DIFFERENTIAAL-MEETKUNDIGE

EIGENSCHAPPEN VAN STRALENSTELSELS

A. L. ZAALBERG

Jl.

DIFFERENTIAAL-MEETKUNDIGE EIGENSCHAPPEN

VAN STRALENSTELSELS.

Differentiaal-meetkundige eigenschappen van stralenstelsels.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. J. VAN LEEUWEN Jr.,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Dinsdag 18 April 1905, des namiddags te 4 uren,

DOOR

ALBERTUS LODEWIJK ZAALBERG,

GEBOREN TE AARLANDERVEEN.

LEIDEN,
S. C. VAN DOESBURGH.
1905.

AAN MIJNE VROUW

EN AAN DE

NAGEDACHTENIS MIJNER OUDERS.

Het is mij een aangename plicht aan U, Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen, en voor de bewijzen van toegenegenheid, die ik, in den loop van mijn studietijd en ook daarna, van velen Uwer heb ondervonden.

Hooggeleerde Zeeman, Hooggeachte Promotor, ik ben niet in staat, hier in eenige woorden uit te drukken, hoeveel Gij in den korten tijd, dien ik met U in aanraking ben gekomen, voor mij hebt gedaan, nog minder U mijn dankbare gevoelens jegens U te vertolken.

Ik kan U echter de verzekering geven, dat ik nooit zal vergeten, hoeveel Gij door Uw onvermoeide hulp, Uw raadgevingen en Uwe aansporingen hebt bijgedragen tot het tot stand komen van dit proefschrift.

Hooggeleerde Van Geer, ik behoef U wel niet te zeggen, hoezeer het mij gespeten heeft, dat U vóór de voltooiing van mijn proefschrift, het besluit hebt meenen te moeten nemen Uw Hoogleeraarsambt neer te leggen. De vriendschap en belangstelling, die ik steeds van U heb mogen ondervinden, zullen mij niet licht uit het geheugen gewischt worden. Moge Gij in staat gesteld worden nog geruimen tijd, in Uwe tegenwoordige betrekking tot de Universiteit, in het belang van de studenten werkzaam te zijn.

INLEIDING.

De theorie van de stralenstelsels, of stralencongruenties, die ik me in het volgende voorstel te behandelen, wortelt in een probleem uit de natuurkunde. Malus, een Fransch natuurkundige, toonde in 1808 in een geschrift, getiteld „*Optique*", voorkomende in Cahier XIV van het *Journal de l'École Polytechnique* aan, dat de lichtstralen, afkomstig van een vast lichtgevend punt, welke worden teruggekaatst door een willekeurig oppervlak, ook na de terugkaatsing, de normalen blijven van een oppervlak.

Deze stelling werd daarna aanmerkelijk uitgebreid door Dupin, Cauchy, Quételet, Gergonne en Lévistal. Malus ging echter uit van het meer algemeene begrip van stralencomplex, d.w.z. eene verzameling van ∞^3 lijnen in de ruimte, die dus bepaald worden door drie van elkaar onafhankelijke parameters. Door eene betrekking aan te nemen tusschen die drie parameters kwam hij tot eene verzameling van ∞^2 lijnen in de ruimte, genaamd stralencongruentie, door de beschouwing waarvan hij geraakte tot bovenvermelde stelling. Ook hier werd, evenals in meerdere gevallen, b.v. gelijk bij de onderzoekingen van Fourier over de warmtegeleiding, het denkbeeld van den natuurkundige overgenomen door de wiskundigen.

In het jaar 1828 begon Hamilton zijn studie der congruenties en publiceerde de resultaten hiervan in drie opstellen (Irish Trans. 15. 1828; 16. 1830; 17. 1837).

Maar de grootste schrede voorwaarts in de theorie werd gedaan door Kummer, die zijn resultaten in 1860 neerlegde in twee artikelen (Crelle's Journal. Bd. 57 en Berl. Monatsber. 1859—60). Deze arbeid behoort tot de differentiaal meetkunde, terwijl daarnevens zich langzamerhand ontwikkelde het meer algebraïsche deel der theorie, d.w.z. het deel, waarbij het verband tusschen de parameters wordt aangegeven door eene algebraïsche betrekking. Men spreekt in dat geval dan ook van algebraïsche complexen en congruenties. Ook aan dit deel der theorie heeft Kummer een ruim aandeel genomen. (Berl. Abh. 1866). Maar in nog meerdere mate Plücker, die een niet gering deel zijner nieuwe, zoogenaamde *lijnmeetkunde*, aan de theorie der congruenties wijdde.

De inhoud van dit proefschrift blijft op het terrein van het differentiaal gedeelte der theorie. Vele wiskundigen hebben zich hiermede met groot gevolg bezig gehouden; hun namen zullen bij de verschillende resultaten van zelf vermeld worden, evenals de plaatsen, waar men deze te zoeken heeft. Ten slotte zij nog opgemerkt, dat, in het bijzonder met betrekking tot de leer der oneindig kleine verbuigingen van een oppervlak, de theorie voorbestemd schijnt te zijn nog een grooten rol te spelen in de meetkunde.

Bianchi laat zich hierover aldus uit:

„Diese Theorie, die aus Fragen der geometrischen Optik hervorgegangen ist, hat für die Flächenlehre immer mehr an Bedeutung gewonnen, und es scheint nicht zweifelhaft, dass sie in Zukunft noch viel mehr zu den Fortschritten der Geometrie beizutragen bestimmt ist". (Luigi Bianchi, Vorlesungen über Differential Geometrie. Deutsche Uebersetzung. Leipzig. 1899).

Het eerste Hoofdstuk stel ik mij voor te wijden aan de resultaten van Kummer en de isotrope stralenstelsels, terwijl ik in het tweede Hoofdstuk wil behandelen stralenstelsels, bestaande uit de raaklijnen aan een familie krommen, op een willekeurig oppervlak getrokken, terwijl daarbij van zelf de zoogenaamde pseudospherische en andere bijzondere stralenstelsels ter sprake zullen worden gebracht. Gaarne had ik aan dit alles nog toegevoegd een beschouwing over stralenstelsels, die correspondeerende punten van twee op elkaar afbuigbare oppervlakken verbinden, maar het bleek mij niet mogelijk hier binnen een niet te geruimen tijd vermeldenswaardige uitkomsten te verkrijgen.

Een groot deel van de bovenvermelde bijzonderheden werd door mij geput uit: E. Pascal, Repertorium der Höheren Mathematik. II: Geometrie. Deutsche Ausgabe. Leipzig. 1902.

HOOFDSTUK I.

Algemeene eigenschappen van stralenstelsels.

Onder een stralenstelsel verstaat men een verzameling van ∞^2 lijnen, zoodat dus de stand van ieder dier lijnen bepaald wordt door twee van elkaar onafhankelijke parameters. Men kan voor deze laatste kiezen de kromlijnige coördinaten u en v van een punt op een gegeven oppervlak, waarin dit gesneden wordt door den te bepalen straal van het stelsel. Dit oppervlak wordt genoemd het *beginoppervlak*. De richtingscosinussen van een straal zijn dus functies van de kromlijnige coördinaten, die behooren bij het snijpunt van dien straal met het beginoppervlak; deze richtingscosinussen noemen wij: X, Y en Z. De rechthoekige coördinaten van een punt van het oppervlak denken we ons gegeven door de vergelijkingen:

$$x = \varphi_1 (u, v) \qquad y = \varphi_2 (u, v) \qquad z = \varphi \ (u, v)$$

Verder voeren we, in navolging van Kummer,[1] de volgende notaties in:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \qquad L = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \qquad M = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}$$

$$G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \qquad N = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

[1]) Het eerst is de theorie der stralenstelsels ontwikkeld door Kummer. (Crelle's Journal, Bd 57, 1860 en Berl. Monatsber. 1859—60).

$$e = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} \quad f = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} \quad f' = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} \quad g = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$$

$$E\,G - F^2 = \Delta^2 \qquad L\,N - M^2 = \Delta^2$$

$$\frac{dv}{du} = t.$$

Beschouwen we nu een willekeurigen straal van het stelsel, dan worden de coördinaten van een willekeurig punt op dien straal gegeven door de vergelijkingen:

$$\xi = x + \lambda\,X \qquad \eta = y + \lambda\,Y \qquad \zeta = z + \lambda\,Z \quad \ldots \quad (1)$$

waarin λ voorstelt de abscis van het punt (ξ, η, ζ) d. w. z. den afstand van dat punt tot het op den straal gelegen punt (x, y, z) van het beginoppervlak.

Gaat men van een straal (u, v) van het stelsel, die het beginoppervlak in een punt M (x, y, z) snijdt, over tot een opvolgenden straal $(u + du, v + dv)$, die met dat zelfde oppervlak het punt M_1 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ gemeen heeft, dan zal de gemeenschappelijke loodlijn van beide stralen hen b.v. in de punten P en P_1 snijden. Is $M\,P = r$ en $M_1\,P_1 = r'$ en zijn verder θ_1, θ_2 en θ_3 de cosinussen der hoeken door $P\,P_1$ met de coördinaatassen gevormd, dan vindt men door de gebroken lijnen $O\,M\,P\,P_1$ en $O\,M_1\,P_1$ op de drie assen te projecteeren:

$$\left.\begin{aligned} rX + \theta_1\,dp &= dx + r'\,(X + dX) \\ rY + \theta_2\,dp &= dy + r'\,(Y + dY) \\ rZ + \theta_3\,dp &= dz + r'\,(Z + dZ) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Hierin stelt dp de lengte der lijn $P\,P_1$ voor, terwijl $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ de cosinussen zijn der hoeken, welke de door M_1 gaande straal van het stelsel met de coördinaatassen maakt.

Door deze vergelijkingen respectievelijk te vermenigvuldigen met X, Y en Z, op te tellen en gebruik te maken van de betrekkingen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$
$$X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = 0$$
$$\theta_1\, X + \theta_2\, Y + \theta_3\, Z = 0$$
$$\theta_1\, dX + \theta_2\, \mathrm{d}Y + \theta_3 dZ = 0$$

vindt men:

$$r = \Sigma\, X\, dx + r'$$

Door ze respectievelijk te vermenigvuldigen met dX, dY en dZ en op te tellen vindt men:

$$\Sigma\, dx\, dX + r'\, \Sigma\, (dX)^2 = 0$$

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt nu:

$$\Sigma\, dx\, dX + r\, \Sigma\, (dX)^2 - \Sigma\, X\, dx.\, \Sigma\, (dX)^2 = 0$$

of na weglating van oneindig kleinen van de derde orde:

$$r = -\frac{\Sigma\, dx\, dX}{\Sigma\, (d\mathrm{X})^2}.$$

Vervangen wij hierin dx door $\frac{dx}{du}\, du + \frac{dx}{dv}\, dv$ enz. en maken wij gebruik van de boven ingevoerde notatie, dan gaat dit over in:

$$r = -\frac{e + (f + f')\, t + gt^2}{L + 2\, Mt + Nt^2} \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

Neemt men op het beginoppervlak een willekeurige kromme $\varphi\,(u, v) = 0$ aan, dan zullen de stralen van het stelsel, gaande door de punten dier kromme, een regelvlak vormen, dat scheef of ontwikkelbaar kan zijn, en waarvan $\varphi\,(u, v) = 0$ ook als de vergelijking kan worden beschouwd.

De abscis van het centraalpunt op een straal van het regelvlak, d. w. z. het punt, waar zulk een straal wordt gesneden door de gemeenschappelijke loodlijn van dien straal en een daarop volgenden, tot het regelvlak behoorenden, wordt gevonden door in formule (3) t te vervangen

door $-\dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}$.

De strictielijn van dat regelvlak wordt dan verder bepaald, door de aldus gevonden waarde van r in de uitdrukkingen (1) te substitueeren.

In de meetkunde wordt dikwijls met vrucht gebruik gemaakt van de zoogenaamde spherische afbeelding van een stralenstelsel; hieronder verstaat men het volgende. Men trekt van uit een vast punt O een lijn, die de richting heeft van den straal (u, v) van het stralenstelsel en beschrijft met O als middelpunt een bol met de lengte eenheid tot straal; het punt, waar deze bol door den genoemden straal uit O gesneden wordt, noemt men het spherisch beeld van den straal (u, v) van het stralenstelsel.

Geeft men de kromlijnige bolcoördinaten, die bij dit beeld behooren, ook de waarden u en v, dan hebben de krommen $u =$ constant en $v =$ constant van het oppervlak tot beeld de krommen $u =$ constant en $v =$ constant op den bol. Bij deze spherische afbeelding worden de rechthoekige coördinaten van een punt (u, v) op den bol juist de reeds vermelde grootheden X, Y en Z behoorende bij het punt (u, v) op het beginoppervlak.

Het lijnelement van den bol wordt dan gegeven door de vergelijking:

$$d\sigma^2 = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Om de waarde van t te vinden, waarvoor r in (3) een maximum of minimum wordt, hebben we het tweede lid, naar t gedifferentiëerd, nul te stellen.

Dit geeft:

$$t^2 \left[\tfrac{1}{2} N (f + f') - gM\right] + t\,[eN - gL] +$$
$$+ \left[eM - \tfrac{1}{2}\, L\, (f + f')\right] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Deze vergelijking bepaalt voor elk punt (u, v) op het beginoppervlak twee richtingen (twee waarden van t), in welke men van af dat punt naar een volgend punt moet overgaan, opdat de abscis van dat punt op den door (u, v)

gaanden straal, dat den kortsten afstand heeft tot den straal door het punt $(u+du,\ v+dv)$, maximum of minimum zij. Gaat men in eene andere richting van het punt $(u,\ v)$ uit, dan zal dat punt van den door $(u,\ v)$ gaanden straal, dat den kortsten afstand heeft tot den straal door $(u+du,\ v+dv)$, tusschen deze beide uiterste standen, de zoogenaamde *grenspunten* op den straal (u, v), gelegen zijn.

De vergelijking (5) kan ook anders worden opgevat, n.l. als de differentiaal vergelijking van twee stelsels krommen op het beginoppervlak of van de beide stelsels, daarbij behoorende, regelvlakken. Die regelvlakken, gevormd door stralen van het stelsel, zoodanig, dat de strictielijnen dier oppervlakken de meetkundige plaatsen zijn der grenspunten, op die stralen gelegen, worden de *hoofdregelvlakken* van het stralenstelsel genoemd.

De vlakken door straal $(u,\ v)$ en de beide gemeenschappelijke loodlijnen van dien straal en twee opvolgende stralen, behoorende tot het eerste en tweede hoofdregelvlak, heeten *hoofdvlakken.*

De richtingen der zooeven genoemde loodlijnen staan loodrecht op elkaar. Het bewijs hiervan is aldus.

Noemen we de wortels van vergelijking (5): t_1 en t_2 dan hebben we:

$$t_1 + t_2 = \frac{eN - gL}{gM - \frac{1}{2}N(f+f')} \text{ en } t_1\, t_2 = \frac{\frac{1}{2}L(f+f') - eM}{gM - \frac{1}{2}N(f+f')} \quad \ldots\ldots (6)$$

Hieruit volgt:

$$L + M(t_1 + t_2) + N\, t_1 t_2 = 0 \quad \ldots\ldots (7)$$

De beteekenis hiervan is, dat bij de spherische afbeelding de elementen $(du,\ t_1 du)$ en $(du,\ t_2 du)$ op den bol een rechten hoek met elkaar maken; daar nu de genoemde loodlijnen respectievelijk loodrecht zijn gericht ten opzichte van de stralen van den bol, getrokken naar de punten (u, v), $(u+du, v+t_1 du)$ en (u, v), $(u+du, v+t_2 du)$ op het oppervlak, zijn ze ook loodrecht gericht ten opzichte van die elementen op den bol en vormen dus ook met elkaar een rechten hoek.

Uit de vergelijkingen (6) volgt verder:

$$e+\tfrac{1}{2}(f+f')(t_1+t_2)+g\,t_1 t_2=0 \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

Noemen we de abscis, die behoort bij het grenspunt (t_1): r_1 en die, behoorende bij het grenspunt (t_2): r_2, dan is ten gevolge van (3):

$$r_1=-\frac{e+(f+f')\,t_1+gt_1^2}{L+2Mt_1+Nt_1^2}=$$

$$=-\frac{\{e+\tfrac{1}{2}(f+f')\,t_1\}+t_1\{\tfrac{1}{2}(f+f')+gt_1\}}{(L+Mt_1)+t_1(M+Nt_1)}$$

maar daar, ten gevolge van (8):

$$e+\tfrac{1}{2}(f+f')\,t_1=-t_2\{\tfrac{1}{2}(f+f')+gt_1\}$$

en ten gevolge van (7):

$$L+Mt_1=-t_2\{M+Nt_1\}$$

kunnen we schrijven:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=-\frac{e+\tfrac{1}{2}(f+f')\,t_1}{L+Mt_1}=-\frac{\tfrac{1}{2}(f+f')+gt_1}{M+Nt_1} \quad . \; . \; . \; . \\ r_2&=-\frac{e+\tfrac{1}{2}(f+f')\,t_2}{L+Mt_2}=-\frac{\tfrac{1}{2}(f+f')+gt_2}{M+Nt_2} \quad . \; . \; . \; . \end{aligned}\right\}(9)$$

Elimineert men hieruit t, dan vindt men, ter bepaling van de abscissen der grenspunten, de volgende vierkantsvergelijking:

$$\Delta^2 r^2+r[eN-M(f+f')+gL]+\left[eg-\left(\frac{f+f'}{2}\right)^2\right]=0 \; . \; . \; . \; (10)$$

Wanneer we den afstand der grenspunten noemen $2d$ en de abscis van het punt op den straal, dat midden tusschen de grenspunten gelegen is en *middelpunt van den straal* wordt genoemd m, dan worden deze gevonden uit de vergelijkingen:

$$d = \frac{r_2 - r_1}{2} \text{ en } m = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

waarbij we $r_2 > r_1$ veronderstellen.

De vergelijkingen (5) en (10) hebben steeds reëele wortels. (Ondersteld wordt, dat men met reëele stralenstelsels te doen heeft.) Allereerst volgt dat uit de uitdrukking (3), die, wijl voor geene enkele reëele waarde van t de noemer nul wordt, steeds eindig is en eene bepaalde maximum en minimum waarde moet hebben. Doch het volgt ook uit de discriminant van (5) of (10), die men schrijven kan in den vorm:

$$L^2 N^2 \left\{\frac{e}{L} - \frac{g}{N}\right\}^2 - 4\, M^2 L\, N \left\{\frac{e}{L} - \frac{(f+f')}{2\, M}\right\} \left\{\frac{(f+f')}{2\, M} - \frac{g}{N}\right\}$$

d. i. wanneer men:

$$\frac{f+f'}{2\, M} - \frac{e}{L} = P \text{ en } \frac{f+f'}{2\, M} - \frac{g}{N} = Q \text{ stelt:}$$

$$L\, N \left\{L\, N\, (P - Q)^2 + 4\, M^2 PQ\right\}$$

Wijl nu $L\, N > M^2$ is, zal deze discriminant grooter dan $M^4\; (P + Q)^2$, d. i. zeker positief zijn. Alleen dan is zij nul, wanneer zoowel P als $Q = o$ is, d. i.

De beide grenspunten op een willekeurigen straal van een stralenstelsel gelegen, zullen alleen dan samenvallen, wanneer voldaan is aan de voorwaarden

$$\frac{e}{L} = \frac{(f+f')}{2\, M} = \frac{g}{N} \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Men verkrijgt de beide *grensoppervlakken* van het stelsel, d.w.z. de meetkundige plaatsen der op de stralen van het stelsel gelegen grenspunten, door in (1) voor λ achtereenvolgens r_1 en r_2 uit (10) te substitueeren. Ook die grensoppervlakken zullen dus steeds reëel zijn.

Eindelijk verkrijgt men het zoogenaamde *middenoppervlak* van het stralenstelsel, d. i. de meetkundige plaats van het punt, dat op elken straal midden tusschen de grenspunten ligt, het zoogenaamde middelpunt, door in de vergelijkingen (1) voor λ te substitueeren $m = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Uit de definitie volgt onmiddellijk, dat het middenoppervlak zal samenvallen met het beginoppervlak, wanneer:

$$Lg - (f + f') M + Ne = o \quad . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Middenomhullende van een stralenstelsel noemt men het oppervlak, dat omhuld wordt door de vlakken, in de middelpunten van de stralen, loodrecht op die stralen aangebracht.

