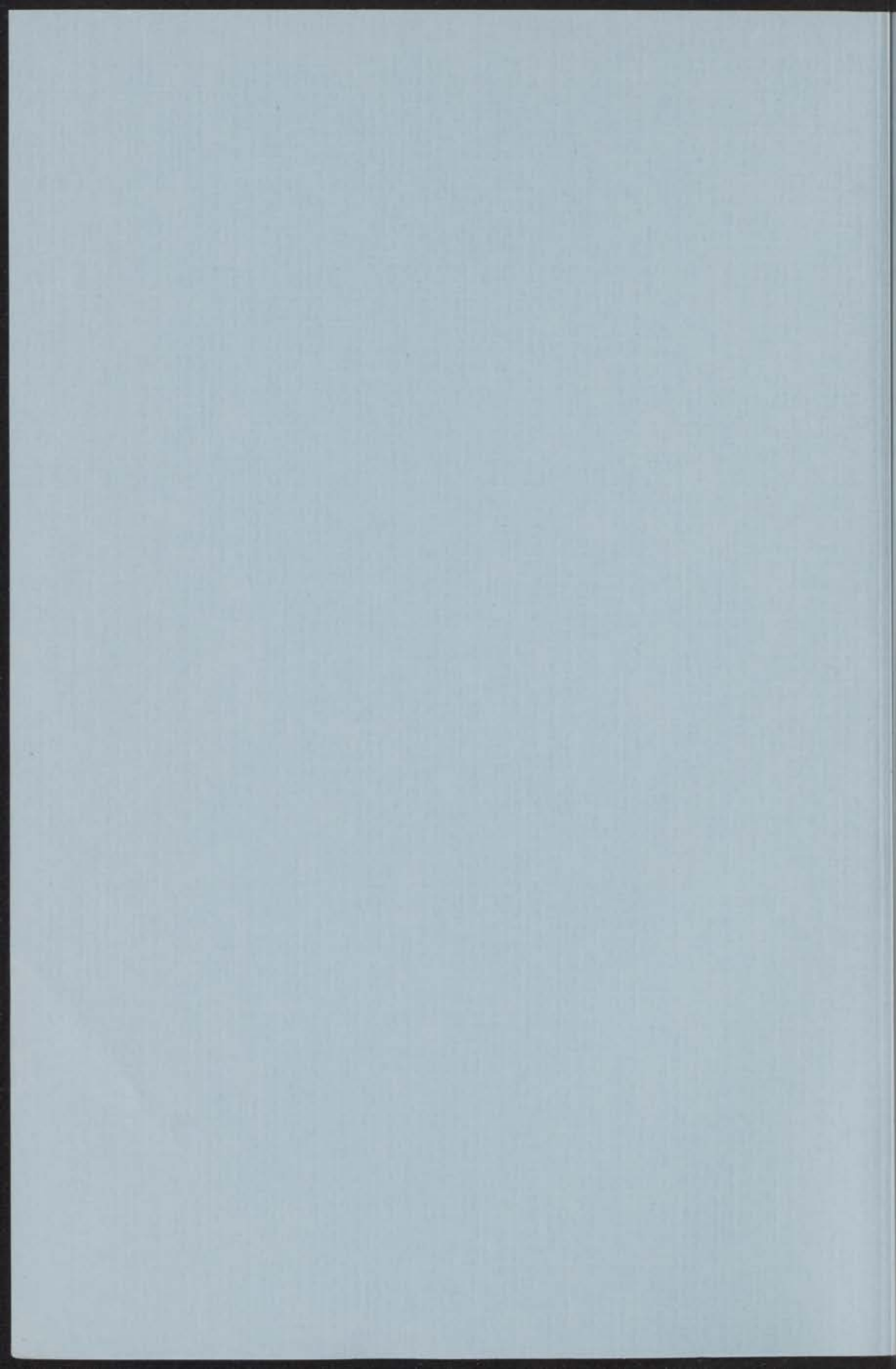


DE VERANDERING VAN DE DEMPING VAN HET
TWEDE GELUID ONDER INVLOED VAN EEN
STATIONAIRE NORMALE EN SUPERFLUIDE STROMING

INSTITUUT-LORENTZ
voor theoretische natuurkunde
Nieuwsteeg 18-Leiden-Nederland

T. M. WIARDA



2 OKT. 1967

DE VERANDERING VAN DE DEMPING VAN HET
TWEEDE GELUID ONDER INVLOED VAN EEN
STATIONAIRE NORMALE EN SUPERFLUIDE STROMING

PROEFSCHEFT

VAN VERWIJZING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN
DE WISSENSCHAPPEN IN FYSICA AAN
DE RIJSCHE UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GELEG VAN
DE RECTOR MAGISTRUS DR. P. M. J. VAN
DER WOUDE, IN DE FACULTEIT DER WISSENSCHAP-
PEN, OVER DE VERANDERING VAN DE DEMPING VAN HET
TWEEDE GELUID ONDER INVLOED VAN EEN
STATIONAIRE NORMALE EN SUPERFLUIDE STROMING

TE LEIDEN

1967

THOMAS MOSEWIARD

Geboorte te Rotterdam in 1932

kast dissertaties

1967

"WUNDE-OFST" ROTTERDAM

1911

DE VERBODING VAN DE BERING VAN HET
WATER GELIJK ONDERMIDDELD VAN DEN
NATIONALE HOOGSCHOOL VAN SURINAME, SURINAME

Van de

DE VERANDERING VAN DE DEMPING VAN HET
TWEEDE GELUID ONDER INVLOED VAN EEN
STATIONAIRE NORMALE EN SUPERFLUIDE STROMING

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN
DE WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN AAN
DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN
DE RECTOR MAGNIFICUS DR P. MUNTENDAM,
HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,
TEN OVERSTAAN VAN EEN COMMISSIE UIT DE SENAAAT
TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 2 OKTOBER 1967
TE 15 UUR

DOOR

THOMAS MONTE WIARDA

Geboren te Rotterdam in 1936

1967

"BRONDER-OFFSET" ROTTERDAM

DE VERANDERING VAN DE DAMPING VAN HET
TWEDE GELUID ONDER INVLOED VAN EEN
STATIONAIRE NORMALE EN SUPERLUIDE STROMING

PROMOTOR: PROF. DR K. W. TACONIS

Dit proefschrift is tot stand gekomen onder leiding van
Dr H. C. Kramers

DOOR

THOMAS MONTE WASSA

afgeleverd te Groningen in 1934

1934

DRUKKERIJ "DE WINDMOLEN" - G. J. VAN DER WOUDE

INHOUD

	pag.
HOOFDSTUK I	
Inleiding	9
1 Algemene eigenschappen van vloeibaar helium	9
2 Stromingseigenschappen	12
2a Stromingen zonder netto massatransport	12
2b Wervellijnen theorie	14
3 Stromingen met netto massatransport	14
3a Proeven van Staas, Van Alphen en Taconis	14
3b Stromingen onder invloed van een drukgradiënt	17
3c Stromingen onder invloed van een temperatuur en drukgradiënt	17
4 Verantwoording van de experimenten	18
HOOFDSTUK II	
Het tweede geluid	21
1 Eigenschappen van het tweede geluid	21
2 De resonator	25
3 De bepaling van de extra demping	30
HOOFDSTUK III	
De opstelling en meetapparatuur	34
1 De opstelling	34
2 Principe van de temperatuurregelaar	35
3 Apparatuur voor de metingen van het tweede geluid	37
4 Enige berekeningen over de bepaling van de bandbreedte van een resonantiekromme	41

	pag.
5 De stookschakelingen	43
 HOOFDSTUK IV	
Metingen zonder netto massatransport	45
1 Algemene eigenschappen	45
2 Constructie van de resonatoren	46
3 De meetresultaten van enkele resonatoren	47
 HOOFDSTUK V	
Het stromingstoestel	54
1 De constructie en werking	54
2 Foutenbeschouwing	58
3 Enkele controles op de werking	60
 HOOFDSTUK VI	
De zuivere superfluide en normale stroming	62
1 De zuivere superfluide stroming	62
2 De zuivere normale stroming	65
 HOOFDSTUK VII	
Verdere waarnemingen met het destillatietoestel	69
1 Inleiding	69
2 De meetseries	69
3 Gezamenlijke resultaten	73
4 Mogelijkheid van interpretatie	77
5 Nadere bespreking van de resultaten met het rondstroomtoestel verkregen	79
6 Enkele temperatuurverschil metingen	86
7 Enkele metingen aan een gesloten superfluide circuit	87
 SUMMARY	 90

102		
44	De vindingen	2
	HOOFDSTUK IV	
45	De vindingen van de vindingen	1
46	De vindingen van de vindingen	2
47	De vindingen van de vindingen	3
	HOOFDSTUK V	
48	De vindingen van de vindingen	1
49	De vindingen van de vindingen	2
50	De vindingen van de vindingen	3
	HOOFDSTUK VI	
51	De vindingen van de vindingen	1
52	De vindingen van de vindingen	2
53	De vindingen van de vindingen	3
54	De vindingen van de vindingen	4
55	De vindingen van de vindingen	5
	HOOFDSTUK VII	
56	De vindingen van de vindingen	1
57	De vindingen van de vindingen	2
58	De vindingen van de vindingen	3
59	De vindingen van de vindingen	4
60	De vindingen van de vindingen	5
	HOOFDSTUK VIII	
61	De vindingen van de vindingen	1
62	De vindingen van de vindingen	2
63	De vindingen van de vindingen	3
64	De vindingen van de vindingen	4
65	De vindingen van de vindingen	5
66	De vindingen van de vindingen	6
67	De vindingen van de vindingen	7
68	De vindingen van de vindingen	8
69	De vindingen van de vindingen	9
70	De vindingen van de vindingen	10
	HOOFDSTUK IX	
71	De vindingen van de vindingen	1
72	De vindingen van de vindingen	2
73	De vindingen van de vindingen	3
74	De vindingen van de vindingen	4
75	De vindingen van de vindingen	5
76	De vindingen van de vindingen	6
77	De vindingen van de vindingen	7
78	De vindingen van de vindingen	8
79	De vindingen van de vindingen	9
80	De vindingen van de vindingen	10

HOOFDSTUK I

INLEIDING

1. Vloeibaar helium onderscheidt zich van andere vloeistoffen, door een aantal eigenschappen, die optreden onder de temperatuur van het λ - punt, d. i. $T = 2,18^{\circ}\text{K}$. Een gedeelte van de vloeistof gaat dan geleidelijk over in een andere toestand, de zgn. superfluiditeit. De naam heeft betrekking op één van de eigenschappen van dit deel: het helium kan zich namelijk, binnen zekere grenzen, wrijvingsloos door zeer nauwe kanaaltjes en poriën bewegen. Het resterende deel van de vloeistof heeft deze eigenschap niet, d. w. z. het heeft een eindige viscositeit. Het wordt daarom wel het normale fluïdum genoemd. De twee fluïda, die betrekkelijk vrij ten opzichte van elkaar kunnen bewegen, vormen de grondelementen van het twee fluïdamodel, dat o. a. een theoretische achtergrond heeft gekregen in de theorie van Landau¹⁾ welke door Feynman^{1a)} nader is uitgewerkt. Volgens dit model wordt de dichtheid ρ van de gehele vloeistof gesplitst in de dichtheid van het normale fluïdum ρ_n en die van het superfluïdum ρ_s volgens:

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (1)$$

Men kan in een stroming aan beide fluïda een stroomsnelheid toekennen, zodat het totale massatransport het resultaat is van het transport van het superfluïdum en het normale fluïdum samen:

$$\rho \vec{v} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n \quad (2)$$

waarin \vec{v} de snelheid is, waarmee het massatransport plaats vindt.

Een andere eigenschap van vloeibaar helium is, dat de thermische energie en de entropie van de gehele vloeistof aan het normale fluïdum gekoppeld zijn, m.a.w. er vindt alleen warmtetransport plaats, wanneer dit fluïdum in stroming is en wel volgens:

$$\vec{W} = \rho S T \vec{v}_n \quad (3)$$

waarin: \vec{W} de warmtestroomdichtheid, S de entropie per gram en T de absolute temperatuur is.

De afwezigheid van entropie in het superfluïdum en de eerder genoemde eigenschappen, geven aanleiding tot een aantal typische verschijnselen.

Wanneer helium door een poreuze prop (superlek) stroomt, is het transport van superfluïde helium veel groter dan van het normale. Daardoor neemt de gemiddelde energiedichtheid van de achterblijvende hoeveelheid toe en neemt af op de plaats, waar de vloeistof naar toe stroomt. Brengt men één gram superfluïde helium door een superlek, dan moet aan deze entropieloze vloeistof een hoeveelheid warmte worden toegevoerd, om de oorspronkelijke temperatuur T van de vloeistof te handhaven, die gelijk is aan:

$$Q = TS \quad (4)$$

Dit verschijnsel wordt het mechanocalorisch effect genoemd. Nauw verwant hieraan is het fontein effect. Legt men over een superlek een temperatuurverschil aan, dan stroomt het superfluïde helium naar de warmste kant, om a. h. w. het temperatuurverschil te verkleinen. In de evenwichtstoestand stelt zich over het superlek een drukverschil in, dat evenredig blijkt te zijn met het aangelegde temperatuurverschil, volgens de relatie van H. London²⁾:

$$\Delta P = \rho S \Delta T \quad (5)$$

Rekening houdend met bovenstaande eigenschappen, kan men voor elk van de twee fluïda bewegingsvergelijkingen vormen, die de stroming van vloeibaar helium beschrijven, analoog aan de Navier-Stokes vergelijkingen voor een gewone vloeistof. In de vorm, waarin zij het meest gebruikt worden luiden zij:

$$\rho_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = -\frac{\rho_n}{\rho} \text{grad } P - \rho_S S \text{ grad } T + \eta_n \left(\nabla^2 \vec{v}_n + \frac{1}{3} \text{grad div } \vec{v}_n \right) \quad (6)$$

$$\rho_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} = -\frac{\rho_S}{\rho} \text{grad } P + \rho_S S \text{ grad } T \quad (7)$$

waarin η_n de viscositeit van het normale fluïdum voorstelt. Deze vergelijkingen kunnen op verschillende manieren afgeleid worden, b.v. met behulp van variatiemethodes, of uit de behoudswetten van energie en impuls³⁾.

Bij de afleidingen komt in de bewegingsvergelijkingen nog een tweede orde term voor van de vorm:

$$\frac{\rho_n \rho_S}{2} \text{grad } (\vec{v}_n - \vec{v}_S)^2 \quad (8)$$

De term, die een koppeling tussen de twee fluïda geeft, komt voor met een + teken in (6) en een - teken in (7). Door vele onderzoekers wordt deze term buiten beschouwing gelaten; vermoedelijk uit overweging dat de invloed van een dergelijke term te verwaarlozen is. London introduceert nog een aantal termen, die betrekking hebben op de omzetting van de twee fluïda in elkaar als gevolg van de stroming. Aangezien echter de omzetting in de beschouwde stromingen klein is, kunnen deze termen verwaarloosd worden.

2. In de bewegingsvergelijkingen vindt men de eerder besproken eigenschappen van vloeibaar helium terug. Zo levert (7) de wet van London, als de stroming stationair is, d.w.z. als $\frac{d\vec{v}_S}{dt} = 0$.

Door de bewegingsvergelijkingen op te tellen, vindt men voor een stationaire toestand in de stroming:

$$\text{grad } P = -\eta_n \left(\nabla^2 \vec{v}_n + \frac{1}{3} \text{grad div } \vec{v}_n \right) \quad (9)$$

In capillairen en spleten, waarin het transport van het normale fluïdum niet te verwaarlozen is, volgt uit deze vergelijking:

$$\Delta P = -\eta_n C v_n \quad (10)$$

waarin C een constante is, die van de geometrie van het kanaal afhangt. Voor een gewone vloeistof staat deze vergelijking bekend als de wet van Poiseuille. Met vergelijking (3) kan deze wet ook geschreven worden als:

$$\Delta P = C' W$$

Deze uitdrukking, die bekend is als de regel van Allen en Reekie⁴⁾, geeft aan, dat het drukverschil ΔP over een capillair evenredig is met de gemiddelde warmtestroom W erdoor.

Trekt men beide bewegingsvergelijkingen van elkaar af, dan geldt voor een stationaire stroming:

$$\rho S \text{ grad } T = - \eta_n (\nabla^2 \vec{v}_n + 1/3 \text{ grad div } \vec{v}_n) \quad (11)$$

In het rechterlid van (11) kan nog de term (8) voorkomen. Dit in tegenstelling tot (9) en (10), die ongewijzigd blijven, indien de term (8) in de bewegingsvergelijkingen wordt opgenomen.

Voor een rond capillair met straal r is onder verwaarlozing van (8), wat zeker toegestaan is indien beide fluïda laminair stromen :

$$\text{grad } T = - \frac{8\eta_n}{\rho S^2 Tr^2} W \quad (11a)$$

waarin W de gemiddelde warmtestroomdichtheid in het capillair is. De vergelijkingen (10) en (11) geven samen het verband tussen temperatuur- en drukverschil over het capillair, hetgeen uiteraard de relatie van London blijkt te zijn; echter weer onder verwaarlozing van (8).

De twee bewegingsvergelijkingen van vloeibaar helium geven een goede beschrijving van de stromingsverschijnselen zolang de snelheden van beide fluïda klein zijn. Voor hogere snelheden treden afwijkingen op, die niet langer op een eenvoudige manier uit de vergelijkingen (6) en (7) volgen. Voor een aantal gevallen zullen hieronder de afwijkingen bekeken worden en eventueel zullen zij met bestaande theorieën, die een verklaring voor deze verschijnselen trachten te geven, worden geconfronteerd.

2a. In dit proefschrift zullen eerst die metingen worden beschouwd, waar-

bij geen effectief massatransport optreedt. Hierbij geldt:

$$\rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s = 0$$

waardoor beide snelheden aan elkaar gekoppeld worden. Voor kleine snelheden volgt uit vergelijking (11a):

$$\Delta T = - \frac{8\eta \ell}{\rho_s^2 S^2 Tr^2} W \quad (11b)$$

waarbij ℓ de lengte van het capillair, waarin de stroming plaats vindt, is. Met deze relatie kan de viscositeit van het normale fluïdum worden bepaald.

Indien de warmtestroom door het capillair verhoogd wordt boven een bepaalde waarde (de kritische warmtestroom) treden in de relatie (11b) afwijkingen op. Het temperatuurverschil over het capillair neemt daarbij ongeveer toe met de derde macht van de warmtestroom. In Leiden en Oxford is dit verschijnsel het eerst uitvoerig bestudeerd. Later heeft Vinen⁶⁾ in een zelfde soort stroming een sterke toename van de demping van het tweede geluid opgemerkt, welke ongeveer evenredig is met het kwadraat van de warmtestroom.

Het is nu mogelijk deze verschijnselen te verklaren, door aan de bewegingsvergelijkingen een zgn. wederkerige wrijvingsterm toe te voegen. Deze uitdrukking geeft een kracht weer, die de beide fluïda op elkaar uitoefenen als zij ten opzichte van elkaar in beweging zijn. Gorter en Mellink, die deze kracht het eerste ingevoerd hebben, hebben hem in de volgende vorm als kracht per cm^3 opgeteld bij (6) en van (7) afgetrokken:

$$\vec{F}_{sn} = A \rho_s \rho_n (\vec{v}_s - \vec{v}_n)^2 (\vec{v}_s - \vec{v}_n) \quad (12)$$

De streep boven het kwadraat van de relatieve snelheid geeft hier aan, dat deze factor over lange tijd gemiddeld dient te worden. Lang betekent hier: langer dan de insteltijd van deze kracht, die zich zoals uit de experimenten blijkt met een zekere vertraging opbouwt. Zo blijkt o. a. het tweede geluid, waarin immers een snelle oscillatie van $(\vec{v}_s - \vec{v}_n)$ optreedt, geen demping te ondervinden ten gevolge van de wederkerige wrijving, tenzij er bovendien een constante stroming aanwezig is.

Voor wijde capillairen blijkt experimenteel, dat de waarde van A een met de temperatuur toenemende grootte is, welke weinig of niet van de geometrie van het kanaal af schijnt te hangen^{6a, 7, 8)}.

2b. Vinen heeft op grond van de experimenten van Hall⁹⁾ en hemzelf een theorie ontwikkeld, voor het verschijnsel van de wederkerige wrijving. De wrijving ontstaat door de wisselwerking van het normale fluïdum (de thermische excitaties) met wervellijnen. Volgens Feynman ontstaan deze wervellijnen in het superfluïdum, waarin zij in eerste benadering meebewegen. De circulatie om de wervellijnen is gequantiseerd en gelijk aan h/m , waarin h de constante van Planck en m de massa van het heliumatoom is. In de stroming worden wervellijnen voortdurend opgebouwd en afgebroken tot in het stationaire geval opbouw en afbraak evenwicht met elkaar maken. De kracht, die het normale fluïdum uitoefent op de werveldraden (een kracht verwant aan het Magnus-effect) rekt de werveldraden uit, waardoor de totale lengte aan werveldraden toeneemt. De lijnen worden weer afgebroken, doordat zij na enige tijd uiteenvallen in kleine wervelringetjes of excitaties. Beneden de kritische warmtestroom overweegt steeds het afbraakproces, zodat dan de wisselwerking tussen de twee fluïda verdwijnt.

Hoewel de theorie in staat is een kwalitatieve verklaring te geven van de wederkerige wrijving, schiet zij toch op een aantal punten te kort. O.a. wordt de invloed van een eventuele turbulente toestand van het normale fluïdum geheel buiten beschouwing gelaten. Past men de stabiliteitscriteria, die in de hydrodynamica voor gewone visceuze vloeistoffen gelden, toe op het stromende normale fluïdum, dan moet men concluderen, dat het normale fluïdum eens instabiel moet worden, d.w.z. in de turbulente toestand geraken. Met name duiden de experimenten uit de volgende paragraaf erop, dat in vloeibaar helium een soort turbulentie gevonden kan worden, welke analoog is aan die in een gewone vloeistof.

3. Experimenten, waarbij wel massatransport plaats vindt.

3a. Proeven van Staas, Van Alphen en Taconis¹⁰⁾. Zij zijn uitgevoerd met het toestel, dat schematisch weergegeven is in fig. 1 en waarin druk- en temperatuurverschillen worden gemeten over een capillair, waarvan begin en eindpunt verbonden zijn door een superlek. Door het capillair, dat samen met het superlek in een vacuummantel gemonteerd is, loopt een warmtestroom, die de snelheid van het normale fluïdum bepaalt. Aan het eind van het capillair wordt

de warmte naar het bad afgevoerd. Het superfluidum kan in dit circuit vrij door het capillair en het superlek rondstromen. Daar over het superlek de relatie van London zal gelden, zijn temperatuur- en drukverschil door deze betrekking aan elkaar gekoppeld.

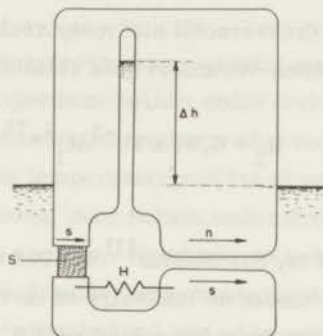


Fig. 1. Schema van het toestel, dat door Staa's c.s. werd gebruikt, bij de bestudering van stromingen met een niet gebonden superfluidum.

Voor een stationaire stroming volgt uit (7):

$$\text{grad } P = -\eta_n (\nabla^2 \vec{v}_n + 1/3 \text{ grad div } \vec{v}_n) \quad (13)$$

De vergelijking blijft geldig, als in de bewegingsvergelijkingen de wederkerige wrijving of de termen (8) zijn opgenomen. Uit (13) volgt weer de regel van Allen en Reekie, indien het normale fluidum laminair stroomt. Bij grotere snelheden van het normale fluidum (de snelheid van het superfluidum blijft onbepaald) blijken van de bovengenoemde regel afwijkingen op te treden, waarbij de druk niet langer recht evenredig is met de gemiddelde snelheid door het capillair: v_n , maar toeneemt met $v_n^{1,75}$. Dit verschijnsel werd door Staa's beschreven met de volgende twee dimensieloze grootheden:

$$R_1 = \frac{2\rho v_n r}{\eta_n} \quad (14)$$

en

$$R_2 = \frac{\rho r^3}{4\eta_n} \text{ grad } P \quad (15)$$

De regel van Allen en Reekie kan nu geschreven worden als:

$$R_1 = R_2 \quad (16)$$

In het gebied, waarin het drukverschil niet meer recht evenredig is met de snelheid van het normale fluidum, verandert deze relatie in:

$$R_2 = 4,94 \times 10^{-3} R_1^{1,75} \quad (17)$$

hetgeen hetzelfde verband is, dat Blasius¹¹⁾ in 1908 vond voor gewone vloeistoffen. Het overgangsgebied tussen de laminaire en de turbulente stroming ligt voor vloeibaar helium ongeveer in het gebied rond $R_1 = 1200$.

