HET

BEGINSEL VAN DOPPLER

IN DE

GELUIDSLEER.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

DOOR

E. A. O. WAS.

LEIDEN,
P. ENGELS & ZOON.
1881.

HET BEGINSEL VAN DOPPLER IN DE GELUIDSLEER.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.

HET BEGINSEL VAN DOPPLER

IN DE

GELUIDSLEER.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^{R}. M. J. DE GOEJE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Zaterdag, den 1sten October 1881, des namiddags te 3 uren,

DOOR

EDUARD AUGUST OTTO WAS,

GEBOREN TE ST. MAARTENSDIJK.

LEIDEN,
P. ENGELS & ZOON.
1881.

Aan mijne Moeder.

INLEIDING.

Indien de geluidsbron en de waarnemer beiden eene vaste plaats innemen, zal, op welken afstand de waarnemer zich ook van de geluidsbron bevindt, de toonhoogte altijd dezelfde blijven en alleen de intensiteit van het geluid zal met den afstand veranderen.

Geheel anders wordt de toestand zoodra òf de waarnemer, òf de geluidsbron, òf beiden te gelijk met zekere snelheid zich naar elkander toe of van elkander af bewegen.

Bij eene oppervlakkige beschouwing reeds laat het zich verwachten, dat bij nadering of verwijdering van de geluidsbron of den waarnemer het aantal trillingen in de tijdseenheid aan het trommelvlies des waarnemers medegedeeld respectievelijk zal vermeerderen of verminderen, dus de toon hooger of lager worden.

Voor zoover ik weet is DOPPLER de eerste geweest, die op den invloed der beweging van den waarnemer of de geluidsbron op de toonhoogte heeft gewezen [1]).

1) Abhandlungen der Kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften (V Folge, Bd. 2), ook afzonderlijk uitgegeven onder den titel: „Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels". Prag 1842.

DOPPLER stelde zich niet tevreden met het vermoeden uit te spreken dat verandering van toonhoogte bij de beweging van den waarnemer of de geluidsbron zou volgen; maar hij trachtte ook, door eene zeer elementaire mathematische berekening, de maat dier verandering aan te geven.

Deze berekening, die in de meeste leerboeken van Experimenteele Physica is opgenomen en waarop hieronder nader zal worden teruggekomen, lokte, 10 jaren na het verschijnen van DOPPLER's verhandeling, een heftige tegenspraak uit van PETZVAL, die in drie verhandelingen [1]) trachtte aan te toonen, dat de theorie van DOPPLER ten eenenmale onjuist was, en dat de trillingsduur, en dus de toonhoogte onder alle mogelijke omstandigheden constant moest blijven.

Wel komt hij in zijn derde verhandeling gedeeltelijk op zijne apodictische uitspraak terug en geeft toe, dat verandering van toonhoogte bij beweging mogelijk zou kunnen zijn, doch beweert, dat die verandering toch in geen geval kon gebeuren, zooals DOPPLER die in zijne elementair afgeleide formules aangeeft.

DOPPLER [2]) en VON ETTINGSHAUSEN [3]) kwamen beiden tegen PETZVAL's aanvallen op en trachtten de juistheid van DOPPLER's theorie te staven. Geen van beiden viel echter

---

1) *a*. Sitzungsberichte der K. Akad. v. Wissens. Math. Naturwissensch. Classe, Band VIII, blz. 134 en volgende, onder den titel: „Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre: „Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer" ".

b. Id. Band VIII, blz. 567.

„Ueber die Unzukommlichkeiten gewisser populärer Anschauungsweisen in der Undulationstheorie und ihre Unfähigkeit das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer zu ersetzen."

c. Id. Bd. IX, blz. 699.

„Ueber die Unzukommlichkeiten, etc."

2) Id. Bd. VIII, blz. 587.

Bemerkungen zu dem Aufsatze: „Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre, etc."

Id. Band IX, blz. 217.

Bemerkungen über die von dem Herrn Prof. Petzval gegen die Richtigkeit meiner Theorie vorgebrachten Einwendungen.

3) Id. Band VIII blz. 593 en Band IX blz. 27.

Id. Band XLI, n°. 17, 1860.

PETZVAL aan op zijne theoretische berekeningen; althans, hunne argumenten waren niet afdoende om PETZVAL's beweringen geheel te ontzenuwen.

Ook MACH [1]) trad later met PETZVAL in het strijdperk en hoewel hij met meerdere scherpte dan zijne voorgangers aangaf, waarin PETZVAL's beweringen onjuist zijn, gelukte het ook hem niet ten volle, theoretisch zijn tegenstander te ontwapenen.

Eindelijk moet ik nog melding maken van eene zeer uitvoerige verhandeling van VAN DER WILLIGEN [2]), waarin hij èn DOPPLER èn PETZVAL ongelijk geeft. Hoewel het grootste gedeelte der verhandeling aan de bestrijding der theorie van DOPPLER voor het licht is gewijd, wordt in de inleiding die theorie voor het geluid ook aangevallen. Ik ben er, bij aandachtige lezing, niet in geslaagd, den inhoud van genoemde verhandeling geheel te begrijpen, maar ik geloof toch gerust te kunnen zeggen, dat ook in dit stuk geen voldoende bestrijding van DOPPLER's beginsel te vinden is.

En wat nu zijne meening omtrent PETZVAL betreft, ook in VAN DER WILLIGEN's verhandeling is geen sprake van eene besliste theoretische wederlegging.

Hoewel nu verschillende natuurkundigen getracht hebben experimenteel de theorie van DOPPLER te bevestigen, is, voor zooverre mij bekend, nog door niemand beproefd eene streng mathematische afleiding van die theorie te geven. Toch is dit van het hoogste belang, vooral met het oog op de uitbreiding die de theorie ondergaan heeft.

---

1) Pogg. Ann. Band CXII, 1873.
Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1873.
Pogg. Ann. Band CXVII.
Beiträge zur Dopplerschen Theorie der Ton- und Farbenänderung durch die Bewegung. Gesammelte Abhandlungen von E. Mach. Prag 1874.
Wiener Sitz. Ber. etc. Band XLI.

2) Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde, 2e reeks, 7e deel, blz. 257.
Ook Archives du Musée Teyler.

Reeds DOPPLER paste haar ook op het licht toe en beweerde dat, evenals bij het geluid de toonhoogte veranderen zal bij beweging van de geluidsbron of den waarnemer, evenzoo bij het licht de kleur zal gewijzigd worden, zoo de lichtbron of de waarnemer, of beiden zich verplaatsen.

Dat de theorie van DOPPLER voor het licht een ernstig onderzoek waard is zal niemand tegenspreken: men denke slechts aan de verplaatsing der spectraal strepen, ten gevolge van de beweging der hemellichamen, aan de aberratie, aan den invloed der beweging op de draaiing van het polarisatievlak en meer dergelijke verwante verschijnselen.

Terwijl ik het aan bekwamere handen overlaat het beginsel van DOPPLER voor het licht nader te beschouwen, meen ik dat het niet zonder belang is, in afwachting daarvan na te gaan, in hoeverre dit beginsel voor het geluid doorgaat en heb ik daarom besloten het beginsel van DOPPLER in de geluidsleer tot onderwerp van mijn academisch proefschrift te kiezen.

Ik stel mij daarbij voor in de eerste plaats de verhandelingen van PETZVAL, DOPPLER, VON ETTINGSHAUSEN en MACH te bespreken en aan te geven, waarin mijns inziens de reden is te zoeken, dat PETZVAL tot eene conclusie komt, in strijd met het beginsel van DOPPLER; vervolgens te beproeven langs theoretischen weg uit te maken, in welke gevallen en binnen welke grenzen de theorie van DOPPLER voor het geluid doorgaat, om ten laatste in het kort de verschillende proeven te bespreken, die tot bevestiging dier theorie zijn genomen.

EERSTE HOOFDSTUK.

Doppler gaat bij zijne elementaire berekeningen uit van de onderstelling dat de geluidsbron in gelijke intervallen trillingen uitzendt, die, met eene bepaalde snelheid voortgaande, het oor des waarnemers zullen treffen. Indien nu de waarnemer zich naar de geluidsbron toe beweegt zullen deze trillingen zijn oor in snellere opeenvolging bereiken dan wanneer hij op zijn plaats blijft. De *trillingsduur* zal dus *kleiner* en de toon *hooger* worden.

Voor de berekening bepaalt hij zich eenvoudigheidshalve tot de gevallen, dat de beweging plaats heeft volgens *de lijn*, die geluidsbron en waarnemer verbindt, en dat òf de geluidsbron zich alleen naar den stilstaanden waarnemer toe of van hem af beweegt, òf omgekeerd alleen de waarnemer zich op dezelfde wijze ten opzichte van de op hare plaats blijvende geluidsbron verplaatst.

Doppler redeneert nu ongeveer als volgt:

Fig. 1.

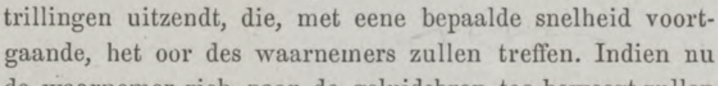
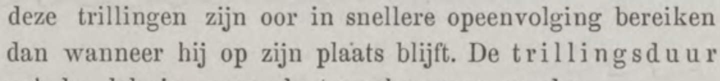


Fig. 2.



Zij (Fig. 1 en 2) Q de geluidsbron, O de waarnemer, die zich in Fig. 1 naar de geluidsbron toe beweegt, in

Fig. 2 van haar af, a de voortplantingssnelheid van het geluid in de lucht, c de constante snelheid, waarmede de waarnemer zich in de richting O O′ beweegt. Stel nu, dat de tweede trilling het oor van den waarnemer in O′ bereikt, op een tijd T′ sec. na het oogenblik, waarop de eerste trilling werd ontvangen, toen het oor des waarnemers zich in O bevond, dan zal, daar O O′ de weg is, door den waarnemer in T′ sec. afgelegd, $O\,O' = c\,T'$ zijn.

Is nu O A eene golflengte, dus $O\,A = a\,T$, zoo T sec. den trillingsduur voorstelt, dan zal de eerste trilling T sec. nadat zij van A is vertrokken het oor des waarnemers in O bereiken. Op dat zelfde oogenblik zal de tweede trilling van A uitgaan, en daar zij volgens de onderstelling T′ sec. later het oor des waarnemers in O′ moet bereiken, zal dus A O′ de weg zijn, waarlangs de tweede trilling zich in T′ sec. heeft verplaatst en dus $A\,O' = a\,T'$.

Om nu de waarde van T′ te berekenen, heeft men dus:

$$O\,O' = c\,T'$$
$$A\,O' = a\,T'$$
$$\text{en } A\,O = a\,T$$
$$\text{verder } A\,O = A\,O' \pm O\,O'$$
$$\text{of } a\,T = (a \pm c)\,T', \quad \text{waaruit}$$
$$T' = \frac{a}{a \pm c}\,T, \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

waarbij het bovenste teeken van den noemer op Fig. 1, het onderste op Fig. 2 betrekking heeft.

Is daarentegen Q de stilstaande waarnemer en O de zich met de snelheid c bewegende geluidsbron, O O′ de weg in T sec. door de geluidsbron afgelegd, dus $O\,O' = c\,T$ en T′ sec. de tijd, noodig om de geluidsbeweging den weg O′ A te doen afleggen, dus $O'\,A = a\,T'$, dan krijgt men:

$$O\,A \mp O\,O' = O'\,A,$$
$$\text{of } a\,T \mp c\,T = a\,T'$$
$$\text{dus } T' = \frac{a \mp c}{a}\,T \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Voor $c = a$ wordt formule (I) voor het onderste teeken: $T' = \infty$, wat volgens DOPPLER aangeeft, dat, zoo de waarnemer zich met eene snelheid van de geluidsbron verwijdert gelijk aan de voortplantingssnelheid van het geluid, hij geen toon zal waarnemen. Formule (II) wordt voor $c = a$ vóor het bovenste teeken $T' = 0$, d.i. volgens DOPPLER zal, ingeval de geluidsbron den waarnemer nadert met eene snelheid gelijk aan die der geluidsbeweging, een oneindig hooge toon, die niet meer waarneembaar is, ontstaan.

Het behoeft wel geen betoog, dat de bewegingstoestand der luchtdeeltjes vooral in de nabijheid van het zich bewegend geluidgevend lichaam of van den zich bewegenden waarnemer op verre na zoo eenvoudig niet is als bij DOPPLER's beschouwingen wordt aangenomen, want, behalve nog de vrij gewaagde onderstelling dat de trillingen in de lucht zich zoo zouden gedragen als of zij stootsgewijze door de geluidsbron aan het medium werden medegedeeld, heeft DOPPLER bij deze elementaire afleiding zijner formules volstrekt geen rekening gehouden met de s t r o o m e n d e b e w e g i n g, die in de lucht zal ontstaan tengevolge van de beweging des waarnemers of van die der geluidsbron. Zooals later door mij zal worden aangetoond gelden de formules van DOPPLER dan ook bij benadering alleen daar, waar de strooming onmerkbaar is, terwijl uit de dan langs strengeren weg afgeleide formules zal blijken, dat de toestand der lucht in de nabijheid van de bewegende geluidsbron of den bewegenden waarnemer zeer gecompliceerd is.

Hoezeer daarom het verwijt, dat PETZVAL aan DOPPLER maakt, dat zijne elementaire berekeningen onjuist zijn, rechtmatig is, zoo wordt daardoor nog geenszins de waarde van DOPPLERS theorie weggenomen; want al geldt die theorie dan ook slechts bij benadering en op eenigen afstand van de zich bewegende geluidsbron, zij is toch voldoende om de genomen proeven vrij bevredigend te verklaren.

Ik kom nu tot de beschouwing van PETZVAL's eerste verhandeling.

Na in algemeene trekken te hebben aangetoond, dat voor elke oneindig kleine beweging, zoowel voor eene voortgaande als voor eene trillende, eene lineaire differentiaalvergelijking zal kunnen opgesteld worden, waarin de verplaatsingscomponenten der deeltjes van het medium zelven niet voorkomen, maar alleen hunne differentiaalquotienten, en waarbij verder van de differentiaalquotienten der verplaatsingen naar den tijd, alleen die van de tweede orde zullen voorkomen merkt hij op, hoe, tengevolge van den lineairen vorm der differentiaalvergelijkingen, de wet van de coëxistentie der elementaire bewegingen zal bestaan en geeft nu tot opheldering van het gezegde, het volgende voorbeeld: Een stoffelijk stelsel verkrijgt twee verschillende soorten van beweging: 1e eene progressieve beweging of strooming ten gevolge van een zich door dat stelsel bewegend lichaam, dat alleen eene voortgaande beweging heeft; 2e eene trillende beweging veroorzaakt door een trillend lichaam. Hij spreekt dus van twee lichamen: één, dat zich voortbeweegt maar niet trilt, een ander, dat alleen trilt en zich niet voortbeweegt, welke beide lichamen dan de onder 1 en 2 genoemde bewegingen in het medium, waarin zij zich bewegen of trillen veroorzaken.

Indien men nu voor dezen bewegingstoestand van het medium eene lineaire differentiaalvergelijking had opgesteld, waaraan elk der beide verschillende bewegingen afzonderlijk voldeden, dan zou, volgens de wet van de coëxistentie der elementaire bewegingen, de verplaatsing, die eenig deeltje van de lucht onderging, of eene grootheid, die lineair van die verplaatsing afhangt, b.v. de snelheid of de condensatie, en die bij integratie der differentiaalvergelijking te voorschijn kwam, uit twee deelen bestaan, waarvan het eene deel alleen op de door het eerste lichaam veroorzaakte progressieve beweging, het tweede deel alleen op de door het tweede lichaam veroorzaakte trillende beweging betrekking had, zoodat die grootheid θ noemende, men b.v. zou krijgen $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Verder zou, indien de strooming zich beperkte tot de luchtdeeltjes in de onmiddellijke nabijheid van het zich voortbewegende lichaam (wat bij niet te groote bewegingssnelheid kan aangenomen worden), θ_1 alleen daar eene merkbare waarde hebben. Verder van dit lichaam af zou dus alleen θ_2 eene bepaalde waarde hebben, en daar θ_2 ontstaan is alleen tengevolge der trillingen van eene stilstaande geluidsbron is het duidelijk, dat in dat geval overal buiten de nabijheid van het voortbewegende lichaam, de trillingsduur en dus de toonhoogte constant zal blijven. Tot zoo verre gaat alles goed, maar allervreemdst klinkt nu de conclusie, die PETZVAL uit de voorgaande beschouwingen trekt:

„Ist daher ein schwingender und seine Schwingungen an die Luft mittheilender Körper zugleich im Zustande einer Bewegung von anderer Sorte, die ebenfals dem Mittel mitgetheilt wird und sind die Bedingungen der Continuität der Masse und der vorhandenen Ruhelage erfüllt, so findet jede dieser beiden Bewegungen so statt, als ob die andere gar nicht da wäre und der von der Undulation erzeugte Ton bleibt derselbe, was auch die andere von der Tonquelle angenommene Bewegung sein mag."

Wat doet nu PETZVAL bij een dergelijke conclusie?