Wijzen we de loopende coördinaten van een punt in het vlak, hetwelk in het middelpunt loodrecht op den straal (u, v) staat, door φ_1, φ_2 en φ_3 aan, dan voldoen deze aan de vergelijking:

$$(\varphi_1 - x) X + (\varphi_2 - y) Y + (\varphi_3 - z) Z = m \quad . \; . \; . \; . \quad (14).$$

waarin m de abscis van het middelpunt voorstelt en x, y en z de coördinaten van het punt van het beginoppervlak, waar dit door straal (u, v) gesneden wordt. Het door dit vlak omhulde oppervlak zal dus de middenomhullende zijn.

Tenslotte noemt men wel *middenregelvlakken* van het stralenstelsel, die regeloppervlakken, welker strictielijnen op het middenoppervlak liggen. Wijl dan in (3), tengevolge van (10),

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} = - \frac{Lg - (f + f') M + Ne}{2 \Delta^2}$$

moet zijn, is de differentiaalvergelijking dezer oppervlakken:

$$\frac{Lg - (f + f') M + Ne}{2\Delta^2} = \frac{e + \frac{(f + f')}{2} t + g t^2}{L + 2 M t + N t^2} \quad . \; . \; . \quad (15).$$

Uit het voorgaande volgt dus, dat in 't algemeen door elken straal van het stelsel twee hoofdregelvlakken en twee middenregelvlakken gaan.

Onder den *parameter* van een straal op het regelvlak $\varphi(u,v)=o$ van het stralenstelsel, door de Franschen *paramètre de distribution* genoemd, verstaat men Lim. $\frac{\Delta p}{\Delta \alpha}$, waarin Δp den kortsten afstand van dien straal tot een opvolgenden straal van het stelsel, op hetzelfde regelvlak gelegen, voorstelt, terwijl $\Delta \alpha$ de hoek is, dien beide stralen met elkaar maken.

Uit de vergelijkingen (2) n. l.:

$$\begin{aligned} r\,X + \theta_1\,dp &= dx + r'\,(X + dX) \\ r\,Y + \theta_2\,dp &= dy + r'\,(Y + dY) \\ r\,Z + \theta_3\,dp &= dz + r'\,(Z + dZ) \end{aligned}$$

volgt, als men deze vergelijkingen achtereenvolgens met θ_1, θ_2 en θ_3 vermenigvuldigt en dan optelt:

$$dp = \Sigma\,\theta_1\,dx.$$

Verder is

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)} = d\sigma = \\ &= \sqrt{(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2)}, \end{aligned}$$

zoodat de parameter P voor een straal (u, v), gelegen op het oppervlak $\varphi\ (u, v) = 0$, zal zijn:

$$P = \frac{\Sigma\,\theta_1\,dx}{d\sigma}.$$

Wijl:

$$\begin{aligned} \theta_1\,X + \theta_2\,Y + \theta_3\,Z &= 0 \\ \text{en } \theta_1\,dX + \theta_2\,dY + \theta_3\,dZ &= 0 \text{ is,} \end{aligned}$$

moet:

$$\frac{\theta_1}{Y\,dZ - Z\,dY} = \frac{\theta_2}{Z\,dX - X\,dZ} = \frac{\theta_3}{X\,dY - Y\,dX}$$

Elk dezer breuken is gelijk aan

$$\frac{1}{\sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}} = \frac{1}{d\sigma},$$

zoodat:

$$\theta_1 = \frac{Y\,dZ - Z\,dY}{d\sigma},\quad \theta_2 = \frac{Z\,dX - X\,dZ}{d\sigma},\quad \theta_3 = \frac{X\,dY - Y\,dX}{d\sigma}.$$

Nu is echter:

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{1}{\Delta}\left(M\frac{\partial X}{\partial u} - L\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = -\frac{1}{\Delta}\left(N\frac{\partial X}{\partial u} - M\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

en hieruit:

$$Y\,dZ - Z\,dY = -\frac{1}{\Delta}\left\{\left(M\frac{\partial X}{\partial u} - L\frac{\partial X}{\partial v}\right)du + \right.$$

$$\left. + \left(N\frac{\partial X}{\partial u} - M\frac{\partial X}{\partial v}\right)dv\right\}$$

waarbij Δ de positieve wortel is.

Tot deze vergelijkingen kan men op de volgende manier geraken. Men heeft:

$$\Sigma X\frac{\partial X}{\partial u} = 0 \text{ en } \Sigma X\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

waaruit volgt:

$$\frac{X}{\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}} = \frac{Y}{\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{dv}} = \frac{Z}{\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}} = \frac{1}{\Delta}$$

Verder kan men steeds stellen:

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = AX + B\frac{\partial X}{\partial u} + C\frac{\partial X}{\partial v}$$

$$Z\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Z}{\partial u} = AY + B\frac{\partial Y}{\partial u} + C\frac{\partial Y}{\partial v}$$

$$X\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial X}{\partial u} = AZ + B\frac{\partial Z}{\partial u} + C\frac{\partial Z}{\partial v}$$

waarin A, B en C nog onbekend zijn.

Vermenigvuldigt men deze vergelijkingen achtereenvolgens met: 1e X, Y, Z; 2e $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u}$; 3e $\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v}$ en telt op, dan verkrijgt men:

$$A = 0 \quad B L + C M = 0 \quad B M + C N = 1,$$

waaruit $B = -\frac{M}{\Delta}$; $C = \frac{L}{\Delta}$. Dit geeft dan:

$$Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{1}{\Delta}\left(M \frac{\partial X}{\partial u} - L \frac{\partial X}{\partial v}\right) \text{ enz.}$$

In verband hiermede, wordt dan:

$$\Sigma\, \theta_1\, dx = \frac{1}{-\Delta\, d\sigma}\Big[(Me - Lf')\, du^2 + \{Ne - Lg +$$

$$+ (f - f')\, M\}\, du\, dv + (fN - gM)\, dv^2 \Big].$$

De parameter van den beschouwden straal, liggende op het oppervlak $\varphi\, (u, v) = 0$, wordt dan:

$$P = -\frac{1}{\Delta} \; \frac{[(eM - f'L) + \{Ne - Lg + (f - f')\, M\}\, t + (fN - gM)\, t^2]}{L + 2\, Mt + Nt^2}$$

waarin t moet voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + t\, \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Wijl men deze uitdrukking ook aldus kan schrijven:

$$P = \frac{1}{-\Delta} \frac{\left[\left\{eM - \left(\frac{f + f'}{2}\right) L\right\} + (eN - gL)\, t + \left\{\left(\frac{f + f'}{2}\right) N - gM\right\} t^2\right]}{L + 2\, Mt + Nt^2} -$$

$$- \frac{(f - f')}{2\,\Delta} \quad \ldots \; (16)$$

blijkt hieruit, dat de parameter van een straal, wanneer deze gerekend wordt te behooren tot een der hoofdregelvlakken, bepaald door de vergelijking (5), zal zijn:

$$P_1 = \frac{(f-f')}{2\Delta} \quad . \; . \; . \; . \; (17)$$

waarin P_1 *hoofdparameter* wordt genoemd.

Onder de regelvlakken, gevormd door stralen van een stelsel, komen twee stelsels ontwikkelbare oppervlakken voor. Ten einde deze te bepalen kan men zeggen, dat, als de straal:

$$\xi = x + \lambda X \quad y = \eta + \lambda Y \quad \zeta = z + \lambda Z \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

een ontwikkelbaar oppervlak doorloopt, op elken straal een punt moet kunnen gevonden worden, in 't welk die straal de keerlijn van het ontwikkelbaar oppervlak aanraakt. Voor eene verplaatsing langs die keerlijn moet dus:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z} \text{ zijn, of:}$$

$$\frac{dx + \lambda\, dX + X\, d\lambda}{X} = \frac{dy + \lambda\, dY + Y\, d\lambda}{Y} = \frac{dz + \lambda\, dZ + Z\, d\lambda}{Z}.$$

Door van ieder dier verhoudingen $d\lambda$ af te trekken, gaan ze over in:

$$\frac{dx + \lambda dX}{X} = \frac{dy + \lambda dY}{Y} = \frac{dz + \lambda dZ}{Z}.$$

Door teller en noemer van de eerste breuk met $\frac{\partial X}{\partial u}$, van de tweede met $\frac{\partial Y}{\partial u}$ en van de derde met $\frac{\partial Z}{\partial u}$ en vervolgens met $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$ en $\frac{\partial Z}{\partial v}$ te vermenigvuldigen en gebruik te maken van de betrekkingen $\Sigma X \frac{\partial X}{\partial u} = 0$ en $\Sigma X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$, volgen hieruit de volgende twee formules:

$$\left.\begin{array}{l} (e + \lambda L)\, du + (f + \lambda M)\, dv = 0 \\ (f' + \lambda M)\, du + (g + \lambda N)\, dv = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Elimineert men hieruit allereerst λ, dan verkrijgt men voor de differentiaal vergelijking der ontwikkelbare oppervlakken van het stelsel:

$$(eM - f'L) + \{ eN - gL + (f - f')M \} t + (fN - gM) t^2 = 0 \ldots (19)$$

waarvan we de wortels zullen noemen τ_1 en τ_2.

Hieruit volgt, dat er door elken straal twee ontwikkelbare oppervlakken, gevormd door stralen van het stelsel, gaan.

Deze vergelijking had men ook kunnen vinden door op te merken, dat voor de ontwikkelbare oppervlakken, door een straal gaande, de parameter P nul moet zijn. Uit (16) volgt dan onmiddellijk de vergelijking (19).

Elimineert men daarentegen uit beide vergelijkingen (18) du en dv, dan verkrijgt men ter bepaling van de abscissen der beide punten, in welke een straal van het stelsel de keerlijnen van de beide ontwikkelbare oppervlakken aanraakt, welke punten de *focaal* of *brandpunten*, op dien straal gelegen, genoemd worden, de vierkantsvergelijking (hierin is λ door ϱ vervangen):

$$(e + \varrho L)(g + \varrho M) - (f + \varrho M)(f' + \varrho M) = 0$$

of:

$$\varrho^2 \Delta^2 + \varrho [eN - (f + f')M + gL] + (eg - ff') = 0 \ldots (20)$$

Noemt men de wortels dezer vergelijking ϱ_1 en ϱ_2, dan zullen de beide focaal oppervlakken of de beide bladen van het *focaaloppervlak*, d. w. z. de meetkundige plaatsen der brandpunten, op de stralen van het stelsel gelegen, (ook de meetkundige plaatsen der keerlijnen van de ontwikkelbare oppervlakken, gevormd door stralen van het stelsel) verkregen worden, door in de vergelijkingen (1) voor λ achtereenvolgens ϱ_1 en ϱ_2 te substitueeren. Elke straal raakt dus de beide focaaloppervlakken aan.

De vlakken, langs straal (u, v) rakende aan de beide ontwikkelbare oppervlakken door dien straal, heeten *brand-* of *focaalvlakken.*

Men kan ook nog een andere definitie geven van een brandpunt op een straal. Wanneer we ons in een punt van straal (u, v) de raakvlakken denken aan de verschillende regelvlakken van het stralenstelsel, die gaan door straal (u, v), dan kan men de vraag stellen, hoe moet dat punt gelegen zijn., opdat al die raakvlakken samenvallen. Stellen we daartoe de vergelijking op van het raakvlak in een punt van straal (u, v) aan een regelvlak door straal (u, v) met vergelijking $\varphi\,(u, v) = 0$. De coördinaten van punten op dit regelvlak zullen gegeven zijn door de vergelijkingen:

$$\xi = x + \lambda X \qquad \eta = y + \lambda Y \qquad \zeta = z + \lambda Z$$

en

$$\varphi\,(u, v) = 0.$$

Hieruit volgt, voor eene verplaatsing $(d\xi, d\eta, d\zeta)$ op dit regelvlak:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= du\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda\frac{\partial X}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda\frac{\partial X}{\partial v}\right)\right] + Xd\lambda \\ d\eta &= du\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \lambda\frac{\partial Y}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial y}{\partial v} + \lambda\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\right] + Yd\lambda \\ d\zeta &= du\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \lambda\frac{\partial Z}{\partial u}\right) + t\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \lambda\frac{\partial Z}{\partial v}\right)\right] + Zd\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

waarin t voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + t\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

Door de vergelijkingen (21) respectievelijk te vermenigvuldigen met $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$ en $\frac{\partial Z}{\partial u}$ en vervolgens op te tellen, krijgt men:

$$\Sigma\,\frac{\partial X}{\partial u}\,d\xi = du\,[(e + \lambda L) + t\,(f + \lambda M)].$$

Door ze te vermenigvuldigen met $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$ en $\frac{\partial Z}{\partial v}$ en op te tellen:

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial v} d\xi = du\,[(f' + \lambda M) + t\,(g + \lambda N)]$$

Door eliminatie van du vindt men:

$$\frac{\Sigma \frac{\partial X}{\partial u} d\xi}{\Sigma \frac{\partial X}{\partial v} d\xi} = \frac{(e + \lambda L) + t\,(f + \lambda M)}{(f' + \lambda M) + t\,(g + \lambda N)}$$

Noemen we de coördinaten van een punt op het raakvlak, in het punt (ζ, η, ζ) aan het regelvlak aangebracht, x_1, y_1, z_1, dan is de vergelijking van dit raakvlak:

$$\begin{vmatrix} x_1 - \xi & y_1 - \eta & z_1 - \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

of:

$$\Sigma\,(x_1 - \xi)\,(Z\,d\eta - Y\,d\zeta) = 0.$$

Maar:

$$Z\,d\eta - Y\,d\zeta = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) d\eta - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) d\zeta \right\} =$$

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial X}{\partial u}\;\Sigma \frac{\partial X}{\partial v} d\xi - \frac{\partial X}{\partial v}\;\Sigma \frac{\partial X}{\partial u} d\xi\right\}.$$

Voert men nu de gevonden betrekking in, dan verkrijgt men de vergelijking van het raakvlak in den vorm:

$$\Sigma\;(x_1 - \xi)\left[\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{(e + \lambda L) + t\,(f + \lambda M)}{(f' + \lambda M) + t\,(g + \lambda N)}\,\frac{\partial X}{\partial v}\right] = 0 \ldots (22)$$

Zal de vergelijking van het raakvlak nu onafhankelijk zijn van t, dan moet:

$$\frac{e + \lambda L}{f' + \lambda M} = \frac{f + \lambda M}{g + \lambda N}$$

en hieruit volgt, dat voor het gevraagde punt de abscis λ moet voldoen aan de vierkantsvergelijking (20), waarmede bewezen is, dat het gevraagde punt moet zijn een der brandpunten.

Uit (22) blijkt ook nog, dat, wanneer men 4 regelvlakken van het stelsel beschouwt door straal (u, v), waarvoor t b.v. de waarden t_1, t_2, t_3 en t_4 aanneemt, de dubbelverhouding van de vier raakvlakken in een punt van straal (u, v) aan deze regelvlakken, onafhankelijk is van de ligging van dit punt. Kiezen we b.v. straal (u, v) tot Z *as*, dan worden de tangenten van de hoeken, die de normalen tot deze vier raakvlakken vormen met de X *as* gegeven door eene uitdrukking van den vorm $\frac{P + Qt}{R + St}$, waarin we voor t achtereenvolgens de waarden t_1 t_2, t_3 en t_4 hebben te substitueeren en waarin P, Q, R en S bepaald worden door de waarden u en v van den straal en de abscis λ van het punt op dien straal. Daar de dubbelverhouding dier vier raakvlakken gegeven wordt door de dubbelverhouding dier tangenten en de dubbelverhouding van vier grootheden invariant blijft bij eene lineaire substitutie, is deze dubbelverhouding die van de vier waarden t_1, t_2, t_3 en t_4, en dus onafhankelijk van λ of van de ligging van het punt op den straal.

Uit (10) en (20) volgt:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2 \text{ en } \varrho_1 \varrho_2 = r_1 r_2 + \frac{(f - f')^2}{4 \Delta^2} \quad \ldots (23)$$

Hieruit blijkt, dat het middelpunt van een straal ook ligt midden tusschen de brandpunten.

Noemt men den afstand der brandpunten van het middelpunt δ, dan is:

$$\delta = \left| \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2} \right|$$

en verder:

$$\varrho_2 = m + \delta \quad \varrho_1 = m - \delta$$

en dus, daar $d = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$:

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4\,\Delta^2} = P_1^{\,2} \quad . \ . \ . \ . \ (24).$$

Hieruit volgt, dat de grenspunten steeds verder van het middelpunt verwijderd zijn dan de brandpunten en tevens, dat δ slechts reëel is, wanneer:

$$d > | P_1 |$$

Terwijl dus de op een straal gelegen grenspunten steeds reëel zullen zijn, is dit met de beide brandpunten (en dus ook met de beide focaaloppervlakken) niet altijd het geval.

Uit de tweede definitie, die gegeven is voor de brandpunten, kan men nog eene betrekking afleiden, die bestaat tusschen den parameter P van een straal, de abscissen der brandpunten, den hoek tusschen de brandvlakken $\varphi\,(\tau_1\,\tau_2)$ en de grootheid r bepaald door vergelijking (3).

Is P de parameter van een straal (u, v) van het stelsel, wanneer deze beschouwd wordt als lijn van een regeloppervlak, gevormd door stralen van het stelsel, dan zal de hoek φ, ien het raakvlak in een willekeurig punt M van den straal maakt met het raakvlak in het centraalpunt op dien straal, bepaald worden door:

$$tg\ \varphi = \frac{l}{P}$$

waarin l den afstand voorstelt van het punt M tot het centraalpunt.

Is dus r de abscis van dit centraalpunt en zijn ϱ_1 en ϱ_2 de abscissen der brandpunten op den straal, waarbij r door de vergelijking (3) bepaald wordt, terwijl ϱ_1 en ϱ_2 de wortels zijn der vergelijking (20), dan is de tangens van den hoek φ_1 tusschen de raakvlakken aan 't beschouwde regelvlak in het brandpunt ϱ_1 en het centraalpunt:

$$tg\varphi_1 = \frac{\varrho_1 - r}{P}$$

Evenzoo is de tangens van den hoek φ_2 der raakvlakken aan het beschouwde regelvlak in het brandpunt ϱ_2 en het centraalpunt:

$$tg\varphi_2 = \frac{\varrho_2 - r}{P}.$$

Voor den hoek $\varphi\ (\tau_1\, \tau_2)$, gevormd door de raakvlakken aan dit regelvlak in de beide brandpunten van den straal $(u,\ v)$, en volgens de tweede definitie van brandpunt zijn dit de beide focaalvlakken door dien straal, heeft men derhalve:

$$\varphi\ (\tau_1\, \tau_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

dus:

$$tg\ \varphi\ (\tau_1\, \tau_2) = \frac{tg\ \varphi_1 - tg\ \varphi_2}{1 + tg\ \varphi_1\, tg\ \varphi_2} = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)\, P}{P^2 + (\varrho_1 - r)\,(\varrho_2 - r)}.$$

Hierbij is ondersteld, dat het centraalpunt en de beide brandpunten aan denzelfden kant van het beginpunt op den straal zijn gelegen en dat $\varrho_1 > \varrho_2 > r$ is. Maakt men daaromtrent eene andere onderstelling, dan verkrijgt men hetzelfde resultaat, waarbij alleen het teeken eene wijziging kan ondergaan. Algemeen schrijven wij daarom:

$$tg\ \varphi\, (\tau_1\, \tau_2) = \pm \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)\, P}{P^2 + (\varrho_1 - r)\,(\varrho_2 - r)} \quad \ldots\ldots (25)$$

Nemen we in deze formule voor P de waarde van den hoofdparameter P_1, en voor r de abscis van een grenspunt r_1, dan vinden we:

$$tg\ \varphi\ (\tau_1\, \tau_2) = \frac{\delta}{\sqrt{(d^2 - \delta^2)}} \quad \ldots\ldots (26)$$

daarbij gebruik makende van de betrekkingen (23) en (24).

