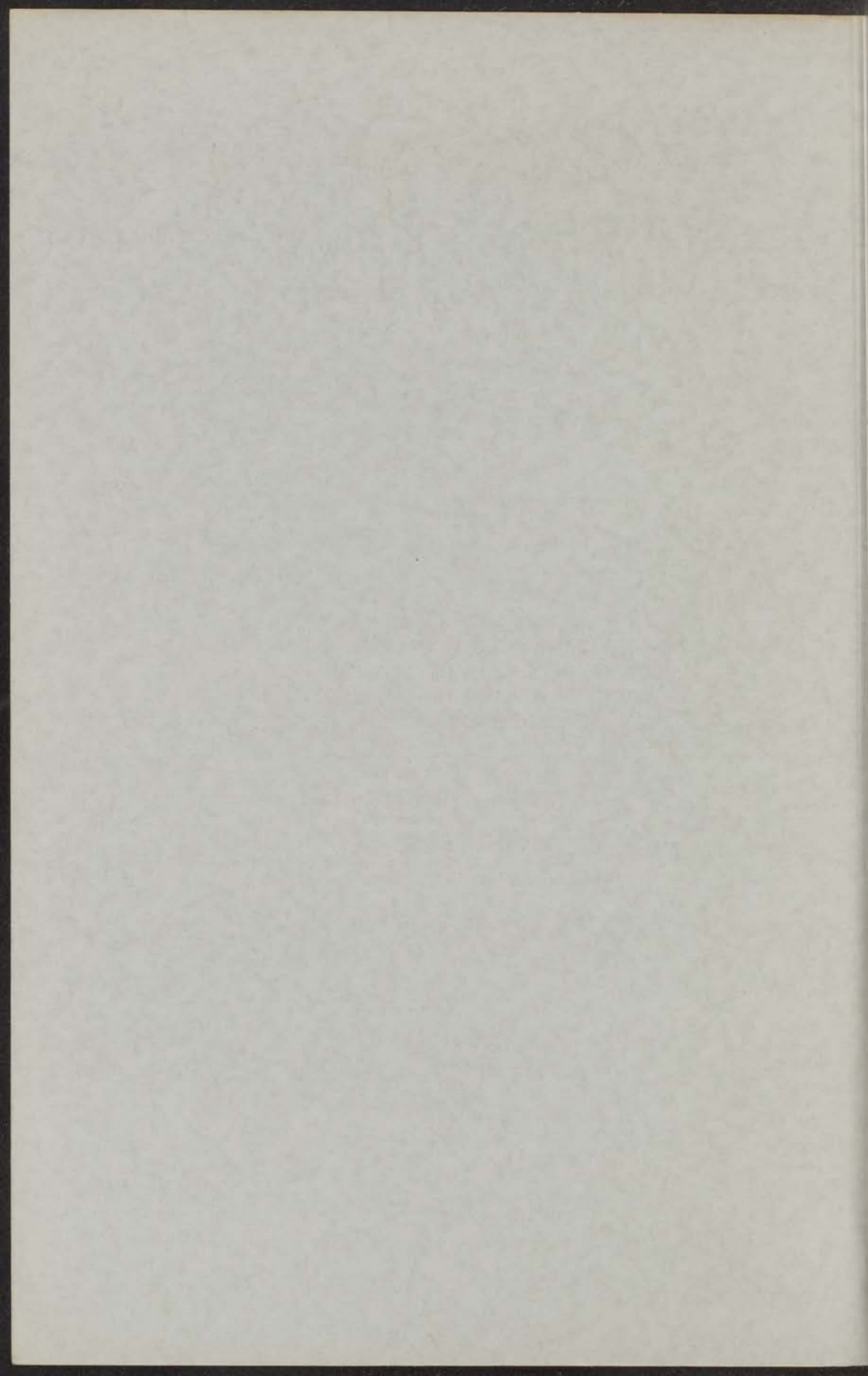


WRIJVINGSVERSCHIJNSELEN
IN VLOEIBAAR HELIUM II

P. WINKEL



Hoogleraar
Dr. J. J. HERMANS

WRIJVINGSVERSCHIJNSELEN IN VLOEIBAAR HELIUM II

FRICITION PHENOMENA IN LIQUID HELIUM II

(with a Summary in English)

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,
OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS
Dr J. N. BAKHUIZEN VAN DEN BRINK,
HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER GOD-
GELEERDHEID, PUBLIEK TE VERDEDIGEN OP
WOENSDAG 17 NOVEMBER 1954 TE 16 UUR

DOOR

PETER WINKEL

GEBOREN TE DEVENTER IN 1926



UITGEVERIJ EXCELSIOR — Oranjeplein 96 — 's-GRAVENHAGE

WETTINGSEFFECTEN IN VLOEIBAAR HETIJDE II

PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van de graad van
DOKTER IN DE WETENSCHAPPEN

PROMOTOR: PROF. DR C. J. GORTER

1964

DE WETENSCHAPPELIJKE
BOEKERIJ DER UNIVERSITEIT
VAN ROTTERDAM



FRONTIER, FROM THE S. J. BOSTON

ANNUAL REPORT
OF THE
COMMISSIONER OF THE
LAND OFFICE

Teneinde te voldoen aan het verlangen van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde volgt hieronder een kort overzicht van mijn academische studie.

In 1945 ving ik de studie in de Wis- en Natuurkunde te Leiden aan, waarvan het eerste gedeelte afgesloten werd in 1948 met het afleggen van het candidaatsexamen A. Hierna begon mijn wetenschappelijke opleiding in het Kamerlingh Onnés Laboratorium, alwaar ik eerst enige maanden bij het onderzoek van Dr D. Bijl (thans te Oxford) over paramagnetische relaxatie en resonantie werkzaam was. Vanaf 1949 zette ik het onderzoek voort over de wrijvingsverschijnselen in vloeibaar helium II van Dr J.H. Mellink (thans te Leiden: Medische Faculteit), waardoor ik verder onder leiding van Prof. Dr C.J. Gorter werkzaam bleef. In 1949-50 werkte ik samen met Dr B. Daniëls-Hunt (thans te Vancouver) en in het volgende jaar met Dr C.S. Hung (thans te Peking). Van beiden heb ik veel mogen leren. Het doctoraal examen in de experimentele natuurkunde vond plaats in 1952, nadat ik de vereiste tentamina afgelegd had bij wijlen Prof. Dr H.A. Kramers, Prof. Dr J. Drost en Dr J. Korringa (thans te Columbus, Ohio).

Op 1 December 1952 trad ik in dienst van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven als wetenschappelijk medewerker bij het Natuurkundig Laboratorium. Hierbij werd mij de mogelijkheid gegeven in Leiden mijn onderzoek voort te zetten en mijn proefschrift te voltooien.

Tenslotte zij nog vermeld, dat ik bij het onderzoek bijgestaan werd door H.F. Hamerka (1950-51), J. Vlieger (1951-52), A.M.G. Delsing (1952-54), A. Broese van Groenou (1953-54) en J.D. Poll (1954).

1. De methode	43
2. Operaties	44
B. Formules en berekeningen	45
1. Inleiding	45
2. De betrekkingen tussen de vloeigrootte- den	47
3. Het verband tussen F en v	51
4. De berekening van de functie $H(\xi)$ en $N(\xi)$	53
C. Nulwaarden grootte	59
1. Gegevens over f	59
2. Gegevens over u	60
3. De bepaling van \sqrt{h}	61
4. De afleeswijze h	61

De laatste de wetten van het verlenen van de Faculteit der
Wet- en Natuurkunde volgt hieronder een kort overzicht van zijn
wetenschappelijke studies.

In 1912 ving hij de studie in de Wet- en Natuurkunde in Leiden
aan, waaraan hij eerste gedeelte afsluutend werd in 1915 met het
afsluiten van het kandidaatexamen. A. H. H. van Leeuwen was zijn
wetenschappelijke opvoeder in het Koninklijk Wetenschappelijk
Laboratorium, waaraan hij eerst enige maanden bij het onderzoek van Dr. H. Hill
(thans in Oxford) over paramecristische kristallen en tegengestelde
verschillen was. Vanaf 1915 zat hij het onderzoek voort over de
vrijwilligheidsverschillen in vloeistof helium II van Dr. J. H. van
Linden (thans in Leiden: Medische Faculteit), waaraan hij verder onder
leiding van Prof. Dr. G. A. van der Waerden bleef. In 1918-19 werd
de studie met Dr. H. van der Waerden (thans in Vancouver) en in het
volgende jaar met Dr. G. A. van der Waerden. Van beiden heb-
de hij zijn wetenschappelijke doctoraat gekregen in de experimentele na-
tuurkunde met als titel in 1922, nadat hij de verlate tentamen af-
legde met zijn vijfde proef Dr. H. A. Kraemer, Prof. Dr. J. G. van
der Waerden (thans in Columbus, Ohio).

Op 1 October 1922 trad hij in dienst van de N.V. Philips
Gloeilampfabriek te Eindhoven als wetenschappelijke medewerker
bij het natuurkundig laboratorium. Hierbij werd hij de hoofd-
zaak geweest in Leiden zijn onderzoek voort te zetten en zijn
wetenschappelijke te voltooien.

Tusschen 1922 en 1925, dat is bij het onderzoek afgezien
wordt door R. E. Hoogstraal (1920-21), J. Vliegenhart (1921-22), A. M. H.
Deinum (1922-23), A. Hoogstraal van Goozen (1923-24) en J. G. van
der Waerden.

I N H O U D

Voorwoord		9
Hoofdstuk I.	INLEIDING	
	A. De verschijnselen in helium II	12
	B. De theoretische aanpak van helium II	15
	Inleiding	15
	1. Algemeen overzicht	15
	a. De microscopische lijn	15
	b. De macroscopische lijn	17
	2. Nadere beschouwingen	19
	a. De formule van het fonteineffect	19
	b. De bewegingsvergelijkingen	25
	C. De metingen die reeds verricht zijn aan de stromingseigenschappen van helium II boven 1°K	31
	Inleiding	31
	1. De metingen zonder resulterend materie-transport	32
	2. De metingen met resulterend materie-transport	33
	D. Nadere verantwoording en ontwikkeling van het onderzoek	38
Hoofdstuk II.	VOORBEREIDING	
	A. De experimentele opstelling en de meetmethoden	40
	1. De experimentele opstelling	40
	2. De bepaling van de basisgrootheden	43
	3. De meetmethoden	45
	4. Opmerkingen	46
	B. Formules en berekeningen	48
	Inleiding	48
	1. De betrekkingen tussen de basisgrootheden	49
	2. Het verband tussen \bar{F} en \square°	51
	3. De berekening van de functies $H(t)$ en $\Delta T(t)$	55
	C. Bijkomende grootheden	60
	1. Gegevens over f	60
	2. Gegevens over x	60
	3. De bepaling van η_n/h^3	61
	4. De spleetwijdte h	61

Hoofdstuk III. RESULTATEN

A. De bepaling van $\bar{F}(v)$ met de "retardatie- methode"	64
B. Toepassing en toetsing van het formalisme IIB; 2 en 3	73
1. De bepaling van $\bar{F}(v)$ met de "overshoot- methode"	73
2. De invloed van de kritische snelheid	80
3. Verdere toetsing	85
C. Metingen aan de warmtegeleiding	89
Inleiding	89
1. De bepaling van $\bar{F}(v)$	89
2. De viscositeit van het normale fluidum	97

Hoofdstuk IV. SLOTBESCHOUWINGEN

1. Numerieke gegevens over kritische snel- heden	101
2. Samenvatting	103
3. Slotopmerkingen	104

Appendices.	
1. Enige details van de bewegingsvergelij- kingen	107
2. Nadere gegevens over toestel en cryo- staat	108
3. Middellingsproblemen	110
4. Supplement op het formalisme IIB	112

Summary	115
---------	-----

Lijst van symbolen	118
--------------------	-----

Litteratuur	121
-------------	-----

VOORWOORD

Wederom ligt voor U een proefschrift over helium, wederom zelfs over transportverschijnselen in vloeibaar helium II ^{48,2}. Dit feit alleen al vereist een nadere toelichting.

Het onderzoek naar de eigenschappen van helium II wordt bij uitstek gekenmerkt door de veelheid en vaak ogenschijnlijke grilligheid van de waargenomen verschijnselen. Enerzijds is dit een aanwijzing, dat de theorie van helium II zeer gecompliceerd is, welke theorie dan ook nog niet volledig aanwezig is. Anderzijds is het nodig door systematisch onderzoek van onderdelen essentiële grilligheden te onderscheiden van degenen, die een gevolg zijn van toevallige experimentele omstandigheden en tevens bij de eerste soort wetmatigheden op te sporen. Dit systematisch onderzoek is dan ook in verscheidene landen nog steeds uitgebreid aan de gang. Ook dit proefschrift wil hiertoe een bijdrage leveren.

De wrijvingsverschijnselen, die optreden in helium II, kwamen weer in de belangstelling nadat GORTER en MELLINK ^{49,1} een quantitative beschrijving hiervan voorstelden, waar te voren slechts kwalitatieve beschouwingen gebruikt werden. Het onderzoek is naar aanleiding hiervan opgezet, met de bedoeling de wrijvingskrachten in hun afhankelijkheid van de bijbehorende stroomsnelheden te bepalen. De reeds beschikbare gegevens waren hiertoe onvoldoende nauwkeurig.

Dit proefschrift is in vier hoofdstukken verdeeld. In het eerste hoofdstuk, de inleiding, is ondergebracht een overzicht van de verschijnselen die optreden in helium II, een schets van de ontwikkeling van het theoretische werk (waarbij de gedeelten, die voor ons van belang zijn, nader uitgewerkt worden), alsmede een overzicht van de metingen door anderen op het gebied van de transportverschijnselen in helium II verricht en de daarbij verkregen resultaten. Dit gedeelte wordt besloten met een nadere motivering van de opzet van het onderzoek, terwijl eveneens de lijn in de ontwikkeling hiervan is aangegeven. Het tweede hoofdstuk bevat de grondslag waarop onze experimenten en de interpretatie hiervan gebaseerd zijn. De experimentele opstelling is hierin beschreven, alsmede de afleiding van een formalisme, dat op grond van het twee-fluida model mogelijk bleek. Ook verdere voorbereidingen zijn hier onder gebracht. Het derde hoofdstuk geeft de experimentele inhoud aan dit proefschrift. Het is in drie delen verdeeld, zoals in de inleiding aldaar nader is aan-

gegeven. Het laatste (vierde) hoofdstuk tenslotte bevat de conclusies, waartoe het onderzoek heeft geleid, alsmede enkele opmerkingen over een mogelijke verdere ontwikkeling hiervan.

Enige nadere details, die op sommige plaatsen noodzakelijk of wel wenselijk waren, doch in de tekst een storende (en te belangrijke) plaats in zouden nemen, zijn in een viertal appendices samen gebracht en aan het einde toegevoegd. Tevens is aan het eind een lijst te vinden van de veelgebruikte symbolen, hun betekenis en de plaats, waar zij voor het eerst voorkomen en gedefinieerd zijn.

De metingen zijn te verdelen in de groep bij een spleetlengte van 0,434 cm (de *lange spleet*) en de groep bij 0,134 cm (de *korte spleet*). Wanneer geen nadere toelichting is gegeven, hebben de grafieken betrekking op de resultaten bij de korte spleet.

De waarde van de spleetwijdte h varieert tussen 0,4 μ en 6 μ . De relatieve qualificaties "wijd" en "nauw" voor een bepaalde spleetwijdte moeten in dit licht gezien worden. Een analoge opmerking zij gemaakt t.a.v. de qualificaties "hoog" en "laag" voor de temperatuur, die het gebied van 1,1 tot 2,1 $^{\circ}\text{K}$ beslaat.

Met een grootheid $Y_{a,b}$ wordt bedoeld: Y_k , met $k = a, b$; met $a^m : a^{m-1} a$.

De parameter, die het verband aangeeft tussen de literatuurlijst aan het eind en de plaats in de tekst, waar naar deze literatuur verwezen wordt, bestaat uit twee getallen, gescheiden door een komma (b.v. 48,3). Het getal voor de komma heeft betrekking op het jaartal (alle literatuur is uit de 20e eeuw), het getal er achter geeft aan de relatieve chronologische plaats in de rij van verschenen literatuur uit dat jaar. Voor deze relatieve plaats is de datum van ontvangst van het manuscript door de uitgever van het betrokken tijdschrift bepalend geweest. De coördinaten van elke publicatie in de literatuurlijst zijn door dit systeem ook eenvoudiger geworden.

Het is opvallend, dat elders bij het onderzoek naar de stromings- en wrijvingseigenschappen van helium II zelden (en in de laatste dertien jaar zelfs nooit), gelijktijdig met de drukverschillen ook de temperatuurverschillen gemeten worden. Waarschijnlijk is de grotere bewerkelijkheid en de grotere staf, die het temperatuuronderzoek vereist, hiervan de belangrijkste reden. In dit verband willen wij dan ook de nadruk vestigen op de noodzakelijkheid van "teamwork" om een onderzoek als het onderhavige mogelijk te maken. Enerzijds omvat dit de technische voorzieningen, zowel vóór als vooral ook tijdens de metingen. Anderzijds vereisen de talrijkheid en de nauwkeurigheid van de veelal tegelijker-

tijd te verrichten waarnemingen en de lange duur van de meetdag een grote schare medewerkers. Het uiterst constant houden van de temperatuur vormt hierbij een belangrijk onderdeel. Tenslotte willen wij speciaal noemen de samenwerking, die bij de berekeningen en verdere uitwerking van de metingen bestaan heeft en ten grondslag ligt aan de vele discussies, die gevoerd zijn en tot menig resultaat geleid hebben. Mogen allen, die in de loop der jaren aan dit onderzoek medegewerkt hebben, in de nu volgende beschrijving van het bereikte inzicht in de gedragingen van helium II hun aandeel herkennen.

H o o f d s t u k I

I N L E I D I N G

IA. DE VERSCHIJNSELEN IN HELIUM II

Helium, dat vloeibaar wordt bij $4,216^{\circ}\text{K}$ onder normale druk en bij lagere temperaturen onder verzadigde druk steeds vloeibaar blijft, vertoont een overgangspunt bij $T = 2,186^{\circ}\text{K}$ (het z.g. λ -punt). Hier beneden veranderen alle eigenschappen van de vloeistof totaal en hebben weinig meer het karakter van de eigenschappen van een gewone vloeistof. Ter onderscheiding spreekt men van helium I, als men bedoelt de vloeistof boven $T = 2,186^{\circ}\text{K}$ en van helium II voor de vloeistof beneden deze temperatuur.

Vele overzichten van de merkwaardige eigenschappen van helium II hebben het licht gezien. Hieronder noemen wij het standaardwerk van KEESOM ^{42,1}, als ook een recentere samenvatting van VAN DEN BERG ^{50,3}, terwijl vele publicaties over helium II experimenten of theorieën met een summier overzicht aanvangen (b.v. GORTER-MELLINK ^{49,1}, DINGLE ^{52,4}). Het is niet de bedoeling in deze sectie iets nieuws weer te geven. Volledigheidshalve zien wij ons echter genoodzaakt het aantal (summiere) overzichten met één te vermeerderen.

Wij willen echter hierbij een wat ongebruikelijke weg volgen en in zekere zin vooruitlopen op IB. Het merkwaardige gedrag van helium II heeft nl. geleid tot een macroscopisch beeld, waarmee (voorlopig) kwalitatief deze eigenschappen te begrijpen zijn. Vermelden wij dit eerst, dan wordt het overzicht samenhangender en duidelijker. Dit beeld, dat men zich gemaakt heeft, is het z.g. *twee-fluida model*, waarin men helium II opvat als een mengsel van twee fluida, waarvan het ene normale vloeistofeigenschappen heeft, terwijl het andere daarentegen geen viscositeit en entropie bezit. De dichtheidsverhouding van de beide fluida is dan een één-éénduidige functie van de temperatuur en wel zodanig, dat de concentratie van het normale fluidum, x , ongeveer verloopt volgens $x = (T/T_{\lambda})^6$. Dit beeld leidt tot de volgende eigenschappen van de vloeistof helium II.

a. Bij de bepaling van de *viscositeit* met de methode van de slingerende schijf zal alleen het normale fluidum tot de totale viscositeit bijdragen. De gemeten demping is dan niet evenredig met η_n , de viscositeit van het normale fluidum, doch met $x\eta_n$, hetgeen

zeer snel met afnemende temperatuur afneemt. Bepalen wij daarentegen de viscositeit door de vloeistof onder invloed van een drukverschil door een nauwe capillair te laten stromen, dan zal het totale transport voornamelijk door het superfluidum veroorzaakt zijn en wij meten $\eta \approx 0$.

b. Bij dit laatste experiment zal aan de zijde van de hoge druk een vergroting van de relatieve concentratie x van het normale fluidum plaatsvinden, aan de andere zijde van de capillair zal het binnenstromende superfluidum x verlagen. Dit impliceert een temperatuursverhoging resp. verlaging aan de hoge resp. lage drukzijde, hetgeen equivalent is met een warmteontwikkeling resp. opname. Dit is het z.g. *mechanocalorisch effect*.

c. Brengt en houdt men de volumina aan beide zijden van de capillair op een verschillende temperatuur, wat dus tevens is een verschillende concentratie van elk van de fluida, dan zal er een stroming van beide fluida willen optreden in tegengestelde richting om dit verschil te nivelleren. Het superfluidum zal ongehinderd kunnen stromen, het visceuse normale fluidum daarentegen zeer langzaam. Het gevolg is dat het superfluidum een toenemend hydrostatisch drukverschil opbouwt, dat het streven naar nivelering tegenwerkt en tenslotte compenseert. Het stromen van het normale fluidum zal steeds blijven doorgaan, zelfs door dit drukverschil wat geactiveerd. In de uiteindelijke stationnaire toestand zal dus toch het superfluidum een weinig kunnen blijven stromen, nl. zoveel als nodig is om het "weggelekte" normale fluidum te vervangen. Dit verschijnsel van een drukverschil ten gevolge van een temperatuurverschil is het z.g. *fonteineffect*.

d. Het vorige experiment kunnen wij ook als volgt bezien. Wij hebben een situatie met een constant temperatuurverschil door voortdurend energie aan de hoge zijde toe te voeren, welke dus wordt afgevoerd door het wegstromende normale fluidum, of wel nodig is om het aanstromende superfluidum weer om te zetten in normaal fluidum. Men kan dus spreken van een *warmtegeleiding*, die ten gevolge van de bijzondere interne processen abnormaal veel groter is dan bij gewone vloeistoffen.

e. Behalve de mogelijkheid om dichtheidsvariatiën in de vloeistof op te wekken en voort te laten planten (het gewone geluid), kan men zich analoge dichtheidsvariatiën in het normale fluidum denken, waarbij de dichtheid van de totale vloeistof constant kan blijven, indien het superfluidum tegengestelde variatiën ondergaat. De opwekking en voortplanting van zulke concentratievariatiën is inderdaad experimenteel realiseerbaar en is in de literatuur bekend als "*second sound*".

f. Wanneer een oppervlak in contact gebracht wordt met helium II, wordt dit gehele oppervlak bedekt met een dikke *film*, die zeer

beweeglijk is en tengevolge van een druk of temperatuurverschil langs het oppervlak kan kruipen. Het is ook hier het superfluide deel van de film, dat voor de grote beweeglijkheid verantwoordelijk is.

De verschijnselen genoemd onder a - d zullen direct en indirect vele malen in dit proefschrift ter sprake komen; de verschijnselen onder e en f daarentegen worden verder geheel onbesproken gelaten.

Inleiding

In de vele pogingen om te geraken tot een verklaring of beschrijving van de merkwaardige eigenschappen van helium II, zijn - ondanks de gevaren die schematisering veelal oplevert - twee lijnen te onderkennen, te weten de lijn der atomaire en kinetische theorieën (de "microscopische lijn"), die vaak leiden tot een twee-fluida beeld; en de lijn der ("macroscopische") theorieën, die, uitgaande van een twee-fluida model, op thermodynamische en/of fenomenologische basis gefundeerd zijn. Men zou - met enige restrictie - ook kunnen zeggen: de lijn der theorieën die de verschijnselen in helium II willen verklaren en de lijn der theorieën, die deze verschijnselen willen beschrijven.

Wij stellen ons voor, onder 1a en b allereerst in een kort overzicht deze lijnen nader aan te geven, waarbij wij voorbij gaan aan latere bijdragen, die zich speciaal toeleggen op gebieden die geheel buiten het onze liggen. Dit overzicht kan opgevat worden als een inleiding op 2: aangezien nl. de formulering van GORTER het uitgangspunt vormt van de onderzoekingen, beschreven in dit proefschrift, gaan wij hierop uitgebreider in, alsmede op de samenhang hiervan met andere formuleringen.

1. Algemeen overzicht

1a: de "microscopische lijn". Als beginpunt van de microscopische lijn in de theorieën van helium II zouden wij kunnen beschouwen het jaar 1923, toen BENNEWITZ en SIMON ^{23,1} (Berlijn) een belangrijke nulpuntsenergie aan helium wilden toekennen, om daarmee de afwijkingen van de Trouton relatie, die helium vertoonde, te kunnen verklaren. Ook latere experimenten leiden tot dezelfde conclusie (SIMON ^{34,1}, Oxford).

Na de berekeningen over de kristalstructuur van helium van F.LONDON ^{36,1} (Oxford) en het beeld van orde en war, geopperd door FRÖHLICH ^{37,1} (Leiden), is een belangrijke stap verder gedaan door F.LONDON ^{38,4} (Parijs) in April 1938. Volgens LONDON is de Λ -overgang een consequentie van de Bose-Einstein statistiek, die immers een "condensatie" in de impulsruimte impliceert bij een welgedefinieerde temperatuur T_s . Hoewel de exacte behandeling van een BE-vloeistof tot nu toe nog niet mogelijk bleek, leveren de berekeningen aan een BE-gas minder moeilijkheden op. In November 1938 werkt LONDON ^{38,8} dit nader uit vanuit Duke University (U.S.A.).

Afgezien van alle détails en verdere mogelijkheden, leidt de conceptie van de Bose-Einstein condensatie in helium beneden T_{Λ} tot een ruimtelijk mengsel van twee subverzamelingen, die in de impulsruimte sterk gescheiden zijn. Hiervan heeft de ene normale vloeistofeigenschappen, de andere daarentegen bezit geen entropie en viscositeit. Het was TRIZA^{38,5} (Parijs), die in Mei 1938 hierop de aandacht vestigde en liet zien, dat alleen met dit gegeven de bekende verschijnselen in helium II kwalitatief reeds beschreven zouden kunnen worden. Hier ligt het begin van de tweede lijn in de helium theorieën nl. de macroscopische beschrijving van de verschijnselen, uitgaande van een twee-fluida model. Hierbij bekommert men zich niet om de theoretische fundering van dit model, maar stelt zich ten doel, door aan beide fluida passende macroscopische eigenschappen toe te kennen, een adequate beschrijving van de waargenomen verschijnselen te geven. Men zou de verhouding tussen dit twee-fluida model en de microscopische theorie, die dit moet funderen, kunnen vergelijken met de modeltheorie van het atoom (1913) en de quantummechanische fundering, die tenslotte in 1926 een bevredigende vorm kreeg. Wij willen deze tweede lijn later verder vervolgen (1b) en nu de historische gang in de eerste lijn weer opnemen.

Na 1938 gaan BIJL, DE BOER en MICHELS^{41,1} op het beeld van de BE-condensatie verder en trachten de vloeistofoestand vanuit de gastoestand te benaderen door extra energieën aan de moleculen toe te kennen.

Eveneens in 1941 verschijnt het artikel van LANDAU^{41,3} (Moskou), dat van een geheel andere kant het probleem aanpakt. Bij $T = 0^{\circ}\text{K}$ is helium een niet visceuse vloeistof, waarin bij toenemende T gequantiseerde longitudinale trillingen, de phononen, kunnen ontstaan, en bij hogere T ook gequantiseerde wervelbewegingen, de rotonen. Ook hier resulteert de theorie in een twee-fluida model, al wordt de zienswijze van TRIZA geheel verworpen. De overige eigenschappen van helium II volgen verder eveneens kwalitatief. Tenslotte wordt een systeem van macroscopische hydrodynamische bewegingsvergelijkingen opgebouwd uit het ontwikkelde microscopische mechanisme. Verdere uitwerkingen en wijzigingen (vooral met betrekking tot de rotonen) volgen in de volgende jaren^{44,1; 47,6; 49,5}.

In 1952 geeft KRAMERS^{52,7} (Leiden) "Some reflections about phonons and rotons", waarin een fraai formalisme ontwikkeld wordt voor veralgemeende phononen en rotonen, de z.g. *excitonen*, dat eveneens de bekende thermodynamische heliumformules tot resultaat heeft.

In 1952-53 wordt door KRONIG en THELLUNG^{52,8; 53,2; 53,3} (Delft) het idee van LANDAU nog eens geheel opnieuw en streng opgebouwd, zodat een beter inzicht in de conceptie van phononen

verkregen wordt. Ook het formalisme van KRAMERS wordt nog geperfectionneerd.

In 1953-54 is het woord aan FEYNMAN ^{53,5; 54,2} (Pasadena, U.S.A.), die berekent, dat ondanks de grotere interatomaire krachten, de vloeistof helium II een overgang vertoont overeenkomstig de overgang in een ideaal BE-gas. Voorts wordt een analyse gegeven van de mogelijke excitaties bij $T = 0^{\circ}\text{K}$, waarbij echter de beschouwingen en verklaringen voornamelijk kwalitatief zijn. Dit laatste geldt ook voor een derde artikel, waarin het gebied $0 < T < T_{\Lambda}$ beschreven wordt. Tenslotte verschijnt nog een samenvattend overzicht ^{54,4}, waar ook de quantisatie van wervels uitgewerkt is alsmede de mogelijke consequenties hiervan voor vloeibaar helium II.

1b. *De macroscopische lijn.* Zoals wij zagen (1a) begint de macroscopische lijn in de theorieën van helium II in 1938 bij TISZA ^{38,5} met de formulering van de twee-fluida hypothese: de hypothese dus, dat helium II opgevat kan worden als een mengsel van twee fluida, waarvan het ene normale vloeistofeigenschappen heeft, het andere echter geen viscositeit en entropie bezit. De mogelijkheden, die deze wijze van beschrijven biedt en de berekeningen, die hiermee uitgevoerd zijn en tot "bruikbare" (= verifiëerbare) formuleringen hebben geleid, hebben het twee-fluida model gemaakt tot een onmisbaar hulpmiddel bij het onderzoek van vloeibaar helium. Hierdoor heeft men nl. een mogelijkheid de resultaten op vaak overzichtelijke wijze - en in elk geval meer overzichtelijke wijze dan anders het geval geweest ware - te beschrijven en te hanteren. Bovendien inspireren deze resultaten omgekeerd ook veelal tot het aanbrengen van een verdere uitbreiding ofwel verbeteringen aan dit model. Men blijft zich hierbij bewust, dat afwezigheid van de diepere fundering van het twee-fluida model en in het bijzonder van de aan elk der fluida toegekende macroscopische eigenschappen, onbevredigend is.

Op grond van TISZA's formulering in Mei 1938 leidt in October 1938 H. LONDON ^{38,6} (Bristol) zijn formule van het fonteineffect af:

$$dp = \rho S dT,$$

welke afleiding in 1939 nader uitgewerkt wordt ^{39,3} op een wijze, analoog aan THOMSON's afleiding voor de formules van de thermoelectriciteit. Hierop zullen wij nog nader terugkomen (IB; 2a). Tevens is dit de eerste quantitative en verifiëerbare relatie tussen meetbare grootheden welke uit het twee-fluida model is afgeleid.

In 1940 en algemener in 1947 gaat TISZA ^{40,3; 47,5} (Cambridge,

U.S.A.) nog een stap terug in de macroscopische lijn. Er worden vier eisen opgesteld waaraan een *quantumvloeistof* (c.q. helium) moet voldoen, waarna betoogd wordt, dat hieruit enerzijds een twee-fluida model volgt en dat anderzijds b.v. een *BE-vloeistof* aan de vier eisen voldoet. Ook TISZA komt tot de vermelde formule van het fontein effect, maar onderstelt bij de afleiding, buiten de verwaarloosbaarheid van de entropie van het superfluidum, ook de afwezigheid van een normale soortelijke warmte. Dit laatste impliceert tevens de veel gebruikte relatie: $x = S/S_A$. Eveneens worden macroscopische bewegingsvergelijkingen afgeleid, die echter weinig overzichtelijk zijn.

Ook de reeds eerder genoemde vergelijkingen van LANDAU ^{41,3} zouden hier vermeld kunnen worden.

F.LONDON en ZILSEL ^{48,3} geven een bewegingsvergelijking voor het superfluidum, die in stationnaire toestand de formule van H.LONDON oplevert; en voorts de behoudswetten, die voor helium II een wat aparte vorm krijgen. Uit deze vergelijkingen is af te leiden, dat de warmtestroom evenredig is met het drukverschil (de regel van ALLEN en REEKIE), hetgeen echter niet afgeleid wordt, alsook met het temperatuurverschil, hetgeen wel afgeleid wordt. Daar onder diverse omstandigheden (wijde spleten en grote gradienten) deze laatste evenredigheid experimenteel niet meer gerealiseerd is, werd ook getracht hiervan een formele beschrijving te geven, hetgeen echter niet verder uitgewerkt wordt.⁴

In dit opzicht is de formulering van GORTER en MELLINK ^{48,4; 49,1} (Leiden) veel duidelijker. Voor elk van de fluida is een aparte bewegingsvergelijking opgeschreven, hetgeen meer symmetrisch en overzichtelijk is, terwijl ook hierin de optredende krachten gevormd worden door de drukgradiënt, de temperatuurgradiënt en de Poiseuille kracht. Maar bovendien is een nieuwe kracht ondersteld, t.w. een wederkerige wrijving tussen superfluidum en normaal fluidum, die snel zou moeten toenemen met de relatieve snelheid. Deze kracht wordt verantwoordelijk gedacht voor de afwijkingen van de oorspronkelijke lineaire relaties alsmede van andere waargenomen verschijnselen, die suggereerden dat onder diverse omstandigheden aan de superfluiditeit toch enige beperking wordt opgelegd. Echter wordt de lineaire relatie tussen warmtestroom en drukgradiënt hierdoor niet gewijzigd. Op de bewegingsvergelijkingen komen wij nader terug, alsmede op de vele consequenties, die de hypothese van de wederkerige wrijving met zich meebrengt (cf. IB; 2b).

BAND en MEYER ^{47,4; 49,3} (Chicago) trachten dezelfde afwijkingen van de "ware superfluiditeit" te verklaren door aan te nemen, dat de omzetting: normaal fluidum \leftrightarrow superfluidum, niet oneindig snel plaats vindt en voeren hiertoe een relaxatietijd in.

Eveneens in 1949 betoogt GORTER ^{49,2}, dat de formule van het fonteineffect van H.LONDON slechts juist is, indien de impliciet aangenomen veronderstelling van additiviteit van de entropieën van de beide fluida juist is. In het algemene geval echter zal de formule de vorm krijgen:

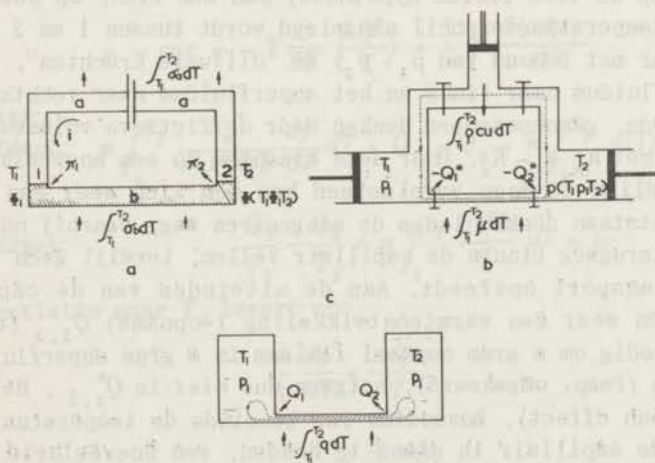
$$dp = \rho x \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) dT .$$

Met behulp van de thermodynamica der irreversibele processen verkrijgen DE GROOT, JANSEN en MAZUR ^{50,4} (Utrecht) dezelfde formule. Ook USUI ^{51,1} (Tokio) komt tot dit resultaat.

PRIGOGINE en MAZUR ^{51,2} (Brussel) kunnen op grond van de z.g. *inhibitie-hypothese* (d.i. de onderstelling, dat de beide fluida een niet verwaarloosbare, doch overigens zwakke wisselwerking vertonen) eveneens de beide bewegingsvergelijkingen van GORTER afleiden.

2. Nadere beschouwingen

2a. *De formule van het fonteineffect.* Daar de afleiding van GORTER ^{49,2} alsook die van LONDON ^{39,3} voor de formule van het fonteineffect "analoog zijn aan THOMSON's afleiding van de formule voor de thermoëlectriciteit", terwijl beiden toch tot een ander resultaat leiden, lijkt het wenselijk de drie afleidingen nog eens naast elkaar te geven.



Figuur 1

De kringprocessen van THOMSON (thermoëlectriciteit), H.LONDON (helium II) en GORTER (helium II)

α) THOMSON beschouwt een keten die uit twee metalen bestaat, waarvan de twee lasplaatsen op verschillende temperatuur T_1 en T_2 gehouden worden, tengevolge waarvan een potentiaal verschil tussen deze twee plaatsen ontstaat, afhankelijk van T_1 en T_2 (fig. 1a). Laten wij nu een elektrische stroom door dit circuit lopen, dan vindt er op de lasplaatsen een warmteontwikkeling (-opname) plaats ($\pi_{1,2}$) en een van de stroomrichting afhankelijke warmteontwikkeling (gekaracteriseerd door de coëfficiënten σ_a en σ_b), buiten de (van de stroomrichting onafhankelijke) Joule warmte.

β) LONDON beschouwt een met helium II gevuld circuit, bestaande uit twee vaatjes verbonden door een capillair en een "buitenleiding" (fig. 1b). Het vaatje 1 heeft een (gefixeerde) temperatuur T_1 en een druk p_1 , het volume 2 een temperatuur T_2 , terwijl de druk p hier bepaald is door T_1 , p_1 en T_2 . Verplaatsen wij nu reversibel een hoeveelheid van u cm³ helium van 1 naar 2 via de capillair en weer terug (eveneens reversibel) via de buitenleiding, dan ontstaat een warmteontwikkeling (-opname) aan de uiteinden van de capillair (het mechanocalorisch effect $Q_{1,2}^*$), terwijl onderweg ter aanpassing aan de plaatselijke temperatuur

warmte opgenomen en afgestaan moet worden bepaald door $\int_{T_1}^{T_2} \mu dT$ en

$$\int_{T_2}^{T_1} \rho c u dT .$$

γ) GORTER beschouwt eveneens twee volumina verbonden door een capillair en gevuld met helium II (fig. 1c). Door zich direct te baseren op de twee-fluida hypothese, kan men zich, op het moment dat een temperatuurverschil aangelegd wordt tussen 1 en 2 (met $T_1 < T_2$, maar met behoud van $p_1 = p_2$) de "diffusie krachten", die het normale fluidum naar links en het superfluidum naar rechts willen verplaatsen, gecompenseerd denken door de fictieve volumekrachten K_n en K_s met $K_n = -K_s$. Door deze krachten nu een hoeveelheid van m gram helium te doen verplaatsen kan men zich weer een kringproces ontstaan denken langs de aangegeven weg, waarbij nu dus de heen en terugweg binnen de capillair vallen, terwijl geen "zichtbaar" transport optreedt. Aan de uiteinden van de capillair krijgt men weer een warmteontwikkeling (-opname) $Q_{1,2}$ (d.i. de warmte, nodig om m gram normaal fluidum in m gram superfluidum om te zetten (resp. omgekeerd), hetgeen dus *niet* is $Q_{1,2}^*$, het mechanocalorisch effect). Bovendien is, teneinde de temperatuurverdeling in de capillair in stand te houden, een hoeveelheid warmte

$\int_{T_1}^{T_2} q(T) dT$ nodig (hetgeen *niet* is de $\int_{T_1}^{T_2} \mu(T) dT$ van LONDON).

Zoals men weet is de gebruikelijke weg nu verder om de eerste

en tweede hoofdwet van de thermodynamica op te schrijven voor de beschreven processen. Deze worden nu:

α) THOMSON:

$$1e \text{ hoofdwet: } \Phi_{12} + \pi_1 - \pi_2 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_b - \sigma_a) dT = 0$$

$$2e \text{ hoofdwet: } \frac{\pi_1}{T_1} - \frac{\pi_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_b - \sigma_a}{T} dT = 0$$

Differentiatie naar T_2 levert op:

$$\frac{d\Phi_{12}}{dT} = \frac{\pi}{T} \quad (\alpha 1)$$

$$\sigma_b - \sigma_a = T \frac{d^2\Phi_{12}}{dT^2} \quad (\alpha 2)$$

β) LONDON:

$$1e \text{ hoofdwet: } - \int_{T_1}^{T_2} u \frac{\partial p}{\partial T} dT + Q_1^* - Q_2^* + \int_{T_1}^{T_2} (\mu - \rho uc) dT = 0$$

$$2e \text{ hoofdwet: } \frac{Q_1^*}{T_1} - \frac{Q_2^*}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mu - \rho uc}{T} dT = 0$$

Differentiatie naar T_2 levert op:

$$\frac{udp}{dT} = - \frac{Q^*}{T} \quad (\beta 1)$$

$$\mu - \rho uc = - T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Q^*}{T} \right) = - T \frac{d(udp)}{dT^2} \quad (\beta 2)$$

γ) GORTER:

$$1e \text{ hoofdwet: } m \int_{T_1}^{T_2} \frac{K_n}{x(1-x)\rho} \frac{dy}{dT} dT + Q_1 - Q_2 + m \int_{T_1}^{T_2} q(T) dT = 0$$

$$2e \text{ hoofdwet: } \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + m \int_{T_1}^{T_2} \frac{q(T)}{T} dT = 0$$

Differentiatie naar T_2 levert op:

$$\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dT} = \frac{xQ}{T} \quad (\gamma 1)$$

$$mq = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Q}{T} \right) \quad (\gamma 2)$$

(N.B. $Q \neq Q^*$; $q \neq \mu$).