Om te trachten een nadere analyse te geven van de gemeten verschijnselen, kan men, analoog aan de beschouwingen over normale turbulente vloeistoffen de snelheden gesplitst denken in de gemiddelde - of driftsnelheid \vec{v}^d en een fluctuerend deel \vec{v}^t dat dus de eigenlijke turbulente beweging beschrijft, volgens:

$$\vec{v} = \vec{v}^d + \vec{v}^t$$

Dat de snelheden in alle richtingen fluctueren houdt in, dat in de vloeistof ook in alle richtingen op macroscopische schaal impuls wordt getransporteerd. (De stromingsweerstand van het capillair neemt dus toe). Hierdoor worden in de bewegingsvergelijkingen de versnellingstermen van meer betekenis, dan voor een laminaire stroming, hetgeen blijkt, als zij op de volgende manier geschreven worden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \quad (18)$$

waarbij vooral de tweede term van het rechterlid groot wordt, als loodrecht op de stroomrichting veel impuls wordt getransporteerd. Uit de experimentele resultaten heeft Staas afgeleid, dat voor de fluctuerende snelheden in de stroming moet gelden:

$$\overline{(\vec{v}_s^t \cdot \text{grad}) \vec{v}_s^t} = \overline{(\vec{v}_n^t \cdot \text{grad}) \vec{v}_n^t} \quad (19)$$

waarbij ook hier de streep de tijdgemiddelden aanduidt. Het is niet eenvoudig deze vergelijking op te lossen en te overzien, wat de fysische betekenis ervan is.

3b. Een tweede groep experimenten, waarbij massatransport optreedt, betreffen stromingen van vloeibaar helium onder invloed van een drukgradiënt alleen. Indien namelijk de metingen isotherm uitgevoerd worden, komt in de bewegingsvergelijkingen de temperatuurgradiënt te vervallen. Dergelijke proeven kunnen uitgevoerd worden, door helium onder invloed van de zwaartekracht door een capillair te laten stromen. Eventuele optredende temperatuurverschillen kunnen genivelleerd worden door warmteuitwisseling met de omgeving, die in de meeste gevallen het heliumbad zal zijn. Aan een dergelijk warmtecontact moeten zeer hoge eisen gesteld worden. De resultaten van verschillende onderzoekers moeten in verband met tekortkomingen in dit opzicht, met de nodige reserve beschouwd worden.

De resultaten van de metingen bij verschillende kanaaldiameters lopen zeer sterk uiteen. Om de metingen enigszins te kunnen vergelijken wordt de drukgradiënt als functie van de effectieve stroomsnelheid berekend. In een uitgebreid verslag van Allen en Misener¹²⁾ wordt medegedeeld, dat voor nauwe capillairen de drukgradiënt evenredig is met v^4 , terwijl voor toenemende capillairdiameters de afhankelijkheid nadert tot een evenredigheid met $v^{1,66}$. Atkins¹³⁾ vermeldt voor tamelijk wijde capillairen een resultaat, dat ruwweg overeenkomt met dat van Allen en Misener. Swim¹⁴⁾ vermeldt nog voor een ringvormige spleet een evenredigheid met v^3 .

Door enkele onderzoekers is getracht de gevonden verschijnselen te verklaren door gebruik te maken van de bewegingsvergelijkingen, waarin een wederkerige wrijvingsterm opgenomen was; weer met verwaarlozing van (8). Het is duidelijk geworden, dat de resultaten van de verschillende experimenten niet verklaard kunnen worden door een wederkerige wrijvingsterm van één en dezelfde vorm. Door Staas is getracht een verklaring voor enkele van de experimenten te vinden, door aan te nemen, dat naast de wederkerige wrijving volgens (12) tevens nog de normale vorm van turbulentie aanwezig is. Ook dan wordt nog geen volledige interpretatie van de experimenten tot stand gebracht.

3c. Bij de laatste nog te behandelen stroming, beweegt het helium zich on-

der invloed van een temperatuur- en een drukverschil, welke niet volgens de relatie van London met elkaar gekoppeld zijn. Tot deze groep behoren de Leidse metingen van Winkel en Mellink en enkele Oxfordse metingen van Bowers en Mendelsohn¹⁵⁾, welke laatste metingen erop waren gericht uitsluitend het bestaan van een kritische snelheid aan te tonen. Van de Leidse proeven zijn die van Winkel het meest uitgebreid¹⁶⁾. Zij zijn uitgevoerd met zeer nauwe conische spleten, maar door de afwijkende geometrie leveren de metingen resultaten op, die moeilijk vergelijkbaar zijn met die, welke afkomstig zijn van de metingen met lange ronde capillairen. De resultaten worden door Winkel geïnterpreteerd met de wederkerige wrijving volgens (12). In alle gevallen werden temperatuurverschillen gevonden welke evenredig waren met de derde macht van de snelheden in de spleet. De voor deze nauwe spleten berekende A-waarden komen niet overeen met die, welke gevonden zijn uit de warmtegeleidingsmetingen van Vinen en Keesom, Saris, Meyer¹⁷⁾. Bovendien zijn de door Winkel bepaalde waarden van A afhankelijk van de breedte van de spleet.

Hoewel de proeven bijzonder zorgvuldig zijn verricht, hebben zij als bezwaar, dat de verhouding van de beide snelheden in de stroming steeds verandert. Immers snelheid van het normale fluïdum wordt bepaald uit de warmtestroom door de spleet en de snelheid van het superfluïdum uit het totale massatransport en de snelheid van het normale fluïdum. Daar alleen de grootte van warmtestroom geregeld kon worden, zal de verhouding tussen de snelheden van de twee fluïda zeer sterk van de omstandigheden afhangen. Bovendien zal bij een conische spleet de grootte van de snelheden in de richting van de stroom veranderen als gevolg van de veranderende opening.

4. Uit dit overzicht blijkt, dat verschillende soorten van stromingen een weerstand ondervinden, die in practisch alle gevallen sterk aan turbulentie doet denken. De weerstand schijnt geheel af te hangen van de omstandigheden, waaronder de stroming plaats vindt. Liggen de omstandigheden vast, d.w.z. is of de combinatie v_s, v_n of de combinatie $\Delta T, \Delta P$ vast, dan zijn de resultaten goed reproduceerbaar en goed met elkaar in overeenstemming te brengen. Is dit niet het geval, dan lopen de resultaten nogal sterk uiteen.

Het is dan ook niet onredelijk te veronderstellen, dat in vloeibaar helium beide vloeistoffen in een turbulente toestand, welke van de snelheden en/of temperatuur- en drukverschil afhangt, kunnen geraken.

Voor de metingen in dit proefschrift is getracht een aantal stromingsproeven te realiseren, waarbij de omstandigheden zoveel mogelijk vastgelegd kun-

nen worden. Het eenvoudigst kan dit gebeuren door de snelheden van de beide fluïda te regelen. Als maat voor de turbulentie is de demping van het tweede geluid gekozen. Het voordeel hiervan is, dat de stroming in betrekkelijk wijde kanalen bekeken kon worden, waar de demping zeer gevoelig is voor de aanwezigheid van turbulentie¹⁸⁾.

REFERENTIES

- 1 : Landau, L.D., *J. Phys. Moscow*, 5 (1941), 71.
- 1a : Feynman, R.P., *Progress in Low Temperature Physics I*. Ed. C.J. Gorter, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1955) pagina 32.
- 2 : London, F., *J. Phys. Chem.*, 43 (1939), 49.
- 3a : London, F., *Superfluids II*, Wiley & Sons, Inc., New York (1954).
- 3b : Landau, L.D.; Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press pagina 510.
- 3c : Lin, C.C., *Proc. of the Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi"*, Varenna (1961).
- 4 : Allen, J.F., Reekie, J., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 35 (1939), 114.
- 5 : Gorter, C.J., Mellink, J.H., *Physica*, 15 (1949), 285.
- 6a : Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 240 (1957), 114.
- 6b : Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 240 (1957), 128.
- 6c : Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 242 (1957), 493.
- 6d : Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 243 (1958), 400.
Hall, H.E., *Phil. Trans.*, A 240 (1957), 359.
Hall, H.E., Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 238 (1956), 204, 215.
- 7 : Keesom, W.H., Saris, B.F., Meyer, L., *Physica*, 7 (1940), 817.
- 8 : Brewer, D.F., Edwards, D.O., *Phil. Mag.*, 7 (1962), .
- 9 : zie ref. 6a, b, c, d.
- 10 : Staas, F.A., Taconis, K.W., Van Alphen, W.M., *Physica*, 27 (1960), 893.
- 11 : Blasius, H., *Z. Math. u. Phys.*, 56 (1908), 1.
- 12 : Allen, J.F., Misener, A.D., *Nature*, 141 (1938), 75, 243; *Nature*, 142 (1939), 643; *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 34, (1938), 299; *Proc. Roy. Soc.*, A 172 (1939), 467.
- 13 : Atkins, K.R., *Proc. Roy. Soc.*, A 64 (1951) 833.
- 14 : Swim, R.T., Rorschach, H.E., *Phys. Rev.*, 97 (1955), 25.
- 15 : Bowers, R., Mendelsohn, K., *Proc. Roy. Soc.* A213 (1952) 158.
- 16 : Winkel, P., *Physica*, 21 (1955) 322.
Winkel, P., Broese van Groenou, A., Gorter, C.J., *Physica*, 21 (1955) 345.

- : Winkel, P., Delsing, A.M.G., Gorter, C.J., Physica, 21 (1955) 312.
- : Winkel, P., Delsing, A.M.G., Poll, J.D., Physica, 1 (1955) 331).
- 17 : zie ref. 7.
- 18 : Eerder werd verslag van de experimenten uit dit proefschrift uitgebracht in:
- Kramers, H.C., Wiarda, T.M., Broese van Groenau, A., Proc. of the 7th Int. Conf. on Low Temp. Phys.: LT7, University of Toronto Press (1960) 562.
- Kramers, H.C., J. Phys. Radium, 23 (1962) 326.
- Wiarda, T.M., Kramers, H.C., Proc. of the 8th Int. Conf. on Low Temp. Phys. LT8, Butterworth, London (1962) 98.
- Wiarda, T.M., Van der Heyden, G., Kramers, H.C., Proc. of the 9th Int. Conf. on Low Temp. Phys., LT 9, Plenum Press, New York (1964) 284.
- Kramers, H.C., Superfluid Helium, Allen, J.F., Academic Press (1966) 199.

HOOFDSTUK II

HET TWEEDE GELUID

1. Uit het twee fluïda model, dat in het vorige hoofdstuk in het kort besproken is, volgt, dat in vloeibaar helium beneden het λ - punt twee soorten golven aangetroffen kunnen worden. De combinatie van de beide bewegingsvergelijkingen en de behoudswetten voor massa en entropie levert twee golfvergelijkingen, die in eerste benadering onafhankelijk zijn. De voortplantingssnelheden, die bij de vergelijkingen behoren, worden gegeven door:

$$u_I = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} \quad (1)$$

$$u_{II} = \sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_n} \frac{S^2 T}{C_p}} \quad (2)$$

waarin C_p de soortelijke warmte bij constante druk voorstelt, welke echter nauwelijks verschilt van de soortelijke warmte bij constante volume. De eerste formule geeft de voortplantingssnelheid van een drukgolf of geluidsgolf. In deze golf bewegen de beide fluïda zich in fase. Ter onderscheiding van de tweede soort golfvoortplanting, spreekt men wel van het "eerste geluid".

De tweede snelheid is die van het "tweede" geluid. In deze golfbeweging bewegen de beide fluïda zich met een faseverschil π , waarbij de druk van de vloeistof constant blijft. De dichtheden van de beide fluïda oscilleren dus ook met een faseverschil π . Uit de eigenschappen van de twee fluïda, zoals deze in het vorige hoofdstuk beschreven zijn, volgt, dat een tweede geluidsgolf ook opgevat kan worden als een temperatuur- of entropiegolf.

Omdat de twee golven slechts zeer zwak gekoppeld zijn, kunnen zij praktisch onafhankelijk van elkaar zich door de vloeistof bewegen en is het ook mogelijk om ze onafhankelijk van elkaar op te wekken. Het eerste geluid wordt verkregen door drukvariaties in de vloeistof op te wekken bv. met een piëzo-elektrisch kristal. Het tweede geluid is een temperatuurgolf en kan daarom het eenvoudigst verkregen worden door periodiek de temperatuur van de vloeistof te veranderen met behulp van de Joule-warmte, die in een weerstand wordt ontwikkeld, als daar een wisselstroom met hoekfrequentie ω door loopt. De warmteontwikkeling is dan gelijk aan:

$$Q = \frac{1}{2} I_0^2 R (1 - \cos 2\omega t) t \quad (3)$$

waarin I_0 de amplitude van de stroom, R de weerstand en t de tijd is. De warmte, die aan de vloeistof wordt afgestaan, verrijkt zich van het stooklichaam met de snelheid van het tweede geluid, hetgeen direct uit de twee bewegingsvergelijkingen en de wet van behoud van massa en entropie volgt (mits P constant is). De golfvergelijking voor de temperatuuroscillaties in een vlakke golf, die zich in de richting van de x -as voortplant, luidt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - u_{II}^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

De algemene oplossing hiervan is een functie van de vorm:

$$T = T(t \pm x/u_{II})$$

Voor een golf, die zich langs de positieve x -as beweegt, geldt de relatie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5)$$

Combineert men deze relatie met de vergelijking:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{W} = 0 \quad (6)$$

die eenvoudig uit de wet van behoud van entropie afgeleid kan worden, dan vindt men, nadat men de argumenten van de afgeleiden gelijk heeft gesteld voor de positieve x-richting:

$$\vec{W} = \rho C u_{II} \delta T \quad (7)$$

Hieruit volgt, dat in een lopende tweede geluidsgolf de afwijking van de temperatuur δT in fase is met de warmtestroom. De totale mechanische energiedichtheid kan nu berekend worden uit de som van de kinetische en potentiële energiedichtheid. De kinetische energie per cm^3 van de golf is gelijk aan:

$$\frac{1}{2}(\rho_n \vec{v}_n^2 + \rho_s \vec{v}_s^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho_s} \vec{v}_n^2) \quad (8)$$

waarin \vec{v}_n en \vec{v}_s de deeltjessnelheden in de golf zijn. De kinetische energie kan met het verband tussen \vec{v}_n en de warmtestroomdichtheid:

$$\vec{W} = \rho S T \vec{v}_n$$

ook geschreven worden als:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{W^2}{S^2 T^2} \quad (9)$$

De potentiële energie van de vloeistof is volgens de thermodynamica van de reversibele processen gelijk aan de verandering van de thermodynamische potentiaal:

$$\Delta U - T \Delta S + P \Delta V \quad (10)$$

Ontwikkelt men ΔU in een reeks naar V en S , dan vallen uit vgl. (10) de laatste twee termen weg tegen de eerste termen van de reeksontwikkeling:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) \Delta S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \Delta S^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V + \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \Delta V^2\right) \dots \quad (11)$$

De termen van de tweede orde gaan door partiële integratie over in:

$$\frac{1}{2} (\Delta S \cdot \Delta T - \Delta P \cdot \Delta V) \quad (12)$$

Daar bij de energiestroming het volume constant moet blijven, levert dit uiteindelijk voor de potentiële energie per cm^3 op:

$$\frac{1}{2} \Delta S \cdot \Delta T$$

of wanneer dit op het tweede geluid wordt toegepast:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{C}{T} (\delta T)^2 \quad (13)$$

met vergelijking (7) blijkt dit weer over te gaan in:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho \rho_s} \frac{W^2}{S^2 T^2} \quad (14)$$

waaruit men ziet, dat ook in een tweede geluidsgolf de kinetische en potentiële energieën per cm^3 aan elkaar gelijk zijn.

Uit vergelijking (4) blijkt, dat de energiestroom zich voortplant met de snelheid van het tweede geluid u_{Π} , zodat de energiestroom door één cm^2 : Π , gelijk wordt aan:

$$\Pi = u_{\Pi} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) \quad (15)$$

Met de vergelijkingen (9) en (14) gaat dit over in:

$$\Pi = \frac{W \delta T}{T} \quad (16)$$

Hieruit volgt tenslotte, dat de verhouding tussen de stroom van mechanische energie en van de thermische energie gelijk is aan: $\frac{\delta T}{T}$, welk resultaat ideaal is volgens de tweede hoofdwet.

Denkt men een staande golf opgebouwd uit twee lopende golven, die in tegengestelde richting lopen, dan blijft het bovenstaande ook van toepassing op de resonantie van een golf in een trilholt. Bij de gebruikte resonatoren bleek de amplitude van de oscillatie van de temperatuur zeer klein te zijn ($\delta T = +10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}$), zodat de meeste energie het stooklichaam in de vorm van thermische energie verlaat.

De hierboven gegeven berekening is natuurlijk alleen geldig, wanneer alle warmte aan het omringende helium afgestaan wordt. Lekt deze warmte weg, of wordt zij tevens gebruikt om andere voorwerpen op te warmen, dan moeten correcties aangebracht worden, die voor de verdere uitwerking van de resultaten van dit proefschrift niet belangrijk zijn. Een duidelijk overzicht en berekening van verschillende correcties geeft Atkins¹⁾.

2. De resonator.

Bij de metingen, die in dit proefschrift beschreven zijn, is een tweede geluidsgolf in trilling gebracht in een "Helmholtz" resonator. Deze bestaat uit een volume V , dat via een opening in verbinding met het bad staat. De vorm van de opening is voor het optreden van resonantie niet belangrijk; in dit geval is hiervoor een buis met ronde doorsnede met oppervlakte O en lengte ℓ gekozen. (fig. 1)

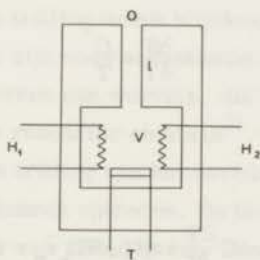


Fig. 1. Schematische doorsnede van het eenvoudigste type Helmholtz resonator.

H_1 en H_2 zijn stookelementjes en T is een thermometer.

In de staande golf komt de potentiële energie tot een uiterste waarde, wanneer het verschil in temperatuur tussen het volume en het bad maximaal is. Deze energie wordt in kinetische energie omgezet, als de twee fluïda proberen het temperatuurverschil te egaliseren en daarbij in de buis van de resonator in stroming komen. Als nu de kinetische energie weer in potentiële energie wordt omgezet, wordt de richting van het temperatuurverschil juist tegengesteld aan

die aan het begin van de cyclus. Tenslotte stromen de beide fluida weer terug, tot de potentiële energie weer tot een maximale waarde gekomen is, waarmee de cyclus beëindigd is.

De eigenfrequentie van de resonator kan berekend worden uit een vergelijking, waarin de kinetische en potentiële energie aan elkaar gelijk gesteld worden, maar hier zal een methode gevolgd worden, waarbij gebruik gemaakt wordt van het transport van de thermische energieën.

Uit de bewegingsvergelijking van het normale fluïdum volgt, als de druk constant is:

$$\rho_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = -\rho_s \frac{S(T_0 - T_1)}{l} \quad (17)$$

hierin zijn T_0 en T_1 de temperaturen in en buiten de resonator. De wet van behoud van entropie:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \text{div } \rho S \vec{v}_n = 0 \quad (18)$$

gaat met behulp van:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C}{T} \quad (19)$$

over in de vergelijking:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \rho S T_r \vec{v}_n = 0 \quad (20)$$

waarin T_r beschouwd kan worden, als de over de tijd gemiddelde temperatuur in de resonator. Deze benadering is zeker geoorloofd, daar de temperatuurvariaties in de golf slechts enkele tientallen micrograden bedragen. Voor de resonator betekent deze vergelijking, dat de vermindering van de thermische energie, die in het volume opgeslagen ligt, een warmtestroom tot gevolg heeft. Integreert men de vergelijking over de gehele resonator, dan vindt men:

$$V\rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} + O\rho S T_r \vec{v}_n = 0 \quad (21)$$

Vergelijking (21) wordt nu naar de tijd gedifferentieerd en met vergelijking (17) kan \vec{v}_n hieruit worden geëlimineerd, hetgeen resulteert in:

$$V\rho C \frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2} = \frac{O}{\ell} \rho S^2 T_r \frac{\rho_s}{\rho_n} (T_0 - T_1) \quad (22)$$

De oplossing van deze vergelijking is een trilling van de temperatuur waarvan de frequentie met behulp van vergelijking (2) gegeven wordt door:

$$\omega_r^2 = u_{II}^2 \frac{O}{\ell V} \quad (23)$$

Het blijkt in de praktijk niet mogelijk te zijn de amplitude van de trilling willekeurig te vergroten. Zodra een bepaalde grens overschreden wordt, wordt de resonantie instabiel. Binnen een korte tijd valt de amplitude terug op een waarde, welke verder onafhankelijk is van het toegevoerde wisselstroomvermogen. Tegelijkertijd wordt de vorm van de resonantiekromme sterk afgeplat, m.a.w. de amplitude van de trilling wordt blijkbaar begrensd.

Analoge verschijnselen zijn voor acoustische resonatoren waargenomen; zij kunnen worden toegeschreven aan wervels, die door de stroming tijdens de trilling, aan de mond van de resonator ontstaan²⁾. Het ligt voor de hand te veronderstellen, dat ook bij een trilling van het tweede geluid in een Helmholtz resonator dergelijke wervels kunnen optreden. De berekening van de resonantiefrequentie is uitgevoerd voor een ideaal geval. In werkelijkheid moet men echter rekening houden met de eindige inhoud van de buis van de resonator, waar natuurlijk een gedeelte van de potentiële energie zich kan ophopen en bovendien treedt behalve in de buis van de resonator nog stroming van de twee fluïda even buiten de mondingen van de buis op. Door deze bijkomstigheden wordt het effectieve volume en de effectieve lengte van de resonator iets groter dan de werkelijke afmetingen. Daar voor dit onderzoek alleen de toeneming van de demping in de resonator van belang is zullen eventuele correcties buiten beschouwing gelaten worden. Een duidelijke overzicht van de correcties geeft Nolle³⁾ voor acoustische resonatoren.

In het laatste stadium van het onderzoek is een Helmholtz resonator van

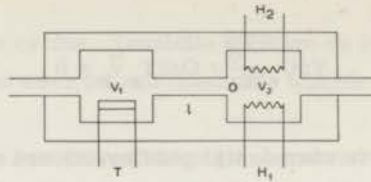


Fig. 2. Schematische doorsnede door een "dubbele" Helmholtz-resonator. De twee volumina V_1 en V_2 staan in verbinding met elkaar via de buis met lengte l en doorsnede 0 . H_1 en H_2 zijn twee stoekelementjes, T is een thermometer.

een iets gewijzigde uitvoering gebruikt. Deze bestaat uit twee volumina, die door een buis verbonden zijn (fig. 2). Indien nodig kunnen de beide volumina van een toevoerleiding voorzien worden, zodat bovendien door de resonatoren een stroming tot stand gebracht kan worden. De temperaturen in de twee volumina oscilleren nu tegengesteld in fase. De resonantiefrequentie wordt nu gegeven door:

$$\omega_r^2 = \frac{u^2}{\Pi} \frac{0}{l} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \quad (24)$$

Waarin V_1 en V_2 de beide volumina van de resonator zijn. Deze laatste resonator heeft tot voordeel, dat de resonantiefrequentie hoger gekozen kan worden en dat de golf niet meer in het heliumbad komt, waardoor hinderlijke reflecties vermeden worden. Een volledig overzicht van samengestelde Helmholtz resonatoren is gegeven door Mc Ginnis en Albert⁴⁾.

De energie, die in de resonator aanwezig is, kan door verschillende irreversibele processen gedissipeerd worden. Doordat energie uit de trilling verdwijnt, treedt er demping op. Als maat voor de demping kan men de kwaliteitsfactor Q van de trilling gebruiken. De definitie van de kwaliteitsfactor luidt:

$$Q = 2\pi \frac{\text{totale energie in de trilling}}{\text{energieverlies per periode}}$$

Experimenteel wordt Q bepaald uit het verloop van de amplitude van de trilling met de frequentie (fig. 3). Hieruit zoekt men de frequentie, waarbij het maximum optreedt en de twee frequenties, waarbij de amplitude is afgenomen tot $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ van de amplitude in de top. Het verschil van de laatste twee frequenties heet de bandbreedte $\Delta\nu$. Nu kan de kwaliteitsfactor bepaald worden uit:

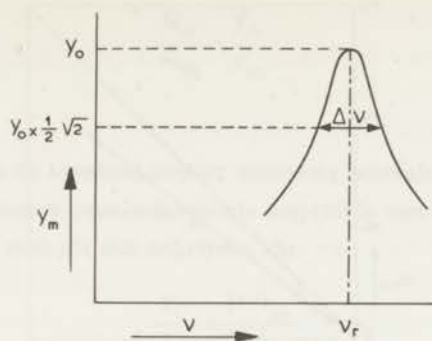


Fig. 3. Voorbeeld van een resonantiekromme, y_0 is de amplitude in de top, die nauwelijks afwijkt van de amplitude in de resonantiefrequentie. (zie ook hoofdstuk III).

$$Q = \frac{v}{\Delta v} \quad (25)$$

Afgezien van de extra dempingen, die optreden wanneer er warmte door de resonator stroomt, dragen enkele andere belangrijke effecten nog bij in de demping van de resonantie. Deze zullen hieronder nader bekeken worden.