Hij laat plotseling de beide lichamen, het eerste, dat alleen een progressieve beweging had, en het tweede, dat op zijne plaats bleef en trilde, zonder vorm van proces tot één lichaam, dat beide bewegingen te gelijkertijd volvoert, samensmelten en stelt eenvoudig de uitkomst van zijne op de beweging der beide lichamen gebaseerde beschouwingen gelijk met die van het nu genoemde geval dat één lichaam trilt èn zich voortbeweegt. Tusschen beide gevallen bestaat echter een groot verschil en PETZVAL kon ze alleen met elkander verwarren, door dat hij eene belangrijke zaak over het hoofd zag. Hij maakt namelijk bij zijne redeneeringen alleen gebruik van de bewegingsvergelijkingen van het medium. Aan deze kan door zeer verschillende bewegingstoestanden voldaan worden en welke daarvan in het leven zal worden geroepen wordt eerst beslist, wanneer ook de voorwaarden in rekening gebracht worden, waaraan voldaan moet worden aan de grens van de geluidsbron en de lucht. Daar de beschouwing dier grensvoorwaarden de hoofdzaak is bij het geheele vraagstuk, zal ik er iets langer bij stilstaan. Eenvoudigheidshalve zal ik daarbij omtrent de geluidsbron eene bizondere onderstelling maken, ofschoon ook wanneer men die liet varen, dergelijke conditien konden worden opgesteld. Ik stel mij namelijk voor, dat het geluidgevend lichaam vast (of vloeibaar) is en een volkomen glad oppervlak bezit, waarlangs de gasdeeltjes vrijelijk kunnen glijden. De grensvoorwaarde bestaat dan hierin, dat de luchtdeeltjes, die onmiddellijk grenzen aan het oppervlak van het trillende lichaam, met de deeltjes van dat oppervlak in de richting der normaal steeds dezelfde bewegingssnelheid moeten hebben. Deze conditie, die voor alle mogelijke gevallen van voortgaande en trillende beweging geldt, neemt echter nu eens eenen meer, dan eens eenen minder eenvoudigen vorm aan.

Ik zal beginnen met het geval te beschouwen, dat een lichaam alleen eene trillende beweging heeft, en men dus met eene stilstaande geluidsbron te doen heeft.

Zijn dan op zeker oogenblik de snelheidscomponenten van een punt P van het oppervlak U, V en W, en de richtingscosinussen der normaal aan het oppervlak in genoemd punt: $\alpha_{(P)}$, $\beta_{(P)}$, $\gamma_{(P)}$, dan zal de snelheid van het punt P van het oppervlak in de richting der normaal zijn:

$$U \alpha_{(P)} + V \beta_{(P)} + W \gamma_{(P)}.$$

Zoo nu voor een luchtdeeltje, dat zich op dien tijd in de onmiddellijke nabijheid van P bevindt en dus in P tegen het oppervlak aanligt, de analoge componenten zijn: $u_{(P)}$, $v_{(P)}$ en $w_{(P)}$, dan moet volgens de grensvoorwaarden voor elk punt P van het oppervlak en op elken tijd:

$$(U - u_{(P)})\alpha_{(P)} + (V - v_{(P)})\beta_{(P)} + (W - w_{(P)})\gamma_{(P)} = 0. \quad . \quad (1)$$

zijn.

Is de beweging van de geluidsbron gegeven, dan zijn in de vergelijking (1) U, V, W, $\alpha_{(P)}$ $\beta_{(P)}$ en $\gamma_{(P)}$, geheel bekende periodieke functiën van den tijd.

Bij de toepassing der afgeleide conditie zou men strikt genomen in het oog moeten houden, dat zij aan het met den tijd steeds veranderlijke oppervlak der geluidsbron geldt. Men kan nu echter, zoodra de trillingen oneindig klein zijn, de zaak aanmerkelijk vereenvoudigen en eene conditie invoeren voor een vaststaand oppervlak, dat oppervlak namelijk, waarmede het trillende samenvalt, als het door zijn evenwichtsstand heen gaat.

Noemt men de plaats, waarin het punt P van het oppervlak zich zal bevinden op elk oogenblik, dat het oppervlak door zijn evenwichtsstand heengaat. P_0, en zijn de richtingscosinussen der normaal in dit punt P_0 aan het evenwichtsoppervlak $\alpha_{(P_0)}$, $\beta_{(P_0)}$ en $\gamma_{(P_0)}$, dan zal de grensvoorwaarde de volgende gedaante aannemen:

$$(U - u_{(P_0)})\alpha_{(P_0)} + (V - v_{(P_0)})\beta_{(P_0)} + (W - w_{(P_0)})\gamma_{(P_0)} = 0. \quad (2)$$

waarin U, V, W evenals boven voorstellen de snelheidscomponenten van het deeltje der geluidsbron, dat het beschouwde punt P_0 tot evenwichtsstand heeft. Met $u_{(P_0)}$, $v_{(P_0)}$ en $w_{(P_0)}$ zijn de waarden aangewezen, die de snelheidscomponenten der luchtdeeltjes in dat punt hebben. Men moet zich daarbij dan natuurlijk voor het geval dat de trillende beweging van dit oppervlak af naar de lucht toe plaats heeft en er zich dus feitelijk aan dat vaststaand oppervlak geen luchtdeeltjes bevinden, de luchtbeweging tot aan dat vast oppervlak uitgebreid denken, zoodat dan $u_{(P_0)}$, $v_{(P_0)}$ en $w_{(P_0)}$ de snelheidscomponenten voorstellen, die de luchtdeeltjes zouden hebben, die zich bij bedoelde uitbreiding der luchttrillingen in de onmiddellijke nabijheid van het vaststaand oppervlak zouden bevinden.

Dat nu de grensvoorwaarde (1) door (2) mag vervangen worden, toont men op de volgende wijze aan:

Daar de trillingen oneindig klein zijn, en dus de afstanden, waarop P zich in de verschillende tijdstippen van P_0 kan bevinden, zoomede de snelheidscomponenten U, V en W eveneens oneindig klein zijn, zal de uitdrukking: $U\,\alpha_{(P)} + V\,\beta_{(P)} + W\,\gamma_{(P)}$ door de uitdrukking $U\,\alpha_{(P_0)} + V\,\beta_{(P_0)} + W\,\gamma_{(P_0)}$ mogen vervangen worden.

Immers, daar de verschillende standen van het oppervlak ten gevolge der oneindig kleine trillingen slechts oneindig weinig van den evenwichtsstand zullen verschillen, zal dit mede het geval zijn voor de richtingscosinussen van de normalen in die verschillende standen en die der normaal in den evenwichtsstand, zoodat $\alpha_{(P)}$, $\beta_{(P)}$ en $\gamma_{(P)}$ slechts eene oneindig kleine grootheid der eerste orde van $\alpha_{(P_0)}$, $\beta_{(P_0)}$ en $\gamma_{(P_0)}$ zullen afwijken.

Zij nu
$$\alpha_{(P)} = \alpha_{(P_0)} + \Delta\,\alpha,$$
$$\beta_{(P)} = \beta_{(P_0)} + \Delta\,\beta,$$
$$\gamma_{(P)} = \gamma_{(P_0)} + \Delta\,\gamma,$$

dan zal men, daar U, V en W ook oneindig kleine grootheden der 1e orde zijn, de produkten $U\,\Delta\alpha$, $V\Delta\beta$ en $W\Delta\,\gamma$ als oneindig kleine grootheden der 2e orde mogen weglaten.

Zijn verder $u_{(P)}$, $v_{(P)}$ en $w_{(P)}$ de snelheidscomponenten van een luchtdeeltje, dat in P tegen het oppervlak aanligt, en $u_{(P_0)}$, $v_{(P_0)}$ en $w_{(P_0)}$ de snelheidscomponenten op dat zelfde oogenblik van een luchtdeeltje, dat zich dan in den evenwichtsstand P_0 van het punt P zou bevinden, dan zullen ook $u_{(P)}$, $v_{(P)}$ en $w_{(P)}$ door $u_{(P_0)}$, $v_{(P_0)}$ en $w_{(P_0)}$ mogen worden vervangen; want, zoo men de oneindig kleine afstandscomponenten van P tot P_0 δx, δy en δz noemt, dan zal

$$u_{(P)} = u_{(P_0)} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\delta z$$

zijn, en daar nu $u_{(P_0)}$, zijn differentiaalquotienten naar x, y en z, en δx, δy en δz allen oneindig kleine grootheden zijn, zal men de produkten $\frac{\delta u}{\delta x}\delta x$, $\frac{\delta u}{\delta y}\delta y$ en $\frac{\delta u}{\delta z}\delta z$, als oneindig kleine grootheden der tweede orde tegen $u_{(P_0)}$ mogen weglaten, zoodat $u_{(P)} = u_{(P_0)}$ mag gesteld worden; om dezelfde reden ook $v_{(P)} = v_{(P_0)}$ en $w_{(P)} = w_{(P_0)}$. Hierdoor gaat dan de vergelijking (1) over in (2).

Meer ingewikkeld wordt de grensvoorwaarde voor het geval, dat de geluidsbron tevens eene voortgaande beweging heeft. Er moet dan aan een oppervlak, dat telkens weêr een anderen stand inneemt, overeenstemming tusschen de snelheid van de deeltjes van het oppervlak en de daarnaast liggende luchtdeeltjes bestaan. Men kan intusschen voor dit geval de grensvoorwaarde een meer geschikten vorm geven, die later goede diensten zal bewijzen, wanneer men een cöordinaten-stelsel invoert, dat aan de beweging van het lichaam deelneemt en wanneer men de relatieve snelheden ten opzichte van dit cöordinaten-stelsel beschouwt.

Verkeert het vaste lichaam alleen in v o o r t g a a n d e beweging en voert men een bewegelijk cöordinaten-stelsel in dat dezelfde beweging heeft als dit vaste (niet trillende) lichaam, dan zullen de snelheidscomponenten U′, V′ en W′ voor de punten van het oppervlak van dit lichaam, op de bewegelijke cöordinaten genomen, natuurlijk nul zijn. Noemt men nu $u'_{1\,(P_0)}$, $v'_{1\,(P_0)}$ en $w'_{1\,(P_0)}$ de snelheidscomponenten van een luchtdeeltje, dat in een punt P_0 aan dat oppervlak is gelegen, en $\alpha'_{(P_0)}$, $\beta'_{(P_0)}$ en $\gamma'_{(P_0)}$ de richtingscosinussen van de normaal aan dit punt, dan wordt dus de grensvoorwaarde op het bewegelijke stelsel:

$$u'_{1(P_0)}\,\alpha'_{(P_0)} + v'_{1(P_0)}\,\beta'_{(P_0)} + w_1{}'_{(P_0)}\,\gamma'_{(P_0)} = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Heeft echter het vaste lichaam behalve de voortgaande ook eene trillende beweging, dan zal op zekeren tijd het punt P_0 in een stand P zijn, en daar de trillingen oneindig klein zijn, is dan P op oneindig kleinen afstand van P_0 gelegen.

Zijn nu (steeds op het bewegelijke cöordinaten-stelsel) U'_2 V'_2 en W'_2 de snelheidscomponenten van het punt P van het door de trillende beweging verplaatste oppervlak, verder $u'_{1(P)} + u'_{2(P)}$, $v'_{1(P)} + v'_{2(P)}$ en $w'_{1(P)} + w'_{2(P)}$ de snelheidscomponenten van een luchtdeeltje aan P gelegen, waarbij $u'_{1(P)}$, $v'_{1(P)}$ en $w'_{1(P)}$ op de strooming en $u'_{2(P)}$, $v'_{2(P)}$ en $w'_{2(P)}$ op de trilling betrekking hebben, $\alpha'_{(P)}$, $\beta'_{(P)}$ en $\gamma'_{)P)}$ de richtingscosinussen. van de normaal in P aan het verplaatste oppervlak, dan is de grensvoorwaarde:

$$\begin{aligned}&(U'_2 - u'_{1(P)} - u'_{2(P)})\,\alpha'_{(P)} + \\ &+ (V'_2 - v'_{1(P)} - v'_{2(P)})\,\beta'_{(P)} + \\ &+ (W'_2 - w'_{1(P)} - w'_{2(P)})\,\gamma'_{(P)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}&(U'_2 - u'_{2(P)})\,\alpha'_{(P)} + (V'_2 - v'_{2\,(P)})\,\beta'_{(P)} + (W'_2 - w'_{2(P)}\,\gamma'_{(P)} - \\ &- (u'_{1(P)}\,\alpha'_{(P)} + v'_{1(P)}\,\beta'_{(P)} + w'_{1(P)}\,\gamma'_{(P)}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)\end{aligned}$$

Wanneer niet alleen de snelheden, die bij de trillingen, maar ook die, welke bij de strooming behooren, oneindig klein zijn, zou men in deze vergelijking:

$$u'_{1(P)}\,\alpha'_{(P)} + v'_{1(P)}\,\beta'_{(P)} + w'_{1(P)}\,\gamma'_{(P)}$$

door $u'_{1(P_0)}\alpha'_{(P_0)} + v'_{1(P_0)}\beta'_{(P_0)} + w'_{1(P_0)}\gamma'_{(P_0)}$ mogen vervangen, dus ten gevolge van (1) $= 0$ mogen stellen evenzoo $u'_{2(P)}$, $v'_{2(P)}$ en $w'_{2(P)}$ door $u'_{2\,(P_0)}$, $v'_{2(P_0)}$ en $w'_{2(P_0)}$. De grensvoorwaarde zou dan geheel denzelfden vorm aannemen als in het geval van eene stilstaande geluidsbron;

maar men zou altijd in het oog moeten houden, dat zij aan een beweg e l ij k oppervlak geldt.

Zijn echter de snelheden bij de voortgaande beweging eindig, dan kan op (2) zelfs de genoemde vereenvoudiging niet worden toegepast. Deze vergelijking kan dan gereduceerd worden tot:

$$\begin{aligned} u'_{2(P_0)}\,\alpha'_{(P_0)} + v'_{2(P_0)}\,\beta'_{(P_0)} + w'_{2(P_0)}\,\gamma'_{(P_0)} &= \\ = U'_2\,\alpha'_{(P_0)} + V'_2\,\beta'_{(P_0)} + W'_2\,\gamma'_{(P_0)} &- \\ - (u'_{1(P_0)}\,\Delta\alpha' + v'_{1(P_0)}\,\Delta\beta' + w'_{1(P_0)}\,\Delta\gamma') &- \\ - (\alpha'_{(P_0)}\,\Delta u'_1 + \beta'_{(P_0)}\,\Delta v'_1 + \gamma'_{(P_0)}\,\Delta w'_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \end{aligned}$$

Immers:

$$u'_{1(P)} = u'_{1(P_0)} + \Delta u'_1$$
$$v'_{1(P)} = v'_{1(P_0)} + \Delta v'_1$$
$$w'_{1(P)} = w'_{1(P_0)} + \Delta w'_1$$

en $\alpha'_{(P)} = \alpha'_{(P_0)} + \Delta\alpha'$ enz. in (2) invoerende zijn $\Delta u'_1$, $\Delta v'_1$, $\Delta w'_1$ en $\Delta\alpha'$ oneindig kleine grootheden, zoodat hunne produkten als oneindig kleine grootheden der tweede orde tegenover de overige termen mogen verwaarloosd worden, waardoor men van zelf komt tot de vergelijking (3).

Wanneer, zooals ik steeds zal onderstellen, de stroomings-toestand geheel bekend is en eveneens de trillingen der geluidsbron, dan is het 2de lid der vergelijking (3) aan elk punt van het oppervlak bekend.

Het is klaarblijkelijk eene periodieke functie van den tijd, daar

$$U'_2,\ V'_2,\ W'_2,\ \Delta\alpha',\ \Delta\beta',\ \Delta\gamma',$$
$$\Delta u'_1,\ \Delta v'_1 \text{ en } \Delta w'_1$$

dit zijn, terwijl $\alpha'_{(P_0)}$, $\beta'_{(P_0)}$ en $\gamma'_{(P_0)}$ onafhankelijk van den tijd zijn, zoowel als $u'_{1(P_0)}$, $v'_{1(P_0)}$ en $w'_{1(P_0)}$, indien bij deze drie laatste componenten de strooming als stationnair beschouwd wordt, iets wat steeds zal geschieden.

Na deze uitwijding keer ik tot de beschouwingen van PETZVAL terug. Daar hij er niet op let, dat de grensvoorwaarde nu eens aan een vast, dan eens aan een bewegelijk oppervlak geldt, kan hij de gevallen van eene rustende en eene voortgaande geluidsbron ook niet scherp van elkaâr scheiden. Dat werkelijk zijne beschouwingen alleen voor een rustend geluidgevend lichaam gelden blijkt ten duidelijkste uit p. 154 enz. zijner eerste verhandeling.

Men vindt daar de formules:

$$\xi = \mathrm{S}\,\{ \mathrm{U}_1 \cos. st + \mathrm{U}_2 \sin. st \}$$
$$\eta = \mathrm{S}\,\{ \mathrm{V}_1 \cos. st + \mathrm{V}_2 \sin. st \}$$
$$\zeta = \mathrm{S}\,\{ \mathrm{W}_1 \cos. st + \mathrm{W}_2 \sin. st \}$$

Hierin beteekenen ξ, η en ζ de verplaatsingen tengevolge der undulatie van een punt met de oorspronkelijke coördinaten x, y en z, s eene constante, U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 functien van (x, y, z) en S een sommatieteeken.

PETZVAL zegt nu verder:

„Ich habe in meinen vor einiger Zeit gehaltenen Vorlesungen: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen" gezeigt, dass sich durch solche Summen, wie die für ξ, η, ζ hingestellten, jeder beliebige Anfangszustand analytisch darstellen lässt, mit andern Worten: dass man für $t = 0$ und für schicklich gewählte Werthe der Integrationsconstanten jede der sechs Grössen: ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ gleich machen könne einer beliebigen Function von x, y, z. Hieraus folgt, das jeder beliebige anfängliche Erregungszustand nur zu Undulationen mit Constanten s und folglich mit Constanten Schwingungsdauer Veranlassung geben könne. Da ferner X, Y, Z [1]) eben so gut wie ξ, η, ζ Integrale sind von linearen Differentialgleichungen, so lässt sich von ihnen auch das ähnliche

[1]) X, Y, Z zijn functien van x, y, z waarmede U_1, V_1 enz. samenhangen.

behaupten: für $x=0$ nämlich und schickliche Werthe der darin vorhandenen Integrationsconstanten, oder auch für $\phi(x, y, z)=0$, d. h. in einer bestimmten Fläche, und für schickliche Werthe der Integrationsconstanten, verwandeln sie sich in beliebige Functionen der coördinaten x, y, z.

Dies besagt, das jeder permanente der Fläche $\phi(x, y, z)=0$ anhängende, durch einen sin. st oder cos. st auf eine constante Schwingungsdauer beschränkte Schwingungszustand eben nur zu einem solchen im fortpflanzenden Mittel Veranlassung werde."