Wij zien dus, hoe de thermospanning gekoppeld is aan de grootte π , het fonteineffect aan de grootte Q^*/u resp. $\rho x Q/m$. Ten-

einde verder te komen moeten wij ons dus afvragen, hoe groot Q^* en Q zijn; er is dan geen verdere parallel meer met de afleiding volgens THOMSON.

Hiertoe zijn twee wegen te volgen: LONDON maakt gebruik van de vergelijking ($\beta 2$) en moet daartoe een aanname maken over de stroming in de capillair. GORTER bepaalt het warmteëffect Q direct, onafhankelijk van de vergelijking ($\gamma 2$) en neemt daarbij aan, dat de processen een veranderende waarde van x opleveren en een ander punt op de S -kromme. Of met andere woorden: LONDON bepaalt de warmteëffecten in de volumina 1 en 2 indirect door de analyse van hetgeen zich er buiten afspeelt, hetgeen in verband met de eerste en tweede hoofdwet mogelijk is; GORTER bepaalt deze effecten direct in de volumina zelf. Wij kunnen nu zowel het uitwendig kringproces van LONDON (leidende tot ($\beta 1$) en ($\beta 2$)) als het inwendig kringproces van GORTER (leidende tot ($\gamma 1$) en ($\gamma 2$)) beiden volgens LONDON en volgens GORTER verder uitwerken. Wij krijgen dan vier afleidingen, die wij zullen aangeven resp. met LL, LG, GL en GG.

LL: *het uitwendig kringproces volgens LONDON.* Wij voeren het twee-fluida model in (tot nu toe was dit bij het uitwendig kringproces niet nodig) en denken ons de capillair zo nauw, dat alleen het superfluidum hier doorheen kan stromen. Volgens LONDON betekent dit, dat bij verwaarloosbare soortelijke warmte van dit fluidum, $\mu = 0$ gesteld kan worden, waardoor ($\beta 2$) leidt tot:

$$-\frac{Q^*}{T} = \int_0^T \frac{\rho u c}{T} dT = \rho u S.$$

Dit geeft met ($\beta 1$) het bekende resultaat:

$$\frac{dp}{dT} = \rho S. \quad (\text{LL1})$$

GG: *het inwendig kringproces volgens GORTER.* Het verband tussen Q en S wordt verkregen door te bedenken, dat Q de hoeveelheid warmte is, nodig om het m gram superfluidum, dat in 1 aankomt, om te zetten in m gram normaal fluidum, welke hoeveelheid juist wegstroomt. Hierdoor is de oorspronkelijke situatie hersteld. Veronderstellen wij M gram helium in 1 aanwezig en zorgen wij dat $m \ll M$, waardoor de omzetting nagenoeg bij dezelfde temperatuur plaats vindt, dan zal dus

$$Q = T \left[\frac{\partial MS}{\partial x} \right]_T \delta x = T \left[\frac{\partial MS}{\partial x} \right]_T \frac{m}{M}, \quad \text{d. i.} \quad Q = mT \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T$$

Hierdoor wordt de formule van het fonteineffect:

$$\frac{dp}{dT} = \rho x \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T. \quad (\text{GG1})$$

In dit geval vinden wij dus ook nog met ($\gamma 2$):

$$q = T \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial T} \quad (\text{GG2})$$

GL: *het inwendig kringproces volgens LONDON.* Wij gaan dus uit van ($\gamma 2$); de warmteëffecten in de capillair zijn het opnemen van energie door het normale fluidum en het afstaan van energie door het superfluidum, welke laatste bijdrage dus weer verwaarloosbaar ondersteld wordt. Hierdoor is $q = c_n$ (de soortelijke warmte van het normale fluidum) en ($\gamma 2$) geeft:

$$\frac{Q}{T} = \int_0^T \frac{mc_n}{T} dT = \bar{S}_n,$$

waarmee \bar{S}_n gedefiniëerd is, waarop wij nog terugkomen. Dit geeft dan met ($\gamma 1$):

$$\frac{dp}{dT} = \rho x \bar{S}_n \quad (\text{GL1})$$

LG: *het uitwendig kringproces volgens GORTER.* Op analoge wijze als onder GG is aangegeven vinden wij:

$$-Q^* = T \left(\frac{\partial MS}{\partial x} \right)_T \delta x = T \left(\frac{\partial MS}{\partial x} \right)_T \frac{\rho u x}{M}$$

en dit is
$$-Q^* = \rho u T x \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T.$$

Hierdoor wordt ($\beta 1$):
$$\frac{dp}{dT} = \rho x \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T \quad (\text{LG1})$$

en ($\beta 2$)
$$\frac{\mu}{\rho u} - c = T \frac{\partial}{\partial T} \left(x \frac{\partial S}{\partial x} \right). \quad (\text{LG2})$$

Samenvattende zien wij dus, dat GORTER'S berekening voor beide kringprocessen tot hetzelfde resultaat leidt, LONDON'S wijze echter slechts indien $x \bar{S}_n = S$, d.i. indien de entropieën van beide fluida additief zijn en $\bar{S}_s = 0$. In dat geval zijn dus de partiële molaire entropieën (gedefiniëerd volgens $S_n = S + (1-x)(\partial S/\partial x)$; $S_s = S - x(\partial S/\partial x)$) gelijk aan de molaire entropieën (gedefiniëerd volgens $\bar{S}_n = S_{(x=1)}$; $\bar{S}_s = S_{(x=0)}$). Deze additiviteit is bovendien de noodzakelijke voorwaarde voor de onderlinge overeenstemming van de formules van LONDON en GORTER! Immers dan is $x(\partial S/\partial x) = S$. Uitgaande van de gelijkwaardigheid van beide kringprocessen, zouden wij concluderen, dat LONDON dus de additiviteit van entropieën introduceert, terwijl GORTER'S formule deze beperking niet zou nodig hebben. Nu is er slechts één onderstelling in de afleiding LL gemaakt nl. $\mu = 0$. Volgens (LG2) impliceert dit overigens di-

rect al dat $S = x(\partial S/\partial x)$. De vraag is of het fysisch duidelijk is, dat deze onderstelling de additiviteit (of, in een andere taal, de afwezigheid van mengentropie) inhoudt. Wij zijn geneigd deze vraag positief te beantwoorden. Immers, als verondersteld wordt, dat geen energie toe of afgevoerd moet worden in de capillair, wanneer het superfluidum van een plaats met lage concentratie normaal fluidum naar een plaats van hoge concentratie gebracht wordt, impliceert dit, dat een eventuele mengentropie niet van de concentratie, dus niet van de temperatuur afhangt en dus nul is.

Wij hebben zo een sluitend betoog verkregen. Volgens dit is de formule van het fonteineffect:

$$\frac{dp}{dT} = \rho x \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

hetgeen voor $S = \alpha(p, T)x$ reduceert tot:

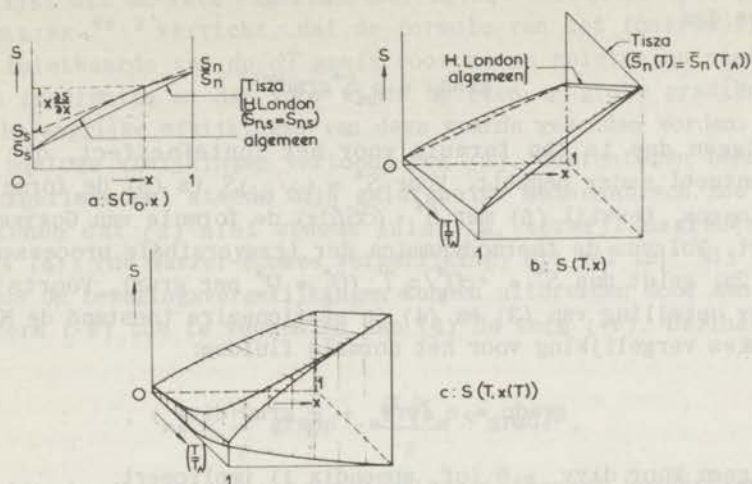
$$\frac{dp}{dT} = \rho S. \quad (2)$$

Deze laatste formule is ook directer af te leiden, indien wij in de afleiding al eerder de bijzondere vorm van S (expliciet of impliciet!) gebruiken.

Ook TISZA^{47,5} leidt LONDON's formule af, maar kiest een zodanig proces, dat de bijvoorwaarde $S = \alpha(p)x$ nodig is, hetgeen dus een grotere beperking inhoudt dan wij nu vinden. Door een geschiktere keuze van het proces had echter alleen gebruik gemaakt behoeven te worden van de gelijkheid van de thermodynamische potentiaal aan weerszijden van de capillair (cf. b.v. fig. 1c) (waarvoor slechts de conditie $\bar{S}_s = 0$ noodzakelijk is), waardoor deze beperking niet opgetreden zou zijn.

Wij hebben één en ander nog eens geïllustreerd in fig. 2. Fig. 2a geeft $S(x)$ bij bepaalde T_0 , fig. 2b geeft $S(T, x)$ terwijl in fig. 2c, door substitutie van de evenwichtswaarde $x = x(T)$, is gegeven $S(T, x(T))$, de waarde van S , indien x en T in evenwicht zijn.

Tenslotte zij kort weergegeven de bevestiging van GORTER's formule door de berekeningen van DE GROOT, JANSEN EN MAZUR^{50,4} op basis van de "thermodynamica der irreversibele processen". Zoals bekend is, is de relatie van THOMSON door deze thermodynamica geverifiëerd en is de quasi-statische behandeling van het probleem hiermee gerechtvaardigd. In wezen is dit, omdat het linkerlid van de tweede hoofdwet (zie boven) niet anders is dan het verschil van twee fenomenologische coëfficiënten L_{12} en L_{21} , dat volgens de Onsager relaties nul is. Het verwondert dan ook niet, dat de relatie $udp/dT = -(Q^*/T)$ uit analoge thermodynamische behandeling



Figuur 2

Schematische voorstelling van de entropie S als functie van T en x : a. $S[T_0, x]$; b. $S[T, x]$; c. $S[T, x(T)]$.

volgt. Op grond van de onderstellingen, dat er geen normaal fluidum door de capillair stroomt en dat de "reactie": normaal fluidum \leftrightarrow superfluidum, oneindig snel plaats vindt, is de berekening mogelijk die Q^* aan S koppelt. Dit geeft $-Q^*/\rho u T = S - S_s$, waardoor ook hier resulteert, dat $dp/dT = \rho x (\partial S / \partial x)$.

2b. *De bewegingsvergelijkingen.* Tot nu toe kennen wij in helium II dus als belangrijke "krachten": de gradiënten van druk en temperatuur, alsmede de Poiseuille kracht, die wij voor het superfluidum steeds verwaarloosbaar veronderstellen. Stellen wij voor elk der fluida een bewegingsvergelijking op, dan verkrijgen deze de volgende vorm voor het superfluidum resp. normaal fluidum:

$$\rho_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -\frac{\rho_s}{\rho} \text{grad} p + \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad} T \quad (3)$$

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = -\frac{\rho_n}{\rho} \text{grad} p - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad} T + \eta_n (\nabla^2 \mathbf{v}_n + \frac{1}{3} \text{grad} \text{div} \mathbf{v}_n) \quad (4)$$

Hierin is S^* een grootheid met de dimensie van entropie/gram en ∇^2 de Laplace operator. In deze vergelijking accentueren de eerste termen van het rechterlid nog eens de onafhankelijkheid van de beide fluida. De tweede termen, die op het teken na dezelfde gedaante moeten bezitten i.v.m. het karakter van deze diffusie-term, maken op grond van symmetrie en dimensie overwegingen reeds een dergelijke vorm noodzakelijk. Bovendien is (3) met het linker-

lid = 0 gesteld (stationnaire toestand, cf. appendix 1) niet anders dan

$$\text{grad}p = \rho_n S^* \text{grad}T, \quad (5)$$

hetgeen dus is een formule voor het fonteineffect, die zo S^* eventueel nader bepaalt. Voor $S^* = (\rho/\rho_n)S$ is (5) de formule van H. LONDON, terwijl (5) met $S^* = (\partial S/\partial x)$ de formule van GORTER oplevert. Volgens de thermodynamica der irreversibele processen (cf. IB; 2a) geldt dus $S^* = -\rho Q_g^*/\rho_n T$ ($Q_g^* = Q^*$ per gram). Voorts volgt door optelling van (3) en (4) in stationnaire toestand de Navier-Stokes vergelijking voor het normale fluidum:

$$\text{grad}p = \eta_n (\nabla^2 \mathbf{v}_n + \frac{1}{3} \text{grad div} \mathbf{v}_n),$$

hetgeen voor $\text{div} \mathbf{v}_n = 0$ (cf. appendix 1) impliceert:

$$\bar{\mathbf{v}}_n = -\frac{B^1}{\eta_n} \text{grad}p. \quad (6)$$

Hierin is B^1 een evenredigheidsfactor, afhankelijk van nadere geometrische gegevens en $\bar{\mathbf{v}}_n$ de gemiddelde waarde van \mathbf{v}_n over een doorsnede, loodrecht op de stroomrichting.

Denken wij ons een spleet of capillair, dan verplaatst zich ten gevolge van $\text{grad}p$ dus een hoeveelheid $\rho_n \bar{\mathbf{v}}_n$ naar de lage drukant en derhalve (stationnaire toestand) een gelijke hoeveelheid $\rho_s \bar{\mathbf{v}}_s$ in tegengestelde richting. Het energietransport per eenheid van doorsnede, \bar{w} , dat hiermee correspondeert, zal dus evenredig zijn met $\bar{\mathbf{v}}_n$ en wij stellen:

$$\bar{w} = \rho_n \bar{\mathbf{v}}_n S^{**} T. \quad (7)$$

Deze S^{**} heeft dan dezelfde dimensie als S^* en is bovendien zowel bij LONDON als bij GORTER (cf. IB; 2a) identiek hieraan gelijk. Het is niet uitgesloten, dat deze identiteit ook algemener geldig is. Eenvoudigheidshalve laten wij het onderscheid tussen S^{**} en S^* dan ook verder varen.

Met (6) geeft (7) in het geval van een spleet met wijde h (cf. appendix 1)

$$\bar{w} = -\frac{h^2 \rho_n S^{**} T}{12 \eta_n} \text{grad}p. \quad (8)$$

Dit is niet anders dan de relatie van ALLEN en REEKIE (cf. IB; 1b). Met (5) wordt (8) voorts:

$$\text{grad}T = -\frac{12 \eta_n}{h^2 \rho_n^2 S^{**} T} \bar{w} \quad (9)$$

Nu blijkt uit de vele experimenten, in het bijzonder door MEYER en MELLINK^{48,2} verricht, dat de formule van het fonteineffect een limietwaarde van dp/dT geeft voor nauwe spleten en niet te grote gradiënten en dat voor wijde spleten en grote gradiënten zeer belangrijke afwijkingen van deze waarde gevonden worden. Geheel analoge afwijkingen vertoont ook (9). Daarentegen behoudt (8) experimenteel steeds zijn geldigheid. Mathematisch zou dit betekenen dat (3) niet steeds juist is, terwijl daarentegen ((3) + (4)) (de Navier-Stokes vergelijking) dit wel is. Wij zouden dus de bewegingsvergelijkingen kunnen uitbreiden door aan (3) een term (-F) toe te voegen en aan (4) de term (+F). Definiëren wij:

$$-F = \frac{\rho_s}{\rho} \text{grad}p - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad}T, \quad (10)$$

dan zijn dus de experimentele resultaten formeel beschreven en het probleem is dus nu, de vorm en de fysische achtergrond van F te vinden.

Dit werd uitgewerkt door GORTER en MELLINK^{49,1}. Mede op grond van het feit, dat deze term groot is voor grote v_n en v_s (wijde spleten en grote gradiënten) veronderstelden zij een "wederkerige wrijving" tussen de beide fluida van de gedaante $F = A_m \rho_n \rho_s (v_s - v_n)^m$, waarin op grond van bestaande gegevens t.a.v. de warmtegeleiding, de waarde $m = 3$ aangenomen werd, met $A_3 \equiv A$.

De bewegingsvergelijkingen krijgen daardoor de vorm:

$$\rho_s \frac{dv_s}{dt} = -\frac{\rho_s}{\rho} \text{grad}p + \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad}T - A \rho_s \rho_n (v_s - v_n)^3 \quad (3')$$

$$\rho_n \frac{dv_n}{dt} = -\frac{\rho_n}{\rho} \text{grad}p - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad}T + A \rho_s \rho_n (v_s - v_n)^3 + \eta_n \left(\nabla^2 v_n + \frac{1}{3} \text{grad div} v_n \right) \quad (4')$$

Hierdoor worden (5) en (9):

$$\text{grad}p = \rho_n S^* \text{grad}T - A \rho \rho_n (v_s - v_n)^3 \quad (5')$$

$$\text{grad}T = -\frac{12 \eta_n}{h^2 \rho_n^2 S^{*2} T} \bar{w} - \frac{A \rho^4}{\rho_s^3 \rho_n^3 S^{*4} T^3} \bar{w}^3 \quad (9')$$

terwijl (6), (7) en (8) ongewijzigd blijven.

De wijze, waarop wij zo tot de formulering van de hypothese van de wederkerige wrijving gekomen zijn, zou kunnen suggereren, dat alleen de afwijkingen van (5) en (9) de aanleiding tot deze hypothese vormden en deze ook rechtvaardigden. Dit is echter niet

juist. Enerzijds waren er meer wrijvingsverschijnselen (d.i. afwijkingen van de superfluiditeit) bekend, die kwalitatief door een dergelijke onderstelling "begrepen" konden worden. Anderzijds brengt deze hypothese vele nieuwe consequenties met zich mee, die ook reëel moeten zijn om zijn bestaan te rechtvaardigen.

Tot die bekende verschijnselen behoort zo b.v. het volgende "retardatie-effect". Wanneer wij een fonteineffect "opbouwen", d.i. wanneer wij aan het ene uiteinde van een spleet of capillair de temperatuur doen toenemen en zich dientengevolge een drukverschil instelt, dan blijkt, indien dit snel gebeurt, de waarde van het fonteineffect achter te blijven ten opzichte van de evenwichtswaarde. Ook dit waargenomen verschijnsel (door MELLINK relaxatieverschijnsel genoemd) is in strijd met de "ware superfluiditeit", maar wordt begrepen met behulp van de onderstelling van de wederkerige wrijving, die groot is als het helium grote snelheden opgedrongen wordt. Het zal blijken één van de belangrijkste methoden te zijn om deze hypothese ook kwantitatief te onderzoeken.

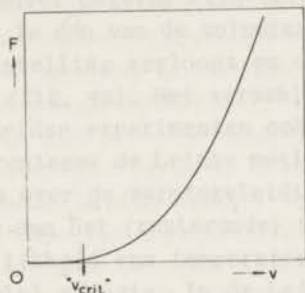
Als voorbeeld van nog onbekende wrijvingsverschijnselen in 1949 noemen wij de experimenten met de oscillerende schijf ter bepaling van de viscositeit. Hierbij impliceert de existentie van de A-kracht (waarmee wij korthedshalve de hypothese van de wederkerige wrijving aanduiden) dat bij grote uitwijkingen het logaritmisch decrement δ niet een constante waarde heeft, doch toe moet nemen evenredig met $(1 + \frac{1}{10} \rho_s a^2 A \omega \varphi_o^2)$, waarin a de straal van de schijf is, ω de hoekfrequentie en φ_o de amplitude in radialen ^{50,7}. Dit is nagegaan door SMITH ^{50,8}, doch er werd geen meetbare wijziging van δ gevonden, hetgeen zou kunnen wijzen op lagere A-waarden dan gemeten met behulp van (5') en (9'). Ook in Cambridge zijn analoge metingen uitgevoerd ^{50,9; 52,1}, alwaarechter het gezochte effect wel degelijk optrad. Numeriek leverden deze voor $T > 1,8^\circ\text{K}$ dezelfde A-waarden op vergeleken met de waarden gevonden met (5') en (9'), echter bij lagere temperaturen veel hogere waarden. Hierop komen wij nog even terug onder opmerking δ .

Tenslotte volgen nog enige opmerkingen over de bewegingsvergelijkingen in het algemeen en de hypothese van de wederkerige wrijving in het bijzonder.

α) Vóór 1949 treft men algemeen de opvatting aan van het optreden van een z.g. "critische snelheid" in helium II. Beweegt het superfluidum zich met een snelheid hoger dan deze kritische waarde voort, dan was de "ware superfluiditeit" verdwenen en traden wrijvingsverschijnselen op. Tot een nadere kwantitatieve beschrijving van deze wrijvingsverschijnselen kwam men niet.

De hypothese van een wederkerige wrijving, die verloopt met

een derde macht van de relatieve snelheid, biedt nu de mogelijkheid het beeld van de discontinu optredende wrijvingsverschijnselen te vervangen door dat van een continue beschrijving, aangezien (tengevolge van de derde macht) de gebieden van een merkbare en een onmerkbare wrijving dicht naast elkaar liggen. Het verschil tussen onmeetbare wrijving en geen wrijving is dan een kwestie van meetnauwkeurigheid geworden. Een gevolg zou dan zijn, dat de waarde van de "critische snelheid" in het geval van de continue wrijving af zou nemen bij toenemende meetnauwkeurigheid. Dit is verduidelijkt in figuur 3, waar een continue wrijvingskracht F uitgezet is als functie van een snelheid v . Bovendien geeft de A -kracht de eerste quantitative voorspelling over de optredende wrijvingsverschijnselen.



Figuur 3

De functie $F = v^3$. Voor $v > v_{crit.}$ is F "merkbaar" van nul verschillend

Tal van verschijnselen in helium II zullen continu dan wel discontinu verlopen, indien er niet of wel een kritische snelheid bestaat, d.w.z. indien wel of niet de beschrijving met een continue kracht (c.q. de A -kracht) houdbaar zal blijken. Een deel van het onderzoek beschreven in dit proefschrift, is hieraan gewijd en wij komen hierop uitgebreid terug (cf. IIIB en C).

β) Hoe duidelijk ook de wrijvingskracht aan de dag treedt onder tal van omstandigheden, verwaarloosbaar is bijna steeds de energiedissipatie, die hiervan het gevolg is.

γ) De numerieke waarden van de linkerleden van de bewegingsvergelijkingen (3') en (4') zijn veelal zeer veel kleiner dan de termen uit de rechterleden. Derhalve kunnen wij ook in niet-stationnaire gevallen deze linkerleden meestal verwaarlozen (cf. ook appendix 1).

δ) In 1952 poneert ATKINS^{52,5} nog algemenere bewegingsvergelijkingen:

$$\rho_s \frac{dv_s}{dt} = - \frac{\rho_s}{\rho} \text{grad}p + \rho_s S \text{grad}T - F_{sn}(v_s - v_n) - F_s(v_s)$$

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = - \frac{\rho_n}{\rho} \text{grad} p - \rho_s S \text{grad} T + \mathbf{F}_{sn} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) - \mathbf{F}_n (\mathbf{v}_n) + \\ + \eta_n (\nabla^2 \mathbf{v}_n + \frac{1}{3} \text{grad div} \mathbf{v}_n)$$

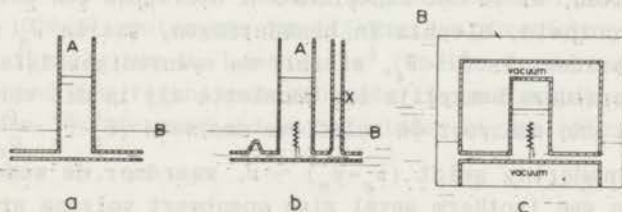
Hierin zou dan \mathbf{F}_{sn} mogelijk de gedaante hebben: $A \rho_n \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^3$, terwijl \mathbf{F}_n en \mathbf{F}_s nog krachten zijn, die alleen op het normale fluidum resp. het superfluidum werken. Eventueel is \mathbf{F}_s dan de kracht, die o. a. HALLETT ^{52,1}; ^{53,6} heeft waargenomen in zijn metingen met de oscillerende schijf en ook met de draaiende cylinder viscometer (alwaar $\mathbf{F}_{sn} = 0$). Overigens boeit de formele symmetrische vorm van ARKINS' vergelijkingen meer dan het wezen daarvan, waaraan nadere quantitative formulering geheel ontbreekt.

IC. METINGEN DIE REEDS ZIJN VERRICHT AAN DE STROMINGS-EIGENSCHAPPEN VAN HELIUM II BOVEN $1,0^{\circ}\text{K}$

Inleiding

In deze sectie stellen wij ons voor een kort overzicht te geven van de metingen, die reeds verricht zijn aan de stromings-eigenschappen van helium II. Hierbij gaan wij voorbij aan de transporteigenschappen van de heliumfilm.

De experimenten vinden steeds plaats met een toestel, bestaande uit twee volumina verbonden door een capillair of spleet. In de Leidse experimenten (en grotendeels bij die van KAPITZA) zijn de volumina thermisch geïsoleerd en afgesloten van het heliumbad, door hetwelk beiden geheel omgeven zijn (fig. 4c). In de andere te noemen experimenten is één van de volumina het bad zelf, waardoor gedurig de nulinstelling verloopt en de straling een veel grotere invloed heeft (fig. 4a). Het verschil uit zich ook hierin, dat tot de niet-Leidse experimenten ook isotherme metingen behoren, maar dat daarentegen de Leidse metingen juist weer vele quantitative gegevens over de warmtegeleiding kunnen opleveren. In het eerste geval is dan het (resterende) volume vaak van boven open (teneinde de gelijkheid van temperatuur te bevorderen) en zijn thermometers veelal afwezig. In de Leidse opstelling zijn steeds thermometers gemonteerd om gedurende het gehele proces het verloop van de temperatuur te volgen.



Figuur 4

Schema van toestellen, waarmee stroming van helium II is gemeten.

Het stromen van het helium door de spleet of capillair kan nu plaats vinden onder invloed van een drukverschil en/of een temperatuurverschil. Het eerste wordt aangebracht door het ene volume omhoog of omlaag te brengen t.o.v. het omringende bad (het tweede volume), het temperatuurverschil wordt aangebracht door (electrisch) energie toe te voeren aan een in één der volumina aangebrachte stookdraad.

Wij willen de metingen verdelen in twee groepen:

1. de groep met $\bar{j}_m = 0$. Hier is dus een stationnaire toestand bereikt, waarbij geen zichtbaar transport resulteert. Er staat dus een constant drukverschil over de capillair of spleet, dat slechts bereikt kan zijn door een constant temperatuurverschil. De hoeveelheid warmte, die wij blijven toevoeren om dit temperatuurverschil te bestendigen, wordt dus geheel afgevoerd door de capillair. Het is dus zinvol deze groep metingen de warmtegeleidingsmetingen te noemen.

2. De groep met $\bar{j}_m \neq 0$. Hier treedt dus een resulterend materie-transport op tengevolge van een drukverschil (2a) en/of een temperatuurverschil (2b). Een groep Oxfordse metingen, waar met dezelfde opstellingen steeds de invloed van beide verschillen is nagegaan, zijn mede om deze reden apart vermeld onder 2c.

Alvorens tot het overzicht van de experimenten over te gaan, zij nog een algemene opmerking gemaakt. Veelal wordt bij de beschrijving van de experimenten gebruikt een vloeistofsnelheid \hat{v} , die op de gebruikelijke wijze gekoppeld is aan de volumetrische snelheid dV/dt (de toename per sec van de hoeveelheid helium in A) volgens $O_s \hat{v} = dV/dt$, waarin O_s de oppervlakte is van de doorsnede van de capillair of spleet. Gaan wij bij onze beschouwingen uit van het twee-fluida model, dan is deze \hat{v} blijkbaar gekoppeld aan de snelheden van het normale fluidum en het superfluidum \bar{v}_n en \bar{v}_s volgens $\hat{v} = (1 - \alpha)\bar{v}_s + \alpha\bar{v}_n$. Hiermee is meteen verduidelijkt, dat binnen de omraming van het twee-fluida model de \hat{v} geen gelukkig gekozen grootheid is voor het interpreteren van resultaten, al is het experimenteel overigens een zeer gemakkelijke grootheid. Slechts in benaderingen, waarin \bar{v}_n verwaarloosd kan worden, is $\hat{v} \sim \bar{v}_s$, waarbij de evenredigheidsfactor nog sterk temperatuurafhankelijk is. Tenslotte zij in dit verband opgemerkt dat dan ook voor de relatieve snelheid $(\bar{v}_s - \bar{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s} (\hat{v} - \bar{v}_n)$ in deze benadering geldt $(\bar{v}_s - \bar{v}_n) \sim \hat{v}$, waardoor de wederkerige wrijving in een isotherm geval zich openbaart volgens $\text{grad} p \sim \hat{v}^m$ (cf. (5')), een evenredigheid die wij nog vaak zullen tegenkomen.

Het spreekt vanzelf dat vóór de formulering van het twee-fluida model de snelheid \hat{v} de enige rol speelde. Minder duidelijk is het veelvuldige gebruik van deze \hat{v} door vele auteurs ook ná deze formulering.

1. De metingen zonder resulterend materietransport

Hiertoe behoren allereerst de metingen van ALLEN en REEKIE^{39,1}, die de warmtestroom I (per temperatuurverschil ΔT) en de reactiekracht (drukverschil) Δp (per ΔT) bepaalden als functie van ΔT . Bij alle gebruikte spleetwijdten en waarden van ΔT bleek

steeds het quotiënt $(I/\Delta T)/(\Delta p/\Delta T) = I/\Delta p$ constant; dit is de reeds eerder genoemde lineaire relatie tussen warmtestroom en drukverschil.

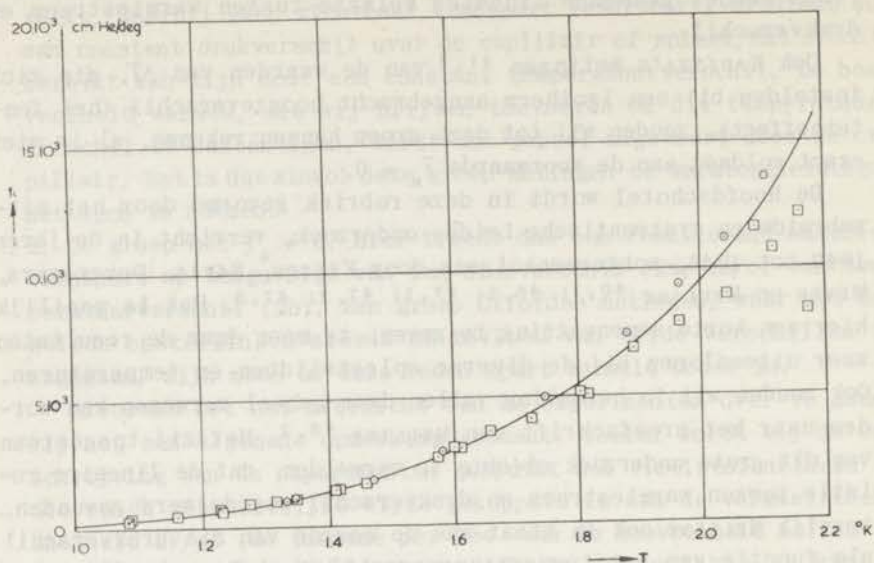
Ook KAPITZA's metingen ^{41,2} van de waarden van ΔT , die zich instelden bij een isotherm aangebracht hoogteverschil (het fontein effect), zouden wij tot deze groep kunnen rekenen, al is niet exact voldaan aan de voorwaarde $\bar{j}_m = 0$.

De hoofdschotel wordt in deze rubriek gevormd door het uitgebreide en systematische Leidse onderzoek, verricht in de jaren 1940 tot 1948, achtereenvolgens door KEESOM, SARIS, DUYCKAERTS, MEYER en MELLINK ^{40,1; 40,2; 47,1; 47,2; 47,3}. Het is moeilijk hier een korte samenvatting te geven, te meer daar de resultaten zeer uiteenlopen bij de diverse spleetwijdten en temperaturen. Ook zouden wij in herhaling vallen daar geheel verwezen kan worden naar het proefschrift van MELLINK ^{48,2}. Het zij toegestaan van dit grote onderzoek slechts te vermelden, dat de lineaire relatie tussen warmtestroom en drukverschil steeds werd gevonden, terwijl MELLINK ook in staat was de waarde van dit drukverschil als functie van het temperatuurverschil (het fontein effect) te bepalen bij verschillende temperaturen en spleetwijdten.

Wij merken in dit verband nog op, dat de waarden van het fontein effect van MELLINK en KAPITZA beneden $1,7^\circ\text{K}$ overeenstemmen. Daarboven echter liggen de waarden van KAPITZA hoger, tot ca. 20% toe. Dit zou veroorzaakt kunnen zijn door de verschillende wijze van meten, of, indien nog belangrijke randeffecten een rol zouden spelen, door het grote verschil in spleetlengte, die bij KAPITZA ca. 4 à 10 maal groter was dan bij MELLINK. Overigens zou op grond van de formule van H. LONDON ^{39,3} (indien deze in dit temperatuurgebied een verantwoorde benadering zou zijn) en de Leidse S-waarden ^{52,3} de waarheid in het midden liggen (fig. 5).

2. De metingen met resulterend materietransport

2a. $\bar{j}_m \neq 0$ als gevolg van een drukverschil. In 1938 trachtte KAPITZA ^{38,1} met deze methode (fig. 4a) de viscositeit van de vloeistof helium als geheel te bepalen; het beeld van de twee fluida zou eerst enige maanden later geformuleerd worden. Het resultaat van zijn onderzoek was de bovengrens voor de viscositeit: $\eta < 10^{-9} P$. Eveneens in 1938 publiceerden ALLEN en MISENER ^{38,2; 38,7; 39,4} een uitgebreid onderzoek naar de afhankelijkheid van de stroomsnelheid van het drukverschil Δp , de temperatuur T en de diameter en lengte van diverse capillairen (resp. 0,1 - 400 μ en 0,1-40 cm). Hierbij werd steeds gevonden, dat (a) $\hat{v} \sim (\text{grad} p)^{1/m}$, waarin $1/m$ varieert van 0,22 - 0,6; (b) de waarde van $1/m$ kleiner



Figuur 5

Het fontein effect f_0 als functie van T

○ : KAPITZA

□ : MELLINK

— : volgens H. LONDON (Leidse S-waarden)

wordt bij nauwe capillairen, zodat \hat{v} daar weinig met $\text{grad}p$ verandert; en (c) de waarde van deze weinig veranderende \hat{v} een sterke analogie vertoont in grootte en temperatuurafhankelijkheid met de resultaten bij de heliumfilm.

WHITE^{51,3} verving de gebruikelijke capillair door een poreus membraan. Ook hierbij werd gevonden, dat $\hat{v} \sim (\text{grad}p)^{1/m}$ met $1/m = 0,22$ (voor $T > 2^{\circ}\text{K}$: $1/m = 0,30$).

ATKINS^{51,5} liet zien, dat in capillairen met een diameter $> 100 \mu$ (de temperatuur is steeds $T = 1,2^{\circ}\text{K}$) geen superfluiditeit meer merkbaar is en dat de wrijvingskrachten redelijk door de wederkerige wrijvingsterm van GORTER-MELLINK beschreven worden. Er blijven echter discrepanties die nog andere krachten in helium II veronderstellen. Ook toonde ATKINS aan, dat er meetbare randdefecten optreden; de waarde van het drukverlies aan de rand werd bepaald op $(1/2)\rho\hat{v}^2$.

SWIM^{53,4} werkte met een ringvormige spleet. Het resultaat is wederom $\hat{v} \sim (\text{grad}p)^{1/m}$, met $1/m = 0,35$ bij benadering constant, hetgeen dus aan de waarde $m = 3$ van GORTER-MELLINK doet denken. Echter bij waarden van Δp , hoger dan ca. 10 cm He, waartoe zijn toestel speciaal gebouwd was, bereikte \hat{v} een soort verzadigingswaarde. Onder 2c komen wij hierop terug. Overigens wordt door deze

experimenten een mooi voorbeeld gegeven van de gebrekkige rol, die de vloeistofsnelheid \hat{v} kan spelen bij een interpretatie van de resultaten. Schrijven wij nl. de genoemde evenredigheid: $\hat{v} = a(\Delta p)^{1/m}$, dan werd gevonden, dat a sterk temperatuurafhankelijk was. Nadere beschouwingen tonen echter aan, dat in een zelfde benadering $a \sim \rho_s$, d.w.z. dat wanneer wij zouden schrijven $\bar{v}_s (= \frac{\rho}{\rho_s} \hat{v}) = a'(\Delta p)^{1/m}$, de coëfficiënt a' juist een constante is, waarmee een veel fraaiere beschrijving van de resultaten mogelijk is!

2b. $\bar{j}_m \neq 0$ als gevolg van een temperatuurverschil. Hiertoe behoren de eerste metingen (en ontdekking) van het fonteineffect door ALLEN en JONES^{38,3}, evenals de metingen van het mechanocalorisch effect van KAPITZA^{41,2}.

Tenslotte behoren ook enkele van de metingen van MELLINK hier thuis, nl. de metingen waarbij het z.g. retardatieëffect optrad^{47,3; 48,2} (cf. IB; 2b).

2c. *De Oxfordse metingen in 1950 - 1953.* (MENDELSSOHN, BOWERS, CHANDRASEKHAR en WHITE)^{50,2; 50,5; 51,4; 52,2; 53,1}. Uitgaande van de gedachte, dat behalve het meten van een drukverschil over een spleet of capillair ook de druk in de spleet van belang is, werd in Oxford een serie metingen uitgevoerd met toestellen, waarbij "ergens halverwege" de spleet of capillair een manometerzijbuis X is aangebracht (schematisch in fig. 4b). Hierdoor kan dus ook de druk ter plaatse van de manometer gemeten worden. Er zij opgemerkt, dat deze spleet met manometer dimensioneel in zoverre van de gebruikelijke situatie afwijkt, dat hier de diameter van de manometer (noodzakelijkerwijs) ca. 1000 maal zo groot is als de breedte van de spleet zelf.

De metingen vertonen, gedeeltelijk en in zeker opzicht, een grote analogie met de metingen beschreven in dit proefschrift. Het zijn bovendien de eerste niet-Leidse metingen, waar het probleem van de kritische snelheden (het probleem dus of de wrijvingsverschijnselen van het superfluidum eerst optreden boven een bepaalde snelheid, dan wel snel continu met deze toenemen, zoals door GORTER-MELLINK is ondersteld (cf. IB; 1b)) uitvoerig is bekeken. Derhalve worden deze experimenten hier wat uitgebreider vermeld en in hoofdstuk III zullen wij hier op terug komen.

De resultaten kunnen wij als volgt weergeven.

α) Wanneer met behulp van een drukverschil het volume A leegloopt in het bad, hetgeen als steeds verloopt volgens $\hat{v} \sim (\text{grad}p)^{1/m}$, is het niveau X vrijwel direct op de hoogte van niveau B : $XB = 0$. Dit is door de auteurs geïnterpreteerd als een discontinu drukverval over de nauwste (binnenste) ingang van de spleet (de plaats

van X werd gevariëerd) en tevens als bewijs voor het bestaan van een kritische snelheid. Deze eerste interpretatie achten wij niet noodzakelijk, de laatste t.a.v. de kritische snelheid lijkt echter juist.

Wij merken echter op dat in het geval van een spleet, waar $\hat{v} \sim 1/r$, de gemeten relatie $\text{grad}p \sim \hat{v}^m$ impliceert, dat $\text{grad}p \sim 1/r^m$, waardoor $\text{grad}p$ snel afneemt met toenemende r en in dit geval XB ongeveer 1% wordt van het drukverschil AX ! De vraag is nu hoe nauwkeurig de waarde $XB = 0$ is gemeten. In dit verband is nl. te noemen het experiment van SWIM^{53,4} (zie boven) met een geheel analoog toestel, waarin vermeld wordt, dat de geringe waarde XB meetbaar afneemt van een waarde $\delta \neq 0$ tot 0 in de tijd dat de druk AB genivelleerd wordt.