1^e: Een belangrijk deel van de energie gaat verloren door de viscositeit van het normale fluïdum. De verliezen kunnen berekend worden, door de Navier-Stokes vergelijkingen op te lossen voor een oscillerende golf langs een oppervlak, hetgeen uiteindelijk voor de kwaliteitsfactor oplevert:

$$Q = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{r}{\delta} \quad \text{met} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho \omega}} \quad (26)$$

δ noemt men de visceuze indringdiepte van het normale fluïdum. Het verband tussen de experimenteel gemeten en theoretisch berekende waarden van Q is voor een tweetal resonatoren in fig. 4 gegeven. Men ziet, dat in de éne resonator een gedeelte van de energie ook nog op andere wijze gedissipeerd wordt. De resonator waarvoor de gemeten waarde van Q overeenstemt met de volgens formule (26) berekende waarde was een uit messing vervaardigde resonator met twee kleine volumina, die aan de binnenkant met een dunne laag vernis bestreken waren om de invloed van de warmtegeleiding van de wand tegen te gaan.

2^e: Als de resonator van het type is, waarbij de golf door de buis in het bad terecht komt, gaat ook energie verloren door verliezen in de cryostaat. Zo werd

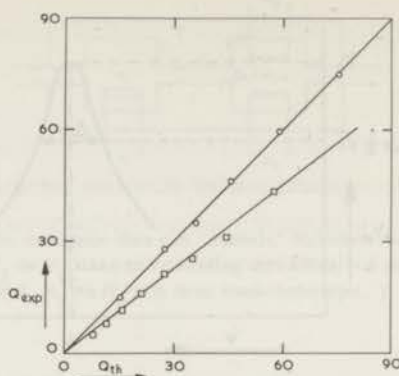


Fig. 4. Vergelijking van de gemeten kwaliteitsfactor Q_{exp} met de berekende Q_{th} volgens (26).
 ○ resonator uit het toestel dat in hoofdstuk V is beschreven, waarvan de wanden met vernis waren bestreken 1,054 mm kanaaldiameter; □ resonator 2 mm kanaaldiameter.

een koppeling waargenomen met de golf, die door het vloeistof oppervlak van het heliumbad werd gereflecteerd. Juist als de afstand tussen de resonator en het heliumoppervlak een aantal malen één halve golflengte bedroeg onttaarde de resonantiepiek in twee resonanties bij frequenties die iets naast de eigenfrequentie van de resonator lagen. Dit verschijnsel verdween, toen in de cryostaat boven de resonator een conus van poreus materiaal aangebracht werd.

3^e. Ook door warmtegeleiding langs de wanden van de resonator gaat energie verloren. In de eerste plaats bouwt zich periodiek over de wand van de buis van de resonator een temperatuurverschil op, zodat hierdoor een warmtestroom kan ontstaan. De bijdrage is echter kleiner dan 0,1 % en mag daarom verwaarloosd worden. In de tweede plaats dringt de warmte ook door in de wand van de resonator. De indringdiepte bedraagt bij een frequentie van 100 Hz bij messing slechts enkele tienden millimeters en is bij niet-metalen zelfs nog kleiner. De diepte wordt nog verkleind door de aanwezigheid van de zgn. Kapitza-weerstand van de resonatorwand, een weerstand, die de warmte moet passeren om een vreemd materiaal binnen te dringen.

3. Zoals het eerst door Vinen werd geconstateerd treedt er in het algemeen een extra demping op, indien het helium in een stationaire stroming wordt gebracht. Door de extra demping neemt de kwaliteitsfactor Q_o af tot Q_m , waarvoor de betrekking geldt:

$$\frac{Q_o}{Q_m} = \frac{y_o}{y_m} \quad (27)$$

waarbij de index o op de toestand zonder stroming betrekking heeft en y_o en y_m de met de kwaliteitsfactor overeenkomende amplitude van de trilling is. Met vergelijking (25) kan men dit ook schrijven als:

$$\frac{y_o}{y_m} = \frac{(\Delta\nu)_m}{(\Delta\nu)_o} \quad (28)$$

Omdat de bijdragen, die tot het verbreden van de resonantiekromme meewerken, additief zijn kan men de bandbreedte splitsen in $(\Delta\nu)_o$ en het deel, dat door de extra demping wordt veroorzaakt:

$$(\Delta\nu)_m = (\Delta\nu)_o + (\Delta\nu)_{ex} \quad (29)$$

Nu kan de exces bandbreedte met vergelijking (28) ook geschreven worden als:

$$(\Delta\nu)_{ex} = (\Delta\nu)_o \left(\frac{y_o}{y_m} - 1 \right) \quad (30)$$

Het linkerlid is een maat voor de extra demping en wordt bepaald door de stromingstoestand, waarin het helium zich bevindt. Daardoor zal dus de exces bandbreedte in het algemeen een functie van de snelheden van de twee fluida zijn.

Indien men de extra demping toe kan schrijven aan een wederkerige wrijving volgens Gorter en Mellink in de vorm, zoals deze door Vinen gegeven is, dan geldt:

$$(\Delta\nu)_{ex} = \frac{1}{2\pi} A\rho \overline{(v_n - v_s)^2} \quad (31)$$

De coëfficiënt A kan dus direct uit de amplitudeverhouding en de bandbreedte $(\Delta\nu)_o$ gevonden worden.

Zoals uit de resultaten van de metingen van de stromingen zonder massa-transport blijkt (o. a. Vinen en hoofdstuk IV) geeft de interpretatie met behulp

van de wederkerige wrijving voor dit geval consistente resultaten voor niet te nauwe capillairen, welke in de volgende punten samengevat kunnen worden:

- 1^e. De waarde van A is onafhankelijk van de diameter van het kanaal als de diameter van de orde van 1 mm of wijder is.
- 2^e. De waarde van A, die uit de dempingsmetingen verkregen zijn, stemmen goed overeen met degene, die uit de metingen van de temperatuurgradiënt verkregen zijn. Dit betekent, dat de A-waarde in het frequentiegebied, waarin de metingen zijn verricht (0-2kHz), praktisch onafhankelijk van de frequentie is.
- 3^e. In alle gevallen was de demping lineair, d.w.z. voor niet al te grote amplitude is de demping niet van de amplitude afhankelijk.

Het zal blijken, dat de uitdrukking (31), welke uit de bewegingsvergelijkingen afgeleid wordt, door hierin de termen voor de wederkerige wrijving in te voeren, zoals die door Gorter en Mellink gegeven zijn (I, 12), niet in staat is om de dempingsverschijnselen te beschrijven, indien de onderzochte stroming met een netto massatransport gepaard gaat.

Om toch een hanteerbare beschrijving te krijgen voor dit belangrijke geval, kan men een gegeneraliseerde wrijvingsterm invoeren in de bewegingsvergelijkingen (I-6, 7) hetgeen formeel weer in de vorm van een wederkerige wrijvingskracht gebeurt:

$$\vec{F}_{sn} = -G\vec{w} \quad (32)$$

waarbij $\vec{w} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$ en G een functie is, die van de tijdgemiddelde snelheden afhangt. Men vindt dan op de gebruikelijke wijze:

$$(\Delta v)_{ex} = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\rho_n \rho_s} G \quad (33)$$

Voor een vlakke golf, die in de positieve x-richting loopt en gedempt wordt volgens $\exp(-\gamma x)$ is de waarde van γ gelijk aan:

$$\gamma = \frac{\rho}{2\rho_n \rho_s} \frac{u_{II}}{u_I} G \quad (34)$$

Het is noodzakelijk na te gaan in hoeverre de formele interpretatie van de

wederkerige wrijving een beperking is.

Bij de afleiding is uitgegaan van een gelineariseerde bewegingsvergelijking in de relatieve snelheid \vec{w} :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = - \frac{\rho}{\rho_n} S \text{ grad } T - G \frac{\rho}{\rho_n} \frac{\rho}{s} \vec{w} \quad (35)$$

Dit betekent, dat alle termen, die niet onafhankelijk van de tijd zijn of lineair in het tijdafhankelijke deel van de snelheid zijn verwaarloosd. Dit is toegestaan, omdat de demping niet van de amplitude van de golf afhangt. Men zou nog kunnen veronderstellen, dat de vergelijking (35) ook afgeleiden van \vec{w} zou kunnen bevatten. Dergelijke termen leveren steeds een demping op, welke van de frequentie afhangt, zoals de viscouse oppervlakte demping, welke verantwoordelijk is voor de term Δv_0 , die weer evenredig is met \sqrt{v} of de demping t.g.v. de warmtegeleiding, die evenredig is met v^2 en in het beschouwde temperatuurgebied en bij de gebruikte frequenties verwaarloosd kan worden.

Indien de voor de massaloze stroming geconstateerde onafhankelijkheid van de frequentie van de demping ook voor het meer algemene geval geldt, spelen dergelijke afgeleiden dus geen rol.

REFERENTIES

- 1 : Atkins, K.R., Liquid Helium, Cambridge University Press, (1959).
- 2 : Sivian, L.J., J.A.S.A., 7 (1935) 94.
Thurston, G.B., Martin, C.E., J.A.S.A., 25 (1953) 26.
Ingard, U., J.A.S.A., 25 (1953) 1037.
- 3 : Nolle, A.W., J.A.S.A., 25 (1953) 32.
- 4 : Mc Ginnis, C.S., Albert, V.F., J.A.S.A., 24 (1952) 374.

HOOFDSTUK III

DE OPSTELLING EN MEETAPPARATUUR

1. De opstelling (fig. 1).

Het toestel A, waarmee de metingen zijn verricht, bevindt zich in een cryostaat C met vloeibaar helium. De druk van de vloeistof wordt gereduceerd met een roterende vacuumpomp. Met de pompleiding P is de oliemanometer M verbonden, waarop, met behulp van een achter de manometer geplaatste spiegel,

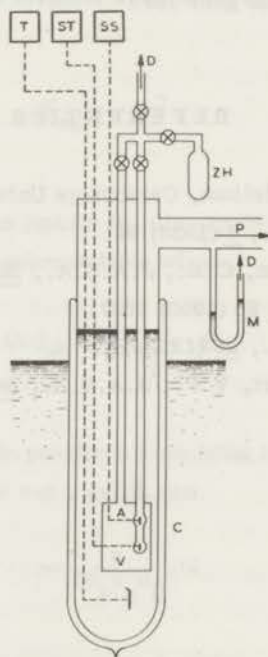


Fig. 1. De opstelling. Voor de verklaring van de tekens raadplege men de tekst.

die van een millimeterverdeling was voorzien, de druk afgelezen kon worden. Door gebruik te maken van het beeld van de meniscus, dat door de spiegel wordt gevormd, kan parallax vemeden worden. Uit de afgelezen druk werd met de T_{58} -temperatuurschaal de temperatuur in de cryostaat bepaald¹⁾.

Bij de eerste metingen stond de meetruimte van het apparaat direct in verbinding met het vloeibare heliumbad. Om de vloeistof zuiver te houden werd halverwege in de cryostaat een prop watten aangebracht, waarop de vaste waterstof en lucht, die vaak in vloeibaar helium aanwezig zijn, achterbleven. Later werd gebruik gemaakt van zeer zuiver helium, dat via een aparte leiding uit het reservoir ZH in het toestel gecondenseerd werd. Om deze leiding van lucht e. d. vrij te maken, kon deze geëvacueerd worden met de kwikdiffusiepomp D.

Indien het toestel een vacuummantel V bezat, kon uit ZH een kleine hoeveelheid helium hierin gebracht worden om tijdens het afkoelen van kamertemperatuur tot het kookpunt van helium een goed warmtecontact tussen toestel en het afkoelende medium te verkrijgen. Was de cryostaat eenmaal met vloeibaar helium gevuld, dan werd voor de druk van het bad verminderd werd, eerst de vacuummantel tot een druk van 10^{-6} mm Hg leeggepompt.

In het heliumbad bevinden zich een thermometer en een stooklichaam, die elektrisch verbonden zijn met een temperatuurregelaar T. Verder voeren nog elektrische verbindingen van de thermometer en het stooklichaam voor de opwekking en detectie van het tweede geluid naar de apparatuur SS; tenslotte zijn er nog de elektrische verbindingen van de weerstanden om de convectiestromen in de meetruimte tot stand te brengen; zij zijn verbonden met de stookschakeling ST.

Het toestel, dat in fig. 1 geschetst is, werd gebruikt voor de metingen aan stromingen zonder massatransport (Hoofdstuk IV). Het toestel, dat voor de overige stromingen werd gebruikt, wordt beschreven in Hoofdstuk V.

De verschillende elektrische en elektronische onderdelen zullen nu achtereenvolgens in een aantal paragrafen nader bekeken worden.

2. Het principe van de temperatuurregelaar (fig. 2).

Omdat het noodzakelijk bleek een deel van het stromingscircuit in de cryostaat op een zeer constante temperatuur te houden, werd apparatuur ontworpen, die dit binnen enkele micrograden mogelijk maakte.

Op de plaats, waar een constante temperatuur vereist wordt, wordt een weerstandsthermometer T gemonteerd. Oorspronkelijk werd hiervoor een thermometer genomen, die volgens het procédé De Vroomen²⁾ was gemaakt,

maar later werden weerstanden van het fabrikaat Allen en Bradley (0,03 W, 100 ohm) gebruikt. Deze zijn iets gevoeliger dan het eerste type en reproducieren van de ene op de andere meetdag vrij goed. De weerstandthermometer werd opgenomen in een brug van Wheatstone, die met een gelijkspanning van 200 mV werd gevoed, welke van een 2 V accu werd afgetakt. De helft van de brugspanning stond over de thermometer. De brug kon in evenwicht gebracht worden met een variabele weerstand B. De gelijkspanning uit de brug werd naar de gelijkspanningsversterker toegevoerd, waarbij het aardpunt van de versterker met één van de thermometercontacten was verbonden om eventuele lekstromen langs de vaak vochtige cryostaat zo klein mogelijk te houden. Hetzelfde aardpunt was tevens het aardpunt van de andere schakelingen, welke bij de proeven gebruikt werden, om de kans op storingen zo klein mogelijk te houden.

In de gelijkspanningsversterker werd de spanning uit de brug door een mechanische triller Tr 1 omgevormd tot een blokvormige gelijkspanning met een frequentie van 400 Hz. Deze trillers waren van het fabrikaat Honeywell en

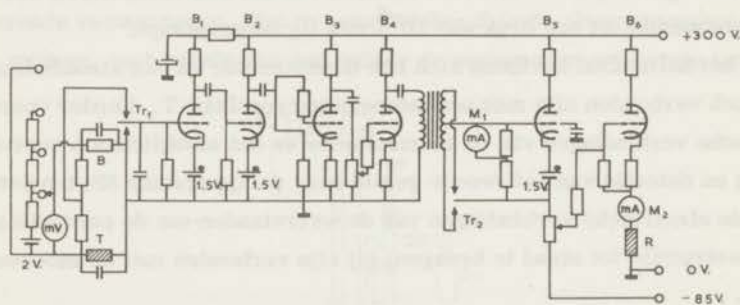


Fig. 2. Bouwschema van de temperatuurregelaar zonder het voedingsgedeelte. De buizen B_1 , B_2 en B_5 krijgen hun negatieve voorspanning van kleine batterijen. De gearceerde weerstanden bevinden zich in de cryostaat.

Brown en werden met 12 V wisselspanning gevoed. De wisselspanningscomponent van de blokvormige gelijkspanning werd in de buizen B_1 t/m B_4 versterkt. Omdat in de laatste versterkertrappen het signaal erg groot kon worden, waren deze uitgerust met zgn. spanningsbegrenzers. Dit zijn weerstanden, die het rooster verbinden met de anode van de vorige buis. Wordt de spanning op het rooster te groot, dan zal er roosterstroom gaan lopen, waardoor over de weerstanden een spanning optreedt, die het signaal dusdanig vervormt, dat de rooster spanning een niet te grote positieve waarde krijgt. Tot slot werd het blok-sig-naal weer gelijkgericht door de triller Tr 2, die met dezelfde spanning als

Tr 1 gevoed werd en daarmee in fase was. Omdat de gelijkrichting fasegevoelig geschied, is de versterkte gelijkspanning een maat voor de afwijking in de temperatuur. Deze spanning kon afgelezen worden op een gevoelige meter M_1 , met behulp waarvan de brug aanvankelijk in evenwicht gebracht werd. Verstoringen in het temperatuurevenwicht werden automatisch opgeheven, door de stroom door de stookweerstand R in de cryostaat te regelen. Met de uitgangsspanning van de versterker werd hiertoe via de extra versterkertrap B_5 , de buis B_6 gestuurd. De weerstand R was in de kathodeleiding van B_6 opgenomen. De warmteontwikkeling werd door B_6 zodanig ingesteld dat de ontstane afwijking in de temperatuur van het heliumbad juist werd tegengewerkt.

Het ruisniveau van de versterker is, teruggerekend naar de uitgang van de brug, ongeveer $0,1 \mu V$ bij een ingangsimpedantie van 100 Kohm . De instel-tijd van de versterker, die met het oog op vrij snelle fluctuaties die in de pompsnelheid voorkwamen klein gehouden moest worden, bedroeg $0,1 \text{ sec}$. De drift van de gehele regelapparatuur werd praktisch alleen veroorzaakt door veranderde thermospanningen in de leidingen van de thermometer naar de brug en kon omstreeks $1 \mu V/h$ bedragen.

3. De apparatuur voor de metingen met het tweede geluid. (fig. 3)

De sinusvormige wisselspanning, die in een weerstand in de resonator RES de tweede geluidsgolven opwekt wordt van een RC-oscillator OSC afgenomen. De oscillator is van het fabrikaat Peekel en kan frequenties tussen 3Hz en 30 kHz leveren. De oscillatorspanning wordt gemeten op de buisvoltmeter VTM. De golven, die in de resonator tot resonantie komen, kunnen gedetecteerd worden met een koolweerstand, waardoor een zeer constante gelijkstroom gestuurd wordt. Door de temperatuurvariaties wisselt de waarde van de weerstand, welke weerstandsfluctuaties door de stroom weer in spanningsvariaties worden omgezet. Zij worden in de wisselspanningsversterker PA eerst 1000

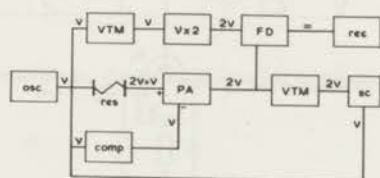


Fig. 3. Schakeling van de toestellen voor de metingen van het tweede geluid. De tekening wordt in 3 toegelicht.

maal versterkt. De versterker heeft een balans ingang, waarin twee verschillende signalen van elkaar afgetrokken kunnen worden. Hiervan wordt gebruik gemaakt om het stoorsignaal, dat de thermometer van de oscillatorstroom ontvangt te compenseren. De wisselstroom van de oscillator wordt daartoe in de schakeling COMP eerst verzwakt, daarna in fase gedraaid en naar de tweede ingang van de voorversterker geleid.

Aanvankelijk werd na de voorversterking gebruik gemaakt van een selectieve versterker, die de signaal-ruis verhouding ongeveer acht keer vergrootte. De versterker had een, met drie potentiometers instelbaar, dubbel T filter. De drie potentiometers waren van het fabrikaat Spectrol, type 510 en waren op één as gemonteerd.

Later werd van een fasegevoelige detector FD gebruik gemaakt. In principe is dit een schakelaar, die tweemaal per periode wordt omgeschakeld, zodat een wisselspanning met de schakelfrequentie wordt gelijkgericht. De verkregen gelijkspanning is het grootst, wanneer de schakelaar omgezet wordt op de tijdstippen, waarop de wisselspanning nul is. Tot de gelijkspanning dragen alleen die ruiscomponenten bij, die in fase zijn met de schakelfrequentie. Gemiddeld komen echter deze evenveel voor als ruiscomponenten in tegenfase, zodat de bijdrage van de ruis over een lange tijd gemiddeld gelijk is aan nul. De spanning uit de detector is dan dus uitsluitend afhankelijk van de amplitude van de geluidsgolf.

In de loop van het onderzoek zijn twee typen fasegevoelige detectors gebruikt. Het eerste type is door Schuster³⁾ ontworpen (fig. 4). De dubbeltriode B_2, B_3 werkt hier als schakelaar. Elke helft laat afwisselend gedurende een halve periode de anodestroom van de pentode B_1 door. De dubbeltriode (ECC83)

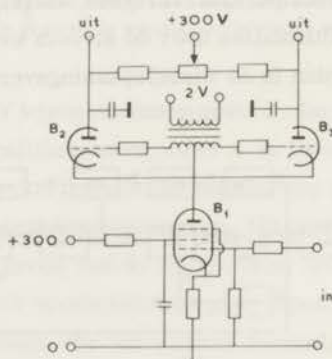


Fig. 4. Het bouwschema van de fasegevoelige detector volgens Schuster.

wordt hiertoe gestuurd met een referentiespanning van de dubbele oscillatorfrequentie, welke op de primaire wikkeling van de transformator wordt gezet. De beide secundaire wikkelingen sturen dan de roosters van de schakelbuizen. De twee weerstanden in de secundaire ketens zorgen ervoor, dat de roosterstroom tot een zekere waarde begrensd wordt, als de spanning op de roosters positief wordt. Brengt men nu op het stuurrooster van B_1 het versterkte tweede geluidssignaal, dan treedt detectie op wanneer deze spanning in fase is met de referentiespanning. Het spanningsverschil tussen de anodes van B_2 en B_3 is dan evenredig met de amplitude van de tweede geluidsgolf. Immers de éne buis laat de anodestroom van B_1 door als deze positief, de andere als deze negatief is t.o.v. de gemiddelde waarde. Achter de detector bevindt zich nog een instelbaar filter, waarvan de insteltijd meestal op ongeveer 1 sec. gebracht werd.

Jammer genoeg was de detector vrij gevoelig voor veranderingen van de grootte, maar vooral van de vorm van de referentie spanning. Deze wordt in de frequentieverdubbelaar $\times 2$ gemaakt, die geen zuivere sinusvormige spanning afgeeft, hetgeen in het volgende verduidelijkt wordt. (Zie fig. 3 en 5)

De oscillatorspanning stuurt B'_1 die de primaire wikkeling van een transformator voedt. Hierna wordt de spanning dubbel gelijkgericht in B'_2, B'_3 (EAA 91), waardoor een gelijkspanning ontstaat, waarop een wisselspanning is gesuperponeerd, die de dubbele oscillatorfrequentie heeft, welke na versterking als referentiespanning wordt gebruikt. Het is duidelijk, dat de zo verkregen referentiespanning, de sinusvorm slechts benadert. Daardoor bleek de detector in de praktijk zeer gevoelig voor veranderingen van deze spanning.

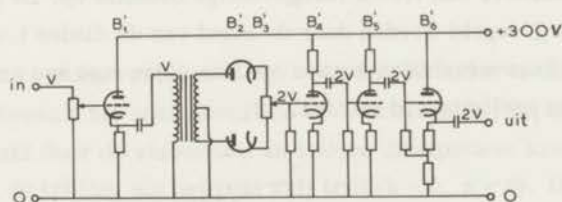


Fig. 5. De frequentieverdubbelaar, die gebruikt werd bij de fasegevoelige detector van fig. 4.

In de laatste fase van het onderzoek, is een detector gebruikt, die voor deze veranderingen ongevoelig is (fig. 6). De oscillatorspanning werd hiertoe versterkt, tot het vermogen voldoende was om een kleine synchroommotor aan te drijven. De verdubbeling van de frequentie wordt nu verkregen door een vlinder,

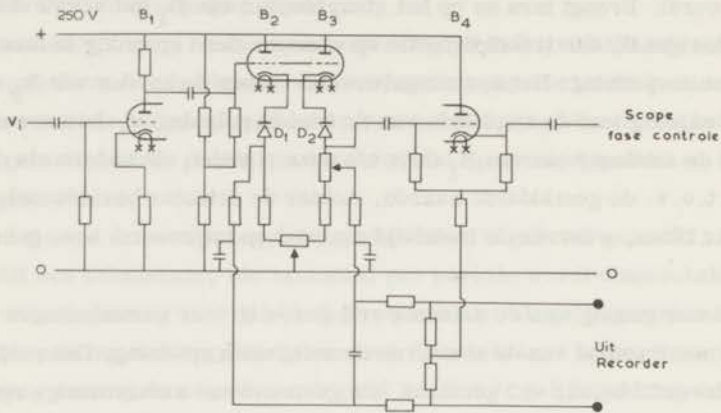


Fig. 6. De fasegevoelige detector, die met de lichtgevoelige diodes D_1 en D_2 is uitgerust.

die tweemaal per omwenteling van de rotor het licht van twee lampjes L_1 en L_2 onderschept (fig. 7). Dit licht is op twee lichtgevoelige germaniumdiodes (OAP 71) D_1 en D_2 gericht, die dus tweemaal per periode geleidend worden. Door de diodes worden de negatieve voorspanningen van de triodes B_2 en B_3 geschakeld. Brengt men op het stuurrooster van de dubbeltriode de spanning uit de voorversterker, dan treedt fasegevoelige detectie op. De fase van de schakelaars kan geregeld worden door de stand van de diodes t.o.v. de motor te veranderen. Faseverschillen kunnen op deze wijze met een nauwkeurigheid van 1° eenvoudig geëlimineerd worden.