De door PETZVAL gebezigde vergelijking: $\phi(x, y, z)=0$ kan nooit iets anders voorstellen dan de vergelijking van een vaststaand oppervlak, en dus kan de door PETZVAL getrokken conclusie ook alleen voor eene stilstaande geluidsbron gelden. Voor dit geval is zij volkomen juist, zooals men ook door de volgende redeneering in kan zien, die ik hier mededeel, daar zij eenvoudiger schijnt te zijn dan het betoog van PETZVAL, en bovendien bij eene bewegende geluidsbron met eenige wijziging van dienst zal zijn. Heeft men eene stilstaande geluidsbron, dan worden de snelheden u, v, w der luchtdeeltjes bepaald door de bewegingsvergelijkingen en de grensvoorwaarden, in welke laatste ook U_a, V_a en W_a, (de snelheden der deeltjes van het oppervlak der geluidsbron in den evenwichtsstand) voorkomen, zooals vroeger is afgeleid.

Al deze grootheden komen er lineair in voor.

Stel nu dat in eenig geval voor een bepaald punt van het oppervlak:

$$U_a=F_1(t),\ V_a=F_2(t) \text{ en } W_a=F_3(t)$$

en dat dan in eenig punt van de lucht:

$$u_a=f_1(x, y, z, t),\ v_a=f_2(x, y, z, t) \text{ en } w_a=f_3(x, y, z, t),$$

dan is dit een systeem-waarden dat voldoet. Vervang t door $t-T$ (T constant), dan blijven de bewegingsvergelijkingen onveranderd.

Men krijgt dus eene nieuwe oplossing uit de vorige, waarbij de snelheden van een punt van het oppervlak zullen zijn:

$$U_b = F_1(t - T), \quad V_b = F_2(t - T), \quad W_b = F_3(t - T)$$

en voor eenig punt der lucht:

$$u_b = f_1(x, y, z, t - T)$$
$$v_b = f_2(x, y, z, t - T)$$
$$w_b = f_3(x, y, z, t - T).$$

Hierbij is T nog een willekeurige constante. Zoodra nu echter T zoo gekozen wordt, dat zij den trillingsduur voor een deeltje der geluidsbron voorstelt, worden natuurlijk:

$$F_1(t) = F_1(t - T)$$
$$F_2(t) = F_2(t - T)$$
$$F_3(t) = F_3(t - T),$$

daar U_a, V_a en W_a na elke periode T weêr dezelfde waarde krijgen, en er zal nu moeten aangetoond worden, dat ook

$$f_1(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t - T)$$
$$f_2(x, y, z, t) = f_2(x, y, z, t - T)$$
$$f_3(x, y, z, t) = f_3(x, y, z, t - T),$$

of met andere woorden dat ook u_a, v_a en w_a periodieke functiën zijn met dezelfde periode T.

Om nu hiertoe te geraken heeft men slechts op te merken, dat, daar al de vergelijkingen l i n e a i r zijn, men door aftrekking daaruit eene nieuwe oplossing krijgt:

$$U_a - U_b = U_c = F_1(t) - F_1(t - T)$$
$$V_a - V_b = V_c = F_2(t) - F_2(t - T)$$
$$W_a - W_b = W_c = F_3(t) - F_3(t - T)$$

en

$$u_a - u_b = u_c = f_1(x, y, z, t) - f_1(x, y, z, t - T)$$
$$v_a - v_b = v_c = f_2(x, y, z, t) - f_2(x, y, z, t - T)$$
$$w_a - w_b = w_c = f_3(x, y, z, t) - f_3(x, y, z, t - T).$$

Indien men nu bij de eerste en tweede oplossing het geval beschouwt, dat de geluidsbron a l t ij d in trillenden toestand geweest is en de constante T de periode voorstelt dan zal ten allen tijde

$$U_c = F_1(t) - F_1(t - T) = 0,$$

evenzoo $V_c = 0$ en $W_c = 0$ zijn; die door aftrekking verkregen nieuwe oplossing stelt dus het geval voor, dat het oppervlak altijd in rust is geweest; maar dan spreekt het van zelf, dat ook $u_c = f_1(x, y, z, t) - f_1(x, y, z, t - T) = 0$ moet zijn, eveneens $v_c = 0$, en $w_c = 0$, immers, de lucht zal in dat geval ook altijd in rust verkeerd hebben.

Men krijgt daaruit dan:

$$f_1(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t - T)$$

enz.,

waarmede dus aangetoond is, dat een periodieke beweging, die ten allen tijde bij de stilstaande geluidsbron bestaan heeft, evenzoo eene periodieke beweging in de lucht zal veroorzaakt hebben, met dezelfde constante periode T.

Dit geval doet zich echter in de praktijk niet voor; men heeft daar altijd te doen met een lichaam, dat oorspronkelijk in rust is geweest en op zekeren tijd aan het trillen gebracht wordt. Er zal dan nog eenige tijd na dit in trilling brengen moeten verloopen vóór dat ook nu de deeltjes der geluidsbron eene zuivere periodieke beweging hebben aangenomen. Dientengevolge zullen ook de luchtdeeltjes, die de geluidsbron omringen, in den aanvang geene zuivere periodieke trillingen krijgen; zoodra nu echter deze onregelmatige golvende beweging de plaats in de ruimte, die men beschouwt, gepasseerd is, zullen de luchtdeeltjes, die zich daar bevinden, ten gevolge der later door de geluidsbron uitgezondene periodieke trillingen, even als in het oorspronkelijk beschouwde geval eener ten allen tijde getrild hebbende geluidsbron, eene periodieke trillende beweging verkrijgen, met dezelfde constante periode T, die bij de geluidsbron zelve bestaat.

Men mag nu echter dit resultaat, voor eene stilstaande geluidsbron verkregen, niet zonder nader onderzoek toepassen op eene geluidsbron, die eene voortgaande beweging heeft.

Toch kan men, door een eenvoudigen kunstgreep, de behandeling van dit geval tot die van het vorige reduceeren. Voert men namelijk een coördinaten-stelsel in, dat zich met het geluidgevende lichaam voortbeweegt, dan zal, op dit stelsel, de vergelijking van het oppervlak daarvan in den evenwichtsstand den tijd niet meer bevatten. Bovendien heb ik vroeger aangetoond, dat, bij eene oneindig kleine snelheid der progressieve beweging, de grensvoorwaarde op dit stelsel denzelfden vorm heeft als bij de stilstaande geluidsbron, en dat, als de bedoelde snelheid eindig is, de grensvoorwaarde nog hierin bestaat, dat eene lineaire functie van u_2, v_2 en w_2 als eene bekende periodieke functie van den tijd gegeven wordt.

Dit is voldoende om de redeneering van pag. 17—19 te kunnen toepassen en men komt aldus tot het resultaat, dat wanneer de voortgaande geluidsbron steeds trillingen met de periode T uitvoert, de snelheden in de lucht, die daardoor worden opgewekt, wanneer zij als functiën van den tijd en van de coördinaten op het b e w e g e l ij k e stelsel worden opgevat, met betrekking tot den tijd periodiek zullen zijn met de periode T.

In dezen zin is dus de wet van 't behoud der periode in het algemeen juist, en, op het eerste gezicht, kon men nu meenen, dat DOPPLERS beginsel moest vallen. Eene aandachtige overweging leert echter het tegendeel; het blijkt dat juist uit die geldigheid der wet van PETZVAL voor het b e w e g e l ij k e coördinaten-stelsel, de a f h a n k e l ij k h e i d der t o o n h o o g t e van de b e w e g i n g volgt. Men moet namelijk in het oog houden, dat de w a a r n e m e r ondersteld wordt i n r u s t te verkeeren.

De geluidsindruk, dien hij ontvangt, zal dus niet onmiddellijk kunnen worden afgeleid uit de formules, die de snelheden in de lucht als functiën van den tijd en van de coördinaten op het b e w e g e l ij k e stelsel aangeven. Integendeel, eerst wanneer men die formules tot een vaststaand coördinaten-stelsel heeft gereduceerd zullen zij onmiddellijk geschikt zijn, om er de beweging der lucht in de nabijheid van den waarnemer, en dus den teweeg gebrachten geluidsindruk naar te beoordeelen. Daar in het vervolg nu eens van een vaststaand, dan eens van een bewegelijk cöordinatenstelsel zal gebruik gemaakt worden, zal ik, ter onderscheiding, alle grootheden, die op het bewegelijke stelsel betrekking hebben, met accenten voorzien.

Indien men dientengevolge de coördinaten op het bewegelijke stelsel x', y', z' noemt, zullen de formules, die de wet van PETZVAL op het bewegelijke cöordinatenstelsel uitdrukken, den vorm hebben:

$$\xi = S\{U'_1 \cos. st + U'_2 \sin. st\}, \text{ enz.,}$$ waarin

U'_1 U'_2 enz. functiën van x', y', z' zijn. Reduceert men die tot het vaste stelsel, dan zullen x', y' en z', en dus ook $U'_1, V'_1 \ldots$, in het algemeen functiën van de vaste cöordinaten x, y, z, en van den tijd worden.

Terwijl nu U_1, $V_1 \ldots$ enz. (zie pag. 16), bij een stilstaande geluidsbron functiën zijn, die niet van den tijd afhangen en dus voor elk willekeurig punt x, y, z verschillende, doch ten allen tijde constante waarden hebben, zullen in dat geval ook ξ, η en ζ, voor elk punt, zuiver periodieke functien zijn, met de constante periode: $\frac{2\pi}{s} = T$.

In het geval, dat ik thans beschouw, daarentegen zullen U'_1 $V'_1 \ldots$, voor een bepaald punt der ruimte, waar zich het oor der waarnemers bevindt, van den tijd afhangen en zal dus de periode niet meer constant blijven, maar met den tijd veranderen. De **toonhoogte,** die van de periode afhangt, zal derhalve ook **veranderen,** en de wet van het behoud van den trillingsduur, door PETZVAL afgeleid, is **niet** geldig voor het geval eener **bewegende** geluidsbron.

Bewoog zich de waarnemer met de geluidsbron in dezelfde richting en met dezelfde snelheid mede, dan zou hij, zoowel als de geluidsbron, ten opzichte van het bewegelijke coördinaten-stelsel, dat boven werd ingevoerd, in rust verkeeren, en de daarvoor geldende uitdrukkingen voor de luchttrillingen zouden onmiddellijk den geluidsindruk bepalen, dien de waarnemer ontvangt. Dan was dus de toonhoogte dezelfde, alsof de geluidsbron en de waarnemer beiden stilstonden.

Dit stemt overeen met het resultaat van PETZVAL, dat een permanente stroom in de lucht geen invloed op de toonhoogte uitoefent. Want een permanente stroom der lucht langs en om den rustenden waarnemer en de rustende geluidsbron komt natuurlijk op hetzelfde neêr als wanneer deze beiden zich met gelijke snelheid en in de zelfde richting, mits tegengesteld aan die der lucht, door de niet in strooming verkeerende lucht bewegen.

Maar PETZVAL begaat eene fout, wanneer hij aanneemt, dat 't hetzelfde is, of de geluidsbron zich in zekeren zin beweegt, òf wel de lucht eene strooming in tegengestelden zin heeft. PETZVAL zou volkomen gelijk hebben, indien de waarnemer zich, hetzij met de geluidsbron of met de lucht, mede bewoog; maar, moge de relatieve beweging van lucht en geluidsbron ook al dezelfde zijn, zoo de lucht zich met zekere snelheid naar rechts, of de geluidsbron zich met eene evengroote snelheid naar links beweegt, voor den waarnemer, die zelf aan de beweging geen deel neemt, zijn beide gevallen zeer verschillend.

TWEEDE HOOFDSTUK.

In het vorige hoofdstuk werd aangetoond, dat in het algemeen, overeenkomstig de meening van DOPPLER, de **b e w e g i n g** eener geluidsbron van invloed moet zijn op de waar te nemen **t o o n h o o g t e**. Tevens werd de methode aangegeven, die men heeft te volgen, om de in het medium opgewekte beweging te leeren kennen.

Ik zal er thans toe overgaan, die methode, voor het geval der beweging van de geluidsbron door de lucht, nader uit te werken; ik zal de vergelijkingen opstellen, waardoor, in bizondere gevallen, de geluidsbeweging geheel bepaald kan worden, en tevens zal dan de invloed der beweging op de toonhoogte **q u a n t i t a t i e f** worden gevonden.

Zoo als bekend is zijn de bewegingsvergelijkingen van een gas of gasmengsel, b.v. de lucht, indien men den invloed der zwaartekracht, als bij de gassen zeer gering, buiten rekening laat:

$$\left.\begin{array}{l}
u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \\
\rho=F(p)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=0\,.\;.\;.\;.\;.
\end{array}\right\}\quad\text{(A)}$$

Hierin stellen voor:

u, v en w de snelheidscomponenten, respectievelijk in de richting der X-, Y- en Z-assen, op den tijd t, voor een luchtdeeltje, dat zich op dien tijd in het punt x, y, z der ruimte bevindt, ρ de dichtheid en p de drukking in datzelfde punt en op denzelfden tijd.

Daar ρ en dus ook $\frac{1}{\rho}$ eene functie van p is, kan men deze vergelijkingen een meer eenvoudigen vorm geven door te stellen: $\int \frac{\delta p}{\rho} = P$, waarin de onderste grens der integraal een willekeurige constante is.

Voert men deze waarde in, dan gaan de vergelijkingen (A) over in:

$$\left.\begin{array}{l}
u\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta y} + w\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta P}{\delta x} \\
u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta v}{\delta y} + w\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{\delta P}{\delta y} \\
u\frac{\delta w}{\delta x} + v\frac{\delta w}{\delta y} + w\frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta t} = -\frac{\delta P}{\delta z} \\
\rho = F(p) \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 \ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{(B)}$$

De vergelijkingen (A) of (B) zijn de zoogenaamde bewegingsvergelijkingen van EULER.

Elk probleem, waarbij het, zooals ook hier, te doen is om den bewegingstoestand der lucht te leeren kennen, kan men als opgelost beschouwen, indien voor elken tijd en voor elke plaats der ruimte de snelheidscomponenten u, v en w bekend zijn. Eene groote vereenvoudiging ondergaat het vraagstuk, indien het mogelijk is, het bestaan eener functie Φ van de coördinaten x, y, z en den tijd aan te toonen, zoodanig, dat hare differentiaal quotienten $\frac{\delta \Phi}{\delta x}$, $\frac{\delta \Phi}{\delta y}$ en $\frac{\delta \Phi}{\delta z}$ de waarden der snelheidscomponenten aangeven voor een luchtdeeltje, dat zich op een tijd t in een punt (x, y, z)

der ruimte bevindt. Zoodanige functie noemt men dan de s n e l h e i d s p o t e n t i a a l. In KIRCHHOFF's „Vorlesungen ueber mathematische Physik", p. 165 en volgende, wordt nu aangetoond, dat wanneer de bewegingstoestand der lucht eenmaal zoodanig is, dat er zulk een snelheidspotentiaal bestaat, er dan ook altijd eene snelheidspotentiaal zal blijven bestaan, hoedanig de bewegingstoestand later ook moge worden. Daar men zich nu bij de problemen, die ik hier ga beschouwen, altijd kan voorstellen, dat de lucht eerst in rust geweest is, en dus de snelheden in elk punt nul waren, hetwelk van zelf het bestaan eener snelheidspotentiaal ten gevolge heeft, daar voor dat geval elke functie Φ voldoet, die onafhankelijk van de coördinaten is, zoo kan men dus bij deze problemen ook het bestaan eener snelheidspotentiaal Φ aannemen, zoodanig dat:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ en } w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ is.}$$

Het komt er nu slechts op aan, deze Φ te vinden, en in de eerste plaats, uit de vijf gegeven bewegingsvergelijkingen (B), éene voor Φ af te leiden, waardoor de bewegingstoestand geheel bepaald zal worden.

Te dien einde substitueert men de waarden:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ en } w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

in de drie eerste vergelijkingen (B); dan gaan deze over in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\partial\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x}\\
\frac{\frac{1}{2}\partial\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y}\\
\frac{\frac{1}{2}\partial\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial z}+\frac{\partial\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\text{(C)}$$

Hieruit volgt gemakkelijk:

$$P = -\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\} + \text{Const.} \quad \text{(D)}$$

waarin de Const. eene grootheid is, onafhankelijk van x, y en z, maar die, in het algemeen, den tijd kan bevatten. Later zal men zien, hoe deze constante kan bepaald worden.

De grootheid P is dus nu, zooals uit (D) blijkt, reeds uitgedrukt in differentiaalquotienten van ϕ en in een constante. Maar, daar ook de 4e en 5e vergelijking (B) nog ter nadere bepaling van ϕ moeten dienen, is het noodig, ook deze vergelijkingen, door behoorlijke substitutie, te doen overgaan in eene vergelijking, die alleen ϕ en hare differentiaalquotienten bevat. De 5e vergelijking (B) nu kan men schrijven, door ook daarin $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, enz. te substitueeren en tevens de gewone notatie:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi$$

in te voeren:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\,\Delta\phi + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

of, daar $\rho = F(p)$, en $P = \int\frac{dp}{\rho} = f(p)$ zal zijn, is ook ρ een functie van P, waardoor de vergelijking ook kan geschreven worden:

$$\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial z} + \rho\,\Delta\phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(E)}$$

Men heeft dus thans, tot bepaling van ϕ, gekregen de vergelijking (E) en de 4e vergelijking (B).

Daar men nu, wegens het geringe warmtegeleidingsvermogen der lucht kan aannemen, dat hier de wet van POISSON geldt, krijgt de 4de vergelijking den vorm:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

waarbij ρ_0 de aanvankelijke dichtheid, p_0 den aanvankelijken druk, en k de verhouding der soortelijke warmte bij constanten druk en van die bij constant volume voorstellen. Men moet nu in (E) nog ρ uitdrukken in P, wat door middel van de vergelijking (b) kan geschieden, ten einde dan eindelijk slechts éène vergelijking uit de 5 vroegere te krijgen, waarin alleen ϕ of hare differentiaalquotienten voorkomen, daar, zooals (D) aangeeft, ook P alleen een functie van de differentiaalquotienten van ϕ is.