Wanneer de stralen van een stelsel allen loodrecht staan op een zelfde oppervlak, noemen we het stelsel een normaal stralenstelsel. Dit zal het geval zijn, wanneer we voor de abscis in (1) een functie van u en v kunnen vinden, zoodanig, dat het punt ξ, η en ζ een oppervlak doorloopt, waarvoor de door dat punt gaande straal van het stelsel de normaal is. Dan moet dus

$$\Sigma X\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+t\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)$$

nul zijn voor alle waarden van t. Deze voorwaarde kan gesplitst worden in de beide:

$$\Sigma X\,\frac{\partial\xi}{\partial u}=0 \text{ en } \Sigma X\,\frac{\partial\xi}{\partial v}=0.$$

of:

$$\Sigma X\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\lambda\frac{\partial X}{\partial u}+X\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)=0 \text{ en } \Sigma X\left(\frac{\partial x}{\partial v}+\lambda\frac{\partial X}{\partial v}+X\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=0$$

maar daar:

$$\Sigma X\,\frac{\partial X}{\partial u}=0;\ \Sigma X\,\frac{\partial X}{\partial v}=0 \text{ en } \Sigma X^2=1,$$

worden de twee voorwaarde vergelijkingen:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=-\,\Sigma X\,\frac{\partial x}{\partial u} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=-\,\Sigma X\,\frac{\partial x}{\partial v}$$

Zal er dus een functie λ bestaan, dan moet aan de integrabiliteitsvoorwaarde voldaan zijn, hetgeen oplevert, na in beide leden $\Sigma X\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\;\partial v}$ weggeschrapt te hebben:

$$\Sigma\,\frac{\partial X}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}=\Sigma\,\frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}$$

of in de gebruikte notatie:

$$f=f'.$$

Is nu voor een zeker stralenstelsel $f = f'$, dan kunnen we dus λ door integratie vinden uit:

$$\lambda = -\int \Sigma X \, dx.$$

Bij de integratie zal dan een willekeurige constante optreden en dus vinden we niet één oppervlak, maar ∞^1 parallel oppervlakken, die allen normaal zijn tot het stralenstelsel en uit één er van kunnen worden afgeleid door op de normalen van af het oppervlak een constant stuk af te zetten.

Wanneer $f = f'$ worden de bekende termen in de vergelijkingen (10) en (20) identiek, waaruit de volgende eigenschap blijkt:

Bij een normaal stralenstelsel vallen de grensoppervlakken samen met de focaaloppervlakken.

Daar nu vroeger bewezen is, dat de grensoppervlakken steeds reëel zijn, kunnen, wanneer bij een stralenstelsel de focaaloppervlakken imaginair zijn, de grens- en focaaloppervlakken niet samenvallen en is dus niet voldaan aan de voorwaarde $f = f'$, m. a. w. kan dit stralenstelsel geen normaal stralenstelsel zijn.

Hebben we nu te doen met een normaal stralenstelsel en is dus $f = f'$, dan vallen de brandvlakken door iederen straal samen met de hoofdvlakken en dus staan dan de brandvlakken loodrecht op elkaar. Men kan meetkundig gemakkelijk aantoonen, dat in dit geval de keerlijnen van de twee stelsels ontwikkelbare oppervlakken op de focaaloppervlakken geodetische lijnen zijn. Beschouwen we n. l. de beide brandvlakken van een straal, dan raakt het eene het focaaloppervlak in een punt van die keerlijn en het andere is het osculatievlak van die keerlijn; daar nu de focaalvlakken loodrecht op elkaar staan is dit ook het geval met het osculatievlak van de keerlijn en raakvlak; dus is de keerlijn een geodetische lijn. Het omgekeerde is ook waar. Trekt men n. l. de raaklijnen aan een stelsel geodetische lijnen van een oppervlak, dan vormen deze raaklijnen een stralenstelsel, waarbij de brandvlakken loodrecht op elkaar staan en dit kan slechts, wanneer ze samenvallen met de hoofdvlakken en daar dan $f = f'$ moet zijn, is het omgekeerde bewezen.

Wanneer we bij een normaal stralenstelsel een der parallelle normaaloppervlakken als beginoppervlak kiezen en formule (25) toepassen, dan hebben we hierin $tg\,\varphi_{(\tau_1 \tau_2)} = \infty$ te nemen, dan moet de noemer nul worden of:

$$P^2 = (\varrho_1 - r)(r - \varrho_2) \quad . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Bewegen we ons nu langs eene asymptotische lijn op het beginoppervlak, dan zijn de stralen van het stelsel door die lijn de binormalen van die lijn, omdat het osculatievlak van eene asymptotische lijn samenvalt met het raakvlak aan het oppervlak. Hieruit volgt, dat de torsiestraal van de asymptotische lijn gelijk is aan de waarde van P behoorende bij de waarde $r = 0$. Deze is $\sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}$. Dus:

De torsiestraal in een punt eener asymptotische lijn op een oppervlak is in absolute waarde gelijk aan $\sqrt{(-\varrho_1 \varrho_2)}$, *waarin* ϱ_1 *en* ϱ_2 *de hoofdkromtestralen van het oppervlak in het beschouwde punt zijn*, welke eigenschap het eerst is aangetoond door Enneper.

Als voorbeeld van een normaal stralenstelsel noemen we het stelsel gevormd door de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee homofocale oppervlakken van den tweeden graad.

Dat dit stelsel een normaal stralenstelsel is, kan op de volgende manier bewezen worden.

Heeft men b. v. de beide confocale oppervlakken van den tweeden graad:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1$$

dan zal eene lijn, die een punt $M_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$ van het eerste oppervlak met een punt $M_2\,(x_2\,y_2\,z_2)$ van het tweede verbindt, een straal zijn van het stralenstelsel, door de gemeenschappelijke raaklijnen der beide oppervlakken gevormd, wanneer de raakvlakken dier oppervlakken in M_1 en M_2 elkaar volgens de lijn $M_1\,M_2$ snijden, en tevens zullen die raakvlakken de beide, door den straal gaande, focaalvlakken zijn. De vergelijkingen dier raakvlakken zijn nu:

$$\frac{Xx_1}{a^2-\lambda}+\frac{Yy_1}{b^2-\lambda}+\frac{Zz_1}{c^2-\lambda}=1$$

$$\frac{Xx_2}{a^2-\lambda_1}+\frac{Yy_2}{b^2-\lambda_1}+\frac{Zz_2}{c^2-\lambda_1}=1$$

Zullen deze elkaar volgens $M_1\,M_2$ snijden en dus M_2 in het eerste, M_1 in het tweede raakvlak zijn gelegen, dan moet voldaan zijn aan de betrekkingen:

$$\frac{x_1\,x_2}{a^2-\lambda}+\frac{y_1\,y_2}{b^2-\lambda}+\frac{z_1\,z_2}{c^2-\lambda}=1 \text{ en } \frac{x_1\,x_2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y_1\,y_2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z_1\,z_2}{c^2-\lambda_1}=1$$

en dus ook aan de betrekking, die men verkrijgt, door deze beide van elkaar af te trekken, d. i. aan:

$$\frac{x_1\,x_2}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda_1)}+\frac{y_1\,y_2}{(b^2-\lambda)(b^2-\lambda_1)}+\frac{z_1\,z_2}{(c^2-\lambda)(c^2-\lambda_1)}=0.$$

Doch deze vergelijking drukt juist uit, dat de raakvlakken der beide confocale oppervlakken in M_1 en M_2 loodrecht op elkaar staan, of, dat de beide focaalvlakken, door den willekeurigen straal $M_1\,M_2$ van het stelsel, loodrecht op elkaar staan. Dit stelsel is derhalve een normaal stralenstelsel. Het stelsel der gemeenschappelijke raaklijnen van twee confocale, kwadratische oppervlakken is een algebraïsch stralenstelsel van den vierden graad, d. w. z. door een willekeurig punt van de ruimte gaan vier stralen van het stelsel, welke zijn de gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van de twee kegels met het punt als top beschreven om de beide confocale kwadratische oppervlakken. Snijdt men deze twee kegels door een willekeurig vlak, dan bestaat de snijkromme uit twee reëele of imaginaire krommen van den tweeden graad. Deze snijden elkaar in vier punten, reëel of imaginair, en deze geven verbonden met den top der kegels de vier reëele of imaginaire stralen. Het stelsel is van de vierde klasse, d. w. z. in een willekeurig vlak liggen vier stralen van het stelsel. Het vlak snijdt n. l. de beide confocale kwadratische oppervlakken volgens twee reëele of imaginaire krommen van den tweeden graad; deze hebben vier gemeenschappelijke reëele of imaginaire raaklijnen en deze zijn de vier stralen van het stelsel in het vlak.

Onder een isotroop stralenstelsel verstaat men een stelsel, waarbij de beide grensoppervlakken samenvallen. Opdat dit gebeure, moet $r_1 = r_2$ zijn en dus voldaan zijn aan de vergelijkingen (12). Hier moet dus overal $r = m$ zijn, m. a. w.:

Bij een isotroop stralenstelsel is het middenoppervlak de meetkundige plaats der strictielijnen van alle regelvlakken van het stelsel.

Kiezen we het middenoppervlak als beginoppervlak, dan moet voor elken straal $r = 0$ zijn, onafhankelijk van t, waaruit volgens (3) de voorwaarden voortvloeien:

$$e = (f + f') = g = o$$

dus:

$$\Sigma\, dx\, dX = o \quad . \; . \; . \; . \quad (28)$$

m. a. w.:

Beeldt men het stralenstelsel af op een bol, dan zullen overeenkomstige lijnelementen van het middenoppervlak en van den bol loodrecht op elkander staan.

Heeft men omgekeerd een oppervlak O, waarvan de punten zoodanig met die van een bol overeenstemmen, dat overeenkomstige lijnelementen loodrecht op elkaar staan, dan zal dit oppervlak het middenoppervlak van een isotroop stralenstelsel zijn.

De stralen van dit stelsel verkrijgt men, wanneer men door elk punt M van O eene rechte brengt, evenwijdig aan dien straal van den bol, die gaat door dat punt M_1 van dien bol, dat met het punt M van O overeenstemt.

De vraag alle isotrope stralenstelsels te bepalen, komt dus neer op deze andere: alle oppervlakken te bepalen, waarvan de punten zoodanig met die van een bol overeenstemmen, dat overeenkomstige lijnelementen van beide oppervlakken loodrecht op elkaar staan.

Een eenvoudig voorbeeld van een isotroop stralenstelsel verkrijgt men als volgt. Projecteert men alle punten van een bol op een willekeurig vlak, dat als vlak $X\,O\,Y$ worde aangenomen, dan zal de projectie van het punt $M\,(x, y, z)$ van den bol het punt $M_1\,(x, y, o)$ in X O Y zijn. Draait men nu dit vlak een hoek van 90° om O, dan komt het punt M_1 in M_2 $(-y, x, o)$. De punten M (x, y, z) van den bol komen dan zoodanig met de punten M_2 $(-y, x, o)$ overeen, dat overeenkomstige lijnelementen loodrecht op elkaar staan; immers $dx\,(-dy) + dy\,dx = o$. Dit vlak kan derhalve als middenoppervlak eener isotrope congruentie worden beschouwd; de stralen dier congruentie verkrijgt men als door elk punt M_2 van het vlak eene lijn gebracht wordt evenwijdig aan dien straal van den bol, die door het overeenkomstige punt M gaat.

Door weer het middenoppervlak als beginoppervlak te kiezen, wordt (25):

$$tg\,\varphi_{(\tau_1\,\tau_2)} = \pm\frac{P\,(\varrho_2 - \varrho_1)}{P^2 + \varrho_1\,\varrho_2} \quad . \; . \; . \; . \; (29)$$

en volgens (26):

$$tg\,\varphi_{(\tau_1\,\tau_2)} = \pm \frac{\delta}{\sqrt{-\delta^2}} = \pm\, i \;\ldots\; (30).$$

Uit (30) volgt allereerst, dat bij zulk een stralenstelsel de brandpunten op een straal en dus ook de brandoppervlakken imaginair zijn en verder volgt uit (29), dat de parameter P onafhankelijk is van t, hetgeen ook volgt uit (16) door daarin $e = (f + f') = g = o$ te stellen; men verkrijgt dan $P = \frac{f'}{\Delta}$ en dit is onafhankelijk van t. Is omgekeerd P onafhankelijk van t, dan moet volgens (25) r daarvan onafhankelijk zijn en dus $r_1 = r_2$ zijn.

Uit (29) en (30) leidt men af:

$$\frac{P(\varrho_2 - \varrho_1)}{P^2 + \varrho_1\,\varrho_2} = -\,i$$

d. i.:

$$(P + i\,\varrho_1)(P - i\,\varrho_2) = o$$

en daaruit:

$$\left.\begin{array}{l}\varrho_2 = +\,i\,P \\ \varrho_1 = -\,i\,P\end{array}\right\} \;\ldots\; (31).$$

Men heeft dus deze eigenschappen van een isotroop stralen stelsel:

1°. *De brandpunten op een straal en dus ook de brandoppervlakken zijn imaginair.*

2°. *De parameter P van een straal is onafhankelijk van het bijzondere regeloppervlak, gevormd door stralen van het stelsel, waarop die straal beschouwd wordt te liggen.*

En omgekeerd:

Is bij een stralenstelsel de parameter P onafhankelijk van het bijzondere regeloppervlak, dan is het stralenstelsel een isotroop stelsel

3°. *De afstanden der brandpunten op een straal tot het middelpunt zijn gelijk aan den parameter van den straal, vermenigvuldigd met* $\sqrt{-1}$.

De differentiaal vergelijking (19), die in 't algemeen de ontwikkelbare oppervlakken van het stralenstelsel bepaalt, gaat voor een isotroop stralenstelsel, wanneer het middenoppervlak tot beginoppervlak wordt aangenomen, over in:

$$L + 2\,Mt + Nt^2 = 0$$

of:

$$L\,du^2 + 2\,Mdu\,dv + Ndv^2 = 0.$$

Dit zegt niets anders, dan dat bij de spherische afbeelding van het isotrope stralenstelsel, de ontwikkelbare oppervlakken zich zullen afbeelden als spherische krommen, voor welke het lijnelement nul is, derhalve:

De ontwikkelbare oppervlakken van een isotroop stralenstelsel worden op den bol afgebeeld als de minimaal krommen van dien bol, welke niets anders zijn dan de daarop liggende imaginaire rechte lijnen.

De door een straal (u, v) van het isotrope stelsel gaande focaalvlakken, welke, zooals boven bleek, imaginair zullen zijn, worden bepaald door dien straal en de beide richtingen, aangegeven door die waarden van $t = \frac{dv}{du}$, welke aan de betrekking $Ldu^2 + 2\,Mdu\,dv + Ndv^2 = 0$ voldoen.

De vergelijking van zulk een focaalvlak zal dus zijn, x, y en z de coördinaten zijnde van 't punt, in 't welk die straal het middenoppervlak snijdt:

$$(X_1 - x)(Ydz - Zdy) + (Y_1 - y)(Zdx - Xdz) +$$
$$+ (Z_1 - z)(Xdy - Ydx) = 0$$

waarin X_1, Y_1 en Z_1 loopende coördinaten voorstellen. Nu is echter:

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = 0$$
$$X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = 0$$

waaruit volgt:

$$\frac{dX}{Ydz - Zdy} = \frac{dY}{Zdx - Xdz} = \frac{dZ}{Xdy - Ydx}$$

zoodat men voor de vergelijkingen der beide focaalvlakken, door den beschouwden straal gaande, verkrijgt:

$$(X_1 - x)\, dX + (Y_1 - y)\, dY + (Z_1 - z)\, dZ = 0$$

waarin men aan $\frac{dv}{du}$ achtereenvolgens elk der waarden moet geven uit $L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0$. Doch dit laatste is niets anders dan $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$ en wijl een vlak $AX + BY + CZ + D = 0$ raakt aan den imaginairen cirkel in 't oneindige, wanneer $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ is, heeft men:

De beide focaalvlakken, gaande door een straal van een isotroop stralenstelsel zijn die beide vlakken door dien straal, welke den imaginairen cirkel in 't oneindige aanraken.

En hieruit:

De beide focaaloppervlakken van een isotroop stralenstelsel zijn imaginaire ontwikkelbare oppervlakken om den imaginairen cirkel in 't oneindige beschreven.

Men kan het voorgaande ook nog op andere wijze beredeneeren. Snijden we een beschrijvende lijn van een regelvlak door evenwijdige vlakken, dan zullen deze de raakvlakken, in de verschillende punten van de beschrijvende lijn aan het regelvlak aangebracht, snijden volgens lijnen, die allen liggen op een hyperbolische paraboloïde, die dus in ieder punt van de beschrijvende lijn hetzelfde raakvlak heeft als het regelvlak. Men noemt dit een raccordeerende hyperbolische paraboloïde.

Nemen we nu een willekeurigen straal van het isotrope stralenstelsel tot Z as en het vlak door dezen straal en de gemeenschappelijke loodlijn van dien straal en een opvolgenden straal, centraalvlak genaamd, tot XZ vlak aan, nemen we verder den oorsprong in het middelpunt van den straal, dan kunnen we door de Z as en den opvolgenden straal van het stelsel een hyperbolische paraboloïde brengen, raccordeerende aan een regelvlak van het stelsel, waarvan die twee stralen deel uitmaken, zoodanig, dat het XZ vlak richtvlak is voor deze paraboloïde, dan moet de vergelijking er van zijn:

$$Z = P\frac{Y}{X}$$

waarin P de parameter is, behoorende bij den beschouwden straal van het stelsel. De raakvlakken aan die paraboloïde in de brandpunten van den straal OZ, welke brandpunten volgens het voorgaande tot coördinaten hebben $0, 0, \pm iP$ zijn de vlakken:

$$Y = \pm iX.$$

Zij raken dus den imaginairen cirkel in 't oneindige en, daar de raakvlakken dezer paraboloïde, volgens de tweede bepaling van een brandpunt, moeten samenvallen met de beide focaalvlakken door dien straal, geldt hetzelfde voor deze vlakken.

Omgekeerd zal elk stralenstelsel, waarvoor de beide focaaloppervlakken ontwikkelbare oppervlakken zijn, omschreven om den imaginairen cirkel in 't oneindige een isotroop stralenstelsel zijn. Beschouwt men toch weder dezelfde raccordeerende paraboloïde, dan moeten, wijl de focaalvlakken door den straal OZ die paraboloïde en den imaginairen cirkel aanraken en de vergelijkingen dezer vlakken zijn: $Y = \pm iX$, de afstanden der brandpunten tot het middelpunt O zijn $\varrho_2 = iP$, $\varrho_1 = -iP$.

Uit:

$$tg\,\varphi(r_1\, r_2) = \frac{P(\varrho_2 - \varrho_1)}{P^2 + \varrho_1\varrho_2} = \frac{\delta}{\sqrt{d^2 - \delta^2}},$$

waarin δ de halve afstand der brandpunten, d die der grenspunten is, volgt dadelijk: $d = 0$, d.i. de grenspunten, op een willekeurigen straal van het stelsel, vallen samen of dit is een isotroop stralenstelsel.

Uit het voorgaande laat zich een eenvoudig middel afleiden, analytisch elk isotroop stralenstelsel te bepalen. Zij $Ax + By + Cz + D = 0$, waarin A, B, C en D functies van een parameter zijn, terwijl $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ is, de vergelijking van een veranderlijk vlak, dan zal, wanneer men aan dien parameter alle mogelijke waarden geeft, dit vlak een ontwikkelbaar oppervlak omhullen, dat om den imaginairen cirkel in 't oneindige beschreven is. Wijl uit $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ volgt:

$$(A + iB)\,(A - iB) = - C^2$$

zal, als men $A + iB = - uC$ stelt, u een veranderlijke parameter zijnde, $A - iB = \frac{C}{u}$ zijn en dus:

$$A = \frac{1-u^2}{2u}\,C \qquad B = \frac{i\,(1 + u^2)}{2u}\,C.$$

Stelt men nu $\frac{D}{C} = \frac{\varphi(u)}{2u}$, waarin $\varphi(u)$ eene willekeurige functie van u voorstelt, dan verkrijgt men de vergelijking van een vlak, dat een ontwikkelbaar oppervlak, als boven bedoeld, omhult, in den meest algemeenen vorm:

$$(1 - u^2)\,X + i\,(1 + u^2)\,Y + 2u\,Z + \varphi\,(u) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

en evenzoo zal:

$$(1 - v^2)\,X - i\,(1 + v^2)\,Y + 2v\,Z + \varphi_1\,(v) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (33)$$

waarin $\varphi_1\,(v)$ eene willekeurige functie van v is, een dergelijk oppervlak omhullen. Deze beide vergelijkingen bepalen dus, wanneer men daarin aan u en v alle mogelijke waarden geeft, de stralen van een isotroop stralenstelsel en omgekeerd. Reëele stralen van een stelsel verkrijgt men alleen, door aan u en v geconjugeerd complexe waarden te geven en voor φ en φ_1 geconjugeerd complexe functies te nemen.