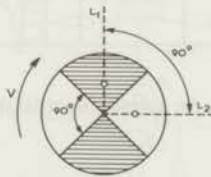


Fig. 7. Principe van de detectie met de lichtschakelaar. Het licht van de twee lampjes L_1 en L_2 , die op de diodes D_1 en D_2 gericht zijn wordt beurtelings tweemaal per omwenteling van de vlinder onderschept.

Een groot voordeel van deze detector is, dat de instelling van de fase onafhankelijk van de frequentie is; dit in tegenstelling tot de gebruikelijke elektronische fasedraaiers. Een nadeel is dat, de hoogste frequentie van het tweede geluid, die met deze fasegevoelige detector gebruikt kan worden, slechts 200 Hz is. Boven deze frequentie wordt de hysteresis en de mechanische wrijving van de motor te groot om nog een goede werking te garanderen.

De gelijkspanning uit de detector, die in de orde van enkele volt is, wordt tenslotte geregistreerd op een recorder REC, zodat de metingen vastgelegd werden. Daardoor konden achteraf de overblijvende fluctuaties in het signaal nog over een zeker tijdsverloop (minimaal drie minuten) uitgemiddeld worden. Voor controle op de oscillator spanning en het versterkte tweede geluidssignaal werden twee buisvoltmeters VTM en de kathodestraal oscilloscoop SC gebruikt.

4. Enige berekeningen over de bepaling van de bandbreedte van een resonantiekromme.

Een belangrijk onderdeel van de metingen vormt de bepaling van de bandbreedte van de resonantiekromme. Om de moeilijkheden en mogelijkheden, die hierbij optreden nader te kunnen bekijken, zal hier in het kort op de wiskundige behandeling van de trilling in de Helmholtz-resonator ingegaan worden. De trilling kan vergeleken worden met een gedwongen harmonische trilling, die voorgesteld wordt door een tweede graads differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + 4\pi^2\nu_0^2 x = ae^{-2\pi i \nu t} \quad (1)$$

hierin is x de uitwijking van de trilling; voor de resonator is dit de afwijking van T of S. k bepaalt het energieverlies in de trilling, bij de resonator wordt deze veroorzaakt door de viscositeit en andere dissipatieve krachten. ν_0 is de frequentie van de trilling als het punt vrij trilt ($k = 0$, $a = 0$). Dit kan men de resonantiefrequentie noemen. ν is de frequentie, die wordt opgelegd. a is evenredig met de grootte van de drijvende kracht. De oplossing van de differentiaalvergelijking luidt, als alle inschakelverschijnselen verdwenen zijn:

$$x = y \exp(-2\pi i \nu t + i\varphi) \quad (2)$$

hierin is y de amplitude van de trilling en φ de fase tussen de drijvende kracht

en de uitwijking. Voor deze grootheden gelden de volgende formules:

$$y = \frac{a/4\pi}{\sqrt{\pi^2(v_0^2 - v^2)^2 + v^2 k^2}} \quad (3)$$

en

$$\cotg \varphi = \frac{kv}{\pi^2(v_0^2 - v^2)} \quad (4)$$

Uit de definitie van k en de kwaliteitsfactor Q blijkt dat:

$$Q = \frac{\pi v_0}{k} \quad (5)$$

De meeste exacte methode om de waarde van de kwaliteitsfactor te vinden is door de frequenties op te sporen, waarvoor $\cotg \varphi = \pm 1$. Dit levert de vierkantsvergelijkingen op:

$$\pi^2(v_0^2 - v^2) \pm kv = 0 \quad (6)$$

waaruit twee positieve wortels volgen, waarvan het verschil juist gelijk is aan Δv , hetgeen de waarde is, die voor de berekening van Q , of bij de dempingsmetingen, gebruikt moet worden.

In de praktijk zijn echter twee andere methoden gevolgd. Bij de eerste methode zoekt men de frequentie met de grootste amplitude op v_t en vervolgens de frequenties, waarbij de amplitude 3dB afgenomen is. Met het verschil hiervan wordt dan een kwaliteitsfactor bepaald, die enigszins van de juiste waarde afwijkt, omdat namelijk bij de frequentie, voor de top, die wordt gegeven door:

$$v_t^2 = v_0^2 - \frac{k^2}{2\pi^2} \quad (6)$$

de amplitude gelijk is aan:

$$y_t = \frac{y_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (7)$$

welke dus iets groter is, dan in de resonantiefrequentie y_0 . Tevens blijkt duidelijk dat de frequenties in de 3 dB punten niet samenvallen met de oplossingen

van vergelijking (6), wanneer men deze vergelijkt met vergelijking (5), als $\cot \varphi = +1$. In de praktijk blijken echter de verschillen gering te zijn. Bij het numeriek oplossen van het probleem vindt men voor de afwijking van de juiste waarde bij $Q = 1 : 0,5\%$. Deze afwijking neemt snel toe naar lagere waarden. Bij de laagste bij de proeven voorkomende waarde van $Q = 6$ was het verschil kleiner dan $0,1\%$ en mocht dus verwaarloosd worden.

Bij de tweede methode werd gebruik gemaakt van de fase-detector, waarvan de fase vast ingesteld werd en het signaal in resonantie maximaal was, m. a. w. zodanig dat de fase van het tweede geluidsignaal en die van de schakelaars gelijk waren. Bij elke andere frequentie werd dus slechts de component, die in fase was met het resonantiesignaal gemeten. In het amplitude verloop, dient men ter bepaling van de bandbreedte te zoeken naar die frequenties, waarbij de fase over 45° gedraaid is (vgl. 6) en waarbij de amplitude in de resonator met een factor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is afgenomen, d. w. z. in het gedetecteerde signaal een factor 2 is afgenomen. Het voordeel van de laatste methode is, dat tijdens de metingen alleen nog de frequentie ingesteld behoeft te worden, wat de snelheid van de meting ten goede komt.

De verandering van de kwaliteitsfactor onder invloed van de stromingen werd gevonden door de verhouding van de Q 's met en zonder stroming gelijk te stellen aan de verhouding van de amplitudes voor de resonantiefrequentie. Berekening toont aan, dat de fout, die hierbij gemaakt wordt, bij de verrichte metingen, waarbij Q steeds groter dan 6 was, nooit meer dan $0,5\%$ heeft bedragen.

5. Bij de metingen werd gebruik gemaakt van een aantal stookschakelingen, waarmee de warmteontwikkeling, die bij de experimenten gebruikt werd om de stroming te produceren, geregeld en afgelezen kon worden.

In het beginstadium werd een eenvoudig type gebruikt, waarbij de stroom en de spanning over de stookweerstand H afgelezen kon worden. De stroom werd daarbij via een regelbare weerstand R van een accu afgenomen. Bij de berekeningen moest nog een correctie aangebracht worden voor de stroom, die door de voltmeter liep.

In een later stadium werd een stookbrug gebruikt (fig. 8). De spanning over de brug, die tweemaal zo groot als over de stookweerstand was, werd op een voltmeter V afgelezen. Met de weerstand B , waarmee de brug in evenwicht gebracht werd, werd de waarde van het stooklichaam H bepaald, waarbij als nul-instrument een buisvoltmeter G gebruikt werd. Met de gemeten spanning

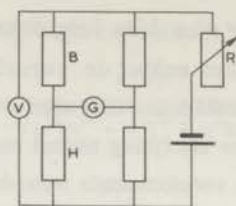


Fig. 8. Schema van de stookbrug.

en de waarde van H kan het ingestookte vermogen berekend worden.

Bij de metingen van (Hoofdstuk VI en VII) was het nodig in twee stooklichamen tegelijk warmtehoeveelheden te ontwikkelen, die een constante verhouding moesten hebben. De ene weerstand H_2 werd dan, eventueel via een voorschakelweerstand X , aan de weerstand H_1 parallel geschakeld en dit geheel werd in één van de takken van de brug geplaatst (fig. 9). De weerstand B geeft dan de substitutieweerstand van deze schakeling, zodat H_1 en H_2 van te voren

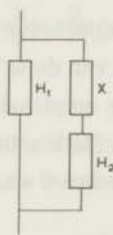


Fig. 9. Schakeling voor het stoken in twee weerstanden tegelijk.

bepaald moesten worden. In dat geval is B dus een controle op de instelling van de weerstand X , die de verhouding tussen beide stookenergieën bepaald.

REFERENTIES

- 1 : V. Dijk, H.; Durieux, M.; Clement, J.R.; Logan, J.K., Journ. Phys. N.B.S. -A-64A, No. 2.
- 2 : De Vroomen, A., Proefschrift Leiden 1960.
- 3 : Schuster, N.A., R.S.I., 32 (1955) 311.

HOOFDSTUK IV

METINGEN ZONDER NETTO MASSATRANSPORT

1. Wanneer door een kanaal, dat aan één kant gesloten is een hoeveelheid warmte stroomt, dan treedt een stroming op, waarvoor geldt:

$$\rho_s v_s + \rho_n v_n = 0 \quad (1)$$

waarbij met v_n en v_s de waarden van de snelheden over de doorsnede van het kanaal gemiddeld, zijn bedoeld. In deze stroming treedt bij lage snelheden praktisch alleen viscueze wrijving op, maar bij hogere snelheden zijn ook nog andere dissipatieve krachten werkzaam (zie hoofdstuk I). Om in dit snelheidsgebied toch een beschrijving van de verschijnselen te krijgen, is aan de bewegingsvergelijkingen door Gorter en Mellink een extra term toegevoegd, en aangezien verondersteld werd, dat hier sprake was van een kracht, die de twee fluïda op elkaar uitoefenen, wordt deze extra term ook wel aangeduid als de wederkerige wrijvingskracht. In de bewegingsvergelijkingen, waarin alle termen per volume eenheid berekend worden, wordt deze kracht:

$$\vec{F}_{sn} = G.(\vec{v}_s - \vec{v}_n) \quad (2)$$

waarin G een grootheid is, die van de over de tijd gemiddelde relatieve snelheid afhangt, volgens:

$$G = A\rho_s\rho_n \overline{(v_s - v_n)^2} \quad (3)$$

waarin A een constante is, die nog van de temperatuur af kan hangen. Door de wederkerige wrijving wordt de toestand in het capillair verhoogd en ondergaan tweede geluidsgolven een demping (hoofdstuk II, 3). De demping van het tweede geluid is dus een middel om de kracht \vec{F}_{sn} te onderzoeken. De grootte van de constante A kan met deze methode bepaald worden uit (zie formule II-28 en II-31):

$$A = \frac{2\pi}{\rho} \Delta v_0 \frac{y_0/y_m - 1}{(v_s - v_n)^2} \quad (4)$$

Door middel van de grootte A kunnen de uitkomsten van de metingen met die van andere onderzoekers vergeleken worden.

2. De metingen aan de hierboven beschreven soort stromingen, zijn verricht met enkele Helmholtz-resonatoren, die elk bestonden uit één volume, dat via een ronde buis in verbinding stond met het bad. Zij waren gemaakt uit twee of drie blokken perspex, waarin de resonator bleef uitgespaard. Aanvankelijk werd het volume bolvormig gemaakt, maar toen bleek, dat de vorm hiervan nauwelijks van invloed was op de resonantie, werd het zo klein mogelijk en van andere vorm gekozen. Omdat in het volume plaats geboden moest worden, aan een thermometer en twee stooklichamen, werd de vorm van het volume rechthoekig gemaakt. De inhoud kon op deze manier tot $0,3 \text{ cm}^3$ worden gereduceerd. Door de keuze van een kleiner volume werd de eigenfrequentie van de resonator hoger en werden bij eenzelfde energietoevoer de temperatuurfluctuaties groter (zie hoofdstuk II, 2).

De stooklichamen, die zich in de resonator bevonden, waren koolfilmweerstand van het fabrikaat Rosenthal, waarvan de laklaag werd afgebrand om een goed warmtecontact met de vloeistof te verkrijgen. De weerstanden werden van dunne aansluitdraden voorzien, welke door de lasplaatsen gevoerd werden. De weerstandswaarde was beneden een temperatuur van 4°K constant binnen 1 op 10.000. Het ene stooklichaam moest in waarde aangepast zijn aan een RC-oscillator (zie hoofdstuk III) en ontwikkelde de benodigde warmte voor de tweede geluidsgolf. Met behulp van het andere stooklichaam kon de constante warmtestroom ontwikkeld worden, welke nodig was voor de dempingsmetingen. De thermometer was gemaakt van geïsoleerd koperdraad, waarop een temperatuurgevoelige koollaag (Aquadag) was aangebracht, volgens het zgn. De Vroomen procédé. Alle aansluitdraden waren van 100 micron constantaandraad gemaakt en zijn doorgevoerd op één van de lasvoegen van de stukken perspex. Deze werden aaneengevoegd met een oplossing van perspex in chloroform. Nadat alle chlo-

reform was verdampt bleef een stevige verbinding over, waarin door de grotere uitzettingscoëfficiënt van het perspex bij afkoeling de doorgevoerde metaaldraden ingeklemd werden. Bij kamertemperatuur werden de resonatoren nog getest door ze via de buis vacuum te zuigen en op lekken te controleren. Metingen werden verricht aan twee kanalen van 2 mm doorsnede: 10 en 20 mm lang en aan één kanaal van 0,63 mm doorsnede en 2 mm lang. Voorts werden nog twee kanalen gebruikt met een rechthoekige doorsnede, waarvan de resultaten hier niet verder zijn uitgewerkt (zie fig. 5).

3. In de figuren 1 en 2 zijn de resultaten van enkele metingen weergegeven. Als maat voor de demping wordt gebruikt de breedte van de resonantiekromme (formule II-30) en voor de extra demping geldt daarom de volgende vergelijking:

$$(\Delta v)_{\text{ex}} = \left(\frac{y_0}{y_m} - 1 \right) \Delta v_0 \quad (5)$$

In figuur 1 is deze grootte langs de verticale as uitgezet en in figuur 2 de wortel uit deze grootte. Figuur 3 geeft een voorbeeld van een aantal metingen, waarin de grootte (5) is uitgezet tegen het kwadraat van de snelheid. Langs de horizontale as kan in principe elke grootte uitgezet worden, die evenredig is met de warmtestroom in de buis van de resonator. Vaak wordt hiervoor de relatieve snelheid gekozen, maar in plaats daarvan is hier de snelheid van het

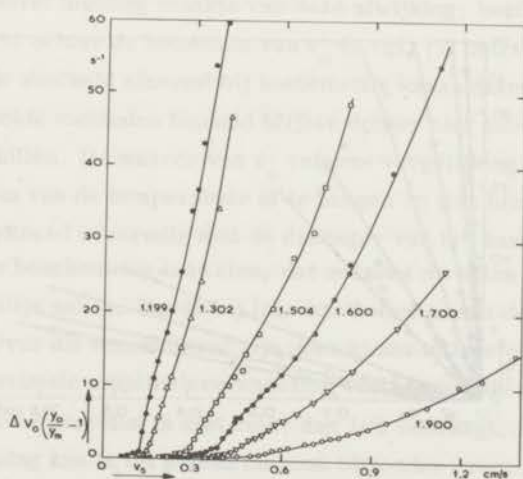


Fig. 1. De verandering van de bandbreedte als functie van v_s voor een kanaaldiameter van 0,63 mm.

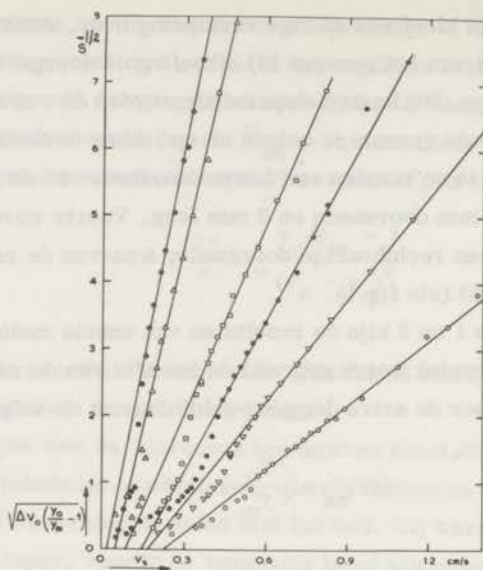


Fig. 2. Dezelfde metingen van figuur 1, maar langs de ordinaat is de wortel uit de verandering van de bandbreedte uitgezet.

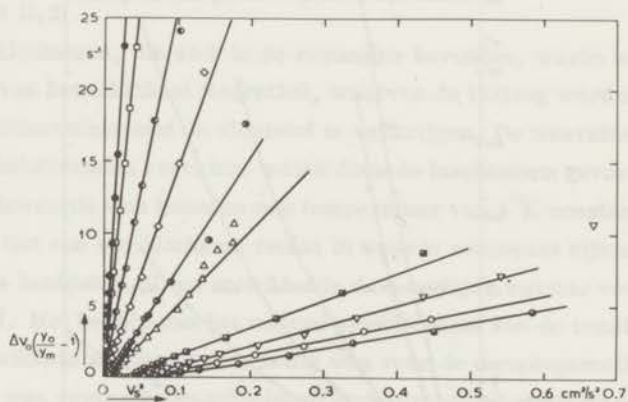


Fig. 3. De verandering van de bandbreedte als functie van V_0^2 . Voor een kanaaldiameter 2 mm en een lengte 20 mm. \bullet : $T = 1,136^\circ\text{K}$; \circ : $T = 1,225^\circ\text{K}$; \ominus : $T = 1,296^\circ\text{K}$; \diamond : $T = 1,396^\circ\text{K}$; \circ : $T = 1,502^\circ\text{K}$; Δ : $T = 1,549^\circ\text{K}$; \blacksquare : $T = 1,691^\circ\text{K}$; ∇ : $T = 1,800^\circ\text{K}$; \circ : $T = 1,900^\circ\text{K}$; \ominus : $T = 2,005^\circ\text{K}$.

superfluidum gebruikt. Het heeft tot voordeel, dat de metingen op de meest overzichtelijke manier naast elkaar komen te liggen en bovendien is een vergelijking met de metingen, die in hoofdstukken VI en VII beschreven zijn eenvoudiger. Om voorts het kwadratische verband, dat bestaat tussen de warmtestroom en de demping volgens (4) in de grafieken tot uitdrukking te brengen kan men twee wegen kiezen. Men kan òf de grootte van vergelijking (5) uitzetten tegen het kwadraat van de snelheden (fig. 3), òf de wortel uit de grootte (5) uitzetten tegen één van de snelheden (fig. 2). Beide manieren zijn niet identiek, vooral niet wanneer behalve de genoemde kwadratische termen ook nog lineaire of constante termen bij de uitwerking van de metingen gevonden worden. Zo zal indien in één van deze grafieken een rechte lijn gevonden wordt, die niet door de oorsprong gaat, de wederkerige wrijvingskracht voor beide manieren van uitzetten een andere vorm aannemen. In het eerste geval wordt de vorm van de kracht:

$$\vec{F}_{sn} = A \rho_n \rho_s \left\{ \overline{(v_s - v_n)^2} - v_0^2 \right\} (\vec{v}_s - \vec{v}_n) \quad (6)$$

en voor de tweede mogelijkheid van uitzetten:

$$\vec{F}_{sn} = A \rho_n \rho_s \left\{ \overline{(v_s - v_n)} - v_0 \right\}^2 (\vec{v}_s - \vec{v}_n) \quad (7)$$

Vinen, die het eerst melding maakte van deze afwijking, heeft de tweede vorm gekozen. Hij acht echter de betekenis van v_0 in vgl. (7) betrekkelijk gering en vermeldt, dat de snelheid afneemt bij toenemende kanaaldiameters. De waarden van A volgens beide methoden bepaald blijken echter niet meer dan enkele procenten te verschillen. De waarde van v_0 volgens vergelijking (7) bepaald bleek bij deze metingen van de temperatuur af te hangen en was binnen de meetnauwkeurigheid omgekeerd evenredig met de diameter van het kanaal (zie tabel I).

Een nadere beschouwing laat zien, dat nergens de extra demping van de resonator werkelijk nul is. Reeds bij lage snelheden neemt de demping al enigszins toe. Over dit verschijnsel zijn geen kwantitatieve conclusies te trekken, daar de maximale amplitudeverandering van het tweede geluidssignaal, die in dit aanloopgebied gemeten is niet meer dan 10% bedraagt. De relatieve fout in de extra demping kan in dit gebied dan ook bijzonder groot zijn. Nadat de demping eerst langzaam toegenomen is, wordt deze bij een zekere warmtestroom (of snelheid) plotseling snel groter, waardoor in de grafiek (fig. 2) een min of meer duidelijke knik omhoog optreedt. De snelheid, waarbij deze knik

optreedt is hier gedefiniëerd als de kritische snelheid, hoewel de wederkerige wrijving blijkbaar nog niet geheel tot ontwikkeling gekomen is. Dit gebeurt pas bij hogere snelheden, waar de demping verder met het kwadraat van de snelheden toeneemt.

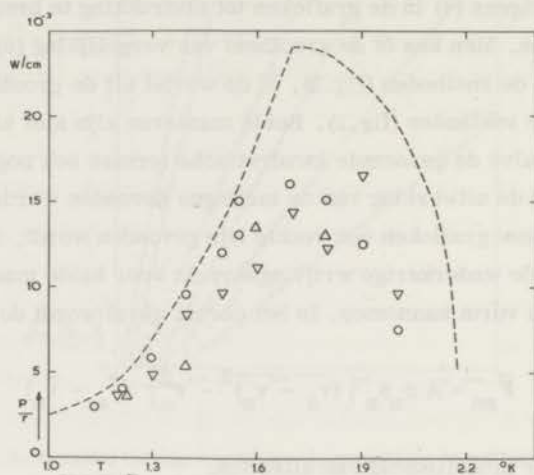


Fig. 4. Vergelijking van de kritische warmtestromen met de gegevens van Chase: streeplijn. O: $l = 20$ mm, $d = 2$ mm; Δ : $l = 10$ mm, $d = 2$ mm; ∇ : $l = 2$ mm, $d = 0,63$ mm.

Om de gemeten kritische warmtestromen voor verschillende kanaaldiameters met elkaar te kunnen vergelijken, is in fig.4 het quotiënt van de kritische warmtestroom P en de straal r van het kanaal uitgezet tegen de temperatuur. Deze grootte is evenredig met $v \times r$ en moet volgens Atkins voor wijde capillairen voor elke temperatuur een constante zijn. Bij lage temperaturen is er een goede overeenstemming te vinden tussen deze metingen en die van andere onderzoekers. Bij hogere temperaturen treden er echter grote verschillen op, die misschien verklaard kunnen worden door het feit, dat de bij hogere temperaturen optredende knik niet zo duidelijk waar te nemen is als bij de laagste temperaturen. Als tweede oorzaak kan mogelijk de definitie van de plaats van de kritische snelheid bij de verschillende metingen afwijken, wat natuurlijk een systematisch verschil tot gevolg heeft. Een typisch verschil met de resultaten van Vinen³⁾, treedt op bij de bepaling van de kritische snelheden bij hogere temperaturen. Vinen vermeldt namelijk, dat in het door hem gebruikte kanaal bij hogere temperaturen geen duidelijke kritische snelheid gevonden kon worden,

TABEL I

d = 2 mm l = 20 mm						d = 2 mm l = 10 mm						d = 0,63 mm l = 2 mm					
T	V _{nk}	V _{sk}	$\frac{\rho V_{nk}^d}{\eta_n}$	V _{o₂xd}	A	T	V _{nk}	V _{sk}	$\frac{\rho V_{nk}^d}{\eta_n}$	V _{o₂xd}	A	T	V _{nk}	V _{sk}	$\frac{\rho V_{nk}^d}{\eta_n}$	V _{o₂xd}	A
[°K]	[cm/s]	[cm/s]	-	[cm ² /s]	$[\frac{cm^3}{g}]$	[°K]	[cm/s]	[cm/s]	-	[cm ² /s]	$[\frac{cm^3}{g}]$	[°K]	[cm/s]	[cm/s]	-	[cm ² /s]	$[\frac{cm^3}{g}]$
1,136	1,53	0,030	2260	0	15,2							1,199	4,10	0,122	2200	0,03	19
1,216	1,20	0,040	2160	-0,060	19,8												
1,225	0,94	0,031	1700	-0,067	22,2	1,225	1,05	0,036	1910	0,002	20,4						
1,299	1,16	0,058	2320	0	25,8							1,302	2,96	0,152	1870	0,018	24
1,396	1,17	0,092	2540	0,015	36,6	1,390	0,674	0,052	1450	0,035	40						
1,502	0,88	0,111	2000	0,038	49,6							1,504	2,18	0,280	1560	0,039	48
1,549	0,82	0,130	1850	0,045	53,0	1,595	0,67	0,013	1550	0,045	57,2	1,600	1,70	0,34	1230	0,044	62
1,691	0,53	0,156	1220	0,049	68,5							1,700	1,45	0,44	1050	0,036	66
1,800	0,33	0,153	727	0,066	86,4	1,798	0,291	0,013	640	0,015	?	1,800	0,87	0,42	600	-	-
1,909	0,19	0,150	384	0,038	100							1,900	0,81	0,60	525	0,031	98
2,005	0,084	0,113	151	0,017	178?							2,005	0,33	0,45	307	-	-

Tabel I : V_{nk} : kritische snelheid van het normale fluïdum; V_{sk} kritische snelheid van het superfluïdum

$$\frac{\rho V_{nk}^d}{\eta_n} = \text{Reynoldsgetal corresponderend met } V_{nk}$$

terwijl in de grafieken, ook bij de hoogste temperaturen, zeker de hierboven beschreven knik nog wel aantoonbaar blijft. Een mogelijke verklaring hiervoor kan zijn, dat het criterium, dat Vinen voor de kritische snelheid aanlegde anders was, dan het hier gebruikte (zie voor verdere discussie ook hoofdstuk VII, 5b). Ook kan de oorzaak schuilen in de verschillende geometrie van de kanalen, waarin de stroming plaats vond. Het bleek namelijk uit een aantal metingen aan kanalen met rechthoekige doorsnede, dat de demping in het aanloopgebied al zo sterk aanwezig was, dat eventuele kritische verschijnselen niet meer waarneembaar waren, zoals duidelijk te zien is in fig. 5, waar enkele metingen zijn weergegeven aan een kanaal van $0,42 \times 7,5 \text{ mm}^2$ doorsnede. Ook blijkt uit deze tekening dat het kwadratische verloop bij hogere snelheden niet opvallend is. Deze experimenten werden niet verder voortgezet, aangezien de geometrie bij cirkelvormige kanalen toch essentiële voordelen bleek te hebben.