Uit (b) nu volgt:

$$\rho^k = \frac{\rho_0^k}{p_0} . p \text{ en } \rho = \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{k}}} . p^{\frac{1}{k}} ; \quad \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} . \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}},$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{P} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} . p^{\frac{k-1}{k}},$$

$$\rho^{k-1} = \frac{\rho_0^{k-1}}{p_0^{\frac{k-1}{k}}} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0^k}{p_0} \mathrm{P},$$

$$\text{dus } \rho = \left(\frac{k-1}{k} \frac{\rho_0^k}{p_0} \right)^{\frac{1}{k-1}} \mathrm{P}^{\frac{1}{k-1}},$$

$$\text{en } \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{P}} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{k-1}{k} \frac{\rho_0^k}{p_0} \right)^{\frac{1}{k-1}} \mathrm{P}^{\frac{2-k}{k-1}},$$

$$\text{derhalve: } \frac{\rho}{\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{P}}} = (k-1)\,\mathrm{P}.$$

Deelt men nu de vergelijking (E) door $\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{P}}$, dan gaat zij over in:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + (k-1)\,\mathrm{P}\,\Delta\,\phi = 0. \quad (\mathrm{E}_1)$$

Er blijft nu nog over, de constante te bepalen, die in de waarde voor P, in het 2de lid der vergelijking (D), voorkomt.

Men kan daartoe als volgt redeneeren:

Vóór den aanvang der beweging moeten $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ nul zijn, zullen de luchtdeeltjes in rust verkeeren. Noemt men de snelheidspotentiaal bij den aanvang der beweging, ϕ_0, dan zal ϕ_0 onafhankelijk van x, y en z moeten zijn. Zij zou echter wel een functie van t kunnen wezen; maar, daar zij een geheel willekeurige functie van den tijd is, kan men haar zoo kiezen, dat zij geheel constant is, zoodat ook $\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = 0$ wordt. Noemt men nu de waarde, die P dan heeft P_0, dan zal bij den aanvang der beweging de vergelijking (D) worden:

$$P_0 = \text{Const.}$$

Uit de boven gevonden waarde:

$$P = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} p^{\frac{k-1}{k}},$$

volgt voor $p = p_0$:

$$P_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a^2}{k-1},$$

waarin a de voortplantingssnelheid van het geluid in de lucht voorstelt.

De waarde der constante in (D) is dus: $\frac{a^2}{k-1}$.

Hierdoor gaat (D) over in:

$$P = -\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\} + \frac{a^2}{k-1} \quad (D_1)$$

Door nu eindelijk in (E_1) de waarden van P in te voeren uit (D_1) zal men eéne differentiaalvergelijking verkrijgen ter bepaling van de snelheidspotentiaal ϕ.

Ik zal die substitutie voorloopig achterwege laten.

Uit de verkregen bewegingsvergelijking (E_1) kan men in de eerste plaats het resultaat van PETZVAL afleiden, dat voor een trillende beweging, door eene stilstaande geluidsbron opgewekt, de trillingsduur overal dezelfde is, ook als de lucht in strooming verkeert.

Aangezien namelijk bij de afleiding van de vergelijking (E_1) niets bepaalds is ondersteld omtrent den aard der beweging, kan men het geval gaan beschouwen, dat deze beweging tweeërlei zal zijn:

1° een stroomende beweging, 2° een trillende beweging, die als eene oneindig kleine verstoring van dezen stroomingstoestand kan opgevat worden.

De potentiaal Φ zal nu in dienzelfden zin in twee deelen kunnen gesplitst worden:

b.v. $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, waarvan Φ_1 de snelheidspotentiaal voor de stroomende beweging is, die dus op zich zelve kan bestaan, terwijl Φ_2 dan de potentiaal zal voorstellen der trillende beweging, voor het geval dat er tevens strooming bestaat.

Evenzoo zal $P = P_1 + P_2$ zijn, waarvan P_1 op de strooming, P_2 op de trillingen betrekking heeft. Om nu de vergelijking ter bepaling van Φ_2 te vinden, redeneere men als volgt: Indien er alleen eene stroomende beweging bestond, zou men, om de vergelijking daarvoor te vinden, in (E_1) slechts Φ in Φ_1 en P in P_1 behoeven te veranderen, waardoor men zou krijgen:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial P_1}{\partial z}+(k-1)P_1\Delta\Phi_1 = 0. \quad (F).$$

Bestaan strooming en trilling beiden, dan heeft men in (E_1): $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ en $P = P_1 + P_2$ te substitueeren om eene vergelijking te vinden, die, als Φ_1 bekend is, Φ_2 bepaalt. Daar in deze vergelijking al de termen, die in het 1ste lid van (F) voorkomen, tengevolge van (F) verdwijnen, zal, indien men tevens in aanmerking neemt, dat $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$ en ook P_2 en $\Delta\Phi_2$ oneindig kleine grootheden zijn, en dus hunne produkten als oneindig kleine grootheden der 2de orde mogen worden weggelaten, de vergelijking voor de snelheidspotentiaal Φ_2 den volgenden vorm aannemen:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial P_2}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\frac{\partial P_1}{\partial z} +$$

$$+ (k-1)\, P_1\, \Delta \Phi_2 + (k-1)\, P_2\, \Delta \Phi_1 = 0\,. \quad . \quad \text{(G).}$$

Indien men nu gemakshalve weêr $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = u_1$, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = u_2$, ... enz. noemt, zal men, weêr de oneindig kleine grootheden der 2de orde weglatende, vinden:

$$P_2 = -(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = -\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) -$$

$$-\left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = -\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = -\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) -$$

$$-\left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial w_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial t}\right) -$$

$$-\left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial t} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2},$$

$$\Delta \Phi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}.$$

Substitueert men deze waarden in (G), dan zal deze vergelijking de volgende gedaante aannemen:

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial t} +$$

$$+ w_2 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + u_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + u_1 w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} +$$

$$+ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} v_2 + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} w_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} +$$

$$+ v_1 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_1 w_1 \frac{\partial w_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} u_2 +$$

$$+ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} w_2 + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t} + w_1 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} +$$

$$+ w_1 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} + w_1^2 \frac{\partial w_2}{\partial z} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} u_2 + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} v_2 +$$

$$+ w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} w_2 + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x} u_2 - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial y} v_2 -$$

$$- \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial z} w_2 - (k-1) \mathrm{P}_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) +$$

$$+ (k-1) \Delta \Phi_1 (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = 0, \qquad \text{(H)}$$

waarin nu nog:

$$\mathrm{P}_1 = -\tfrac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{a^2}{k-1},$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x} = -\left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial y} = -\left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial z} = -\left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial t} \right)$$

moet gesubstitueerd worden.

De strooming is bekend ondersteld, dus Φ_1, u_1, v_1, w_1 en $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ zijn allen bekend. Beschouwt men nu al de bekende met de indices 1 gemerkte uitdrukkingen als coëfficienten van de met de indices 2 voorziene, voegt de termen, die alleen in coëfficient verschillen bij elkaâr, en schrijft ter bekorting in die coëfficienten voor alle termen, behalve die, waarin de t voorkomt of de constante $\frac{a_2}{k-1}$, enkele letters A, B, C, enz, dan zal de vergelijking (H) de volgende gedaante aannemen, als men voor u_2 enz. weêr $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ enz. invoert:

$$\left(2\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathrm{A}\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \left(2\frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathrm{B}\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} +$$
$$+ \left(2\frac{\partial w_1}{\partial t} + \mathrm{C}\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \left(\mathrm{D} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - a^2\right)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} +$$
$$+ \left(\mathrm{E} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - a^2\right)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \left(\mathrm{F} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - a^2\right)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} +$$
$$+ \mathrm{G}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t_2} + \mathrm{H}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial t} + \mathrm{I}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial t} + \mathrm{K}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial t} +$$
$$+ \mathrm{L}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + \mathrm{M}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} + \mathrm{N}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Is de strooming oneindig klein of nul, dan gaat, bij weglating der oneindig kleine grootheden van de 2de orde, deze vergelijking over in: $a^2 \Delta \Phi_2 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0$. Zijn de componenten der stroomingssnelheid eindig, maar de strooming stationnair, d. i. zijn de componenten der stroomingssnelheid alleen van de plaats, niet van den tijd afhankelijk, dan worden A, B, C, enz. alleen functien van x, y, z en al de differentiaalquotienten naar den tijd van de met den index 1 voorziene uitdrukkingen verdwijnen, zoodat dan de vergelijking (I) wordt, indien men de constante a^2 onder de daarbij voorkomende letters opneemt:

$$A \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + B \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + C \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + D \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} +$$

$$+ F \frac{\partial_2 \Phi^2}{\partial z^2} + G \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + H \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \, \partial t} + I \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \, \partial t} +$$

$$+ K \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \, \partial t} + L \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \, \partial y} + M \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \, \partial z} + N \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \, \partial z} = 0 \quad . \; . \; . \quad \text{(K)}$$

Men heeft dus nu, indien in de lucht eene permanente of stationnaire strooming bestaat en tevens eene trillende beweging, voor het bepalen der laatste eene lineaire partieele differentiaalvergelijking van de 2de orde gekregen met coëfficienten, die functiën zijn van x, y en z, maar niet van t. Om nu tot de oplossing van die vergelijking te geraken, voor zoo verre dit zonder de kennis der functiën van (x, y, z): A, B, C enz. mogelijk is, zal ik denzelfden weg inslaan, dien PETZVAL volgt in zijne eerste verhandeling, p. 151, en daartoe stellen : $\Phi_2 = e^{\pm s t i} R$, waarbij R alleen een functie is van x, y, z en niet van t en s eene geheel constante grootheid. Zoekt men nu de differentiaalquotienten, die in (K) voorkomen, b.v.: $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = e^{\pm s t i} \frac{\partial R}{\partial x}$ enz., en substitueert deze waarden in (K), dan zal deze vergelijking, na deeling door den gemeenschappelijken factor $e^{\pm s t i}$, overgaan in:

$$A \frac{\partial R}{\partial x} + B \frac{\partial R}{\partial y} + C \frac{\partial R}{\partial z} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + F \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \pm$$

$$\pm s i G R - s^2 R \pm s i H \frac{\partial R}{\partial x} \pm s i I \frac{\partial R}{\partial y} \pm s i K \frac{\partial R}{\partial z} +$$

$$+ L \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + M \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} + N \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(L)}$$

(L) is nu weêr een lineaire differentiaalvergelijking van de 2de orde met veranderlijke (van x, y, z afhankelijke) coëfficienten, en deze moet altijd een integraal hebben. Deze integraal zal, door het voorkomen in de coëfficienten van de uitdrukking: si, den vorm hebben: $R = R_1 \pm R_2 \, i$, waarbij

R_1 en R_2 bestaanbare functiën van (x, y, z) zijn, onafhankelijk van t.

Daar nu $e^{\pm s t i} = \cos. st \pm i \sin. st$, en tengevolge van het lineair zijn der vergelijking (K) de som der verschillende bizondere oplossingen elk met een willekeurigen constanten factor vermenigvuldigd, aan de vergelijking zal voldoen, zoo zal men krijgen:

$$\Phi_2 = A_1 (\cos. st + i \sin. st) (R_1 + R_2 i)$$
$$+ A_2 (\cos. st - i \sin. st) (R_1 - R_2 i)$$
$$\text{of } A_1 + A_2 = B_1 \text{ en } (A_1 - A_2) i = B_2$$

stellende:

$$\Phi_2 = (B_1 R_1 + B_2 R_2) \cos. st +$$
$$(B_2 R_1 - B_1 R_2) \sin. st$$

of eindelijk: $B_1 R_1 + B_2 R_2 = U_1$ en $B_2 R_1 - B_1 R_2 = U_2$ noemende, waarbij U_1 en U_2 dus weêr functiën van x, y, en z voorstellen, die den tijd niet bevatten:

$$\Phi_2 = U_1 \cos. st + U_2 \sin. st \; . \; . \; (M),$$

Dit is eene bizondere oplossing van (K), en, zooals PETZVAL heeft aangetoond, is het altijd mogelijk de functiën U_1 en U_2 zoodanig te kiezen, dat aan het vaste oppervlak eener stilstaande geluidsbron de trillingen daarvan zich aan die der omringende luchtdeeltjes aansluiten, waardoor men weêr komt tot wat door PETZVAL genoemd wordt, zijn: „Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer.”

Werd er in het vorige hoofdstuk reeds op gewezen, hoe bij beweging der geluidsbron of van den waarnemer, uit de bewegingsvergelijkingen en de grensvoorwaarde het beginsel van DOPPLER zal te voorschijn komen, ik ga nu over tot eene meer uitvoerige bespreking van het geval dat de geluidsbron met eene constante snelheid in de richting der X-as wordt voortbewogen.

Daar het oppervlak der geluidsbron nu geen vast vlak meer is wordt het vraagstuk in het algemeen minder eenvoudig. Men kan nu echter gebruik maken van den kunstgreep, vroeger aangegeven om de behandeling van dit vraagstuk tot het vorige te reduceeren, namelijk een bewegelijk coördinatenstelsel invoeren. Men heeft dan vooreerst de bewegingsvergelijkingen, die voor het vaste stelsel gelden, tot dit bewegelijke te reduceeren en het zal daarbij blijken, dat er ook bij het bewegelijke stelsel een snelheidspotentiaal bestaat. Zij de constante snelheid, waarmede het coördinatenstelsel zich in de richting der X-as voortbeweegt: c, dan is, als men de coördinaten op het bewegelijke stelsel: x', y', en z' noemt en de snelheidscomponenten op dat stelsel: u', v' en w':

$$x = x' + ct, \quad y = y', \quad z = z',$$
$$u = u' + c, \quad v = v', \quad w = w'.$$

De overgang tot het bewegelijke stelsel wordt dus door eenvoudige substituties bereikt. Men heeft daarbij slechts in het oog te houden, dat men elke grootheid ψ, die eene functie is van x, y, z en t, ook kan uitdrukken als eene functie van x', y', z' en t. Indien men nu eene zelfde grootheid op deze beide wijzen uitdrukt zal, als men de differentiaties, bij het 2de systeem behoorende, tusschen vierkante haken insluit, ter onderscheiding van die bij het 1ste systeem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right], \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right], \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial z'}\right],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right]\frac{\partial x'}{\partial t}, \quad \text{of}$$

$$\text{daar} \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial (x - ct)}{\partial t} = -c \quad \text{is:}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] - c\left[\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right].$$

Men heeft nu slechts $\Phi' = \Phi - cx'$ te stellen, om te verkrijgen:

$$u' = \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\right], \quad v' = \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial y'}\right], \quad w' = \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial z'}\right],$$

waarmede het bestaan eener snelheidspotentiaal op het bewegelijke stelsel bewezen is.

Door nu in de vergelijking (E_1) die ter bepaling van Φ diende, $\Phi = \Phi' + c\,x'$ in te voeren en de bovengenoemde substituties:

$$x = x' + ct, \quad y = y', \quad z = z',$$
$$u = u' + c, \quad v = v' \text{ en } w = w'$$

te verrichten, zal men, daar:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right] = \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\right] + c,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2}\right] = \left[\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2}\right], \text{ en dus: } \Delta\,\Phi = [\Delta\,\Phi'] \text{ is,}$$

zoo men gemakshalve de boveningevoerde vierkante haken weglaat, voor de bepaling van Φ' de volgende vergelijking vinden:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u'\frac{\partial P}{\partial x'} + v'\frac{\partial P}{\partial y'} + w'\frac{\partial P}{\partial z'} + (k-1)P\Delta\Phi' = 0. \quad (E'_1)$$

Hierin krijgt P, op het bewegelijke stelsel uitgedrukt, de waarde:

$$P = -\tfrac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right] + \tfrac{1}{2}c^2 + \frac{a^2}{k-1}.$$

Beschouwt men nu weêr het geval dat de beweging uit eene strooming en eene trillende beweging bestaat, en zij $\Phi' = \Phi'_1 + \Phi'_2$, $P = P_1 + P_2$, $u' = u'_1 + u'_2$, $v' = v'_1 + v'_2$, $w' = w'_1 + w'_2$, dan zal men, geheel denzelfden weg volgende als vroeger bij het vaste stelsel, voor de vergelijking voor de trillende beweging, indien er tevens strooming bestaat, verkrijgen:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + u'_1\frac{\partial P_2}{\partial x'} + v'_1\frac{\partial P_2}{\partial y'} + w'_1\frac{\partial P_2}{\partial z'} +$$
$$+ u'_2\frac{\partial P_1}{\partial x'} + v'_2\frac{\partial P_1}{\partial y'} + w'_2\frac{\partial P_2}{\partial z'} +$$
$$+ (k-1)P_1\Delta\Phi'_2 + (k-1)P_2\Delta\Phi'_1 = 0, \quad . \quad (G')$$

die, behalve de accenten, in vorm geheel met de vergelijking (G) op het vaste stelsel overeenkomt.