Wil men de coördinaten der brandpunten, op een straal gelegen, vinden dan heeft men slechts te zoeken de punten, in welke de straal, bepaald door (32) en (33) de beide ontwikkelbare oppervlakken aanraakt. Daar nu het vlak (32) het door dit vlak omhulde oppervlak aanraakt volgens de rechte lijn:

$$\begin{gathered}(1-u^2)X+i(1+u^2)Y+2uZ+\varphi(u)=0\\ -2uX+2iuY+2Z+\varphi'(u)=0\end{gathered}$$

zal het snijpunt dezer lijn met het vlak (33) een der gezochte brandpunten zijn. Het snijpunt der lijn:

$$\begin{gathered}(1-v^2)X-i(1+v^2)Y+2vZ+\varphi_1(v)=0\\ -2vX-2ivY+2Z+\varphi'_1(v)=0\end{gathered}$$

met het vlak (32) zal het andere brandpunt opleveren. Lost men dus uit deze beide drietallen van vergelijkingen achtereenvolgens x, y en z op, dan verkrijgt men de coördinaten der beide brandpunten. En daaruit weder leidt men onmiddellijk af de coördinaten van het, op een straal gelegen, middelpunt, wijl dit punt midden tusschen die brandpunten gelegen is. Aldus verkrijgt men voor de coördinaten van het middelpunt op den straal [1]):

$$x=\frac{u+v}{4(1+uv)}\left\{\varphi'(u)+\varphi_1'(v)\right\}-\frac{\varphi(u)+\varphi_1(v)}{2(1+uv)}$$

$$y=i\,\frac{(v-u)}{4(1+uv)}\left\{\varphi'(u)+\varphi'_1(v)\right\}-i\,\frac{\varphi_1(v)-\varphi(u)}{2(1+uv)}$$

$$z=\frac{uv-1}{4(1+uv)}\left\{\varphi'(u)+\varphi'_1(v)\right\}-\frac{u\varphi_1(v)+v\varphi(u)}{2(1+uv)}$$

Deze vergelijkingen, waarin x, y en z als functies van twee parameters u en v zijn uitgedrukt, bepalen het midden

---

[1]) Zie o. a. Darboux. Théorie générale des surfaces, IV, pag 17.

oppervlak van het meest algemeene isotrope stralenstelsel. Ook hier zal men, evenals boven bij de stralen van het stelsel, alleen dan een reëel oppervlak verkrijgen, wanneer men aan u en v geconjugeerd complexe waarden geeft en voor φ en φ_1 geconjugeerd complexe functies aanneemt. Neemt men b. v. $\varphi(u) = u^3$, $\varphi_1(v) = v^3$ en stelt nu $u = \alpha + i\beta$, $v = \alpha - i\beta$, dan kan men de vergelijkingen van een straal van het aldus bepaalde isotrope stralenstelsel schrijven in den vorm:

$$(1 - \alpha^2 + \beta^2) X - 2\alpha\beta Y + 2\alpha Z + (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) = 0$$
$$-2\alpha\beta X + (1 + \alpha^2 - \beta^2) Y + 2\beta Z + (3\alpha^2\beta - \beta^3) = 0$$

terwijl de coördinaten van een punt op het middenoppervlak van dit stelsel, in functie van α en β zullen zijn:

$$x = \frac{2\alpha^3}{1 + \alpha^2 + \beta^2}; \qquad y = -\frac{2\beta^3}{1 + \alpha^2 + \beta^2};$$
$$z = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 3)}{2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}.$$

Uit het voorgaande laat zich ook afleiden de middenomhullende van het isotrope stralenstelsel, d. i. het oppervlak omhuld door de vlakken, in de middelpunten der stralen loodrecht op die stralen aangebracht. Bedenkt men echter, dat de keerlijnen van ontwikkelbare oppervlakken, om den imaginairen cirkel in 't oneindige beschreven, minimaal krommen zijn, welker raaklijnen dus alle dien cirkel snijden en dat zulk eene raaklijn, in P b. v., kan worden beschouwd als loodrecht te staan op het osculatievlak in P, dan kan men, door de volgende redeneering[1]), eenvoudiger die middenomhullende vinden. Verbinden we twee willekeurige punten P en Q van de keerlijnen van twee willekeurige ontwikkelbare oppervlakken S_1 en S_2, beschreven om den imaginairen cirkel in 't oneindige

[1]) Darboux. Théorie générale des surfaces. I pag. 419.

door een lijn, dan is, volgens eene bekende eigenschap [1]) de meetkundige plaats van het midden m van deze lijn een minimaal oppervlak. Het raakvlak in m aan dit minimaal oppervlak is evenwijdig aan de beide raaklijnen aan de keerlijnen in P en Q. Zij V_1 het osculatievlak in P van de eerste keerlijn en V_2 het osculatievlak in Q van de tweede keerlijn, dan snijden V_1 en V_2 elkaar volgens een lijn, die de oppervlakken S_1 en S_2 b.v. raakt in α en α_1. Nu staat de raaklijn aan de eene keerlijn in P loodrecht op V_1 en de raaklijn aan de andere keerlijn in Q loodrecht op V_2, dus de lijn $\alpha\alpha_1$ staat loodrecht op die beide raaklijnen en dus ook loodrecht op het raakvlak in m aan het minimaal oppervlak. En daar het raakvlak in m op gelijke afstanden ligt van de vlakken door P en Q, evenwijdig aan de beide raaklijnen in P en Q aan de keerlijnen, zal dit raakvlak in m ook gaan door het punt, dat de lijn $\alpha\alpha_1$ halveert; m. a. w.:

De middenomhullende van een isotroop stralenstelsel is een minimaal oppervlak.

In het volgende hoofdstuk zullen we nog spreken over een ander soort stralenstelsels en wel over *pseudospherische stralenstelsels.* Dit zijn stralenstelsels, waarbij de afstand der brandpunten, zoowel als die der grenspunten, voor alle stralen constant is. Uit formule (26) volgt, dat dan ook de hoek tusschen de beide brandvlakken voor iederen straal constant is.

---

[1]) Darboux. Théorie générale des surfaces. I. pag. 342.

HOOFDSTUK II.

In het volgende willen wij de stralenstelsels onderzoeken, gevormd door de raaklijnen aan een stelsel krommen op een willekeurig oppervlak, dat dan als beginoppervlak zal worden beschouwd en door S_1 zal worden aangeduid, terwijl we het andere brandoppervlak van het stelsel zullen aanduiden door S_2. Ten einde dit onderzoek te kunnen instellen, zullen we eerst afleiden, hoe de grootheden e, f, f', g, L, M, N en Δ uit het eerste hoofdstuk uitgedrukt kunnen worden in den hoek α, dien de stralen van het stelsel in het raakpunt vormen met een der coördinaatkrommen, gaande door dat punt, en in de fundamenteele grootheden van de eerste en tweede orde van het beginoppervlak. Als coördinaatstelsel op het oppervlak kiezen we een stelsel orthogonale krommen $u =$ constant en $v =$ constant, waarbij het lijnelement den vorm aanneemt:

$$dS_1^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2$$

en meten den hoek α ten opzichte van de krommen $v =$ constant.

Noemen we de rechthoekige coördinaten van een punt van het beginoppervlak x_1, y_1, z_1 en de richtingscosinussen van een straal X, Y, Z, dan hebben we:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\ Y &= \frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial y_1}{\partial v} \\ Z &= \frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial z_1}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial z_1}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \; (34).$$

Verder kunnen we gebruik maken van de betrekkingen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = A^2 \qquad \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = C^2 \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

en de betrekkingen hieruit door partiëele differentiatie ontstaan:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= A\frac{\partial A}{\partial u}\\
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} &= A\frac{\partial A}{\partial v}\\
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= C\frac{\partial C}{\partial v}\\
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} &= C\frac{\partial C}{\partial u}\\
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= -A\frac{\partial A}{\partial v}\\
\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= -C\frac{\partial C}{\partial u}
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Hieruit vinden we:

$$e = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\left[\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \frac{\sin\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \right.$$

$$- \frac{\cos\alpha}{A^2}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{\cos\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u} -$$

$$\left. - \frac{\sin\alpha}{C^2}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}\right].$$

In verband met de betrekkingen (35) en (36) wordt dit:

$$e = -A\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)$$

en zoo vinden we verder op dezelfde manier:

$$f = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = C\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)$$

$$f' = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -A\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)$$

$$g = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = C\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right).$$

Ter berekening van L, M, N en Δ voeren we de fundamenteele grootheden van de 2de orde D_1, D_2, D_3 in. Deze zijn in determinantvorm:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Door onderlinge vermenigvuldiging der determinanten D_1, D_2 en D_3 en door gebruik te maken van de formules (35) en (36), vindt men:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 &= \frac{D_1{}^2}{A^2 C^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)^2 + \frac{A^2}{C^2}\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)^2 \\
\Sigma\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}\right)^2 &= \frac{D_2{}^2}{A^2 C^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 \\
\Sigma\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\right) &= \frac{D_3{}^2}{A^2 C^2} + \frac{C^2}{A^2}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)^2 \\
\Sigma \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= \frac{D_1 D_2}{A^2 C^2} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{A}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u} \\
\Sigma \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= \frac{D_1 D_3}{A^2 C^2} - \frac{C}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{A}{C}\frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial v} \\
\Sigma \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= \frac{D_2 D_3}{A^2 C^2} - \frac{C}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}
\end{aligned}\right\} \ldots . (37)$$

Nu is:

$$L = \Sigma\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\right]^2$$

Voert men de aangegeven differentiatie uit en verheft men het verkregen resultaat tot de tweede macht, dan vindt men, lettende op de formules (35), (36) en (37), na eenige herleiding:

$$L = \frac{1}{A^2 C^2}\left[\frac{D_1 \cos\alpha}{A} + \frac{D_2 \sin\alpha}{C}\right]^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)^2$$

Zoo vinden we op dezelfde manier:

$$M = \frac{1}{A^2 C^2}\left[\frac{D_1 \cos\alpha}{A} + \frac{D_2 \sin\alpha}{C}\right]\left[\frac{D_2 \cos\alpha}{A} + \frac{D_3 \sin\alpha}{C}\right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)$$

$$N = \frac{1}{A^2 C^2}\left[\frac{D_2 \cos\alpha}{A} + \frac{D_3 \sin\alpha}{C}\right]^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2$$

en hieruit:

$$\Delta^2 = L\,N - M^2 = \frac{1}{A^2 C^2}\left[\left(\frac{D_1 \cos\alpha}{A} + \frac{D_2 \sin\alpha}{C}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right) - \left(\frac{D_2 \cos\alpha}{A} + \frac{D_3 \sin\alpha}{C}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)\right]^2.$$

Ter vereenvoudiging stellen we nu:

$$P = \frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}$$

$$Q = \frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}$$

$$P_1 = \frac{D_1 \cos\alpha}{A} + \frac{D_2 \sin\alpha}{C}$$

$$Q_1 = \frac{D_2 \cos\alpha}{A} + \frac{D_3 \sin\alpha}{C}$$

terwijl we, met het oog op het vervolg, ook nog zullen stellen:

$$P_1' = \frac{D_1 \sin\alpha}{A} - \frac{D_2 \cos\alpha}{C}$$

$$Q_1' = \frac{D_2 \sin\alpha}{A} - \frac{D_3 \cos\alpha}{C}$$

Nu kunnen we schrijven:

$$\left.\begin{array}{ll} e = -AP \sin\alpha & L = \frac{1}{A^2 C^2} P_1{}^2 + P^2 \\ f = CP \cos\alpha & M = \frac{1}{A^2 C^2} P_1 Q_1 + PQ \\ f' = -AQ \sin\alpha & N = \frac{1}{A^2 C^2} Q_1{}^2 + Q^2 \\ g = CQ \cos\alpha & \Delta^2 = \frac{1}{A^2 C^2} (PQ_1 - P_1 Q)^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (38)$$

Hierbij merken we op, dat, wanneer Δ in alle punten van een oppervlak nul is, dit oppervlak moet zijn een ontwikkelbaar oppervlak beschreven om den imaginairen cirkel in het oneindige (Darboux. Théorie générale des surfaces, 1[ière] partie; pag. 148, note).

Gebruik makende van bovenstaande formules vinden we, dat de differentiaal vergelijking der ontwikkelbare oppervlakken, gevormd door stralen van het stelsel, die in het algemeen is (Zie Hoofdstuk I, formule (19)):

$$(fN - gM)\, t^2 + \left\{ eN - gL + (f - f')\, M \right\} t + (eM - f'L) = 0$$

waarbij $t = \frac{dv}{du}$, hier wordt:

$$\frac{(P\,Q_1 - P_1\,Q)}{A^2\,C^2} \left\{ C\,Q_1 \cos\alpha.\, t^2 + (C\,P_1 \cos\alpha - A\,Q_1 \sin\alpha)\, t - A\,P_1 \sin\alpha \right\} = 0.$$

Daar we nu het geval uitsluiten, dat het beginoppervlak S_1 een ontwikkelbaar oppervlak is, beschreven om den cirkel in het oneindige, kunnen we den factor $\frac{(PQ_1 - P_1 Q)}{A^2\,C^2}$ achterwege laten en wordt de vergelijking:

$$C\,Q_1 \cos\alpha.\, t^2 + (C\,P_1 \cos\alpha - A\,Q_1 \sin\alpha)\, t - A\,P_1 \sin\alpha = 0$$

of:

$$(Ct \cos\alpha - A \sin\alpha)\,(Q_1\, t + P_1) = 0.$$

Hieraan wordt voldaan:

1°. door: $\quad Ct\cos\alpha - A\sin\alpha = 0 \quad . \; . \; . \quad (39)$

Noemen we de aangroeiingen van u en v bij eene verplaatsing langs eene kromme, die een hoek α met de kromme v = constant maakt, δu en δv en het quotient $\frac{\delta v}{\delta u} = t_1$, dan hebben we:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x_1}{\partial v}\delta v\right)}{A\sqrt{(A^2\delta u^2 + C^2\delta v^2)}} = \frac{A\,\delta u}{\sqrt{(A^2\delta u^2 + C^2\delta v^2)}}$$

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x_1}{\partial v}\delta v\right)}{C\sqrt{(A^2\delta u^2 + C^2\delta v^2)}} = \frac{C\,\delta v}{\sqrt{(A^2\delta u^2 + C^2\delta v^2)}}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{C}{A}t_1 = tg\,\alpha.$$

Door bovenstaande vergelijking (39) worden dus de krommen op het beginoppervlak bepaald, die de parameterkrommen v = constant onder den veranderlijken hoek α snijden, welke krommen we de krommen (α) zullen noemen. De stralen van het beschouwde stelsel zijn raaklijnen aan deze krommen, die derhalve de, op het beginoppervlak liggende, keerlijnen zullen zijn van ontwikkelbare oppervlakken door stralen van het stelsel gevormd.

2°. wordt aan de vergelijking voldaan door:

$$Q_1\,t + P_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

Door deze vergelijking worden krommen op het beginoppervlak bepaald, zoodanig, dat, wanneer men door alle punten van zulk een kromme de daarbij behoorende stralen van het stelsel brengt, deze stralen een ontwikkelbaar oppervlak vormen, waarvan echter de keerlijn op het tweede brandoppervlak S_2 ligt.

De abscis van het punt, in hetwelk een straal deze tweede keerlijn aanraakt, de abscis dus van het tweede brandpunt op dien straal, wordt gevonden met behulp van vergelijking (20) uit Hoofdstuk I. Daaruit volgt, wijl de abscis van het eene brandpunt nul is, voor die van het andere:

$$\varrho_\alpha = -\frac{eN - (f + f')\,M + gL}{\Delta^2} = \frac{CP_1 \cos\alpha + AQ_1 \sin\alpha}{(PQ_1 - P_1 Q)} \quad . \; . \; . \; . \quad (41)$$

De beide stelsels krommen $Q_1\, t + P_1 = 0$ en $Ct\cos\alpha - A\sin\alpha = 0$, door de beide stelsels ontwikkelbare oppervlakken op het beginoppervlak bepaald, zullen op dat oppervlak geconjugeerde krommen zijn. Immers, opdat die beide stelsels geconjugeerd zijn, moet identiek aan de betrekking:

$$D_3\, t_1\, t + D_2\,(t_1 + t) + D_1 = 0$$

voldaan zijn, waarbij t_1 en t behooren bij verplaatsingen langs beide stelsels krommen, en dit is werkelijk het geval, wanneer we substitueeren: $t_1 = -\dfrac{P_1}{Q_1}$ en $t = \dfrac{A\sin\alpha}{C\cos\alpha}$.

Men heeft derhalve:

De beide stelsels ontwikkelbare oppervlakken van het stralenstelsel bepalen op elk der brandoppervlakken twee stelsels van geconjugeerde krommen.

De beide stelsels ontwikkelbare oppervlakken van het stralenstelsel vallen samen, wanneer de stralen raken aan een stelsel krommen op het beginoppervlak, die samenvallen met de hun geconjugeerde krommen, m.a.w., wanneer ze raken aan een der stelsels asymptotische lijnen van het beginoppervlak. De abscissen der beide brandpunten op elken straal zijn dan nul en dus worden de asymptotische lijnen van dat oppervlak bepaald door de vergelijking:

$$AQ_1 \sin\alpha + CP_1 \cos\alpha = 0.$$

De krommen (α) zijn dus asymptotische lijnen van het beginoppervlak, wanneer α eene zoodanige functie van u en v is, dat identiek aan deze vergelijking wordt voldaan.

Daar voor de krommen (α): $t = \dfrac{A \sin \alpha}{C \cos \alpha}$, vindt men dadelijk, door voor P_1 en Q_1 hunne waarden te substitueeren, dat die vergelijking kan worden geschreven in den vorm:

$$D_3\, t^2 + 2\, D_2\, t + D_1 = 0$$

den gewonen vorm, waarin de vergelijking der asymptotische lijnen optreedt.

Beschouwen we behalve het stelsel krommen (α) nog een stelsel krommen $\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, die n.l. een hoek $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$ vormen met de krommen $v =$ constant en noemen we de waarde van t behoorende bij dit laatste stelsel t_1, dan moet, daar $\dfrac{C}{A}\, t = tg\, \alpha$ en $\dfrac{C}{A}\, t_1 = tg\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, de betrekking bestaan:

$$\frac{C^2}{A^2}\, t t_1 = -1.$$

Nu bepalen de beide stelsels ontwikkelbare oppervlakken alleen dàn op het focaaloppervlak twee stelsels van orthogonale krommen, wanneer die krommen samenvallen met de kromtelijnen van dat oppervlak, wijl de beide stelsels kromtelijnen de eenige stelsels van krommen zijn, die èn orthogonaal èn geconjugeerd zijn.

Nu is, tengevolge van de genoemde betrekking:

$$\frac{C^2}{A^2}\, t t_1 = -1,$$

de voorwaarde, aan welke de beide krommenstelsels:

$$Ct \cos \alpha - A \sin \alpha = 0 \text{ en } Q_1\, t + P_1 = 0$$

moeten voldoen, om orthogonale stelsels te zijn:

$$\frac{C^2}{A^2} \times \frac{A \sin \alpha}{C \cos \alpha} \times - \frac{P_1}{Q_1} = -1$$

of:

$$A Q_1 \cos \alpha - C P_1 \sin \alpha = 0.$$

Deze betrekking bepaalt derhalve de kromtelijnen op het oppervlak.

Door hierin weer voor P_1 en Q_1 hunne waarden te substitueeren en voor $\frac{A \sin \alpha}{C \cos \alpha}$ te schrijven t, komt de vergelijking der kromtelijnen in den gebruikelijken vorm voor den dag, n.l.:

$$-C^2 D_2 t^2 + (A^2 D_3 - C^2 D_1) t + A^2 D_2 = 0.$$

Uit onze formules kunnen we ook een antwoord afleiden op de volgende vraag.

Voor welke regeloppervlakken, gevormd door stralen van het stelsel, liggen de strictielijnen op het beginoppervlak S_1?