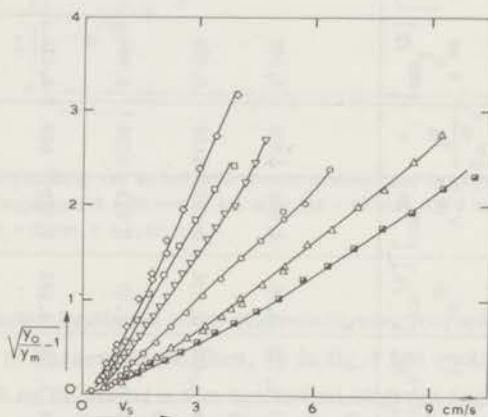


Fig. 5. Voorbeeld van een meting aan een rechthoekig kanaal.
 $\circ = 0,42 \times 7,5 \text{ mm}^2$; $\diamond: T = 1,167^\circ\text{K}$; $\square: T = 1,250^\circ\text{K}$; $\nabla: T = 1,540^\circ\text{K}$;
 $\circ: T = 1,696^\circ\text{K}$; $\triangle: T = 1,810^\circ\text{K}$; $\square: T = 1,944^\circ\text{K}$.

In fig. 6 zijn de A-waarden als functie van de temperatuur weergegeven. Voor de drie resonatoren met cilindrische kanalen zijn zij in goede overeenstemming met de metingen van Keesom, Saris en Meyer¹⁾ en met die van Brewer en Edwards²⁾ en de tweede geluidsmetingen van Vinen³⁾, waarbij het tweede geluid in tegenstelling met de hier vermelde metingen loodrecht op de beweging van de warmtestroom trilde.

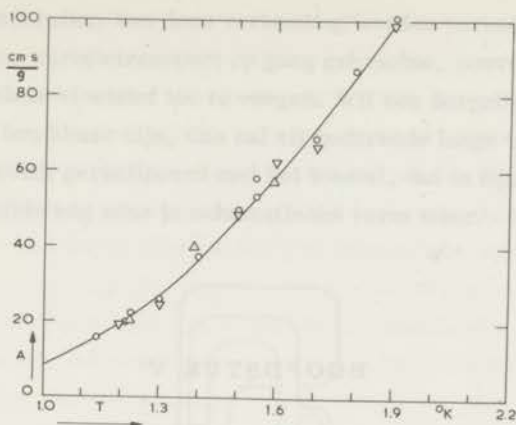


Fig. 6. De A-waarden als functie van de temperatuur. \circ : $l = 20$ mm, $d = 2$ mm; \triangle : $l = 10$ mm, $d = 2$ mm; ∇ : $l = 2$ mm; $d = 0,63$ mm. De getrokken lijn komt overeen met de gegevens van Vinen en Brewer en Edwards.

Opmerking: De temperatuurverschil metingen van Chase⁴⁾ zijn maar gedeeltelijk met de hier verrichte metingen te vergelijken, daar hij van het standpunt uitgaat, dat de bovenkritische verschijnselen niet te splitsen zijn in een bijdrage van de viscositeit en één van de wederkerige wrijving en werkt zijn metingen ook zodanig uit. Hij vermeldt wel, dat de grootte van het temperatuurverschil weinig afwijkt van hetgeen berekend kan worden met de A-waarden van fig. 6.

REFERENTIES

- 1 : Keesom, W.H., Saris, B.F., Meyer, L., *Physica*, 7 (1940) 817.
- 2 : Brewer, D.F., Edwards, D.O., *Phil. Mag.*, 6 (1961) 775.
- 3 : Vinen, W.F., *Proc. Roy. Soc.*, A 240 (1957) 114.
- 4 : Chase, C.E., *Phys. Rev.*, 127 No 2 (1962) 361.

HOOFDSTUK V

HET STROMINGSTOESTEL

1. In de stromingen, die in het vorige hoofdstuk beschreven staan, wordt de verhouding tussen de snelheden van de twee fluïda gegeven door:

$$\frac{v_s}{v_n} = - \frac{\rho_n}{\rho_s} \quad (1)$$

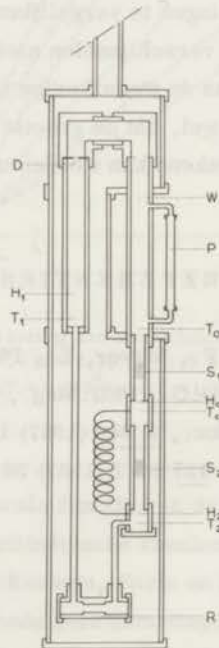


Fig. 1. Doorsnede van het toestel, waarmee verschillende stromingen konden worden opgewekt. Voor de verklaring van de onderdelen raadplege men de tekst en de figuren 2 en 3.

Bij een vaste temperatuur kan deze verhouding worden veranderd, door aan de, tijdens het zuivere warmtetransport op gang gebrachte, convectiestromen een stroom van de gehele vloeistof toe te voegen. Wil een dergelijke stroming voor de experimenten bruikbaar zijn, dan zal zij gedurende lange tijd stationair moeten blijven. Dit wordt gerealiseerd met het toestel, dat in fig. 1 is weergegeven. Fig. 2 geeft hetzelfde nog eens in schematische vorm weer.

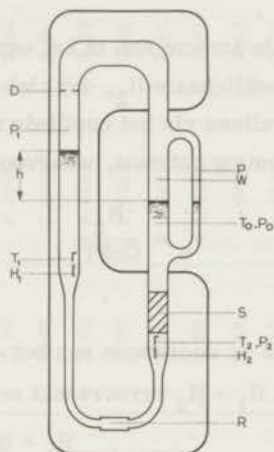


Fig. 2. Schematische doorsnede van het toestel uit fig. 1.

Het gehele circuit, waarin de stroming plaats vindt, bevindt zich, behalve de warmtewisselaar W, in een vacuummantel. De stroming wordt onderzocht in een Helmholtz-resonator van het haltertype R, welke is opgenomen in een 12 cm lang roestvrij capillair met een inwendige diameter van 1,054 mm. De diameter van het capillair en van de buis in de resonator zijn even groot, zodat men verwachten mag, dat de aard van de stroming in het capillair en in de buis van de resonator dezelfde zal zijn. Eén kant van het capillair is afgesloten met een superlek S, waardoor de weg voor het normale fluidum wordt versperd. De andere kant mondt uit in een 8 mm wijde nieuwzilveren buis, waarin een stooklichaam H_1 en een thermometer T_1 zijn ingebouwd. De warmte, die in H_1 wordt ontwikkeld, wordt gebruikt om de vloeistof te verdampen. De damp wordt getransporteerd door de nieuwzilveren buis en komt in de warmtewisselaar W. Dit is een koperen buis: 6 mm inwendig en 8 mm uitwendig, via welke de warmte, die door condensatie van de damp wordt ontwikkeld, aan het omringende bad wordt afgestaan. In het nieuwzilveren gedeelte van de destillatieweg is een dia-

fragma D aangebracht om de filmkruip zoveel mogelijk te verminderen. Met de warmtewisselaar is nog een peilglasje P verbonden, waarin de hoeveelheid helium, die in het toestel wordt gecondenseerd, bepaald wordt. Ook kunnen tijdens de metingen hierin eventuele niveauveranderingen waargenomen worden. Het superfluïde deel van de vloeistof loopt door het superlek S en door het capillair, waarmee de cyclus gesloten is en een zuivere stationaire superfluïde stroming is opgewekt en daarmee ook een effectief massatransport is verkregen.

Behalve een superfluïde stroom kan in het capillair ook nog een stroming ingezet worden door het stooklichaam H_2 , dat zich onder het superlek bevindt. De warmte hiervan H_2 kan alleen via het capillair naar het bad ontwijken, waardoor o. a. een normale stroming ontstaat, waarvoor geldt:

$$v_n = \frac{H_2}{O\rho ST} \quad (2)$$

O is hier de oppervlakte van de doorsnede van het capillair. De totale ontwikkelde warmte in het toestel $H_1 + H_2$ veroorzaakt een massatransport:

$$O(\rho_n v_n + \rho_s v_s) = \frac{H_1 + H_2}{L + ST} \quad (3)$$

waarbij L de verdampingswarmte per gram en ST het mechanocalorisch effect per gram aangeeft. De laatste bijdrage ontstaat, doordat het superfluidum, dat door het superlek stroomt eerst tot T^0K moet worden opgewarmd. Deze hoeveelheid warmte is weliswaar klein t. o. v. L, maar mag niet verwaarloosd worden. Beneden $T = 2^0K$ is ST kleiner dan 5% van L. De snelheid van het superfluidum wordt berekend uit de twee vergelijkingen (2) en (3):

$$v_s = \left\{ \frac{H_1 + H_2}{L + ST} - \frac{\rho_n H_2}{\rho_s ST} \right\} \frac{1}{O\rho_s} = \left(\frac{H_1}{\rho_s(L + ST)} - BH_2 \right) \frac{1}{O} \quad (4)$$

waarin B een thermodynamische hulpgrootheid is (tabel I).

De metingen van de damping als functie van de stroomsnelheden zijn verricht met drie soorten series, waarin de snelheden op verschillende manieren werden gevarieerd. Bij de proeven bleken deze series op een eenvoudige manier gerealiseerd te kunnen worden, daar tijdens de experimenten geen veranderingen in de wijze van stoken behoefde te worden aangebracht. Deze drie typen series

TABEL I

T [°K]	L [J/g]	ρ_s [g/cm ³]	ρ_s/ρ_n -	s [J/g·dg]	$\rho_s(L + sT)$ [J/cm ³]	$\rho s T$ [J/cm ³]	B [J/cm ³]	$(H_1/H_2)_{V_s=0}$ -
1,00	20,08	0,144	138,4	0,0164	2,90	0,00238	2,69	7,80
1,10	20,58	0,143	64,3	0,0301	2,95	0,00481	2,90	8,55
1,20	21,07	0,141	33,4	0,0522	2,98	0,00908	2,95	8,78
1,30	21,53	0,1383	19,96	0,0850	3,00	0,0161	2,79	8,33
1,40	21,96	0,1344	12,4	0,1321	2,97	0,0269	2,66	7,90
1,50	22,36	0,1288	7,83	0,198	2,92	0,0431	2,63	7,68
1,60	22,71	0,1211	5,05	0,286	2,80	0,0664	2,62	7,35
1,70	22,99	0,1116	3,32	0,401	2,64	0,0990	2,67	7,06
1,80	23,20	0,0994	2,16	0,548	2,40	0,143	2,80	6,74
1,90	23,32	0,0834	1,34	0,734	2,06	0,203	3,21	6,60
2,00	23,31	0,0625	0,752	0,969	1,579	0,282	4,08	6,45
2,10	23,10	0,0355	0,321	1,27	0,915	0,390	6,91	6,33
2,15	22,89	0,0170	0,132	1,47	0,441	0,461	14,15	6,28

waren, die waarbij achtereenvolgens:

1^e: H_1/H_2 constant is, dan blijft de verhouding tussen de twee snelheden constant.

2^e: H_2 constant is en daardoor dus v_n .

3^e: H_1 constant is. Deze stroming is het beste te omschrijven als een stroming, die wordt verkregen evenals $H_1 = 0$ (wat geen zuivere stroming zonder massatransport is!), gesuperponeerd op een superfluide stroming. De stroming zal in VII wel aangeduid worden, als een stroming waarin $v_* = \text{const.}$

Door de verschillende aard van de meetseries, is het mogelijk, dat een meetpunt deel uitmaakt van meerdere series, zodat de resultaten hiervan met elkaar vergeleken en gecontroleerd kunnen worden.

Omdat het massatransport maar in één richting door het capillair kan plaats vinden, is het niet doenlijk alle mogelijke stromingen te verwezenlijken. Zo kunnen maar kleine negatieve waarden van v_s worden gerealiseerd en wel wordt de meest negatieve waarde bereikt, als $H_1 = 0$. De stroming verschilt dan een beetje van die zonder massatransport wanneer $H_2 \neq 0$ is, omdat de door H_2 ontwikkelde warmte ook door verdamping een klein massatransport veroorzaakt. De waarde van v_s/v_n wijkt voor deze stromingen maar ongeveer 10% af van $-\rho_n/\rho_s$, wat geldt voor een massaloze stroming.

2. De nauwkeurigheid van de berekende snelheden met behulp van vergelijking (2) en (4) hangt af van de volgende mogelijke fouten:

a. De door de onderzoekers opgegeven nauwkeurigheid van de thermodynamische grootheden uit tabel I, waarmee de snelheden berekend worden, is gemiddeld ongeveer 1 à 2%, waardoor men dus aan de nauwkeurigheid van de snelheden geen hogere eisen kan stellen. Tevens zal een fout in de snelheden ontstaan door een onjuiste instelling van de temperatuur. Immers bij een andere, dan de juiste temperatuur, zullen de thermodynamische grootheden een andere waarde bezitten; speciaal kan door de snelle verandering van de entropie met de temperatuur een aanmerkelijke fout in de berekeningen komen. Zo ontstaat bijvoorbeeld in de snelheid van het normale fluïdum bij een afwijking in de temperatuur van enkele milligraden reeds een fout van 1 à 2%. De snelheid van het superfluidum is veel mindergevoelig voor deze instelfout, daar de snelheid berekend wordt uit grootheden, die maar weinig met de temperatuur variëren.

Ook treedt er een systematische fout op in de waarden van de stookenergieën door onnauwkeurigheden in de stookschakeling, zoals de nauwkeurigheid

van de gebruikte meters, die 0,2% was en fouten, die optreden door de weerstand in de toevoerdraden. Deze laatste fout kon kleiner dan 0,1% gemaakt worden door de weerstand van de stooklichamen hoog te kiezen.

b. Een klein deel van de warmte gaat verloren door warmtegeleiding langs de wanden van het toestel, door het superlek, langs de toevoerdraden en door de damp boven in het toestel, hetzij door convectie, hetzij door conductie. De heliumfilm langs de wanden vervoert geen warmte en de invloed hiervan zal in een apart onderdeel bekeken worden (zie c).

De grootte van de verliezen door warmtegeleiding hangt natuurlijk af van de temperatuurverschillen, die in het apparaat optreden. Daar bij verschillende stromingen de temperatuurverschillen op vaak zeer verschillende wijze toenemen, is het warmteverlies dus van de stroming afhankelijk.

Uit de warmtegeleidingscoëfficiënten van nieuwzilver en roestvrij staal kan geschat worden, dat het warmteverlies langs de vaste delen van het toestel hoogstens 1 μ W bedraagt bij een temperatuurverschil van een tiental milligraden, hetgeen in de praktijk verwaarloosbaar is t.o.v. H_1 en H_2 .

De warmtegeleiding door de damp, die uit de warmtegeleidingscoëfficiënt van de damp, welke bepaald is door Ubbink en Fokkens¹⁾, berekend kan worden, bleef kleiner dan 10^{-5} W bij de tijdens het gebruik optredende temperatuurverschillen en kan dus ook verwaarloosd worden.

Er kan niet nagegaan worden, of in de damp extra convectiestromen optreden. Als zij aanwezig zijn, zullen ze de effectieve stromingsweerstand van de destillatieweg doen toenemen. Er zal echter geen warmte door verloren gaan, daar de warmte, die deze stromingen transporteren aan de kant waar het stooklichaam H_1 gemonteerd is, weer tot de verdamping zal bijdragen omdat de warmte niet weg kan en daardoor bijdragen tot het massatransport, zodat het totale effect nihil is.

c. Een fout, die slechts ten dele van de omstandigheden in het toestel afhangt, wordt veroorzaakt door de film, die langs de wanden van het circuit aanwezig kan zijn. Het is bekend, dat transport door de film optreedt, als voor het druk- en het temperatuurverschil tussen de twee vloeistofniveaus in het toestel:

$$\Delta P = \rho S \Delta T \quad (5)$$

ongelijk is aan nul²⁾. Tevens weet men, dat het massatransport door de film constant is en alleen afhangt van de temperatuur, waarbij gemeten wordt en de kleinste doorsnede van de buis. Daarom is in de buis, waardoor de damp

stroomt een diafragma aangebracht met een doorsnede van 1,5 mm. Eventuele correcties, die alleen op de snelheid van het superfluidum aangebracht behoeven te worden, kunnen berekend worden met de resultaten van de metingen van Smith en Boorse³⁾. Deze correcties bedragen bij $T = 1,5^{\circ}\text{K}$: 1 mm/sec en bij $T = 1,9^{\circ}\text{K}$: 0,5 mm/sec. De snelheid van het normale fluidum blijft ongewijzigd, omdat door de film geen warmte wordt getransporteerd.

Wegens een toch nog bestaande onzekerheid betreffende de grootte van dit effect werd de correctie ten gevolge van het filmtransport niet aangebracht. Op grond van bovenstaande schatting mag men verwachten, dat de correctie verwaarloosbaar is behalve bij zeer kleine snelheden. De schatting kan men bovendien als een bovenste grens opvatten om de volgende reden: Het gas, dat verdampst, stroomt met een tamelijk hoge snelheid door het diafragma, waardoor achter dit diafragma de druk zal dalen. De damp vlak boven de vloeistof was verzadigd, maar als zij door het diafragma gestroomd is, kan zij onverzadigd worden. De heliumfilm zal daardoor op deze plaats kunnen verdampen, waardoor het transport snel afneemt. Zoals uit de metingen van Bowers, Brewer en Mendelsohn⁴⁾ blijkt, is reeds bij een drukverlaging van enkele procenten het transport door de film ongeveer tienmaal kleiner geworden en is dan nauwelijks meer van invloed.

3. In het toestel is het mogelijk een tweetal controles uit te voeren om de werking van het stromingscircuit te beproeven.

I. Het superlek S (fig. 2) werd daartoe in feite gesplitst in twee superlekken S_1 en S_2 in serie (fig. 3 en fig. 1). Parallel aan S_2 is een 10 cm lang gespiraliseerd capillair met een inwendige diameter van 200μ aangebracht. Tussen de twee superlekken bevindt zich nog een stooklichaam H_c en thermometer T_c . Wanneer er nu langs S_1 warmte weglekt, ontstaat in het capillair een normale stroming. Omdat het bad altijd kouder is dan het apparaat, zal de warmtestroom altijd naar het bad gericht zijn. Men meet dan bij T_c een lagere temperatuur, dan bij T_2 . Door nu in H_c warmte te ontwikkelen, kan T_c op dezelfde temperatuur als T_2 gebracht worden, waardoor de verloren warmte weer door het stooklichaam wordt aangevoerd. (Het superlek S_2 behoeft niet van de beste kwaliteit te zijn. Wanneer het een klein beetje de warmte laat passeren, deelt het de taak van het capillair, wat geen bezwaar is. S_2 is alleen maar aangebracht om een grote superfluïde helium te laten passeren.)

Bij controle bleek geen meetbaar temperatuurverschil op te treden, waaruit blijkt, dat het warmtelek langs deze weg onder alle omstandigheden kleiner

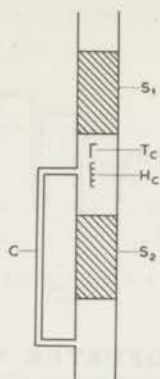


Fig. 3. De opbouw van de twee superlekken S_1 en S_2 i. p. v. S (fig. 2).

is dan 10^{-4} W, hetgeen verwaarloosbaar is.

II. Op het peilglas werd de stand van het heliumniveau gedurende het experiment gevolgd. Dit is o. a. noodzakelijk om er op toe te zien, dat het helium niet overloopt, waardoor een onbekende hoeveelheid massa zou overstromen en de snelheden niet meer berekend zouden kunnen worden.

In principe kan met behulp van het peilglas nu ook worden nagegaan, of de balans van druk- en temperatuurverschillen in het toestel klopt. Helaas was het in verband met een aantal onzekerheden en de te geringe nauwkeurigheid niet mogelijk een consistent resultaat te verkrijgen.

REFERENTIES

- 1 : Ubbink, J.B., Proefschrift, Leiden (1945).
Ubbink, J.B., De Haas, W.J. *Physica* 10 (1943) 465.
Ubbink, J.B., *Physica* 13 (1947) 659.
- Fokkens, K., Proefschrift, Leiden (1966).
- 2 : Atkins, K.R., *Liquid Helium*, Cambridge, University Press, 1959, pag. 208.
- 3 : Smith, B., Boorse, H.A., *Phys. Rev.*, 99 (1955) 328, 346, 358, 367.
- 4 : Bowers, R., Brewer, D.F., Mendelsohn, K., *Phil. Mag.* 42 (1951) 1445.

HOOFDSTUK VI

DE ZUIVERE SUPERFLUÏDE EN NORMALE STROMING

In dit hoofdstuk en het volgende zullen de resultaten van de stromingen bekeken worden, die met het destillatietoestel verkregen zijn, zodanig dat in dit hoofdstuk alleen die stromingen besproken worden, waarin òf het normale fluïdum òf het superfluïdum stilstaat t. o. v. de wand van het capillair.

1. De zuivere superfluïde stroming.

Wanneer in het toestel alleen warmte ontwikkeld wordt in het stooklichaam H_1 , zal er door het capillair een massatransport van superfluïde helium ontstaan, waarvan de snelheid evenredig is met het in H_1 ontwikkelde vermogen. Fig. 1a geeft een reproductie weer van een gedeelte van de recorderrol, waarop het verloop van de grootte van het signaal is geregistreerd bij een aantal stookstromen. Tussen twee meetpunten in verloopt het signaal gedurende enkele tientallen seconden onregelmatig, doordat bij een verandering van stookstroom de temperatuur en druk zich opnieuw moeten instellen. In de stationaire toestand is het signaal zeer constant afgezien van de kleine fluctuaties, die afkomstig zijn van de ruis in de versterkers.

In fig. 2 is het resultaat van een meting bij één temperatuur weergegeven. Uitgezet is de relatieve amplitudeverandering y_o/y_m tegen het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid van het superfluïdum. In de grafiek is de nul-demping niet van de gemeten waarden afgetrokken, zodat de kleinste gemeten waarde gelijk is aan 1.

Het blijkt, dat binnen de meetnauwkeurigheid, welke o. a. bepaald wordt door de filmkruip (1 mm/s), niet direct een kritische snelheid gedetecteerd kan worden. In het verloop van de grafiek zijn evenwel duidelijk twee gebieden te

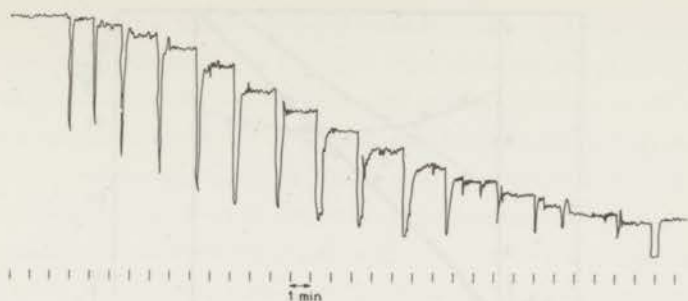


Fig. 1a. Reproductie van een gedeelte van een meting van een zuivere superfluïde stroming. Naar rechts neemt v_s toe. De grote pieken treden op bij verandering van de stookstroom. De kleine fluctuaties zijn afkomstig van de ruis in de versterkers.