Ook voor het geval van twee poreuse membranen, in serie en met ongelijke weerstand, is een dergelijk verloop van A en X te begrijpen op grond van de relatie tussen \hat{v} en $\text{grad}p$. Slechts indien de weerstanden over AX en over XB identiek zijn, is te verwachten dat het niveau X zich halverwege A en B zal instellen, onafhankelijk van m en dus ook onafhankelijk van het bestaan van een kritische snelheid. Dit is nu gevonden in het geval van twee, met fijn poeder gevulde capillairen in serie, waar uit statistische overwegingen de weerstanden identiek zijn, indien de lengten van beide stukken even groot zijn. Dit vormt dus een bevestiging van onze opvatting. Het is derhalve niet het poeder dat een essentiële andere aanblik geeft, zoals door de auteurs wordt aangegeven en niet nader wordt begrepen, maar het is een gevolg van het weerstandsverloop in de ringvormige spleet, vergeleken met dat in het in een buis geperste poeder. Het zou dus wenselijk zijn ook een experiment uit te voeren met poeder, in een ringvormige spleet geperst; wij zouden verwachten, dat dan het verschil tussen poeder en spleet verdwenen zou zijn.

β) Wanneer met een temperatuurverschil (dus door toevoer van een energie I aan A) het volume A zich vult, neemt de aanvangssnelheid van vullen, \hat{v}_a , aanvankelijk lineair toe met I , maar boven een bepaalde waarde $I = I_D$ neemt \hat{v}_a minder snel toe. De kromme \hat{v}_a als functie van I zal dus een knik vertonen bij $I = I_D$ en dus ook wijzen op de existentie van een kritische snelheid. Wij komen hierop nog terug bij de discussie van enige van onze eigen experimenten, die hiermee in overeenstemming zijn (cf. IIIB). Overigens zal dan ook blijken, hoe weinig krommen met een discontinue afgeleide (wij zullen in dit verband in IIIB een z.g. Γ'_d -kromme definiëren) en continue krommen met hoge waarden van m kunnen verschillen.

Het niveau X in de manometer blijft bij toenemende I constant = 0, wordt negatief bij $I = I_D$ (ook hier zijn aanwijzingen, dat

de afgeleide in I_D discontinu is) en wordt later bij veel hogere I weer sterk positief. Wij zijn geneigd het optreden van dit gehele effect niet los te zien van temperatureffecten in X . Voor $I > I_D$ zullen nl. temperatuurverschillen tussen A en B optreden, veel hoger dan evenredig met I , zoals bij $I < I_D$. Het is nu zeer goed denkbaar, dat de (plotseling) veel grotere warmtegeleiding door het helium in de spleet en door het glas van de begrenzend wanden, die hiervan het gevolg is, de temperatuur in X beïnvloedt. Overigens treedt het "duikeffect" niet op in spleten van 10μ en wijder.

1D. NADERE VERANTWOORDING EN ONTWIKKELING VAN HET ONDERZOEK

Zoals onder IB is uiteengezet, vormden de experimenten van MELLINK ^{48,2} de directe grondslag van de formulering van de bewegingsvergelijkingen in helium II en in het bijzonder van de hypothese van de wederkerige wrijving. Bovendien leverden deze ook de eerste kwantitatieve gegevens op over de daarin optredende coëfficiënt A .

Enerzijds waren echter deze metingen - die beoogden de bepaling van de warmtegeleidingen van het fonteineffect in helium II - voor dit doel niet speciaal geschikt en dus te onnauwkeurig. Anderzijds was de vorm van de in het betreffende toestel aangebrachte spleet, waar het helium doorheen stroomde, voor verdere berekeningen aan de resultaten ondoelmatig en was ook de spleetwijdte niet bepaald genoeg. Tevens waren er geen metingen in het interessante gebied tussen 1 en 5 μ . Analoge bezwaren zijn in dit opzicht ook tegen dat gedeelte van de buitenlandse experimenten in te brengen, dat in principe voor ons doel zou kunnen dienen. Ten aanzien van deze metingen geldt voorts nog, dat - zoals steeds bij wetenschappelijk onderzoek, maar vooral bij dat van helium II - hetzelfde probleem door verschillende laboratoria onderzocht dient te worden.

Derhalve werd een nieuw onderzoek opgezet, dat zich dus geheel diende te richten op de bepaling van de wrijvingskrachten in helium II. Deze hebben wij enerzijds bepaald door onder invloed van verschillende druk- en temperatuurgradiënten (en derhalve met verschillende snelheden) helium te laten stromen door spleten van verschillende wijden. Anderzijds werd deze bepaald door ook de consequenties van de wederkerige wrijving t.a.v. stationnaire warmtegeleidingen experimenteel na te gaan. Aan het toestel worden hoge eisen gesteld ten aanzien van de te gebruiken spleet. Deze moet een meetkundig eenvoudige vorm hebben en een welgedefiniëerde wijdte h , die in de gehele spleet dezelfde waarde heeft: de waargenomen grootheden blijken te variëren met een hoge macht van h . De volumina, die door deze spleet worden verbonden, moeten in verband met de stationnaire metingen ($\bar{j}_m = 0$) dus thermisch geïsoleerd zijn. Tevens dienen deze (in verband met de stromingsmetingen met $\bar{j}_m \neq 0$) relatief groot te zijn, opdat ook een grotere hoeveelheid helium kan doorstromen, vergeleken met de mogelijkheden die het toen bestaande toestel bood. Het gebruikte toestel is beschreven onder IIA; 1a.

De historische ontwikkeling van het onderzoek verliep nu als volgt. Aanvankelijk werd de wrijvingskracht F (cf. (10)) bepaald

met behulp van de *retardatiemethode* (d.i. een methode, die gebruik maakt van het retardatieëffect, beschreven onder IB; 2b) en ook de coëfficiënt A werd hieruit bepaald. Later vonden wij bij de eveneens bepaalde warmtegeleidingen (\bar{w} als $\bar{w}(\Delta T)$) veel lagere waarden van A bij snelheden van het superfluidum, die lager waren dan bij de eerstgenoemde stromingsmetingen. Dit, alsmede het preciese verloop van \bar{w} als $\bar{w}(\Delta T)$, suggereerden dat misschien toch de wederkerige wrijving de opvatting van de kritische snelheid niet kan vervangen en wij kwamen tot een voorlopige conclusie, dat het beeld van de kritische snelheid en dat van de derdemachtswrijving (waarvan de geldigheid bij hogere snelheden overtuigend gevonden was) gecombineerd zouden moeten worden ^{51,6; 52,6}. Teneinde hier nadere gegevens over te verkrijgen, voerden wij ook stromingsmetingen uit bij lage snelheden, waarbij wij hetzelfde retardatie-effect op een andere wijze gebruikten bij de z.g. *overshootmethode* (cf. IIB). De eerder genoemde retardatiemethode leent zich niet voor lage snelheden. Het bleek echter uitermate lastig in dit geval de gewenste inlichtingen te verkrijgen (cf. IIIB).

Omdat bij de vorm van de door ons gebruikte spleet (nl. een vlakke ringvormige spleet; cf. IIA; 1a), de snelheid van een fluidum aan de beide uiteinden niet dezelfde is en derhalve verschijnselen, die kritisch optreden ten aanzien van de snelheid, uitgesmeerd worden, werd in de loop van het onderzoek de spleetlengte verkort. Ook om meer redenen was een variatie van spleetlengte gewenst.

Mede door de grotere homogeniteit van de korte spleet, vormen de metingen hiermee de grootste bijdrage tot het experimentele hoofdstuk III. Ook waren hiermee nauwere spleten te realiseren, die belangrijk tot de verkregen resultaten hebben bijgedragen.

Hoofdstuk II

VOORBEREIDING

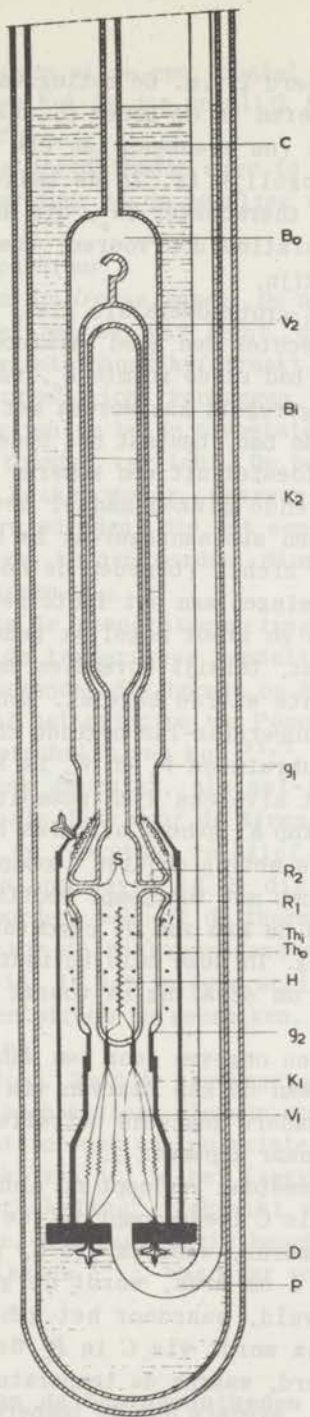
IIA. DE EXPERIMENTELE OPSTELLING EN DE MEETMETHODEN

1. De experimentele opstelling

1a. *Toestel en cryostaat.* Wij hebben in het vorige hoofdstuk gezien, dat wij een toestel nodig hebben, dat bestaat uit twee volumina, verbonden door een spleet of capillair doch overigens thermisch geïsoleerd, en elk voorzien van een thermometer en tenminste één van beiden van een stookdraad. Voorts moet het toestel van buitenaf gevuld en leeggepompt kunnen worden en het fontein-effect, de thermometers en de stookdraad afgelezen resp. bediend kunnen worden. Ten aanzien van de spleet (of capillair) geldt de eis, dat deze overal een constante breedte heeft en een meetkundig eenvoudige vorm. Ook moet op niet al te ingrijpende wijze deze breedte op diverse waarden ingesteld kunnen worden.

Het gebruikte toestel is weergegeven in fig. 6. Het is voortgekomen uit eerder gebouwde toestellen (KEESOM-MELLINK) en werd voor het huidige onderzoek ontworpen door MELLINK. De beide volumina B_o en B_i zijn concentrisch aangebracht, thermisch van elkaar geïsoleerd door de vacuumruimten V_1 en V_2 en verbonden door een ringvormige spleet S , die zich bevindt tussen het "vaste" ondergedeelte K_1 en de "losse" kop K_2 . Hiertoe bestaat het bovenvlak van K_1 en het ondervlak van K_2 uit optisch vlak gepolijste ringen R_1 en R_2 . Doordat de binnen- en buitenstralen (r_i en r_o) van de ringen R_1 en R_2 voldoen aan de relatie $r_{2i} < r_{1i} < r_{1o} < r_{2o}$ wordt de spleetlengte bepaald door $(r_{1o} - r_{1i})$, ook indien de as van de kop K_2 een weinig verschoven zou zijn t.o.v. de as van K_1 . De breedte van de spleet wordt bepaald door de dikte van de drie bandjes of draadjes van één of ander materiaal, die er tussen aangebracht worden, terwijl K_2 op K_1 gedrukt wordt door drie veertjes. Deze constructie voorkomt zo ook te hoge overdrukken in de binnenruimte B_i .

Voorts bevinden zich in B_i een phosphorbrons thermometer Th_i en een constantaan stookdraad H . Deze worden op de gebruikelijke wijze met behulp van vier platina doorvoeren in de vacuumruimte V_1 geleid en van daar met behulp van zes gespiraliseerde draadjes (aan elk der beide uiteinden van Th_i zijn een stroom- en een



- C
- B₀
- V₂
- B₁
- K₂
- g₁
- S
- R₂
- R₁
- Th₁
- Th₀
- H
- g₂
- K₁
- V₁
- D
- P

0 1 2 3cm

Figuur 6
Het toestel

spanningsdraad gemonteerd i.v.m. de meting van de weerstand) naar de zes platina doorvoeren in de bodem D , waarna aansluiting aan de acht toevoerdraden (nu eveneens aan elk uiteinde van H twee draden) van buiten mogelijk is. In de buitenruimte B_0 bevindt zich de phosphorbrons thermometer Th_0 , die aan de zijkant uitgeleid wordt met twee platina doorvoeren, waaraan weer vier toevoerdraden bevestigd zijn.

Het toestel bestaat grotendeels uit glas, gezien onze bovengestelde eis. Teneinde echter een goed warmtecontact te verzekeren tussen het omringende bad en de ruimte B_0 , waardoor ook de temperatuur van B_0 direct geregeld kan worden met behulp van de dampdruk van het omringende bad, bestaat het onderste gedeelte van de buitenmantel van het toestel uit een koperen cylinder, die met de las g_1 aan de resterende glazen mantel bevestigd is. Door de plaats van g_1 te kiezen als aangegeven, is bewerkt, dat met behoud van het nodige "zicht" (beneden de hoogte g_1 kunnen toch practisch geen waarnemingen aan het fonteineffect plaats vinden) de koperen mantel een zo groot mogelijk gedeelte van het totale manteloppervlak inneemt, terwijl bovendien de diameter van de las een niet al te riscante waarde bereikt. Een ten gevolge van g_1 noodzakelijke tweede koperglas-las bevindt zich ter plaatse g_2 .

Van de beide vacuumruimten V_1 en V_2 is V_2 permanent vacuum, d.w.z. vacuum gepompt alvorens dichtgesmolten te zijn, hetgeen mogelijk is omdat de kop K_2 geheel uit glas bestaat. Aan de ruimte V_1 wordt tijdens de meting continu gepompt door de pompbuis P met een kwikdiffusiepompe met voerpomp. Voorts is de ruimte B_0 met een glazen buis C via de kap van de cryostaat verbonden met een vul- en pompinrichting. In deze buis bevindt zich nog een koperdraad met schermpjes om straling en vooral trillingen tegen te gaan.

Het toestel wordt nu omgeven door een dubbelwandige cryostaat en is dus bevestigd aan de kap daarvan via de pompbuis P en de glazen buis C . Voor nadere gegevens betreffende toestel en cryostaat wordt verwezen naar appendix 2.

Het begin van een meetdag verloopt nu aldus. Nadat tevoren het gehele toestel via buis C leeggepompt is (de ruimte B_i dus via de spleet S en B_0) en daarna, wederom via C , gevuld is met zuiver heliumgas van circa 1 cm druk, wordt de gehele cryostaat met vloeibaar helium gevuld, waardoor het gehele toestel ook tot 4,2°K afkoelt. Daarna wordt via C in B_0 de nodige hoeveelheid helium in gecondenseerd, waarna de temperatuur van het bad beneden T_Λ gebracht wordt, evenals dus de temperatuur van B_0 . Ten gevolge van de superfluiditeit van helium II zal nu ook B_i gevuld worden via S (hetgeen een zeer lange tijd zou vergen met helium I gezien de geringe wijfde van de spleet S).

Wij hebben op deze wijze een toestel dat voldoet aan de boven omschreven eisen en het is dus mogelijk het voorgestelde meetprogramma uit te voeren.

Alvorens tot de meetmethoden over te gaan bespreken wij eerst de bijkomende apparatuur en de bepaling van de basisgrootheden.

1b. Bijkomende apparatuur

α) Ten aanzien van de *drukmetingen*. De niveaus van het helium in B_i en B_o werden belicht met wit licht, dat door een CuSO_4 -filter zijn voornaamste warmteinhoud kwijtraakt. Hierdoor wordt een helder en niet te storend licht verkregen, dat door de spleet, die in de verzilvering van de beide cryostaten is gelaten, het bovengedeelte van het toestel verlicht. De beide niveaus zijn dan af te lezen met een kachetometer, waarvan in ons geval de kijker voorzien is van kruisdraden, die met een fijn verstelbare micro-meterschroef bewogen kunnen worden. Hierdoor zijn de aflezingen reproduceerbaar binnen 2μ .

β) Ten aanzien van de *temperatuurmetingen*. De weerstand van de thermometer, die de temperatuur bepaalt, wordt gemeten volgens de gebruikelijke methode, die berust op het meten van potentiaalverschillen volgens het principe van POGGENDORFFEN nader omschreven is in het proefschrift van Kok ^{35,1}. Als weerstandsbank werd een Dieselhorstbank gebruikt, als nul-instrument een ZERNIKE-c-galvanometer, zoals deze door de firma Kipp vervaardigd wordt. Daar deze methode de weerstand relatief bepaalt t.o.v. een normaalweerstand (in ons geval 10Ω) die beiden door de zelfde stroom doorlopen worden, behoeft de thermometerstroom niet bekend te zijn. Daär echter de restweerstand van phosphorbrons sterk stroomafhankelijk is, is het in de praktijk wenselijk in alle metingen dezelfde meetstroom te gebruiken. In ons geval bedroeg de stroom steeds $0,4 \text{ mA}$.

γ) De *stookinrichting*. Voor de nauwkeurige regeling van het tijdstip van in- en uitschakeling, alsmede van de tijdsduur en intensiteit van de warmtetoevoer aan de ruimte B_i met de stookdraad H , werd gebruik gemaakt van de, in het KAMERLINGH ONNES laboratorium aanwezige "stookschakeling", gebruikt voor de metingen van de soortelijke warmte, die nauwkeurig beschreven is in het proefschrift van P.H. KEESOM ^{48,1}, waarnaar voor nadere gegevens verwezen wordt.

2. De bepaling van de basisgrootheden

Onder basisgrootheden wordt verstaan: het drukverschil Δp en het temperatuurverschil ΔT tussen B_i en B_o , alsmede de snelheden

v_n en v_s van de beide fluida. Dit zijn de bronnen van de krachten, die in de bewegingsvergelijkingen optreden.

2a. *Het drukverschil* Δp wordt bepaald door het verschil van de hoogte H_i van het heliumniveau in B_i en de hoogte H_o in B_o , vermeerderd met het verschil in dampdruk tussen deze volumina, welke bepaald wordt (bij gegeven temperatuur van B_o) door het temperatuurverschil. Dit hoogteverschil $\Delta H = (H_i - H_o)$ wordt gemeten met een kathetometer. Daar bij constante temperatuur het verband tussen H_i en H_o één-éénduidig is, is het in de praktijk sneller en nauwkeuriger (wanneer H_i als $H_i(H_o)$ eenmaal bepaald is) slechts te meten $H_i(t)$ (of $H_o(t)$), waaruit dan ook ΔH als functie van de tijd volgt.

2b. *Het temperatuurverschil* ΔT wordt gemeten m.b.v. de beide phosphorbrons thermometers in B_i en B_o . De ijking geschiedt aldus: de, via de dampdruk bepaalde badtemperatuur is dankzij de koperen buitenmantel van het toestel tevens de temperatuur van B_o . Staan de niveaus in B_o en B_i even hoog ($\Delta H = 0$), dan is (i.v.m. het fonteineffect) de temperatuur van B_i dezelfde als van B_o en dus van het bad. Meten wij tegelijkertijd de baddruk en de beide weerstanden van de thermometers en herhalen wij dit voor verschillende baddrukken, dan vinden wij op deze wijze de weerstanden $R_{1,2}$ van de beide thermometers als functie van de temperatuur T en dus tevens $dR_{1,2}/dT$. Zoals boven vermeld werd, bedroeg deze laatste ca. $2\Omega/\text{graad}$, hetgeen in onze opstelling impliceerde een schaaluitslag van de galvanometer van 4 à 6 cm per milligraad. Daar het in de praktijk niet doenlijk is, tengevolge van de fluctuerende resp. variërende temperatuur, de weerstanden steeds direct te bepalen, werd er de voorkeur aan gegeven de uitslagen te bepalen van het nulinstrument t.o.v. de nulwaarde ten tijde van de calibratie, waaruit ook het temperatuurverschil ΔT te berekenen valt.

2c. *De snelheid* van het normale fluidum \bar{v}_n is geheel bepaald door het drukverschil Δp indien wij ons baseren op (6).

De snelheid van het superfluidum \bar{v}_s is dan te berekenen op grond van de relatie:

$$\rho \frac{dV}{dt} = 2\pi r h (\rho_s \bar{v}_s + \rho_n \bar{v}_n), \quad (11)$$

waarin dV/dt is de verandering van het volume helium in B_i per seconde en $2\pi r h$ de oppervlakte van de spleetopening.

De grootte dV/dt is bepaald als afgeleide van de gemeten $H_i(t)$, vermenigvuldigd met de oppervlakte van de doorsnede van B_i ter hoogte H_i . Voor de waarden van ρ_n , ρ_s en η_n wordt verwezen naar IIC. Volgens (11) geldt nog $\bar{v}_{s,n} \sim 1/r$.

3. De meetmethoden

3a. De metingen met $\bar{j}_m \neq 0$. Nadat een "stationnaire rusttoestand" (d.i. $\bar{j}_m = 0$, $F = 0$) verkregen is (de voorperiode), wordt energie toegevoerd aan B_i vanaf $t = t_1$ (cf. fig. 7a en b). Hierdoor loopt de temperatuur T_i van B_i op en ook het heliumniveau H_i . Wanneer dit enige tijd voortgeduurd heeft, wordt de energietoevoer bij $t = t_o$ weer beëindigd en begint de naperiode, waarin bij $t = t_e$ wederom een stationnaire rusttoestand intreedt. Gedurende deze serie (een z.g. *stookserie*) is dus zo steeds het verschil tussen het theoretische fonteineffect $\rho_n S^* \Delta T$ en het experimentele fonteineffect Δp (cf. (5')) bekend uit de gemeten ΔT en Δp . Dit verschil zou dan evenredig moeten blijken met $(v_s - v_n)^3$, terwijl de evenredigheidsfactor de coëfficiënt A bepaalt. De omrekening van Δp en ΔT naar Δp en ΔT is weergegeven in IIB; 1.

α) Bij de *retardatiemethode* (cf. ID) worden de gegevens hoofdzakelijk verkregen uit de periode zelf ($t_1 \leq t \leq t_o$), waarin dus Δp en ΔT afzonderlijk worden gemeten. De naperiode, die veelal kort is, speelt een ondergeschikte rol. Deze methode leent zich speciaal voor zodanige snelheden van de fluida, dat de wrijvingsterm van dezelfde orde van grootte is als het fonteineffect zelf.

β) Bij de *overshootmethode* (cf. ID) worden de gegevens uit het eerste deel van de naperiode ($t_o \leq t \leq t_e$) verkregen. Door te bepalen, hoeveel helium nog doorstroomt na het uitschakelen van de energietoevoer alvorens evenwicht is verkregen, is het verschil tussen theoretisch en experimenteel fonteineffect op het moment van uitschakelen direct te bepalen, zonder de afzonderlijke Δp en ΔT bepalingen te gebruiken. Hierdoor elimineren wij de onzekerheden bij de berekening, waardoor deze methode ook voor lage snelheden is te gebruiken. Ook bij het onderzoek naar kritische verschijnselen (dit "nalopen" van het helium zou dan eerst boven een zekere snelheid op kunnen treden) kan deze methode in principe een belangrijke bijdrage leveren. De berekeningen worden gegeven in IIB; 2.

Na afloop van een stookserie staan de niveaus dus in B_i en B_o verder uit elkaar dan daarvoor (H_i is toegenomen). Men zou dus geneigd zijn te willen wachten tot deze beiden weer gelijk staan alvorens een nieuwe serie te beginnen. De niveaus kunnen echter alleen gelijk komen indien $\Delta T = 0$, waartoe dus warmte uit B_i weggevoerd moet worden. Dit kan slechts plaats vinden door het stromen van het normale fluidum en dus al zeer langzaam voor $h < 5\mu$. Het wachten op $\Delta T = 0$ is dus ondoenlijk en de gebruikelijke methode is dan ook de situatie bij $t > t_e$ (een stationnaire rusttoestand) te beschouwen als voorperiode van de volgende serie. Het bezwaar is dus steeds dat de beginvoorwaarden van elke stook-

serie verschillen, hetgeen bij een verdere bewerking van de resultaten speciale correcties vereist.

Na een groot aantal stookseries (deze vormen dan een z.g. *meetserie*) heeft het niveau H_i de top van K_2 (zie fig. 6) bereikt en is B_i geheel met vloeistof gevuld. In deze situatie kunnen dan slechts metingen met $\bar{j}_m = 0$ uitgevoerd worden (zie beneden). Teneinde weer een nieuwe meetserie (met $\bar{j}_m \neq 0$) te kunnen beginnen, moet "het niveau uit de top worden gehaald". Dit nu werd als volgt gedaan. Eerst verlaagden wij T_o belangrijk. Weliswaar werd door de grotere ΔT de vloeistof nog sterker naar binnen getrokken, maar anderzijds trad een veel grotere warmtegeleiding op, waardoor B_i sneller afkoelde. Nadat de temperatuur T_i zo gedaald was ver beneden de oorspronkelijke T_o , werd T_o weer op die waarde teruggebracht, waardoor een fonteinkracht naar B_o ontstond, dat zorgde dat B_i leegstroomde. Het hierbij optredende mechanocalorische effect verhoogt weer T_i , waardoor het leegstromen eindigt wanneer de toestand $T_o = T_i$ bereikt is.

3b. *De metingen met $\bar{j}_m = 0$.* In dit geval is het doel van de metingen de bepaling van de stationnaire toestand met ingeschakelde energietoever. Uit het verloop van \bar{v} als functie van ΔT is dan enerzijds de wrijvingskracht F te bepalen, anderzijds biedt het ook een goede mogelijkheid tot onderzoek naar de kritische verschijnselen. Wij merken in dit verband op, dat voor $\bar{j}_m = 0$ de snelheden \bar{v}_s en \bar{v}_n gekoppeld zijn volgens $\rho_s \bar{v}_s + \rho_n \bar{v}_n = 0$.

Nu is er bij onze opstelling een maximale waarde gesteld aan het hoogteverschil $H_i - H_o$ tusschen de niveaus in B_i en B_o en derhalve (ten gevolge van het fonteineffect) een bijbehorende en van T afhankelijke maximale waarde van het temperatuurverschil ΔT . Daar wij ons vooral interesseerden voor hogere waarden van ΔT (cf. ID), werden deze warmtegeleidingen voornamelijk uitgevoerd met z.g. onzichtbaar niveau, d.w.z. de gehele ruimte B_i was gevuld met helium en er waren geen gelijktijdige metingen aan ΔH mogelijk. Slechts in een enkel geval, waar dit wenselijk of mogelijk was, werden eveneens (of uitsluitend) warmtegeleidingen met zichtbaar niveau bepaald, d.i. met gelijktijdige ΔH -bepalingen.

4. Opmerkingen

Aan het einde van deze experimentele sectie IIA volgen nog enkele algemene opmerkingen.

α) De constructie van het toestel, waarin drie veertjes de kop K_2 op het onderstuk K_1 drukken, impliceert dat geen onbepaalde

overdruk in B_i toegelaten kan worden zonder een wijziging van de spleetwijdte te veroorzaken en dat dus ook, in verband met het fonteineffect, de waarden van ΔT beperkt zijn. Deze beperking hangt sterk af van de temperatuur T . In de praktijk ondervonden wij hier weinig hinder van; hierop komen wij terug in IIIC, fig. 29.

β) De badtemperatuur wordt bepaald door de baddruk, die geregeld wordt door middel van een kraan in de pompleiding van het bad naar de reduceerpomp. Teneinde deze regeling te verfijnen, werd in het bad nog een stooklichaam aangebracht, dat wij konden bedienen vanaf de plaats waar de temperatuur T_0 afgelezen werd met een galvanometer. Wanneer van dit tweede systeem gebruik gemaakt werd, werd het eerste systeem uitgeschakeld. Beide systemen parallel (ieder met eigen traagheid) zouden een averechts effect hebben.

Tenslotte hebben wij de temperatuurregeling nog verder verbeterd op de volgende wijze. Daar de energie, die aan B_i toegevoerd wordt, uiteindelijk aan het bad afgevoerd wordt, zal bij $t = t_1$ en $t = t_0$ (in- resp. uitschakelen van de energiestroom naar B_i) de temperatuur T_0 een weinig onrustig worden. Door nu een aparte energietoevoer naar het bad op dezelfde tijden (en met dezelfde schakelaar) juist uit resp. in te schakelen, werd ook deze evenwichtsverstoring verminderd, hoewel niet vermeden.

IIB. FORMULES EN BEREKENINGEN

Inleiding

In IIA;2 zagen wij, dat het meten van de niveauhoogte $H_i(t)$ in B_i en het temperatuurverschil $\Delta T(t)$ tussen B_i en B_o , beiden dus als functie van de tijd, de basisgrootheden bepalen en dus in beginsel de wrijvingskracht. In IIA;3 gaven wij de meetmethoden nader aan en introduceerden de figuren 7a en b. In deze sectie IIB geven wij de berekeningen, die voor nadere quantitative gegevens nodig en mogelijk zijn. Dit gedeelte is in drie delen onderverdeeld.

Onder 1 zijn te vinden de berekeningen, die op grond van IB: (10) en (5') de wrijvingskracht (of wel A_m) direct bepalen als functie van de gemeten basisgrootheden Δp , ΔT , \bar{v}_s en \bar{v}_n (cf. IIA;2). Ook de relaties tussen het totale energietransport W , Δp en ΔT op grond van IB: (8) en (9') ($\bar{J}_m = 0$) zijn hier berekend. Deze berekeningen zijn niet anders dan de omrekening van $\text{grad}p$, $\text{grad}T$ en \bar{w} op Δp , ΔT en W en de verwerking van de geometrische bijzonderheden van het toestel.

In IIA;3a schreven wij, dat de hoeveelheid helium, die doorstroomt nadat de energietoevoer is opgehouden (de "overshoot"), de wrijvingskracht bepaalt, die op het moment $t = t_o$ bestaat. Dit verband tussen de "overshoot" en F is aangetoond en berekend onder 2, waarbij uitgegaan wordt van de energiebalans voor het binnenvolume B_i .

Vanuit de gedachte, dat het verloop van $H_i(t)$ en $\Delta T(t)$ bijna geheel bepaald wordt door de energietoevoer I en dat dus, op grond van de energiebalans en de bewegingsvergelijkingen, dit verloop te berekenen moet zijn, is het derde gedeelte 3 ontstaan. Het bleek dat deze vergelijkingen in een zeer compacte en overzichtelijke vorm waren te geven ((47), (48) en (52)) en dat daaruit inderdaad de functies $H_i(t)$ en $\Delta T(t)$ te bepalen zijn. Als een onverwacht resultaat vonden wij hierbij, dat het tijdstip $t = t_e$ (fig. 7a en b) precies bepaald bleek, d.w.z. dat in een eindige, welgedefiniëerde tijd de stationnaire rusttoestand ($F = 0$) wordt bereikt. Ook verkregen wij testbare formules, die onder meer bij het onderzoek naar het bestaan van de "critische snelheid" bruikbaar bleken.

1. De betrekkingen tussen de basisgrootheden

In IB definiëerden wij de wrijvingskracht F :

$$\frac{F}{1-x} = \rho x S^* \text{grad} T - \text{grad} p . \quad (10)$$

Voorts definiëren wij het fonteineffect in cm He/graad volgens:

$$f_o(T) = \frac{x S^*}{g} . \quad (12)$$

Integratie van (10) over de spleetlengte en omrekening van dyne op cm He ($= \rho g$ dyne/cm²), levert op:

$$\bar{F} \equiv \int_{r_o}^{r_i} \frac{F}{(1-x) \rho g} dr = f \Delta T - \Delta p . \quad (13)$$

Hiermee is een nieuwe grootheid \bar{F} gedefiniëerd, de geïntegreerde F , die dus gekoppeld is aan de *gemeten* grootheden ΔT en Δp . Voorts is f in (13) een gemiddelde waarde van $f_o(T_o)$ en $f_o(T_i)$, hetgeen nader is uitgewerkt in appendix 3. Wij merken nog op, dat $\text{grad} p$ in dyne/cm³ en Δp steeds in cm He is uitgedrukt. Tenslotte definiëren wij ΔT^\dagger volgens:

$$f \Delta T^\dagger = f \Delta T - \Delta p . \quad (14)$$

Deze ΔT^\dagger is dus een "surplus ΔT ": het temperatuurverschil, dat méér aanwezig is dan, bij $F \equiv 0$, met het aanwezige drukverschil Δp overeenstemt. Bovendien volgt uit (13) en (14):

$$f \Delta T^\dagger = \bar{F} , \quad (15)$$

d.w.z. dat ΔT^\dagger dus een maat is voor de wrijvingskracht \bar{F} , waardoor dit een zeer bruikbare (en daardoor veel gebruikte) grootheid is.

Substitueren wij voor F (cf. IB; 2b):

$$F = A_m x (1-x) \rho^2 (v_s - v_n)^m \quad (16)$$

en bedenken wij, dat bij onze ringvormige spleet ten aanzien van de snelheden $v_{s,n}$ geldt (cf. IIA; 2c)

$$v_{s,n} = v_{s,n}^i \frac{r_i}{r} \quad (v_{s,n}^i = (v_{s,n})_{r=r_i}) , \quad (17)$$

dan volgt dus uit (13), (16) en (17):

$$\bar{F} = \frac{1}{\rho g} A_m x \rho^2 (v_s^i - v_n^i)^m \left[r_i^m \int_{r_o}^{r_i} \frac{dr}{r^m} \right] . \quad (18)$$

Hierin is voor x bij het integreren weer een constante gemiddelde waarde genomen (cf. appendix 3). Dit kunnen wij schrijven volgens (15):

$$A_m x = \frac{C_1 f}{\rho(v_s^i - v_n^i)^m} \Delta T^\dagger, \quad C_1 = \frac{(1-m) g r_o^{m-1}}{r_i [r_o^{m-1} - r_i^{m-1}]} \quad (19)$$

Voor $m = 3$ is $C_1 = 4,98 \cdot 10^3$ resp. $9,05 \cdot 10^3$. Hierin heeft het eerste getal betrekking op de lange spleet ($r_o = 1,024$ cm en $r_i = 0,590$ cm), het tweede op de korte spleet ($r_o = 1,005$ cm en $r_i = 0,871$ cm). Dit geldt ook voor de volgende constanten C_i .

Wij merken nog op, dat b.v. uit (19) volgt, dat $(v_s - v_n)$ geen functie is van de plaats in de doorsnede (de consequentie van (16) is dus, dat $\text{rot} v_s \neq 0$) en dat dus $(v_s^i - v_n^i) = (\bar{v}_s^i - \bar{v}_n^i)$. Daar ook de snelheden, die wij bepalen en verder ook gebruiken, steeds $\bar{v}_{s,n}^i$ zijn, definiëren wij gemakshalve:

$$v_{s,n} = \bar{v}_{s,n}^i \quad (20)$$

Wij zagen voorts (IB; 2b: (6) en (8)):

$$\bar{v}_n = -\frac{h^2}{12\eta_n} \text{grad} p,$$

hetgeen na integratie en omrekening geeft:

$$v_n = -C_2 \frac{\rho h^2}{\eta_n} \Delta p, \quad C_2 = \frac{g}{12r_i \ln r_o / r_i} = \left\{ \begin{array}{l} 2,51 \cdot 10^2 \\ 6,55 \cdot 10^2 \end{array} \right. \quad (21)$$

Voor het energietransport $W = 2\pi r_i h \bar{w}^i$ volgt uit (7) en (12):

$$W = 2\pi r_i h \rho x S^* T v_n = 2\pi r_i h \rho g f T v_n \quad (22)$$

en dus is

$$W = -C_3 \frac{h^3 \rho^2}{\eta_n} T f \Delta p, \quad C_3 = \frac{\pi g^2}{6 \ln r_o / r_i} = \left\{ \begin{array}{l} 0,914 \cdot 10^6 \\ 3,52 \cdot 10^6 \end{array} \right. \quad (23)$$

Tenslotte levert (9') na integratie op:

$$\Delta T = -\frac{C_4 \eta_n}{h^3 \rho^2 f^2 T} W - \frac{C_5 A x}{h^3 \rho^2 (1-x)^3 f^4 T^3} W^3, \quad (24)$$

$$C_4 = \frac{1}{C_3} \quad C_5 = \left\{ \begin{array}{l} 4,17 \cdot 10^{-15} \\ 0,713 \cdot 10^{-15} \end{array} \right.$$

2. Het verband tussen \bar{F} en \square°

Wij zagen (IIA; 3a) dat de metingen aan $H_i(t)$ en $\Delta T(t)$ (fig. 7a en b) ook dienen ter bepaling van de "overshoot". Alvorens verder te gaan, willen wij een paar opmerkingen over deze krommen maken.

α) Een gevolg van de constructie van het toestel is dat, wanneer het binnenniveau stijgt, het buitenniveau daalt. Noemen wij:

$$q = \frac{O_o}{O_o + O}, \quad (25)$$

waarin O_o het oppervlak van B_o is ter hoogte H_o en O het oppervlak van B_i ter hoogte H_i , dan is dus

$$d\Delta H_i = \frac{1}{q} dH_i. \quad (26)$$

Bij de temperatuur hebben wij een dergelijk verschijnsel niet: wij houden T_o (de temperatuur in B_o) steeds constant. De gevolgen, wanneer dit in de praktijk niet voldoende gerealiseerd kan zijn, zijn aangegeven in appendix 4.

β) De kromme $H_i(t)$ is bepaald op een constante na. Wij definiëren nu:

$$H(t) = H_i(t) + C, \quad (27)$$

waarbij C zo wordt gekozen, dat $H(t) = 0$ als $H_i = H_o$, dus als buiten- en binnenniveau gelijk staan. Daardoor is dus ook $\Delta H = H/q$. Bij de temperatuur ligt het nulpunt vast! Wij werken dus verder met de krommen $H(t)$ en $\Delta T(t)$.

In figuur 7a en b hebben wij dus de volgende perioden:

$t \leq t_1$: stationnaire rusttoestand (d.i. $\Delta T \uparrow = 0$)

$t_1 \leq t \leq t_o$: aan B_i wordt de energie I toegevoerd, waardoor H en ΔT toenemen.

$t_o \leq t \leq t_e$: het systeem, weer aan zichzelf overgelaten, zoekt wederom een evenwichtspositie op, die wij ons bereikt denken bij $t = t_e$ en waarop wij nog nader zullen terugkomen.

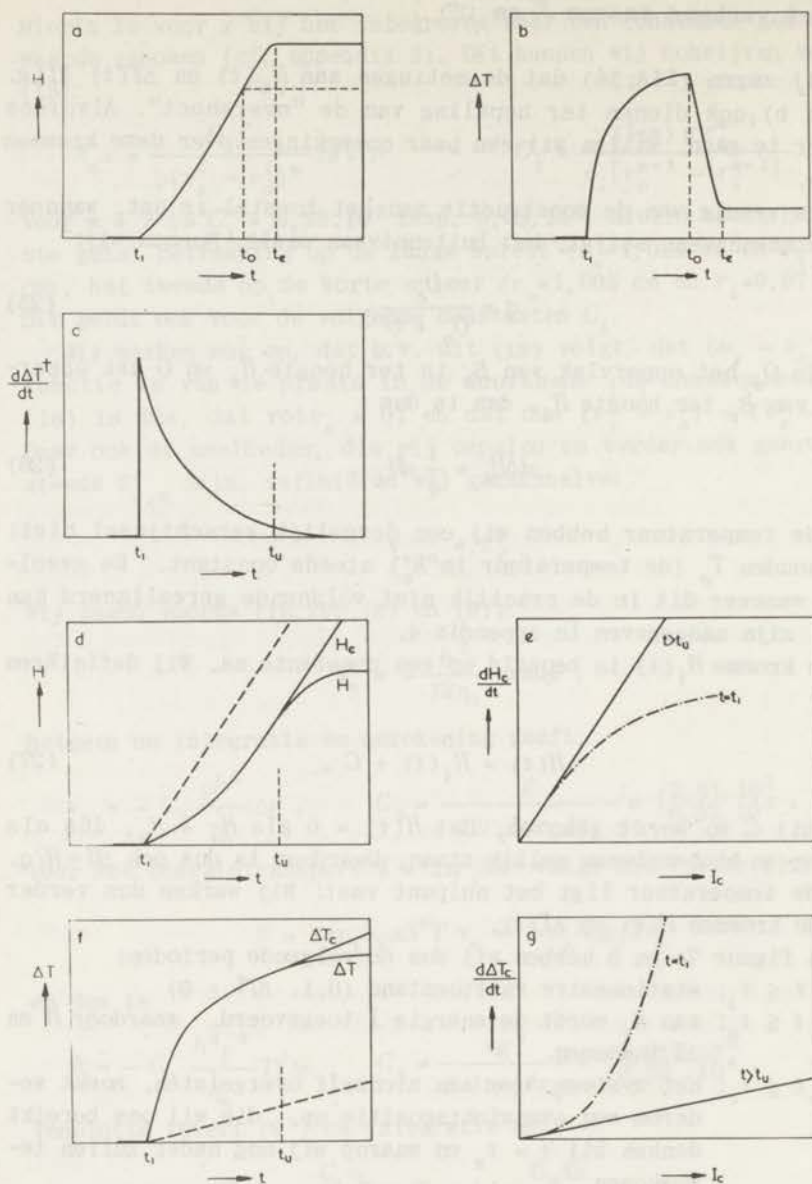
$t_e \leq t$: stationnaire rusttoestand met $\Delta T \uparrow = 0$.

Wij definiëren bij deze metingen:

$$\square(t) = \int_t^{t_e} \frac{dH}{dt} dt \quad \text{voor alle } t \quad (28)$$

$$\square^\circ(t) = \square(t) \quad \text{voor } t_o \leq t \leq t_e$$

Deze $\square^\circ(t)$ hangt samen met \bar{F} , dus met $\Delta T \uparrow$, en daardoor zal dus



Figuur 7

Schematische voorstelling van verschillende grafieken.

ook door de combinatie van $\square^{\circ}(t)$ en de bijbehorende

$$\frac{d\square^{\circ}(t)}{dt} = -\frac{dH(t)}{dt},$$

die de snelheden $v_{s,n}$ bepaalt, het verband tussen \bar{F} en $v_{s,n}$ vast-

gelegd zijn voor verschillende t . Wij stellen ons voor allereerst de relatie $\rho^{\circ}(\Delta T^{\dagger})$ te bepalen.