Houdt men dit in het oog, dan zal men, de analoge substituties verrichtende als bij het vaste stelsel, gemakkelijk komen tot de vergelijking:

$$\left\{2\frac{\partial u'_1}{\partial t}+2u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial x'}+v'_1\frac{\partial v'_1}{\partial x'}+w'_1\frac{\partial w'_1}{\partial x'}+v'_1\frac{\partial u'_1}{\partial y'}+\right.$$

$$\left.+w'_1\frac{\partial u'_1}{\partial z'}+(k-1)\left(u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial x'}+u'_1\frac{\partial v'_1}{\partial y'}+u'_1\frac{\partial w'_1}{\partial z'}\right)\right\}u'_2+$$

$$\left\{2\frac{\partial v'_1}{\partial t}+2v'_1\frac{\partial v'_1}{\partial y'}+u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial y'}+w'_1\frac{\partial w'_1}{\partial y'}+u'_1\frac{\partial v'_1}{\partial x'}+\right.$$

$$\left.+w'_1\frac{\partial v'_1}{\partial z'}+(k-1)\left(v'_1\frac{\partial u'_1}{\partial x'}+v'_1\frac{\partial v'_1}{\partial y'}+v'_1\frac{\partial w'_1}{\partial z'}\right)\right\}v'_2+$$

$$\left\{2\frac{\partial w'_1}{\partial t}+2w'_1\frac{\partial w'_1}{\partial z'}+u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial z'}+v'_1\frac{\partial v'_1}{\partial z'}+u'_1\frac{\partial w'_1}{\partial x'}+\right.$$

$$\left.+v'_1\frac{\partial w'_1}{\partial y'}+(k-1)\left(w'_1\frac{\partial u'_1}{\partial x'}+w'_1\frac{\partial v'_1}{\partial y'}+w'_1\frac{\partial w'_1}{\partial z'}\right)\right\}w'_2+$$

$$+\left\{u'^2_1+\frac{k-1}{2}\left(u'^2_1+v'^2_1+w'^2_1+2\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-\frac{2a^2}{k-1}-c^2\right)\right\}\frac{\partial u'_2}{\partial x'}+$$

$$+\left\{v'^2_1+\frac{k-1}{2}\left(u'^2_1+v'^2_1+w'^2_1+2\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-\frac{2a^2}{k-1}-c^2\right)\right\}\frac{\partial v'_2}{\partial y'}+$$

$$+\left\{w'^2_1+\frac{k-1}{2}\left(u'^2_1+v'^2_1+w'^2_1+2\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-\frac{2a^2}{k-1}-c^2\right)\right\}\frac{\partial w'_2}{\partial z'}+$$

$$+(k-1)\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'}+\frac{\partial v'_1}{\partial y'}+\frac{\partial w'_1}{\partial z'}\right)\cdot\frac{\partial \Phi'_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2}+$$

$$+u'_1v'_1\left(\frac{\partial u'_2}{\partial y'}+\frac{\partial v'_2}{\partial x'}\right)+v'_1w'_1\left(\frac{\partial v'_2}{\partial z'}+\frac{\partial w'_2}{\partial y'}\right)+$$

$$+w'_1u'_1\left(\frac{\partial w'_2}{\partial x'}+\frac{\partial u'_2}{\partial z'}\right)+2u'_1\frac{\partial u'_2}{\partial t}+2v'_1\frac{\partial v'_2}{\partial t}+$$

$$+2w'_1\frac{\partial w'_2}{\partial t}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{H}')$$

Deze vergelijking kan weêr korter aldus worden voorgesteld:

$$\left(2\frac{\partial u'_1}{\partial t}+A'\right)\frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'}+\left(2\frac{\partial v'_1}{\partial t}+B'\right)\frac{\partial \Phi'_2}{\partial y'}+$$

$$+\left(2\frac{\partial w'_1}{\partial t}+C'\right)\frac{\partial \Phi'_2}{\partial z'}+\left(D'-\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-a^2-\frac{k-1}{2}c^2\right)\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'^2}+$$

$$+\left(E'-\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-a^2-\frac{k-1}{2}c^2\right)\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'^2}+$$

$$+\left(F'-\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t}-a^2-\frac{k-1}{2}c^2\right)\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial z'^2}+G'\frac{\partial \Phi'_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2}+$$

$$+H'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial t}+I'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'\,\partial t}+K'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial z'\,\partial t}+L'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial y'}+M'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial z'}+$$

$$+N'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'\,\partial z'}=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I')$$

waarin A′, B′, C′.... functiën van (x', y' en z') voorstellen.

Bij stationnaire of permanente strooming gaat de vergelijking (I′), zoo men de constanten $-a^2-\frac{k-1}{2}c^2$ onder de daarbij geplaatste letters opneemt, over in:

$$A'\frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'}+B'\frac{\partial \Phi'_2}{\partial y'}+C'\frac{\partial \Phi'_2}{\partial z'}+D'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'^2}+E'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'^2}+$$

$$+F'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial z'^2}+G'\frac{\partial \Phi'_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2}+H'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial t}+I\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'\,\partial t}+$$

$$+K'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial z'\,\partial t}+L'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial y'}+M'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'\,\partial z'}+N'\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'\,\partial z'}=0, \quad . \quad (K')$$

die alleen door de accenten in vorm van (K) verschilt, en tot eene bizondere oplossing voert:

$$\Phi'_2 = U'_1 \cos. st + U'_2 \sin. st.$$

Hierin stellen U'_1 en U'_2 functiën voor van de bewegelijke coördinaten x', y', en z', welke functiën wederom zoo gekozen kunnen worden, dat aan 't oppervlak der (thans in beweging verkeerende geluidsbron) de gewenschte aansluiting bestaat van de luchtbeweging aan die van het oppervlak.

Om nu echter den bewegingstoestand te vinden bij het oor van den stilstaanden waarnemer moeten deze vergelijkingen weêr tot het vaste stelsel gereduceerd worden. Daar $x' = x - ct$ is, zulllen U'_1 en U'_2 functiën van den tijd worden, en, zooals reeds in het laatste gedeelte van het eerste hoofdstuk beredeneerd is, zal dien tengevolge de trillingsduur en de toonhoogte bij de beweging van de geluidsbron veranderen.

De vergelijkingen (H') of (K') zullen in het algemeen moeielijk geheel opgelost kunnen worden. Bepaalt men zich echter tot het geval, dat de waarnemer zich nog op zoodanigen afstand van de geluidsbron bevindt, dat op die plaats de strooming onmerkbaar is geworden, dan gaat, daar nu

$$u_1 = 0,\ v_1 = 0 \text{ en } w_1 = 0, \text{ dus}$$
$$u'_1 = -c,\ v'_1 = 0 \text{ en } w'_1 = 0 \text{ is,}$$

de vergelijking (H') over in:

$$-a^2 \Delta \Phi'_2 + c^2 \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'^2} - 2c \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x' \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (N')$$

Ik zal nu het XY-vlak zoodanig plaatsen, dat het oor des waarnemers zich daarin bevindt, en onderstellen, dat de waarnemer op zoo grooten afstand van de geluidsbron is, dat men de geluidsgolven, die zijn oor treffen, als platte golven mag beschouwen, die zich loodrecht op het XY-vlak voortplanten, en wier normaal een hoek μ maakt met de X-as. Daar Φ'_2 nu onafhankelijk van z wordt, zal de vergelijking (N') de volgende gedaante krijgen:

$$(a^2 - c^2) \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x'^2} + a^2 \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial y'^2} + 2c \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial x' \partial t} - \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (O)$$

Eene oplossing van die vergelijking, die beantwoordt aan eene voortplanting van platte golven in de bovengenoemde richting zal men verkrijgen door te stellen:

$$\Phi'_2 = \mathrm{A}\, e^{\alpha t + \beta (x' \cos.\mu + y' \sin.\mu)},$$

waarbij α en β voorloopig nog onbepaalde constanten zijn. Door substitutie in de vergelijking (O) verkrijgt men voor die constanten de conditie:

$$(a^2 - c^2 \cos.^2 \mu)\,\beta^2 + 2\,c\,\alpha\,\beta \cos.\mu - \alpha^2 = 0,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{a + c\cos.\mu}, \text{ of } = -\frac{1}{a - c\cos.\mu}.$$

Daar nu Φ'_2 eene periodieke functie van den tijd moet zijn, is α en dus, volgens bovenstaande waarde van $\frac{\beta}{\alpha}$, ook β imaginair. Zoo men de periode T noemt, moet men $\alpha = i\,.\,\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$, en dus $\beta = i\,.\,\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,.\,\frac{1}{a + c\cos.\mu}$, of $= -i\,.\,\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,.\,\frac{1}{a - c\cos.\mu}$ stellen.

Volgens de formule: $e^{pi} = \cos.p + i\sin.p$, zal dan het rëeele gedeelte van Φ'_2, dat als oplossing voldoet, den vorm hebben:

$$\Phi'_2 = \mathrm{A}\cos.\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t + \frac{x'\cos.\mu + y'\sin.\mu}{a + c\cos.\mu}\right),$$

$$\text{of } = \mathrm{A}\cos.\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t - \frac{x'\cos.\mu + y'\sin.\mu}{a - c\cos.\mu}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{Q}')$$

waarvan alleen de onderste uitdrukking kan gebezigd worden, wanneer de lijn, die met de X-as den hoek μ vormt, naar die zijde is getrokken, waarheen de golven zich voortplanten.

Om nu tot het vaste stelsel terug te keeren moet $x' = x - ct$, en $y' = y$, gesubstitueerd worden, waardoor (Q') overgaat in:

$$\Phi'_2 = \text{A} \cos. \frac{2\pi}{\text{T}} \left(t - \frac{x \cos. \mu + y \sin. \mu - c\,t \cos. \mu}{a - c \cos. \mu} \right),$$

waaruit:

$$\Phi'_2 = \text{A} \cos. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a - c \cos. \mu}{a} \text{T}} - \frac{x \cos. \mu + y \sin. \mu}{\text{T}\,(a - c \cos. \mu)} \right).$$

De trillingsduur is dus:

$$\text{T}_1 = \frac{a - c \cos. \mu}{a} \text{T},$$

wat volkomen overeenstemt met de formule van DOPPLER, indien men deze uitbreidt tot het geval, dat de waarnemer zich bevindt op eene plaats buiten de lijn, volgens welke zich de geluidsbron beweegt en daarbij de ontbondene van de snelheid der geluidsbron volgens de richting, waarin de golven den waarnemer bereiken, in rekening brengt. Voor den bewegingstoestand in de nabijheid der geluidsbron komt men niet tot zulk een eenvoudig resultaat.

Ik zal nu het geval gaan beschouwen, dat de geluidsbron stilstaat en de waarnemer zich met eene snelheid c beweegt in de richting der verbindingslijn van geluidsbron of waarnemer.

In de lucht worden nu weêr tweëerlei bewegingen opgewekt: 1ste eene trillende beweging, veroorzaakt door de stilstaande geluidsbron, 2de eene stroomende beweging, door den zich bewegenden waarnemer teweeg gebracht.

Men heeft derhalve, om de vergelijking voor de snelheidspotentiaal der trillende beweging te vinden, indien er zooals hier tevens strooming bestaat, geheel denzelfden weg te volgen als in het begin van dit hoofdstuk, en wordt dus weder geleid tot de vergelijking: (H). Is nu de waarnemer nog op zoodanigen afstand van de geluidsbron, dat de stroomende beweging der lucht in de nabijheid der geluidsbron onmerkbaar is, dan gaat de vergelijking (H) over in:

$$-a^2 \Delta \Phi_2 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0.$$

Is nu de verbindingslijn van geluidsbron en waarnemer weêr de X-as en beschouwt men de geluidsgolven, die het oor des waarnemers bereiken weêr als platte golven, dan wordt Φ_2 onafhankelijk van y en z en gaat de bovenstaande vergelijking over in:

$$-a^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0,$$

die tot oplossing geeft:

$$\Phi_2 = b \cos. 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{x}{a\mathrm{T}} + q \right).$$

Daar het oor des waarnemers zich met de snelheid $\pm c$ beweegt, zal men, om te weten wat dit bewegende oor hoort, een bewegelijk coördinatenstelsel moeten invoeren, dat zich met den waarnemer mede beweegt, en daarop de voor Φ_2 gevonden vergelijking reduceeren.

Hierbij wordt dan $x = x' \mp ct$ en de vergelijking

$$\Phi_2 = b \cos. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a}{a \pm c}\mathrm{T}} - \frac{x'}{a\mathrm{T}} + q \right),$$

die weer volkomen met DOPPLERS formule voor dit geval overeenstemt.

Uit het vorige onderzoek blijkt dus aangaande de theorie van DOPPLER het volgende:

1⁰. Het beginsel van DOPPLER, dat de toonhoogte bij de beweging van geluidsbron of waarnemer verandert, is juist.

2⁰. De door DOPPLER langs elementairen weg afgeleide formules om de maat dier verandering aan te geven, gelden volkomen streng, zoowel voor het geval, dat de geluidsbron zich beweegt en de waarnemer stilstaat, als voor het omgekeerde, mits de afstand van geluidsbron en waarnemer zoo groot is, dat in het eerste geval de strooming door de bewegende geluidsbron teweeggebracht bij den waarnemer in het tweede geval de strooming, door den bewegenden waarnemer veroorzaakt, in de nabijheid der geluidsbron onmerkbaar is, en de golven, die het oor des waarnemers bereiken, in beide gevallen als platte golven mogen beschouwd worden.

DERDE HOOFDSTUK.

Het is in het vorige hoofdstuk gebleken, dat men het beginsel van DOPPLER theoretisch kan afleiden zonder bepaalde onderstellingen te maken omtrent den vorm en de trillingswijze van het geluidgevende lichaam.

De formule:

$$T_1 = \frac{a \pm c \cos. \mu}{a} T$$

wordt dan verkregen, zonder dat het noodig is de trillende beweging in de lucht geheel te kennen. Het is intusschen wellicht niet van belang ontbloot voor een paar eenvoudige gevallen het vraagstuk omtrent den bewegingstoestand der lucht volledig op te lossen. Dit is mogelijk, wanneer het geluidgevende lichaam een bol is, die op eenvoudige wijze trilt. Ik zal mij bij dit onderzoek bepalen tot het geval, dat de snelheid c, waarmede zich de bol voortbeweegt, oneindig klein is. Voert men wederom een coördinaten-stelsel in, dat zich met den bol voortbeweegt, en onderstelt men, dat de bol zich zoolang heeft voortbewogen, dat de strooming in de lucht stationnair is geworden, dan krijgt men ter bepaling van de snelheidspotentiaal Φ'_2, de vergelijking (N′) van het vorige hoofdstuk:

$$-a^2 \Delta \Phi_2' + c^2 \frac{\partial^2 \Phi_2'}{\partial x'^2} - 2c \frac{\partial^2 \Phi_2'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_2'}{\partial t^2} = 0,$$

die nu, daar c hier oneindig klein is ondersteld, den meer eenvoudigen vorm zal aannemen:

$$-a^2 \Delta \Phi_2' + \frac{\partial^2 \Phi_2'}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Het is nu de vraag eene oplossing voor deze vergelijking te vinden, die tevens aan het boloppervlak zich aansluit aan den gegeven trillingstoestand van den bol.

a. Ik zal beginnen met te onderstellen, dat de bol radiale trillingen uitvoert, waaronder dan moet verstaan worden, dat de deeltjes van het oppervlak van den bol zoodanig trillen, dat zij elk oogenblik op een ander boloppervlak gelegen zijn, dat concentrisch is met het oppervlak in den evenwichtsstand, terwijl elk deeltje gedurende zijne trilling zich langs een straal verplaatst.

Zij nu op den tijd t de snelheid, waarmede zich de deeltjes van het boloppervlak naar buiten bewegen, gegeven $= \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T}$, waarbij α en T constanten voorstellen en wel α de amplitudo, en T de trillingsduur.

Zij verder R de straal van den bol, r' de afstand van het middelpunt naar eenig luchtdeeltje op den tijd t, dan zal de snelheidscomponent van dit deeltje in de richting van de normaal aan het boloppervlak, zijn: $\frac{\partial \Phi_2'}{\partial r'}$, en, zal zich de luchtbeweging aan die van den bol aansluiten, dan moet Φ_2' zoodanig bepaald worden, dat de voorwaarde:

$$\frac{\partial \Phi'_2}{\partial r'}_{[r'=R]} = \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

vervuld is.

Het is duidelijk dat aan deze grensvoorwaarde en aan de bewegingsvergelijking (1) kan voldaan worden, wanneer Φ_2' eene functie is van r'.

Door nu in (1):

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

in te voeren vindt men gemakkelijk dat (1) over zal gaan in:

$$\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'}\frac{\partial \Phi'_2}{\partial r'}\right) = 0.$$

Zooals bekend is heeft deze vergelijking tot algemeene integraal [1]):

$$\Phi'_2 = \frac{F_1(r' - at)}{r'} + \frac{F_2(r' + at)}{r'},$$

waarin F_1 en F_2 willekeurige functiën voorstellen. Daar men hier alleen met de golven te doen heeft, die zich van het oppervlak des bols naar buiten voortplanten, waarop alleen F_1 betrekking heeft, kan men hier met den eersten term volstaan dus:

$$\Phi'_2 = \frac{F_1(r' - at)}{r'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

stellen.

Daar nu:

$$\frac{\partial \Phi'_2}{\partial r'} = \frac{F'_1(r' - at)}{r'} - \frac{F_1(r' - at)}{r'^2}$$

is, wordt de voorwaarde (2), die met de vergelijking (3) moet dienen om Φ_2' te bepalen:

$$\frac{F'_1(R - at)}{R} - \frac{F_1(R - at)}{R^2} = \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T}, \; . \; . \quad (4).$$

eene lineaire differentiaalvergelijking, die tot algemeene integraal heeft:

$$F_1(R - a\,t) = e^{-\frac{a}{R}t}\left(-\alpha\, a\, R \int \cos. 2\pi \frac{t}{T} . e^{\frac{a}{R}t}\, d\,t + C\right)$$

---

1) KIRCHHOFF, Vorlesungen ueber Mathem. Physik, p. 314.