Dan hebben we ter bepaling van $t = \frac{dv}{du}$, in (3) van Hoofdstuk I, welke vergelijking de abscis oplevert van het centraalpunt op een straal van het stelsel, wanneer deze beschouwd wordt als te behooren tot een regeloppervlak door stralen van het stelsel gevormd, die abscis gelijk nul te stellen.

Derhalve:

$$e + (f + f') t + g t^2 = 0.$$

Met behulp van de formules (38) wordt dit:

$$-A \sin \alpha \,.\, P + \{ C \cos \alpha \,.\, P - A \sin \alpha \,.\, Q \} t + C \cos \alpha \,.\, t^2 = 0$$

of

$$\{ A \sin \alpha - C \cos \alpha \,.\, t \} \{ P + Q t \} = 0.$$

Dit vervalt ten eerste in:

$$A \sin \alpha - C \cos \alpha \,.\, t = 0$$

waardoor weder de krommen (α) worden bepaald. De stralen van het stelsel zijn raaklijnen aan deze krommen en het raakpunt op zulk een straal, beschouwd als deel uitmakend van een ontwikkelbaar oppervlak, kan als het daarop liggende centraalpunt worden beschouwd.

Ten tweede in:

$$P + Q t = 0.$$

Deze vergelijking bepaalt op het brandoppervlak S_1 een stelsel krommen zoodanig, dat de stralen van het stelsel, gaande door de punten van zulk eene kromme een regeloppervlak vormen, waarvoor de kromme strictielijn is. De vergelijking $P + Q t = 0$ geeft, wanneer men voor P en Q hunne waarden invoert:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} du + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} dv = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Wijl deze vergelijking niet verandert, wanneer α vervangen wordt door $\alpha +$ constante, heeft men:

Die krommen op het brandoppervlak, die strictielijnen zijn voor regeloppervlakken, gevormd door stralen van het stelsel, blijven strictielijnen voor regeloppervlakken van het nieuwe stelsel, dat men verkrijgt, wanneer elke straal van het eerste stelsel, in het raakvlak door dien straal aan het brandoppervlak en om het raakpunt, een constanten hoek gedraaid wordt.

Is α constant, beschouwt men derhalve het stralenstelsel, gevormd door alle raaklijnen van het focaaloppervlak, die de parameterkrommen onder een constanten hoek α snijden, dan gaat de vergelijking (42) over in:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} dv - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} du = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Nu vindt men, uit de bekende formule van Bonnet voor de geodetische kromming eener kromme op het oppervlak [1]), dat de geodetische krommingen $\frac{1}{r_u}$ en $\frac{1}{r_v}$ der parameterkrommen $u =$ constant en $v =$ constant, zijn:

$$\frac{1}{r_u} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial C}{\partial u} \text{ en } \frac{1}{r_v} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v}.$$

Voert men dit in de vergelijking (43) in, dan verkrijgt men:

$$\frac{C\,dv}{r_u} - \frac{A\,du}{r_v} = 0.$$

Daaruit volgt, dat de krommen $v =$ constant alleen dan strictielijnen zullen zijn voor krommen op het oppervlak, wanneer $\frac{1}{r_v} = 0$, derhalve die krommen geodetische lijnen van het oppervlak zijn, of:

Zal eene kromme op een oppervlak strictielijn zijn voor een regeloppervlak, gevormd door raaklijnen aan dat oppervlak, die deze kromme onder een constanten hoek snijden, dan moet die kromme eene geodetische lijn op het oppervlak zijn.

Omgekeerd:

Als eene geodetische lijn op een oppervlak strictielijn is van een regeloppervlak, gevormd door raaklijnen aan het oppervlak, dan moeten die raaklijnen de geodetische lijn onder een constanten hoek snijden.

---

[1]) Bianchi, Vorlesungen über Differential Geometrie, pag. 149.

Immers, als $v =$ constant eene geodetische lijn is van het oppervlak is $\frac{1}{r_v} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v} = 0$.

Is zij bovendien strictielijn, dan wordt aan (42) voldaan door $v =$ constant.

Dit geeft $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$ of α hangt niet van u af en blijft dus constant, wanneer men de stralen achtereenvolgens beschouwt, die door de punten der krommen $v =$ constant gaan.

Uit (42) volgt nog, dat, wanneer de krommen $v =$ constant geodetische lijnen op het brandoppervlak zijn en tevens strictielijnen voor regeloppervlakken door stralen van het stelsel gevormd, werkelijk de stralen, die door de punten eener zelfde strictielijn gaan met deze een constanten hoek maken, doch, dat die hoek, wanneer men van de kromme $v =$ constant tot eene andere kromme $v =$ constant overgaat, zeer goed kan veranderen. Immers aan (42) wordt door $v =$ constant, $\frac{\partial A}{\partial v} = 0$ voldaan, ook wanneer α niet constant, doch eene functie van v alleen is [1]).

Was het gegeven oppervlak zelf een regeloppervlak, dan leidt men uit het vorige de bekende eigenschap af, dat, wanneer op dit regeloppervlak de strictielijn de beschrijvende lijnen onder een constanten hoek snijdt, zij eene geodetische kromme op dat oppervlak moet zijn en omgekeerd.

Verder volgt nog uit (42), dat als men op het gegeven regeloppervlak als parameter krommen $v =$ constant en $u =$ constant kiest de beschrijvende lijnen en hunne orthogonale trajectorieën, waardoor dus $\frac{\partial A}{\partial v}$ nul kan gesteld worden, en

---

[1]) De genoemde eigenschappen der strictielijn komen voor bij Bonnet (Mémoires sur les Surfaces Applicables. Journal de l'École Polytechnique, dl. 41 en 42).

α ook, dat dan de differentiaal vergelijking der strictielijn wordt $\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}dv = 0$.

Daar we de oplossing $v =$ constant buiten moeten sluiten, wordt de vergelijking der strictielijn $\frac{\partial C}{\partial u} = 0$ [1]).

De beide stelsels krommen op het oppervlak S_1, bepaald door de vergelijkingen:

$$A \sin\alpha - C\cos\alpha\frac{dv}{du} = 0 \text{ en } P + Q\frac{dv}{du} = 0$$

dus de op het oppervlak S_1 gelegen strictielijnen van regeloppervlakken van het stelsel, vallen alleen dan samen, wanneer:

$$AQ\sin\alpha + CP\cos\alpha = 0.$$

Wijl nu, volgens de reeds genoemde formule van Bonnet, de geodetische kromming $\frac{1}{r_\alpha}$ der krommen (α) gegeven wordt door:

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{1}{AC}(AQ\sin\alpha + CP\cos\alpha)$$

geeft deze betrekking aan, dat $\frac{1}{r_\alpha}$ nul moet zijn, of, dat de krommen (α) geodetische krommen op het oppervlak S_1 moeten zijn. Derhalve:

De beide stelsels regeloppervlakken, waarvoor de strictielijnen op het brandoppervlak liggen, vallen alleen dan samen, wanneer de stralen van het stelsel raaklijnen zijn aan een stelsel geodetische lijnen op dat brandoppervlak.

---

[1]) Bianchi, p. 221.

Die twee stelsels regeloppervlakken vallen dan samen met een der stelsels ontwikkelbare oppervlakken van het stelsel.

De beide stelsels krommen $A \sin\alpha - C\cos\alpha \dfrac{dv}{du} = 0$ en $P + Q\,\dfrac{dv}{du} = 0$, zijn alleen dan twee orthogonale stelsels, wanneer voldaan is aan de betrekking:

$$A\,Q\cos\alpha - C\,P\sin\alpha = 0.$$

Wijl de geodetische kromming $\dfrac{1}{r\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$ der krommen, die de krommen (α) onder een rechten hoek snijden, bepaald wordt door de formule:

$$\frac{1}{r\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{AC}(A\,Q\cos\alpha - C\,P\sin\alpha)$$

zegt de gevonden betrekking, dat de rechthoekige doorsnijdingskrommen der krommen (α) geodetische lijnen moeten zijn. Derhalve:

Alleen dan, wanneer de stralen van het stelsel bestaan uit raaklijnen aan de rechthoekige doorsnijdingskrommen van een stelsel geodetische krommen op het brandoppervlak, zullen de beide, op dit oppervlak gelegen, stelsels strictielijnen van regelvlakken van het stelsel orthogonale krommen zijn.

In Hoofdstuk I is reeds bewezen, dat, zal het stralenstelsel een normalenstelsel zijn, voldaan moet zijn aan de voorwaarde $f = f'$ en tevens is daar aangetoond, dat de stralen van het stelsel dan moeten zijn raaklijnen aan een stelsel geodetische lijnen op het brandoppervlak.

De voorwaarde $f = f'$ wordt hier:

$$A\,Q\cos\alpha + C\,P\sin\alpha = 0$$

en dit drukt volgens het voorgaande uit, dat de krommen (α) geodetische lijnen zijn, waardoor dus de genoemde eigenschap bevestigd wordt. Ook is op dezelfde plaats in Hoofdstuk I bewezen, dat de oppervlakken, voor welke de stralen van het stelsel normalen zijn, in dat geval verkregen worden, door op de raaklijnen aan de geodetische krommen (α) een stuk λ uit te zetten, van af het raakpunt, dat bepaald wordt uit:

$$\lambda = -\int \Sigma X dx_1.$$

Door de waarden voor X, Y, Z uit (34) te substitueeren wordt dit:

$$\lambda = -\int \Sigma \left(\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}du + \frac{\partial x_1}{\partial v}dv\right)$$

of:

$$\lambda = -\int (A\cos\alpha\, du + C\sin\alpha\, dv) = -\varphi(u, v) + \text{constante},$$

waarbij $\varphi\,(u, v)$ = constant de vergelijking der geodetische krommen (α) voorstelt.

Daar de abscis van het tweede brandpunt ϱ_α gelijk is aan het verschil der beide hoofdkromtestralen in een punt van een der oppervlakken, waarvoor de stralen van het stelsel de normalen zijn, wordt dit verschil, blijkens de boven voor die abscis gevonden uitdrukking:

$$\varrho_\alpha = \frac{C P_1 \cos\alpha + A Q_1 \sin\alpha}{(P Q_1 - P_1 Q)}.$$

Kiezen we op S_1 als parameterkrommen de krommen $\varphi\,(u, v)$ = constant en hun orthogonale trajectoriën $\psi\,(u, v)$ = constant, dan vinden we, wijl dan $\alpha = 0$ is en,daar het lijnelement op het oppervlak bij deze keuze van parameterkrommen vanden vorm $d\varphi^2 + C^2\, d\psi^2$ is, ook $A = 1$, voor dit verschil:

$$\varrho_0 = -\frac{C}{\frac{\partial C}{\partial \varphi}}$$

De tweede kromtestraal wordt dus $\pm\left(\varphi - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial \varphi}}\right)$.

Voor het geval, dat C eene functie van φ alleen is, zijn dus de beide kromtestralen van het normaal oppervlak functies van elkaar. Zulk een oppervlak wordt een W oppervlak genoemd, omdat Weingarten zich het eerst met zulke oppervlakken heeft bezig gehouden. Wanneer het lijnelement van een oppervlak kan gebracht worden in den vorm: $ds^2 = du^2 + f(u)\,dv^2$ is het afwikkelbaar op een omwentelingsoppervlak.

Uit het bovenstaande volgt dus, dat de beide oppervlakken der kromtemiddelpunten van alle W oppervlakken, waarvan de kromtestralen door dezelfde betrekking verbonden zijn, afgewikkeld kunnen worden op omwentelingsoppervlakken, waarvan de vorm van het lijnelement alleen afhangt van de betrekking tusschen de kromtestralen [1]).

Wij willen nu nagaan, wat er wordt van de vergelijking ter bepaling van de abscissen der grenspunten op een straal van het stelsel.

In formule (10) uit Hoofdstuk I hebben we gevonden:

$$\Delta^2 r^2 + r\left[eN - M(f+f') + gL\right] + \left\{eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2\right\} = 0.$$

Nu is, zooals reeds volgt uit (41), de coëfficient van r in deze vergelijking gelijk aan $-\Delta^2 \varrho_\alpha$, waarin ϱ_α de abscis is van het tweede brandpunt, op den beschouwden straal gelegen.

Verder vindt men, met behulp van de formules (38):

---

[1]) Darboux. 3ième partie. pag. 326.

$$eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = -ACPQ\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{4}(CP\cos\alpha -$$

$$-AQ\sin\alpha)^2 = -\frac{1}{4}(CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha)^2.$$

Voert men dit in en stelt tevens voor Δ^2 de waarde $\frac{(PQ_1 - P_1Q)^2}{A^2C^2}$, dan gaat de vergelijking ter bepaling van r over in:

$$r^2 - r\varrho_\alpha - \frac{A^2C^2}{4}\frac{(CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha)^2}{(PQ_1 - P_1Q)^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (44)$$

Men kan deze vergelijking nog in een anderen vorm brengen, door op te merken, dat de geodetische kromming $\frac{1}{r_\alpha}$ der krommen (α) wordt gegeven door:

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{1}{AC}(CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha).$$

Verder merken we op, dat, wanneer we de kromtestraal van de kromme (α) in een zeker punt h_α noemen en de kromtestraal van de normaal doorsnede, die de kromme (α) in datzelfde punt aanraakt, R_α en wanneer we nog den hoek tusschen de richtingen van R_α en h_α noemen ε, dat dan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_\alpha} &= \frac{\sin\varepsilon}{h_\alpha} \\ \frac{1}{R_\alpha} &= \frac{\cos\varepsilon}{h_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (45)$$

zooals onmiddellijk uit het theorema van Meusnier volgt.

Hieruit volgt de betrekking:

$$\frac{1}{h_\alpha^2} = \frac{1}{r_\alpha^2} + \frac{1}{R_\alpha^2}.$$

Nu is:

$$\frac{1}{h_\alpha^{\;2}} = \Sigma\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 = \Sigma\left[\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\cos\alpha}{A} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\sin\alpha}{C}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\cos\alpha}{A} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\sin\alpha}{C}\right)\right]^2$$

of:

$$\frac{1}{h_\alpha^{\;2}} = \Sigma\left[\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{C}\frac{\partial X}{\partial v}\right]^2 = \frac{\cos^2\alpha}{A^2}L +$$

$$+ \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{AC}M + \frac{\sin^2\alpha}{C^2}N.$$

Door invoering van de waarden voor L, M en N uit (38) wordt dit:

$$\frac{1}{h_\alpha^{\;2}} = \frac{1}{A^4 C^4}(CP_1\cos\alpha + AQ_1\sin\alpha)^2 +$$

$$+ \frac{1}{A^2C^2}(PC\cos\alpha + QA\sin\alpha)^2.$$

Met behulp van de bovengevonden waarde voor $\frac{1}{r_a^{\;2}}$ volgt hieruit:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \pm\frac{1}{A^2C^2}(CP_1\cos\alpha + AQ_1\sin\alpha).$$

Men kan dus schrijven:

$$\frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{r_\alpha} = \pm\frac{AC(CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha)}{(PQ_1 - P_1Q)}.$$

Substitueert men dit in (44), dan verkrijgt men voor de vergelijking ter bepaling van de abscissen der grenspunten op een straal:

$$r^2 - r\,\varrho_\alpha - \frac{\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{4\,r_\alpha^{\,2}} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

Hieruit volgt:

1⁰. Bestaat het stralenstelsel uit de raaklijnen van een stelsel geodetische lijnen op het oppervlak, dan is $\dfrac{1}{r_\alpha} = 0$ en heeft men dus voor de abscissen der grenspunten op een straal $r = 0$ en $r = \varrho_\alpha$. Op elken straal vallen dan de brandpunten samen met de grenspunten. Inderdaad is in dat geval het stelsel een normaalstelsel.

2⁰. De vergelijking (46) kan niet dienen ter bepaling van de abscissen der grenspunten, wanneer de krommen (α) zijn asymptotische lijnen op het brandoppervlak. Dan toch is, wijl de beide brandpunten op een straal samenvallen, $\varrho_\alpha = 0$, doch tevens $R_\alpha = \infty$. Voor dat geval kan de vergelijking (44) aldus worden vervormd:

Uit $\varrho_\alpha = 0$ of $CP_1 \cos\alpha + AQ_1 \sin\alpha = 0$ volgt:

$$P_1 = -\frac{A\sin\alpha}{C\cos\alpha}\,Q_1$$

en dus:

$$\frac{CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha}{(PQ_1 - P_1\,Q)} = \frac{C\cos\alpha}{Q_1} = \frac{C}{\dfrac{D_2}{A} + \dfrac{D_3}{C}\,tg\,\alpha}\,.$$

Maar uit: $CP_1\cos\alpha + AQ_1\sin\alpha = 0$ volgt ook:

$$A^2\,D_3\,tg^2\,\alpha + 2\,AC\,D_2\,tg\,\alpha + C^2\,D_1 = 0$$

en dus:

$$tg\,\alpha = \frac{-\,CD_2 \pm \sqrt{C^2\,D_2^{\,2} - C^2\,D_1\,D_3}}{AD_3}$$

zoodat:

$$\frac{D_2}{A} + \frac{D_3}{C} \, tg\, \alpha = \pm \frac{1}{A} \sqrt{(D_2{}^2 - D_1 D_3)}.$$

Hierdoor gaat de vergelijking (44) over in:

$$r^2 - \frac{A^4 C^4}{4(D_2{}^2 - D_1 D_3)} = 0.$$

Nu is de totale kromming van het oppervlak in een punt:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D_1 D_3 - D_2{}^2}{A^4 C^4}$$

als R_1 en R_2 de hoofdkromtestralen in dat punt zijn.

Wij verkrijgen dus, ter bepaling van de grenspunten op de stralen van een stelsel, die uit de raaklijnen aan asymptotische lijnen van een zeker oppervlak bestaan:

$$r^2 + \frac{R_1 R_2}{4} = 0.$$

Hieruit volgt:

Beschouwt men het stralenstelsel, gevormd door de raaklijnen aan een stelsel asymptotische lijnen op een willekeurig oppervlak, dan verkrijgt men de grensoppervlakken van dit stelsel, door op elken straal van af het raakpunt met het oppervlak naar weerskanten een stuk af te zetten, gelijk $\frac{1}{2}\sqrt{(-R_1 R_2)}$.

Is dus het oppervlak niet willekeurig, doch van constante negatieve kromming, zoodat $R_1 R_2 = -a^2$ *is,* a *eene constante zijnde, dan zal de afstand der beide grenspunten op een straal van het stelsel constant en wel gelijk* a *zijn.*

Bovendien is voor die stralen de afstand der brandpunten constant en wel gelijk 0 [1]).

Reeds in Hoofdstuk I is er sprake geweest van pseudospherische stralenstelsels. Het stralenstelsel, gevormd door de raaklijnen aan een stelsel asymptotische krommen van een pseudospherisch oppervlak is dus een bizonder pseudospherisch stralenstelsel en wel een, waarbij de afstand der brandpunten nul is. Evenzoo zal het stralenstelsel, gevormd door de normalen van een oppervlak, waarvoor het verschil der hoofdkromtestralen in de verschillende punten constant is, een pseudospherisch stralenstelsel zijn, waarbij zoowel de afstand der brandpunten als die der grenspunten gelijk is aan dat constante verschil.

In het algemeen zal voor een pseudospherisch stralenstelsel, volgens vergelijking (46), zoowel ϱ_α als $\dfrac{R_\alpha}{r_\alpha}$ constant moeten zijn, d. i.:

$$\frac{AQ_1 \sin\alpha + CP_1 \cos\alpha}{(P_1 Q - P Q_1)} = a \qquad AC\,\frac{CP\cos\alpha + AQ\sin\alpha}{CP_1\cos\alpha + AQ_1\sin\alpha} = m$$

waarbij a en m constanten zijn.

Elimineert men uit deze betrekkingen α, dan houdt men eene betrekking tusschen de fundamenteele grootheden van het gegeven brandoppervlak over, eene voorwaarde dus aan welke het oppervlak moet voldoen om van zulk een stelsel brandoppervlak te kunnen zijn. Deze is, dat het oppervlak een pseudospherisch oppervlak moet zijn, d. w. z. een

---

[1]) (Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede reeks, deel IV, pag. 315) Dr. P. Zeeman. Eigenschappen van eenige bijzondere stralenstelsels.