Hiertoe gaan wij uit van de energiebalans voor het binnen-volume, dat immers thermisch geïsoleerd is. Deze balans heeft de volgende vorm:

$$I + I_p + W - I_q = [V\rho c + V_d\rho_d c_d + e \frac{dV_d\rho_d}{d\Delta T}] \frac{d\Delta T}{dt} + \rho Q^{\circ} \frac{dV}{dt} \quad (29)$$

Hierin is I : de elektrisch toegevoerde energie,

I_p : de parasitair toegevoerde energie (w.o. straling),

W : het energietransport, zoals gedefiniëerd in (22), welke dus negatief is,

I_q : het parasitaire warmtelek (w.o. de geleiding door het glas),

V_d, ρ_d, c_d : het ingenomen volume, de dichtheid en de soortelijke warmte (per gram) van de boven de vloeistof aanwezige damp,

e : de verdampingswarmte (per gram) en

Q° : het mechanocalorisch effect (per gram), volgens

$$Q^{\circ} = \lim_{h \rightarrow 0} (-Q_g^*),$$

In (29) hebben wij dus de totale hoeveelheid superfluidum, die per seconde (naar binnen) stroomt op de gebruikelijke wijze gesplitst in de hoeveelheid, die nodig is om het (weg)stromende normale fluidum te vervangen (met $\bar{j}_m = 0$) waarvan het warmte-effect in W opgenomen is (cf. IB; 2b) en de resulterende hoeveelheid, die door dV/dt bepaald is en die het mechanocalorisch effect veroorzaakt.

Met

$$\frac{dV_d\rho_d}{d\Delta T} \frac{d\Delta T}{dt} = V_d \frac{d\rho_d}{d\Delta T} \frac{d\Delta T}{dt} - \rho_d \frac{dV}{dt}, \quad (30)$$

is (29) te schrijven:

$$[V\rho c + V_d\rho_d c_d + eV_d \frac{d\rho_d}{d\Delta T}] \frac{d\Delta T}{dt} = -\rho(Q^{\circ} - \frac{\rho_d e}{\rho}) \frac{dV}{dt} + I + I_p + W - I_q \quad (31)$$

Wij voeren nu de volgende notaties in:

$$V\rho c + V_d\rho_d c_d + eV_d \frac{d\rho_d}{d\Delta T} = \Lambda(V, T) \quad (32)$$

$$Q^{\circ} - \frac{\rho_d}{\rho} e = Q^{\dagger} \quad (33)$$

$$\frac{\Delta H}{f^{\dagger}} = \Delta T_E, \quad (34)$$

indien f^{\dagger} het fonteineffect is verminderd met het verschil in dampdruk in cm He/graad.

Hierover merken wij het volgende op:

$$\Delta(V, T) = V\rho c (1 + \zeta_1) ; \quad \zeta_1 < 8\%$$

$$Q^+ = Q^0 (1 - \zeta_2) ; \quad \zeta_2 < 8\%$$

$$\Delta T_E = \Delta T - \frac{f}{f'} \Delta T^+ \quad (35)$$

Differentiatie naar t van ΔT_E geeft volgens (34), (35), (25) en (26):

$$\frac{d\Delta T_E}{dt} = \frac{1}{qf'} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{Oqf'} \frac{dV}{dt} \quad (36)$$

Substitutie van (32), (33), (35) en (36) in (31) geeft:

$$\frac{f}{f'} \frac{d\Delta T^+}{dt} = - \frac{dV}{dt} \frac{\rho Q^+}{\Delta(V, T)} (1 + \varepsilon) + \frac{I + I_p + W - I_q}{\Delta(V, T)} \quad (37)$$

waarin
$$\varepsilon = \frac{\Delta(V, T)}{Oqf' \rho Q^+} = \frac{Vc}{Oqf' Q^0} \ll 1 \quad (38)$$

Dit geeft bij integratie van $t \rightarrow t_e$:

$$\begin{aligned} \frac{f}{f'} \Delta T^+ \Big|_t^{t_e} = & - \square(t) \frac{O\rho Q^+}{\Delta(V, T)} (1 + \varepsilon) + \int_t^{t_e} \frac{I}{\Delta(V, T)} dt + \\ & + \int_t^{t_e} \frac{I_p}{\Delta(V, T)} dt + \int_t^{t_e} \frac{W - I_q}{\Delta(V, T)} dt \quad (39) \end{aligned}$$

Deze laatste twee integralen zijn veelal klein t.o.v. de andere termen (en ook gedeeltelijk te berekenen m.b.v. (23)), zodat wij schrijven:

$$\begin{aligned} \delta_1(t) = \int_t^{t_e} \frac{I_p}{\Delta(V, T)} dt ; \quad \delta_2(t) = \int_t^{t_e} \frac{W - I_q}{\Delta(V, T)} dt ; \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = \delta(t) \quad (40) \end{aligned}$$

Daar $\Delta T^+(t_e) = 0$, wordt (39):

$$\square(t) = \frac{f' q \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left[\frac{f}{f'} \Delta T^+(t) + \int_t^{t_e} \frac{I}{\Delta(V, T)} dt + \delta(t) \right] \quad (41)$$

Volgens de definitie (28) geldt dus:

$$\square^0(t) = \frac{f' q \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left[\frac{f}{f'} \Delta T^+(t) + \delta(t) \right] \quad (42)$$

Dit is de gezochte betrekking. Op deze wijze is \bar{F} ($= f\Delta T^+$) direct te bepalen uit de kromme van figuur 7a (en dus niet als een verschil van $\Delta\rho$ en $f\Delta T$), hetgeen in vele gevallen van kleine waarden

een zeer belangrijke verhoging van de nauwkeurigheid impliceert, waardoor ook bij deze waarden de wrijvingsverschijnselen onderzocht kunnen worden.

Het is in dit verband jammer dat $\varepsilon \ll 1$, want daardoor geeft de onnauwkeurigheid in de bepaling van \square^0 (ca. 5μ) uiteindelijk in $f\Delta T^\dagger$ een onnauwkeurigheid van 0,01 tot 0,2 cm. Dit is dus tevens de benedengrens van de meetbare $f\Delta T^\dagger$ -, dus \bar{F} -waarden.

3. De berekening van de functies $H(t)$ en $\Delta T(t)$

Het verloop van $H(t)$ en ook $\Delta T(t)$ is (bij gegeven toestel en temperatuur) bijna geheel bepaald door de uitwendige parameter I (en de tijden t_1 en t_0), die de diverse krachten, direct en indirect, veroorzaakt en het stromingsmechanisme in werking zet. Hebben wij ons dus een beeld gevormd van dit mechanisme, dan kunnen wij derhalve $H(t)$ en $\Delta T(t)$ ook berekenen, waarbij dan I als parameter op zal treden. Dit nu stellen wij ons voor te doen.

Uit (28) en (41) volgt:

$$H(t) = H(t_e) - \square(t) = H(t_e) - \frac{f' q_e}{1+\varepsilon} \left[\frac{f}{f'} \Delta T^\dagger(t) + \int_t^{t_e} \frac{I}{\Lambda(V, T)} dt + \delta(t) \right] \quad (43)$$

en uit (28), (34) en (35):

$$\Delta T(t) = \Delta T_E(t) + \frac{f}{f'} \Delta T^\dagger(t) = \Delta T(t_e) - \frac{\square(t)}{qf'} + \frac{f}{f'} \Delta T^\dagger(t) \quad (44)$$

Dit wordt na substitutie van (41):

$$\Delta T(t) = \Delta T(t_e) + \frac{f}{f'} \frac{\Delta T^\dagger}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[\int_t^{t_e} \frac{I}{\Lambda(V, T)} dt + \delta(t) \right] \quad (45)$$

Denken wij ons $\delta_2(t)$ als een correctie op $H(t)$ resp. $\Delta T(t)$, welke deze vervormt tot $H_c(t)$ resp. $\Delta T_c(t)$, dan is dus het verloop van deze grootheden als functie van t bepaald indien slechts $\Delta T^\dagger(t)$ bekend is, daar I en I_p constant zijn. Overigens zullen deze $H_c(t)$ en $\Delta T_c(t)$ van $H(t)$ en $\Delta T(t)$ dus slechts belangrijk verschillen bij grote h en grote $(t_e - t)$.

Teneinde $\Delta T^\dagger(t)$ te bepalen gaan wij uit van de bewegingsvergelijkingen en de energiebalans.

De bewegingsvergelijking van het superfluidum (3') is in wezen niet anders dan (10) hetgeen dus (19) opleverde. Definiëren wij de relatieve snelheid

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n, \quad (46)$$

dan is dus (19) te schrijven:

$$A: \quad \boxed{\Delta T^\dagger = \beta v^m}; \quad \beta = \frac{A_m x \rho}{C_1 f} \quad (47)$$

De bewegingsvergelijking van het normale fluidum (4') is ook bepaald door het geven van (3') en de som van (3') en (4'). Verg. (3') hebben wij reeds in de vorm (47), [(3') + (4')] leidde via (6) tot (21), die wij kunnen schrijven:

$$B: \quad \boxed{\Delta p = C_2^1 v_n}; \quad C_2^1 = \frac{-\eta_n}{C_2 h^2 \rho} \quad (48)$$

De energiebalans in de vorm (37) kunnen wij nog verder omvormen m. b. v.:

$$\rho \frac{dV}{dt} = (\rho_s v_s + \rho_n v_n) 2\pi r_i h \quad (49)$$

en van (22), waarin wij substitueren (cf. IB; 2b: (5)):

$$TxS^* = Q^o. \quad (50)$$

Wij vinden dan in de benadering $1 + \varepsilon = 1$ en $Q^+ = Q^o$:

$$\frac{f}{f'} \frac{d\Delta T^\dagger}{dt} = - (1-x) \frac{\rho Q^o}{\Lambda(V, T)} 2\pi r_i h (v_s - v_n) + \frac{I + I_p - I_q}{\Lambda(V, T)} \quad (51)$$

hetgeen niet anders is dan

$$C: \quad \boxed{\frac{d\Delta T^\dagger}{dt} = -Bv + C} \quad (52)$$

waarin

$$B = (1-x) \frac{\rho Q^o}{\Lambda(V, T)} \frac{f'}{f} 2\pi r_i h$$

$$C = \frac{I + I_p - I_q}{\Lambda(V, T)} \frac{f'}{f}.$$

De vergelijkingen A, B en C ((47), (48) en (52)) bepalen op overzichtelijke en compacte wijze de stroming van helium II.

Ter bepaling van $\Delta T^\dagger(t)$ combineren wij (47) en (52) tot

$$\frac{\beta dv^m}{-Bv + C} = dt. \quad (53)$$

Hieruit is in beginsel $v(t)$ op te lossen en derhalve $\Delta T^\dagger(t)$.

3a. Voor $C = 0$, hetgeen gerealiseerd is voor $t_o \leq t \leq t_e$ ($I = 0$), mits $I_p - I_q = 0$, vinden wij:

$$\Delta T^\dagger = \gamma (t_e - t)^{\frac{m}{m-1}}, \quad m > 1 \quad (54)$$

$$\gamma = \beta^{\frac{-1}{m-1}} \left(\frac{m-1}{m} B\right)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Gesubstitueerd in (43) en (45) geeft dit:

$$H_c(t) = H(t_e) - \gamma_1(t_e - t)^{\frac{m}{m-1}}, \quad \gamma_1 = fq\epsilon\gamma \quad (55)$$

en
$$\Delta T_c(t) = \Delta T(t_e) + \gamma_2(t_e - t)^{\frac{m}{m-1}}, \quad \gamma_2 = \frac{f}{f_T} \gamma \quad (56)$$

Hierbij is dus ϵ verwaarloosd t.o.v. 1.

Het eerste, dat in (54) - (56) opvalt, is het optreden van de *eindige* tijd ($t \leq t_e$), waarbinnen het systeem zijn stationnaire rusttoestand ($\Delta T^\dagger = 0$) opzoekt. Dit is dus essentieel anders dan in alle gevallen, waarin de teruggedrijvende kracht evenredig is met de uitwijking, d.i. $m = 1$, waar volgens een exponentieel verloop de evenwichtspositie opgezocht wordt. Een gevolg is ook, dat de kromme $H(t)$ een scherpe kromming in $t = t_e$ vertoont, al blijft de afgeleide continu. Ook rechtvaardigt deze eindige tijd de definitie van t_e , in tegenstelling tot de situatie bij een exponentieel verloop.

Ook is $\Delta T^\dagger(t)$ weinig m -afhankelijk, daar b.v. voor $3 < m < \infty$ voor de exponent geldt $1,0 < m/m-1 < 1,5$, waardoor dit a priori niet een methode lijkt om m te bepalen. Anderzijds echter zijn $H(t)$ en $\Delta T(t)$ direct gemeten grootheden, in tegenstelling tot v (die in de andere formules nodig is), die via dH/dt bepaald is.

3b. Voor $C \neq 0$, d.i. $t_1 \leq t \leq t_0$ (ook $t \geq t_0$ indien $I_p - I_q \neq 0$), is de oplossing minder eenvoudig. Met $m = 3$ is het resultaat:

$$\frac{-3\beta}{B} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{C}{B}v + \frac{C^2}{B^2} \ln \left(1 - \frac{B}{C}v \right) \right] = t - t_1, \quad (57)$$

waarvoor ook te schrijven is:

$$\frac{3\beta v^3}{C} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \left(\frac{Bv}{C} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{Bv}{C} \right)^2 + \dots \right] = t - t_1. \quad (57a)$$

Dit geeft in principe weer $v(t)$ en dus $\Delta T^\dagger(t)$, en daarmee is het gestelde probleem opgelost.

Wij kunnen ons van deze periode het volgende beeld maken. Allereerst geeft (57) voor grote t :

$$\frac{B}{C}v \approx 1 - e^{-t/\tau} \quad \text{met} \quad \tau = \frac{3\beta C^2}{B^3}, \quad (58)$$

d.w.z. $(B/C)v$ nadert exponentieel de waarde 1 en volgens (47) en (52) nadert ook ΔT^\dagger op dezelfde wijze een constante waarde (fig. 7c). Deze limiet $v = C/B$ wordt dus sneller bereikt voor grote h en kleine I , hetgeen ook plausibel is.

Voorts geven (43) en (45) voor de afgeleiden:

$$\frac{dH_c}{dt} = \frac{f' q \epsilon}{1 + \epsilon} \left[-\frac{f}{f'} \frac{d\Delta T^\dagger}{dt} + \frac{I_c}{\Lambda(V, T)} \right] \quad (59)$$

$$\frac{d\Delta T_c}{dt} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{f}{f'} \frac{d\Delta T^\dagger}{dt} + \frac{I_c}{\Lambda(V, T)} \right], \quad I_c = I + I_p. \quad (60)$$

Ware nu $\Delta T^\dagger \equiv 0$, dan zouden dus H_c en ΔT_c lineair met t toenemen, terwijl de helling evenredig is met I_c (fig. 7d en f: stippellijn). Nu $\Delta T^\dagger \neq 0$ en $[d\Delta T^\dagger/dt]$ volgens (52) en (57) blijkbaar verloopt als weergegeven in fig. 7c, zal dus aanvankelijk $H_c(t)$ minder snel toenemen dan I_c , $\Delta T_c(t)$ juist veel sneller. Voor "grote" t (wij definiëren $t > t_u$ met $t_u - t_1 = 5 \tau$) zullen echter H_c en ΔT_c verlopen, evenredig met dezelfde I_c als in het geval $\Delta T^\dagger \equiv 0$, d.w.z. evenwijdig aan de stippellijnen. De grafieken van $[dH_c/dt]_{t > t_u}$ en $[d\Delta T_c/dt]_{t > t_u}$, als functie van I_c , zullen dan ook rechte lijnen zijn, waaruit de invloed van de existentie van ΔT^\dagger verdwenen is (fig. 7e en g).

Er zij tenslotte nog het volgende opgemerkt.

a) Wordt er steeds doorgestookt dan zal tenslotte een stationnaire toestand bereikt worden. In dat geval zal dus H constant blijven (in tegenstelling tot H_c , waar de "correctie" dus nu groot is geworden!), waardoor dus H als functie van t een "S-kromme" wordt zoals aangegeven is in fig. 7d. Volgens (58) zal dus juist bij de constante H gelden dat $v = C/B$. In dit geval kunnen wij echter v ook direct berekenen. Dan is volgens (22) en (50): $v = (\rho/\rho_s)v_n = (I + I_p - I_q)/(\rho_s 2\pi r_i h Q^0)$ en dit is niets anders dan $v = C/B$.

β) Indien in helium II een kritische snelheid zou bestaan, d.w.z. indien $\Delta T^\dagger \equiv 0$ voor $v_s \leq v_{s, crit.}$, dan zou volgens (60) bij de bepaling van $[d\Delta T_c/dt]$ in $t = t_1$ (rechterafgeleide) als functie van I_c (fig. 7g) een knik gevonden moeten worden bij een bepaalde waarde van I_c . Teneinde eveneens een dergelijk effect in de $[dH_c/dt]$ -kromme te vinden, zouden wij steeds de gemiddelde waarde van deze grootheid over b.v. de eerste tien seconden moeten bepalen. Immers uit (59) en (52) volgt, dat $[dH_c/dt]$ in $t = t_1$ continu is (voor $F \neq 0$). Bovendien is de rechterafgeleide in $t = t_1$ (die dus nul is) experimenteel niet te bepalen. Derhalve bedoelen wij met $[dH_c/dt]_{(t=t_1)}$ steeds $[\delta H_c/\delta t]_{(t=t_1)}$. Dit is dus ook het geval in fig. 7e. In IIIB komen wij hierop nog terug.

3c. Ook het verloop voor $t \geq t_e$ vinden wij uit (43) en (45). In dit geval is dus $\Delta T^\dagger = I = 0$ en de enige tijdafankelijkheid van $H(t)$ en $\Delta T(t)$ wordt dus veroorzaakt door $\delta(t)$:

$$H(t) = H(t_e) - \frac{f' q \epsilon}{1 + \epsilon} \delta(t), \quad (61)$$

$$\Delta T(t) = \Delta T(t_e) - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \delta(t); \quad (62)$$

Volgens (40), (23), (12), (50) en (35) is te schrijven:

$$\delta(t) = \int_t^{t_e} e^{-\theta(t-t_e)} \left[\frac{I_p - I_q}{\Delta(V, T)} - \frac{C_3 h^3 \rho^2 Q^0 f}{g \eta_n \Delta(V, T) f'} \Delta H \right] dt, \quad (63)$$

hetgeen verder getransformeerd met (61) en (62) oplevert:

$$H(t) = H_p + [H(t_e) - H_p] e^{-\theta(t-t_e)}, \quad (64)$$

$$\Delta T(t) = \Delta T_p + [\Delta T(t_e) - \Delta T_p] e^{-\theta(t-t_e)}. \quad (65)$$

Hierin is:

$$\theta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{C_3 h^3 \rho^2 f Q^0}{g \eta_n \Delta(V, T)}$$

H_p : de parasitaire niveauhoogte ten gevolge van ($I_p - I_q$) en daarmee gecorreleerd volgens:

$$H_p = \frac{I_p - I_q}{h^3} \frac{g \eta_n}{C_3 \rho^2 f Q^0} f' q$$

ΔT_p : het parasitaire temperatuurverschil volgens:

$$\Delta T_p = \frac{I_p - I_q}{h^3} \frac{g \eta_n}{C_3 \rho^2 f Q^0}$$

Dit verloop moest ook verwacht worden, daar in dit traject de stroming geheel door de warmtegeleiding, dus de stroming van het normale fluidum, wordt bepaald.

Voorts leveren (64) en (65) in beginsel de mogelijkheid op, bij bekende η_n , de waarde van h te bepalen (cf. IIC; 4).

IIC. BIJKOMENDE GROOTHEDEN

1. Gegevens over f_0

De waarden van $f_0 \equiv xS^*/g$ zijn de waarden van het statische fonteineffect, dus de limietwaarde van het experimentele fonteineffect voor $h=0$ of $\Delta T=0$. Hiervan zijn twee series waarnemingen beschikbaar, zoals wij zagen (IC;1) afkomstig van MELLINK^{47,3} en KAPITZA^{41,2}, die echter niet overeenstemmen boven 1,7°K (fig. 5). Veronderstellen wij, dat de vergelijking (2) van H. LONDON in dit gebied een voldoende benadering oplevert, d.w.z. $xS^* = S$, dan hebben wij nog een serie waarnemingen ter onzer beschikking nl. de metingen van KRAMERS, WASSCHER en GORTER^{52,3}, welke de waarden van S opleveren. Deze zijn beneden 1,7°K in overeenstemming met de resultaten van MELLINK en KAPITZA, daarboven liggen KRAMERS' waarden tussen deze laatsten in. Hierom en in verband met de hogere nauwkeurigheid, hebben wij ons gebaseerd op deze S -waarden en daarmee verder gerekend. Ook de indirecte bepaling van f_0 door VAN DEN MEYDENBERG, TACONIS, BEENAKKER en WANSINK^{54,3} is hiermee in overeenstemming.

Zoals (10) - (24) laten zien, is de keuze van f_0 zeer essentieel voor de bepaling van de numerieke waarden van de wrijvingskracht, o.m. daar $\bar{F} = f\Delta T - \Delta p$. In dit verband zij echter opgemerkt, dat bij $T > 1,7^\circ\text{K}$ veelal $f\Delta T \gg \Delta p$, waardoor de onzekerheid in \bar{F} niet veel groter behoeft te zijn dan de onzekerheid in f_0 . Bij kleine \bar{F} kunnen wij echter alleen de overshootmethode gebruiken, waar deze moeilijkheid niet optreedt, zoals reeds werd opgemerkt.

2. Gegevens over x

De eenvoudigste methode ter bepaling van $x(T)$ is gebruik te maken van de door TISZA^{47,5} gegeven formule $x = S/S_\Delta$. Deze formule is echter afgeleid onder zeer beperkende veronderstellingen, waaronder die van de afwezigheid van een normale soortelijke warmte het minst bevredigt.

Ook is het mogelijk $x(T)$ te bepalen via de metingen van de voortplantingssnelheid van "second sound", zoals als eerste gedaan is door PESHKOV^{46,1}. Het bezwaar hiertegen is, dat ook hier dan x berekend moet worden via een formule waar ook weer bepaalde veronderstellingen aan ten grondslag liggen.

De mooiste wijze is de directe bepaling, zoals door ANDRONIKASHVILLI^{48,6} is uitgevoerd, waarin x bepaald wordt uit het

traagheidsmoment van een slingerend systeem van dicht opeenliggende schijven, dat alleen het normale fluidum mee doet slingeren. De amplituden moeten hierin zeer gering zijn i.v.m. het bestaan van de wrijving met het superfluidum. Practisch is echter beneden ongeveer $1,7^{\circ}\text{K}$ de bijdrage van het normale fluidum tot de totale massa te gering om nog een redelijke nauwkeurigheid voor x te geven. Daar echter de beide eerst genoemde methoden boven $1,7^{\circ}\text{K}$ in overeenstemming zijn met de directe bepaling van ANDRONIKASHVILLI, hebben wij bij de bewerking van onze experimenten gewerkt met de eerste methode, nl. de formule van TISZA. Voor lage T achten wij een grote onzekerheid in x echter geenszins uitgesloten. Wij kunnen echter het volgende opmerken.

α) In zeer vele gevallen (waaronder (10) - (24)) komt x voor in de combinatie xS^* , welke onafhankelijk van x direct bepaald is (cf. 1).

β) De grootte van de wrijvingskracht wordt opgegeven in Ax en de waarde van x is dus niet gebruikt.

γ) De waarde van $(1-x) = \rho_s/\rho$ blijft nauwkeurig, omdat juist bij lage T deze waarde weinig van x afhankelijk is. Dit is o.m. van belang bij de bepaling van v_s uit de gemeten grootte dV/dt (cf. IIA; 2c).

3. De bepaling van η_n/h^3

Deze berust geheel op (23) en (24). Bepalen wij het drukverschil en (of) het temperatuurverschil als functie van de stationaire warmtestroom, dan is de waarde van η_n/h^3 te berekenen uit de helling van de rechte en (of) de helling in de oorsprong aan de kromme. In dit verband zij nog verwezen naar IIA; 3b. Kennen wij de waarde van h (zie 4) dan volgt dus de waarde van η_n en ook omgekeerd. Bovendien geeft η_n/h^3 het noodzakelijke verband tussen Δp en v_n , hetgeen nodig is om $v_n(t)$ te bepalen.

4. De spleetwijdte h

De bepaling van de spleetwijdte h behoort tot de belangrijkste en moeilijkste onderdelen van het onderzoek, vooral omdat de numerieke waarden van de resultaten volgens h^3 van h afhangen. Daarom is het vooral ook van belang eveneens over de homogeniteit van h gegevens te verkrijgen.

4a. De bepaling van h

α) Wanneer de spleetwijdte ingesteld wordt m.b.v. bandjes of draadjes, kan de dikte hiervan gemeten worden (optisch of mecha-

nisch) en ook de eventuele invloed hierop van een druk, analoog aan die van de veertjes.

β) Is het toestel gemonteerd en geheel geëvacueerd, dan kan de wijdte berekend worden door de tijd te bepalen, waarin een bekende hoeveelheid gas (c.q. heliumgas) door de spleet van buiten naar binnen stroomt onder een gemeten drukverschil.

Dit wordt als volgt uitgevoerd. Een bolletje, voorzien van een manometer en een kraan, wordt gevuld met heliumgas en verbonden met het toestel. Wanneer nu het toestel en de toevoerleiding tot aan de kraan leeggepompt zijn (wat soms enige dagen vergde), wordt de kraan van het bolletje geopend. Hierdoor vult zich vrij snel (10 - 30 sec) de ruimte B_o en wij zien op de manometer een snelle daling van de druk. Hierna zal dan onder invloed van het resterende drukverschil het gas in de ruimte B_i stromen door de spleet. Door de afnemende druk op de manometer te volgen, is de wijdte h te berekenen. In ons geval is deze methode geschikt voor alle $h < 5 \mu$. Voor $h > 5 \mu$ is de tijd van stromen te kort om een redelijk nauwkeurige bepaling te doen.

Nu is de vrije weglengte van heliumgas $0,2 \mu$ bij normale druk en temperatuur. Willen wij met een Poiseuille stroming werken, dan zal dus na het begindrukverval de druk in het bolletje van de orde van één atmosfeer moeten zijn, hetgeen in ons geval impliceert een druk van vier atmosfeer vóór het openen van de kraan. Dit heeft experimentele bezwaren. Voor een Knudsen stroming daarentegen zijn deze getallen ca. 50 maal lager, hetgeen veel eenvoudiger is te realiseren. Nu is het bezwaar tegen Knudsen stroming, dat deze evenredig met h^2 verloopt en wanneer de spleet niet homogeen is, een effectieve h : $h_{eff}^{(2)} \equiv \sqrt{h^2}$ gemeten wordt, die anders is dan $h_{eff}^{(3)} \equiv \sqrt[3]{h^3}$, die de wet van Poiseuille zou geven, en die wij eigenlijk in onze experimenten nodig hebben. Daar staat als voordeel tegenover, dat wanneer via een andere weg een $h_{eff}^{(3)}$ bepaald kan worden, de verhouding $\nu \equiv h_{eff}^{(2)}/h_{eff}^{(3)}$ een maat is voor de homogeniteit van de spleet (cf. b).

De formule, die wij voor Knudsen stroming hebben afgeleid, is gebaseerd op de elementaire beginselen van deze stroming en wij schatten op grond van de artikelen van KNUDSEN en VON SMOLUCHOWSKI 9, 1; 10, 1; 11, 1 een onzekerheid in h^2 , kleiner dan 10%. Voor $p_{i_o}(t)$, het drukverschil tussen B_i en B_o , vinden wij:

$$p_{i_o} = p_{i_o}^o e^{-\alpha h^2 t}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\ln r_o/r_i} \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} \frac{V_i + V_o}{V_i V_o}$$

Hierin is V_{i_o} het volume van B_i resp. B_o . Teneinde de invloed van de temperatuur op de bepaling na te gaan, hebben wij deze ook een enkele maal uitgevoerd bij $T=77^\circ\text{K}$, maar

wij vonden in die gevallen geheel hetzelfde resultaat als bij kamertemperatuur.

γ) Indien de waarde van de viscositeit η_n bekend zou zijn, is h te bepalen uit de grootte η_n/h^3 , die onder 3 gevonden werd. Meestal diende echter de bepaling van η_n/h^3 om, bij bekende h , juist η_n te berekenen. Ook uit het verloop van $H(t)$ voor $t > t_e$ (IIB; 3c) is bij bekende η_n de waarde van h te vinden. Dit werd een enkele maal gebruikt bij wijde spleten.

δ) In beginsel zou ook h bepaald kunnen worden uit het stromen van helium I boven het Λ -punt. Daar dit een zeer bewerkelijke methode is en ook de noodzaak hiertoe niet groot was, werd deze nimmer gebruikt.

4b. De uniformiteit van h

α) Allereerst is deze afhankelijk van de paralleliteit van de glasplaten. Dit is na te gaan door deze oppervlakken op elkaar te plaatsen en de (eventuele) interferentiefiguren te bestuderen. Ook is de invloed op dit patroon van enige druk na te gaan. Bij de korte spleet bestond de interferentiefiguur uit één ring langs de buitenrand. De spleet was dus een weinig wigvormig ($0,3 \mu$ op $1,3 \text{ mm}$). Bij de lange spleet was deze figuur gecompliceerder en wees dan ook op een minder fraaie paralleliteit. Een bezwaar is dat wij zo dus niet weten of er bij lage temperatuur spanningen in het glas optreden die van belang zijn. Wel hebben wij geconstateerd dat na tientallen heliumdagen het patroon bij kamertemperatuur ongewijzigd was gebleven.

β) Bij ingestelde spleet is de uniformiteit na te gaan indien wij meer dan één der methoden onder a ter bepaling van h kunnen gebruiken. Bij de methode α_x moet nog een correctie aangebracht worden voor de afwijkingen onder β_x beschreven. Een enkele maal is het ook mogelijk uit reeds bestaande resultaten, door vergelijking en interpolatie, een indruk van de homogeniteit te verkrijgen. Ook moet algemeen rekening gehouden worden met de mogelijkheid dat een gedeelte van de spleet verstopt zou zitten, b.v. als gevolg van verontreinigingen in het helium. Veel hinder hebben wij hier niet van ondervonden.

Samenvattende kunnen wij opmerken, dat aan de eis van de uniformiteit in het geval van de korte spleet steeds voldaan was met inachtneming van hetgeen onder α) is genoemd. Bij de lange spleet kunnen wij ons niet zo positief uitlaten.

H o o f d s t u k I I I

R E S U L T A T E N

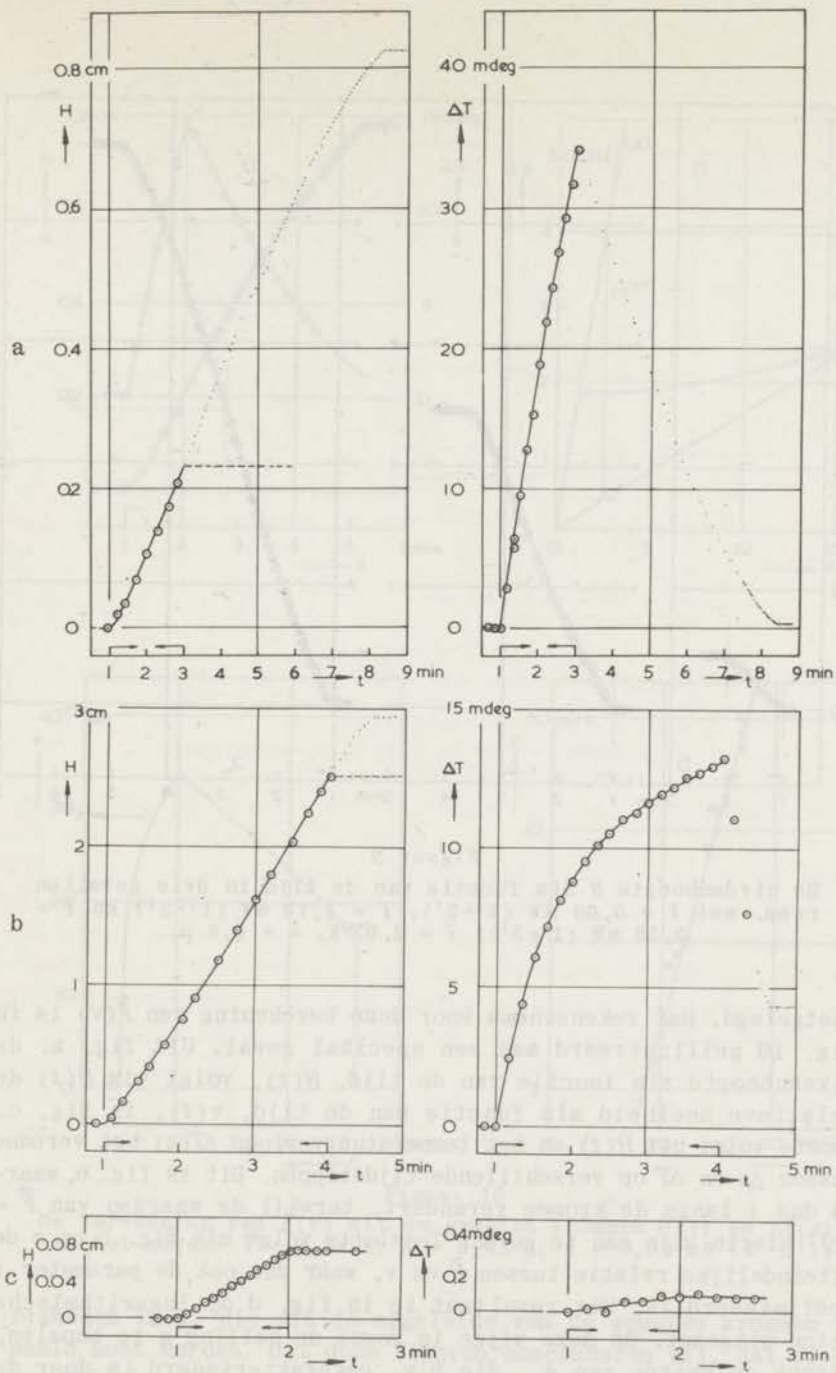
Dit hoofdstuk is in drie delen onderverdeeld. In IIIA hebben wij de wrijvingskracht $\bar{F}(v)$ bepaald uit de metingen door Δp , ΔT en v te berekenen. Dit beperkt zich dan tot waarden van $\bar{F} > 2$ à 8 cm He ($v \sim 20$ cm/sec). In IIIB worden de resultaten met de "overshootmethode" weergegeven. Hierbij is dan vooral het gedrag in de buurt van een eventuele kritische snelheid van belang. Vele resultaten van het formalisme IIB; 2 en 3 zullen hierbij dan ook gebruikt worden. Voor de hogere snelheden blijken de resultaten verder identiek te zijn met die onder IIIA. Ook de toetsing van verdere formules uit IIB; 2 en 3 zijn in deze sectie onder gebracht. In IIIC zijn de metingen over de warmtegeleiding te vinden. Ook hieruit kunnen conclusies getrokken worden betreffende de wrijvingskracht in het gehele snelheidsgebied. Gegevens over de stroming van het normale fluidum (en de viscositeit η_n) zijn eveneens uit de warmtegeleiding te verkrijgen en in dit gedeelte vermeld.

III A. DE BEPALING VAN $\bar{F}(v)$ MET DE RETARDATIEMETHODE

In fig. 8 zijn drie karakteristieke voorbeelden gegeven van gemeten krommen $H(t)$ en $\Delta T(t)$ (analoog aan fig. 7a en b) bij verschillende spleetwijdten en temperaturen. Fig. a geeft een situatie weer, waarin de "overshoot" veel groter is dan het afgelegde traject tijdens de stooktijd en langer dan vijf minuten duurt; in fig. c is een voorbeeld gegeven van $\alpha^\circ \approx 0$, terwijl onder b een tussengeval is afgebeeld. Er zij nog opgemerkt, dat de tijd, waarin bij verschillende temperaturen eenzelfde "overshoot" wordt "afgelegd", ruwweg evenredig is met $1/(1-x)$; en verder, dat $v_s \gg v_n$, waardoor $(v_s - v_n) = v_s$, waarop wij nog terugkomen.

Drie $H(t)$ -krommen bij één temperatuur en spleetwijdte voor drie steeds toenemende waarden van I zijn afgebeeld in fig. 9.

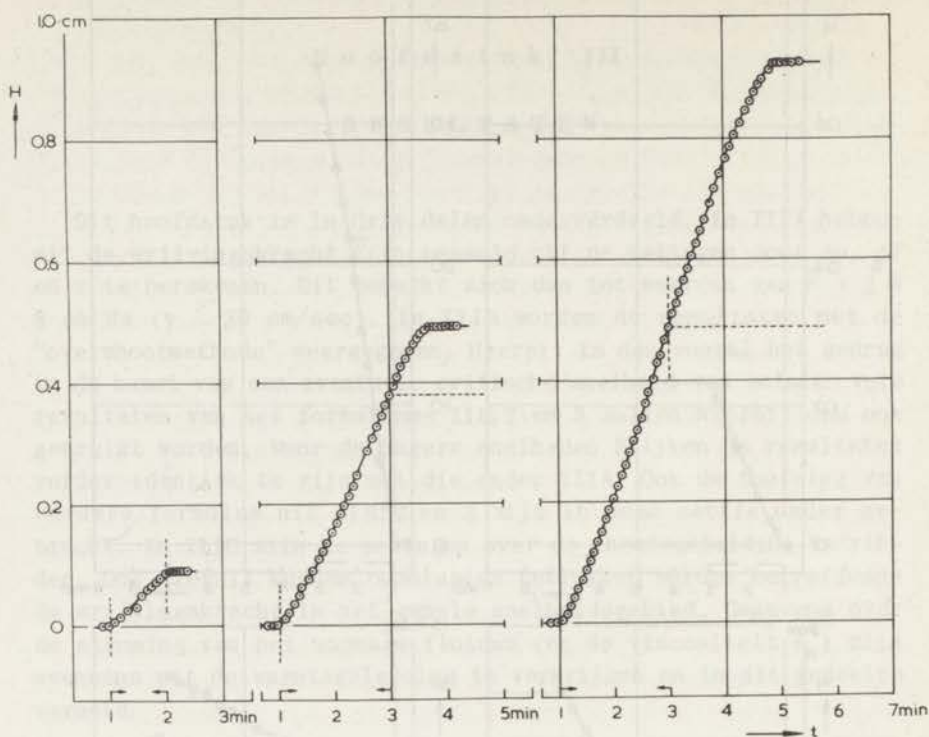
In deze sectie bepalen wij dus uit deze krommen de wrijvingskracht $\bar{F}(v)$ door de basisgrootheden te berekenen. Dan kunnen wij nagaan of de voorgestelde vorm (16) een goede beschrijving biedt; en als dat zo is kunnen wij de waarden van m bepalen en A_m berekenen, zoals vermeld in IIB; 1. Op deze wijze is dan ook $F(v)$



Figuur 8

Drie karakteristieke voorbeelden van gemeten krommen $H(t)$ en $\Delta T(t)$ analoog aan fig. 7a en b (© en \cdot : meetpunten)

- a) $T = 2,02^{\circ}\text{K}$; $h = 0,43 \mu$; $I = 3,50 \text{ mW}$ (1'-3')
- b) $T = 1,44^{\circ}\text{K}$; $h = 1,5 \mu$; $I = 0,87 \text{ mW}$ (1'-4')
- c) $T = 1,72^{\circ}\text{K}$; $h = 0,8 \mu$; $I = 0,19 \text{ mW}$ (1'-2')

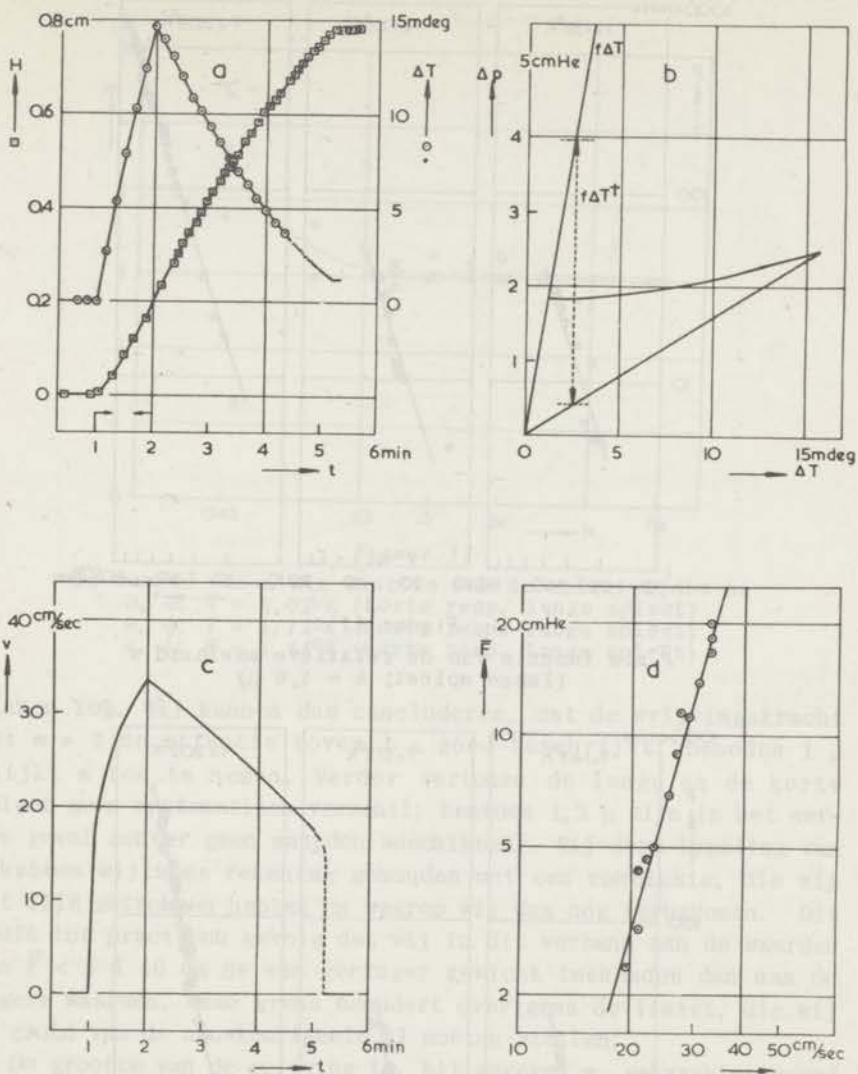


Figuur 9

De niveauhoogte H als functie van de tijd in drie gevallen resp. met $I = 0,66$ mW ($1'-2'$), $I = 1,73$ mW ($1'-3'$) en $I = 3,58$ mW ($1'-3'$); $T = 2,02^\circ\text{K}$, $h = 0,8 \mu$.

vastgelegd. Het rekenschema voor deze berekening van $\bar{F}(v)$ is in fig. 10 geïllustreerd aan een speciaal geval. Uit fig. a: de niveauhoogte als functie van de tijd, $H(t)$, volgt via $\dot{H}(t)$ de relatieve snelheid als functie van de tijd, $v(t)$, in fig. c. Voorts volgt uit $H(t)$ en het temperatuurverloop $\Delta T(t)$ het verband tussen Δp en ΔT op verschillende tijdstippen. Dit is fig. b, waarin dus t langs de kromme verandert, terwijl de waarden van $\bar{F} = f\Delta T^\dagger$ hierin zijn aan te geven. Tenslotte volgt uit fig. b en c de uiteindelijke relatie tussen \bar{F} en v , waar dus ook de parameter t geëlimineerd is. Het resultaat is in fig. d op logaritmische wijze uitgezet. Op deze wijze is zowel de helling m te bepalen, alsook de waarde van A_m , die b.v. gekarakteriseerd is door de waarde van \bar{F}_{35} , d.i. de waarde van $f\Delta T^\dagger$ voor $v = 35$ cm/sec.