De daarin nog voorkomende integratie uitvoerende, wordt zij:

$$F_1(R - a\,t) = -\frac{\alpha\, a^2 R^2 T^2}{a^2 T^2 + 4\,\pi^2 R^2}\left(\cos. 2\,\pi\frac{t}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi R}{a\,T}\sin. 2\,\pi\frac{t}{T}\right) + C\,e^{-\frac{a}{R}t} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Om nu door middel van (5) de waarde van Φ_2' uit (3) te bepalen, kan men ongeveer den zelfden weg volgen, als KIRCHHOFF (t. a. p. p. 318) bij een analoog vraagstuk. Men redeneere dan als volgt:

$$F_1(r' - a\,t) = F_1\left\{R - a\left(t - \frac{r' - R}{a}\right)\right\}.$$

In formule (5), t door: $t - \dfrac{r' - R}{a}$ vervangende, krijgt men dus, indien men daarna tevens de vergelijking door r' deelt:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'}\cdot\frac{\alpha\, a^2 R^2 T^2}{a^2 T^2 + 4\,\pi^2 R^2}\left\{\cos.\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi R}{a\,T}\sin.\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right)\right\} + \frac{C\,e^{-\frac{a}{R}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right)}}{r'}.$$

Door nu den bewegingstoestand te beschouwen, nadat de beweging reeds geruimen tijd geduurd heeft, kan men den term $\dfrac{C\,e^{-\frac{a}{R}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right)}}{r'}$, die met het toenemen van t sterk zal afnemen, weglaten en krijgt dan:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'}\cdot\frac{\alpha\, a^2 R^2 T^2}{a^2 T^2 + 4\,\pi^2 R^2}\left\{\cos.\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi R}{a\,T}\sin.\frac{2\,\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieruit blijkt weêr, dat, indien de beweging der geluidsbron een geruimen tijd geduurd heeft, de luchtbeweging, als functie van de bewegelijke coördinaten en den tijd voorgesteld, zuiver periodiek zal worden.

Om nu uit deze vergelijking, die op het bewegelijke coördinatenstelsel betrekking heeft, af te leiden wat het oor des stilstaanden waarnemers zal hooren, moet zij natuurlijk tot het vaste stelsel gereduceerd worden.

Noemt men nu: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

dan is: $r' = \sqrt{(x - ct)^2 + y^2 + z^2}$,

en dus: $r' = \sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2}$.

Deze waarde in (6) invoerende, verkrijgt men voor die vergelijking:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2}} \cdot \frac{\alpha\,a^2\,R^2\,T^2}{a^2\,T^2 + 4\,\pi^2\,R^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos. \frac{2\,\pi}{T}\left(t - \frac{\sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2} - R}{a} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi\,R}{a\,T} \sin. \frac{2\,\pi}{T}\left(t - \frac{\sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2} - R}{a} \right) \right\}. \quad (7)$$

Voor $r = x$, d. i. voor alle punten in de bewegingslijn gelegen, zal de formule (7) overgaan in:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r - ct} \cdot \frac{\alpha\,a^2\,R^2\,T^2}{a^2\,T^2 + 4\,\pi^2\,R^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r - ct - R}{a} \right) + \frac{2\,\pi\,R}{a\,t} \sin. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r - ct - R}{a} \right) \right\},$$

waarvoor men ook kan schrijven:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'}\,\frac{\alpha\,a^2\,R^2\,T^2}{a^2\,T^2 + 4\,\pi^2\,R^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos. 2\,\pi\left(\frac{t}{\frac{a}{a+c}\,T} - \frac{r - R}{a\,T} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi\,R}{a\,T} \sin. 2\,\pi\left(\frac{t}{\frac{a}{a+c}\,T} - \frac{r - R}{a\,T} \right) \right\},$$

of daar, wegens het oneindig klein zijn van c:

$$\frac{a}{a+c} = \frac{a-c}{a} \text{ is:}$$

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'} \frac{\alpha a^2 R^2 T^2}{a^2 T^2 + 4\pi^2 R^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a-c}{a} T} - \frac{r-R}{aT} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi R}{aT} \sin. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a-c}{a} T} - \frac{r-R}{aT} \right) \right\}, \quad . \quad (8).$$

waaruit blijkt: $T_1 = \frac{a-c}{a} T$, in overeenstemming met de formule van DOPPLER.

Voor de punten, buiten de bewegingslijn moet men tot de formule (7) terugkeeren. Terwijl in het bovenstaande geval $r' = r - ct$, dus eene lineaire functie van den tijd en ten gevolge daarvan de luchtbeweging zuiver periodiek werd, nadat de geluidsbron eenigen tijd was in beweging geweest, zooals uit formule (8) blijkt, zal dit nu niet meer het geval zijn.

$r' = \sqrt{r^2 - 2\,x\,ct + c^2 t^2}$ toch is nu geen lineaire functie meer van den tijd en dien ten gevolge moet de periode en met haar de waargenomen toon voortdurend veranderen, wat ook in overeenstemming is met het beginsel van DOPPLER (immers de snelheid der geluidsbron in de richting der verbindingslijn r' is met den tijd veranderlijk).

Met andere woorden: zoolang de waarnemer in de bewegingslijn is, zal het verschil tusschen de door de geluidsbron aangegevene en de, tengevolge der eenparige beweging der geluidsbron, door den waarnemer waargenomene toonhoogte voortdurend constant blijven; zoodra de waarnemer zich buiten de bewegingslijn bevindt, zal de toon elk oogenblik veranderen.

Verdeelt men nu echter den tijd in zeer kleine intervallen, waarin slechts enkele trillingen kunnen worden uitgezonden, zoodat men aan kan nemen, dat gedurende zoodanig interval de waargenomen toon constant blijft, dan zal men uit de formule kunnen afleiden, dat, gedurende elk willekeurig klein tijdsinterval, de formule van DOPPLER zal gelden.

Noemt men, bij het begin t_1 van zoodanig tijdsinterval, den afstand van geluidsbron en waarnemer: $r'_{(t_1)}$, dan zal, op eenig oogenblik t gedurende dat tijdsverloop, r' volgens de reeks van Taylor kunnen worden ontwikkeld, zoodat:

$$r' = r'_{(t_1)} + \frac{\partial r'}{\partial t_{(t_1)}}(t - t_1) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 r'}{\partial t^2_{(t_1)}}(t - t_1)^2 + \quad . \quad .$$

De waarde der daarin voorkomende differentiaalquotienten vindt men door differentiatie van de in formule (7) voorkomende waarde $r' = \sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2}$, indien men daarin, na de differentiatie te hebben uitgevoerd, $t = t_1$ stelt.

Men vindt dan:

$$\frac{\partial r'}{\partial t_{(t_1)}} = \frac{-\,c\,x + c^2\,t_1}{r'_{(t_1)}},$$

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial t^2_{(t_1)}} = \frac{c^2\,(r^2 - x^2)}{r'^3_{(t_1)}} = \frac{c^2\,y^2}{r'^3_{(t_1)}},$$

en deze waarden substitueerende:

$$r' = r'_{(t_1)} + \frac{-\,c\,x + c^2\,t_1}{r'_{(t_1)}}(t - t_1) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{c^2\,y^2}{r'^3_{(t_1)}}(t - t_1)^2 + \ldots .$$

Daar, zooals men door deeling gemakkelijk vindt, de verhouding van den 3den en 2den term oneindig klein is, mag men dien 3den term en, à fortiori, de volgende termen weglaten, waardoor $r' = r'_{(t_1)} - \dfrac{c\,(x - c\,t)}{r'_{(t_1)}}(t - t_1)$ wordt.

Daar nu $x - c\,t_1 = x'_{(t_1)}$ is, en $\dfrac{x'_{(t_1)}}{r'_{(t_1)}} = \cos.\,\mu$, krijgt men dus:

$$r' = r'_{(t_1)} - c\cos\mu\,.\,(t - t_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welke waarde van r' men nu slechts in (7) voor

$$\sqrt{r^2 - 2\,c\,x\,t + c^2\,t^2} = r'$$

heeft te substitueeren, om te komen tot de vergelijking:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'}\cdot\frac{\alpha\,a^2\,R^2\,T^2}{a^2\,T^2 + 4\,\pi^2 R^2}\times$$

$$\times\left\{\cos.\frac{2\,\pi}{T}\left(t - \frac{r'_{(t_1)} - c\cos.\,\mu.(t - t_1) - R}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi\,R}{a\,T}\sin.\frac{2\,\pi}{T}\left(t - \frac{r'_{(t_1)} - c\cos.\,\mu.\,(t - t_1) - R}{a}\right)\right\}$$

of wel:

$$\Phi'_2 = -\frac{1}{r'}\cdot\frac{\alpha\,a^2\,R^2\,T^2}{a^2\,T^2 + 4\,\pi^2\,R^2}\times$$

$$\times\left\{\cos.\,2\,\pi\left(\frac{t}{\dfrac{a}{a + c\cos.\,\mu}\,T} - \frac{r'_{(t_1)} + c\,t_1\cos.\,\mu - R}{a\,T}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\pi\,R}{a\,T}\sin.\,2\,\pi\left(\frac{t}{\dfrac{a}{a + c\cos.\,\mu}\,T} - \frac{r'_{(t_1)} + c\,t_1\cos.\mu - R}{a\,T}\right)\right\} (9)$$

Hieruit blijkt dus, dat, voor zulk een klein tijdsinterval, de formule van DOPPLER bevestigd wordt, want uit formule (2) volgt nu weêr dat de periode van den op den tijd t waargenomen toon zal zijn: $T_1 = \dfrac{a}{a + c\cos.\,\mu}\,T$, of, daar c oneindig klein is:

$$T_1 = \frac{a - c\cos.\,\mu}{a}\,T.$$

b. Ik zal nu nog een tweede probleem behandelen, namelijk dat, waarbij een bol in zijn geheel heen en weêr trilt in de richting van de X-as en zich tevens met de oneindig kleine snelheid c in die richting voortbeweegt. Dezelfde notaties als bij het vorige probleem gebruikende onderstel ik nu dat de snelheid, waarmede de deeltjes van het boloppervlak zich op den tijd t in de richting der X-as bewegen $= \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T}$, dan zal hunne snelheid in de richting van de normaal van het oppervlak zijn: $\alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T} \cos. \mu$.

De voorwaarde voor de aansluiting van de luchtbeweging aan die des bols zal nu zijn:

$$\frac{\partial \Phi'_2}{\partial r'}_{[r'=R]} = \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T} \cos. \mu \quad . \quad . \quad (a)$$

Aan de bewegingsvergelijking:

$$-a^2 \Delta \Phi'_2 + \frac{\partial^2 \Phi'_2}{\partial t^2} = 0,$$

en aan bovengenoemde voorwaarde kan nu voldaan worden,

$$\text{zoo} \quad \Phi'_2 = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{F_1(r'-at)}{r'}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

is, waarbij nu weêr de functie F_1 nader bepaald zal moeten worden door middel van (a). Men heeft daartoe:

$$\Phi'_2 = \frac{\partial}{\partial r'}\left[\frac{F_1(r'-at)}{r'}\right]\frac{\partial r'}{\partial x'},$$

$$\text{of } \Phi'_2 = \frac{\partial}{\partial r'}\left[\frac{F_1(r'-at)}{r'}\right]\cos. \mu,$$

$$\frac{\partial \Phi'_2}{\partial r'} = \frac{\partial^2}{\partial r'^2}\left[\frac{F_1(r'-at)}{r'}\right]\cos. \mu.$$

Deze dubbele differentiatie uitvoerende en daarna $r' = R$ stellende, krijgt men dan, in verband met (a), de vergelijking:

$$\frac{2}{R^3} F_1(R-at) - \frac{2}{R^2} F'_1(R-at) +$$

$$+ \frac{1}{R} F''_1(R-at) = \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

In aanmerking nemende dat reeds vroeger bewezen werd dat de beweging, zoo zij slechts lang genoeg geduurd heeft, periodiek zal zijn met de periode T, zal de oplossing van vergelijking (c) de volgende gedaante hebben:

$$F_1(R - at) = C_1 \cos. \frac{2\pi}{aT}(R - at) + C_2 \sin. \frac{2\pi}{aT}(R - at). \quad (d),$$

waarin de constanten C_1 en C_2 kunnen bepaald worden door de waarde van $F_1(R - at)$ in (c) te substitueeren. Verricht men deze substitutie en noemt kortheidshalve:

$$\frac{2}{R^3} - \frac{4\pi^2}{R a^2 T^2} = M, \quad \frac{4\pi}{R^2 a T} = N,$$

en $\frac{2\pi R}{aT} = p$, dan vindt men gemakkelijk, door tevens $\cos. \frac{2\pi}{aT}(R - at)$ en $\sin. \frac{2\pi}{aT}(R - at)$ te ontwikkelen:

$$\{C_1(M \cos. p + N \sin. p) + C_2(M \sin. p - N \cos. p)\} \cos. 2\pi \frac{t}{T} +$$

$$+ \{C_1(M \sin. p - N \cos. p) - C_2(M \cos. p + N \sin. p)\} \sin. 2\pi \frac{t}{T}$$

$$= \alpha \cos. 2\pi \frac{t}{T},$$

waaruit dan voor de bepaling van C_1 en C_2 de beide volgende vergelijkingen verkregen worden:

$$\left.\begin{array}{l} C_1(M \cos. p + N \sin. p) + C_2(M \sin. p - N \cos. p) = \alpha \\ C_1(M \sin. p - N \cos. p) - C_2(M \cos. p + N \sin. p) = 0 \end{array}\right\} (e).$$

Hieruit volgt:

$$C_1 = \alpha \frac{M \cos. p + N \sin. p}{M^2 + N^2},$$

$$C_2 = \alpha \frac{M \sin. p - N \cos. p}{M^2 + N^2}.$$

Substitueert men deze waarden in (d), dan wordt:

$$F_1(R - a\,t) = \frac{\alpha}{M^2 + N^2}\left[M \cos. 2\pi \frac{t}{T} + N \sin. 2\pi \frac{t}{T}\right],$$

en nu weer, evenals bij het vorige probleem, t door $t - \frac{r' - R}{a}$

vervangende, en bovendien K en L zoodanig bepalende, dat

$$\left.\begin{array}{l} M = K \cos. \frac{2\pi}{T} L \quad \text{en} \\ \\ N = K \sin. \frac{2\pi}{T} L \quad \text{is,} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

vindt men gemakkelijk:

$$\frac{1}{r'} F_1 (r' - a t) = \frac{K^2}{r'} \cos. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a} - L \right),$$

en dus:

$$\varphi'_2 = K^2 \frac{d}{d r'} \left\{ \frac{1}{r'} \cos. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a} - L\right)\right\} \cos. \mu,$$

of de differentiatie uitvoerende:

$$\varphi'_2 = \left[-\frac{K^2}{r'^2} \cos. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a} - L\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi K^2}{a T r'} \sin. \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r' - R}{a} - L\right)\right] \cos. \mu. \quad (g)$$

Evenals bij het vorige probleem moet nu de vergelijking (g), die op het b e w e g e l ij k e stelsel betrekking heeft, tot het v a s t e stelsel gereduceerd worden. Hiervoor behoeft men slechts: $r' = \sqrt{r^2 - 2 c x t + c^2 t^2}$ te substitueeren.

Voor punten, in de bewegingslijn gelegen, dus voor $r = x$, zal men nu krijgen:

$$\varphi'_2 = \left[- \frac{K^2}{r'^2} \cos. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a}{a+c} T} - \frac{r - R - a L}{a T} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi K^2}{a T r'} \sin. 2\pi \left(\frac{t}{\frac{a}{a+c} T} - \frac{r - R - a L}{a T} \right) \right] \cos. \mu.$$

Volgt men verder geheel denzelfden weg als bij het vorige probleem, dan vindt men voor punten b u i t e n de bewegingslijn, indien men ook nu weer een klein tijdsinterval beschouwt:

$$\Phi'_2 = \left[-\frac{K^2}{r'^2} \cos.\, 2\,\pi \left(\frac{t}{\dfrac{a}{a+c\cos.\mu}\,T} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{r'_{(t_1)} + c\,t_1 \cos.\,\mu - R - a\,L}{a\,T} \right) +$$

$$+ \frac{2\,\pi\,K^2}{a\,T\,r'} \sin.\, 2\,\pi \left(\frac{t}{\dfrac{a}{a+c\cos.\mu}\,T} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{r'_{(t_1)} + c\,t_1 \cos.\,\mu - R - a\,L}{a\,T} \right) \right] \cos.\,\mu,$$

waárin nu nog voor $K^2 = M^2 + N^2$ de bekende waarden kunnen gesubstitueerd worden. Ook hier wordt dus de formule van DOPPLER weêr bevestigd.

In beide boven uitgewerkte problemen is nu niet alleen gebleken, hoe bij de beweging der geluidsbron de hoogte van den waargenomen toon zal veranderen in overeenstemming met de formules van DOPPLER; maar de geheele bewegingstoestand is bekend geworden, o. a. ook de amplitudo van de snelheidspotentiaal, zoodat ook het vraagstuk der intentiteit, uit een mechanisch oogpunt beschouwd, voor beide gevallen is opgelost.

Om echter uit te kunnen maken hoe het gesteld is met de intensiteit van den geluidsindruk van het waarnemend oor, zou het noodig zijn te weten, wat men daaronder moet verstaan, zoodra men met tonen van ongelijke hoogte te doen heeft, zooals hier het geval is, waar de intensiteit van de tonen door de rustende en door de bewegende geluidsbron opgewekt, vergeleken moet worden.

Terwijl het bij de intensiteit voor tonen van dezelfde hoogte onverschillig is, of men die evenredig stelt aan de

2de macht van de amplitudo, van de maximumsnelheid, of van de condensatie, daar al deze grootheden aan elkander evenredig zijn, is dit nu niet meer het geval.

Zonder vooraf hieromtrent tot een beslissing te zijn gekomen, kan men uit mijne formules de intensiteit van den geluidsindruk niet afleiden en is het ook niet uit te maken of de formules, die KETTELER [1]) en EÖTVÖS [2]) daar voor geven, al of niet juist zijn. Dit is zeker dat, ook al was door die natuurkundigen voor de intensiteit de goede maat gebruikt, hunne uitkomsten toch niet algemeen geldend zouden zijn, daar onder anderen uit het laatste probleem blijkt, dat de grootheid, aan wier 2de macht de intensiteit evenredig zou moeten zijn, daarbij niet alleen van de 1ste macht, maar ook van de 2de macht van r' zal afhangen.

---

1) E. KETTELER, Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes, Bonn, 1873.
2) Pogg. Ann. Bd. CLII p. 513.