Door een cijfer of drukfout in dit stukje is ergens het cijfer 4 weggevallen, waardoor gevonden wordt $\sqrt{(-R_1 R_2)}$ in plaats van $\frac{1}{2}\sqrt{(-R_1 R_2)}$.

oppervlak, dat in alle punten eene constante negatieve totale kromming heeft.

Op dit oppervlak zijn dan de stralen van het stelsel raaklijnen aan zulke krommen, dat de hoek tusschen de hoofdnormaal dier kromme en de normaal van het oppervlak in een zelfde punt constant is; immers, daar $\frac{R_\alpha}{r_\alpha}$ constant moet zijn, volgt, dat ook $tg\,\varepsilon$ constant moet zijn uit formules (45). Later zullen we het bewijs leveren van de genoemde eigenschap en de vergelijking afleiden van die krommen op het pseudospherisch oppervlak, waarvan de raaklijnen het pseudospherische stralenstelsel vormen.

Met de krommen (α) en hun orthogonale trajectoriën, de krommen $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, zijn nog andere stralenstelsels verbonden, n.l. die, welke bestaan uit de verbindingslijnen van kromtemiddelpunten en middelpunten van geodetische kromming der genoemde krommen.

Onderzoeken we eerst het stralenstelsel bestaande uit de verbindingslijnen van de middelpunten van geodetische kromming der krommen (α) met de overeenkomstige middelpunten der krommen $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, ten opzichte van de vraag, onder welke voorwaarde dit stelsel een normaal stelsel zal zijn. Wij doen niet aan de algemeenheid te kort, wanneer we, ten einde dit onderzoek zoo eenvoudig mogelijk te maken, voor de krommen (α) aannemen de parameterkrommen $v =$ constant en voor de krommen $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ de parameterkrommen $u =$ constant.

De stralen van geodetische kromming der krommen $v =$ constant en $u =$ constant, zijn:

$$\frac{1}{r_v} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v}$$

$$\frac{1}{r_u} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

De rechthoekige coördinaten x_v, y_v, z_v, van het middelpunt van geodetische kromming der kromme $v =$ constant in een punt $(x_1\ y_1\ z_1)$, worden gegeven door de formules:

$$x_v = x_1 + \frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

en de overeenkomstige coördinaten x_u, y_u, z_u, voor de kromme $u =$ constant, door de formules:

$$x_u = x_1 + \frac{r_u}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u}$$

enz.

De richtingscosinussen X, Y, Z van de verbindingslijn dier middelpunten worden gegeven door:

$$X = \frac{\frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{r_u}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{r_u^2 + r_v^2}} \quad . \ . \ . \ . \ (47)$$

Noemen we de abscis, die op een straal van af het middelpunt (x_v, y_v, z_v) moet worden afgezet om een punt van het gevraagde normaaloppervlak te bereiken: p, dan heeft zulk een punt tot coördinaten:

$$x_1 + \frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} + pX$$

enz.

Daar nu een straal van het stelsel loodrecht staat op het normaaloppervlak, moet men hebben, onafhankelijk van de verhouding $\frac{du}{dv}$:

$$\Sigma X\left[dx_1 + d\left(\frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) + p\,dX + X\,dp\right] = 0.$$

Nu is $\Sigma X\,dX = 0$ en $\Sigma X^2 = 1$, dus:

$$dp = -\Sigma\left\{X\,dx_1 + X\,d\left(\frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\right\}.$$

Voeren we nu voor X, Y, Z enz., de waarden uit (47) in, dan volgt na eenige herleiding:

$$dp = -\frac{du}{\sqrt{r_u^2 + r_v^2}}\left\{-Ar_u + r_v\frac{\partial r_v}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}r_u r_v\right\} -$$

$$-\frac{dv}{\sqrt{r_u^2 + r_v^2}}\left\{Cr_v + r_v\frac{\partial r_v}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}r_u r_v\right\}.$$

Op grond van de voor r_u en r_v boven aangegeven waarden is:

$$A + \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}r_v = 0,\quad C + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}r_u = 0$$

en verkrijgt men dus:

$$dp = -\frac{r_v\,dr_v}{\sqrt{(r_u^2 + r_v^2)}}.$$

De voorwaarde, dat het tweede lid eene volledige differentiaal zij, kan geschreven worden in den vorm:

$$r_u = f(r_v).$$

Is omgekeerd aan deze voorwaarde voldaan, dan is het beschouwde stelsel een normaal stralenstelsel. Door integratie vindt men:

$$p = -\int \frac{r_v\, dr_v}{\sqrt{[r_v^2 + f^2(r_v)]}} + \text{constante}.$$

Door de constante te laten varieëren, verkrijgt men dus alle parallel oppervlakken, die normaal zijn tot het stralenstelsel.

De zooeven genoemde eigenschap kan aldus worden uitgedrukt:

Zijn de stralen van geodetische kromming der, door een punt van een oppervlak gaande, orthogonale krommen $u =$ constant en $v =$ constant functies van elkaar, dan zal het stralenstelsel, gevormd door de rechten, die de beide middelpunten van geodetische kromming verbinden, een normaal stralenstelsel zijn, en omgekeerd [1]).

Een ander stralenstelsel verkrijgt men, door de middelpunten van geodetische kromming der krommen $v =$ constant of $u =$ constant respectievelijk met de kromtemiddelpunten der krommen $u =$ constant of $v =$ constant te verbinden. Ook hier willen we onderzoeken, onder welke voorwaarde zulk een stelsel een normaal stralenstelsel wordt. Kiezen we nu voor het onderzoek het eerste stelsel, dan verbindt een straal van het stelsel een punt $\left(x_1 + \frac{r_v}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \text{enz.}\right)$ met een punt ($x_1 + h_u\, \alpha_u$ enz.), waarin h_u voorstelt den kromtestraal van de kromme $u =$ constant in een punt (u, v) en $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$ zijn de richtingscosinussen van de hoofdnormaal dier kromme. Voor die richtingscosinussen kunnen we ook schrijven:

$$\alpha_u = h_u \left[\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} - \frac{1}{C^3}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial v}\right] \quad \ldots\ldots (48)$$

---

[1]) Dr. P. Zeeman, l. c. p. 298.

Verder hebben we de betrekkingen:

$$\Sigma \alpha_u^2 = 1;\ \Sigma \alpha_u \frac{\partial \alpha_u}{\partial u} = 0;\ \Sigma \alpha_u \frac{\partial \alpha_u}{\partial v} = 0;\ \Sigma \alpha_u \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

De richtingscosinussen X, Y, Z van den beschouwden straal van het stelsel zijn nu:

$$X = \frac{h_u \alpha_u - \frac{r_v}{C} \frac{\partial x_1}{\partial v}}{\sqrt{(h_u^2 + r_v^2)}} \quad \ldots\ldots (49)$$

enz.

Noemen we weer, als boven, de abscis, die we op dien straal, vanaf het punt ($x_1 + h_u \alpha_u$ enz.) moeten afzetten, om een punt van het normaaloppervlak te bereiken, p, dan vinden we hier:

$$dp = -\Sigma \left\{ X\, dx_1 + X\, d\, (h_u \alpha_u) \right\}.$$

Voeren we voor X, Y en Z de waarden (49) in, dan volgt, na eenige herleiding:

$$dp = -\frac{du}{\sqrt{(h_u^2 + r_v^2)}} \left[-\frac{h_u^2}{C} + h_u \frac{\partial h_u}{\partial u} - \frac{h_u r_v}{C} \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \alpha_u}{\partial u} \right] - \frac{dv}{\sqrt{(h_u^2 + r_v^2)}} \left[-C r_v + h_u \frac{\partial h_u}{\partial v} - \frac{h_u r_v}{C} \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \alpha_u}{\partial v} \right].$$

Maar uit $\Sigma \alpha_u \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$ volgt:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \alpha_u}{\partial u} = -\Sigma \alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} \text{ en } \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \alpha_u}{\partial v} = -\Sigma \alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}.$$

Ten gevolge van de formules (48) is:

$$-\Sigma\,\alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = -\frac{h_u}{C^2}\,\Sigma \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + \frac{h_u}{C^2}\,\frac{\partial C}{\partial u}\,\frac{\partial C}{\partial v}$$

$$-\Sigma\,\alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\frac{h_u}{C^2}\,\Sigma \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\right)^2 + \frac{h_u}{C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)^2$$

Met het oog op de formules (37) en bedenkende, dat $r_v = -\dfrac{AC}{\dfrac{\partial A}{\partial v}}$ en $r_u = -\dfrac{AC}{\dfrac{\partial C}{\partial u}}$ en verder, dat $\dfrac{1}{R_u} = \dfrac{D_3}{AC^3}$ en $\dfrac{1}{h_u{}^2} = \dfrac{1}{R_u{}^2} + \dfrac{1}{r_u{}^2}$, vinden we:

$$-\Sigma\,\alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = -\frac{h_u\,D_2 D_3}{A^2 C^4} - \frac{h_u}{r_v}\,\frac{\partial C}{\partial u}$$

$$-\Sigma\,\alpha_u \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\frac{C^2}{h_u}.$$

Hieruit volgt:

$$dp = -\frac{h_u}{\sqrt{(h_u{}^2 + r_v{}^2)}}\,dh_u - \frac{h_u{}^2\,r_v\,D_2}{AC^2\,R_u \sqrt{(h_u{}^2 + r_v{}^2)}}\,du.$$

Zeer eenvoudig wordt deze uitdrukking voor $D_2 = 0$, d. w. z. wanneer de krommen $u =$ constant en $v =$ constant samenvallen met de kromtelijnen op het beginoppervlak, dan is het tweede lid een volledige differentiaal alléén dan, wanneer $r_v = f(h_u)$; in dit geval is dus het stralenstelsel een normaalstelsel, en omgekeerd. Daarbij is dan in 't midden gelaten of die uitdrukking, wanneer $D_2 \gtrless 0$ is, en dus de parameterkrommen niet met de kromtelijnen samen vallen, niet eene totale differentiaal kan zijn.

De bewezen eigenschap luidt nu aldus:

Verbindt men de kromtemiddelpunten van een stelsel kromtelijnen van een oppervlak met de middelpunten van geodetische kromming van het andere stelsel kromtelijnen, zoodanig, dat de verbonden middelpunten telkens behooren bij een zelfde punt van het oppervlak, dan vormen die verbindingslijnen een normaal stralenstelsel, mits de afstanden van die middelpunten tot dat punt van het oppervlak functies zijn van elkaar en omgekeerd[1]).

Voor het geval nu, dat we juist beschouwden, dat de krommen u = constant en v = constant kromtelijnen zijn, worden de abscissen der tweede brandpunten, die niet op het beginoppervlak liggen, op de stralen van de beide stralenstelsels der raaklijnen aan de krommen v = constant en u = constant, die we zullen noemen ϱ_v en ϱ_u, gegeven door de formules:

$$\varrho_v = -\frac{AC}{\frac{\partial C}{\partial u}}$$

$$\varrho_u = -\frac{AC}{\frac{\partial A}{\partial v}}$$

welke volgen uit formule (41), door achtereenvolgens $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$ te stellen, na $D_2 = 0$ genomen te hebben. Hieruit volgt:

$$\begin{array}{l} r_u = \varrho_v \\ r_v = \varrho_u \end{array}$$ [2]).

Daar nu de osculatievlakken der krommen v = constant en u = constant brandvlakken zijn van de stelsels raak-

---

[1]) A. Pell. On the focal surfaces of the congruences of tangents to a given surface, (American Journal of Mathematics.) pag. 119.

[2]) Darboux, 3ième partie, pag. 121.

lijnen aan de krommen v = constant en u = constant, terwijl de raakvlakken aan het beginoppervlak de bijbehoorende brandvlakken zijn, moeten die osculatievlakken in de middelpunten van geodetische kromming raken aan de tweede brandoppervlakken S_v en S_u van die stralenstelsels. Hieruit volgt, dat het gegeven beginoppervlak en het tweede brandoppervlak S_v der raaklijnen aan de krommen v = constant b. v., de oppervlakken van de kromtemiddelpunten zijn van de paralleloppervlakken, behoorende bij het zooeven genoemde normaal stralenstelsel. De normalen der oppervlakken S_v en S_u hebben dus de richting van de binormalen der krommen v = constant en u = constant in correspondeerende punten. Zijn nu b.v. de krommen v = constant vlakke krommen, dan zijn de normalen van S_v langs de krommen v = constant op dat oppervlak evenwijdig. De raakvlakken van S_v langs elke kromme v = constant vallen dan samen tot één vlak, en daar dus die raakvlakken alleen afhankelijk zijn van den parameter v, is S_v een ontwikkelbaar oppervlak, terwijl de krommen v = constant op S_v de beschrijvende lijnen zijn [1]).

Zijn de kromtelijnen v = constant b.v. geodetische lijnen, dan zijn ze vlakke krommen tegelijk en verkeeren we in een bijzonder geval van het hierboven beschouwde. [2])

Zijn op het oorspronkelijk oppervlak de kromtelijnen v = constant b.v. vlakke krommen en is tevens voldaan aan de voorwaarde $r_u = f(h_v)$, dan zullen op de paralleloppervlakken, waarvan de normalen zijn de verbindingslijnen der geodetische kromtemiddelpunten der kromtelijnen u = constant met de kromtemiddelpunten der vlakke kromtelijnen v = constant, de krommen v = constant ook zijn vlakke kromtelijnen. Immers langs deze krommen zullen de nor-

---

[1]) A. Pell. (l. c. p. 119).

[2]) Bianchi. pag. 166.

malen aan het oppervlak elkaar snijden, en tevens zullen deze normalen allen in hetzelfde vlak gelegen zijn.

Nu blijft nog over te onderzoeken, onder welke voorwaarde de verbindingslijnen van de kromtemiddelpunten der krommen u = constant en v = constant respectievelijk met de middelpunten van geodetische kromming der krommen u = constant en v = constant, normaalstelsels vormen. Onderzoeken we daartoe het eerste stelsel, dan verbindt een straal van het stelsel een punt $x_1 + \frac{r_u}{A}\frac{dx_1}{du}$, enz. met een punt $(x_1 + \alpha_u h_u$, enz.), waarbij weer:

$$\alpha_u = h_u \left[\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} - \frac{1}{C^3}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial v}\right]$$

enz.

Verder hebben we de betrekkingen:

$$\Sigma\,\alpha_u^2 = 1\,;\ \Sigma\,\alpha_u \frac{\partial \alpha_u}{\partial u} = 0;\ \Sigma\,\alpha_u \frac{\partial \alpha_u}{\partial v} = 0\,;\ \Sigma\,\alpha_u \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

De richtingscosinussen X, Y, Z van een straal van het stelsel zijn:

$$X = \frac{h_u\,\alpha_u - \frac{r_u}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{(r_u^2 - h_u^2)}}$$

Immers:

$$\Sigma\left(\frac{r_u}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \alpha_u h_u\right)^2 = r_u^2 + h_u^2 - 2\,\Sigma\frac{r_u h_u}{A}\alpha_u\frac{\partial x_1}{\partial u} =$$

$$= r_u^2 + h_u^2 - \frac{2\,r_u h_u}{A}\left(-\frac{h_u}{C}\frac{\partial C}{\partial u}\right);$$

maar:

$$-\frac{1}{AC}\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{1}{r_u};$$

hieruit volgt voor de laatste waarde: $(r_u^2 - h_u^2)$.

De differentiaal dp der abscis, die we, van af het punt $(x_1 + h_u \alpha_u$, enz.) moeten afzetten, om een punt van het normaaloppervlak te bereiken, wordt gegeven door de uitdrukking:

$$dp = -\Sigma \{ X\, dx_1 + X\, d\,(h_u \alpha_u) \}$$

Het is mij echter nog niet gelukt, de voorwaarde, aan welke voldaan moet zijn, opdat het tweede lid een totale differentiaal en dus het beschouwde stralenstelsel een normaal stelsel zij, in een eenvoudigen vorm te brengen.

Tot nu toe hielden we ons niet bezig met het tweede brandoppervlak van de, in het voorgaande beschouwde stralenstelsels, die steeds gevormd werden door de raaklijnen aan een stelsel krommen (α) op een oppervlak S_1, dat dus het eerste brandoppervlak van het stralenstelsel is. Voor het tweede brandoppervlak willen wij allereerst de fundamenteele grootheden der eerste en tweede orde uitdrukken in grootheden, die alleen betrekking hebben op het oppervlak S_1 en het beschouwde stralenstelsel. De rechthoekige coördinaten x_2, y_2, z_2 van een punt op S_2, het tweede brandpunt dus van den straal van 't stelsel, die door het punt x_1, y_1, z_1 van S_1 gaat, worden gegeven door:

$$x_2 = x_1 + \varrho_\alpha X$$
$$y_2 = y_1 + \varrho_\alpha Y$$
$$z_2 = z_1 + \varrho_\alpha Z$$

waarin, evenals in het voorgaande, ϱ_α de abscis van dit tweede brandpunt is, terwijl X, Y en Z de richtingscosinussen van den beschouwden straal voorstellen.

De fundamenteele grootheden van S_2 wijzen wij aan door de letters E, F, G, D'_1, D'_2 D'_3, waarin $E = \Sigma \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2$, $F = \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v}$, $G = \Sigma \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2$, terwijl D'_1, D'_2,

D'_3 uit de overeenkomstige grootheden D_1, D_2 en D_3 van S_1 ontstaan door $x_1\, y_1\, z_1$ te vervangen door $x_2\, y_2\, z_2$. Nu is:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + \varrho_\alpha \frac{\partial X}{\partial u} + X \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right)^2$$

$$= A^2 + \varrho_\alpha^{\ 2}\, \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + 2\,\varrho_\alpha\, \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \left(\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right)^2 +$$

$$+ 2\,\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\, \Sigma\, X \frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Hierin is:

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = L = \frac{1}{A^2\, C^2}\, P_1^{\ 2} + P^2,\ \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = e =$$

$$-\,A\,P \sin\alpha, \qquad \Sigma X \frac{\partial x_1}{\partial u} = A \cos\alpha$$

waardoor de voor E gevonden uitdrukking overgaat in:

$$E = A^2 + \varrho_\alpha^{\ 2}\left\{\frac{P_1^{\ 2}}{A^2\, C^2} + P^2\right\} + \left(\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right)^2 - 2\,\varrho_\alpha\, A\, P \sin\alpha + 2\, A \cos\alpha\, \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}$$

of:

$$E = \left(A \sin\alpha - \varrho_\alpha\, P\right)^2 + \left(A \cos\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right)^2 + \frac{P_1^{\ 2}\, \varrho_\alpha^{\ 2}}{A^2\, C^2}.$$

Let men nu op de in het voorgaande voor ϱ_α gevonden uitdrukking (41):

$$\varrho_\alpha = \frac{C\, P_1 \cos\alpha + A\, Q_1 \sin\alpha}{P\, Q_1 - P_1\, Q}$$

dan heeft men:

$$A \sin\alpha - \varrho_\alpha\, P = \varrho_\alpha\left\{\frac{A \sin\alpha}{\varrho_\alpha} - P\right\} = -\,\varrho_\alpha\, P_1\, \frac{A\; Q \sin\alpha + CP \cos\alpha}{A\, Q_1 \sin\alpha + CP_1 \cos\alpha}.$$

Wijl echter

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{A\,Q \sin\alpha + C P \cos\alpha}{A\,C} \text{ en } \frac{1}{R_\alpha} = -\frac{A\,Q_1 \sin\alpha + C\,P_1 \cos\alpha}{A^2\,C^2}$$

waarin R_α voorstelt de kromtestraal der normaaldoorsnede van het oppervlak, die in het beschouwde punt de daardoor gaande kromme (α) aanraakt, terwijl r_α de straal van geodetische kromming is, zal:

$$A \sin\alpha - \varrho_\alpha P = \frac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,r_\alpha}$$

en dus:

$$\left.\begin{aligned}
E &= \left(A \cos\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right) + \frac{P_1^2\,\varrho_\alpha^2}{A^2\,C^2}\left(1 + \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2}\right) \\
&\text{Evenzoo heeft men:} \\
F &= \left(A \cos\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u}\right)\left(C \sin\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v}\right) + \frac{P_1\,Q_1\,\varrho_\alpha^2}{A^2\,C^2}\left(1 + \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2}\right) \\
G &= \left(C \sin\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v}\right)^2 + \frac{Q_1^2\,\varrho_\alpha^2}{A^2\,C^2}\left(1 + \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2}\right)
\end{aligned}\right\} \ldots (50)$$

Iets eenvoudiger nog worden deze formules, wanneer men invoert den kromtestraal h_α der kromme (α) in het beschouwde punt. Volgens eene bekende eigenschap toch is:

$$\frac{1}{h_\alpha^2} = \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{r_\alpha^2}$$

en dus $\dfrac{R_\alpha^2}{h_\alpha^2} = \left(1 + \dfrac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2}\right)$. Dit invoerende verkrijgt men voor de fundamenteele grootheden der eerste orde E, F en G van het tweede brandoppervlak S_2:

$$\left.\begin{aligned}
E &= \left(A\cos\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right)^2 + \frac{P_1^{\,2}\,\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{A^2\,C^2\,h_\alpha^{\,2}}\\
F &= \left(A\cos\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right)\left(C\sin\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial v}\right) + \frac{P_1\,Q_1\,\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{A^2\,C^2\,h_\alpha^{\,2}}\\
G &= \left(C\sin\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial v}\right)^2 + \frac{Q_1^{\,2}\,\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{A^2\,C^2\,h_\alpha^{\,2}}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (51)$$

In verband hiermede wordt het lijnelement op dit oppervlak:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$= \{A\cos\alpha\,du + C\sin\alpha\,dv + d\varrho_\alpha\}^2 + \frac{\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{A^2\,C^2\,h_\alpha^{\,2}}(P_1\,du + Q_1\,dv)^2$$

of, wijl $A\cos\alpha\,du + C\sin\alpha\,dv = ds_\alpha$, het element der kromme (α):

$$ds^2 = (ds_\alpha + d\varrho_\alpha)^2 + \frac{\varrho_\alpha^{\,2}\,R_\alpha^{\,2}}{A^2\,C^2\,h_\alpha^{\,2}}(P_1du + Q_1dv)^2 \ldots . (52)$$

Van de verschillende vormen, die men in sommige gevallen nog aan dit lijnelement kan geven, vermelden we alleen de volgende. Men heeft:

$$ds_\alpha = A\cos\alpha\,du + C\sin\alpha\,dv$$

$$ds_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = -\,A\sin\alpha\,du + C\cos\alpha\,dv$$

waarin $ds_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ het lijnelement der orthogonale trajectoriën van de krommen (α) voorstelt.