In fig. 11 en 12 zijn weergegeven enige series resultaten van $\bar{F}(v)$ in verschillende gevallen, analoog aan fig. 10d. De spreiding in de punten wordt voornamelijk veroorzaakt door onnauwkeu-

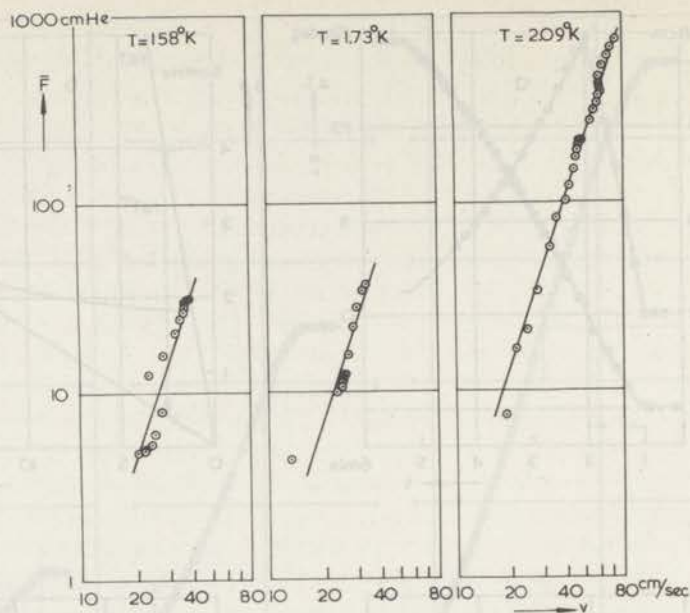


Figuur 10

De berekening van $\bar{F}(v)$ uit de gemeten krommen $H(t)$ en $\Delta T(t)$, in het geval: $T = 1,44^{\circ}\text{K}$; $h = 0,43 \mu$; $I = 0,85 \text{ mW}$ ($1^{\circ}-2^{\circ}$).

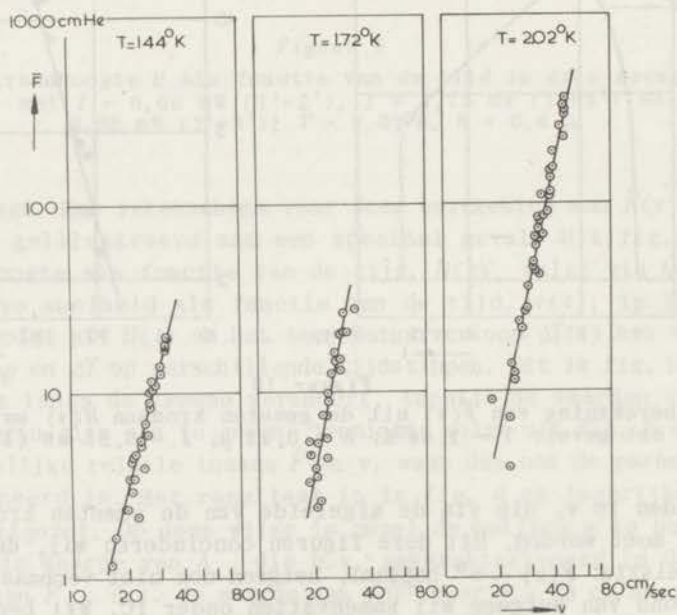
righeden in v , die via de afgeleide van de gemeten krommen bepaald moet worden. Uit deze figuren concluderen wij, dat er dus een relatie: $F(v) \sim v^m$ bestaat, hetgeen ook niet verbaast, vooral op grond van hetgeen wij samenvatten onder IC. Wij bepalen ons dus verder tot de twee kerngrootheden m en A_m .

De waarden van m als functie van de spleetwijdte h met parameter T zijn weergegeven in fig. 13; deze waarden zijn nauwkeurig



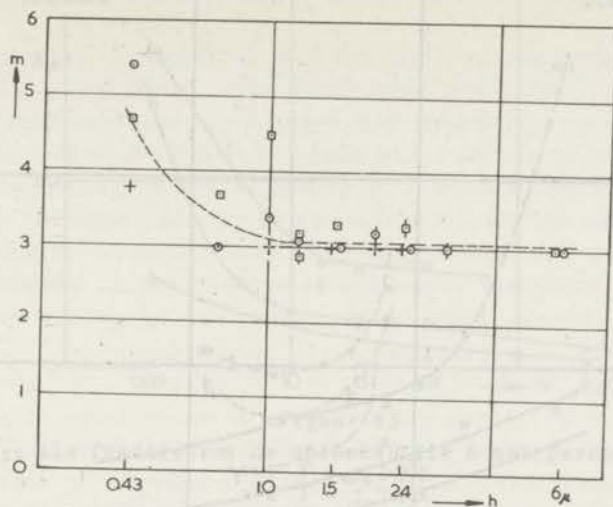
Figuur 11

\bar{F} als functie van de relatieve snelheid v
(lange spleet; $h = 1,6 \mu$)



Figuur 12

\bar{F} als functie van de relatieve snelheid v
(korte spleet; $h = 0,43 \mu$)



Figuur 13

De waarde van m als functie van de spleetwijdte h .

□, ○: $T = 2,02^{\circ}\text{K}$ (korte resp. lange spleet)

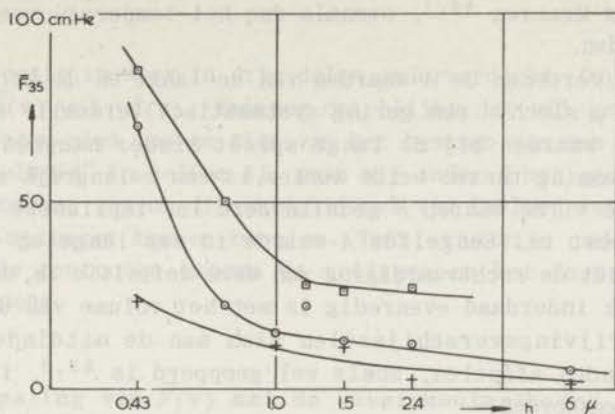
○, ○: $T = 1,72^{\circ}\text{K}$ (korte resp. lange spleet)

+, †: $T = 1,44^{\circ}\text{K}$ (korte resp. lange spleet)

binnen 10%. Wij kunnen dus concluderen, dat de wrijvingskracht met $m = 3$ de situatie boven 1μ goed beschrijft; beneden 1μ blijkt m toe te nemen. Verder vertonen de lange en de korte spleet geen systematisch verschil; beneden $1,2 \mu$ zijn in het eerste geval echter geen waarden beschikbaar. Bij deze bepaling van m hebben wij soms rekening gehouden met een conclusie, die wij uit IIIB getrokken hebben en waarop wij dus nog terugkomen. Dit heeft tot praktisch gevolg dat wij in dit verband aan de waarden van $\bar{F} < 5$ à 10 cm He een geringer gewicht toekenden dan aan de hogere waarden. Deze grens benadert overigens de limiet, die wij op grond van de nauwkeurigheid al moeten stellen.

De grootte van de wrijving is, bij gegeven m , gekarakteriseerd door de coëfficiënt A_m . Een overzicht van de wrijving als functie van h en T is dus gegeven door $A_m(h, T)$, mits m constant is. Een variabele m geeft nl. geheel geen overzicht, laat staan inzicht, vooral daar in de numerieke berekening (cf. IIB; 1) grootheden in de m^e -macht voorkomen. Daar wij zagen, dat m wat fluctueert en bij lage h oploopt, is de kwestie nu, op welke wijze wij in ons geval het beste overzicht verkrijgen. Wij hebben dit probleem opgelost op de volgende wijze.

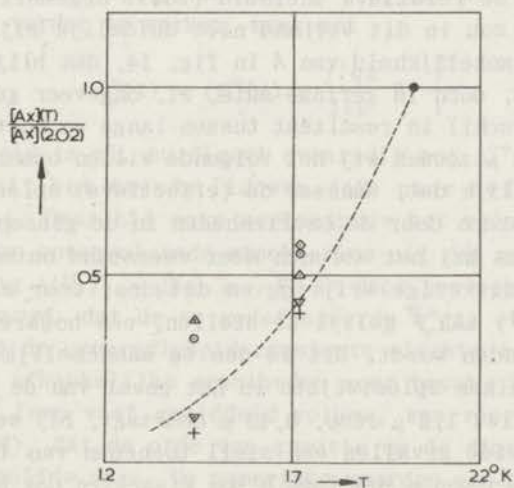
Enerzijds werd uitgegaan van de formule van GORTER-MELLINK, ((16), waarin $m = 3$) en werd aan de meetpunten een derde machtsverloop aangepast en daaruit dan A berekend volgens IIB; 1. De re-



Figuur 15

\bar{F}_{35} als functie van de spleetwijdte h met parameter T

- : $T = 2,02^{\circ}\text{K}$
- : $T = 1,72^{\circ}\text{K}$
- + : $T = 1,44^{\circ}\text{K}$



Figuur 16

De relatieve waarde van Ax t.o.v. de waarde bij $T = 2,02^{\circ}\text{K}$ als functie van T met parameter h

- + : $h = 6 \mu$
- ▽ : $h = 2,4 \mu$
- △ : $h = 1,5 \mu$
- : $h = 1,0 \mu$
- ◇ : $h = 0,8 \mu$

----- : de functie $x(T)/x(2,02)$

h . De gestreepte kromme geeft aan de functie $x(T)$ in dezelfde schaal, waardoor tevens de temperatuurafhankelijkheid van A uit deze figuur is af te lezen. Wij kunnen nog opmerken, dat de waar-

den bij grote h in overeenstemming zijn met de eerste resultaten van GORTER-MELLINK ^{49,1}, evenals dus het temperatuurverloop van deze waarden.

Verder vertonen de A -waarden van de lange en de korte spleet boven $1,2 \mu$ slechts een gering systematisch verschil, al zijn de numerieke waarden bij de lange spleet minder nauwkeurig. Deze overeenstemming tussen beide series is een belangrijk resultaat. Immers, de wijze waarop F gedefiniëerd is, impliceert dat F een volumekracht is. Eenzelfde A -waarde in een lange en een korte spleet houdt de rechtvaardiging van deze definitie in, daar blijkbaar F ook inderdaad evenredig is met het volume van de spleet. Dat de wrijvingsverschijnselen zich aan de uiteinden van de spleet zouden afspelen, zoals wel geopperd is ^{52,2}, is hiermee dus in tegenspraak.

Wanneer de fysische oorsprong van F' eveneens een volumekracht is, moeten wij dus verwachten dat A geen functie van h is. Is de oorsprong van F een kracht, die aan de wanden van de spleet werkzaam is, dan is te verwachten dat $A = B/h$, waarin B constant is. De functie van de relatieve snelheid (zoals opgemerkt is overigens $v_s \gg v_n$) zou in dit verband niet duidelijk zijn. Bekijken wij nu de h -afhankelijkheid van A in fig. 14, dan blijkt dat deze wel aanwezig is, doch in geringe mate, nl. ongeveer geldt $A \sim h^{-1/2}$.

Over het verschil in resultaat tussen lange en korte spleet in fig. 14 bij $1,2 \mu$ zouden wij het volgende willen opmerken. Het is zeer waarschijnlijk dat, wanneer de (effectieve) spleetwijdte ook bepaald gaat worden door de oneffenheden in de glasoppervlakken, het superfluidum bij het stromen meer weerstand ontmoet dan alleen van de wederkerige wrijving en dat dus, door alle gemeten weerstand ($f\Delta T^+$) aan \bar{F} gelijk te stellen, een hogere effectieve A_x -waarde gevonden wordt. Dit is des te aannemelijker omdat de laagste te bereiken spleetwijdte in het geval van de lange resp. korte spleet juist $1,2 \mu$ resp. $0,43 \mu$ bedraagt, bij welke waarden van h wij in beide gevallen een steil toenemen van A_x constateren. Het toenemen van m bij lage h zou misschien ook hieraan toegeschreven kunnen worden, maar bij de lange spleet is er echter bij $h = 1,2 \mu$ geen analogo effect.

Deze sectie is weer in drie delen onderverdeeld. Onder 1 bepalen wij $\bar{F}(v)$ uit $\square^{\circ}(v)$. Wanneer dan blijkt dat wij geneigd zijn de resultaten niet los te zien van het bestaan van een z.g. "critische snelheid" in helium II, gaan wij onder 2 het gedrag na van andere krommen, waarop dit verschijnsel van invloed is en die wij uit onze metingen kunnen bepalen. Tenslotte zijn onder 3 enige resterende contacten tussen de metingen en het formalisme IIB ondergebracht.

1. De bepaling van $\bar{F}(v)$ met de "overshootmethode"

In dit gedeelte bepalen wij $\bar{F}(v)$ uit $\square^{\circ}(t)$ en $v(t)$, hetgeen dus mogelijk is op grond van (42), welke formule het verband tussen \square° en ΔT^{\dagger} geeft. Daar wij in IIIA deze laatste steeds bepaald hebben, is het zinvoller niet met $\square^{\circ}(t)$, die uit de metingen direct volgt, verder te werken, maar met

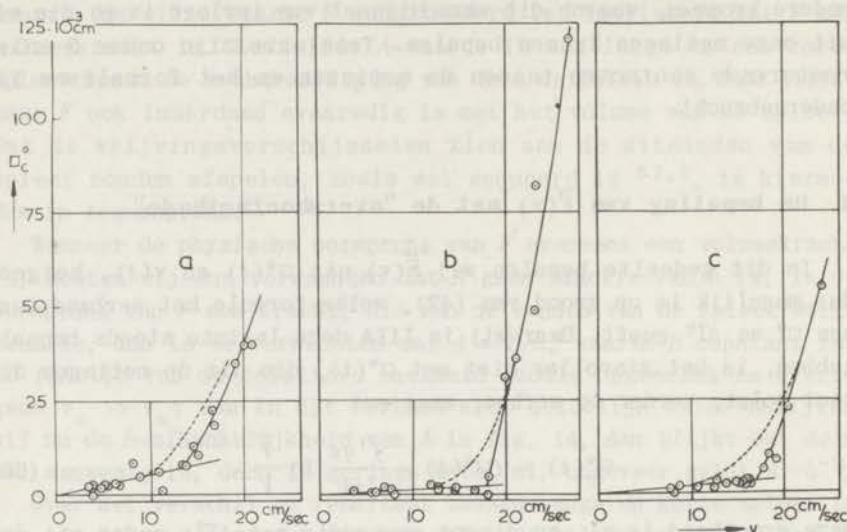
$$\square_c^{\circ}(t) = (\square^{\circ}(t) - \frac{f'q\varepsilon}{1+\varepsilon} \delta) \frac{\bar{V}}{V}. \quad (66)$$

Deze grootte is nl. nu direct evenredig met ΔT^{\dagger} , omdat wij dus de δ -term uit het tweede lid van (42) naar het eerste hebben overgebracht. Daar bij onze meetmethode het volume V niet constant is voor opeenvolgende stookseries uit één meetserie en (in de benadering $\Delta(V, T) = \rho Vc$) $\varepsilon \sim V$, is door toevoeging van de factor $1/V$ gezorgd, dat de zo gedefiniëerde $\square_c^{\circ}(t)$ evenredig is met ΔT^{\dagger} , waarbij de evenredigheidsconstante slechts temperatuur- (en geen tijd-) afhankelijke grootheden meer bevat. Tenslotte zorgt de factor \bar{V} (een vast gemiddeld volume, waarvoor steeds 15 cm^3 genomen werd), dat de orde van grootte en de dimensie van $\square_c^{\circ}(t)$ en $\square^{\circ}(t)$ dezelfde zijn. De numerieke waarden van $\square_c^{\circ}(t)$ verschillen dan ook veelal weinig van de gemeten $\square^{\circ}(t)$ -waarden. Voorts zij vermeld, dat de opgegeven waarden meestal de $\square_c^{\circ}(t_0)$ -waarden van elke stookserie zijn; alleen bij grote $\square_c^{\circ}(t_0)$ zijn ook $\square_c^{\circ}(t)$ -waarden mogelijk voor $t_0 < t < t_e$.

De experimentele $H(t)$ - en $\Delta T(t)$ -krommen zijn nauwkeuriger vastgelegd, naarmate meer meetpunten beschikbaar zijn en de stroming langzamer verloopt. Daar het aantal meetpunten per minuut ongeveer vastligt (15), zal dus de nauwkeurigheid van eenzelfde \square° in nauwe spleten veel groter zijn. In dit geval is de fout minder dan 5μ . Dit geeft dan een onnauwkeurigheid in $f\Delta T^{\dagger}$ van $0,01 \text{ à } 0,2 \text{ cm}$, hetgeen dus tevens de benedengrens is van deze

waarden. Bij grotere h en ook wanneer de temperatuur niet voldoende constant is, is de nauwkeurigheid minder goed. Aan de constantheid van de temperatuur is veel zorg besteed (cf. IIA;4b). Wij merken nog op, dat bij isotherme metingen drukverschillen van 0,2 cm op veel eenvoudiger wijze te meten zijn!

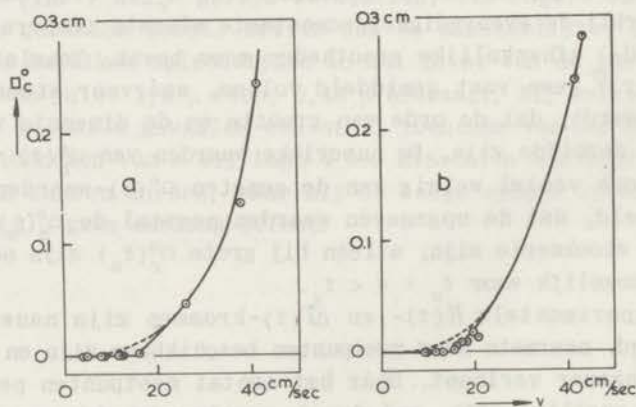
In fig. 17 en 18 zijn enkele karakteristieke resultaten ge-



Figuur 17

De "overshoot" Δ_c° als functie van de relatieve snelheid v .

- a) $T = 1,440\text{K}$; $h = 1,0 \mu$
- b) $T = 1,720\text{K}$; $h = 0,43 \mu$
- c) $T = 1,850\text{K}$; $h = 0,74 \mu$



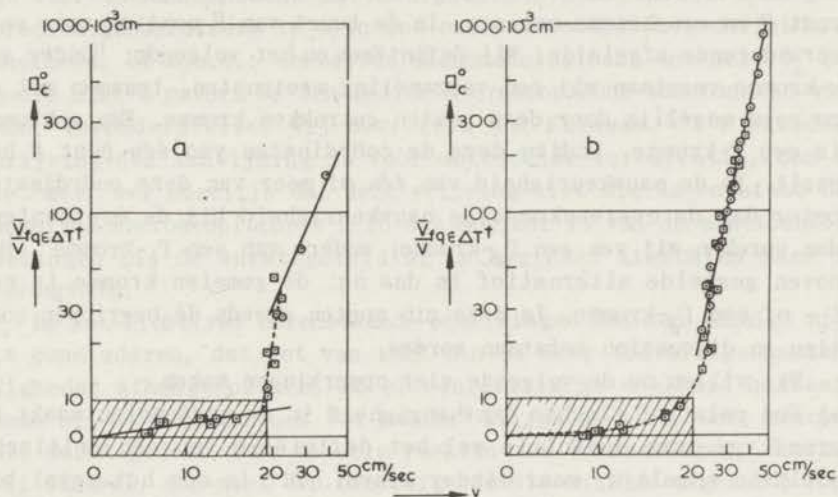
Figuur 18

De "overshoot" Δ_c° als functie van de relatieve snelheid v .

- a) $T = 1,720\text{K}$; $h = 1,5 \mu$
- b) $T = 2,020\text{K}$; $h = 1,5 \mu$

ven. Bij de beschrijving hiervan gaan wij dus uit van de metingen bij de laagste spleetwijdten, fig. 17.

Vanaf $v = 0$ begint \square_c° zeer zwak en ongeveer lineair met v toe te nemen tot aan een zekere waarde v^b . Hier begint een zeer steil toenemen, dat (bij $\square_c^{\circ} \approx 0,02$ cm, onafhankelijk van T , maar een weinig afhankelijk van h) overgaat in een m^e macht-afhankelijkheid, die geheel aansluit bij de resultaten, onder IIIA vermeld.



Figuur 19

\square_c° (\square) resp. $[\frac{\bar{v}f q \epsilon \Delta T^{\dagger}}{\bar{v}}]$ (\circ) als functie van de relatieve snelheid v in een gecombineerde lineaire schaal (gearceerde gedeelte) en logarithmische schaal (cf. (42)).

- a) $T = 1,72^{\circ}\text{K}$; $h = 1,0 \mu$
- b) $T = 2,02^{\circ}\text{K}$; $h = 0,43 \mu$

Dit laatste is aangetoond in een enkel voorbeeld, gegeven in fig. 19, terwijl in de reeds genoemde fig. 17 en 18 de extrapolatie van deze m^e macht door een stippellijn is weergegeven. De wijze van uitzetten in fig. 19 is aangepast aan de nauwkeurigheid, die bij lage \square_c° een absolute waarde heeft, bij hoge \square_c° een relatieve waarde. Bovendien is de machtafhankelijkheid op deze wijze duidelijk te zien.

Het lineaire begintraject is temperatuurafhankelijk en ook h -afhankelijk. In sommige gevallen is de helling zelfs zo gering, dat wij in wijdere spleten deze niet kunnen meten (cf. fig. 18). Wij komen op deze hellingen nog terug. Er zij volledigheidshalve nog vermeld, dat ook wel $\square_c^{\circ}(v)$ -krommen gemeten zijn, die een veel vlakker verloop vertonen. Hoewel veelal hiervoor aanwijsbare oorzaken bestonden, is het aantal bij hoge temperatuur onmiskenbaar groter dan bij de lagere temperaturen.

Het cardinale punt, waarom alles draait, is nu of deze krommen

in $v = v^b$ een continue of discontinue afgeleide hebben. Een discontinue afgeleide impliceert, dat men v^b een "critische snelheid" zou kunnen noemen; een continue daarentegen behoeft echter niet te impliceren, dat er geen kritische snelheid bestaat! Alvorens dit nader toe te lichten zij nog het volgende vermeld.

Er is een bezwaar in te brengen tegen het gestelde alternatief continu-discontinu. Experimenteel is nl. nooit het verschil te bepalen tussen een kromme met een discontinue afgeleide in een punt B en een kromme met een, in de buurt van B continu zeer snel veranderende afgeleide. Wij definiëren nu het volgende: "Onder een κ -kromme verstaan wij een verzameling meetpunten, tesamen met de zo goed mogelijk door deze punten getrokken kromme. Een κ -kromme is een Γ -kromme, indien deze de coördinaten van één punt B bepaalt. Is de nauwkeurigheid van één of meer van deze coördinaten beter dan de overeenkomstige nauwkeurigheid bij de meetpunten, dan spreken wij van een Γ_d -kromme; anders van een Γ_c -kromme". Het boven gestelde alternatief is dus nu: de gemeten kromme is een Γ_c - of een Γ_d -kromme. In deze zin moeten steeds de begrippen continu en discontinu verstaan worden.

Wij willen nu de volgende vier opmerkingen maken.

α) Een relatief slechte nauwkeurigheid in de meetpunten maakt op grond van onze definitie wel het definiëren van een kritische snelheid mogelijk, maar minder zinvol. Dit is dus het geval bij grote h en onrustige badtemperatuur, die het gezochte verschijnsel direct al vervlakken. Bij $h = 6 \mu$ is overigens geheel geen "overshoot" te meten.

β) Daar v verkregen wordt door een helling van de gemeten kromme $H(t)$ en dit procédé veelal de nauwkeurigheid niet ten goede komt, krijgen wij in beginsel in het kritische punt, waar $\square_c^o(v)$ zeer steil begint te lopen, een schijnbaar heviger spreiding in de meetpunten, hetgeen ook het gezochte verschijnsel zou kunnen vervlakken. Daar staat echter tegenover dat, wanneer $H(t)$ lineair verloopt met t (bij kleine τ (cf. IIB;3), hetgeen juist het geval is in de buurt van $v = v^b$), de constante helling een zeer nauwkeurige bepaling van v geeft.

γ) Voorts moeten wij weten of het kritische effect aan de *relatieve* snelheid v of aan de *superfluide* snelheid v_s gekoppeld is. In dit laatste geval zou het effect in een $\square_c^o(v)$ -grafiek wederom vervlakt kunnen worden. Daar zal blijken, dat wij inderdaad een kritische *superfluide* snelheid zullen moeten veronderstellen (cf. IIIC;1), is het dus in dit verband zinvoller \square_c^o tegen v_s uit te zetten. Echter is er geen functioneel verband tussen \square_c^o en v_s en de resulterende weergave van meetpunten beoogt dan alleen na te gaan of beneden een bepaalde waarde van v_s alle \square_c^o "nul" zijn en er boven juist ongelijk nul. In fig. 17 en 18 is v_n niet altijd

te verwaarlozen maar de relatieve ligging van de meetpunten is niet essentieel anders in deze gevallen.

8) Afgezien van alle experimentele moeilijkheden bij de bepaling, is er nog een principiël punt. Zolang wij de oorsprong van de wrijving, die optreedt boven $v_s = v_s^b$ niet begrijpen, is het denkbaar dat onze wijze van meten principiël een spreiding in de buurt van $v_s = v_s^b$ oplevert. Ontstaat deze wrijving nl. ten gevolge van "microscopische omstandigheden", dan behoeft deze niet precies gecorreleerd te zijn met een macroscopisch gedefiniëerde snelheid; of m.a.w.: eenzelfde fenomenologische snelheid v_s behoeft niet a priori op een zelfde microscopische toestand te wijzen. Veronderstellen wij b.v. (cf. ook FEYNMAN^{54,4}) dat deze wrijving een aanwijzing is voor optredende turbulentie, dan is het zeer wel mogelijk dat deze wrijving niet steeds ontstaat bij dezelfde macroscopische v_s . In dit opzicht is van de stationnaire metingen bij de warmtegeleiding in beginsel misschien meer te verwachten.

In het licht van bovenstaande opmerkingen zou men geneigd zijn te concluderen, dat het van toch min of meer toevallige omstandigheden afhangt of men, zo er een kritische snelheid bestaat, deze bij de metingen ook "te pakken" krijgt of niet. Deze conclusie wordt gedekt door de vele reeksen van waarnemingen, waarbij wij dan wel, dan niet een overtuigende discontinue afgeleide vonden in $v_s = v_s^b$.

Op grond van de overweging, dat een kritische snelheid in het licht van alle versturende en verstrooiende oorzaken en mogelijkheden wel alle gemeten krommen kan verklaren, maar het continue standpunt daarentegen niet, alsmede van de overweging, dat de meetdagen met de rustigste badtemperatuur veelal ook de beste Γ_d -krommen opleverden, zouden wij willen concluderen, dat in helium II een kritische snelheid bestaat. Met de kritische snelheid bedoelen wij dus de snelheid beneden welke een zwakke (en veelal lineaire) wrijving mag bestaan, maar waarboven een wrijving van een "geheel andere orde", zowel in grootte als afhankelijkheid van v , blijkbaar plotseling (d.i. binnen de nauwkeurigheid, waarmee v_s^b te bepalen is) inzet. Deze definitie is een weinig afwijkend van de gewone definitie, weshalve wij de notatie v_s^b prefereren boven b.v. de gebruikelijke $v_{crit.}$

De grootte van deze snelheden ligt tussen de 5 en 15 cm/sec. Hierop komen wij terug in IV;1, wanneer nog meer gegevens verkregen zijn waaruit v_s^b te bepalen is. Deze snelheden kunnen uiteraard bepaald worden los van de vraag, of het ook inderdaad kritische snelheden zijn.

Tenslotte willen wij ons verdiepen in de "lineaire wrijving",

die onverwachts bij onze metingen te voorschijn kwam bij snelheden $v_s < v_s^b$.

Allereerst zijn wij de mogelijkheid van een systematische experimentele fout nagegaan. Hetgeen wij meten is nl. \square° en \dot{H} en de lineaire "aanloop" in een $\square^\circ(\dot{H})$ -grafiek is dus formeel uit te drukken in seconden. Dit aantal seconden echter kunnen wij aanschouwelijk maken, daar het tevens het bedrag is, waarover de gehele tijdschaal in de positieve richting verplaatst zou moeten worden, teneinde alle gemeten \square° -waarden in het lineaire traject tot nul terug te brengen. En aangezien er nog al wat overbrengingen in het meetsysteem zitten en dus traagheden, is het de vraag, of niet inderdaad deze verschuiving reëel zou kunnen zijn. Wij zijn echter toch tot de conclusie gekomen, dat deze vertragingen niet gezamenlijk tot een waarde van enkele seconden kunnen oplopen, waartoe ook proefreeksen waarnemingen met verschillende waarnemers werden uitgevoerd. Hierbij bleek de systematische fout (t.g.v. de traagheid tussen: signaal horen - tijd aflezen) bij een geoefende waarnemer steeds beneden 0,2 sec te liggen, waarschijnlijk ook ten gevolge van een automatisch aangebrachte correctie voor dit constante tijdverlies. Ook het feit, dat de klok waarop het schakelmechanisme werkt en de stopwatch waarop de tijd wordt afgelezen niet dezelfde zijn, lijkt van weinig invloed: door regelmatig tussentijds (elk uur) opnieuw de stopwatch te starten, is het verschil in aanwijzing van beide klokken te verwaarlozen, daar per uur deze minder dan 0,2 sec uiteenliepen. Bovendien is een sterk argument tegen deze mogelijkheid, dat de gevonden hellingen temperatuurafhankelijk zijn, met een uitgesproken minimum bij onze middentemperatuur $T = 1,72^\circ\text{K}$ (tabel 1). Op deze T -afhankelijkheid komen wij nog terug.

Vervolgens is als verklaring van deze lineaire $\square^\circ(\dot{H})$ -afhankelijkheid denkbaar de traagheid van het stromende (super)fluidum: ten gevolge hiervan zal immers het fluidum bij het bereiken van een evenwichtsstand een trilling uitvoeren, waarvan de uitwijking evenredig is met de waargenomen waarde van \dot{H} (een "natuurlijke overshoot"). In appendix 4 is aangetoond, dat de uitwijking echter veel te gering is om waargenomen te kunnen worden, terwijl ook de slingertijd slechts 1 sec en minder bedraagt. Inderdaad zijn bij onze experimenten nimmer trillingen waargenomen. Ook zou onze methode om de evenwichtsstand te bepalen uit een reeks waargenomen punten (cf. b.v. fig. 8) elke trilling elimineren.

Wij zijn dus nu geneigd het gevonden verschijnsel reëel te noemen en wij zouden, al is de fysische oorsprong in eerste instantie onduidelijk, formeel dit effect kunnen beschrijven door in de bewegingsvergelijking van het superfluidum ($3'$) een term Kv_s (of Kv , daar $v_s \gg v_n$) toe te voegen naast de wederkerige

wrijvingsterm $A\rho_n\rho_s(v_s - v_n)^3$, die voor $v < v^b$ blijkbaar verwaarloosbaar is. Dit leidt direct al tot een merkwaardig resultaat. Koppelen wij nl. deze K -term aan de gemeten grootheden \square° en \dot{H} , dan blijkt bij doorrekenen:

$$\frac{K}{h} = \frac{\square^\circ}{\dot{H}} \left[7,9 \cdot 10^3 \frac{\rho_s^2 f Q^+}{\Lambda(V, T)} 2\pi\sigma_i \right] \quad (67)$$

Deze laatste factor is zeer temperatuurafhankelijk met een maximum bij $T = 1,8^\circ\text{K}$. M. a. w., indien K niet te geprononceerd van T afhangt, zal dus \square°/\dot{H} een minimum bij $T = 1,8^\circ\text{K}$ moeten vertonen. Dit zou dus ons gevonden effect verklaren: het minimum in de heling \square°/\dot{H} bij $T = 1,72^\circ\text{K}$ zou dan slechts het gevolg zijn van de gebruikte meetgrootheden, hetwelk bij omrekening op de oorspronkelijke grootheden uit (3') verdwijnt.

Wat is de achtergrond van deze Kv_s -term? In de eerste plaats denkt men aan een volumekracht (analoog aan de wederkerige wrijving); in dat geval lijkt het zinvol $Kv_s = K_1\rho_s v_s$ te stellen, of $Kv = K_1'\rho_s\rho_n v$. In de tweede plaats is er de mogelijkheid van een oppervlaktekracht; dan schrijven wij bij voorkeur $K = (K_2\rho_s)/h$. In de derde plaats is het misschien denkbaar, in analogie met (4'), dat wij te maken zouden hebben met de viscositeit van het superfluidum! In dat geval is K de operator $\eta_s \nabla^2$ en schrijven wij $K = (12K_3)/h^2$, met $K_3 = \eta_s$.

TABEL 1

h μ	T = 1,44°K							T = 1,72°K							T = 2,02°K						
	□°/Ḥ sec	K/h	K	K ₁	K ₁ '	K ₂	K ₃	□°/Ḥ sec	K/h	K	K ₁	K ₁ '	K ₂	K ₃	□°/Ḥ sec	K/h	K	K ₁	K ₁ '	K ₂	K ₃
1,5	(1,3)	10 ⁵	10 ¹	10 ²	10 ⁴	10 ⁻²	10 ⁻⁹		10 ⁵	10 ¹	10 ²	10 ⁴	10 ⁻²	10 ⁻⁹		10 ⁵	10 ¹	10 ²	10 ⁴	10 ⁻²	10 ⁻⁹
1,0	1,7	2,2	2,2	1,7	1,2	1,7	18	<0,2	0,6	0,9	0,8	0,2	1,2	20	-	-	-	-	-	-	-
0,74	-	-	-	-	-	-	-	1,2	3,5	3,5	3,2	0,8 ⁵	3,2	29	-	-	-	-	-	-	-
0,43	2,5	3,2	1,4	1,1	0,8	0,47	2,2	1,0	2,9	2,1	1,9	0,5	1,4	9,5	2	4	3	5,5	0,6	4	15
0,36	4,5	5,8	2,1	1,5	1,1	0,54	2,3	0,8	2,3	1,0	0,9	0,2 ⁵	0,4	1,6	2,5	5	2,1	3,8	0,4 ³	1,6	3,3
								-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

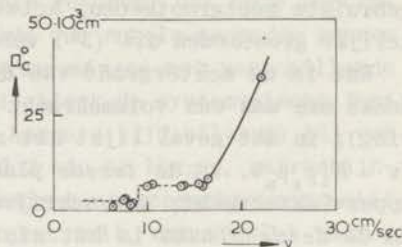
De gemeten waarden van \square°/\dot{H} (voor $v_s < v^b$) en de daaruit met (67) berekende waarden van Λ/h voor verschillende temperatuur en spleetwijdte. Eveneens K , $K_1 = K/\rho_s$, $K_1' = K/\rho_s\rho_n$, $K_2 = Kh/\rho_s$ en $K_3 = Kh^2/12$.

Wij hebben de numerieke waarden van K , K_1 , K_1' , K_2 en K_3 in tabel 1 weergegeven; de nauwkeurigheid is niet groter dan 15%. Op grond van het feit, dat K_1' het minst fluctueert als functie van h bij elke temperatuur (evenals K_1) en tevens als functie van T , zouden wij misschien kunnen besluiten, dat de aanname van een volumekracht, gekoppeld aan een relatieve snelheid, de beste keus is uit de gegeven mogelijkheden. Overtuigend is het echter niet. De bijzonder sterke h -afhankelijkheid van K_3 maakt het in elk geval weinig waarschijnlijk, deze K_3 met een viscositeit η_s te kunnen identificeren. Bovendien is volgens KAPITZA^{38,1}: $\eta_s < 10^{-9} P$,

hetgeen in tegenspraak lijkt met de K_3 -waarden. Echter moeten wij bedenken, dat deze bovengrens gemeten is in capillairen met een diameter $d \approx 10^{-5}$ cm, hetgeen in het licht van een sterke h -afhankelijkheid, hogere waarden mogelijk zou kunnen maken bij grotere h .

Ook in de oude isotherme experimenten van ALLEN en MISENER^{39,4} vinden wij deze lineaire "aanloop" terug. Ook hier werden viscositeiten η_s berekend (uit de metingen in capillairen met een diameter van 4μ en $0,12 \mu$). Deze waarden behoeven, wat de orde van grootte betreft, niet in tegenspraak te zijn met onze waarden en vertonen eveneens een analoge sterke h -afhankelijkheid.

Tenslotte zij nog gewezen op het feit, dat in enkele gevallen de ligging van de punten beneden $v = v^b$ beter beschreven is met een "trapkromme". Het markantste voorbeeld is afgebeeld in fig. 20. Het is bovendien opvallend, dat de tweede trap in de gevallen, waar zo'n kromme mogelijk zou zijn, steeds lijkt te beginnen bij $v = \frac{2}{3}v^b$. Het is echter beslist niet mogelijk alle lineaire begintrajecten door "trapkrommen" te vervangen.



Figuur 20

\square_c° als functie van v , in het geval $T = 1,44^\circ\text{OK}$ en $h = 0,36 \mu$.

2. De invloed van de kritische snelheid

Wanneer er inderdaad een kritische snelheid in helium II bestaat, moet ook het gedrag van andere krommen hierdoor beïnvloed zijn. Hierop doelden wij in IB; 2b, α en IIB; 3, β .