Fig. 1b. Een gedeelte van een meting van een zuivere normale stroming. Naar rechts neemt v_n af. De sterke fluctuaties rechts zijn afkomstig van de instabiliteiten in de stroming.

onderscheiden. Het eerste gebied loopt van het punt 1 op de verticale as recht tot bij een zekere snelheid, iets onder de waarde 3 op de verticale as, waar met een min of meer scherpe knik in het verloop het tweede gebied begint, dat buiten het meetbereik doorloopt en ook weer binnen de meetnauwkeurigheid een rechte lijn schijnt te zijn.

Om de meetresultaten te beschrijven, kan men in navolging van de stroming zonder massatransport een A_s -waarde definiëren volgens:

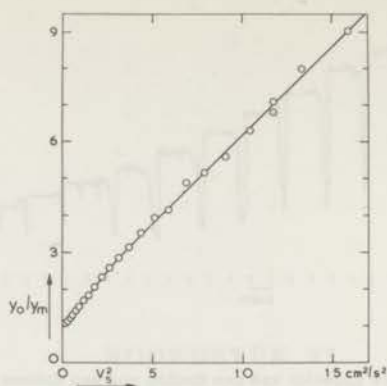


Fig. 2. Uitgewerkte meting van een zuivere superfluide stroming. $T = 1,6^{\circ}\text{K}$.

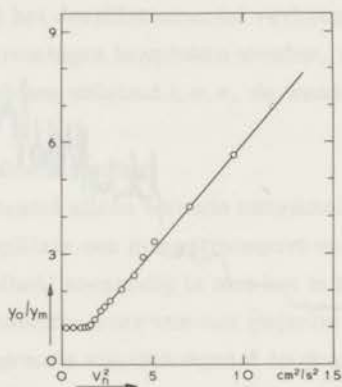


Fig. 3. Uitgewerkte meting van een zuivere normale stroming. $T = 1,6^{\circ}\text{K}$.

$$A_S = \frac{2\pi}{\rho} (\Delta v)_0 \frac{\Delta(y_o/y_m - 1)}{\Delta v_S^2} \quad (1)$$

(zie II, vgl. 30 en 31).

Het resultaat hiervan is gegeven in fig. 4, waarin de waarde A_S voor beide gebieden als functie van de temperatuur zijn weergegeven. De A_{S1} in het onderste gebied neemt naar lagere temperaturen toe; de A_{S2} van het tweede gebied is, afgezien van een zekere spreiding, betrekkelijk constant. De grens tussen de twee gebieden ligt bij de meeste gemeten temperaturen bij een snelheid van

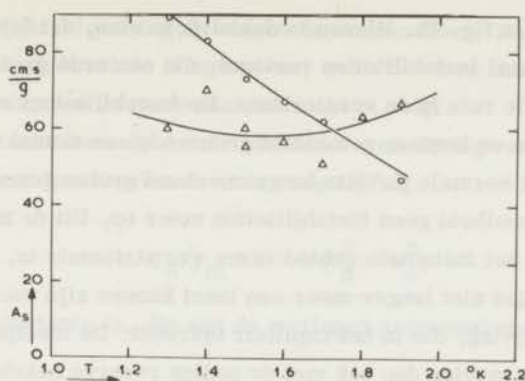


Fig. 4. De A_s -waarden voor de zuivere superfluide stroming als functie van de temperatuur.
 \circ : A_{s1} voor het gebied onder de knik, Δ : A_{s2} voor het gebied boven de knik.

1,4±0,2 cm/s, welke waarde in de buurt van $T = 2^{\circ}\text{K}$ vermoedelijk iets afneemt tot ~ 1 cm/s. Deze getallen gelden voor een capillairdiameter van 1,054 mm. Volgens de waarnemingen van Van Alphen¹⁾ zou voor een dergelijke kanaaldiameter het superfluidum een kritische snelheid hebben van 1,7 cm/s, welke waarde vrij goed overeenkomt met de snelheid, waarbij de knik in het verloop van de demping optreedt. De waarden van A_{s1} en A_{s2} komen niet overeen met de gegevens van Peshkov²⁾, die bij vier temperaturen A-waarden opgeeft, die praktisch overeenkomen, met die van de stroming zonder massatransport.

2. De zuivere normale stroming.

Wordt in de twee stooklichamen H_1 en H_2 tegelijkertijd gestookt, zodanig dat de verhouding tussen de stookenergieën gelijk is aan:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\rho_n L - \rho_s ST}{\rho_s ST} \quad (2)$$

dan ontstaat in het capillair een stroming, waarin de gemiddelde snelheid van het superfluidum nul is. De bovenstaande verhouding (V, tabel I: laatste kolom) verandert in het temperatuurgebied tussen $T = 1,2^{\circ}\text{K}$ en $T = 2,0^{\circ}\text{K}$ maar 20%, zodat ook vrijwel aan de voorwaarde voor een zuivere normale stroming voldaan zal zijn indien de temperatuur in het stromingscircuit iets afwijkt van de berekende waarde.

Een gedeelte van zo'n meting, waarbij het superfluidum in rust verkeerde

is gereproduceerd in fig. 1b. Hierop is duidelijk te zien, dat bij bepaalde waarden van v_n het signaal instabiliteiten vertoont, die een orde groter zijn, dan de fluctuaties t.g.v. de ruis in de versterkers. De instabiliteiten veranderen betrekkelijk langzaam en bestaan gemiddeld gedurende een tiental seconden. Wordt de snelheid van het normale fluïdum langzamerhand groter gemaakt, dan treden boven een zekere snelheid geen instabiliteiten meer op. Uit de metingen blijkt, dat de stroming in het instabiele gebied verre van stationair is, daarom zal de damping in dit gebied niet langer meer een maat kunnen zijn voor de gemiddelde hoeveelheid wrijving, die in het capillair optreedt. De meetpunten, die in dit gebied bepaald zijn moeten dan ook met de nodige reserve bekeken worden.

Een voorbeeld van een uitgewerkte meting geeft fig. 3. Langs de assen zijn dezelfde grootheden als in fig. 2 uitgezet. In de figuur is duidelijk te zien, dat de damping bij lage snelheden gelijk blijft aan de nul damping, tot bij een zekere snelheid de damping oploopt en uiteindelijk weer evenredig is met het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid. Daar kan ook weer een waarde van A_n worden gedefiniëerd, op eenzelfde wijze als ook de A_s -waarde voor de zuivere superfluïde stroming werd ingevoerd, volgens:

$$A_n = \frac{2\pi}{\rho} (\Delta v)_0 \frac{\Delta(y_0/y_m - 1)}{\Delta v_n^2} \quad (3)$$

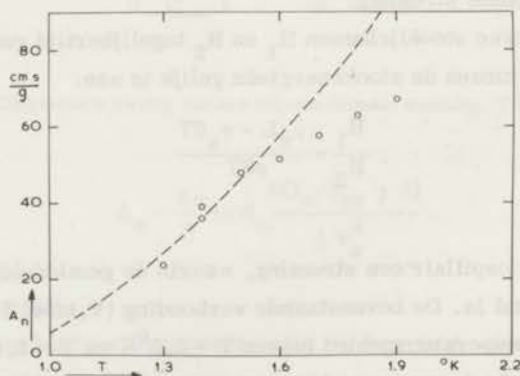


Fig. 5. De A_n -waarden van de zuivere normale stromingen als functie van de temperatuur. De streeplijn geeft het verloop van de A_n -waarden voor de stroming zonder massa-transport uit hoofdstuk IV.

In fig. 5 is deze grootheid uitgezet tegen de temperatuur. Zoals blijkt, neemt de waarde van A_n toe met de temperatuur, echter niet zo snel als de A -waarde, die uit de stroming zonder netto massatransport volgt.

Uit fig. 4 leest men af, dat de relatieve verandering van de amplitude van de golf beschreven kan worden door de vergelijking:

$$y_o/y_m - 1 = C(v_n^2 - v_o^2) \quad (4)$$

waarin v_o een constante is, die aan de metingen aangepast moet worden.

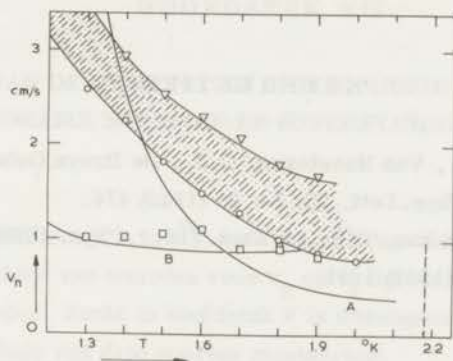


Fig. 6. Het verloop van enkele karakteristieke snelheden in de zuivere normale stroming als functie van de temperatuur. \circ de snelheid waarboven de demping toeneemt. In het gearceerde gebied treden instabiliteiten op. ∇ geeft de snelheid aan, waar de instabiliteiten verdwijnen en waarboven zich het kwadratische verband manifesteert. \square geeft

aan de parameter v_o volgens (4). De lijn A geeft aan van $R = \frac{\rho_n v_n d}{\eta_n} = 200$ en de lijn B: $R = \frac{\rho_n v_n d}{\eta_n} = 1000$.

Merkwaardig genoeg blijkt deze grootheid weinig of niet van de temperatuur af te hangen en is steeds ongeveer 1 cm/s (fig. 6) wat correspondeert met een

Reynoldsgetal $\frac{\rho_n v_n d}{\eta_n}$ gelijk aan 1000 à 1100. (zie tabel I. hoofdstuk VII).

De snelheden, waarbij de instabiliteiten nog juist niet worden waargenomen, kan men de kritische snelheden van de normale stroming v_{nk} noemen, omdat hier kennelijk een zeer ingrijpende verandering in de stroming optreedt; zij zijn weergegeven als functie van de temperatuur in fig. 6. In de figuur zijn ook twee lijnen A en B getrokken, die de vergelijking van de snelheden mogelijk maakt met de Reynoldsgetalen:

$$\frac{\rho_n v_n d}{\eta_n} \quad (\text{lijn A}) \qquad \frac{\rho v_n d}{\eta_n} \quad (\text{lijn B}) \qquad (5)$$

Voor lijn A is die waarde van v_n genomen waarvoor het Reynoldsgetal gelijk is aan 200, voor B is deze waarde 1000 genomen. De laatste grootheid werd door Staas gebruikt bij de beschrijving van zijn metingen. De eerste is het Reynoldsgetal, waarin de dichtheid van het normale fluïdum i.p.v. de totale dichtheid is gebruikt. De bespreking en eventuele interpretatie van de hier beschreven verschijnselen wordt uitgesteld tot aan het einde van het volgende hoofdstuk.

REFERENTIES

- 1 : Van Alphen, W.M., Van Haasteren, G.J., De Bruyn Ouboter, R., Taconis, K.W., Phys. Lett, 20, No. 25 (1966) 474.
- 2 : Peshkov, P., Stryukov, V.B., J. Expt. Theor. Phys. (USSR) 41 (1961) 1443
Soviet Physics 14 (1962) 1031.

HOOFDSTUK VII

METINGEN VAN DE DEMPING BIJ GELIJKTIJDIGE AANWEZIGHEID VAN STATIONAIRE NORMALE EN SUPERFLUÏDE STROMINGEN

1. Inleiding.

Bij de temperaturen $T = 1,9^{\circ}\text{K}$ en $T = 1,5^{\circ}\text{K}$ werd de demping onderzocht voor het gehele gebied van waarden voor v_n en v_s dat met het rondstroomtoestel bestreken kon worden. Zoals in hoofdstuk V is uiteengezet, werden de gegevens verzameld met behulp van drie soorten meetseries:

- bij constante verhouding van v_s/v_n . ($H_1/H_2 = \text{constant}$).
- bij constante waarde van v_n ($H_2 = \text{constant}$).
- bij constante waarde van $v_* = v - \frac{ST}{L + ST} v_n$ ($H_1 = \text{constant}$).

De laatste soort series wijken praktisch slechts weinig af van series met constante massastroom ρv , omdat ST/L klein is: voor $T = 1,9^{\circ}\text{K}$ n.l. 0,06 en voor $T = 1,5^{\circ}\text{K}$: 0,013 (zie hoofdstuk V; tabel I).

In dit hoofdstuk zal een overzicht gegeven worden van de meetresultaten bij de twee genoemde temperaturen, waarna zij tezamen met de metingen uit het vorige hoofdstuk besproken zullen worden.

2. De meetseries.

I. De meeste gegevens werden verkregen met behulp van series van het type a ($v_s/v_n = \text{constant}$). De demping bleek steeds ruwweg kwadratisch met de snelheid toe te nemen, althans voor niet te kleine waarden van de snelheden. In het aanloopgebied, d.w.z. voor kleine snelheden, hing het verloop nogal sterk af van de waarde van v_s/v_n . (fig. 1).

A. $v_s/v_n = 0$. Dit geval, de zuivere normale stroming, is al in het vorige hoofd-

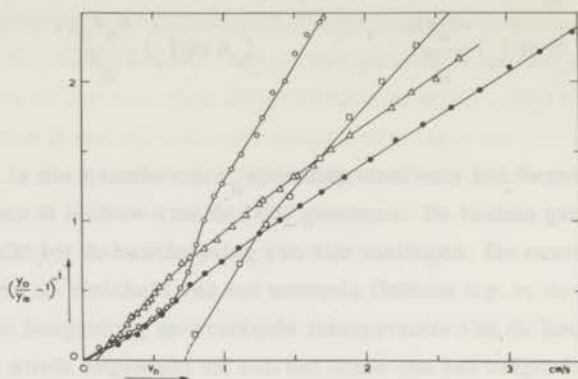


Fig. 1. Enige series, waarin de verhouding tussen de snelheden constant was:
 \square : $v_s/v_n = 0$; \triangle : $v_s/v_n = 1$; \circ : $v_s/v_n = -0,548$; \bullet : $v_s/v_n = +0,513$. $T = 1,9^{\circ}\text{K}$.

stuk uitvoerig beschreven. Beneden een zekere kritische waarde van v_n treedt geen extra demping tengevolge van de stationaire stroming van het normale fluïdum op. Dit sub-kritische gebied wordt gevolgd door een gebied met grote instabiliteiten, waarop tenslotte het gebied met een duidelijke kwadratische afhankelijkheid aansluit. (zie VI, fig. 1b en 4).

B. $v_s/v_n < 0$. Het karakter van stromingstoestanden, waarbij de beide snelheden tegengesteld gericht zijn sluit in zoverre aan bij het vorige geval, dat er een duidelijk verschil is tussen een sub-kritisch gebied en een gebied met een goed ontwikkelde demping welke kwadratisch van de snelheid afhangt. In het sub-kritische gebied neemt de demping echter al wel toe, instabiliteiten treden niet op en in het algemeen is het kritische overgangsgedebied sterk uitgesmeerd van karakter. (zie IV, fig. 1 en 2).

De stromingen zonder netto massatransport uit hoofdstuk IV behoren uiteraard ook tot dit type en vertonen ditzelfde karakter. Het meetgebied van het rondstroomtoestel is echter helaas juist voor tegenstroom nogal beperkt, vooral bij lagere temperaturen. Stromingssituaties met een overmaat van superfluïde tegenstroom zijn daardoor niet onderzocht. Practisch kan men zeggen dat er wel voldoende gegevens zijn voor waarden van v_s tussen 0 en $-\rho_n v_n / \rho_s$, alhoewel deze laatste grens zelf niet bereikt kon worden (zie de opmerking bij 1c).

C. $v_s/v_n > 0$. Het gedrag van de demping in deze stromingstoestanden sluit het beste aan bij de in het vorige hoofdstuk besproken zuivere superfluïde stroming. De demping neemt vanaf de oorsprong direct kwadratisch toe met de snelheid, zodat een kritische snelheid en een sub-kritisch gebied schijnt te ontbreken.

De bij niet te hoge temperaturen gevonden knik in een zuiver superfluïde stroming (zie VI.1.), waarbij de helling van de lijn welke ontstaat, indien de demping tegen het kwadraat van de snelheid wordt uitgezet abrupt kleiner wordt bij een waarde van v_s van de orde van grootte van 1 cm/s, wordt eveneens teruggevonden. Het duidelijkst is dit verschijnsel waargenomen voor een stromingstoestand waarbij v_n en v_s gelijke waarden hebben en wel voor beide temperaturen. De knik is voor andere combinaties van de snelheden niet altijd duidelijk waarneembaar.

Het sub-kritische gedrag, dat men zou verwachten voor stromingen, welke weinig verschillen van een zuivere normale stroming, blijkt voor zeer kleine positieve waarden van v_s/v_n al geheel verdwenen te zijn.

II. De stromingen van het type b, waarbij v_n constant werd gehouden, werden in de eerste plaats gebruikt om de zojuist beschreven series te controleren. In het algemeen werd, binnen de te verwachten meetnauwkeurigheid, een goede overeenstemming gevonden. Dit resultaat is niet geheel triviaal omdat eventueel optredende hysteresis-effecten afhankelijk kunnen zijn van de wijze waarop een bepaalde combinatie van v_n en v_s wordt ingesteld^{*)}.

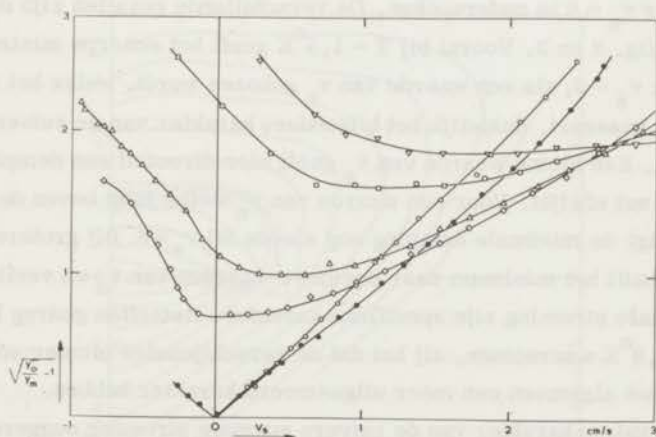


Fig. 2. Enige series, waarin v_n constant is; \circ : $v = 0$; \bullet : $v = 0,40$ cm/s; \square : $v = 1,13$ cm/s; \triangle : $v = 1,43$ cm/s; \diamond : $v = 2,23$ cm/s; ∇ : $v = 2,65$ cm/s. $T = 1,9^\circ K$.

^{*)} Kleine hysteresis-effecten werden inderdaad waargenomen bij metingen voor constante v/v_n en wel maakte het verschil of de instelling met toenemende of afnemende snelheid plaats vond. De gevonden verschillen waren echter nauwelijks significant groter dan de meetfout en zijn dus verder buiten de discussie gehouden. In voorkomende gevallen werd de gemiddelde waarde gebruikt.

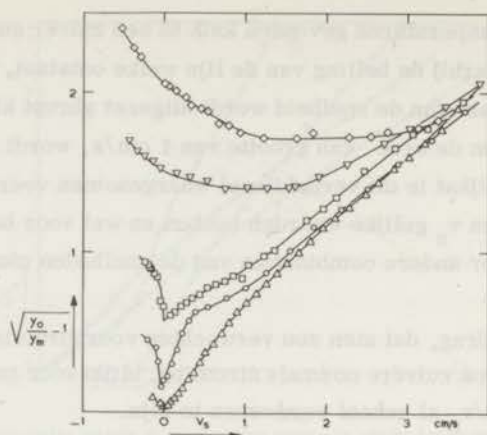


Fig. 3. Enige series, waarin v_n constant is: $\Delta: v_n = 1,20$ cm/s; $\circ: v_n = 1,72$ cm/s;
 $\square: v_n = 2,08$ cm/s; $\triangle: v_n = 3,51$ cm/s; $\diamond: v_n = 4,67$ cm/s. $T = 1,5^\circ\text{K}$.

De metingen bij constante v_n zijn voorts van belang om het gedrag bij de doorgang door $v_s = 0$ te onderzoeken. De verschillende gevallen zijn duidelijk te zien in de fig. 2 en 3. Vooral bij $T = 1,5^\circ\text{K}$ geeft het scherpe minimum, dat optreedt voor $v_s = 0$, als een waarde van v_n gekozen wordt, welke het sub-kritische gebied passeert, duidelijk het bijzondere karakter van de zuivere normale stroming aan. Een kleine waarde van v_s geeft hier direct al een demping welke duidelijk van nul afwijkt. Voor een waarde van v_n welke juist boven de kritische waarde ligt, ligt de minimale demping nog steeds bij $v_s = 0$. Bij grotere waarden van v_n verschuift het minimum naar positieve waarden van v_s en verliest de zuivere normale stroming zijn specifieke karakter. Hetzelfde gedrag kan men ook bij $T = 1,9^\circ\text{K}$ waarnemen, zij het dat de verschijnselen minder scherp optreden en in het algemeen een meer uitgesmeerd karakter hebben.

Het bijzondere karakter van de zuivere normale stroming suggereert, dat de gemaakte veronderstellingen bij de berekening van de snelheden uit de stook-energieën inderdaad voldoende verwezenlijkt zijn en dat systematische fouten, door bijvoorbeeld warmtelekken, niet in ernstige mate het resultaat beïnvloed hebben.

III. Van de metingen van het type c (bijna constante massastroom) zijn enige voorbeelden gegeven in fig. 4.

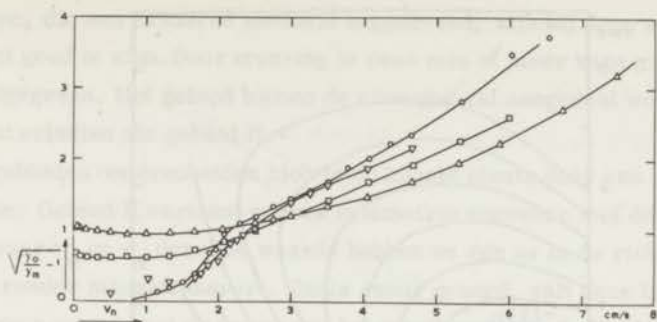


Fig. 4. Enige series, waarin v_* constant is: \circ : $v_* = 0$; ∇ : $v_* = 0,193$ cm/s
 \square : $v_* = 0,975$ cm/s; \triangle : $v_* = 1,73$ cm/s. $T = 1,5^\circ\text{K}$.

3. Een overzicht van alle resultaten vindt men voor $T = 1,5^\circ\text{K}$ in fig. 5 en voor $T = 1,9^\circ\text{K}$ in fig. 6. Door interpolatie werden bij de verschillende meetseries voor waarden van de extra demping van

$$y_0/y_m - 1 = 0,01 n^2$$

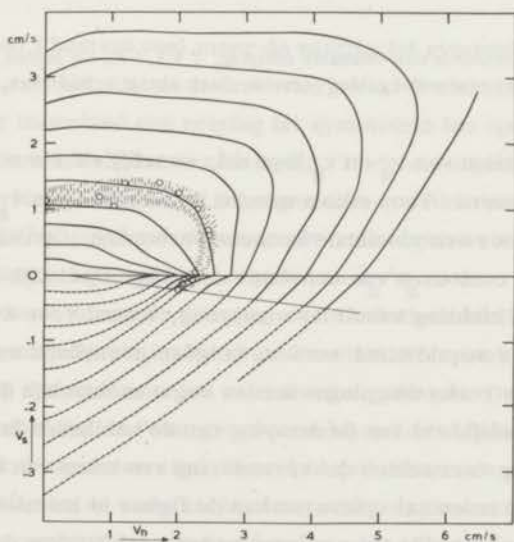


Fig. 5. Contouren van constante demping. $T = 1,5^\circ\text{K}$. De punten en het gearceerde gebied geven de plaats aan, waar ongeveer de knikken optreden. De getrokken lijnen corresponderen met $y_0/y_m - 1 = 0,01$; $0,09$; enz. De even kwadraten van de waarde $y_0/y_m - 1$ zijn vanwege de duidelijkheid weggelaten.

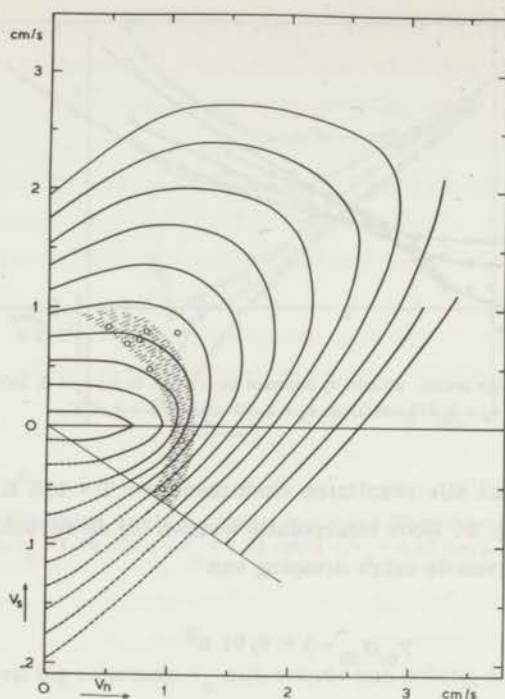


Fig. 6. Contouren voor constante demping. $T = 1,9^{\circ}\text{K}$. De punten en het gearceerde gebied geven de plaats van de knikken aan.

de bijbehorende waarden van v_n en v_s bepaald, waarbij voor n achtereenvolgens 1, 2, 3 enz. gekozen werd. Voor elke n werden de waarden van v_s en v_n tegen elkaar uitgezet en door een vloeiende kromme verbonden. Op deze wijze ontstaan dus een reeks contouren van constante demping. Duidelijk is te zien dat de contouren in elke richting vanuit de oorsprong, vooral voor wat grotere dempingen, ongeveer aequidistant worden, hetgeen in verband met de bovengenoemde keuze van de reeks dempingswaarden nogeensduidelijk de ongeveer kwadratische afhankelijkheid van de demping van de snelheden laat zien.