Hieruit volgt:

$$du = \frac{\cos\alpha\,ds_\alpha - \sin\alpha\,ds_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}{A}, \quad dv = \frac{\sin\alpha\,ds\alpha + \cos\alpha\,ds_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}{C}$$

en:

$$P_1\,du + Q_1\,dv = \left\{\frac{CP_1 \cos\alpha + AQ_1 \sin\alpha}{AC}\right\} ds_\alpha +$$

$$+ \left\{\frac{AQ_1 \cos\alpha - CP_1 \sin\alpha}{AC}\right\} ds_{\alpha + \frac{\pi}{2}}.$$

Vallen dus de krommen (α), aan welke de stralen van het stelsel raken, samen met een stelsel kromtelijnen van het oppervlak, in welk geval, volgens het voorgaande [1]) $AQ_1 \cos\alpha - CP_1 \sin\alpha = 0$ is, dan wordt dit:

$$P_1\,du + Q_1\,dv = \frac{CP_1 \cos\alpha + AQ_1 \sin\alpha}{AC}\, ds_\alpha = -\frac{AC}{R_\alpha}\, ds_\alpha.$$

Voor dat geval verkrijgt dus het lijnelement op het tweede brandoppervlak den eenvoudigen vorm:

$$ds^2 = (ds_\alpha + d\varrho_\alpha)^2 + \frac{\varrho_\alpha^{\,2}}{h_\alpha^{\,2}}\, ds_\alpha^{\,2}\ ^{2}) \quad . \ . \ . \ (53)$$

In het algemeene geval echter, dat de stralen van het stelsel niet raaklijnen aan een stelsel kromtelijnen zijn, laat zich het lijnelement van S_2 niet tot dezen eenvoudigen vorm terugbrengen. Die reductie zal evenwel mogelijk zijn voor bizondere lijnelementen van dit tweede brandoppervlak en wel voor die, welke overeenstemmen met eene verplaatsing van het punt $(x_1\ y_1\ z_1)$ langs eene kromme (α), d. i. voor die lijnelementen, voor welke

$$-A \sin\alpha\, du + C \cos\alpha\, dv = 0 \text{ is } ^{3}).$$

---

[1]) Zie pag. 41.

[2]) Zie Pell, On the Focal Surfaces of the Congruences of Tangents to a given Surface. American Journal of Mathematics. vol 20. p. 106.

[3]) Door eene eenvoudige beschouwing van cinematischen aard, kan men dit resultaat als volgt verkrijgen. Neemt men een willekeurig punt M op S_1, dan zal de verplaatsing, die het uiteinde M_1

Uit de formule (52) volgt nog, dat, wanneer men het punt $(x_1\, y_1\, z_1)$ zich zoo op het oppervlak S_1 laat verplaatsen, dat $P_1\, du + Q_1\, dv = 0$ of $P_1 + Q_1\, t = 0$ is, het overeenstemmende lijnelement van S_2 zal zijn:

$$ds = ds_\alpha + d\varrho_\alpha.$$

In dat geval zal de kromme, door het punt $(x_1\, y_1\, z_1)$ op het beginoppervlak doorloopen, zoodanig zijn, dat de stralen van het stelsel, gaande door de punten dier kromme, een ontwikkelbaar oppervlak vormen, waarvan de keerlijn op S_2 is gelegen. In de laatste formule is dus ds een element van die keerlijn.

Uit (53) leidt men verder af, dat, wanneer $s_\alpha + \varrho_\alpha = G$ gesteld wordt, het lijnelement van 't oppervlak den vorm:

---

van den door M gaanden straal van het stelsel ondergaat, wanneer M zich verplaatst naar een opvolgend punt N der zelfde kromme (α), de resultante zijn van drie verplaatsingen en wel: 1e de translatie $MN = ds_\alpha$, die verkregen wordt door den straal van M naar N in zijn eigen richting te verschuiven, 2e de toename der lengte van den afstand $MM_1 = \varrho_\alpha$ der beide brandpunten, als het punt M zich naar N verplaatst, 3e eene rotatie om N, ten gevolge van welke de straal door M de richting van den straal door N d. i. van de raaklijn in N aan de kromme (α) verkrijgt. Ten gevolge dier rotatie doorloopt het uiteinde M_1 van dien straal een lijnelement $= \varrho_\alpha\, d\psi$ als $d\psi$ den hoek tusschen de raaklijnen in M en N voorstelt; dit lijnelement is loodrecht op de beide eerste verplaatsingen. Voor de totale verplaatsing van het uiteinde M_1, d. i. het lijnelement op S_2, als M zich langs de kromme (α) verplaatst, heeft men dus, wijl $\dfrac{ds_\alpha}{d\psi} = h_\alpha$ is:

$$ds^2 = \left(ds_\alpha + d\varrho_\alpha\right)^2 + \frac{\varrho_\alpha^{\,2}}{h_\alpha^{\,2}}\, ds_\alpha^{\,2}.$$

Ook in het algemeene geval zou men door eene dergelijke redeneering de bovengenoemde uitdrukking voor het lijnelement op S_2 kunnen vinden.

$$ds^2 = dG^2 + \frac{\varrho_\alpha^{\,2}}{h_\alpha^{\,2}} ds_\alpha^{\,2}$$

aanneemt. Doch dit is de vorm van het lijnelement op een oppervlak, waarvoor de parameterkrommen zijn geodetische lijnen op dit oppervlak en hunne orthogonale trajectoriën. Derhalve:

Wordt het stralenstelsel gevormd door de raaklijnen van een der stelsels kromtelijnen op een oppervlak S_1, dan zullen op het tweede brandoppervlak een stelsel geodetische lijnen en hunne rechthoekige doorsnijdingskrommen worden bepaald door de vergelijkingen:

$$s_\alpha = \text{Const.} \qquad\qquad s_\alpha + \varrho_\alpha = \text{Const.}$$

of:

$$\int \left\{ A \cos\alpha \, du + C \sin\alpha \, dv \right\} = \text{Const.}$$

$$\int \left\{ \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u} + A \cos\alpha \right\} du + \int \left\{ \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v} + C \sin\alpha \right\} dv = \text{Const.}$$

Wij gaan nu over tot de bepaling der fundamentaalgrootheden van de tweede orde D_1', D_2' en D_3' voor het tweede brandoppervlak S_2. Volgens de definitie dier grootheden heeft men:

$$D_1' = \left| \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} \; \frac{\partial x_2}{\partial u} \; \frac{\partial x_2}{\partial v} \right| \qquad D_2' = \left| \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} \; \frac{\partial x_2}{\partial u} \; \frac{\partial x_2}{\partial v} \right| \qquad D_3' = \left| \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \; \frac{\partial x_2}{\partial u} \; \frac{\partial x_2}{\partial v} \right|$$

Zijn X_2, Y_2, Z_2 de richtingscosinussen der normaal in het punt (u, v) van S_2, dan is:

$$X_2 = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial y_2}{\partial u} \frac{\partial z_2}{\partial v} - \frac{\partial z_2}{\partial u} \frac{\partial y_2}{\partial v} \right\} \text{ enz.}$$

derhalve:

$$\frac{D_1'}{H} = \Sigma X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} = - \Sigma \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u}$$

$$\frac{D_2'}{H} = \Sigma X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} = - \Sigma \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} = - \Sigma \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u}$$

$$\frac{D_3'}{H} = \Sigma X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} = - \Sigma \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v}$$

waarin $H^2 = EG - F^2$.

Nu is de normaal van het oppervlak S_2 in 't punt (u, v) evenwijdig aan de binormaal der kromme (α) in het overeenstemmende punt van S_1, omdat de beide focaalvlakken door den straal, die deze beide punten verbindt, zijn het raakvlak aan S_1 in (u, v) en het osculatievlak der kromme (α) in dat punt, welk laatste vlak raakvlak aan S_2 is. Is nu φ de hoek, door die beide focaalvlakken gevormd en zijn X, Y, Z, de richtingscosinussen der normaal van S_1 in het beschouwde punt, dan heeft men:

$$\Sigma X_2 X_1 = \cos \varphi$$

$$\Sigma X_2 \left\{ \frac{\cos \alpha}{C} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\sin \alpha}{A} \frac{\partial x_1}{\partial u} \right\} = \sin \varphi$$

$$\Sigma X_2 \left\{ \frac{\cos \alpha}{A} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\sin \alpha}{C} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right\} = 0$$

waarvan de laatste uitdrukt, dat de binormaal der kromme (α) loodrecht is op de raaklijn dier kromme, terwijl de tweede aangeeft, dat de binormaal met de raaklijn der kromme $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ een hoek gelijk $\frac{\pi}{2} - \varphi$ maakt. Uit deze vergelijkingen volgt:

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = X_1 \cos\varphi + \xi \sin\varphi \\ Y_2 = Y_1 \cos\varphi + \eta \sin\varphi \\ Z_2 = Z_1 \cos\varphi + \zeta \sin\varphi \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (54)$$

waarin:

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\sin\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} \text{ enz.}$$

Met behulp van de bovenstaande uitdrukkingen voor X_2, Y_2, Z_2 en die welke boven voor x_2, y_2, z_2 werden gevonden, heeft men nu:

$$\frac{D_1'}{H} = -\Sigma\frac{\partial X_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} = -\left\{\frac{\partial X_2}{\partial u}\cos\varphi + \frac{\partial\xi}{\partial u}\sin\varphi - \right.$$

$$\left. -\left(X_1 \sin\varphi - \xi\cos\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial u} + \varrho_\alpha\frac{\partial X}{\partial u} + X\frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (55)$$

benevens dergelijke uitdrukkingen voor $\frac{D_2'}{H}$, $\frac{D_3'}{H}$.

Ten einde het tweede lid om te zetten in een vorm, die alleen grootheden bevat, welke betrekking hebben op het gegeven oppervlak S_1 en het stralenstelsel, moeten de producten als

$$\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}$$

enz. daarin worden uitgedrukt. Vrij eenvoudig kan dit geschieden door op te merken, dat elk der vormen

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}, \frac{\partial X_1}{\partial v}, \frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$$

enz. beschouwd kan worden als eene lineaire functie van X_1, $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial x_1}{\partial v}$, waarbij de coëfficienten eenvoudige waarden hebben, die van de fundamenteele grootheden voor S_1 en het stralenstelsel afhangen. Stelt men toch:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = aX_1 + b\frac{\partial x_1}{\partial u} + c\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = aY_1 + b\frac{\partial y_1}{\partial u} + c\frac{\partial y_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial u} = aZ_1 + b\frac{\partial z_1}{\partial u} + c\frac{\partial z_1}{\partial v}.$$

Vermenigvuldigt men nu die vergelijkingen achtereenvolgens met X_1, Y_1, Z_1, daarna met $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u}$ en eindelijk met $\frac{\partial x_1}{\partial v}$, $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, $\frac{\partial z_1}{\partial v}$ en telt telkens de resultaten samen, dan vindt men:

$$a = 0, \qquad b = -\frac{D_1}{A_3 C}, \qquad C = -\frac{D_2}{AC^3}.$$

Stelt men evenzoo:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = aX_1 + b\frac{\partial x_1}{\partial u} + c\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = aY_1 + b\frac{\partial y_1}{\partial u} + c\frac{\partial y_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = aZ_1 + b\frac{\partial z_1}{\partial u} + c\frac{\partial z_1}{\partial v}$$

en vermenigvuldigt deze achtereenvolgens met dezelfde factoren als boven, dan vindt men na optelling:

$$a = \frac{P_1}{AC}, \qquad b = -\frac{P \sin \alpha}{A}, \qquad c = \frac{P \cos a}{C}.$$

Op die wijze te werk gaande, verkrijgen wij dan:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{D_1}{A^3 C}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{D_2}{A C^3}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
\frac{\partial X_1}{\partial v} &= -\frac{D_2}{A^3 C}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{D_3}{A C^3}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\frac{P_1{}'}{AC} X_1 - \frac{P\cos\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{P\sin\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\frac{Q_1{}'}{AC} X_1 - \frac{Q\cos\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{Q\sin\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
\frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{P_1}{AC} X_1 - \frac{P\sin\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{P\cos\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
\frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{Q_1}{AC} X_1 - \frac{Q\sin\alpha}{A}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{Q\cos\alpha}{C}\frac{\partial x_1}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (56)$$

en analoge formules voor $\frac{\partial Y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ enz.

Substitueeren wij nu deze vormen in de formule (55) voor $\frac{D_1{}'}{H}$, dan gaat deze, na eenige herleiding over in:

$$\frac{D_1{}'}{H} = \cos\varphi \left\{ \frac{D_1}{AC} - \frac{PP_1{}'}{AC}\varrho_\alpha + \frac{P_1}{AC}\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u} \right\} +$$

$$+ \sin\varphi \left\{ A\,P\cos\alpha + \frac{P_1 P_1{}'}{A^2 C^2}\varrho_\alpha + P\frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u} \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{P_1\,\varrho_\alpha \sin\varphi}{AC} + (A\sin\alpha - P\varrho_\alpha)\cos\varphi \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Vervangt men hierin $\frac{D_1}{AC}$ door $\frac{P_1\cos\alpha}{C} + \frac{P_1{}'\sin\alpha}{AC}$ dan laat zich deze formule brengen in den meer eenvoudigen vorm:

$$\frac{D_1{}'}{H} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1{}'}{AC}\right\}\left\{\frac{P_1\,\varrho_\alpha\sin\varphi}{AC} + (A\sin\alpha - P\varrho_\alpha)\cos\varphi\right\} +$$

$$+ \left\{ A\cos\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right\}\left\{ P\sin\varphi + \frac{P_1\cos\varphi}{AC}\right\}.$$

Vervangt men hierin $A \sin\alpha - P\,\varrho_\alpha$ door $\dfrac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,r_\alpha}$, (bij de berekening der fundamentaalgrootheden van de eerste orde bleek reeds de gelijkheid dezer beide uitdrukkingen), verder P door $\dfrac{A \sin\alpha}{\varrho_\alpha} - \dfrac{P_1\,R_\alpha}{A\,C\,r_\alpha}$ en merkt op, dat, wijl φ de hoek is tusschen het osculatievlak der kromme (α) in 't punt (u, v) en het raakvlak van 't oppervlak in dat punt, $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ de hoek zal zijn tusschen de normaal van 't oppervlak en de hoofdnormaal der kromme (α), waaruit volgt:

$$h_\alpha = R_\alpha \sin\varphi \qquad\qquad h_\alpha = r_\alpha \cos\varphi$$

dan gaat de laatst gevonden vorm voor $\dfrac{D_1'}{H}$ over in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D_1'}{H} &= \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC}\right\}\frac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha} + \left\{A\cos\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right\}\frac{A h_\alpha \sin\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha}\\
&\text{en evenzoo:}\\
\frac{D_2'}{H} &= \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC}\right\}\frac{Q_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha} + \left\{C\sin\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial v}\right\}\frac{A h_\alpha \sin\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha}\\
&= \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{Q_1'}{AC}\right\}\frac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha} - \left\{A\cos\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial u}\right\}\frac{C h_\alpha \cos\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha}\\
\frac{D_3'}{H} &= \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC}\right\}\frac{Q_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha} - \left\{C\sin\alpha + \frac{\partial\varrho_\alpha}{\partial v}\right\}\frac{C h_\alpha \cos\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(57)$$

Hieruit laat zich nu dadelijk eene uitdrukking afleiden voor de totale kromming in een punt (u, v) van het tweede brandoppervlak S_2. Daartoe hebben wij slechts in de bekende formule voor die kromming, n.l.

$$K_2 = \frac{D_1'\,D_3' - D_2'^2}{H^4}$$

de bovengevonden waarden voor de fundamenteele grootheden der eerste en tweede orde, behoorende bij het oppervlak S_2, te substitueeren. Stellen wij nu ter vereenvoudiging:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{P_1'}{A\,C}=p & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{Q_1'}{A\,C}=q \\ A\cos\alpha+\dfrac{\partial\,\varrho_\alpha}{\partial u}=m_1 & C\sin\alpha+\dfrac{\partial\,\varrho_\alpha}{\partial v}=m_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (58)$$

dan gaan de voor die grootheden gevonden vormen over in:

$$\left.\begin{array}{l} E=m_1{}^2+\dfrac{P_1{}^2\,\varrho_\alpha{}^2\,R_\alpha{}^2}{A^2\,C^2\,h_\alpha{}^2} \qquad G=m_2{}^2+\dfrac{Q_1{}^2\,\varrho_\alpha{}^2\,R_\alpha{}^2}{A^2\,C^2\,h_\alpha{}^2} \\ F=m_1\,m_2+\dfrac{P_1\,Q_1\,\varrho_\alpha{}^2\,R_\alpha{}^2}{A^2\,C^2\,h_\alpha{}^2} \\ \dfrac{D_1'}{H}=p\,\dfrac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha}+m_1\,\dfrac{A\,h_\alpha\sin\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha} \\ \dfrac{D_2'}{H}=p\,\dfrac{Q_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha}+m_2\,\dfrac{A\,h_\alpha\sin\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha} \\ \qquad =q\,\dfrac{P_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha}-m_1\,\dfrac{C\,h_\alpha\cos\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha} \\ \dfrac{D_3'}{H}=q\,\dfrac{Q_1\,\varrho_\alpha\,R_\alpha}{A\,C\,h_\alpha}-m_2\,\dfrac{C\,h_\alpha\cos\alpha}{\varrho_\alpha\,R_\alpha} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (59)$$

Met behulp hiervan heeft men nu dadelijk:

$$H^2=E\,G-F^2=(Q_1\,m_1-P_1\,m_2)^2\,\frac{\varrho_\alpha{}^2\,R_\alpha{}^2}{A^2\,C^2\,h_\alpha{}^2}$$

en:

$$\frac{D_1'\,D_3'-D_2'^2}{H^2}=\Big(Q_1\,m_1-P_1\,m_2\Big)\Big(\frac{q\sin\alpha}{C}+\frac{p\cos\alpha}{A}\Big)$$

waaruit voor de totale kromming K_2 van het oppervlak S_2 volgt:

$$K_2 = \frac{A^2 C^2 h_\alpha^2}{\varrho_\alpha^2 R_\alpha^2} \frac{q \frac{\sin\alpha}{C} + \frac{p\cos\alpha}{A}}{Q_1 m_1 - P_1 m_2}$$

$$= \frac{A\, C \sin^2\varphi}{\varrho_\alpha^2} \frac{A\, q \sin\alpha + C\, p\cos\alpha}{Q_1 m_1 - P_1 m_2} \quad \ldots\, {}^{1)}\ (60)$$