VIERDE HOOFDSTUK.

Ik zal ten slotte in het kort de verschillende proeven bespreken, door eenige natuurkundigen genomen, om de theorie van DOPPLER voor het geluid experimenteel te bevestigen. Terwijl BUYS BALLOT, VOGEL en MACH proeven namen, waarbij de verandering der toonhoogte door de subjectieve waarneming moest geschat worden hebben MAYER, SCHÜNGEL en QUESNEVILLE, bij hunne proeven met stemvorken, die rechtstreeksche schatting vermeden.

Hoezeer men bij de laatste proeven het groote voordeel had, dat men daarbij minder afhankelijk was van het juiste gehoor van den waarnemer, had men daarentegen het nadeel, dat de geluidsbron daarbij slechts met betrekkelijk geringe snelheid bewogen werd, en dat de uitkomsten dus alleen konden leiden tot een oordeel over de theorie van DOPPLER, voor het geval dat de bewegingssnelheid zeer klein is in verhouding tot de voortplantingssnelheid van het geluid.

Ik zal beginnen met de proeven te bespreken van MAYER, SCHÜNGEL en QUESNEVILLE.

ALFRED M. MAYER [1]) was, voor zoo verre ik weet de eerste,

---

1) Pogg. Ann. Bd. 146 bl. 110 en volgende.

die proeven nam met stemvorken, om de verandering der toonhoogte bij de beweging te onderzoeken. Hij nam vier stemvorken, waarvan n⁰. 1 en n⁰. 2 unisoon waren en 256 trillingen in de secunde gaven; n⁰. 3 gaf er 254 en n⁰. 4, 258, zoodat de beide laatste twee zwevingen deden hooren, indien zij met n⁰. 1 of n⁰. 2 (stilstaande) in trilling gebracht werden.

N⁰. 1 werd voor een projectieapparaat zóó opgesteld, dat zij werd aangeraakt door een, aan een zijden draad opgehangen, kurken balletje, en dat haar beeld en dat van het balletje op een scherm vielen. Door nu n⁰. 2 op een afstand van 30 tot 60 voet op te stellen en in trilling te brengen, bewerkte hij, dat n⁰. 1 ging mede trillen en het balletje dientengevolge werd afgestooten.

Bij het bewegen van n⁰. 2 naar n⁰. 1 toe werd, indien n⁰. 2 eerst gedurende de beweging in trilling gebracht werd, het balletje niet afgestooten; zoodra echter n⁰. 2 ophield te bewegen, weêr wel. Hetzelfde geschiedde als n⁰. 2 van n⁰. 1 af werd bewogen. Stond n⁰. 3 of n⁰. 4 stil en werd zij in trilling gebracht, dan bleef n⁰. 1 in rust en het balletje werd niet afgestooten. Werd echter n⁰. 3 met eene snelheid van 8 à 9 voet [1]) per secunde naar n⁰. 1 toe of n⁰. 4 op dezelfde wijze van n⁰. 1 af bewogen, dan werd het balletje afgestooten, zoodat dan n⁰. 1 meetrilde. Daar nu alleen unisone stemvorken met elkaâr medetrillen bleek hieruit dat n⁰. 3 gedurende de beweging een hoogeren en n⁰. 4 een lageren toon voor een bij n⁰. 1 aanwezigen waarnemer moesten doen hooren, dan zij in stilstaanden toestand zouden teweegbrengen. Het beginsel

1) In de formule: $n_1 = \frac{a}{a-c} n$,

is nu $n_1 = 256$
$n = 254$
$a = 332$ Meter,

welke waarden, in de formule gesubstitueerd, eene bewegingssnelheid: $c = 2\frac{19}{32}$ M. eischen, wat met de bij de proeven genomen bewegingssnelheid van 8 à 9 voet ongeveer overeenstemt.

van DOPPLER was hiermede dus aangetoond, al is er dan ook van een nauwkeurige quantitatieve bevestiging geen sprake.

SCHÜNGEL [1]) nam twee stemvorken, de eene met 512, de tweede met 508 trillingen in de secunde. Zoo beiden trilden en stilstonden, gaven ze dus vier zwevingen. Zoo nu I stilstond en II met zekere snelheid werd bewogen, kon men, door na te gaan, hoevele zwevingen nu in eene secunde plaats hadden, de veranderde trillingssnelheid van II, door de beweging veroorzaakt, berekenen.

SCHÜNGEL liet nu II in beweging komen juist op het oogenblik, dat een maximum van intensiteit werd waargenomen en liet de beweging ophouden eveneens op 't oogenblik van een maximum.

Bij deze proef had hij eenvoudig den duur en de snelheid der beweging na te gaan.

Door middel van een druktelegraaf en een secundenslinger maakte hij een zelfregistreerend uurwerk, dat op een strook papier elke secunde op een bepaalden afstand een indruk gaf met een stift. Door middel van een stroomsluiter kon de waarnemer het begin en het einde van de beweging van II aangeven en gedurende dat tijdsverloop bracht de zoo even genoemde stift op de papierstrook eene lijn voort, waardoor nu gemakkelijk de tijd kon berekend worden, daar men slechts behoefde te weten hoe vele malen de afstand van twee opeenvolgende, door de stift teweeggebrachte indrukken, op de lengte dier lijn begrepen was, om het aantal secunden te verkrijgen. Ook de beweging der stemvork, die op een wagentje bevestigd was, had door den sleutel des waarnemers plaats. Door namelijk den stroom te sluiten, trok een zich in de keten bevindende electromagneet een anker aan, dat het eene uiteinde van een tweearmigen hefboom vormde; het andere uiteinde

1) Pogg. Ann. Bd. 150 bl. 356 en volgende.

droeg een beugel, waarin zich de as eener kleine draaibare schijf bevond. Door aantrekking van het anker werd deze schijf tegen den rand eener andere, eveneens om hare as gemakkelijk beweegbare schijf aangedrukt. Om de laatste schijf was een koord geslagen, dat ook aan het wagentje van de stemvork bevestigd was. De schijf van den beugel werd door een vliegwiel in voortdurende wenteling gehouden, zoowel bij aanraking als bij niet aanraking der schijf.

Aldus werd, door het sluiten van den stroom door den waarnemer, de schijf en dus het wagentje, in eenparige beweging gebracht. Werd de sleutel weêr opgeheven, dan werd het anker door eene veer van den electromagneet afgetrokken: op hetzelfde oogenblik werd de beugelschijf van de tweede schijf verwijderd en een aan den beugel bevestigd mes greep in den rand der 2de schijf, waardoor deze stilstond en ook de beweging van het wagentje met de stemvork ophield. Wel liep het wagentje nog een eind door wegens de traagheid; maar, door het zoover terug te trekken tot de koord gespannen was, kreeg men het op de juiste plaats.

Door nu den weg, dien het wagentje had afgelegd en den duur der beweging te meten, vond hij de snelheid c.

Noemt men het aantal zwevingen per seconde s en het door de beweging veranderde trillingsgetal n', dan zal uit de waarnemingen $n' = 512 - s$ volgen en, uit de formule van DOPPLER: $n' = \frac{n\,a}{a - c}$; deze beide waarden genomen bij eene beweging naar I toe, waarbij $n = 508$.

Beweegt men I daarentegen van II af, dan zal $n' = 508 + s$ zijn, volgens de waarneming, en $n' = \frac{n\,a}{a + c}$, volgens DOPPLERS formule, waarbij nu $n = 512$ is. SCHÜNGEL geeft nu de volgende tabellen als resultaat zijner proeven, waarvan de 1°. tabel op de naderende, de 2°. op de zich verwijderende stemvork betrekking heeft.

Tabel I: $n = 508$.

	a	c	s	$n' = 512 - s$	$n' = \frac{n\,a}{a - c}$	Verschil.
1	342,21 M.	0,90 M.	2,8 —	509,2 +	509,3 +	0,1
2	„	0,90 „	2,6 +	509.4 —	509,3 +	0,1
3	„	0,93 „	2,6 +	509,4 —	509,4 —	0,0
4	„	0,94 „	2,6 +	509,4 —	509,4 —	0,0
5	„	0,94 „	2,6 —	509,4 +	509,4 —	0,0
6	„	0,95 „	2,7 —	509,3 +	509,4 —	0,1
7	„	0,96 „	2,5	509,5	509,4 +	0,1
8	„	0,97 „	2,6 —	509,4 +	509,4 +	0,0
9	„	0,98 „	2,6 —	509,4 +	509,5 —	0,1
10	„	1,01 „	2,5 +	509,5 —	509,5	0,0
11	„	1,01 „	2,5 +	509,5 —	509,5 +	0,0
12	„	1,02 „	2,5 —	509,5 +	509,5 +	0,0
13	„	1,03 „	2,5 —	509,5 +	509,5 +	0,0
14	„	1,04 „	2,4 +	509,6 —	509,5 +	0,1
15	„	1,05 „	2,3 +	509,7 —	509,6 —	0,1
16	„	1,06 „	2,5 —	509,5 +	509,6 —	0,1
17	„	1,10 „	2,4 —	509,6 +	509,6 +	0,0
18	„	1,11 „	2,3 —	509,7 +	509,7 —	0,0

Tabel II: $n = 512$.

	a	c	s	$n' = 508 + s$	$n' = \frac{n\,a}{a + c}$	Verschil.
1	340,36 M.	0,91 M.	2,7 +	510,7 +	510,6 +	0,1
2	„	0,91 „	2,5 +	510,5 +	510,6 +	0,1
3	„	0,92 „	2,7 +	510,7 +	510,6 +	0,1
4	„	0,92 „	2,6 +	510,6 +	510,6 +	0,0
5	„	0,95 „	2,5 —	510,5 —	510,6 —	0,1
6	„	0,96 „	2,6 —	510,6 —	510,6 —	0,0
7	„	0,97 „	2,5 +	510,5 +	510,5 +	0,0
8	„	0,97 „	2,5 +	510,5 +	510,5 +	0,0
9	„	0,98 „	2,6 —	510,6 —	510,5 +	0,1
10	„	0,98 „	2,6 —	510,6 —	510,5 +	0,1
11	„	1,00 „	2,5 +	510,5 +	510,5 —	0,0
12	„	1,01 „	2,5 —	510,5 —	510,5 —	0,0
13	„	1,02 „	2,5 —	510,5 —	510,5 —	0,0
14	„	1,04 „	2,4 +	510,4 +	510,4 +	0,0
15	„	1,05 „	2,3 +	510,3 +	510,4 +	0,1

In beide tabellen vindt men het verschil van de waargenomen en de, volgens de formules van DOPPLER, berekende waarden van n' aangegeven. Men ziet hieruit dat, bij een zoo kleine bewegingssnelheid in verhouding tot de voortplantingssnelheid van het geluid, de formules van DOPPLER vrij goed doorgaan, wat geheel in overeenstemming is met de hiervoren ontwikkelde theorie.

Eindelijk heeft ook QUESNEVILLE [1]) proeven genomen met stemvorken.

De toestel, waarmede hij werkte, was als volgt ingericht: Twee vertikale buizen, ieder 1.20 M. lang, en met eene middellijn van 0.015 M. liepen van onderen in éénе buis samen, die door middel van eene caoutchouc slang verbonden was met een kastje, dat als resonator fungeerde, en waarover een dun vlies met stift gespannen was. Het boveneinde van de eene vertikale buis geleidde naar een resonator, waarvoor een stemvork door middel van een electrischen stroom in trilling kon gehouden worden, (ongeveer 512 trillingen in de secunde).

In de andere buis kon een koperen cilinder met zachte wrijving op en neêr bewogen worden.

Die cilinder kwam van boven uit aan een bewegelijken resonator met electrisch trillende stemvork (502 trillingen).

De beweging van dien resonator met stemvork werd verkregen door een koord, er over heen geslagen, dat over een rad liep, met een handkruk voorzien.

Om graphisch den weg te bepalen, dien de beweegbare resonator had afgelegd, was hij door een geleiddraad verbonden aan een electrisch registreertoestel: de stroom ging alleen door op het oogenblik dat de beweging begon, en op dat, waarin zij eindigde, en bracht op die oogenblikken een indruk teweeg op den wentelenden cilinder. Naast

---

1) Thèses, présentées à la faculté des sciences de Paris pour le doctorat ès sciences physiques par M. GEORGE QUÉSNEVILLE.

dezen cilinder was nog een derde stift op een stemvork van KOENIG geplaatst, die den tijd moest meten. Op deze wijze kon dus nauwkeurig aangegeven worden het aantal trillingen, dat het vlies onderging, in den tijd, door de stemvork van KOENIG aangegeven, en terwijl de bewegelijke stemvork een aangegeven weg had afgelegd.

Door eene proef werd eerst aangetoond, dat het aantal trillingen van het vlies overeenkwamen met dat van den trillenden stemvork.

De invloed van den electrischen stroom op de stemvorken werd bij de methode der zwevingen geheel opgeheven, daar hij hierbij voor beide stemvorken even groot was.

Behalve de methode der zwevingen heeft QUESNEVILLE ook nog toegepast de methode om het aantal trillingen van de bewegende stemvork zelf rechtstreeks te bepalen.

De onduidelijkheid, waarmede QUESNEVILLE zijne proeven heeft beschreven, niettegenstaande zijne uitvoerige dissertatie, belet mij daarvan een behoorlijk duidelijk uittreksel te geven. Ik moet mij er daarom toe bepalen enkele zijner resultaten op te teekenen.

Bij eenige proeven, waarbij het aantal trillingen (niet zwevingen) werd geregistreerd, komt hij tot de volgende tabel (t. a. p. bl. 43), die het verschil van het aantal trillingen van de rustende en van de bewogen stemvork aangeeft.

	Waargenomen.	Berekend.	Verschil.	
	$n' - n$.			
N⁰. 9	0,63	0,75	— 0,12	DALING DER STEMVORK.
„ 10	0,71	0,70	+ 0,01	
„ 11	0,77	0,72	+ 0,05	
	$n' - n$.			
N⁰. 9	0,78	0,73	+ 0,05	STIJGING DER STEMVORK.
„ 10	0,95	0,85	+ 0,10	
„ 11	0,76	0,90	— 0,14	

Hierbij is n het aantal trillingen door de stilstaande, n' dat door de bewegende stemvork aan het vlies medegedeeld. Daar bij deze methode, zooals QUESNEVILLE op bl. 43 zijner dissertatie zelf opmerkt, de in de laatste kolom aangegeven verschillen tusschen de waargenomen en berekende waarden van de orde zijn der waarnemingsfouten, kan zij niet geschikt geacht worden om de formules van DOPPLER door de proeven te beoordeelen en verdient daarom de methode der zwevingen verreweg de voorkeur.

Nadat eerst de trillingsgetallen der beide stemvorken bepaald waren en daaruit het aantal ontstaande zwevingen in éene secunde, indien beide stemvorken trilden, doch op hare plaats bleven, werd de chronographische stemvork van KOENIG in trilling gebracht, nadat men eerst de bewegelijke stemvork in haar hoogsten stand had geplaatst.

Daarna werd op een signaal van den persoon, die den cilinder met roetzwart deed draaien, door een ander persoon de kruk in beweging gebracht en ging de bewegelijke stemvork ten gevolge daarvan met zooveel mogelijk eenparige snelheid naar beneden. Dezelfde beweging werd daarna in tegengestelden zin gegeven.

Een trilling van de chronographische stemvork besloeg eene lengte van ongeveer 3 m. M. zoodat èn de bepaling der zwevingen èn die van den door de bewegelijke stemvork doorloopen weg, beiden met betrekking tot het aantal trillingen van de chronographische stemvork, zeer nauwkeurig kon geschieden.

Daar de inschrijvingen van de stift, die op het trillende vlies bevestigd was en het aantal zwevingen opteekende op den cilinder, zich over eene lengte van 7 à 9 c. M. uitstrekten, was het mogelijk de onderdeelen van zwevingen zeer nauwkeurig te bepalen.

Tevens kon men daardoor nagaan of de beweging van de stemvork eenparig of veranderlijk was niet alleen, maar zelfs de geringste veranderingen vielen dadelijk in het oog op elk punt van den weg.

Ik zal nu, daar het niet wel mogelijk is een résumé te geven van de verschillende proeven, mij bepalen tot het aangeven van de verschillen tusschen de waargenomen en de volgens de formule van DOPPLER berekende waarden der trillingsgetallen, vermeld in de laatste rubriek δ van een paar tabellen, die als eindresultaten van QUESNEVILLE's proeven en berekeningen kunnen beschouwd worden.

In de 1ste tabel, op blz. 73 van QUESNEVILLE's proefschrift, vindt hij, bij eene serie van negen proeven, voor δ de navolgende waarden:

$+0,11$, $+0,14$, $+0,09$, $+0,16$, $+0,15$,
$+0,14$, $+0,13$, $+0,14$, $+0,13$.

In de 2de tabel, bij eene serie van tien proeven, t. a. p. blz. 80:

$+0,13$, $+0,16$, $+0,13$, $+0,13$, $+0,06$,
$+0,13$, $+0,07$, $+0,13$, $+0,13$, $+0,09$.

Uit de 19 waarnemingen, in deze beide tabellen opgeteekend, blijkt dat de verschillen tusschen de waarnemingen en berekeningen volgens DOPPLERS formules constant positief zijn en eene gemiddelde waarde hebben van $+0,14$.

Waren deze verschillen aan waarnemingsfouten toe te schrijven, dan zouden zij beurtelings positief en negatief moeten zijn, zooals bij SCHÜNGEL's proeven.

Evenzeer blijkt uit de tabellen dat de verschillen niet afhangen van de verschillende snelheden, waarmede de stemvork bewogen werd; want terwijl b. v. bij de 10de en 16de proef deze snelheden omgekeerd evenredig zijn met de getallen 194,0 en 315,75, zijn de verschillen bij die beide proeven even groot, namelijk $+0,13$.