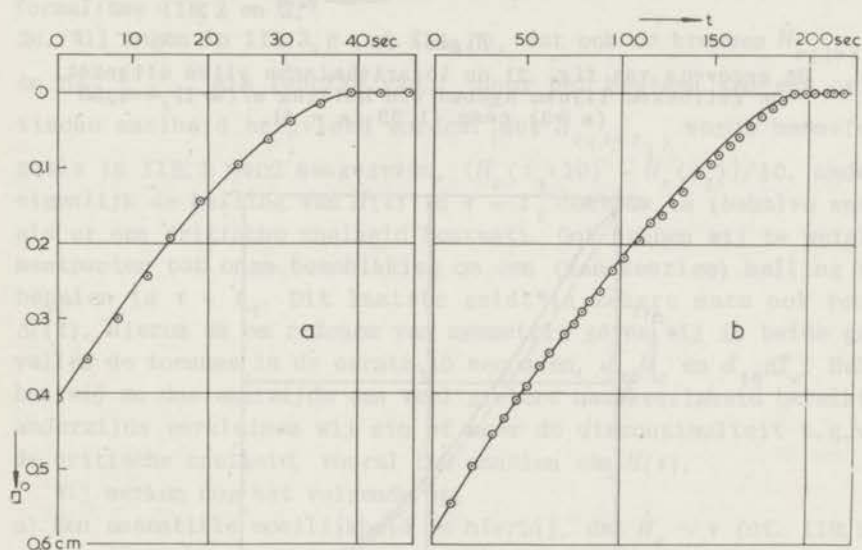
2a. De vorm van de kromme $H(t)$ voor $t_o < t < t_e$ is, op grond van een continue m^e macht gegeven door (cf. IIB; 3a):

$$\square^\circ \sim (t_e - t)^{m/(m-1)}.$$

Een toenemende waarde van m bij afnemende \square° beneden $0,02$ cm, zoals wij dus vinden, is equivalent met een, tussen $1,5$ en $1,0$ afnemende waarde van $m/(m-1)$ in de buurt van $t = t_e$. Een kritische snelheid is te beschrijven met $m \rightarrow \infty$ voor $\square^\circ \rightarrow 0$, wat dus is $m/(m-1) \rightarrow 1$ voor $t \rightarrow t_e$. Dit zouden wij ook niet anders verwachten. Wij zien ons dus voor de taak gesteld om na te gaan of de kromme $H(t)$ in de eindige tijd, waarin een $\square^\circ < 0,02$ cm, nul

wordt, met een discontinue afgeleide in $t = t_e$ aankomt of niet; of wel, of $m/(m-1) = 1$ in $t = t_e$.

Dit is bijna ondoenlijk omdat dit een groot aantal meetpunten met hoge nauwkeurigheid in een korte tijd vereist. De enige mogelijkheid ligt dus ook hier bij de nauwe spleten, terwijl uiteraard ook slechts "overshoots" van niet te korte duur voor analyse in aanmerking komen. Een tweetal voorbeelden is gegeven in fig. 21. Voor $h = 1,5 \mu$, waar dus voor grote snelheden een derde macht voldoet, is bij de lage waarden van \square^0 , waar te weinig punten beschikbaar zijn, geen verschil tussen de theoretische $3/2^e$ macht en de experimentele resultaten. Voor $h = 0,43 \mu$, waar in het hoge gebied een vierde macht geldt, zien wij dat inderdaad een continu verloop (met $m/(m-1) = 1,33$) ronder loopt dan experimenteel is



Figuur 21

Het afnemen van \square^0 met de tijd t , met $t_0 = 0$.

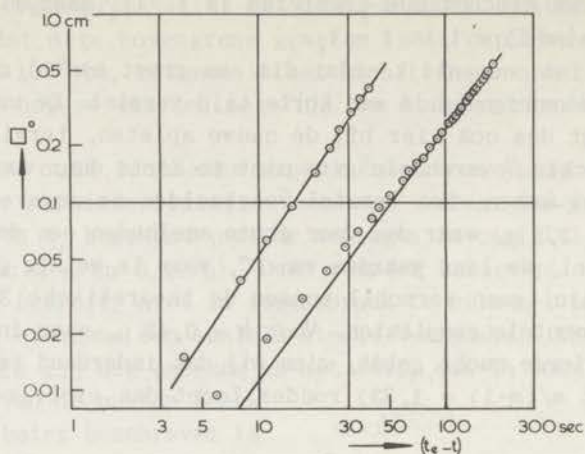
a) $T = 1,44^{\circ}\text{K}$; $h = 1,5 \mu$; $t_e = 39 \text{ sec}$.

b) $T = 1,44^{\circ}\text{K}$; $h = 0,43 \mu$; $t_e = 192 \text{ sec}$.

De getrokken lijnen geven $(t_e - t)^{m/m-1}$, met $m = 3$ resp. 4 (cf. fig. 13).

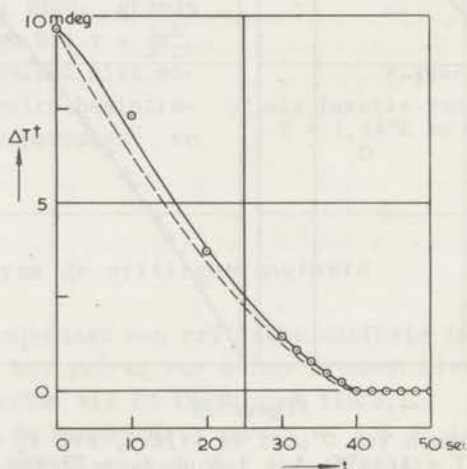
gevonden, waar een discontinue afgeleide in $t = t_e$ gerealiseerd schijnt. Overigens is ook hier goed te zien, dat de positie van de laatste punten bijzonder bepalend is. Speciaal is het van belang, in $t = t_e$ een meetpunt te hebben, hetgeen echter slechts van het toeval af kan hangen.

In beginsel kunnen wij $m/(m-1)$ direct meten als helling aan de kromme $\ln \square^0$ vs $\ln(t_e - t)$. Daar wij echter weten, dat de kromme



Figuur 22

De gegevens van fig. 21 op logarithmische wijze uitgezet.
De getrokken lijnen hebben een helling $m/(m-1) = 1,50$
($m=3$) resp. $1,33$ ($m=4$).



Figuur 23

Het afnemen van ΔT° met de tijd t , met $t_0 = 0$, in het geval:
 $T = 1,44^\circ\text{K}$; $h = 1,5 \mu$; $t_e = 39$ sec. De gestreepte lijn geeft
 $(t_e - t)^{m/m-1}$, met $m = 3$; in de getrokken lijn is tevens de
traagheid van de galvanometer verdisconteerd.

$\square^\circ(v)$ niet verticaal loopt voor $v = v^b$ en ook zagen, dat het meetpunt in $t = t_e$ essentieel is, dat juist verloren gaat in een logarithmische grafiek, is het dus onmogelijk de waarde $m/(m-1) = 1$ te meten. Wel levert fig. 22 bolle krommen op, hetgeen dus is een afnemende waarde van $m/(m-1)$ voor $t \rightarrow t_e$.

2b. Voor de kromme $\Delta T(t)$ geldt hetzelfde als voor $H(t)$. Hier komt echter nog als moeilijkheid bij, dat de traagheid van de galvanometer het subtiele effect bij $t = t_e$ vervlakt en het trekken van conclusies nog moeilijker maakt. Een enkel voorbeeld is gegeven in fig. 23, waar het effect van deze traagheid berekend is en in de getrokken theoretische kromme verwerkt is.

Overigens zij nog vermeld, dat deze $H(t)$ - en $\Delta T(t)$ -krommen de aanleiding geweest zijn tot het berekenen van $\square^\circ(t)$ op grond van een continue wrijving, teneinde het verschil na te gaan tussen de experimentele krommen en de continue beschrijving. Dit verschil is nogal gering gebleken! Deze berekening leidde tot (54) en tot de ontdekking van het eindige tijdsinterval $(t_e - t_o)$ en is tevens de oorsprong geweest van het later veel uitgebreider opgezette formalisme IIB; 2 en 3.

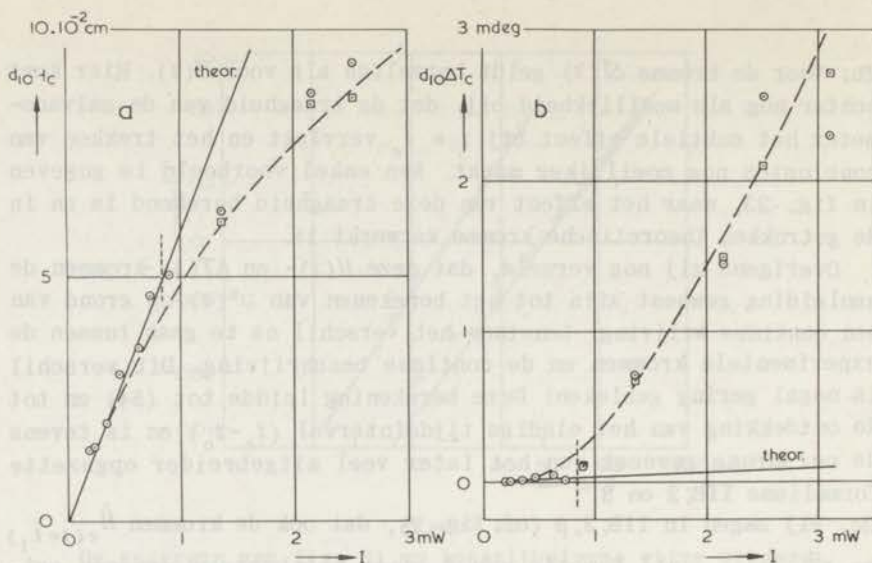
2c. Wij zagen in IIB; 3, β (cf. fig. 7), dat ook de krommen $\dot{H}_{c(t=t_1)}$ en $\dot{\Delta T}_{c(t=t_1)}$, als functie van I_c door het bestaan van een kritische snelheid beïnvloed worden. Met $\dot{H}_{c(t=t_1)}$ wordt bedoeld, zoals in IIB; 3 werd aangegeven, $\{H_c(t_1+10) - H_c(t_1)\}/10$, omdat eigenlijk de helling van $H(t)$ in $t = t_1$ continu is (behalve weer als er een kritische snelheid bestaat). Ook hebben wij te weinig meetpunten tot onze beschikking om een (nauwkeurige) helling te bepalen in $t = t_1$. Dit laatste geldt in zekere mate ook voor $\Delta T(t)$. Hierom en om redenen van symmetrie geven wij in beide gevallen de toename in de eerste 10 seconden, $d_{10}H_c$ en $d_{10}\Delta T_c$. Hebben wij zo dus enerzijds een veel grotere nauwkeurigheid bereikt, anderzijds verkleinen wij min of meer de discontinuïteit t.g.v. de kritische snelheid, vooral ten aanzien van $H(t)$.

Wij merken nog het volgende op.

α) Een essentiële moeilijkheid is hierbij, dat $\dot{H}_c \sim v$ (cf. IIB; 3) en dat dus, als v_s een kritisch gedrag vertoont, het effect hiervan op \dot{H}_c uitgesmeerd zal worden. Bij nauwe spleten, waar $v_n \ll v_s$, vervalt praktisch deze moeilijkheid.

β) In het geval van een merkbare lineaire wrijving werd steeds het interval $(t_1 + 2) \rightarrow (t_1 + 12)$ beschouwd ter bepaling van $d_{10}H_c$ en $d_{10}\Delta T_c$.

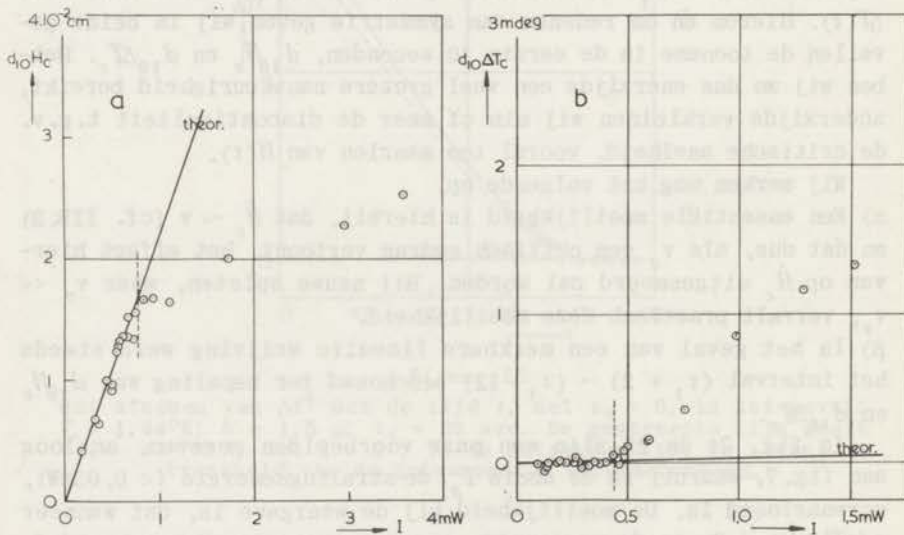
In fig. 24 en 25 zijn een paar voorbeelden gegeven, analoog aan fig. 7, waarbij in de abcis I_p , de stralingsenergie ($< 0,02\text{mW}$), verwaarloosd is. De moeilijkheid bij de weergave is, dat wanneer $(d\Delta T^+/dt) \neq 0$, in de meetpunten nog een parameter V voorkomt (cf. (59) en (60)) en, daar deze voor elk punt verschillend is, hierdoor geen zinvol $d_{10}\Delta T(I)$ -verband oplevert. Enerzijds kunnen wij echter concluderen, dat alle punten beneden een bepaalde waarde van I op de getrokken rechte liggen en er boven niet. Anderzijds hebben wij in fig. 24 de hoge punten gecorrigeerd (noodzakelijker-



Figuur 24

$d_{10}H_c$ en $d_{10}\Delta T_c$ als functie van I ,
in het geval $T = 1,72^\circ\text{K}$; $h = 1,5 \mu$.

De meetpunten (\odot) bevatten nog de niet constante parameter V ; de punten (\square) zijn de meetpunten met $I > 0,82 \text{ mW}$, herleid op een constante gemiddelde waarde van V . De gestreepte kromme geeft het daarbij behorende theoretische verloop volgens (59) en (60); de getrokken rechte eveneens, voor het geval $\Delta T^\dagger \equiv 0$.



Figuur 25

a. $d_{10}H_c$ als functie van I in het geval $T = 2,02^\circ\text{K}$; $h = 0,8 \mu$.
b. $d_{10}\Delta T_c$ als functie van I in het geval $T = 1,72^\circ\text{K}$; $h = 0,8 \mu$.
De meetpunten bevatten nog de niet constante parameter V , waarvoor niet gecorrigeerd is (cf. fig. 24). De getrokken rechte geeft het theoretische verloop volgens (59) en (60) voor het geval $\Delta T^\dagger \equiv 0$.

wijs dus theoretisch) t.o.v. een gemiddeld volume \bar{V} (15 cm^3) en de daarbij behorende theoretische kromme getrokken. Hiervoor hebben wij nog nodig (52) en (57) waardoor dit een bewerkelijke berekening is. De correcties op de meetpunten zijn voor fig. 24a kleiner dan voor fig. 24b, in overeenstemming met (59) en (60). Daar in het geval van fig. 25 geen derde macht optreedt ($h = 0,8 \mu$) en de waarde van Ax dus niet zo bruikbaar is, hebben wij voor fig. 25 de theoretische berekeningen achterwege gelaten.

Wij concluderen uit deze figuren, dat het verloop steeds een Γ_d -kromme is, zoals gedefiniëerd onder 1 en dat dit gedrag dus in overeenstemming is met dat, gevonden bij $\square_c^0(v)$.

3. Verdere toetsing van het formalisme IIB; 2 en 3

3a. In IIB; 3c hebben wij gezien dat, als er onbepert doorgestookt wordt, de kromme $H(t)$ een S -vorm verkrijgt, zoals aangegeven in fig. 7d. $H(t)$ wordt tenslotte constant, in tegenstelling tot de kromme $H_c(t)$, waarvan de helling, die v bepaalt, constant wordt. Hierbij werd opgemerkt, dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B}{C} v = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t/\tau}) = 1,$$

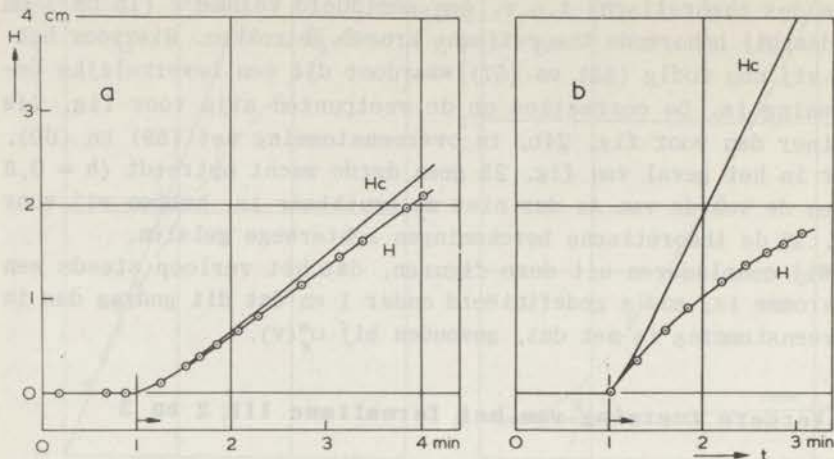
waarin
$$\tau = \frac{3 A \Lambda(V, T) x \rho}{C_1 f'(\rho(1-x) Q^+ 2\pi r_i)^3} \cdot \frac{(I + I_p - I_q)^2}{h^3}.$$

Dit werd afgeleid voor $m = 3$; voor hogere (gehele) waarden van m gelden analoge relaties. Deze τ neemt dus toe voor toenemende warmtetoevoer en afnemende spleetwijdte en warmtelek, hetgeen ook plausibel is. Bovendien is τ sterk temperatuurafhankelijk.

De berekende waarden van τ kunnen wij vergelijken met de experimenten wanneer wij bedenken, dat $4,6 \tau$ de tijd is, waarin de limietwaarde van v op 1% genaderd is. Deze tijd is nu af te lezen uit de $H_c(t)$ -krommen, bij nauwe spleetwijdten dus direct al uit de $H(t)$ -krommen. De overeenstemming met de berekende waarden is goed. In fig. 26 zijn in dit verband twee gemeten krommen $H(t)$ getekend, alsmede de berekende $H_c(t)$ -krommen. In fig. a is de limietwaarde van v bereikt na $100 (\pm 10)$ sec (berekend: $4,6 \tau = 100$ sec); in fig. b, waar v_n relatief zeer groot is, ziet de kromme $H_c(t)$ er dan ook heel anders uit dan de $H(t)$ -kromme en levert een tijd op van $38 (\pm 3)$ sec (berekend: 37 sec). Tevens zien wij, dat de vorm van de $H_c(t)$ -kromme geheel bepaald wordt door de parameter τ .

Met de $\Delta T(t)$ -krommen zijn analoge resultaten te verkrijgen.

3b. Ook hebben wij nog de bepaling uitgevoerd van \dot{H}_c en $\Delta \dot{T}_c$ voor



Figuur 26

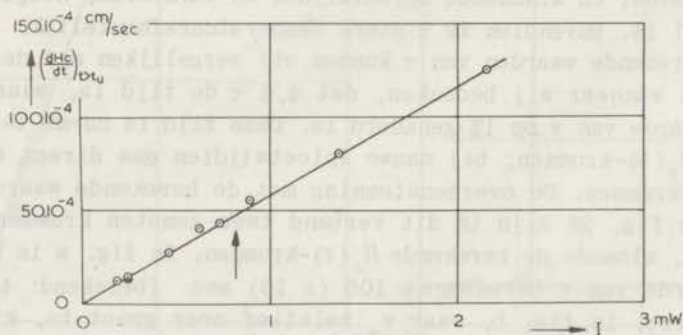
$H(t)$ en de daaruit berekende $H_c(t)$ bij voortdurende energietoevoer.

a. $T = 1,72^{\circ}\text{K}$; $h = 1,5 \mu$; $I = 2,15 \text{ mW}$

b. $T = 1,97^{\circ}\text{K}$; $h = 6 \mu$; $I = 12,3 \text{ mW}$

De constante helling van H_c is bereikt na ongeveer 100 resp. 37 sec.

$t > t_u$ ($t_u - t_1 = 5 \tau$ (cf. IIB;3)), als functie van $I_c = I$. Volgens onze berekeningen moet in dit geval de invloed van de wrijving geëlimineerd zijn. Dit wordt experimenteel geheel bevestigd, hetgeen te zien is in fig. 27. Hierin heeft ook weer de getrokken rechte de theoretische helling. Bij de hoogste \dot{H} -punten zijn de correcties belangrijk.

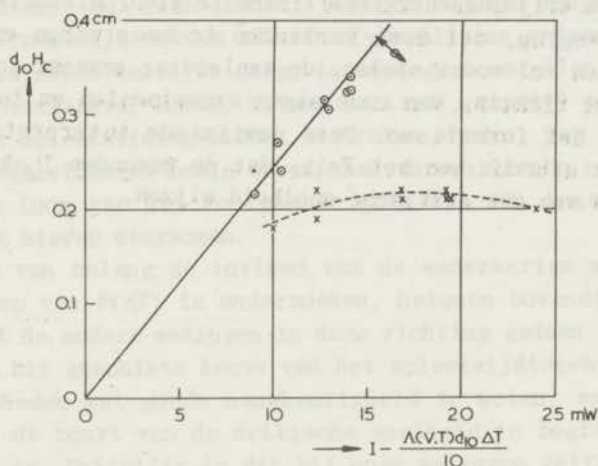


Figuur 27

$(dH_c/dt)_{t > t_u}$ als functie van I in het geval $T = 1,72^{\circ}\text{K}$; $h = 1,5 \mu$. De getrokken rechte heeft de theoretische helling volgens (59). De pijl duidt de plaats aan, waar de kritische snelheid gepasseerd wordt.

3c. In fig. 28 hebben wij (59) nog eens op een andere wijze getest. In het geval van 6μ , (gedaante van $H(t)$ als fig. 26b) hebben wij de aanvangshellingen $d_{10}H$ uitgezet als functie van I , alsook de berekende $d_{10}H_c$ als functie van $I - \{\Lambda(V, T) d_{10}\Delta T\}/10$. Ook hier is het resultaat in het laatste geval een rechte lijn met de helling, gegeven door $1/0,6Q^+$ in overeenstemming met (59). Uiteraard zijn ook de krommen van fig. 24 en 25 op deze wijze tot rechte lijnen te reduceren.

Tenslotte willen wij in dit verband nog even terugkomen op de analoge experimenten, die in Oxford uitgevoerd zijn (cf. IC; 2c), in het bijzonder op de daar gemeten $H(t)$ -krommen met parameter I



Figuur 28

$d_{10}H_c$ als functie van $I - \{\Lambda(V, T) d_{10}\Delta T\}/10$, in het geval $T = 1,97^\circ K$; $h = 6 \mu$. De getrokken rechte heeft de theoretische helling volgens (59). De x-punten geven $d_{10}H$ als functie van I .

en de hieruit af te leiden grootheden $\dot{H}_{(t=t_1)}$ als functie van I . Wij gebruiken hierbij dus onze notatie.

De $H(t)$ -krommen hebben steeds de vorm van onze 6μ -krommen (cf. fig. 26b), hetgeen wijst op grote warmtegeleiding. Daar bij deze metingen de spleet langer was dan bij ons en de breedte 1μ bedroeg, zouden wij willen concluderen, dat bij deze experimenten de grote verliezen optreden t.g.v. het warmtelek door het glas, hetgeen ook al om andere redenen te veronderstellen is. De $\dot{H}(I)$ -krommen vertonen dan ook de gedaante van fig. 28, waarbij echter de belangrijke punten bij lage I (op de rechte) bij ons afwezig zijn. Ook zijn de toegevoerde energieën in ons geval 5 à 10 maal lager. Volgens onze opvatting kan verder de formele overeenstem-

ming met fig. 25b en 26b dus niet een wezenlijke overeenstemming zijn.

De afwijking van het lineaire verloop bij hoge I nu wordt geweten aan energieverliezen, die het gevolg zijn van de optredende wrijvingskrachten. Deze energieverliezen verlopen inderdaad nl. ongeveer evenredig met v^4 ; een hieruit geschatte A -waarde komt echter ca. 100 maal te hoog uit, in overeenstemming met onze vroegere opmerking, dat de wederkerige wrijving energetisch verwaarloosd mag worden. Gezien het feit, dat onze interpretatie van deze afwijking in het geval van de 6μ -experimenten gerechtvaardigd bleek, alsook van het feit, dat de invloed van het warmtelek geheel niet beschouwd werd, zijn wij geneigd ook in de Engelse metingen de afwijkingen op onze wijze te interpreteren en deze dus niet als wrijvingsenergieverliezen te zien. Historisch gezien is de overweging, dat deze verliezen te hoog waren en ook het warmtelek een rol moest spelen, de aanleiding geweest tot de analyse in deze richting van onze eigen experimenten en tot dit gedeelte van het formalisme. Deze gewijzigde interpretatie doet echter geen afbreuk aan het feit, dat de gevonden Γ_d -krommen op het bestaan van een critische snelheid wijzen.

Inleiding

Wanneer wij aan het binnenvolume voortdurend een bepaalde energie per tijdseenheid blijven toevoeren, zal tenslotte een evenwichtstoestand bereikt worden, wanneer tengevolge van het ontstane druk- en temperatuurverschil even veel energie met het wegstromende normale fluidum verdwijnt, als electrisch wordt toegevoerd. Bij deze warmtegeleidingsmetingen wordt het stationnaire temperatuurverschil ΔT gemeten (terwijl het voor de hand ligt zo mogelijk tevens het daarbij optredende stationnaire drukverschil Δp te bepalen), dat zich instelt bij een bepaald toegevoerd vermogen. Voornamelijk worden alleen ΔT -bepalingen gedaan (cf. IIA; 3b). Dit is reeds talrijke malen in analoge toestellen uitgevoerd (KEESOM, DUYCKAERTS, SARIS, MEYER, MELLINK), waarbij meestal verschillende spleetwijdtegebieden bestreken werden. Dat wij wederom met warmtegeleidingen bezig waren, had verschillende redenen, die wij in de loop van het voorgaande (cf. ook ID) tegenkwamen en samengevat hierop neerkomen.

1. Het is van belang de invloed van de wederkerige wrijving op het verloop van $W(\Delta T)$ te onderzoeken, hetgeen bovendien gelijktijdig met de andere metingen in deze richting gedaan kon worden. Verder is bij geschikte keuze van het spleetwijdtegebied ook bij lage snelheden met goede nauwkeurigheid te meten, waardoor het gedrag in de buurt van de critische snelheid in beginsel te onderzoeken is. Feitelijk is dit bij onze metingen zelfs de eerste aanwijzing voor deze snelheid geweest. Bij kleine h vervalt overigens dit gedeelte van het onderzoek, zoals nader betoogd zal worden.

2. Voorts waren direct uit de helling in $\Delta T = 0$ aan de $W(\Delta T)$ -krommen de waarden van η_n/h^3 te verkrijgen, hetgeen dus opleverde $\eta_n(h, T)$ voor bekende h , of h bij bekende η_n (cf. IIC; 3 en 4). Dit laatste was veelal ook zeer belangrijk.

De hier gegeven indeling 1 en 2 is hieronder terug te vinden.

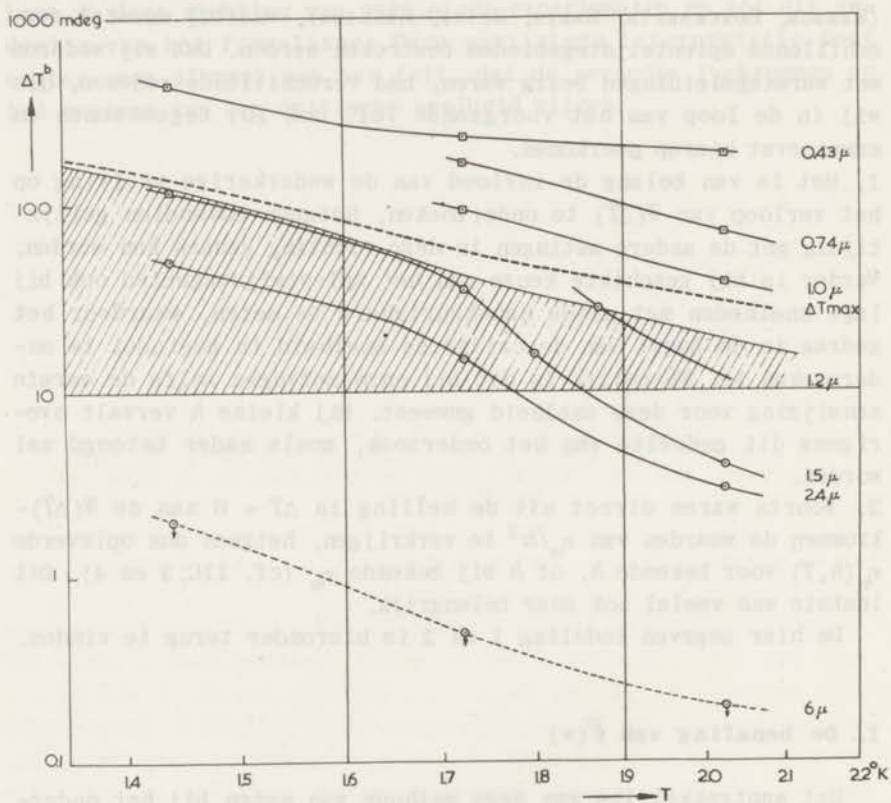
1. De bepaling van $\bar{F}(v)$

Het aantrekkelijke van deze methode van meten bij het onderzoek naar de wrijvingsverschijnselen is, dat de betrekking $\bar{j}_m = 0$ impliceert, dat $\rho_n v_n + \rho_s v_s = 0$, d.w.z. dat $v_n \sim v_s = \alpha_1 W$. Wij kunnen dus elke snelheid v_s door de keuze van W aan het superfluidum opdringen en deze ook willekeurig lang in stand houden. Ook voor

elk van de fluida zijn deze metingen derhalve stationnair. De evenredigheidsfactor α_1 is zeer afhankelijk van h en T , zoals b.v. uit (24) al direct blijkt.

In eerste instantie lijkt dit dus de mooiste methode om het gehele snelheidsgebied door te meten en dus speciaal ook het gebied in de buurt van de kritische snelheid. Dit noemden wij reeds in IIIB;1. Er zijn echter grote praktische belemmeringen, die het gebruik van deze methode aanzienlijk beperken.

α) Wij kunnen W niet willekeurig opvoeren, omdat de hierbij behorende Δp en dus ΔT niet groter kan worden dan een maximale waarde, ΔT_{\max} , door de constructie van het toestel gesteld. Hiervoor verwijzen wij naar IIA;1. In fig. 29 is de temperatuurafhankelijke ΔT_{\max} , als functie van T te vinden. Overigens zijn ook om andere redenen (relatief) grote temperatuurverschillen niet wenselijk.



Figuur 29

ΔT^b als functie van T met parameter h .

○ : experimentele waarden.

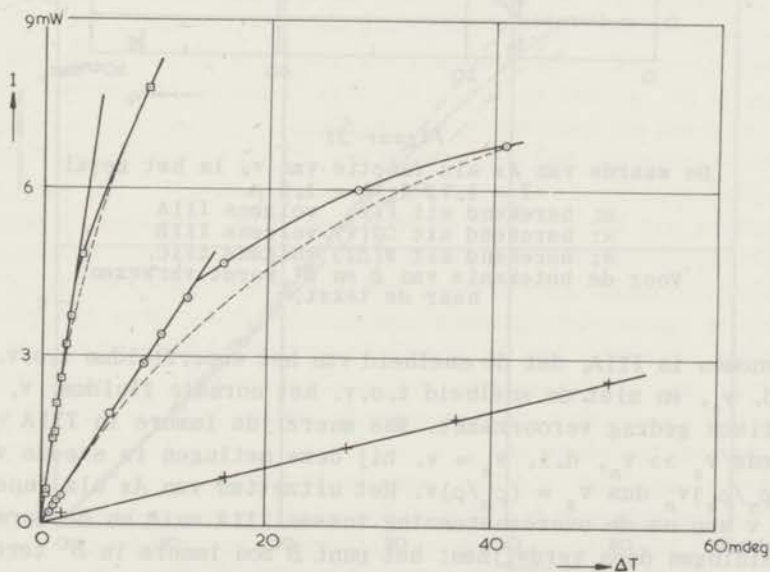
□ : berekende waarden.

Voor de betekenis van ΔT_{\max} en van het gearceerde gedeelte wordt verwezen naar de tekst.

β) In het gebied waar $F = 0$, kunnen wij schrijven: $v_s = \alpha_2 \Delta T$, en een kritische waarde v_s^b correspondeert met een kritische waarde van $\Delta T: \Delta T^b$. Deze waarde van ΔT^b is dan ook weer zeer afhankelijk van h en T . Ter oriëntatie werd fig. 29 samengesteld, waar de gemeten ΔT^b -waarden uitgezet zijn als functie van T met parameter h . Bij 6μ hebben wij slechts een bovengrens kunnen bepalen, terwijl voor $h < 1,2 \mu$ de ΔT^b -waarden berekend moesten worden uit gegevens over v_s^b , langs andere weg verkregen. Het is mogelijk dat fig. 29 ook bij constructie van toestellen in de toekomst wel eens bruikbaar zal blijken.

γ) Teneinde de beide facetten ($F = 0$ en $F > 0$) van de $W(\Delta T)$ -krommen goed te kunnen bepalen, moet dus zowel het traject $\Delta T < \Delta T^b$, als ook $\Delta T > \Delta T^b$ een "redelijke lengte" beslaan. Stellen wij deze lengte op ongeveer 10 milligrad (hetgeen nodig zal blijken voor de vele details, die wij willen waarnemen), dan blijkt deze methode op grond van de overwegingen α), β) en γ) zeer beperkt te gebruiken voor het gestelde doel, en wel slechts in het gearceerde gedeelte van fig. 29. Alleen in dit gebied zullen dus de resultaten van IIIA en B met die van de warmtegeleidingen vergeleken kunnen worden.

In fig. 30 hebben wij weer enkele $W(\Delta T)$ -krommen gegeven met $W = (-)I$. De resultaten hiervan willen wij als volgt weergeven.

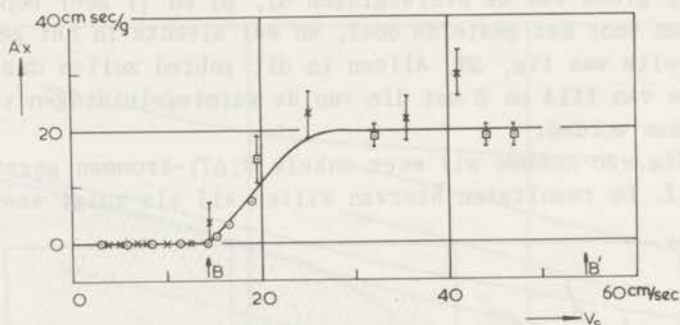


Figuur 30

- I als functie van ΔT met parameter T ; $h = 2,4 \mu$.
- : het verloop volgens (24), aangepast aan onder en boveinde.
 - : $T = 2,02^\circ\text{K}$.
 - : $T = 1,72^\circ\text{K}$.
 - +

1a. De afhankelijkheid van W van ΔT verloopt, in overeenstemming met de gevonden resultaten in IIIA en B, scherper dan overeenkomt met (24). Dit hebben wij aangetoond, door in fig. 30 met stippellijnen aan te geven het verloop volgens een derde macht, aangepast in 0 en in het hoogste gemeten punt. Op andere wijze is het nog te zien, door de afwijking van de rechte lijn gelijk te stellen aan de W^3 -term uit (24) en dan A te berekenen. De resultaten in een enkel geval zijn weergegeven in fig. 31, waar deze berekende A_x -waarden uitgezet zijn als functie van v_s , tesamen met de resultaten uit IIIA. Eveneens hebben wij in fig. 31 de afhankelijkheid van de "overshoot" \square_c^o als functie van v_s op deze wijze afgebeeld. De overeenstemming tussen de verschillende metingen is bevredigend.

Eveneens geeft fig. 31 de verantwoording van het standpunt,



Figuur 31

De waarde van A_x als functie van v_s in het geval

$$T = 1,72^{\circ}\text{OK}; h = 1,5 \mu.$$

\square : berekend uit $F(v)$ volgens IIIA

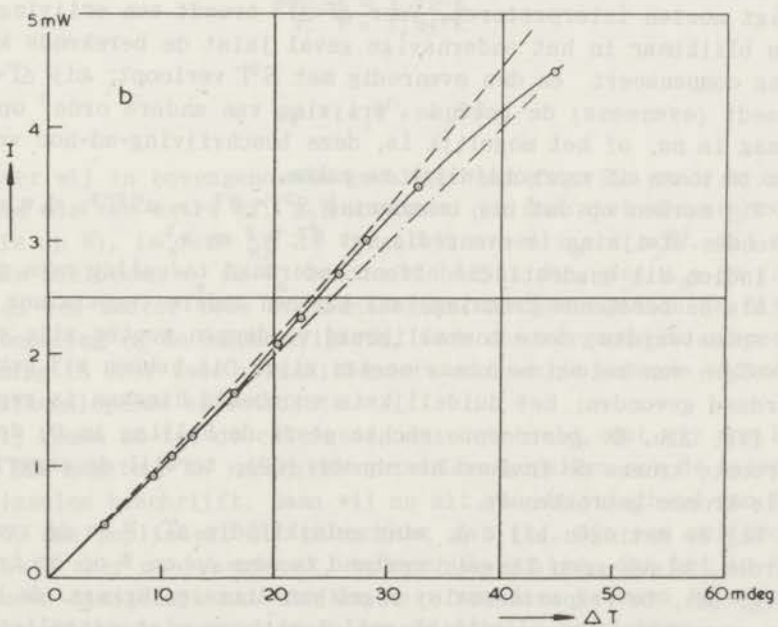
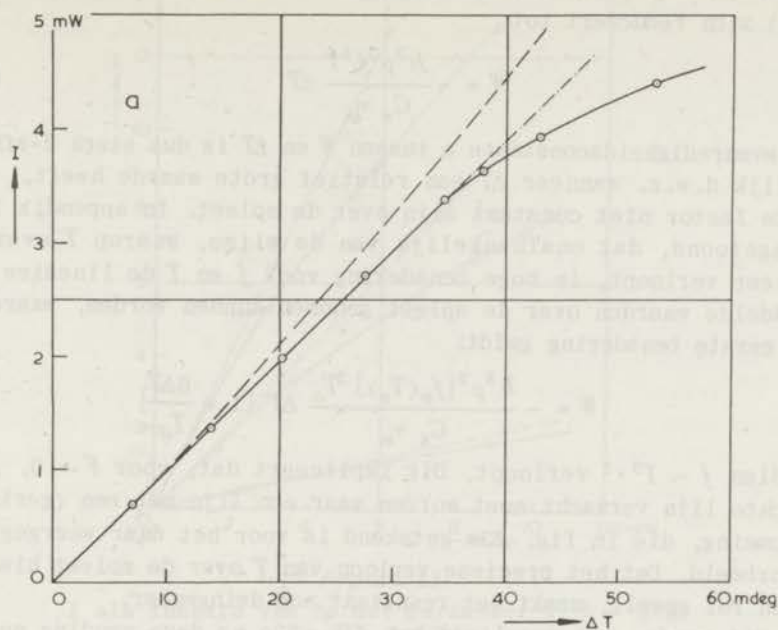
\times : berekend uit $\square_c^o(v)$ volgens IIIB

\circ : berekend uit $W(\Delta T)$ volgens IIIC.

Voor de betekenis van B en B' wordt verwezen naar de tekst.

ingenomen in IIIA, dat de snelheid van het superfluidum t.o.v. de wand, v_s , en niet de snelheid t.o.v. het normale fluidum, v , het kritisch gedrag veroorzaakt. Was enerzijds immers in IIIA en B steeds $v_s \gg v_n$, d.i. $v_s \approx v$, bij deze metingen is steeds $v_s = (\rho_n/\rho_s)v_n$ dus $v_s = (\rho_n/\rho)v$. Het uitzetten van A_x als functie van v zou nu de overeenstemming tussen IIIA en B en de warmtegeleidingen doen verdwijnen: het punt B zou immers in B' terecht komen.

1b. Een tweede groep resultaten wordt hier gevormd door het gedrag in de buurt van de kritische snelheid. In verband met de geringe mogelijkheden, vonden wij slechts een enkele maal een bijzonder mooie Γ_d -kromme gerealiseerd, waarvan een voorbeeld is ge-



Figuur 32

I als functie van ΔT ; a. $T = 1,720\text{K}$; $h = 1,5 \mu$

b. $T = 1,870\text{K}$; $h = 1,2 \mu$

- · - · - · - : de helling in $\Delta T = 0$

- - - - - : het theoretische verloop volgens (69).

geven in fig. 32a. Het merkwaardige is echter, dat voor $F = 0$, (24) zich reduceert tot:

$$W = - \frac{h^3 \rho^2 f^2 T}{C_4 \eta_n} \Delta T \quad (68)$$

De evenredigheidsconstante α tussen W en ΔT is dus sterk T -afhankelijk d.w.z. wanneer ΔT een relatief grote waarde heeft, zal deze factor niet constant zijn over de spleet. In appendix 3 is aangetoond, dat onafhankelijk van de wijze, waarop T over de spleet verloopt, in hoge benadering voor f en T de lineaire gemiddelde waarden over de spleet genomen kunnen worden, waardoor in eerste benadering geldt:

$$W = - \frac{h^3 \rho^2 [f_o(T_o)]^2 T_o}{C_4 \eta_n} \Delta T \left[1 + \frac{6\Delta T}{T_o} \right] \quad (69)$$

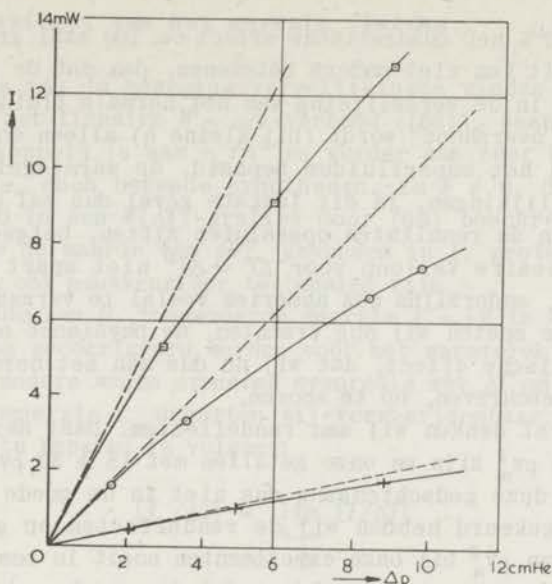
indien $f \sim T^{5.5}$ verloopt. Dit impliceert dat, voor $F = 0$, geen rechte lijn verwacht moet worden maar een lijn met een (geringe) kromming, die in fig. 32a getekend is voor het daar weergegeven voorbeeld. Dat het preciese verloop van T over de spleet hierbij geen rol speelt, maakt het resultaat nog dwingender.

