredig met de magnetische kracht te onderstellen; intusschen toont de eerste vergelijking (4), dat dit in het algemeen niet mogelijk is.

Hoe dit zij, het zou eenigszins opvallend zijn, zoo de tweede grondvergelijking wèl, doch de eerste niet, een verandering behoefde. Grotrian („Unipolare Induktion" Ann. d. Phys. 6. 1901) heeft bij een cylindervormigen magneet een electromotorische kracht waargenomen, 14% sterker dan volgens de berekening. Het zou interessant zijn de sterkte te meten van den stroom door unipolaire inductie in een wentelenden bol, zooals in Hoofdstuk IV werd beschouwd, opgewekt. Hierbij toch is de loop der magnetische kracht- en magnetische inductielijnen veel beter bekend dan bij een cylinder, zoodat misschien zou blijken, welke verandering in de bedoelde grondvergelijking moet worden aangebracht. Het is ook niet van te voren te zeggen of de stroom (bij gelijke waarde van $\mathfrak{B}$ binnen den bol) even sterk is, wanneer de bol permanent gemagnetiseerd is of wanneer hij in een uitwendig magnetisch veld draait.

In het bijzondere geval van den wentelenden rondom symmetrischen magneet gaat (10) over in

$$(11) \ldots \text{Rot. } \mathfrak{E} = -\text{Rot.} [\mathfrak{B}_{st} \cdot \mathfrak{w}].$$

Men vindt (zie fig. 17) voor de in een baan $A\,D\,B\,C$ opgewekte electromotorische kracht

$$(12) \ldots E_{A\,D\,B\,C} = \frac{\omega - \omega'}{2\pi} \left[ \textit{(inductie)}_{st} \textit{ door het door } A\,B \textit{ beschreven cylindervlak, van buiten naar binnen} \right],$$

waarin (inductie)$_{st}$ de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{B}_{st}$ beduidt.

Men kan derhalve experimenteel de verhouding van (inductie)$_{st}$ en (inductie) bepalen. Wanneer men bedenkt, dat (Hoofdstuk IV § 8) de magnetische kracht in den bol niet naar dezelfde zijde is gericht als de magnetisatie, welke geheel tot $\mathfrak{B}_{st}$ behoort, zoo ligt het voor de hand aan te nemen, dat bij den bol $\mathfrak{B}_{st}$ grooter is dan $\mathfrak{B}$, zoodat ook hier eene afwijking in dezelfde richting mag worden verwacht, als Grotrian bij den cylinder waarnam.

Uit de beschouwingen van Voigt („Electronenhypothese und Theorie des Magnetismus" Ann. d. Phys. 9. 1902) blijkt, dat de electronentheorie van het magnetisme moeilijk eene eenvoudige gedaante zal kunnen bezitten. Men moet — in aanmerking nemende dat deze theorie in vele gevallen in overeenstemming met de waarneming is gebleken — het voor zeer goed mogelijk houden, dat zij ook in staat zal zijn te doen zien, welke wijziging de eerste grondvergelijking moet ondergaan.

Nevens theoriën, die in het mechanisme der verschijnselen pogen door te dringen, kan echter ook eene meer uitsluitend phaenomenologische beschouwingswijze — heden ten dage even goed als in den tijd van Faraday — van heuristische waarde zijn. Zelfs schijnt eene zoodanige beschouwingswijze — welke, zal zij vruchtbaar zijn, natuurlijk een voortdurend samenwerken van waarneming en theorie vereischt — mij toe voor vele physici boven pogingen tot het doordringen in het mechanisme der verschijnselen de voorkeur te verdienen. Immers de geschiedenis doet zien, dat aan nauwkeurig uitgewerkte mechanische voorstellingen veelal een nog grooter waarde werd toegekend dan zij bezaten. De meeste onderzoekers kunnen zich slechts door nauwlettend, en zooveel mogelijk met terzijdestelling van gevestigde meeningen, rekening te houden met hetgeen de waarneming leert, bij het bezigen van beelden en formules (ja bij elk streven naar wetenschap) beveiligd achten voor het gevaar van op een dwaalspoor te geraken.

# STELLINGEN.

# STELLINGEN.

I.

Wat Duhem („Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme" III p. 451) tegen de juistheid eener gebruikelijke verklaring der electromagnetische draaiingen aanvoert, is van geen beteekenis.

II.

Maxwell geeft in zijn „Electricity and Magnetism" de denkbeelden van Faraday over den electrotonischen toestand niet geheel juist weer.

III.

Ten onrechte zegt Olshausen („Ueber die Unipolarrotation," Ann. d. Phys. 6. 1901 p. 702), sprekende over de toepassing van v. Helmholtz' potentiaaltheorie op een bepaalden toestel: „Die Wirkung der gleichmässig magnetisirten Stäbe hängt nur von ihren Endflächen ab." — Er is sprake van de ponderomotorische krachten, door magneten op ongesloten stroomen uitgeoefend.