Daar al de verschillen zeer weinig van hun gemiddeld bedrag afwijken, lag het voor de hand ze aan een constante fout van het instrument toe te schrijven. QUESNEVILLE meende die te moeten zoeken in de eigen trillingen van het vlies, dat met elk der stemvorken een aantal zwevingen deed hooren. Was dit aantal even groot, indien of de stilstaande of de bewegende stemvork met het vlies trilde, dan zouden, meende QUESNEVILLE, zoo beide tegelijk trilden, de zwevingen, door het vlies ontstaan, opgeheven worden; dit was echter zooals, volgens hem, uit zijne proeven bleek niet het geval en hij beweert daarom uit die proeven te kunnen afleiden, dat de invloed van het vlies eene positieve afwijking van de berekende waarde gaf, groot $+ 0{,}11$. Indien men nu de in bovenstaande tabellen gevonden verschillen δ met $+ 0{,}11$ vermindert, ziet men dat de resten zoo klein worden, dat de proeven gerust als volkomen in overeenstemming met DOPPLERS formules kunnen worden beschouwd.

Ik wensch nog een oogenblik bij die beschouwingen van QUESNEVILLE over den invloed van de elasticiteit van het vlies op het aantal zwevingen stil te staan. Duidelijk zijn die beschouwingen al weêr niet.

Uit de opmerking, p. 82 zijner dissertatie, dat, zoo het vlies trilde met de stilstaande of bewegende stemvork, wier trillingsgetal 502 was, er dan in ongeveer $1/2$ secunde ééne zweving zou ontstaan, zou, dunkt mij, moeten volgen, dat het trillingsgetal van het vlies was: 500 of 504. Uit een latere opmerking, op dezelfde pagina, dat het vlies met de stemvork, wier trillingsgetal 512 was, trillende, in ruim $1/2$ secunde éëne zweving deed ontstaan, zou echter volgen, dat het trillingsgetal van het vlies 510 ruim of 514 bijna zou moeten zijn. Deze twee gevolgtrekkingen zijn met elkander in strijd. Maar, zelfs indien deze tegenstrijdigheid niet bestond, heeft QUESNEVILLE, dunkt mij, het recht niet het aantal zwevingen, dat de beide stemvorken samen geven, met het verschil van de zwevingen van het vlies met de eene en met de andere stemvork afzonderlijk verkregen te vermeerderen, en dan te beweren, dat hij op die wijze het aantal zwevingen zal verkrijgen, die gedurende het te gelijker tijd trillen van de beide stemvorken en het vlies zullen ontstaan. Ik geloof niet dat deze bewering theoretisch te bewijzen is: ik ben daarin althans niet geslaagd.

Ik kom nu tot de andere serie van proeven, genomen door BUYS BALLOT, VOGEL en MACH.

BUYS BALLOT [1]) plaatste langs den spoorweg tusschen Utrecht en Maarssen drie geoefende musici op verschillende punten en op een afstand van 1 à 2 M. van de rails, allen voorzien van signaalhoorns, die vooraf gelijk gestemd waren en plaatste één eveneens met een signaalhoorn gewapend musicus op een locomotief die tusschen Utrecht en Maarssen met zooveel mogelijk gelijkmatige snelheid heen en weêr reed. Door nu beurtelings den hoornblazer op de locomotief en die, langs den weg geposteerd, een vooraf overeengekomen toon te doen aangeven, kreeg hij in 't eerste geval eene bewegende geluidsbron en een stilstaanden waarnemer, in het laatste geval een bewegenden waarnemer en eene stilstaande geluidsbron. Hoewel zijne proeven, op 3 en 5 Jnni 1845 genomen, een verandering der toonhoogte in den zin van DOPPLER's theorie opleverden, hebben zij alleen eene qualitatieve waarde. De redenen, die tot dit niet ten volle bevredigend resultaat leidden, geeft BUIS BALLOT zelf in de boven aangehaalde verhandeling op.

VOGEL [2]) nam insgelijks proeven met een locomotief op den spoorweg tusschen Keulen en Minden in den zomer van 1875. Terwijl bij de proeven van BUYS BALLOT met signaalhoorns het g e r u i s c h, door de locomotief veroorzaakt, het den waarnemer onmogelijk maakte, den juisten toon van den signaalhoorn te schatten en die toon bij de eerste serie proeven soms in het geheel niet kon worden gehoord, doordien hij geheel door dit geruisch werd overstemd, vermeed VOGEL dit bezwaar, door in plaats van signaalhoorns de stoomfluit van de locomotief zelf tot het aangeven

1) Pogg. Ann. Bd. 66; blz. 321 en volgende.
2) Pogg. Ann. Bd. 158. blz. 287 en volgende.

van den toon te gebruiken, waardoor hij bovendien nog het voordeel had, dat dit geluid veel intensiever was, dus reeds op aanmerkelijken afstand kon gehoord en dientengevolge langduriger waargenomen worden, waardoor eene betere schatting van den toon mogelijk werd. Hij liet de stoomfluit eerst aanspreken, als de locomotief reeds gedurende geruimen tijd in beweging was, om daardoor te verkrijgen, dat de bewegingssnelheid gedurende de waarnemingen zooveel mogelijk eenparig bleef. De stoomfluit werd bij het beginstation plotseling geopend en eerst bij het eindstation (3 à 4 minuten later) gesloten, ten einde zeker te zijn dat de kraan, gedurende den loop der waarnemingen aan het middenstation, dus bij naderende en zich verwijderende locomotief, even ver geopend was. Tevens werd er voor gezorgd, dat gedurende dien tijd de stoomspanning in den ketel zooveel mogelijk constant bleef.

Indien de locomotief niet al te dicht bij den waarnemer was, liet de zuiverheid van den toon bijna niets te wenschen over en de toon was bij geheele opening der kraan bijna: $\overline{\overline{\overline{c}}}$. Vogel deed acht waarnemingen voor de naderende, en eveneens acht voor de zich verwijderende locomotief. Bij de drie eerste proeven werd, om de bewegingssnelheid te berekenen, door een verrekijker het oogenblik waargenomen, dat door de opening der stoomfluit de stoom te voorschijn kwam en dat, waarop hij, bij sluiting verdween, waardoor de tijd bekend werd, dien de locomotief gebruikte om van het beginstation naar het eindstation te stoomen. Bij de volgende proeven werden deze tijdstippen ook op de locomotief waargenomen en bij alle proeven ook de tijd, waarop de locomotief het waarnemingsstation passeerde.

Daar echter uit de drie eerste proeven bleek, dat de snelheid van het beginstation tot het waarnemingsstation niet gelijk was aan die tusschen het waarnemings- en het eindstation, werd een proefrit gemaakt, waarbij op de locomotief de tijdstippen werden waargenomen, waarop de langs den weg geplaatste mijlpalen gepasseerd werden en hieruit eene snelheidstabel opgemaakt.

De tijden, bij dezen proefrit benoodigd, om de wegen van het begin- tot het waarnemingsstation af te leggen en die van het waarnemingsstation naar het eindstation, stemmen in verhouding zoo nauwkeurig overeen met de tijden, daarvoor bij de verschillende proeven benoodigd, dat VOGEL geen reden vond, om voor de aangroeiing der snelheden bij de proeven eene andere wet aan te nemen dan de bovenbedoelde.

De toonhoogte en hare verandering werden waargenomen met behulp eener viool, op wier hals een verdeelde schaal was aangebracht en waarvan de *a*- en de *e*-snaar waren gestemd naar een stemvork van KOENIG. De stemming werd dikwijls herhaald en, zoodra er eene geringe verandering was ontstaan door de warmte als anderszins, werd die onmiddelijk gecorrigeerd. Door een zeer scherpe houten wig werden telkens de snaren tegen de verdeelde schaal aangedrukt om den toon te zoeken, die met den waargenomen toon van de stoomfluit overeenkwam.

Om nu de trillingsgetallen dier toonen te kennen, was eene tabel opgemaakt.

Ongeveer ééne minuut na het passeeren van het beginstation, werd de toon voor den waarnemer krachtig genoeg; $^3/_4$ minuut later, te sterk. Het wachthuisje, waarin de waarnemer zich bevond, werd dan gesloten tot de locomotief reeds $^1/_4$ minuut het waarnemingsstation voorbij was; dan werd de toonverandering weêr gedurende $^3/_4$ minuut waargenomen. Gedurende den tijd, waarin de waarnemingen voor de naderende of vertrekkende locomotief gedaan werden, veranderde de snelheid, waarmede deze zich bewoog, respectievelijk van 18,8 tot 19,2 M. en van 19,2 tot 19,4 M., dus bij de laatste waarnemingen bedroeg de snelheidsverandering de helft minder dan bij de eerste. VOGEL merkt ook op, dat terwijl bij de waarnemingen voor de zich verwijderende locomotief de toonhoogte gedurende den waarnemingstijd slechts onmerkbaar veranderde, die bij het naderen der locomotief dikwijls hooger werd. Het hier opgemerkte geldt voor de vier eerste proeven: de door VOGEL verkregen resultaten voor de zich verwijderende geluidsbron zijn dus daarbij meer betrouwbaar dan die voor de naderende. Bij de vier laatste proeven bedroeg de totale weg, door de locomotief afgelegd, slechts 0,5 K.M., terwijl de snelheid zooveel minder dan bij de eerste proeven was, dat de locomotief heen en weêr kon rijden met gelijke snelheid, zoodat men waarnemingen kon doen met den wind voor of tegen. VOGEL geeft van zijne resultaten de volgende tabel, waarin *n* en *v* beteekenen de richting van beweging naar den waarnemer toe en van hem af:

Proeven.	Richting.	Snelheid.	Trillingsgetallen.		Verschil.
			Waargenomen.	Berekend.	
1	*n*	18,5	2089,0	2078,2	— 10,8
	v	18,8	1857,9	1867,8	+ 9,9
2	*n*	19,3	2118,2	2111,8	— 6,4
	v	19,6	1878,1	1889,0	+ 10,9
3	*n*	15,0	2092,9	2089,8	— 3,1
	v	15,8	1912,2	1914,1	+ 1,9
4	*n*	19,5	2185,5	2192,2	+ 6,7
	v	19,9	1964,7	1959,1	— 5,6
5	*n*	7,75	1943,7	1934,4	— 9,3
	v		1842,3	1850,7	+ 8,4
6	*n*	8,62	1943,7	1935,9	— 7,8
	v		1836,4	1843,0	+ 6,6
7	*n*	7,58	1791,0	1789,5	— 1,5
	v		1714,1	1713,8	— 0,3
8	*n*	7,52	1652,6	1654,3	+ 1,7
	v		1587,8	1585,0	— 2,8

Waarin de reden van de afwijkingen van de proeven met de theorie is te zoeken is, geloof ik, nog eene onopgeloste questie.

QUESNEVILLE, die zeer uitvoerig de proeven van VOGEL bespreekt, merkt eerst op dat de proeven met groote nauwkeurigheid zijn genomen; maar is minder ingenomen met de wijze, waarop VOGEL die proeven heeft beschreven en met de door hem daaruit getrokken conclusies. Terwijl VOGEL zelf de door hem verkregen resultaten vrij bevredigend noemt en de afwijkingen van DOPPLERS formules meent te moeten toeschrijven aan de verandering van de spanning van den stoom gedurende de beweging, laat QUESNEVILLE zich met deze redeneering niet tevreden stellen, maar besluit de proeven van VOGEL aan een streng onderzoek te onderwerpen.

Zonder dit in bizonderheden te volgen, wil ik toch even vermelden tot welke conclusie QUESNEVILLE meent te moeten komen.

Hij kan de afwijkingen van de proeven van de theorie niet verklaren uit waarnemingsfouten of constante fouten van het instrument en beweert daarom, dat zij ontstaan, omdat de voortplantingssnelheid van het geluid gedurende de beweging der locomotief verandert. Het bewijs daarvoor heeft hij echter, mijns inziens, niet gegeven. Het spreekt van zelf dat wanneer in 't algemeen eene functie van eenige grootheden te groot of te klein is, men dan door een der grootheden te veranderen, ook al licht voor de functie de goede waarde zal kunnen vinden. Evenzoo met de proeven van VOGEL. Zij wijken van de theorie af. Een der grootheden, die bij de berekening der getallen in aanmerking komt, is de voortplantingssnelheid van het geluid Laat men die slechts behoorlijk veranderen gedurende de beweging, dan is de overeenstemming wel te krijgen tusschen theorie en waarneming. Maar mag men nu met eenig recht zeggen: Omdat, door het veranderlijk stellen der voortplantingssnelheid van het geluid, de proeven met de theorie in overeenstemming kunnen gebracht worden, daarom zal ook die voortplantingssnelheid veranderen?

Het komt mij voor dat QUESNEVILLE de questie van de niet-overeenstemming der proeven met de theorie niet heeft opgelost.

Ook is het mogelijk, dat de proeven niet geheel met de theorie kunnen worden vergeleken, daar toch bij afleiding der theoretische formules is uitgegaan van de trillingen van een vast lichaam en men hier met den stoom en de stoomfluit te doen heeft.

Men kan zich echter altijd om die stoomfluit en de locomotief heen een oppervlak denken, dat een bepaalden trillingstoestand heeft, veroorzaakt door de binnen dit oppervlak door de stoomfluit opgewekte trillingen, en nu de zaak zoo beschouwen, dat dit oppervlak trillingen uitzendt; het schijnt mij dus wel toe, dat de vroeger verkregen theoretische uitkomsten ook in dit geval moeten gelden.

MACH, die eveneens verschillende proeven heeft genomen om de theorie van DOPPLER te beproeven, meent dat ook de terugkaatsing der geluidstralen door den bodem niet zonder invloed blijft. Zooveel is zeker, dat er in dit opzicht nog veel te onderzoeken overblijft.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De door DOPPLER afgeleide formules voor de maat der verandering van de toonhoogte bij beweging van de geluidsbron of van den waarnemer gelden volkomen streng, indien de afstand van den waarnemer en de geluidsbron nog zóó groot is, dat de invloed der strooming verwaarloosd kan worden en de geluidsgolven, die het oor des waarnemers bereiken, als platte golven mogen beschouwd worden.

II.

De wijze, waarop QUESNEVILLE de constante fout van zijn instrument tracht te verklaren uit de eigen trillingen van het gespannen vlies, is onduidelijk en de door hem aangebrachte correctie niet gemotiveerd.

III.

De bewering van EXNER, dat het potentiaalverschil bij het contact van twee metalen met de warmteontwikkeling bij hunne oxydatie zou samenhangen wordt noch door zijne theoretische beschouwingen, noch door zijne proeven aannemelijk gemaakt.

IV.

De door DR. JULIUS in zijne „Beschouwingen over de grondslagen der Natuurkunde" p. 25 gegeven ontwikkeling van het begrip massa is af te keuren.

V.

De bewijsvoering voor de bepaling der intensiteit bij het buigingsbeeld, ontstaan door een groot aantal evenwijdige draden, die op ongelijken afstand van elkander geplaatst zijn, zooals die in Verdet's „Leçons d'Optique Physique, deel I, p. 298—299 gegeven wordt, is niet goed te keuren.

VI.

Ten onrechte zegt SCHLÖMILCH (Comp. d. Höh. Analysis, 2de deel, p. 285): „Soll nun das Produkt $U_1 U_2 U_3 U_4$ nur gerade Potenzen von y enthalten, so müßen die in $U_1 U_2$ und $U_3 U_4$ vorkommenden Coëfficienten von y verschwinden."

VII.

De stelling van FLAMMARION (C. R. 27 Juni 1881): „Les queues des comètes ne peuvent pas être matérielles", steunt op geen deugdelijke gronden.

VIII.

Te recht wordt in vele leerboeken der scheikunde van den lateren tijd, bij de behandeling der scheikundige grondstoffen, de waterstof vooropgesteld.

IX.

De afleiding van het kenmerk van integreerbaarheid van EULER, volgens de methode van MAYR, voorkomende in DR. DE JONGH's Academisch Proefschrift: „De integreerende factor en de integreerende vergelijking" is foutief ten gevolge eener verkeerd gekozene notatie.

X.

Bij het wiskundig onderwijs aan middelbare scholen voor meisjes moet de rekenkunde op den voorgrond gesteld worden, daarna de meetkunde en eerst in de laatste plaats de algebra in aanmerking komen.

XI.

Ten onrechte beweert QUESNEVILLE, dat uit de proeven van VOGEL moet volgen, dat daarbij de voortplantingssnelheid van het geluid gedurende de beweging der locomotief veranderde.

XII.

De tegenwoordig aangenomene constante der aberratie verdient, omdat zij berust op waarnemingen door één persoon op éene wijze verricht, niet dat vertrouwen, dat men haar schenkt. Hare hernieuwde bepaling ook uit de eclipsen der Jupiter-Satellieten is zeer wenschelijk.

XIII.

Herexamina zijn alleen dan goed te keuren, indien zij als straf voor gebrek aan vlijt, den leerlingen worden opgelegd.

E R R A T A.

Blz.	32,	reg. 7 v. b.	*staat:*	$\frac{a_2}{k-1}$	*lees:*	$\frac{a^2}{k-1}$
„	33,	„ 2 v. b.	„	$+ \mathrm{F} \frac{\partial_2 \phi^2}{\partial z^2}$	„	$+ \mathrm{F} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}$
„	33,	„ 13 v. o.	„	van t en s	„	van t, en s
„	34,	„ 5 v. b.	„	oplossingen elk	„	oplossingen, elk
„	45,	„ 3 v. b.	„	$-2c \frac{\partial^2 \phi'_2}{\partial x \, \partial t}$	„	$-2c \frac{\partial^2 \phi'_2}{\partial x' \, \partial t}$
„	48,	„ 5 v. o.	„	$\sin. \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \left(t - \frac{r - ct - \mathrm{R}}{a} \right)$,	*lees:*	$\sin. \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \left(t - \frac{r - ct - \mathrm{R}}{a} \right) \Big\}$,
„	50,	„ 1 v. o.	„	$- \frac{c(x - ct)}{r'_{(t_1)}}$	*lees:*	$- \frac{c(x - ct_1)}{r'_{(t_1)}}$
„	55,	„ 11 v. o.	„	intentiteit	„	intensiteit

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.