Wij zouden het resultaat van fig. 32a na deze wending nu als volgt moeten interpreteren. Voor $\Delta T < \Delta T^b$ treedt een wrijving op, die blijkbaar in het onderhavige geval juist de berekende kromming compenseert en dus evenredig met $S^2 T$ verloopt; bij $\Delta T = \Delta T^b$ treedt (eveneens) de bekende "wrijving van andere orde" op. De vraag is nu, of het mogelijk is, deze beschrijving-ad-hoc verder aan te tonen of waarschijnlijk te maken.

α) Wij merken op dat bij benadering $S^2 T \sim W^2$ ($= \alpha S^2 T^2$), d.w.z. de gevonden afwijking is evenredig met W^2 , v_n^2 en v_s^2 .

β) Indien dit quadratische effect inderdaad *toevallig* even groot is als de berekende kromming, zal bij een andere temperatuur (en/of spleetwijdte) deze toevalligheid verdwenen moeten zijn en de gevolgen van beiden merkbaar moeten zijn. Dit hebben wij ook inderdaad gevonden; het duidelijkste voorbeeld hiervan is gegeven in fig. 32b. De gestreepte rechte geeft de helling in 0, de gestreepte kromme de invloed hierop van (69), terwijl de experimentele kromme getrokken is.

γ) Bij de metingen bij 6μ , waar gelijktijdig ΔT , W en Δp gemeten werden, bleek geen lineair verband tussen Δp en W op te treden (fig. 33). De (experimentele) regel van ALLEN en REEKIE, de basis van onze bewegingsvergelijkingen, leek hier niet gerealiseerd. Het blijkt wel mogelijk, het gevonden resultaat nauwkeurig te beschrijven met de gebruikelijke lineaire term, echter vermeerderd met een correctieterm, die quadratisch is in W , dus in v_s en v_n , waardoor:



Figuur 33

I als functie van Δp met parameter T ; $h = 6 \mu$.

□: $T = 2,02^\circ\text{K}$

○: $T = 1,72^\circ\text{K}$

+ : $T = 1,44^\circ\text{K}$

$$\Delta p = a_1 W + a_2 W^2$$

Wanneer wij in bovengenoemde gevallen van fig. 32a en b de correctie als een extra ΔT : $\Delta_2 T$ opvatten (en dus niet als een correctie op W), is deze $\Delta_2 T$ te vergelijken met $\Delta_2 p = a_2 W^2$. Bij dezelfde snelheden v_s en v_n beschouwd blijkt dan, dat $\Delta_2 p$ en $f \Delta_2 T$ binnen een factor twee overeenstemmen, hetgeen gezien de wijze van bepaling en de nauwkeurigheid, toch een verrassende overeenstemming is voor twee verschillend te voorschijn komende effecten bij uiteenlopende spleetwijdte.

Wij komen zo tot de conclusie, dat het beeld, dat wij ons bij fig. 32a maakten, in verschillende andere gevallen ook de bijverschijnselen beschrijft. Gaan wij nu uit van de juistheid van dit beeld, dan impliceert dit enerzijds, dat fig. 32a een kritische snelheid zeer mooi aantoon, anderzijds echter, dat het in het algemeen onmogelijk zal blijken meer van deze krommen te meten: de verschillende correcties zullen de details vervlakken.

Wij willen nu verder eerst de grootte van dit quadratische effect vergelijken met de lineaire wrijving, die wij in IIIB bij de "overshoot" tegen kwamen. Berekening geeft, dat bij $T = 2,02^\circ\text{K}$ beide effecten dezelfde orde van grootte hebben; daarentegen is

bij $T = 1,72^{\circ}\text{K}$ het quadratische effect ca. 100 maal groter dan het lineaire. Dit kan niet anders betekenen, dan dat de quadratische term alleen in de vergelijking van het normale fluidum voorkomt. Immers, de "overshoot" wordt (bij kleine h) alleen door de vergelijking van het superfluidum bepaald, de warmtegeleiding door beide vergelijkingen. In dit laatste geval dus zal ook de lineaire term in de resultaten opgesloten zitten, hetgeen enerzijds bij het lineaire verloop voor $\Delta T < \Delta T^b$ niet apart merkbaar en meetbaar is, anderzijds ook numeriek veelal te verwaarlozen is.

Tenslotte moeten wij nog trachten, de fysische oorsprong van het quadratische effect, dat wij nu dus aan het normale fluidum hebben toegeschreven, op te sporen.

α) Allereerst denken wij aan randeffecten. Daar deze doorgaans van de orde ρv_n^2 zijn en onze getallen met 15 à 30 ρv_n^2 overeenkomen, lijkt deze gedachtengang dus niet in de goede richting te wijzen. Omgekeerd hebben wij de randeffecten op grond van de schatting van ρv_n^2 bij onze experimenten nooit in beschouwing genomen. Wij kunnen nog vermelden, dat ATKINS de randeffecten in zijn metingen (stroming van het superfluidum door capillairen) experimenteel bepaald heeft en hiervoor eveneens de waarde $\rho \bar{v}^2$ (nl. $(1,05 \pm 0,05)\rho \bar{v}^2$) gevonden heeft.

β) Voorts is het denkbaar dat er t.g.v. oneffenheden in het oppervlak, in de spleet zelf verliezen optreden. Wij zouden dan verwachten, hierbij een h -afhankelijkheid te vinden. De schaarse gegevens bij 6μ en $1,5 \mu$ geven geen aanwijzingen in deze richting.

γ) Tenslotte zij nog gewezen op de bewegingsvergelijkingen van PRIGOGINE en MAZUR ^{51,2} (cf. IB; 2b). Hierin komt, behalve de termen uit (3') en (4'), nog een extra term voor (overigens in beide vergelijkingen) evenredig met Jv , waarbij J de hoeveelheid normaal fluidum (superfluidum) is, dat per sec per cm^3 omgezet wordt. Ook deze term is in ons geval evenredig met v^2 . Numeriek is echter de invloed van deze term moeilijk te bepalen.

Wij concluderen, dat de $W(\Delta T)$ -krommen, door het beperkte gebied, waarin a priori metingen te verrichten zijn (fig. 29) en door de blijkbaar optredende storingseffecten, veel minder bruikbaar zijn voor de bepaling van $\bar{F}(v)$ en ΔT^b dan aanvankelijk verwacht werd. Het gedrag van $\bar{F}(v)$ blijkt overigens dus in overeenstemming met de resultaten van IIIA en B, terwijl de waarden van ΔT^b in IV;1 nog ter sprake zullen komen bij de bepaling van de numerieke waarden van v_s^b .

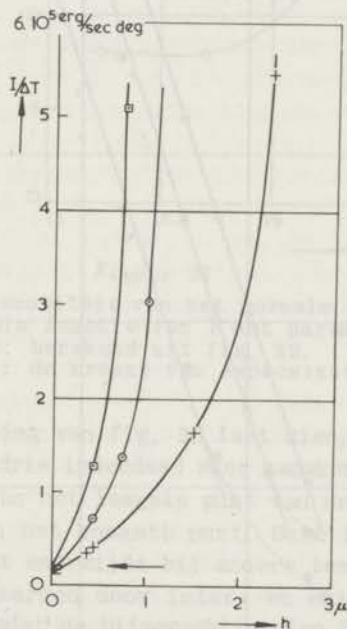
2. De viscositeit van het normale fluidum

Uitgaande van de bewegingsvergelijkingen vinden wij, in het geval $F = 0$, het lineaire $W = \alpha \Delta T$ -verband ((68)), waarbij de waarde van α gekoppeld is aan η_n/h^3 en verder aan zeer temperatuurafhankelijke, doch bekende grootheden. Is $F \neq 0$, dan wordt de helling in 0 in een $W(\Delta T)$ -grafiek door (68) beschreven. Voorts zal naarmate de waarde van ΔT^b , gevonden in 1, groter wordt, de waarde van α ook nauwkeuriger te bepalen zijn.

Alvorens de aan B_i toegevoerde energie $I = -W$ te kunnen stellen, moet nog gecorrigeerd worden voor het warmtelek I_q , dat via het glas en andere wegen eveneens evenredig met ΔT op kan treden. De stralingsenergie I_p schatten wij verwaarloosbaar. De mooiste wijze om I_q te bepalen is volgens:

$$[I_q/\Delta T] = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta T \rightarrow 0}} [I/\Delta T] \quad (70)$$

Hiertoe hebben wij in fig. 34 de waarde van $I/\Delta T$ (bij $\Delta T = 0$) uitgezet als functie van h . Teneinde een lineaire schaal te kun-



Figuur 34

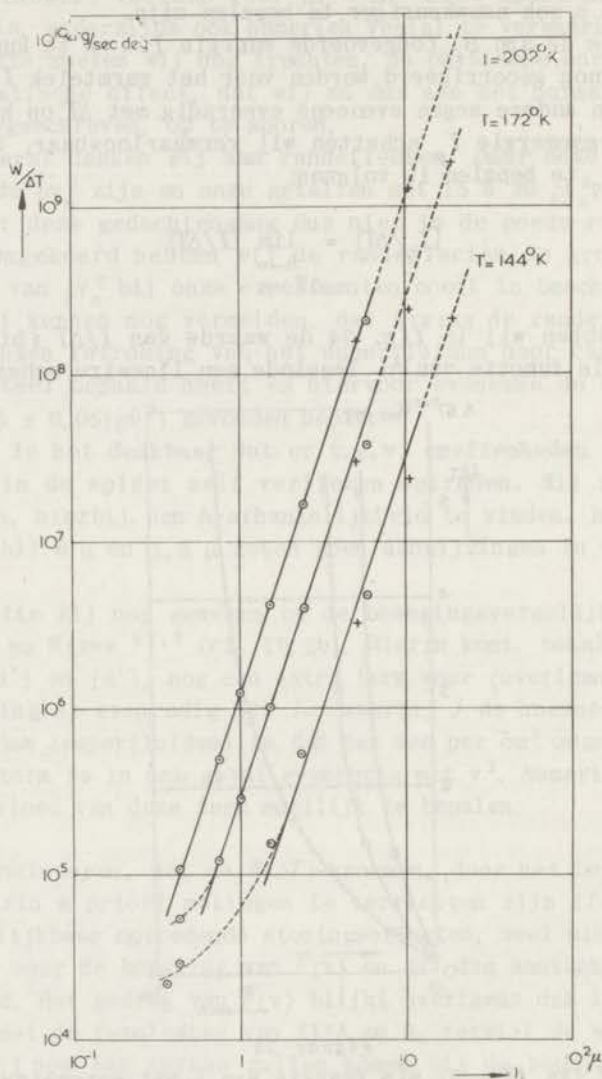
$I/\Delta T$ (in $\Delta T = 0$) als functie van h met parameter T en met $I/\Delta T < 6 \cdot 10^5$ erg/sec graad.

□: $T = 2,02^\circ\text{K}$

○: $T = 1,72^\circ\text{K}$

+: $T = 1,44^\circ\text{K}$

nen gebruiken, werden slechts de waarden $I/\Delta T < 6 \cdot 10^5$ erg/sec grad aldaar weergegeven. Nu werd op grond van de metingen van BIJL^{48,5} geschat, dat de orde van grootte van de geleiding door het glas de totale warmtegeleiding bij de nauwste spleten benaderde. Derhalve hebben wij ons bij de extrapolatie naar $h = 0$ in fig. 34 laten leiden door de door BIJL aangegeven temperatuurafhankelijkheid van deze geleiding. Ook hadden wij nog de beschikking over

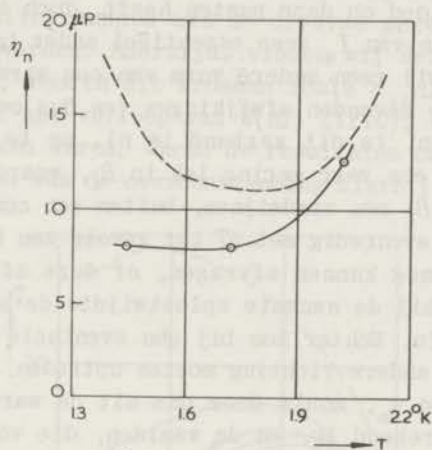


Figuur 35

$W/\Delta T$ (in $\Delta T = 0$) als functie van h met parameter T .
 ○: eigen metingen.
 +: ontleend aan metingen van MELLINK.

een directe bepaling van I_q bij $T = 2,3^{\circ}\text{K}$. Bij deze temperatuur werd nl. eveneens de totale warmtegeleiding bepaald, die hier gelijk is aan I_q , daar boven het Δ -punt geen warmtegeleiding door de spleet plaats vindt. Hoewel ons toestel voor deze bepaling niet zeer geschikt is en de nauwkeurigheid van de meting dan ook niet groter zal zijn dan ca. 20%, werd steeds hetzelfde resultaat gevonden, aangegeven in fig. 34.

Wij corrigeren nu de waarden van I met I_q en stellen $I - I_q = -W$. In fig. 35 is dan $W/\Delta T$ als functie van h op logaritmische wijze uitgezet. Het resultaat is dus in eerste instantie steeds een lijn met helling drie in overeenstemming met (68), waardoor nauwkeurige η_n -waarden te berekenen zijn. Deze zijn gegeven in fig. 36 tesamen met de kromme van ANDRONIKASHVILI ^{48,7}.



Figuur 36

De viscositeit van het normale fluidum, η_n , als functie van T met parameter h .
 ○: berekend uit fig. 35.
 -----: de kromme van ANDRONIKASHVILI.

Nadere beschouwing van fig. 35 laat zien, dat bij $T = 2,02$ en $1,72^{\circ}\text{K}$ de helling drie inderdaad zeer nauwkeurig is gerealiseerd, met uitzondering van het laagste punt van de krommen (waarop wij nog terugkomen) en het hoogste punt. Deze laatsten zijn echter onnauwkeurig, omdat enerzijds bij andere temperaturen gemeten is en de opgegeven waarden door inter- en extrapolatie verkregen zijn, anderzijds omdat de bijverschijnselen bij deze spleetwijdte de bepaling van de helling in $\Delta T = 0$ bemoeilijkten. Toch schatten wij de nauwkeurigheid a priori beter dan uit de (ook nog temperatuurafhankelijke) afwijkingen van de rechten zou volgen.

Wij hebben deze figuur nog aangevuld met metingen van MELLINK, ontleend aan litt. 50,1. De overeenstemming met onze resultaten

is goed te noemen, al is de nauwkeurigheid lager, zoals is opgegeven. Het is opvallend, dat de kwalitatieve afwijkingen van de rechten bij elke temperatuur dezelfde is. Dit zou suggereren, dat de grootste onnauwkeurigheid door h veroorzaakt wordt.

Bij $T = 1,44^{\circ}\text{K}$ is het verloop minder eenvoudig. Wij hebben ons bij de keuze van de getrokken rechte laten leiden door het gedrag gevonden bij de twee andere temperaturen en door de overweging, dat de afwijking aan de lage zijde bij deze temperatuur zich mogelijk tot meer dan één punt uitstrekt. De nauwkeurigheid van η_n bij deze temperatuur is dus wat lager dan bij de andere temperaturen.

Ten aanzien van de waarden van $W/\Delta T$, gemeten bij de laagste h , is nog op te merken, dat de bijdrage van I_q tot de totale warmtegeleiding een belangrijk percentage bedraagt en de onzekerheid in I_q dus enige invloed op deze punten heeft. Toch is met eventueel gewijzigde waarden van I_q geen essentiële ander beeld te verkrijgen. Ook hebben wij geen andere vorm van een warmtegeleiding van de grootte van de gevonden afwijkingen (en dus ook evenredig met ΔT) kunnen vinden. In dit verband is nl. op te merken, dat de aanwezigheid van een zeer gering lek in B_i , waardoor voortdurend superfluidum uit B_i zou verdwijnen, buiten een constant warmtelek ook een gedeelte evenredig met ΔT tot gevolg zou hebben. Tenslotte zou men zich nog kunnen afvragen, of deze afwijkingen reëel zijn, omdat nl. bij de nauwste spleetwijdte de spleet het minst homogeen moet zijn. Echter zou bij een eventuele invloed hiervan een effect in de andere richting moeten optreden.

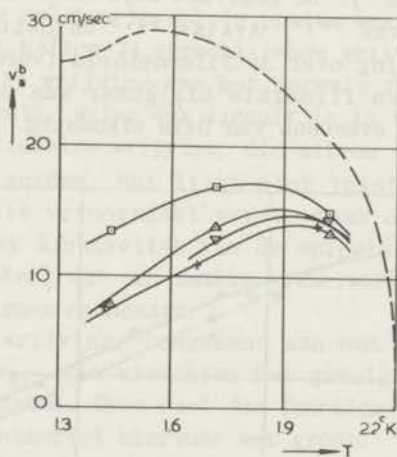
De waarden van η_n , zoals door ons uit de warmtegeleiding in nauwe spleten berekend is, en de waarden, die volgen uit de metingen met de slingerende schijf in de vloeistof afkomstig van ANDRONIKASHVILLI, vertonen een goede overeenstemming in orde van grootte. Dat onze waarden wat lager liggen kan dus zowel veroorzaakt zijn door het verschil tussen de afmetingen van de beschouwde vloeistofvolumina, als ook door dat tussen de gebruikte meetmethoden. De bewering als zou deze lagere viscositeit bij kleine h met vrije weglengte effecten te maken hebben zoals bij een Knudsen gas (d.i. $W/\Delta T \sim h^2$), is door onze experimenten weerlegd. De goede evenredigheid tussen $W/\Delta T$ en h^3 impliceert, dat wij met een echte viscositeit te maken hebben. Ook de afwijkingen tussen de gemeten waarden van $W/\Delta T$ en de, uit de getrokken rechte geëxtrapoleerde waarden verlopen bij $T = 1,44^{\circ}\text{K}$ eerder met een eerste macht van h dan met een tweede.

H o o f d s t u k I V

S L O T B E S C H O U W I N G E N

1. Numerieke gegevens over kritische snelheden

Langs verschillende wegen zijn wij in het vorige hoofdstuk de kritische snelheid tegen gekomen, de snelheid dus van het superfluidum ten opzichte van de wand van de spleet, waar belangrijke afwijkingen van de superfluiditeit beginnen op te treden. Hierbij zijn steeds numerieke waarden vermeden. Thans, nu alle experimenten beschreven zijn, kunnen uit de diverse gegevens de waarden van v_s^b berekend worden. Enerzijds vinden wij deze uit de $\square^\circ(v)$ -krommen (IIIB; 1), voorts uit krommen zoals $d_{10}\Delta T(I)$ (IIIB; 2) en tenslotte ook uit het verloop van $W(\Delta T)$ (IIIC). Wanneer meer methoden te gebruiken waren, waren de resultaten onderling te vergelijken. Algemeen was de overeenstemming hierbij bevredigend.



Figuur 37

De kritische snelheid v_s^b als functie van T met parameter h .

+: $h = 3,1 \mu$ (lange spleet)

∇: $h = 2,4 \mu$

△: $h = 1,5 \mu$

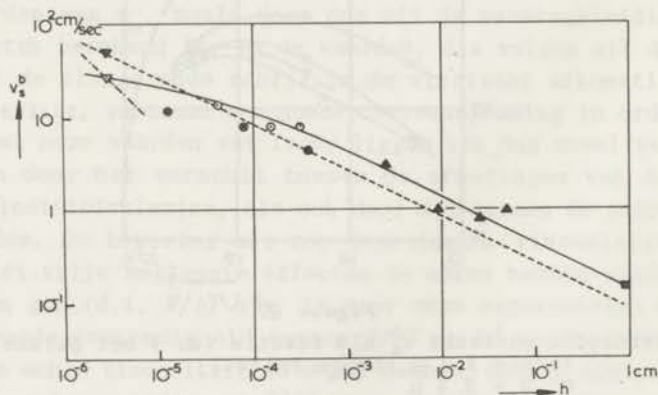
□: $h = 0,43 \mu$

-----: de filmsnelheid v_f als functie van T .

In fig. 37 zijn deze waarden uitgezet als functie van T met parameter h . Eveneens is hierbij de filmsnelheid v_f getekend, berekend uit de metingen van DAUNT en MENDELSSOHN^{39,2} volgens $R =$

$v_f d \rho_s / \rho$, als R het opgegeven volumetransport per cm is. Voorts is voor de filmdikte de waarde $d = 3.10^{-6}$ cm aangenomen. Wij zien dus een vrij regelmatig verloop optreden, waarbij v_s^b afneemt met toenemende h . Ook is de serie bij $h = 3,1 \mu$, gemeten bij de lange spleet, in overeenstemming met de overige resultaten (korte spleet). Volledigheidshalve zij vermeld, dat een tweetal gegevens bij $T = 1,5$ en $1,7^{\circ}\text{K}$, gemeten in de lange spleet bij $1,6 \mu$, belangrijk kleiner zijn dan uit fig. 37 zou volgen. De betekenis hiervan is niet geheel duidelijk.

Volgens een suggestie van DASH ^{54,1} zou de critische snelheid volgens $(\rho_s)^{-1/2}$ van de temperatuur afhangen. Dit nu is in geen dele gerealiseerd en is ook niet in overeenstemming met de filmsnelheden van DAUNT en MENDELSSOHN. Volgens DASH zijn de metingen van JACKSON en HENSHAW ^{50,6} dit wel, mits deze met verbeterde ρ_s -waarden worden herberekend. Volgens dezelfde bron zou verder ook nog een verband tussen v_s^b en h bestaan van de vorm: $v_s^b \sim h^{-1/2}$. Dit is dan in tegenstelling met de gebruikelijke opvatting, alwaar deze afhankelijkheid volgens h^{-1} zou moeten verlopen. In fig. 38, die wij uit DASH hebben overgenomen, is deze $h^{-1/2}$ -afhankelijkheid inderdaad goed benaderd over een uitgestrekt traject (een factor 10^6 !). De gegevens zijn ontleend aan de metingen van ALLEN en MISENER ^{39,4}, ATKINS ^{51,5} en HOLLIS-HALLETT ^{52,1}, alsmede aan de meting over de filmsnelheid (vermoedelijk JACKSON en HENSHAW) met een filmdikte blijkbaar van 3.10^{-6} cm. De gestreepte kromme is eveneens van DASH afkomstig.



Figuur 38

- v_s^b als functie van de spleetwijdte h .
- $\nabla, \bullet, \blacktriangle, \blacksquare$: v_s^b volgens DASH (metingen resp. van JACKSON-HENSHAW (film), ALLEN-MISENER, ATKINS en HALLETT)
 - , ∇ : v_s^b volgens DAUNT-MENDELSSOHN (film)
 - \odot : eigen metingen (fig. 37; $T = 1,44^{\circ}\text{K}$).

Wij hebben deze figuur aangevuld met onze punten bij de laagste temperatuur, omdat de andere gegevens ook aan lage temperaturen ontleend zijn. Ook hebben wij de filmgegevens van DAUNT en MENDELSSOHN aangegeven door een lijn (daar immers $v_f d$ de gemeten grootheid is). Voor $d = 3 \cdot 10^{-6}$ cm vinden wij het aangegeven punt. De op deze wijze verkregen totale verzameling van punten zou een verloop suggereren volgens de getrokken lijn. Het gedrag volgens $h^{-1/2}$ blijft dus gerealiseerd, maar bij lage h wordt dit afgevlakt en nadert een soort verzadigingswaarde. Men zou kunnen denken, dat dit samenhangt met een invloed van de wand op de beweging van het superfluidum.

Het resultaat van fig. 38 zou nog wel suggereren dat de meting van v_s^b volgens één methode en met zoveel mogelijk hetzelfde toestel over een groot h -gebied gewenst is. Hierop komen wij onder 3c nog terug.

2. Samenvatting

Wij willen een korte samenvatting over de gedragingen van helium II in nauwe spleten in enkele punten weergeven.

2a. Er treden in helium II verschillende wrijvingen op:

α) Een Poiseuille wrijving van het normale fluidum (dat hieraan zijn naam ontleent), welke dus lineair is in v_n .

β) Een geringe lineaire wrijving, die alleen aan het superfluidum toegekend moet worden. Het lijkt niet juist dat deze door een echte viscositeit veroorzaakt wordt, daar de numerieke waarde hiervan dan sterk afhankelijk van de spleetwijdte zou zijn. Het is niet uitgesloten, dat een zwakke wisselwerking met het normale fluidum zich hiermee openbaart.

γ) Een geringe wrijving, toegekend aan het normale fluidum en quadratisch in v_n , die misschien het gevolg is van onvolkomenheden van het toestel. Deze doet dus functioneel aan randeffecten denken, maar is numeriek hiervoor wat groot.

δ) Een sterke wrijving, die binnen onze meetnauwkeurigheid plotseling begint bij een bepaalde snelheid van het superfluidum, en steil met v toeneemt (boven v_s^b evenredig met v^3). Deze wrijving hebben wij geïdentificeerd met de wederkerige wrijving tussen de twee fluida, verondersteld door GORTER en MELLINK, welke dus gekoppeld is aan de relatieve snelheid. Blijkbaar brengt de wand het superfluidum in een toestand, die een sterke koppeling met het normale fluidum tot gevolg heeft. Deze wisselwerking komt dus op verschillende wijzen steeds weer in de resultaten tot uiting en is de oorzaak en de kern van het beschreven onderzoek. De snelheid, waarbij deze wrijving inzet, hebben ook wij de criti-

sche snelheid genoemd, in overeenstemming met de gebruikelijke nomenclatuur. Volgens β) bestaat dus ook beneden deze snelheid niet volkomen superfluiditeit.

2b. Met de bewegingsvergelijkingen en de energiebalans als uitgangspunt, liet zich een overzichtelijk formalisme afleiden, waarmee diverse aspecten van de stroming van helium II te beschrijven zijn. Hoewel hierin voor F noodzakelijkerwijs een continue functie genomen werd van de gedaante v^m , waren de resultaten van het formalisme op veel punten te testen. Dit werd veroorzaakt enerzijds doordat de beschrijving voor $v_s < v_s^b$ verkregen wordt door $F = 0$ te stellen, anderzijds doordat bleek dat in verschillende resultaten de invloed van F verdwenen was. Bovendien is slechts een enkele maal een speciale keuze voor de macht m nodig geweest. Hiervoor werd dan $m = 3$ genomen; voor andere waarden zijn analoge andere resultaten te verkrijgen. Mits de veronderstelling van een kritische snelheid nog aan het uitgangspunt wordt toegevoegd, werd dus steeds volledige overeenstemming tussen het formalisme en de experimenten gevonden.

3. Slotopmerkingen

Tenslotte willen wij nog enige opmerkingen maken over een mogelijk (en onmogelijk) verder experimenteren.

3a. Het lijkt ons niet mogelijk meer gegevens te verkrijgen over de stroming van helium II met de huidige opstelling (afgezien uiteraard van eventuele verdere variaties in lengte en breedte van de spleet). De nauwkeurigheid van de metingen en de constantheid van de badtemperatuur zouden naar onze mening moeilijk te verbeteren zijn. Ook zijn wij niet van oordeel, dat een mechanisatie van één en ander betere resultaten kan geven. Een hogere nauwkeurigheid zou dus slechts gerealiseerd kunnen worden door een gewijzigde dimensionering van het toestel. Bovendien zou dit dan slechts betrekking hebben op de experimenten uit IIIB (en gedeeltelijk IIIA). Hiertoe kan het formalisme IIB gegevens verschaffen. Er blijkt echter, dat het huidige toestel in vele opzichten optimaal geconstrueerd is. Slechts indien wij \bar{V} belangrijk vergroten (zonder O daarmee te vergroten) en voor verschillende spleetbreedte- en temperatuurgebieden afzonderlijke bovenstukken van het toestel (K_2 in fig. 6) met verschillende O construeren, zijn hogere nauwkeurigheden in principe te verkrijgen. Het is niet uitgesloten, dat dan echter bijverschijnselen (trillingen, lineaire $\square^\circ(v)$ (cf. IIIB;1)) ook belangrijker worden en de wijzigingen minder zinvol maken.

3b. Ook de ringvormige vlakke spleet is voor kleine h de beste

oplossing. Deze is immers goed te slijpen, terwijl de ringvorm geometrisch eenvoudig is. Een bezwaar, dat aan elke vorm van glasspleet kleeft, is dat geen optisch glas gebruikt kan worden en dat (i.v.m. warmtelekken) de wanden niet te dik mogen zijn. Beide werken een volmaakte vlakheid tegen. Het is daarom, dat de homogeniteit van lange spleten slechter is dan korte; of ook, dat met korte spleten ook nauwere spleten te realiseren zijn.

Een bezwaar van de ringvorm is de r -afhankelijkheid van v , waardoor effecten, die van v afhangen, "uitgesmeerd" worden. Een voorbeeld hiervan is het kritische effect van F . Hierbij moeten wij ons dan voorstellen, dat het superfluidum in een gedeelte van de spleet nog superfluide kan zijn, in het meer naar binnen gelegen gedeelte echter niet meer. Dit kan dus ook, zoals reeds werd opgemerkt, het bepalen van de kritische snelheid bemoeilijken. In dit verband zouden wij kunnen denken aan een conische spleet, waar dit niet (of althans veel minder) het geval is. Het bezwaar hiertegen is echter, dat deze veel minder mooi geslepen kan worden dan een vlakke spleet. Slechts voor wijde spleten liggen hier mogelijkheden.

Ook in capillairen zijn de snelheden niet van de plaats afhankelijk (ALLEN-MISENER, ATKINS). Voor nauwere capillairen is echter de homogeniteit zeer twijfelachtig en het totale transport vaak te gering voor waarnemingen. De veelal gebruikte weg is dan een bundel capillairen, meestal gebouwd door (veel) draadjes in een buisje te brengen en het geheel dan uit te trekken. De openingen tussen de draadjes vormen dan de capillairen. Een dergelijke capillair hebben ook wij vervaardigd. Door zowel met een Poiseuille stroming als met een Knudsen stroming de wijdte van de capillairen te meten, konden wij een indruk van de homogeniteit verkrijgen. De capillairen met ronde buizen benaderende, verkregen wij een verrassende overeenstemming (binnen 10%). Deze overeenstemming is overigens wel nodig om experimenteren in helium II zinvol te maken.

Een toestel, analoog aan het onze, is om deze capillair heen gebouwd. Een nadeel is direct al, dat het systeem van de aandrukkende veertjes afwezig is. Hierdoor wordt enerzijds het legen van B_i na een meetdag onmogelijk gemaakt (dus is ook de "veiligheidsklep" tijdens de metingen afwezig), anderzijds is de instelling op diverse wijdtten minder eenvoudig. Een voordeel is, dat een eenmaal ingestelde wijdte dezelfde waarde blijft behouden. Een oplossing voor het eerste probleem is in eerste instantie gevonden door B_i en B_o ook nog via een speciaal kraantje te verbinden, dat van buiten af te bedienen is. Het warmtelek tussen B_i en B_o is daardoor groter geworden. Een andere oplossing zou zijn, B_i

van een glazen veiligheid te voorzien, die na elke meetdag dan vervangen moet worden.

Met dit toestel zouden enkele metingen, beschreven in dit proefschrift, herhaald kunnen worden teneinde zeker te zijn, dat de gemeten verschijnselen niet van de geometrie van de stroombuis afhankelijk zijn. Voorts is het dus interessant na te gaan, of het $\square^\circ(v)$ -verband bij v_s^b scherper verloopt dan in het geval van de ringvormige spleet met de r -afhankelijke v . Ook de lineaire $\square^\circ(v)$ -relatie voor $v_s < v_s^b$ zou dan bij deze geheel andere dimensionering nog eens bekeken kunnen worden. In ieder geval is het ook mogelijk en wenselijk enige metingen aan het stationnaire fonteineffect uit te voeren. Zouden de resultaten nl. in overeenstemming met die van MELLINK zijn, dan is het verschil tussen de resultaten van MELLINK en KAPITZA zeer waarschijnlijk veroorzaakt door het verschil in meetmethode.

3c. Tenslotte zouden wij willen suggereren om na te gaan in hoeverre het mogelijk is met één (soort) toestel en één methode de waarde van de critische snelheid in een groot traject van h te meten. Dit noemden wij reeds onder 2. Het is waarschijnlijk de methode van de (isotherme) trillingen (cf. appendix 4), die hiervoor het eerst in aanmerking komt.

APPENDICES

Appendix 1. Enige details van de bewegingsvergelijkingen

a. Daar in de gebruikte opstelling de vlakke spleet tot gevolg heeft, dat de snelheden $v_{s,n}$ aan de binnenrand een hogere waarde hebben dan aan de buitenrand, is in de bewegingsvergelijkingen de stationnaire toestand niet zonder meer gekarakteriseerd door $dv_{s,n}/dt = 0$. Veronderstellen wij echter dat $v_{s,n}$, $\text{grad}T$ en $\text{grad}p$ slechts een component in de r -richting hebben, dan is, op grond van $dv/dt = (\partial v/\partial t) + (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v}$, de vergelijking (3) voor het superfluidum te schrijven:

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \text{grad}(\frac{1}{2}\rho_s v_s^2) = -\frac{\rho_s}{\rho} \text{grad}p + \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} S^* \text{grad}T \quad (71)$$

De vergelijking voor het normale fluidum is in een analoge vorm te schrijven. Daar nu de druk en de temperatuur niet gemeten worden in de spleet, maar er buiten, waar $v_{s,n} = 0$, is dus $\int \text{grad}v_{s,n}^2 dr = 0$ en dus is $\int (\partial v_{s,n}/\partial t) dr = \int (dv_{s,n}/dt) dr$.

b. Hoewel voor een incompressibele vloeistof $\text{div}\hat{v} = 0$ (in onze spleet dus $\hat{v} \sim 1/r$), is dit voor elk van de beide fluida apart slechts een benadering. In dit geval is het beter uit te gaan van $\text{div}\mathbf{w} = 0$, waarbij dan dissipatie energieën verwaarloosbaar gedacht worden. Volgens (7) geeft dit

$$v_n \rho_n T \sim w \sim 1/r, \quad \text{d.i.} \quad v_n \sim 1/r \rho_n T, \quad (72)$$

hetgeen onder bepaalde omstandigheden zelfs kan impliceren, dat v_n constant is in de lengterichting van de spleet. Numeriek blijkt echter ook hier, dat in (4) de term $(1/3)\text{grad} \text{div}v_n$ volledig verwaarloosbaar is.

c. De differentiaalvergelijking voor $v_n(r, z)$ heeft dan de bekende vorm:

$$\text{grad}p(r) = \eta_n \nabla^2 v_n(r, z). \quad (73)$$

De oplossing hiervan is:

$$v_n(r, z) = \text{grad}p(r) \frac{r^2}{\eta_n} \left[1 - \frac{\cos z/r}{\cos h/2r} \right], \quad (74)$$

hetgeen impliceert:

$$\bar{v}_n^z(r) = \text{grad}p(r) \frac{r^2}{\eta_n} \left[1 - \frac{2r}{h} \text{tg} \frac{h}{2r} \right]. \quad (75)$$

Voor $h \ll r$ is dit te schrijven:

$$\bar{v}_n^z(r) = -\frac{h^2}{12\eta_n} (1 + \zeta) \text{grad}p(r). \quad (76)$$

In ons geval is zelfs $\zeta \sim 10^{-7}$, zodat de gebruikelijke afleiding m.b.v. de oneindig brede spleet geheel gerechtvaardigd is, zoals ook wel te verwachten was.

Appendix 2. Nadere gegevens betreffende toestel en cryostaat

a. Het glazen gedeelte van het *toestel* is opgebouwd met z.g. "Jena normaal 16III". De koperen buitenmantel is steeds van roodkoper geweest; in de laatste experimenten echter, toen deze vervangen moest worden, is de voorkeur gegeven aan een mantel van messing. De pompbuis *P* is van nieuwzilver i.v.m. de zeer lage warmtegeleiding van dit materiaal.

De spleet wordt dus begrensd door de gepolijste ringen R_1 en R_2 . De moeilijkheid hierbij is, dat enerzijds voor het polijsten optisch glas te prefereren zou zijn, terwijl anderzijds de opbouw van het toestel hiermee niet mogelijk is. Daardoor is het polijsten veel lastiger en het resultaat wat minder dan anders mogelijk was. De volmaaktheid van het resultaat kan nagegaan worden aan de hand van de interferentiefiguren, die optreden als wij K_1 en K_2 op elkaar drukken. De lengte van de spleet wordt bepaald, zoals is aangegeven, door de stralen r_{10} en r_{11} . Bij de lange spleet hadden deze de waarden 1,024 en 0,590 cm, bij de korte spleet 1,005 en 0,871 cm; de lengte bedroeg dus resp. 0,434 en 0,134 cm. De breedte van de spleet wordt geregeld enerzijds door de dikte van bandjes of draadjes, die er tussen worden aangebracht, anderzijds, zij het in veel mindere mate, door de sterkte van de drie veertjes. Deze laatsten zijn van phosphorbrons en oefenden een gezamenlijke trekkracht uit variërende van 150 - 500 gram. Voor de bandjes werd gebruikt teflon van 6μ of goudfolie (ca. $0,7 \mu$) in één of meer lagen; voorts ook draadjes van gespoten glas (3μ), die echter uitermate fragiel waren. In de eerste tijd werden ook wel streepjes van gefiltreerde inkt gebezigd.

De thermometers Th_i en Th_o bestaan uit phosphorbronsdraden van 45μ diameter, die bij kamertemperatuur een weerstand hebben van ca. 33Ω , bij T_{Δ} : 7Ω , en in het doorgemeten temperatuurgebied ($1,1-2,1^{\circ}\text{K}$) een gevoeligheid hebben van $2,0 \Omega/\text{graad}$.

De stookdraad H is een constantaandraad van ca. 60Ω bij kamertemperatuur en $55,4 \Omega$ bij heliumtemperatuur.

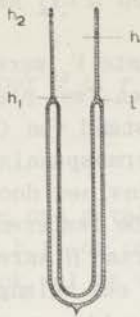
Van de vier toevoerdraden naar Th_i in de vacuumruimte V_1 waren er oorspronkelijk twee koperdraden (de stroomdraden) en twee platinadraden (de spanningsdraden). Door de lage weerstand van Cu was de Joule warmte zeer gering en, door de lage thermospanning van Pt werd de gemeten potentiaal niet meetbaar beïnvloed door eventueel aanwezige asymmetrieën in de beide draden. De resterende twee toevoerdraden in de ruimte V_1 naar de stookdraad H waren koperdraden. Daar het totale warmtelek van B_i naar B_o een belangrijk percentage vormde van de totale warmtegeleiding bij nauwe spleten, werden in 1951 de zes toevoerdraden vervangen door zes tantaliumdraden van 45μ en ca. 60 cm lengte. Het electrisch supergeleidende Ta heeft een relatief hogere warmte weerstand 49,4 , waardoor het warmtelek langs de draden een gering percentage van het totale lek I_q (cf. IIIC; 2) bedroeg. Daar Ta zich niet laat solderen, werden de beide uiteinden van elke draad aan een stukje tindraad gelast, dat dan weer aan de platina doorvoeren gesoldeerd kon worden.

Voor de afmetingen van het toestel wordt naar fig. 6 verwezen.

b. De cryostaat bestaat uit de gebruikelijke dubbelwandige inwendig verzilverde glazen cylinder met bodem, van boven via een er omheen gelakte messingring aan een messingkap bevestigd. De inwendige diameter bedraagt $4,8$ cm, de lengte 100 cm (oorspronkelijk 60 cm), terwijl in de verzilvering twee, in een axiaal vlak gelegen spleten opengelaten waren. De gebruikte glassoort was "Philips G40". Daar dit in de practijk nogal poreus bleek voor helium, was de laatste tijd de cryostaat voorzien van een zijtuit met slijpstuk (ca. 10 cm onder de kap), dat permanent aan één van de tot de opstelling behorende kwikdiffusiepompjes aangesloten is.

De heliumcryostaat is steeds omgeven door een tweede analoge cryostaat, die eertijds met vloeibare waterstof gevuld werd en zelf weer omgeven was door een derde cryostaat met vloeibare lucht. Gezien de bewerkelijkheid van deze combinatie alsmede die van het vullen van waterstof in vergelijking tot het vullen van lucht, werd de laatste jaren reeds de tweede cryostaat met vloeibare lucht gevuld en niet meer door een derde omgeven. De tijd dat het helium in de cryostaat bleef, werd hierdoor niet merkbaar beïnvloed, mede ten gevolge van de hogere verdampingswarmte van lucht t.o.v. waterstof.