Omdat men mag verwachten dat verandering van teken van beide snelheden dezelfde dempingswaarden zal opleveren kan de figuur in het niet getekende linkerhalfvlak verkregen worden door spiegeling ten opzichte van de oorsprong. In verband hiermee konden de contouren, in het gebied, wat niet door metingen met dit toestel bestreken kon worden, redelijk goed doorgetrokken worden. In dit gebied zijn zij gestippeld aangegeven.

Het in de vorige paragraaf vermelde overgangsgebied met knikken en ver-

schijnselen, die een kritische snelheid suggereren, zijn bij deze wijze van uitzetten niet goed te zien. Door arcering is deze min of meer vage grens in de figuren aangegeven. Het gebied binnen de arcering zal aangeduid worden als gebied I, dat erbuiten als gebied II.

De gebieden onderscheiden zich in de eerste plaats door een verschil in symmetrie. Gebied II vertoont scheve symmetrie ongeveer met één as in de richting waar v_n en v_s dezelfde waarde hebben en één as in de richting van de stroming zonder massatransport. Zoals reeds gezegd, valt deze laatste richting ongeveer samen met de grens van het meetbare gebied. Het langgerekt zijn van de contouren langs de eerstgenoemde as geeft een duidelijke tendentie aan voor een toeneming van de demping met toenemende relatieve snelheid. Het verloop van de contouren in het tegenstroomgebied ($v_s < 0$) en de daarbij aansluitende stukken langs de v_n - en v_s -as valt bovendien ongeveer samen met lijnen van constante relatieve snelheid. Als v_n en v_s maar voldoende van elkaar verschillen kan men dus zeggen dat de demping in de eerste plaats een Gorter-Mellink karakter heeft (vgl. I-12). Tevens is het wel duidelijk, dat de demping hiermee niet uitsluitend verklaard kan worden: de contouren van constante demping zouden dan immers alle rechte lijnen met richtingscoëfficiënt 1 moeten zijn.

In het gebied I bestaat veel meer de neiging tot symmetrie met als assen $v_n = 0$ en $v_s = 0$, zij het, dat de invloed van gebied II zich nog ver in gebied I voortzet. Dat er inderdaad een neiging tot symmetrie ten opzichte van de v_n -as aanwezig is, is het duidelijkst te zien in fig. 1 door vergelijking van de demping bij twee series metingen met tegengestelde waarden van v_s/v_n . Het "subkritische" stuk in het geval van tegenstroom valt ongeveer samen met de "aanloop" van de kromme bij positieve waarde van v_s/v_n .

Om het verband tussen de demping en de relatieve snelheid nader te onderzoeken en zo mogelijk de invloed van deze laatste te isoleren van andere invloeden werd nog een andere wijze van uitzetten gekozen. Deze wijze heeft bovendien het voordeel dat de "overgangverschijnselen" tussen de gebieden I en II wat duidelijker te overzien zijn. Door interpolatie van de oorspronkelijke metingen werd bij elk van de onderzochte temperaturen de waarde van de demping bepaald voor die combinaties van v_n en v_s waarbij elk van deze snelheden een veelvoud van 0,2 cm/s was. Met behulp van dit "netwerk" is het gemakkelijk om de demping als functie van de relatieve snelheid uit te zetten voor constante opklimmende waarden van v_n of v_s . In verband met het kwadratische verloop van de demping werd niet de extra-demping zelf, aangeduid door $y_o/y_m - 1$, gebruikt,

maar de wortel uit deze uitdrukking,

$$\beta = [y_0/y_m - 1]^{\frac{1}{2}}.$$

De figuren 7 en 8 geven het resultaat van deze bewerking. Behalve krom-

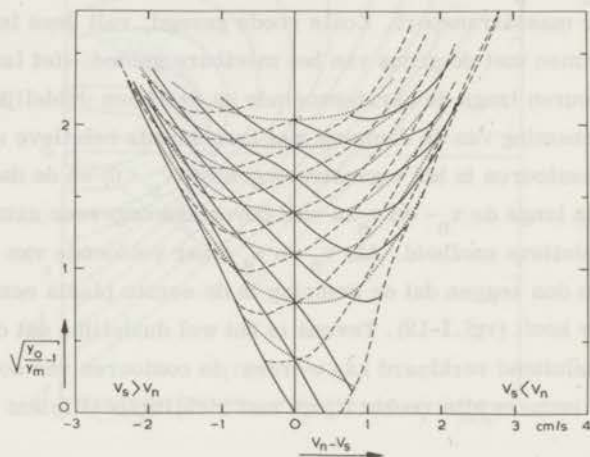


Fig. 7. Drie scharen van lijnen, waarlangs enkele karakteristieke snelheden constant zijn. $T = 1, 9^{\circ}\text{K}$: — $v = \text{const}$; ---- $v = \text{const}$; $v = \text{const}$. Het verschil in snelheid tussen twee opeenvolgende lijnen van een schaar is steeds 0,4 cm/s.

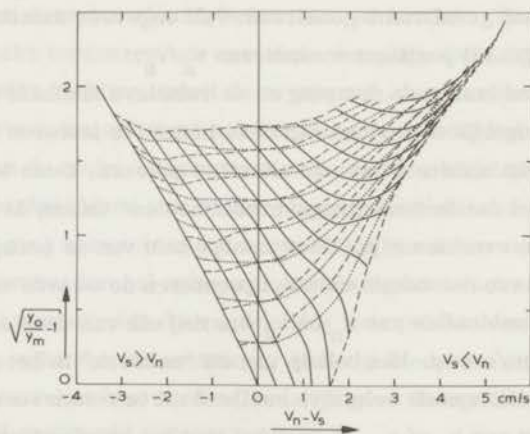


Fig. 8. Dezelfde figuur als fig. 7, maar nu voor $T = 1, 5^{\circ}\text{K}$.

men van constante v_n en v_s voor de waarde van β als functie van $v_n - v_s$, zijn ook getekend krommen van constant massatransport of constante $v = \frac{\rho_n v_n}{\rho} + \frac{\rho_s v_s}{\rho}$.

Deze laatste krommen zijn gemakkelijk uit de eerstgenoemde af te leiden.

Alvorens op een aantal details in te gaan en de resultaten verder te bespreken zal eerst de mogelijkheid om tot een nadere interpretatie van de resultaten te komen, moeten worden onderzocht.

4. Mogelijkheid van interpretatie.

Voor metingen van de demping van het tweede geluid tengevolge van stroming zonder transport van massa geeft de Gorter-Mellink wrijving een adequate fenomenologische beschrijving. Voor de metingen beschreven in hoofdstuk VI en in het onderhavige hoofdstuk is deze beschrijving echter duidelijk onvoldoende, hoewel een dergelijke wrijving wel een belangrijke rol schijnt te spelen, in het bijzonder voor stromingen, waarbij de snelheid behorend bij het netto massatransport niet te groot is vergeleken met de relatieve snelheid. Een fenomenologische analytische beschrijving van alle resultaten, d.w.z. een soort generalisatie van de Gorter-Mellinkformule is tot nu toe evenwel niet gelukt.

Voor een nadere interpretatie heeft het zin de verklaring die Vinen en Hall¹⁾ gegeven hebben van de Gorter-Mellinkwrijving te discussiëren. Zij identificeerden deze wrijving met een kracht tussen de excitaties die het normale fluidum representeren en de wervellijnen, die in het superfluidum kunnen optreden. Aangezien deze wervellijnen in eerste benadering met het superfluidum meebewegen ligt een wrijvingskracht van de vorm

$$\vec{F}_{sn} = G \cdot (\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (1)$$

voor de hand. De factor G is dan, afgezien van factoren welke uitsluitend van de temperatuur afhangen, evenredig met de totale lengte aan wervellijnen per volume eenheid, L . De wervellijnen vormen een verwarde kluwen en men kan zeggen dat zij een soort turbulentie van het superfluidum representeren. Men mag verwachten dat, tengevolge van de stromingen, er processen zullen zijn, die de lengte van de wervellijnen zullen vergroten, terwijl andere processen juist een afbraak zullen bewerkstelligen. In een evenwichtstoestand houden deze processen elkaar dan juist in balans. Vinen heeft op grond van dimensiebeschouwingen en de analogie met turbulente situaties in gewone vloeistoffen een aantal van deze processen op half-empirische wijze geponeerd en op grond

daarvan voor de evenwichtssituatie afgeleid dat

$$G \sim L_{\text{evenwicht}} \sim \frac{2}{v_n - v_s} \quad (2)$$

hetgeen dus een bevredigende interpretatie gaf van de wederkerige wrijving van Gorter en Mellink.

Zoals in hoofdstuk II is uiteengezet kan men formeel een lineaire demping van het tweede geluid steeds interpreteren met behulp van een term in de bewegingsvergelijking van de vorm (1). Daaruit volgt dat ook bij de huidige meetresultaten een verdere interpretatie als het gevolg van een wederkerige wrijving, veroorzaakt door de wisselwerking tussen de normale excitaties en de wervellijnen in het superfluidum, mogelijk is, mits men niet langer aanneemt, dat de opbouw- en afbraakprocessen van de wervellijnen uitsluitend bepaald worden door de relatieve snelheid. Het probleem, dat dus opgelost zou moeten worden komt neer op het vinden van zodanige processen, dat voldaan wordt aan de afhankelijkheid van de evenwichtswaarde van G als functie van de snelheden, zoals deze uit de experimenten volgt. Aangezien een groot aantal processen denkbaar zijn, welke elkaar bovendien sterk zullen kunnen beïnvloeden, is dit geen gemakkelijk op te lossen probleem, vooral indien slechts evenwichtswaarden van L (of G) bekend zijn.

Door Vinen zijn de volgende processen gepostuleerd, welke hij additief beschouwt:

- a. een opbouwterm, die te maken heeft met het uitrekken van de wervellijnen onder invloed van het Magnuseffect dat ontstaat door de relatieve beweging $[dL/dt \sim (v_n - v_s) L^{3/2}]$;
 - b. een opbouwterm van zuiver empirisch karakter, zonder welke het opbouwproces zelfs niet op gang zou komen $[dL/dt \sim (v_n - v_s)^{5/2}]$;
 - c. een afbraakterm zoals deze ook bij gewone homogene turbulentie optreedt $[dL/dt \sim L^2]$;
 - d. een afbraakterm welke mogelijk samenhangt met de verstoring, die de wand teweeg brengt aan het proces onder a $[dL/dt \sim (v_n - v_s) L]$.
- Bovendien zou men nog kunnen denken aan:
- e. de opbouw van wervellijnen in het superfluidum ten gevolge van turbulente beweging van het normale fluidum;
 - f. de afbraak van wervels door koppeling van deze met het normale fluidum in een gebied, waar dit laatste nog in laminaire beweging is; de viscositeit van het

normale fluïdum zou dan een rol kunnen spelen bij de nivellering van de turbulente beweging;

g. Tenslotte kan men zich nog voorstellen dat wervels, die aan de wand of aan randen vastzitten onder invloed van de superfluïde stroming worden uitgerekt. In verband met de rol welke volgens de experimenten van Staas²⁾ de turbulentie van het normale fluïdum spelen kan, een effect dat door Vinen niet beschouwd werd, verdienen processen die hiermee te maken hebben, als dat onder e, de bijzondere aandacht. Er werd geen poging gedaan om de vorm, die de laatstgenoemde effecten zouden kunnen hebben na te gaan. Zonder nadere gegevens is het onmogelijk om te bewijzen dat een dergelijke interpretatie, die alle demping toeschrijft aan een soort gegeneraliseerde wederkerige wrijving al of niet juist is. Gezien het succes van de theorie van de wervellijnen en het ontbreken van een andere theoretische aanpak heeft het zin te trachten de resultaten zoveel mogelijk aan het geschetste beeld te toetsen.

Uiteraard is het nuttig om daarbij steeds te bedenken welke andere effecten dan de genoemde "wederkerige wrijving" een bijdrage tot de demping kunnen leveren. Effecten, die een niet-lineaire demping veroorzaken kunnen daarbij buiten beschouwing gelaten worden. Effecten die verantwoordelijk zouden zijn voor een demping welke sterk van de frequentie afhangt spelen vermoedelijk ook geen rol. Bij stromingen zonder massatransport is dit in elk geval niet gevonden, terwijl bij andere stromingen de frequentie nauwelijks gavariëerd kon worden.

Wel kan men denken aan een directe invloed van de turbulentie van het normale fluïdum op de demping van het tweede geluid. Dit zou a. h. w. een vergroting van de nul demping kunnen veroorzaken, eventueel te beschrijven met behulp van een "eddy-viscosity", welke een vergroting van de visceuze indringdiepte zou kunnen opleveren. Het lijkt echter niet waarschijnlijk dat een dergelijk effect op zichzelf het steile verloop van de demping als functie van de snelheid bijvoorbeeld bij een zuivere normale stroming zou kunnen verklaren.

In wat volgt zal voor zover nodig, het geschetste beeld van een demping evenredig met het aantal wervellijnen in het superfluïdum worden aangehouden. In plaats van "aantal wervellijnen per volume eenheid" kan men eventueel ook spreken van een hoeveelheid "superfluïde turbulentie".

5. Nadere bespreking van de resultaten met het rondstroomtoestel verkregen.
a. Vergelijking met de metingen van hoofdstuk IV.

Zoals reeds is opgemerkt (V, 1) verschilt de met het rondstroomtoestel gecreëerde stromingstoestand met maximale superfluïde tegenstroom weinig

van die zonder massatransport ($v = 0$). Een vergelijking heeft dus zin en kan het beste gebeuren met behulp van A-waarden, zoals deze verkregen worden, indien de extra demping uitsluitend aan de Gorter-Mellink wrijving wordt toegeschreven en door een vergelijking van de "kritische snelheden". In tabel I zijn in de laatste vier kolommen de gegevens voor een aantal temperaturen opgenomen. Vergelijking van de A-waarden van deze stroming: A_* met de gemiddelde A-waarden, die uit de metingen van hoofdstuk IV volgen (kolom 2 t/m 5) laat slechts kleine verschillen zien, die toegeschreven kunnen worden aan het verschil in stromingstoestand en de systematische en toevallige fouten, die bij deze metingen optreden.

Vergelijking van kolom 7 en 14 leert, dat de kritische waarden van v_n voor de maximale tegenstroming kleiner zijn, dan voor die van de zuivere normale stroming. Dit is ook te zien in de figuren 5 en 6, waar duidelijk blijkt, dat de demping in de zuivere normale stroming pas bij hogere waarden van v_n oploopt dan voor de stroming, waarin $v_* = 0$. Vergelijking van de vijftiende met de derde kolom laat zien, dat het product van de kritische snelheid met de kanaaldiameter redelijk goed overeenstemt met de waarde van dit product van een meting uit hoofdstuk IV. Het lijkt er dus op, dat de kritische snelheden omgekeerd evenredig zijn met de kanaaldiameter.

b. Kritische verschijnselen en kritische snelheden.

In de metingen uit hoofdstuk VI werd geen aanwijzing gevonden voor een kritische waarde van v_s bij een zuivere superfluïde stroming, d.w.z. de demping lijkt direct toe te nemen indien er enige stroming optreedt. Preciezer gezegd: de kritische snelheid is zeker kleiner dan 0,1 cm/s. Vergelijking met de snelheid, waarbij de eerste wervellijnen in het superfluidum gevormd worden (VII, 4) en welke een waarde heeft van $\sim 0,05$ cm/s (zie o.a. Atkins⁴) voor een capillair van 1 mm diameter, laat zien, dat over het al of niet optreden van een kritische snelheid voor de huidige metingen geen uitspraak gedaan kan worden.

Een duidelijk gebied van snelheden, waar nog geen demping aanwezig is, treedt uitsluitend op voor een zuivere normale stroming. In zekere zin is dit een aanwijzing voor het bestaan van een eindige kritische waarde voor v_s . Indien immers voor $v_s = 0$ al enkele wervellijnen aanwezig zouden zijn zou men bij een eindige waarde van v_n (en dus van $v_s - v_n$) moeten verwachten dat het aantal wervels en dus de demping bijvoorbeeld onder de invloed van de effecten van 4 al zou moeten toenemen. Dit zou dus moeten betekenen, dat voor waarden van v_s kleiner dan een zekere kleine (maar eindige) snelheid geen opbouw van

wervels of turbulentie in het superfluidum kan plaats vinden. In hoeverre stabilisering onder invloed van de viscositeit van het normale fluidum hierbij een rol spelen kan, is overigens niet duidelijk.

Het sub-kritische gebied voor de zuivere normale stroming eindigt door het optreden van grote instabiliteiten, die zich uiten door sterk wisselende waarden van de demping (zie hoofdstuk IV fig. 1b). Het blijkt mogelijk om vooral bij de lagere temperaturen, de snelheden, waarbij nog geen extra demping optreedt nog belangrijk hoger maken door deze uiterst voorzichtig te doen toenemen. Zoals uit fig. 6 van hoofdstuk IV en tabel I blijkt liggen Reynoldsgetalen voor het overgangsgebied, indien zij gedefinieerd worden zoals Staas gedaan heeft ($R = \frac{\rho v_n d}{\eta_n}$) tussen ± 2740 à 3400 bij $T = 1,3^\circ\text{K}$ en 900 à 1700 bij $T = 2,0^\circ\text{K}$. De waarden van het Reynoldsgetal waarin niet de totale dichtheid ρ maar ρ_n is opgenomen varieert tussen deze dezelfde temperaturen van ~ 100 tot 400 . Geen van beide Reynolds getallen vertonen onafhankelijkheid van de temperatuur. Echter, vooral de orde van grootte van het Reynoldsgetal volgens Staas²⁾, tesamen met de aard van de verschijnselen die bij de overgang naar volledige turbulentie optreden suggereren een kritisch verschijnsel van essentieel klassieke oorsprong, d.w.z. het turbulent worden van het normale fluidum. Men kan hierbij bedenken, dat ook bij gewone vloeistoffen slechts sprake is van een overgangsgebied, dat met voldoende zorg belangrijk uitgebreid kan worden. Dat bij lagere temperaturen en dus kleinere normale dichtheid het sub-kritische gebied gemakkelijker uitgebreider gemaakt kan worden ligt wel voor de hand.

Indien bovenstaande interpretatie van het toenemen van de demping als gevolg van het turbulent worden van het normale fluidum juist is, dan volgt daaruit dat de kritische verschijnselen in het tegenstroomgebied, die immers duidelijk bij die voor de zuivere v_n -stroming aansluiten, zij het meer uitgesmeerd en afgevlakt van karakter, eveneens in wezen klassiek van oorsprong zouden zijn, hetgeen dus, mutatis mutandi, eveneens zou gelden voor alle resultaten van metingen aan stromingssituaties zonder massatransport (ref. I, 6a, b, c, d). De op deze wijze verkregen kritische snelheden zouden dus niets te maken hebben met kritische waarden voor de snelheid van het superfluidum⁵⁾.

c. Speculaties over het gebied I.

Het gebied I wordt in fig. 5 en 6 rechts onder begrensd door een "kritische zone" die de overgang vormt naar het gebied waar de demping ongeveer evenredig lijkt te zijn met het kwadraat van de relatieve snelheid (Gorter-Mellink wrijving). Voor positieve waarden van v_n en v_s is de begrenzing minder duidelijke.

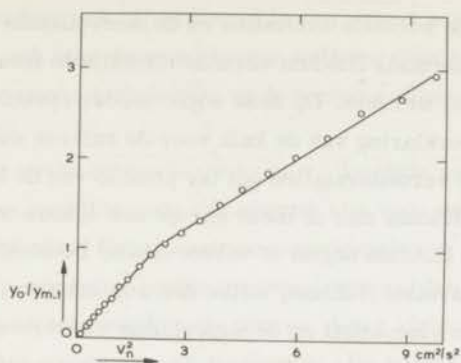


Fig. 9. De relatieve afname van de amplitude in een stroming, waarin $v_n = v_s$, $T = 1,5^\circ\text{K}$.

lijk; zij wordt aangeduid door min of meer vage knikken (fig. 9).

Uit het voorgaande is duidelijk dat voor een zuivere superfluïde stroming de demping al bij zeer kleine snelheden optreedt. In de voorgestelde interpretatie betekent dit, dat de productie van wervellijnen tamelijk weinig wordt gehinderd door afbraakprocessen. In een zuivere normale stroming daarentegen, blijft de demping gelijk aan de nuldemping tot een tamelijk grote waarde van v_n , hetgeen suggereert dat bij laminair stromend normaal fluïdum geen wervellijnen in het *stilstaande* superfluïdum worden geproduceerd of althans dat de afbraakprocessen overheersen. Zodra in het laatste geval het superfluïdum eveneens gaat stromen treedt bij kleine waarden van v_n , d.w.z. in het gebied waar de contouren van fig. 5 en 6 symmetrisch liggen t.o.v. de v_n -as en evenwijdig daaraan lopen, dezelfde demping op als in het geval het normaal niet stroomt. De hoeveelheid wervellijnen is hier dus niet afhankelijk van de relatieve snelheid en kan dus niet uitsluitend bepaald worden door een combinatie van de processen, zoals die door Vinen werden geponeerd.

Toch speelt de aanwezigheid van het normale fluïdum een belangrijke rol bij de instelling van het evenwicht van het aantal wervellijnen. Dit is te zien aan de temperatuurafhankelijkheid van $A_{s1} = G/(\rho_n \rho_s v_s^2)$ voor de zuiver superfluïde stroming (zie tabel I). De groei van het aantal wervels in evenwicht gaat blijkbaar veel sneller bij lage dan bij hogere temperaturen en hangt dan ook waarschijnlijk af van de normale dichtheid ρ_n . Aangezien de waarde A_{s1} juist het sterkst toeneemt bij de laagste temperatuur waar ρ_s praktisch niet meer varieert, is een invloed van de superfluïde dichtheid onwaarschijnlijk. Het is misschien een aantrekkelijke speculatie om te veronderstellen, dat een zwakke

wisselwerking tussen de normale excitaties en de wervellijnen voldoende is om de viscositeit van het normale fluïdum verantwoordelijk te laten zijn voor de beperking van het aantal wervels. Op deze wijze verder speculerend zou men kunnen proberen een verklaring van de knik voor de zuivere superfluïde stroming te geven, door te veronderstellen dat ter plaatse van de knik de wervelbeweging in het superfluïdum min of meer abrupt een zekere mate van turbulentie van het normale fluïdum begint te veroorzaken. De sterkere "verknoping" van superfluïdum en normaal fluïdum, welke dan zou ontstaan, zou een grotere invloed van de normale viscositeit op de superfluïde wervelbeweging kunnen veroorzaken. Hierdoor zou de "groei" van de wervels bij verdere toeneming van de snelheid minder snel kunnen zijn, dan voor snelheden beneden de knik. De waarde van A_{s2} (zie tabel) die deze groei karakteriseert boven de knik blijkt practisch onafhankelijk van de temperatuur te zijn. Mogelijk is het in dit verband relevant om op te merken dat de waarde van v_s voor de knik V_{s1} ongeveer correspondeert met een Reynoldsgetal in het kritische gebied voor het normale fluïdum indien men het normale fluïdum opvat als te bewegen in coördinatenstelsel, waarin de superfluïde wervels stilstaan. M.a.w. de waarde van $\frac{\rho v_s d}{\eta_n}$ die ongeveer 1400 bedraagt is kritisch volgens Reynolds^{*)}. Het heeft geen zin, gezien het speculatieve karakter van deze beschouwingen om nader op details in te gaan, maar het zou interessant zijn om te onderzoeken of de wervels in het superfluïdum inderdaad in staat zijn om klassieke turbulentie in het normale fluïdum te veroorzaken, zonder dat dit zelf in stroming is.