IV.

De uitkomst der proef met een wisselend magnetisch veld, die Grotrian („Die Unipolarmaschine ohne Eisen", Ann. d. Phys. 10. 1903 p. 273) beschrijft, was volgens de theorie te verwachten.

## V.

Het is bekend, dat men bij toepassing der vergelijkingen van Hertz moet onderstellen, dat de snelheid der lichamen, die zich in het electromagnetisch veld bewegen, nergens eene discontinuïteit vertoont; hiertoe moet men aan het oppervlak van bewegende lichamen oneindig dunne grenslagen aannemen, waarin de snelheid continu verandert. De aard dezer overgangslagen (behalve wanneer een laag bestaande uit een *volmaakt* diëlectricum zich tusschen twee geleiders bevindt) heeft op waarneembare verschijnselen geen invloed.

## VI.

Uit metingen betreffende de sterkte van electrische stroomen, die in een uniform gemagnetiseerden om zijn symmetrie-as draaienden bol door unipolaire inductie worden opgewekt, zal men zich een oordeel kunnen vormen over de wijziging, die een der grondvergelijkingen van Hertz behoeft.

## VII.

Er kan geen sprake zijn van eene experimenteele beslissing — welke Poincaré, Électricité et Optique § 166, mogelijk acht — van de vraag, of de functie $\psi$ in Maxwell's vergelijking

$$A_x = B_z \frac{\partial y}{\partial t} - B_y \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial V_x}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(zie pag. 105 der voorafgaande dissertatie) voorstelt „le potentiel électrostatique résultant des masses électriques."

VIII.

Indien de ponderomotorische krachten in de theorie van Hertz de waarden hadden die Poincaré (Électricité et Optique § 326) opgeeft, zoo zou aan de wet van het behoud van arbeidsvermogen niet zijn voldaan.

IX.

Pogingen om de voorstelling der localisatie van het arbeidsvermogen, welke reeds veelvuldig wordt aangetroffen, duidelijk te formuleeren, zijn van belang, daar deze voorstelling van heuristische waarde moet worden geacht.

X.

De redeneeringen van Hertz („Prinzipien der Mechanik", Einleitung) zijn geenszins geschikt om de superioriteit van zijne mechanische voorstellingen boven eene energetische natuurbeschouwing te doen blijken.

XI.

Ten onrechte beweert de Saint-Venant („De la Torsion des Prismes" § 105 Noot) dat van nul verschilt de resultante der krachten, die volgens zijne theorie op de eindvlakken van het isotrope en homogene prisma, welks loodrechte doorsnede begrensd is door de lijn

$$\left[1+\frac{3c^2}{bb'}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)y\right]\frac{z^2}{c^2}=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left[1-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)y\right],$$

moeten werken om dat prisma om de X-as te tordeeren.

De drie assen staan loodrecht op elkander; $b$, $b'$ en $c$ zijn constanten, waarvan bekend is dat zij tusschen zoodanige grenzen liggen, dat de doorsnede door een gesloten lijn begrensd is, doch die overigens willekeurig zijn.

## XII.

Het moment der tangentieele krachten, die op de eindvlakken van een isotroop en homogeen prisma moeten werken om het over een bepaalden oneindig kleinen hoek te tordeeren om eene met zijne beschrijvende lijnen evenwijdige as (op welke het eindvlak loodrecht staat), verandert niet wanneer men de as evenwijdig met zich zelf verplaatst.

## XIII.

Men mag niet met Nernst („Einleitung in einige Grundprinzipien der jetzigen Naturforschung", tevens inleiding zijner „Theoretische Chemie") het feit dat de zon eene constante massa bezit als argument bezigen bij de quaestie of bij chemische omzettingen eene massaverandering moet worden aangenomen.

Zijne woorden zijn: „Trotz der mächtigen chemischen Prozesse die auf der Sonne vor sich gehen wirkt ihre Anziehung auf die Planeten unverändert fort — ein ausserordentlich scharfer Beweis dafür, dass *bei diesen Prozessen* die Gesammtmasse der Sonne ungeändert bleibt."

## XIV.

Eenige kennis der eigenschappen van het menschelijk denken (welke voor nagenoeg ieder die eenigen tak van wetenschap wenscht vooruit te brengen van belang is), kan door de meesten niet beter worden verkregen dan door bestudeering der denkwijze van hen, die in dezen of eenigen aanverwanten tak van wetenschap hebben uitgeblonken.

# INHOUD.



## ERRATA.

In (36) pag. 35 behoort slechts één $\int$ te staan.

Pag. 121 regel 2 v. o. staat: „dezelfde stof als het omgevend". Lees: „een volmaakt".

Pag. 141 regel 10 v. b. staat: „magnetische". Lees: „electrische".