Onderzocht werd ook de mogelijkheid van een half dubbelwandige, half enkelwandige cryostaat (fig. 39). De bedoeling hiervan is dat, ten gevolge van de omringende waterstof, de heliumdamp ter



Figuur 39

De gedeel-
telijk enkel-
wandige
cryostaat.

hoogte h steeds op waterstoftemperatuur gehouden wordt, waardoor alle straling van boven door de waterstof opgevangen wordt en de verdamping van helium uitermate gering is. Daar echter de waterstof dientengevolge snel verdampt, moet dus de afstand $h_1 - h_2$ redelijk groot zijn, om niet elk ogenblik waterstof te moeten bijvullen. Daardoor wordt echter de totale lengte al gauw ca. 1 meter, in welk geval een (gewoon) dubbelwandig glas van 1 meter hiervoor niet onderdoet, indien voldoende vloeibaar helium beschikbaar is. Bovendien is een gewoon meterglas veel minder bewerkelijk en minder riscant dan een half enkelwandig glas, alwaar de lasplaats l van grote lengte op lage temperatuur moet worden gebracht. Daarom werd overgegaan tot een glas van 100 cm, toen wij langer achtereen wilden meten, dan met het oorspronkelijke glas mogelijk was.

Appendix 3. Middelingproblemen

a. De integratie van de formule van het fonteineffect (5) (in de LONDON-benadering) over de spleetlengte geeft:

$$\int_{r_0}^{r_i} \text{grad} p \, dr = \int_{r_0}^{r_i} \rho S \text{grad} T \, dr . \quad (77)$$

Schrijven wij hiervoor (cf. IIB; 1)

$$\Delta p = f \Delta T \text{ (cm He)} , \quad (78)$$

dan is dus f een gemiddelde waarde van $f_0(T_0)$ en $f_0(T_i)$. De bewering is dat in zeer goede benadering:

$$f = f_0(T_0 + \frac{1}{2}\Delta T) , \quad (79)$$

onafhankelijk van het verloop van T over de spleet en onafhankelijk van de lengte van deze. Immers uitgaande van $f \sim T^s$, geeft (77):

$$\Delta p = \left(\frac{f_0(T_0) T_0}{s+1} \right) \left[\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{s+1} - 1 \right] . \quad (80)$$

Dit is te ontwikkelen naar machten van $\Delta T/T_0$ en geeft met (78) de waarde van $f/f_0(T_0)$. Anderzijds is ook $f_0(T_0 + \frac{1}{2}\Delta T)/f_0(T_0)$ in een reeks naar $\Delta T/T_0$ te schrijven. Vergelijken van deze resultaten geeft dan:

$$\frac{f}{f_o(T_o + \frac{1}{2}\Delta T)} = 1 + \frac{s(s-1)}{24} \left(\frac{\Delta T}{T_o}\right)^2 + \dots \quad (81)$$

Voor $s = 5,5$ en in het geval van $\Delta T = 10$ milligraad is de correctieterm minder dan $0,1\%$.

b. Op een analoge wijze is te berekenen, dat in de evenredigheidsfactor tussen W en ΔT (voor $F \equiv 0$ (cf. (24))) de temperatuurafhankelijke factor $f^2 T$ in goede benadering gelijk gesteld kan worden aan:

$$f^2 T = [f_o(T_o + \frac{1}{2}\Delta T)]^2 [T_o + \frac{1}{2}\Delta T] \quad (82)$$

Analoog aan (81) kan nl. geschreven worden:

$$\frac{f^2 T}{[f_o(T_o + \frac{1}{2}\Delta T)]^2 [T_o + \frac{1}{2}\Delta T]} = 1 + \frac{(2s+1)2s}{24} \left(\frac{\Delta T}{T_o}\right)^2 + \dots \quad (83)$$

hetgeen voor $s = 5,5$ en $\Delta T = 20$ milligraad de correctieterm kleiner dan 2% maakt. Dit impliceert dus tevens, dat het lineaire verband tussen W en ΔT slechts in 0^e benadering lineair is; dit kwam ter sprake in IIIC;1. Er zij nogmaals op gewezen, dat noch het verloop van T over de spleet, noch de lengte van deze op het resultaat van invloed is.

c. Een volgend middelingsprobleem doet zich voor t.a.v. ρ_n en ρ_s , mede omdat met (11) (IIA; 2c) de waarde van v_s bepaald wordt, welke weer, tot de m^e macht verheven, over de spleet geïntegreerd wordt ((13)). De oplossing is hier gecompliceerder, daar hiervoor *wel* het verloop van T over de spleet bekend moet zijn. In het geval van de korte spleet geeft berekening, dat een lineaire benadering van dit verloop in dit verband voldoet, waaruit weer te berekenen valt, dat een benadering met $\rho_n = \rho_n(T_o + \frac{1}{2}\Delta T)$ en $\rho_s = \rho_s(T_o + \frac{1}{2}\Delta T)$ verantwoord is.

d. Tenslotte zij nog vermeld, dat wij in de praktijk niet uit dV/dt de snelheden v_s bepalen, maar uit $\delta V/\delta t$ met $\delta t = 20$ (of 10) seconden. Dit geeft dan een gemiddelde v_s over de tijd δt . De reden is, dat wij de nauwkeurigheid van $\delta V/\delta t$ veel beter oordeelden dan van dV/dt , terwijl de berekening van de invloed hiervan op het eindresultaat (uiteraard werd ook met, over δt gemiddelde v_n , Δp en ΔT gerekend) tot de conclusie leidde, dat hierdoor geen merkbare fout werd geïntroduceerd (met uitzondering van het eerste interval ($t_1 \rightarrow t_1 + \delta t$) waarmee dus rekening gehouden werd).

Appendix 4. Supplement op het formalisme IIB

a. Bij de afleiding van het formalisme IIB; 2 en 3 onderstelden wij een constante temperatuur T_o in B_o . In de praktijk komt het veelvuldig voor dat deze temperatuur, zij het uiterst langzaam, op of af kan lopen, zonder dat de metingen hierdoor ongunstig beïnvloed worden.

Het blijkt nu ook, dat het formalisme eenvoudig is uit te breiden tot gevallen, waarin wij voor T_o kunnen schrijven:

$$T_o = T_o^o + at, \quad (84)$$

waarin T_o^o en a constant zijn. Hiermee is voor het temperatuurverschil ΔT dan te schrijven, met $T_i - T_o^o = \Delta^o T$:

$$\Delta T = \Delta^o T - at, \quad (85)$$

hetgeen na differentiatie naar t oplevert:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{d\Delta^o T}{dt} + a. \quad (86)$$

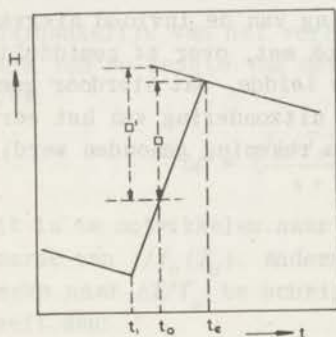
De warmtebalans in de vorm (37) wordt dan:

$$\frac{f}{f'} \frac{d\Delta T^+}{dt} = - \frac{dV}{dt} \frac{\rho Q^+}{\Lambda(V, T)} (1+\epsilon) + \frac{I + I_p + W - I_q}{\Lambda(V, T)} - a. \quad (87)$$

Wij zien dus, dat het verloop van T_o effectief niets anders is dan een extra warmtetoevoer (of afvoer). Definiëren wij nu (cf. (40)):

$$\delta_i = \int_t^{t_e} \left[\frac{I_p}{\Lambda(V, T)} - a \right] dt \quad (88)$$

dan blijven alle formules formeel ongewijzigd! In (64) en (65) wijzigt deze a de waarde van het parasitaire hoogte- en temperatuurverschil, zoals ook plausibel is.



Figuur 40

$H(t)$ indien $T_o(t) = T_o^o + at$.

De figuur $H(t)$ voor verlopende T_o is gegeven in fig. 40. Door in dit geval \square' i.p.v. \square te bepalen, is de invloed van a direct al geëlimineerd, zonder deze apart te berekenen. Wel is dan ook een (te berekenen) gedeelte van W mee geëlimineerd, hetgeen echter, met W zelf, in nauwe spleten te verwaarlozen is.

b. Tengevolge van de gewone traagheid, zal in beginsel het niveau bij $t = t_e$ (fig. 7) een trilling om de uiteindelijke evenwichtsstand uitvoeren. Teneinde de numerieke invloed hiervan te bepalen, schrijven wij de bewegingsvergelijking op voor het trillende superfluidum (het normale fluidum wordt verwaarloosd). Wij beperken ons tot het volume van de spleet. Dit geeft:

$$\int_{r_o}^{r_i} [\rho \frac{O}{2\pi h} \ddot{y}] dr = \int_{r_o}^{r_i} [\frac{\rho_s}{\rho} \frac{d}{dr} (\rho g \frac{y}{q} + \frac{\rho^2 g f O Q^+}{\Lambda(V, T)} y)] dr \quad (89)$$

Hierin is y de uitwijking uit de evenwichtsstand in B_i . Voorts is rekening gehouden met de gekoppelde niveaubeweging in B_i en B_o en is de temperatuur T_o constant ondersteld. De laatste term in het tweede lid is een gevolg van het feit, dat B_i thermisch geïsoleerd is en daar dus adiabatische trillingen optreden.

Uit (89) vinden wij voor de trillingstijd τ_o :

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{q \rho O \ln r_o/r_i}{g \rho_s 2\pi h} \epsilon} \quad (90)$$

en voor de maximum uitwijking y_o :

$$y_o = \left(\frac{dH}{dt}\right)_{\max} \sqrt{\frac{q \rho O \ln r_o/r_i}{g \rho_s 2\pi h} \epsilon} \quad (91)$$

Ook hier treedt de bekende factor $\epsilon \ll 1$ op; (90) en (91) zijn benaderingen voor $1 + \epsilon = 1$. De trillingen zijn dus zeer gedempt en de trillingstijd is zeer verkort vergeleken bij isotherme trillingen, hetgeen veroorzaakt is door de thermische isolatie van

TABEL 2

h	$T = 1,44^\circ\text{K}$		$T = 1,72^\circ\text{K}$		$T = 2,02^\circ\text{K}$	
	y_o/\dot{H}	τ_o	y_o/\dot{H}	τ_o	y_o/\dot{H}	τ_o
0,43 μ	0,16 sec	1,0 sec	0,10 sec	0,6 sec	0,08 sec	0,5 sec
1	0,11	0,7	0,06	0,4	0,05	0,3 ⁵
5	0,05	0,3	0,03	0,2	0,02 ⁵	0,1 ⁵

De waarden van y_o/\dot{H} en τ_o , berekend uit (90) en (91), voor enkele temperaturen en spleetwijdten.

B_i , waar deze factor ε vandaan komt. Ter oriëntatie werd tabel 2 samengesteld, waaruit volgt dat geen trillingen kunnen worden waargenomen (cf. \square°/H -waarden uit tabel 1 in III B; 1). Wanneer wij niet alleen de trillende vloeistof in de spleet beschouwen doch de totale trillende vloeistof, treedt een geschatte correctie op in (90) en (91) van minder dan 1%.

c. Het gevolg van de voorgaande berekening is ook, dat de "natuurlijke overshoot" (d.i. het doorlopen van het niveau t.g.v. de traagheid) eveneens te verwaarlozen is en dus op onze wijze van meten van de "overshoot" geen invloed heeft.

[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

A	$\gamma = 1.14 \times 10^{-3}$		$\gamma = 1.17 \times 10^{-3}$		$\gamma = 2.02 \times 10^{-3}$	
	β	β^2	β	β^2	β	β^2
1	0.11	0.012	0.1	0.01	0.12	0.014
2	0.08	0.006	0.07	0.005	0.09	0.008

SUMMARY

This thesis deals with the friction phenomena in liquid helium II between 1,1 and 2,1°K. A study is made of the behaviour of this liquid, flowing in slits of 0,5 - 5 μ width under various pressure and temperature differences, as a result of different heat inputs. An important quantity in these experiments is the friction force \bar{F} defined as the difference between the theoretical and observed fountain pressure: $\bar{F} = f\Delta T - \Delta p$. In different ways the dependence of this force on the velocity of the fluids is studied.

Following a short survey of the properties of liquid helium II in section IA, the first chapter contains a review of the two types of theories on the liquid (IB; a and b). The second part of this section (IB; 2) gives a further analysis of the fountain effect formulae according to LONDON and GORTER, and of the equations of motion, especially keeping in mind the hypothesis of the mutual friction force, suggested by GORTER and MELLINK. In section IC a survey of the experimental work on the flow of liquid helium II in slits and capillaries is given, in which flow without and with resulting transport of matter is discussed (IC; 1 and 2 resp.). In section ID we give the motivation for the present research.

In the second chapter a description of the apparatus is given (IIA). Fig. 6 shows the two thermally isolated concentric volumes B_o and B_i , which are connected by an annular flat slit. Also further experimental arrangements are described, as well as the way in which the "basic quantities" (Δp , ΔT , v_s and v_n) are determined. In section IIB, first the numerical relations between the basic quantities are given. Secondly the relation between \bar{F} and the "overshoot" \square° (i.e. the amount of liquid flowing after the heat supply to B_i is removed) is derived (eq. (42)). Finally in IIB; 3 the functions $H(t)$ (the level height in B_i) and $\Delta T(t)$ are calculated from the equations of motion of the two fluids and the energy balance. It appears to be possible, by means of some approximations, to give these three equations a very simple form ((47), (48) and (52)). One of the results of the analysis was, that the time, which the superfluid needs to minimize the force \bar{F} , has a definite finite value, in contrast with the situation in an ordinary liquid. In section IIC one can find details about the used quantities f and α , as well as the way in which η_n and the slit width h were determined.

Chapter III contains the experimental results. In IIIA the

friction force \bar{F} is determined as the difference between the observed Δp and $f\Delta T$ -values (fig. 10), and its dependence on the velocity is studied, the relative velocity v being not very different from the velocity of the superfluid v_s . For reasonable accuracy only $\bar{F} > 5$ cm He and $v > 20$ cm/sec can be considered by this method. It is found that $\bar{F} \sim v^3$ in the case of $h > 1\mu$ (fig. 13) and the constant A , the coefficient of mutual friction, is calculated (fig. 14, 16).

In section IIIB;1 values of \bar{F} are obtained from the determination of $\square_c^\circ(v)$ (which is \square° with a small correction). An advantage of this method is that much smaller \bar{F} -values (0,02 - 0,1 cm He) are measurable compared with the IIIA-method. These results show (e.g. fig. 17) a very small friction to occur, which is approximately linear in v up to a certain velocity, above which an important friction of another type appears which tends to the cube friction realised in IIIA. Also a numerical agreement between IIIA and B exists as there ought to be (fig. 19). Instead of an abstract curve with a discontinuous derivative at one point (which experimentally can never be realised) we defined a " Γ_d -curve". Roughly speaking this is a curve which determines the coordinates of one point B with a higher accuracy than that of the measured points. The $\square_c^\circ(v)$ -curves being Γ_d -curves, we call the velocity-coordinate of the B -point the "critical velocity". It should be remarked that (a) below this velocity the above mentioned small friction also exists (which we could not ascribe to the experimental techniques), and (b) the results of IIIC suggest that it is the motion of the superfluid relative to the wall which causes this critical effect. In IIIB;2 the influence of the critical velocity on other quantities is considered (fig. 21 -25) on the basis of the calculations given in IIB;2 and 3. Finally in IIIB;3 some other aspects of the theory are compared with the experiments (fig. 26 - 28), showing complete agreement.

In IIIC;1 the shape of the $W(\Delta T)$ -curves is considered in view of the influence of the mutual friction as well as the existence of a critical velocity. However, according to calculations (appendix 3), there must be a definite influence of the relatively high temperature differences on the shape of these curves, which makes their analysis rather difficult (fig. 32). In this connection we discussed the possibility of drag effects, also found in the 6μ -slits, which are proportional to v_n^2 but numerically somewhat high for end effects. In IIIC;2 the results are given of the measurements on the viscosity η_n of the normal fluid, calculated from the curves $W(\Delta T)$ and $W(\Delta p)$ (cf. eq. (23) and (24)). It is shown (fig. 35) that the total heat flow, divided by ΔT , is proportional to h^3 , as it ought to be if one is concerned with a

real viscosity. The values of η_n however are somewhat lower than those of ANDRONIKASHVILI (fig. 36). This may be due to the difference in the experimental method as well as to the difference between capillary flow and bulk liquid.

In IV;1 we give the numerical values of the critical velocities as derived from our various experiments (fig. 37), also compared with a suggestion of DASH (fig. 38). In IV;2 and 3 a review of the different friction phenomena is given as well as some suggestions for further experiments.

Finally one can find in the appendices some details about different questions. Also a list of the used symbols is added.

The experimental results and the formalism (i.e. the chapters II and III) will be published in *Physica*.

L I J S T V A N S Y M B O L E N

symbool	betekenis	verwijzing
A	$= A_3$	IB; 2b
A_m	: de coëfficiënt van wederkerige wrijving	IB; 2b
B	$= (1 - x) \{Q^+/\Delta(V, T)\} (f'/f) 2\pi r h$ [graad/cm]	IIB; 3 : (52)
B_i, B_o	: het binnenvolume resp. buitenvolume van het toestel	IIA; 1a; fig. 6
C	$= \{[I + I_p - I_q]/\Delta(V, T)\} (f'/f)$ [graad/sec]	IIB; 3 : (52)
C_i	: constanten	IIB; 1
F	: de wrijvingskracht [dyne/cm ³]	IB; 2b : (10)
F	$= F $	IIA; 3a
\bar{F}	$= \int_{r_o}^{r_i} \frac{F}{(1-x)\rho g} dr$ [cm He]	IIB; 1 : (13)
H	: de hoogte van het heliumniveau in B_i , met $H = 0$ voor $H_i = H_o$ [cm]	IIB; 2 : (27)
H_c	$= H + f' q_e \delta / (1 + \epsilon)$ [cm]	IIB; 2
H_i, H_o	: de hoogte van het heliumniveau in B_i resp. B_o , t.o.v. een willekeurig nulpunt [cm]	IIA; 2a
ΔH	$= H_i - H_o$ [cm]	IIA; 2a
$d_{10} H_c$	$= H_c(t_1+10) - H_c(t_1)$ [cm]	IIIB; 2c
I	: de elektrisch aan B_i toegevoerde energie [erg/sec]	IIB; 2
I_c	$= I + I_p$ [erg/sec]	IIB; 3 : (59)
I_p	: de parasitair aan B_i toegevoerde energie [erg/sec]	IIB; 2
I_q	: de parasitair uit B_i weggelekte energie [erg/sec]	IIB; 2
O, O_o	: het oppervlak van B_i resp. B_o ter hoogte H resp. H_o [cm ²]	IIB; 1 : (25)
O_s	: het oppervlak van een doorsnede van de spleet ($O_s = 2\pi r h$) of capillair [cm ²]	IC
Q^*	: het mechanocalorisch effect [erg/gram]	IB; 2b
Q_o^g	$= \lim_{h \rightarrow 0} (-Q_g^*)$ [erg/gram]	IIB; 2
Q^+	$= Q^o - (\rho_d/\rho) e$ [erg/gram]	IIB; 2 : (33)
S	: de entropie [erg/gram graad]	IB
S_A	$= S(T_A)$	IB; 1b
S^*	: een evenredigheidsfactor, bepaald door (5) [erg/gram graad]	IB; 2b : (3)

symbool	betekenis	verwijzing
T	: de absolute temperatuur [°K]	IA
T_i, T_o	: de temperatuur in B_i resp. B_o [°K]	IIA; 3a
T_Δ	: de temperatuur van het Δ -punt: $T_\Delta = 2,186^\circ\text{K}$	IA
ΔT	$= T_i - T_o$ [°K]	IIA; 2
ΔT^b	: de waarde van ΔT , waar $v_s = v_s^b$	IIIC; 1
ΔT_c	$= \Delta T - \epsilon\delta/(1 + \epsilon)$ [°K]	IIB; 2
ΔT_E	$= \Delta H/f'$ [°K]	IIB; 2 : (34)
ΔT^{\ddagger}	$= \Delta T - \Delta p/f$ [°K]	IIB; 2 : (14)
$d_{10} \Delta T_c$	$= \Delta T_c(t_1+10) - \Delta T_c(t_1)$ [°K]	IIIB; 2c
V, V_d	: het door vloeibaar helium resp. verzadigde damp ingenomen volumen in B_i [cm^3]	IIA; 2c, IIB; 2
\bar{V}	: een gemiddelde waarde van V [15 cm^3]	IIIB; 1
W	$= \dot{O}_s \bar{w}$, de totale warmtestroom [erg/sec]	IIB; 1 : (22)
c, c_d	: de soortelijke warmte van vloeibaar helium resp. verzadigde damp [erg/gram graad]	IB; 2b, IIB; 2
e	: de verdampingswarmte van helium [erg/gram]	IIB; 2
f	: een gemiddelde waarde van f_o tussen $f_o(T_o)$ en $f_o(T_i)$	IIB; 1 : (13)
f_o	$= \alpha S^*/g$, het fonteineffect in cm He/graad	IIB; 1 : (12)
f^{\dagger}	: het fonteineffect, verminderd met het dampdrukverschil [cm He/graad]	IIB; 2 : (34)
g	: de versnelling van de zwaartekracht [cm/sec^2]	IIB; 1
h	: de spleetwijdte	IB; 2b
\bar{j}_m	: het resulterende materietransport door de spleet of capillair	IC
m	$= \nu \log F + \text{constante}$	IC
p	: de druk [dyne/cm^2]	IB; 1
p_i, p_o	: de druk in B_i resp. B_o [dyne/cm^2]	
Δp	$= p_i - p_o$ [cm He]	IIA; 2
q	$= O_o/(O_o+O)$ [0]	IIB; 2 : (25)
r_i, r_o	: de binnen resp. buitenstraal van de ringvormige spleet [cm]	IIA; 1a
t	: de tijd [sec]	IB
t_1	: het tijdstip van inschakelen van de energie I	IIA; 3a
t_o	: het tijdstip van uitschakelen van de energie I	IIA; 3a
t_e	: het tijdstip waarop een stationnaire rusttoestand ($F = 0$) is bereikt	IIA; 3a
t_u	: het tijdstip, waarop $Bv/C \approx 1$ ($t_u - t_1 = 5\tau$)	IIB; 3
v	$= v_s - v_n$	IIB; 3 : (46)

symbool	betekenis	verwijzing
v	$= \mathbf{v} $	
$\mathbf{v}_{s,n}$: de snelheid van het superfluidum resp. normale fluidum [cm/sec]	IB; 2b : (3,4)
$v_{s,n}$	$= \mathbf{v}_{s,n} $	IC
$\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}_{s,n}$: de snelheden \mathbf{v} resp. $\mathbf{v}_{s,n}$, gemiddeld over O_s	IB; 2b : (6)
$\bar{v}, \bar{v}_{s,n}$	$= \bar{\mathbf{v}} $ resp. $ \bar{\mathbf{v}}_{s,n} $	IC
$\bar{v}^i, \bar{v}_{s,n}^i$: de snelheden \bar{v} resp. $\bar{v}_{s,n}$ voor $r = r_i$	IIB; 1 : (17)
$v, v_{s,n}$	$= \bar{v}^i$ resp. $\bar{v}_{s,n}^i$	IIB; 1 : (20)
\hat{v}	: de volumetrische snelheid [cm/sec] volgens: $\hat{v} O_s = dV/dt$	IC
v^b, v_s^b	: de kritische relatieve snelheid resp. snelheid van het superfluidum [cm/sec]	IIIB; 1
\bar{w}	: de warmtestroomdichtheid, gemiddeld over O_s [erg/sec cm ²]	IB; 2b : (7)
\bar{w}	$= \bar{\mathbf{w}} $	ID
x	$= \rho_n/\rho$	IA
Γ_d	: Γ_d -kromme, gedefinieerd in IIIB; 1	IIIB; 1
$\Delta(V, T)$	$= V\rho c + V_d\rho_d c_d + eV_d(d\rho_d/d\Delta T)$ [erg/graad]	IIB; 2 : (32)
β	$= A_m x/C_1 f$	IIB; 3 : (47)
$\delta_1(t)$	$= \int_t^{t_e} \frac{I_p}{\Delta(V, T)} dt$ [°K]	IIB; 2 : (40)
$\delta_2(t)$	$= \int_t^{t_e} \frac{W - I_q}{\Delta(V, T)} dt$ [°K]	IIB; 2 : (40)
$\delta(t)$	$= \delta_1(t) + \delta_2(t)$ [°K]	IIB; 2 : (40)
ε	$= \Delta(V, T)/Oqf^1 \rho Q^+$ [0]	IIB; 2 : (38)
η, η_n	: de viscositeit van vloeibaar helium resp. het normale fluidum [Poise]	IA
ρ, ρ_d	: de dichtheid van vloeibaar helium resp. de verzadigde damp [gram/cm ³]	IB; 2b, IIB; 2
ρ_s, ρ_n	: de dichtheid van het superfluidum resp. normale fluidum [gram/cm ³]	IB; 2b : (3)
τ	$= 3\beta C^2/B^3$ [sec]	IIB; 3 : (58)
\square	$= \int_t^{t_e} \frac{dH}{dt} dt$ [cm]	IIB; 2 : (28)
\square^o	$= \square$ voor $t_o \leq t \leq t_e$ [cm]	IIB; 2 : (28)
\square_c^o	$= (\square^o - f^1 q \varepsilon \delta / (1 + \varepsilon)) \bar{V}/V$ [cm]	IIIB; 1 : (66)

Algemeen geldt nog:

$$Y_{a,b} = Y_k, \text{ met } k = a, b; \quad a^m = a^{m-1} a$$

L I T T E R A T U U R

- 09,1 Knudsen, M., Ann. Physik **28**, 75
- 10,1 Von Smoluchowski, M., Ann. Physik **33**, 1559
- 11,1 Knudsen, M., Ann. Physik **34**, 823
- 23,1 Bennewitz, K., en Simon, F., Z. Phys. **16**, 183
- 34,1 Simon, F., Nature, London, **133**, 529
- 35,1 Kok, J.A., Proefschrift Leiden
- 36,1 London, F., Proc. roy. Soc., London, **A153**, 576
- 37,1 Fröhlich, H., Physica **4**, 639
- 38,1 Kapitza, P., Nature, London, **141**, 74
- 38,2 Allen, J.F., en Misener, A.D., Nature, London, **141**, 75
- 38,3 Allen, J.F., en Jones, H., Nature, London, **141**, 243
- 38,4 London, F., Nature, London, **141**, 643
- 38,5 Tisza, L., Nature, London, **141**, 913
- 38,6 London, H., Nature, London, **142**, 612
- 38,7 Allen, J.F., en Misener, A.D., Nature, London, **142**, 643
- 38,8 London, F., Phys. Rev. **54**, 947
- 39,1 Allen, J.F., en Reekie, J., Proc. Cambr. phil. Soc. **35**, 114
- 39,2 Daunt, J.G., en Mendelssohn, K., Proc. roy. Soc., London, **A170**, 439
- 39,3 London, H., Proc. roy. Soc., London, **A171**, 484
- 39,4 Allen, J.F., en Misener, A.D., Proc. roy. Soc., London, **A172**, 467
- 39,5 Allen, J.F., en Reekie, J., Nature, London, **144**, 475
- 40,1 Keesom, W.H., en Saris, B.F., Commun. No 257d; Physica **7**, 241
- 40,2 Keesom, W.H., Saris, B.F., en Meyer, L., Commun. No 260a; Physica **7**, 817
- 40,3 Tisza, L., J. Phys. Radium **1**, 164 en 350
- 41,1 Bijl, A., De Boer, J., en Michels, A., Physica **8**, 655
- 41,2 Kapitza, P., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 59
- 41,3 Landau, L., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71
- 42,1 Keesom, W.H., Helium, Elsevier, Amsterdam
- 44,1 Landau, L., J. Phys. U.S.S.R. **8**, 110
- 46,1 Peshkov, V., J. Phys. U.S.S.R. **10**, 389
- 47,1 Keesom, W.H., en Duyckaerts, G., Commun. No 271c; Physica **13**, 153
- 47,2 Mellink, J.H., Commun. No 272a; Physica **13**, 180
- 47,3 Meyer, L., en Mellink, J.H., Commun. No 272b; Physica **13**, 197
- 47,4 Meyer, L., en Band, W., Phys. Rev. **71**, 828

- 47,5 Tisza, L., Phys. Rev. **72**, 838
- 47,6 Landau, L., J. Phys. U.S.S.R. **11**, 91
- 48,1 Keesom, P.H., Proefschrift Leiden
- 48,2 Mellink, J.H., Proefschrift Leiden
- 48,3 London, F., en Zilsel, P.R., Phys. Rev. **74**, 1148
- 48,4 Gorter, C.J., Phys. Rev. **74**, 1544
- 48,5 Bijl, D., Commun. No 276b; Physica **14**, 684
- 48,6 Andronikashvilli, E., J. exp. theor. Phys. U.S.S.R. **18**, 424
- 48,7 Andronikashvilli, E., J. exp. theor. Phys. U.S.S.R. **18**, 429
- 49,1 Gorter, C.J., en Mellink, J.H., Commun. Suppl. No 98a; Physica **15**, 285
- 49,2 Gorter, C.J., Commun. Suppl. No 99a; Physica **15**, 523
- 49,3 Band, W., en Meyer, L., Phys. Rev. **76**, 417
- 49,4 Heer, C.V., en Daunt, J.G., Phys. Rev. **76**, 854
- 49,5 Landau, L., en Khalatnikov, I., J. exp. theor. Phys. U.S.S.R. **19**, 637
- 50,1 Gorter, C.J., Kasteleyn, P.W., en Mellink, J.H., Commun. Suppl. No 100b; Physica **16**, 113
- 50,2 Bowers, R., en Mendelssohn, K., Proc. phys. Soc., London, **A63**, 178
- 50,3 Van den Berg, G.J., Kon. Vlaamse Acad. Wet. **12**, 8
- 50,4 De Groot, S.R., Jansen, L., en Mazur, P., Physica **16**, 421 en 691
- 50,5 Bowers, R., Chandrasekhar, B.S., en Mendelssohn, K., Phys. Rev. **80**, 856
- 50,6 Jackson, L.C., en Henshaw, D.G., Phil. Mag. **41**, 1081
- 50,7 Zwanikken, G.C.J., Commun. Suppl. No 103a; Physica **16**, 805
- 50,8 Smith, P.L., Commun. No 282c; Physica **16**, 808
- 50,9 Hollis-Hallett, A.C., Proc. phys. Soc., London, **A63**, 1367
- 51,1 Usui, T., Physica **17**, 694
- 51,2 Prigogine, I., en Mazur, P., Physica **17**, 661
- 51,3 White, G.K., Proc. phys. Soc., London, **A64**, 554
- 51,4 Bowers, R., en White, G.K., Proc. phys. Soc., London, **A64**, 558
- 51,5 Atkins, K.R., Proc. phys. Soc., London, **A64**, 833
- 51,6 Winkel, P., en Hung, C.S., Proc. int. Conf. Low Temp. Phys., Oxford, blz. 62
- 52,1 Hollis-Hallett, A.C., Proc. roy. Soc., London, **A210**, 404
- 52,2 Bowers, R., en Mendelssohn, K., Proc. roy. Soc., London, **A213**, 158
- 52,3 Kramers, H.C., Wasscher, J.D., en Gorter, C.J., Commun. No 288c; Physica **18**, 329
- 52,4 Dingle, R.B., Phil. Mag. Suppl. **1**, 111
- 52,5 Atkins, K.R., Phil. Mag. Suppl. **1**, 169

- 52,6 Hung, C.S., Hunt, B., en Winkel, P., Commun. No 289c; Physica 18, 629
- 52,7 Kramers, H.A., Commun. Suppl. No 105a; Physica 18, 653
- 52,8 Kronig, R., en Thellung, A., Physica 18, 749
- 53,1 Chandrasekhar, B.S., en Mendelssohn, K., Proc. roy. Soc., London, A218, 18
- 53,2 Thellung, A., Physica 19, 217
- 53,3 Kronig, R., Physica 19, 535
- 53,4 Swim, T., Annu. Progr. Rep. 1952, Houston (Texas)
- 53,5 Feynman, R.P., Phys. Rev. 90, 1116; 91, 1291 en 1301
- 53,6 Hollis-Hallett, A.C., Proc. Camb. phil. Soc. 49, 717
- 54,1 Dash, J.G., Phys. Rev. 94, 825 en 1091
- 54,2 Feynman, R.P., Phys. Rev. 94, 262
- 54,3 Van den Meydenberg, C.J.N., Taconis, K.W., Beenakker, J.J.M., en Wansink, D.H.N., Commun. No 295c; Physica 20, 157
- 54,4 Feynman, R.P., Progress in Low Temperature Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, blz. 00

Commun.: Communications from the Kamerlingh Onnes Laboratorium, Leiden

III

In this paper we have given the results of the study of the effect of the concentration of the solution on the dielectric constant.

Refer. C., in Proc. R. Phys. Soc. 64, (1951), 311

IV

In this paper we have

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

where ϵ is the dielectric constant of the solution and ϵ_0 is the dielectric constant of the solvent. The dielectric constant of the solution is a function of the concentration of the solution and of the temperature. In this paper we have given the results of the study of the effect of the concentration of the solution on the dielectric constant.

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} \right)^2$$

where ϵ_0 is the dielectric constant of the solvent and ϵ_r is the dielectric constant of the solution.

Refer. L., Phys. Rev. 72, (1947), 310

- 10.1. 101
- 10.2. 102
- 10.3. 103
- 10.4. 104
- 10.5. 105
- 10.6. 106
- 10.7. 107
- 10.8. 108
- 10.9. 109
- 10.10. 110
- 10.11. 111
- 10.12. 112
- 10.13. 113
- 10.14. 114
- 10.15. 115
- 10.16. 116
- 10.17. 117
- 10.18. 118
- 10.19. 119
- 10.20. 120
- 10.21. 121
- 10.22. 122
- 10.23. 123
- 10.24. 124
- 10.25. 125
- 10.26. 126
- 10.27. 127
- 10.28. 128
- 10.29. 129
- 10.30. 130
- 10.31. 131
- 10.32. 132
- 10.33. 133
- 10.34. 134
- 10.35. 135
- 10.36. 136
- 10.37. 137
- 10.38. 138
- 10.39. 139
- 10.40. 140
- 10.41. 141
- 10.42. 142
- 10.43. 143
- 10.44. 144
- 10.45. 145
- 10.46. 146
- 10.47. 147
- 10.48. 148
- 10.49. 149
- 10.50. 150
- 10.51. 151
- 10.52. 152
- 10.53. 153
- 10.54. 154
- 10.55. 155
- 10.56. 156
- 10.57. 157
- 10.58. 158
- 10.59. 159
- 10.60. 160
- 10.61. 161
- 10.62. 162
- 10.63. 163
- 10.64. 164
- 10.65. 165
- 10.66. 166
- 10.67. 167
- 10.68. 168
- 10.69. 169
- 10.70. 170
- 10.71. 171
- 10.72. 172
- 10.73. 173
- 10.74. 174
- 10.75. 175
- 10.76. 176
- 10.77. 177
- 10.78. 178
- 10.79. 179
- 10.80. 180
- 10.81. 181
- 10.82. 182
- 10.83. 183
- 10.84. 184
- 10.85. 185
- 10.86. 186
- 10.87. 187
- 10.88. 188
- 10.89. 189
- 10.90. 190
- 10.91. 191
- 10.92. 192
- 10.93. 193
- 10.94. 194
- 10.95. 195
- 10.96. 196
- 10.97. 197
- 10.98. 198
- 10.99. 199
- 10.100. 200

STELLINGEN

I

De wijzen, waarop in de planimetrie de definities van het trapezium en het gelijkbenig trapezium worden gegeven, zijn onbevredigend. Noemt men echter deze laatste figuur een gelijkhoekig trapezium, dan zijn betere definities mogelijk.

[Molenbroek, P., Leerboek der vlakke meetkunde, Noordhoff (Groningen), 1952; en voorts b.v.: Van Thijn, A., en Kobus, M.L., Leerboek der planimetrie, Wolters (Groningen), 1937]

II

De intensiteit van de radiostraling van metergolven, die uit de wereldruimte wordt opgevangen, vertoont een minimum in een richting, die belangrijk afwijkt van de richting van de galactische pool. Op grond hiervan moet met de mogelijkheid rekening worden gehouden, dat de temperatuur van de extragalactische radiostraling aanzienlijk lager is dan de minimum temperatuur aan de hemel.

III

De wijze, waarop MEYER en LONG hun formule van het fontein-effect in de onverzadigde film in helium II afleiden, is niet elegant.

[Meyer, L., en Long, E., Phys. Rev. **84**, (1951), 551]

IV

De formule van TISZA:

$$x = S/S_{\Lambda} ,$$

waarin x is de concentratie van het normale fluidum in helium II, S de entropie en de index Λ betrekking heeft op het Λ -punt, blijkt de directe metingen van x boven verwachting goed weer te geven. In verband hiermede valt op te merken, dat men deze formule ook uit geheel andere praemissen kan afleiden dan uit die van TISZA, te weten uit:

$$E = akTx \quad \text{en} \quad x = (T/T_{\Lambda})^b .$$

Hierin is E de energie/cm³ en k de constante van BOLTZMANN; voorts zijn a , b en T_{Λ} constanten.

[Tisza, L., Phys. Rev. **72**, (1947), 838]

V

De bij de experimenten van BOWERS en MENDELSSOHN over de stroming van helium II gevonden afwijking van het lineaire verband tussen de energietoevoer I en de (begin)snelheid \hat{v}_a bij hoge waarde van I , wordt vermoedelijk niet door wrijvings-energieverliezen veroorzaakt.

[Bowers, R., en Mendelssohn, K., Proc. roy. Soc., London, **A213**, (1952), 158; Dit proefschrift: IIIB; 3, blz. 86 - 88]

VI

Het is wenselijk in een ringvormige, met fijn poeder gevulde vlakke spleet het radiale drukverloop te bestuderen bij doorstroming van vloeibaar helium II.

[Dit proefschrift: IC; 2c, blz. 36]

VII

Er is geen reden aan te nemen, dat bij stroming van vloeibaar helium II in spleten tussen 0,5 en 10 μ het normale fluidum zich als een Knudsen gas gedraagt.

[Dit proefschrift: IIIC; 2, blz. 100, fig. 35]

VIII

Het is niet doelmatig een reeksontwikkeling naar machten van $(1/T)$ van de B-coëfficiënt van deuterium voor lage temperaturen op te stellen.

[Van Itterbeek, A., en Vandoninck, W., Physica **10**, (1943), 481]

IX

Er is reden aan te nemen, dat de temperatuur van het A-punt in vloeibaar helium ongeveer 0,005°K lager ligt dan thans wordt aangenomen, afgezien van eventuele wijzigingen van de temperatuurschaal.

X

Het interkerkelijke en intrakerkelijke gesprek zou worden bevorderd, indien aan het programma van het propaedeutisch examen in de Faculteit der Godgeleerdheid de beginselen van de wiskundige analyse toegevoegd zouden worden.

XI

Het in dit proefschrift gevolgde systeem in de litteratuurlijst biedt verschillende voordelen.

XII

Het gebruik van de logaritmische en goniometrische tafels bij het eindexamen van scholen voor V.H.M.O. dient, tenminste voor de natuurkunde en de mechanica, door dat van de rekenlineaal te worden vervangen.

XIII

Een statistisch onderzoek naar de plaats, die de actieve beoefening van de muziek bij de vrijetijdsbesteding inneemt, dient ingesteld en geregeld herhaald te worden, teneinde ook de ontwikkeling hiervan te kunnen volgen.

XIV

Het is merkwaardig dat de door de "Staatscommissie tot reorganisatie van het hoger onderwijs" aanbevolen en door de "Commissie voor hoger-onderwijswetgeving" (Commissie-van der Pot) overgenomen regeling "van de titulatuur bij het hoger onderwijs", in het aan de Tweede Kamer der Staten-Generaal aangeboden ontwerp van wet zonder motivering is komen te vervallen.

The first part of the report deals with the general situation in the country and the progress of the work during the year. It is followed by a detailed account of the various projects and the results achieved. The report concludes with a summary of the work done and the plans for the future.

The second part of the report deals with the financial situation of the organization. It gives a detailed account of the income and expenditure for the year and shows how the funds have been used. It also includes a statement of the assets and liabilities of the organization at the end of the year. The report concludes with a summary of the financial position and the plans for the future.

The third part of the report deals with the administrative work of the organization. It gives a detailed account of the various departments and the work done by each of them. It also includes a statement of the personnel of the organization and the results of the work done. The report concludes with a summary of the administrative work and the plans for the future.

The fourth part of the report deals with the social work of the organization. It gives a detailed account of the various social projects and the results achieved. It also includes a statement of the personnel of the organization and the results of the work done. The report concludes with a summary of the social work and the plans for the future.

The fifth part of the report deals with the general work of the organization. It gives a detailed account of the various projects and the results achieved. It also includes a statement of the personnel of the organization and the results of the work done. The report concludes with a summary of the general work and the plans for the future.

The sixth part of the report deals with the general work of the organization. It gives a detailed account of the various projects and the results achieved. It also includes a statement of the personnel of the organization and the results of the work done. The report concludes with a summary of the general work and the plans for the future.