Zoals in 5b is uiteengezet, is het waarschijnlijk, dat de kritische verschijnselen welke waargenomen worden bij een zuivere normale stroming, samenhangen met het gaan optreden van klassieke turbulentie. Het ligt voor de hand om dan te veronderstellen, dat zodra het normale fluïdum turbulent wordt ook het superfluïdum zodanig beïnvloed wordt, dat turbulentie optreedt en dus wervellijnen gevormd worden. Indien dit eenmaal gebeurd is, dan kan de verdere opbouw van wervels bij toeneming van v_n plaats vinden bijvoorbeeld via de processen welke genoemd zijn in 4. Op deze wijze kan de demping voor grotere waarden van v_n weer toegeschreven worden aan de wederkerige wrijving van het daar besproken type. De orde van grootte van de demping, evenals het kwadratische verloop ervan zijn volkomen analoog aan die in willekeurige andere

* Uit voorlopige resultaten van metingen door G. v. d. Heyden aan veel nauwere capillairen schijnt inderdaad te volgen dat v_{s1} onafhankelijk van de diameter d is. Anderzijds komt de orde van grootte van v_{s1} ongeveer overeen met de kritische snelheid welke door van Alphen c. s. in superfluïde stromingen werd gevonden en welke evenredig met $d^{-1/4}$ zou zijn.

stromingstoestanden, ook bijvoorbeeld in een zuiver superfluïde stroming. Dit suggereert, dat ook hier de wederkerige wrijving dominant is en dat een *directe* invloed van de normale turbulentie, op de demping althans, slechts een ondergeschikte rol speelt.

De demping welke optreedt als v_n en v_s dezelfde richting hebben en bovendien ongeveer van dezelfde orde van grootte zijn zou, nog steeds in het bovenstaande beeld, tot stand komen door een combinatie van primaire productie van superfluïde turbulentie, welke eventueel kan worden overgedragen aan het normale fluidum en het omgekeerde proces. Voor kleine snelheden moet men verwachten dat het eerste proces overheerst. De verklaring van de tamelijk duidelijke knik, welke optreedt voor $v_n = v_s$ zou in principe dezelfde kunnen zijn als die welke gegeven werd voor de superfluïde stroming. Anderzijds mag men overigens verwachten dat de overgang naar het gebied II bepaald zal worden door een tamelijk ingewikkelde combinatie van turbulentie-opbouwende processen.

d. Het gebied II.

Voor een beschouwing van het gebied van "goed ontwikkelde" turbulentie zijn de figuren 7 en 8 het meest geschikt. Zoals reeds eerder opgemerkt, is een demping, welke verklaard kan worden met behulp van een wederkerige wrijving van het oorspronkelijke Gorter-Mellink type, d.w.z. evenredig met het kwadraat van de relatieve snelheid practisch verwezenlijkt als $|v_n - v_s| > |v_n|$ of $|v_s|$. Dit is duidelijk te zien aan de lijnen van constante v_n voor $|v_s| < v_n$ en de lijnen van constante v_s voor $v_s > v_n$, die immers duidelijk naar één kromme convergeren bij toeneming van respectievelijk $v_s - v_n$ en $v_n - v_s$.

Voor negatieve waarden van $v_n - v_s$ vertonen de lijnen van constante v_n , in het gebied van de metingen, geen neiging tot convergeren maar zij gaan wel ongeveer evenwijdig lopen. Het zelfde geldt voor positieve waarden van $v_n - v_s$ wat betreft de lijnen van constante v_s . Dit wijst erop, dat de *toeneming* van de demping en dus het aantal wervellijnen in evenwicht langs deze lijnen inderdaad grotendeels door de relatieve snelheid wordt bepaald, maar dat een zekere hoeveelheid turbulentie, die bij kleine waarden van de relatieve snelheid reeds aanwezig was en welke niet ontstaan kan zijn door de processen van Vinen, daarbij opgeteld moet worden.

De lijnen van constante massasnelheid ($v = \text{constant}$) lopen voor $v_n \sim v_s$ ongeveer horizontaal. De demping wordt hier blijkbaar practisch door de grootte van deze massasnelheid bepaald. De in c. gesuggereerde opbouw van turbulentie door wederzijdse beïnvloeding van normale en superfluïde turbulente beweging heeft zich hier mogelijk ontwikkeld tot een turbulente toestand van de

vloeistof als geheel. De interpretatie van de demping als het gevolg van een wederkerige wrijving door krachten tussen de normale excitaties en de wervellijnen in het superfluidum is hiermee niet in strijd.

Vergelijking van de beide figuren laat zien dat de metingen bij $1,9^{\circ}\text{K}$ als het ware, verder in het turbulente gebied zijn voortgezet dan die bij $1,5^{\circ}\text{K}$. Dit komt overeen met een grotere waarde van de "normale" kritische snelheid bij de laatstgenoemde temperatuur. Dit suggereert nogmaals de invloed, welke de gewone klassieke turbulentie op deze dempingsverschijnselen heeft, omdat immers de waarde van de normale kritische snelheid blijkbaar samenhangt met de normale dichtheid.

Het schijnt redelijk om aan te nemen, dat de beide lijnen, waar de demping naar toe convergeert voor grote positieve en negatieve waarden van $v_s - v_n$ ten slotte symmetrisch ten opzichte van de as waarvoor $v_n = v_s$ zullen gaan lopen. Dit wordt bij $1,9^{\circ}\text{K}$ redelijk goed bereikt, bij $1,5^{\circ}\text{K}$ binnen het gemeten gebied nog niet. De waarden van A_{s2} en A_n verschillen in het laatste geval ook het meest (zie tabel). Het symmetrische karakter van de krommen, waarvoor $v = \text{const.}$ wordt bij hogere snelheden, schijnt erop te wijzen dat de demping primair bepaald wordt door de absolute waarde van v en $(v_n - v_s)$. Dit komt overeen met de scheve symmetrie in de figuren 5 en 6.

De betekenis van het feit, dat het minimum van de krommen waarvoor v_n constant is voor $1,9^{\circ}\text{K}$, bij niet te kleine waarden van v_n , praktisch ligt bij een constante waarde van de relatieve snelheid (1 cm/s) is niet duidelijk. Bij $1,5^{\circ}\text{K}$ wordt deze situatie binnen het meetgebied (nog?) niet bereikt.

6. Enkele temperatuurverschilmetingen.

In het stromingscircuit zijn bij $T = 1,8^{\circ}\text{K}$ voor een drietal stromingen temperatuurverschilmetingen verricht: één voor een zuivere superfluide stroming, één voor een zuivere normale stroming en één voor een stroming, waarin de beide snelheden even groot waren. Voor de eerste twee series werd een derde graads afhankelijkheid van de snelheid vastgesteld, waaruit A_s en A_n -waarden konden worden bepaald, welke volledig overeenkomen met de waarden, welke uit de dempingsmetingen volgden. Tevens bleek in de zuivere normale stroming weer een kritische snelheid op te treden, welke overeenstemde met degene, die uit de dempingsmetingen volgde.

Alleen in het geval, dat in de stroming v_s en v_n even groot waren, werd een onmeetbaar klein temperatuurverschil waargenomen, wat pleit voor een wederkerige wrijving van de vorm: $G \cdot (v_n - v_s)$, waarin G geen functie van de

relatieve snelheid hoeft te zijn.

Uit het ontbreken van een meetbaar temperatuurverschil mag niet de conclusie getrokken worden, dat in het capillair geen wrijving aanwezig is, immers, uit de dempingsmetingen blijkt het tegendeel.

Meerdere temperatuurverschilmetingen zijn niet verricht, daar door de afmetingen van het kanaal de temperatuurverschillen te klein worden om nauwkeurige resultaten op te leveren.

7. Enkele metingen aan een gesloten superfluïde circuit.

Bij een drietal temperaturen is een dempingsmeting verricht aan een stroming, waarbij het toestel volledig was volgecondenseerd. De stromingstoestand in het circuit komt dan overeen met de toestand, die Staas in zijn stromingscircuit heeft gerealiseerd (I, 3a). Door in H_2 warmte te ontwikkelen ontstaat een normale stroming in het capillair, waarvan v_n bepaald is en eventueel een superfluïde stroming, waarvan de snelheid niet berekend kan worden. De resultaten, die Staas²⁾ verkregen heeft, luiden in het kort, dat beneden een Reynoldsgetal ~ 1100 de drukgradiënt recht evenredig is met v_n en daarboven evenredig is met $v_n^{1,75}$ volgens de wet van Blasuis. Dit duidt erop, dat in vloeibaar helium turbulentie gevonden wordt, die aan normale vloeistoffen verwant is.

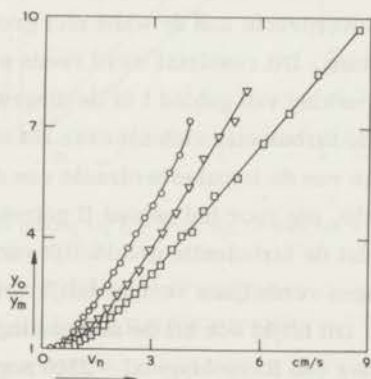


Fig. 10. Enkele dempingsmetingen aan een gesloten superfluïde circuit

○ : $T = 1,9^{\circ}K$ ▽ : $T = 1,7^{\circ}K$ □ : $T = 1,5^{\circ}K$

Het resultaat van drie metingen is gegeven in fig. 10. In het verloop van de demping als functie van v_n komt geen gedrag, als door Staas te voorspellen, naar voren: bij een Reynoldsgetal ~ 1100 is geen kritisch verschijnsel te vinden en tevens is het verloop van de lijnen op geen enkele eenvoudige manier met elkaar in verband te brengen, bv. door i. p. v. de snelheid van het normale fluïdum

het Reynoldsgetal te gebruiken.

De metingen lenen zich echter nog wel voor een andere bewerking. De snelheid van het superfluidum kan namelijk gevonden worden, omdat uit de vorige metingen het verband tussen de beide snelheden en de demping bekend is. Daar in fig. 10 het verband tussen de demping en de snelheid van het normale fluidum wordt gegeven, kan gemakkelijk met behulp van de diagrammen 5 en 6 de snelheid van het superfluidum gevonden worden. Dit geeft twee oplossingen, waarvan één dezelfde richting heeft als v_n en één aanvankelijk daaraan tegengesteld is en bij hogere snelheden pas van richting omkeert. Daar het zeer waarschijnlijk is, dat beide snelheden dezelfde richting zullen hebben, is hier alleen de eerste oplossing gebruikt. Het resultaat is gegeven in fig. 11 en 12, waarin de beide snelheden tegen elkaar zijn uitgezet. Zoals blijkt is v_s steeds kleiner dan v_n en blijft daar bij hogere snelheden een min of meer constant bedrag bij achter. Bij $T = 1,9^\circ K$ is dit effect niet zo uitgesproken, wat vermoedelijk komt door een zekere spreiding in de metingen van het diagram 6.

Resumerend kan men uit de laatste experimenten de volgende conclusie trekken: Uit de metingen van Staas volgt, dat bij kleine Reynoldsgetalen de drukgradiënt evenredig is met v_n . Uit de dempingsmetingen blijkt echter, dat in het capillair turbulentie aanwezig is, wat kennelijk in het superfluidum aanwezig is, daar de impulsoverdracht aan de wand niet groter is dan voor een visceuze laminaire stroming. Dit resultaat werd reeds eerder in dit proefschrift gesignaleerd, bij de bespreking van gebied I in de diagrammen. Bij hogere Reynoldsgetalen breidt de turbulentie zich uit over het normale fluidum, wat weer blijkt uit de toename van de impulsoverdracht aan de wand (de stromingsweerstand) en de conclusie, die voor het gebied II getrokken werd in de omgeving van de v_s -as. Doordat de turbulentie geleidelijk van het ene op het andere fluidum wordt overgedragen verdwijnen vermoedelijk kritische verschijnselen in de dempingsmetingen. Dit blijkt ook uit de mededeling van Staas, dat in vloeibaar helium ook onder een Reynoldsgetal ~ 2300 nog een verhoogde weerstand van het capillair optreedt in tegenstelling tot normale vloeistoffen.

Tot slot kan men opmerken, dat de conclusie uit 5d, dat de demping en dus de turbulentie in het gebied, waarin $v_n \approx v_s$, door v bepaald wordt, de veronderstelling van Staas ondersteunt, dat de turbulentie zich niet beperkt tot het normale fluidum, maar een eigenschap is van de vloeistof als geheel.

Dit geeft nogmaals een argumentatie voor het Reynoldsgetal $\frac{\rho v_n d}{\eta_n}$ i. p. v.

$\frac{\rho_n v_n d}{\eta_n}$ in dit gebied.

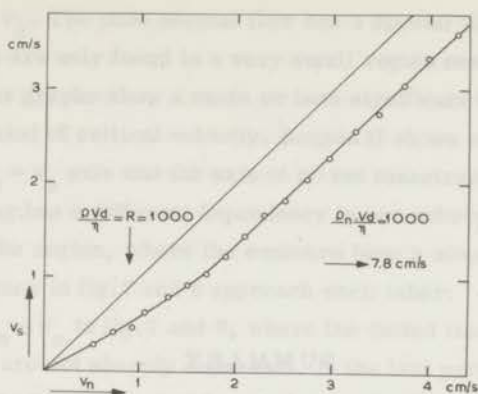


Fig. 11. De baan van de meting bij $1,5^{\circ}\text{K}$ uit fig. 10 door het V_n, V_s diagram van figuur 6.

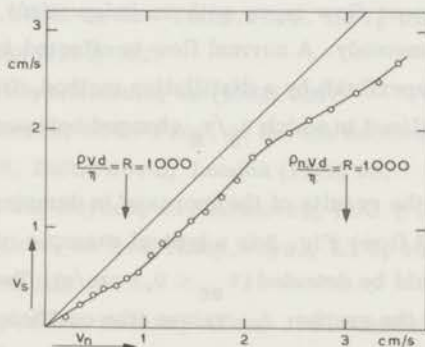


Fig. 12. De baan van de meting bij $1,9^{\circ}\text{K}$ uit fig. 10 door het V_n, V_s diagram van figuur 7.

REFERENTIES

- 1 : Hoofdstuk I, ref. 6a, b, c, d,
Vinen, W.F., Progress in Low Temp. Phys., Ed. C.J. Gorter,
N.H. Publ. Comp. deel III, pag. 1.
- 2 : Staas, F.A., Taconis, K.W., Van Alphen, W.M., Physica, 27 (1960) 893.
- 3 : Van Alphen, W.M., Van Haasteren, G.J., De Bruyn Ouboter, R.,
Taconis, K.W., Phys. Lett. 20, Nr 25 (1966) 474.
- 4 : Atkins, K.R., Liquid Helium, Camb. Univ. Press, (1959), pag. 116.
- 5 : Tough, J., Phys. Rev. 144 (1966) 186.

SUMMARY

The influence on the damping of second sound in different kinds of flow has been investigated and discussed. Chapter IV reports the results of the flow with no net mass transport. These agree with the results obtained by other investigators. Chapters VI and VII report flow types with an independent regulated normal and superfluid flow simultaneously. A normal flow is effected by a heat current; a transport of mass (superfluid) by a distillation method. Different kinds of flow types could thus be realized in which v_s/v_n changed between ∞ and $-\frac{\rho_n}{\rho_s}$ (not exactly).

Chapter VI gives the results of the increase in damping by a pure superfluid and a pure normal flow. Fig. 2 is a typical example of a pure superflow. No critical velocity could be detected ($v_{sc} < 0,1$ cm/s). Two different parts can be distinguished in the graphs. A - values (the coefficient of the Gorter-Mellink force) for these two parts are given in fig. 4: A_{s1} for the lower part; A_{s2} for the upper part. Fig. 3 is an example of a pure normal flow. A very clear critical velocity is detected above which the flow becomes very unstable (fig. 1b). At higher velocities, the instabilities disappear again, and the damping shows a quadratic dependence on the velocity. A_n values are given in fig. 5. Fig. 6 gives some characteristic velocities for the pure normal flow type. Above the critical normal velocities (circles) the region of instabilities is shaded.

Chapter VII reports on all possible flow kinds together fig. 5, 6, 7 and 8 give the results of two temperatures. Contours at constant damping are plotted as a function of velocities in fig. 5 and 6. The damping for constant v_n, v_s and massflow v as a function of $v_n - v_s$ is given in fig. 7 and 8. In the diagrams 5 and 6 two regions can be distinguished. Region I, which is bounded by the shaded area, shows symmetry with respect to the v_n and v_s axis. At small v_n the damping

only depends on v_s . The pure normal flow has a special place in both diagrams. The instabilities are only found in a very small region near the v_n -axis. In the shaded area most graphs show a more or less significant break (fig. 9), which indicates some kind of critical velocity. Region II shows oblique symmetry with respect to the $v_n = v_s$ axis and the axis of no net mass transport.

The damping has a different dependency in two subregions:

1 : on $v_n - v_s$ in the region, where the contours have a slope ~ 1 and the straight and the dashed lines in fig. 7 and 8 approach each other.

2 : on v , when $v_n \approx v_s$ in fig. 7 and 8, where the dotted lines are horizontal.

Both subregions are not sharply separated. In the last part of chapter VII some experiments of the Staas type (not bounded superfluid) are reported.

By reconstruction v_s is found to be some what less than v_n .

Earlier communications of these experiments have been given in:

Kramer, H.C., Wiarda, T.M., Broese van Groenou, A., Proc. of the 7th Int. Conf. on Low Temp. Phys. LT 7, University of Toronto Press (1960) 562.

Kramers, H.C., J. Phys. Radium, 23 (1962) 326.

Wiarda, T.M., Kramers, H.C. Proc. of the 8th Int. Conf. on Low Temp. Phys., LT 8, Butterworth, London (1962) 98.

Wiarda, T.M., Van der Heyden, G., Kramers, H.C., Proc. of the 9th Int. Conf. on Low Temp. Phys., LT 9, Plenum Press, New York (1964) 284.

Kramers, H.C., Superfluid Helium, Allen, J.T. Academic Press (1966) 199.

Teneinde te voldoen aan de wens van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen volgt hier een kort overzicht van mijn universitaire studie.

Nadat ik in 1954 mijn eindexamen, H.B.S. -b, behaald had aan het Libanon-Lyceum te Rotterdam, begon ik de studie wis- en natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Leiden. Na het behalen van het candidaatsexamen A' in 1958, begon ik mijn praktische opleiding aan het Kamerlingh Onnes laboratorium in de werkgroep van Dr H. C. Kramers. Aanvankelijk assisteerde ik Drs. A. Broese van Groenou bij zijn stromingsproeven aan vloeibaar helium II; dit vond later nog plaats in samenwerking met Dr W. Zimmermann uit Minneapolis (V. S.) Tevens assisteerde ik op het practicum voor prea-candidaten. Eind 1959 begon ik de basis te leggen voor het onderzoek, waaruit dit proefschrift is ontstaan.

In 1961 legde ik het doctoraal-examen, experimentele natuurkunde af. De tentamens in de theoretische natuurkunde en mechanica werden mij door Prof. Dr S. R. de Groot, Prof. Dr P. Mazur en Prof. Dr J. A. M. Cox afgenomen. Prof. Ir C. A. Muller nam mij het tentamen in de experimentele natuurkunde: microgolftechniek af.

Na het behalen van het doctoraalexamen zette ik het onderzoek, stromingsverschijnselen in vloeibaar helium II, voort. Deze experimenten konden midden 1963 worden afgesloten.

In september 1963 werd ik docent bij het V. H. M. O. aan het Caland-Lyceum te Rotterdam, waar de rector, de heer W. Jager, mij de gelegenheid bood één dag in de week, contacten te onderhouden met het laboratorium in Leiden. Hiervoor ben ik hem zeer erkentelijk.

Bij het voorbereiden en uitvoeren van de metingen en het uitwerken van de resultaten werd ik geassisteerd door de heren Drs. P. L. J. Cornelissen, Drs. R. J. S. Harry en Drs. G. van der Heyden. Veel steun ondervond ik bij het ontwikkelen en opbouwen van de electrotechnische apparatuur van de heer P. L. Blangé. De heer W. F. Tegelaar verzorgde voor mij de tekeningen. De heer W. Dekker corrigeerde het Engels van de summary. Zonder andere leden van het technische personeel te kort te willen doen dank ik in het bijzonder de heer T. Nieboer, die steeds vol enthousiasme voor de vele technische en cryogene problemen weer een oplossing wist te vinden.

Tot slot wil ik ook op deze plaats mijn vrouw danken voor de manier waarop zij mij met bijna onuitputtelijk geduld, gedurende de lange tijd, die ik mij aan studie moest wijden, terzijde heeft gestaan. Alle moeilijkheden, die zich in huis en daarbuiten voordeden, loste zij vaak alleen voor mij op, waardoor ik mij volledig voor dit proefschrift kon inzetten.

STELLINGEN

I

Het is van belang de viscositeit van vloeibaar helium te bepalen in een stromingstoestand, waarin het tweede geluid geen extra demping ondervindt.

Hoofdstuk II en IV van het proefschrift.

II

Door gebruik te maken van het verschijnsel, dat in stromend vloeibaar helium II het éne fluïdum het andere tracht mee te slepen, kan in beginsel een afkoeling worden verkregen met een nuttig effect van ten hoogste ρ/ρ_s .

Olijhoek, J.F., Van Alphen, W.M., De Bruijn Ouboter, R., Taconis, K.W., *Physica* 34 (1967)...
Hoofdstuk VII van het proefschrift.

III

Bruce verklaart de door hem gevonden afwijkingen van het lineaire verband tussen de amplitude en het ingevoerde vermogen van het tweede geluid met behulp van wederkerige wrijving. Hiertegen kunnen ernstige bezwaren worden aangevoerd.

Bruce, R.H., *Proc. of the 7th Int. Conf. on Low Temp. Phys.*, Plenum Press, New York, (1964) 174.

IV

Bij de analyse van hun warmtegeleidingsmetingen aan nikkellegeringen hebben Farrel en Greig geen rekening gehouden met de energieafhankelijkheid van de verschillende verstrooiingsmechanismen. Het is daarom zeer voorbarig uit de waargenomen afwijkingen van de regel van Matthiessen tot conclusies te komen over anisotropie van relaxatietijden aan het Fermi-oppervlak.

Farrel, T., Greig, D., *Phys. Lett.* 24 (1967) 401.

V

Voor de studie van de magnetische ordening ten gevolge van dipoolwisselwerkingen in kristallen is het interessant de soortelijke warmte van dysprosium trichloride hexahydraat beneden 1°K te meten.

Schultz, M. B., Jeffries, C. D., *Phys. Rev.* 159 (1967) 277.

VI

Daar in een fotografische emulsie het verband tussen de hoeveelheid lichtenergie en de zwarting niet lineair is, mag een dergelijke emulsie niet als lineair filter worden beschouwd. Daarom zullen contrastoverdrachtsfuncties van fotografische materialen in de praktijk een beperkte bruikbaarheid hebben.

Kelly, H. D., *J. Opt. Soc. Am.* 50 (1960) 269.

Born, M., Wolf, E., 2nd rev. ed., Pergamon Press, (1964) 480.

Nawijn, A., *Ned. Tijds. Voor Natk.* 30 (1964) No. 5, 183.

VII

In zijn artikel over turbulentie in vloeibaar helium beschouwt Tough naast de turbulentie in het superfluidum ook klassieke turbulentie in het normale fluidum. Zijn beschouwingen zouden aanzienlijk aan waarde winnen, indien in de door hem gebruikte bewegingsvergelijkingen in plaats van de wederkerige-wrijvings-termen de termen $\frac{\rho_s \rho_n}{2} \text{grad}(v_s - v_n)^2$ werden opgenomen.

Tough, J. D., *Phys. Rev.* 144 (1966) 186.

VIII

Uit de verstrekte gegevens van Khorana en Chandrasekhar omtrent hun experimenten betreffende het Josephson wisselstroomeffect in vloeibaar helium, kan worden opgemaakt, dat hun metingen niet voldoende isotherm zijn uitgevoerd en een correctie moet worden aangebracht op de berekening van het verschil van de chemische potentialen in beide vaatjes.

Khorana, B. M., Chandrasekhar, B. S., *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967) 230.

IX

Ten einde een beter inzicht te krijgen in de invloed, die het normale fluidum en het superfluidum op elkaar uitoefenen is het interessant de wisselwerking tussen beide fluida te onderzoeken in interferentie- en verstrooiingsproeven met eerste en tweede geluidsgolven.

Ingard, U., Pridmore-Brown, D. C., J. Acoust. Soc. Am. 28 (1965) 367.

Westervelt, P. J., J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957) 199.

Westervelt, P. J., J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957) 934.

X

Ter verduidelijking van het energiebegrip in de bovenbouw van het V. H. M. O. is het beter om de kracht af te leiden als gradiënt van de energie, dan om de energie in te voeren als de kracht geïntegreerd over de verplaatsing.

The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation $f(x) = \int_0^x f(t) dt$. It is shown that $f(x)$ is a constant function and that the only solution of the equation is $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ f(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ f(x) &= \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

It is shown that the function $f(x)$ is a constant function and that the only solution of the equation is $f(x) = 0$. The proof is based on the fact that the derivative of $f(x)$ is $f(x)$ and that $f(0) = 0$.

The second part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation $f(x) = \int_0^x f(t) dt$. It is shown that $f(x)$ is a constant function and that the only solution of the equation is $f(x) = 0$.

The third part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation $f(x) = \int_0^x f(t) dt$. It is shown that $f(x)$ is a constant function and that the only solution of the equation is $f(x) = 0$.

This research was supported by the National Science Foundation.