De, in het voorgaande gevonden, algemeene uitdrukkingen voor de fundamenteele grootheden der tweede orde en de totale kromming van het oppervlak S_2 worden veel eenvoudiger, wanneer men op S_1 in plaats van als parameterkrommen aan te nemen een willekeurig stelsel orthogonale krommen, de kromtelijnen als zoodanig aanneemt en boven-

---

[1]) De hier ingevoerde grootheden m_1 en m_2 hebben eene eenvoudige meetkundige beteekenis. De raaklijn der kromme $v = $ Const. op het tweede brandoppervlak maakt met de coördinaatassen hoeken, welker cosinussen zijn:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x_2}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y_2}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z_2}{\partial u}.$$

De hoek α_1, gevormd door den straal van het stelsel, gaande door een punt (u, v) van S_2 met de door dat punt gaande kromme $v = $ Const, wordt dan bepaald door:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \Sigma X \frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \Sigma X \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u} + \varrho_\alpha \frac{\partial X}{\partial u} + X \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(A \cos\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial u} \right).$$

Evenzoo vindt men:

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(C \sin\alpha + \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v} \right).$$

Derhalve heeft men:

$$m_1 = \sqrt{E} \cos\alpha_1 \qquad m_2 = \sqrt{G} \sin\alpha_1.$$

dien nog een bijzonder stralenstelsel, nl. dat, hetwelk gevormd wordt door de raaklijnen der kromtelijnen van één stelsel, bijv. $v = \text{Const}$, beschouwt. In dat geval toch moet $D_2 = 0$, $\alpha = 0$ worden gesteld, waaruit volgt:

$$P_1 = \frac{D_1}{A}, \ Q_1 = 0, \ P_1' = 0, \ Q_1' = -\frac{D_3}{C},$$

zoodat men verkrijgt:

$$\frac{D_1'}{H} = \frac{D_1 \varrho_\alpha R_\alpha}{A^2 C h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad D_2' = 0; \quad \frac{D_3'}{H} = -\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v} \frac{C h_\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha}$$

en:

$$K_2 = -\frac{A^2 C^2 \sin^2 \varphi}{\varrho_\alpha^2 D_1} \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v}}$$

Uit het feit, dat hier gevonden wordt $D_2' = 0$ volgt, dat de krommen $u = \text{Const}$, $v = \text{Const}$, die op het tweede brandoppervlak overeenstemmen met de kromtelijnen van het eerste, toegevoegde krommen zijn. Men had dit ook uit de vroeger bewezen eigenschap, dat nl. de beide stelsels ontwikkelbare oppervlakken van een stralenstelsel op elk der focaaloppervlakken twee stelsels van toegevoegde krommen bepalen, kunnen afleiden.

In dit bijzondere geval, zullen de vergelijkingen der asymptotische lijnen op de beide brandoppervlakken S_1 en S_2 worden bepaald door de beide vergelijkingen:

$$D_1\, du^2 + D_3\, dv^2 = 0$$

en:

$$\frac{D_1 \varrho_\alpha R_\alpha}{A^2 C h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 - \frac{C h_\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v} dv^2 = 0.$$

De asymptotische lijnen op die beide oppervlakken zullen derhalve overeenstemmende krommen zijn, wanneer aan de betrekking:

$$\frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{A^2 C h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \frac{C h_\alpha}{D_3 \varrho_\alpha R_\alpha} \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v}$$

voldaan is.

Doch hieruit volgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial v} = - \frac{A^2 C^2 h_\alpha^2}{D_3 \varrho_\alpha^2 R_\alpha^2} = - \frac{A^2 C^2 \sin^2 \varphi}{D_3 \varrho_\alpha^2}.$$

De totale kromming van S_2 gaat daardoor over in:

$$K_2 = \frac{A^4 C^4 \sin^4 \varphi}{D_1 D_3 \varrho_\alpha^4} = \frac{1}{K_1} \frac{\sin^4 \varphi}{\varrho_\alpha^4}$$

of:

$$K_1 K_2 = \frac{\sin^4 \varphi}{\varrho_\alpha^4}$$

waarin $K_1 = \frac{A^4 C^4}{D_1 D_3}$ de totale kromming van het eerste brandoppervlak S_1 voorstelt. Het tweede lid in deze vergelijking is het omgekeerde der vierde macht van den afstand der op een straal van het stelsel gelegen grenspunten. Zijn toch r_1 en r_2 de abscissen dier grenspunten, dan vonden wij vroeger (46):

$$r_1 + r_2 = \varrho_\alpha \qquad r_1 r_2 = - \frac{\varrho_\alpha^2 R_\alpha^2}{4 r_\alpha^2}$$

derhalve:

$$(r_1 - r_2)^2 = \varrho_\alpha^2 \left\{ 1 + \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right\} = \frac{\varrho_\alpha^2}{\sin^2 \varphi}$$

en:

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4} \quad . \; . \; . \; . \quad (61)$$

Heeft men dus het stralenstelsel, gevormd door de raaklijnen van een stelsel kromtelijnen op een oppervlak en zijn de asymptotische lijnen op de beide brandoppervlakken correspondeerende krommen, dan zal het product der totale krommingen dier oppervlakken in overeenstemmende punten gelijk zijn aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der grenspunten op den straal van 't stelsel, die deze beide punten verbindt.

Ook in het meer algemeene geval, dat het beschouwde stralenstelsel gevormd wordt door de raaklijnen aan de willekeurige krommen (α) op het oppervlak S'_1 geldt dezelfde eigenschap. Ten einde dit aan te toonen, berekenen wij eerst de waarden der vormen:

$$D_1 D_2' - D_2 D_1', \quad D_2 D_3' - D_3 D_2',$$
$$D_3 D_1' - D_2 D_2', \text{ en } D_1 D'_3 - D_2 D_2',$$

die wij in 't volgende noodig hebben. Met het oog op de voor D_1', D_2', D_3' in (59) gevonden waarden, heeft men

$$\frac{D_1 D_2' - D_2 D_1'}{H} = \frac{p \varrho_\alpha R_\alpha}{AC h_\alpha} \left\{ Q_1 D_1 - P_1 D_2 \right\} +$$
$$+ \frac{A h_\alpha \sin\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \left\{ D_1 m_2 - D_2 m_1 \right\}.$$

Maar, wijl:

$$P_1 = \frac{D_1 \cos\alpha}{A} + \frac{D_2 \sin\alpha}{C}, \quad Q_1 = \frac{D_2 \cos\alpha}{A} + \frac{D_3 \sin\alpha}{C}, \text{ is:}$$

$$Q_1 D_1 - P_1 D_2 = \frac{\sin\alpha}{C} \left\{ D_1 D_3 - D_2{}^2 \right\} = A^4 C^3 K_1 \sin\alpha.$$

Derhalve verkrijgt men:

$$\frac{D_1 D_2' - D_2 D_1'}{H} = p \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} A^3 C^2 K_1 \sin\alpha + \frac{A h_\alpha \sin\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{D_1 m_2 - D_2 m_1\}$$

En op dezelfde wijze zal men vinden:

$$\frac{D_2 D_3' - D_3 D_2'}{H} = -q \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} A^2 C^3 K_1 \cos\alpha - \frac{C h_\alpha \cos\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{D_2 m_2 - D_3 m_1\}$$

$$\frac{D_3 D_1' - D_2 D_2'}{H} = p \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} A^2 C^3 K_1 \cos\alpha + \frac{A h_\alpha \sin\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{D_3 m_1 - D_2 m_2\}$$

$$\frac{D_1 D_3' - D_2 D_2'}{H} = q \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} A^3 C^2 K_1 \sin\alpha - \frac{C h_\alpha \cos\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{D_1 m_2 - D_2 m_1\}$$

Heeft men nu een stralenstelsel, gevormd door de raaklijnen aan de krommen (α) op het oppervlak S_1, zoodanig, dat de asymptotische lijnen op de beide focaaloppervlakken S_1 en S_2 overeenstemmen, dan moet:

$$\frac{D_1}{D_1'} = \frac{D_2}{D_2'} = \frac{D_3}{D_3'}.$$

Doch daaruit volgt, gelet op de twee eerste der bovenstaande formules, wijl nu $D_1 D_2' - D_2 D_1'$ en $D_2 D_3' - D_3 D_2'$ beide nul zijn:

$$A^2 C^2 \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} K_1 \{ Cp\cos\alpha + Aq\sin\alpha \} =$$

$$= - \frac{h_\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{ m_2 (CD_1 \cos\alpha + AD_2 \sin\alpha) -$$

$$- m_1 (CD_2 \cos\alpha + AD_3 \sin\alpha) \}.$$

Of, wijl

$$CD_1 \cos\alpha + AD_2 \sin\alpha = AC.\, P_1,$$
$$CD_2 \cos\alpha + AD_3 \sin\alpha = AC.\, Q_1 \text{ is:}$$

$$\frac{Cp\cos\alpha + Aq\sin\alpha}{Q_1 m_1 - P_1 m_2} = \frac{h_\alpha^2}{\varrho_\alpha^2 R_\alpha^2 .\, AC.\, K_1} = \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_\alpha^2 .\, AC.\, K_1}$$

Substitueert men dit in de boven voor K_2 gevonden vorm, dan gaat deze daardoor over in

$$K_1\,K_2 = \frac{\mathrm{Sin}^4\varphi}{\varrho_\alpha{}^4}.$$

Derhalve:

Wanneer de asymptotische lijnen op de beide brandoppervlakken van een stralenstelsel overeenstemmende krommen van beide oppervlakken zijn, dan is het product der totale krommingen van die beide oppervlakken in overeenstemmende punten gelijk aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der beide grenspunten op den straal gelegen, die deze beide punten verbindt [1]).

Overeenstemmende punten van beide oppervlakken zijn hier, evenals in het voorgaande, die punten in welke zij door een zelfden straal van het stralenstelsel worden aangeraakt.

De juist bewezen eigenschap is voor uitbreiding vatbaar. Zijn de stralenstelsels zoodanig, dat met de beide stelsels asymptotische lijnen van een der brandoppervlakken, op het andere stelsels van toegevoegde krommen overeenstemmen, dan moet uit

$$D_1\,du^2 + 2\,D_2\,du\,dv + D_3\,dv^2 = 0$$

welke vergelijking de asymptotische lijnen van het eene brandoppervlak bepaalt, volgen:

$$D_1'\,\delta u\,\delta_1 u + D_2'\,(\delta u\,\delta_1 v + \delta v\,\delta_1 u) + D_3'\,\delta v\,\delta_1 v = 0$$

door welke vergelijking twee toegevoegde richtingen op

[1]) Ribaucour. Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. (Mémoires couronnés et publiés par l'Académie royale de Belgique; t. XLIV, 1881).

het andere bepaald worden. Lost men dus uit de eerste de beide waarden van $\frac{dv}{du}$ op, welke daaraan voldoen, dan moeten deze ook aan de laatste voldoen. De daartoe noodige en voldoende voorwaarde is:

$$D_3 D_1' - 2 D_2 D_2' + D_1 D_3' = 0$$

of

$$(D_3 D_1' - D_2 D_2') + (D_1 D_3' - D_2 D_2') = 0.$$

Substitueert men hierin de, op pag. 80, verkregen resultaten, dan wordt dit:

$$A^2 C^2 K_1 \frac{\varrho_\alpha R_\alpha}{h_\alpha} \{ Cp \cos \alpha + Aq \sin \alpha \} =$$

$$= \frac{-h_\alpha}{\varrho_\alpha R_\alpha} \{ m_1 (A D_3 \sin \alpha + C D_2 \cos \alpha) - m_2 (A D_2 \sin \alpha + C D_1 \cos \alpha) \}$$

waaruit:

$$\frac{Aq \sin \alpha + Cp \cos \alpha}{Q_1 m_1 - P_1 m_2} = - \frac{h_\alpha^2}{\varrho_\alpha^2 R_\alpha^2 A C K_1} = - \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_\alpha^2 A C K_1}.$$

De uitdrukking voor de totale kromming K_2 van het tweede brandoppervlak wordt dan:

$$K_2 = - \frac{\sin^4 \varphi}{\varrho_\alpha^4 K_1} \text{ of } K_1 K_2 = - \frac{\sin^4 \varphi}{\varrho_\alpha^4} \quad . \; . \; . \; . \; (62)$$

Derhalve:

Wanneer de asymptotische lijnen van het eene brandoppervlak van een stralenstelsel overeenstemmen met een stelsel toegevoegde krommen op het tweede brandoppervlak, is het product der totale krommingen van die beide oppervlakken in correspondeerende punten gelijk aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der grenspunten, *gelegen op den straal, die de beide punten verbindt, met het negatieve teeken* [2]).

Omgekeerd zullen, als een stralenstelsel zoodanig is, dat het product der totale krommingen van de beide brandoppervlakken in de beide punten, in welke zij door een zelfden straal worden aangeraakt, gelijk is aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der op dien straal gelegen grenspunten, de asymptotische lijnen dier brandoppervlakken correspondeerende krommen zijn. Opdat dit toch plaats vindt, is noodig en voldoende:

$$D_1 D_2' - D_2 D_1' = 0 \qquad D_2 D_3' - D_3 D_2' = 0.$$

Nu is gegeven voor het product der totale krommingen in overeenstemmende punten der brandoppervlakken:

$$K_2 K_1 = \left(\frac{\sin\varphi}{\varrho_\alpha}\right)^4$$

d. i. wanneer men hierin K_1 door $\dfrac{D_1 D_3 - D_2^2}{A^4 C^4}$ en K_2 door de waarde uit (60) vervangt:

$$Q_1 m_1 - P_1 m_2 =$$

$$= \frac{D_1 D_3 - D_2^2}{A^2 C^2} \frac{\varrho_\alpha^2}{\sin^2\varphi} \left\{ \frac{\cos\alpha}{A}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC}\right) + \frac{\sin\alpha}{C}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC}\right)\right\}.$$

Bovendien vindt men door gelijkstelling der beide, boven voor $\dfrac{D_2'}{H}$ verkregen, uitdrukkingen:

$$C\cos\alpha . m_1 + A\sin\alpha . m_2 =$$

$$= \frac{\varrho_\alpha^2}{AC\sin^2\varphi}\left\{P_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC}\right) - Q_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC}\right)\right\}.$$

---

[1]) Waelsch. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. T. 118.

Lost men uit deze beide vergelijkingen m_1 en m_2 op, dan heeft men:

$$m_1 = \frac{\varrho_\alpha^2}{A^2 C^2 \sin^2\varphi} \left\{ D_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC} \right) - D_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC} \right) \right\}$$

$$m_2 = \frac{\varrho_\alpha^2}{A^2 C^2 \sin^2\varphi} \left\{ D_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC} \right) - D_3 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC} \right) \right\}.$$

En hieruit volgt onmiddellijk:

$$D_1 m_2 - D_2 m_1 = -\frac{D_1 D_3 - D_2^2}{A^2 C^2} \frac{\varrho_\alpha^2}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{P_1'}{AC} \right).$$

$$D_2 m_2 - D_3 m_1 = -\frac{D_1 D_3 - D_2^2}{A^2 C^2} \frac{\varrho_\alpha^2}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{Q_1'}{AC} \right).$$

d. i. blijkens het voorgaande

$$D_1 D_2' - D_2 D_1' = 0 \qquad D_2 D_3' - D_3 D_2' = 0$$ [1]).

---

[1]) In Deel CXVIII van de Comptes rendus de l'Académie des Sciences komen een drietal korte mededeelingen van de heeren Demoulin, Cosserat en Waelsch voor over metrische eigenschappen van stralenstelsels. In de eerste beschouwt Demoulin drie soorten van stralenstelsels en wel:

1e die, bij welke op de beide brandoppervlakken de asymptotische lijnen correspondeerende krommen zijn.

2e die, bij welke op deze oppervlakken de kromtelijnen correspondeerende krommen zijn.

3e die, bij welke de asymptotische lijnen op het eene oppervlak correspondeeren met de kromtelijnen op het tweede.

Volgens hem is voor elk dezer drie stralenstelsels het product der totale krommingen van de brandoppervlakken in twee overeenstemmende punten:

$$K_1 K_2 = \left(\frac{\sin\varphi}{\varrho_\alpha} \right)^4.$$

Voor de eerste soort stralenstelsels is dit niets anders dan de eigenschap, die het eerst door Ribaucour is bewezen. Bij het door hem gegeven bewijs gaat Demoulin uit van enkele eenvoudige eigenschappen van regelvlakken.

De tweede soort stralenstelsels is dezelfde als de eerste. Gemakkelijk

Onder de stralenstelsels, die de in het voorgaande behandeldē eigenschappen bezitten, komen voor de pseudo-

---

toont men nog iets meer algemeen aan, dat, wanneer de kromtelijnen van het eene brandoppervlak overeenstemmen met een stelsel toegevoegde krommen op het tweede, ook de asymptotische lijnen zullen overeenstemmen. Neemt men toch op het eene brandoppervlak S_1 de kromtelijnen als parameterkrommen $u=$ Const, $v=$ Const aan, dan is $D_2=0$. Wijl nu met deze krommen overeenstemmen een stelsel toegevoegde krommen op het tweede brandoppervlak, is ook $D_2'=0$. Dit geeft met het oog op de vroeger voor D_2' gevonden uitdrukkingen (59):

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{P_1'}{AC}\right\}\frac{Q_1\,\varrho\alpha}{AC\sin\varphi}+m_2\,\frac{A\sin\alpha\,\sin\varphi}{\varrho\alpha}=0$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{Q_1'}{AC}\right\}\frac{P_1\,\varrho\alpha}{AC\sin\varphi}-m_1\,\frac{C\cos\alpha\,\sin\varphi}{\varrho\alpha}=0$$

of

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{P_1'}{AC}=-\,m_2\,\frac{A^2C\sin\alpha\sin^2\varphi}{Q_1\,\varrho\alpha^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{Q_1'}{AC}=m_1\,\frac{AC^2\cos\alpha\sin^2\varphi}{P_1\,\varrho\alpha^2}.$$

Met behulp daarvan gaan de uitdrukkingen voor D_1' en D_3' over in

$$\frac{D_1'}{H}=-\,m_2\,\frac{AP_1\sin\varphi\sin\alpha}{Q_1\,\varrho\alpha}+m_1\,\frac{A\sin\alpha\sin\varphi}{\varrho\alpha}=\frac{A\sin\alpha\sin\varphi}{Q_1\,\varrho\alpha}\left\{Q_1\,m_1-P_1\,m_2\right\}$$

$$\frac{D_3'}{H}=m_1\,\frac{CQ_1\sin\varphi\cos\alpha}{P_1\,\varrho\alpha}-m_2\,\frac{C\cos\alpha\sin\varphi}{\varrho\alpha}=\frac{C\cos\alpha\sin\varphi}{P_1\,\varrho\alpha}\left\{Q_1\,m_1-P_1\,m_2\right\}$$

en hieruit volgt:

$$\frac{D_1'}{D_3'}=\frac{AP_1\sin\alpha}{CQ_1\cos\alpha}=\frac{D_1}{D_3}$$

wijl $P_1=\dfrac{D_1\cos\alpha}{A}$, $Q_1=\dfrac{D_3\sin\alpha}{C}$ is. Doch dit drukt juist uit, dat de asymptotische lijnen op beide brandoppervlakken overeenstemmen.

Voor de derde soort stralenstelsels is niet, zooals Demoulin beweert:

spherische stralenstelsels, die ter loops reeds genoemd zijn. Een stralenstelsel wordt een pseudospherisch stralenstelsel genoemd, wanneer zoowel de afstand der brandpunten, als die der grenspunten op een straal van het stelsel gelegen, constant is. Wijl voor zulk een stelsel ϱ_α constant moet zijn, evenals $\frac{R_\alpha}{r_\alpha}$ of $\cot \varphi$, zooals uit de vergelijking ter bepaling van de abscissen der, op een straal gelegen, grenspunten blijkt, zal de algemeene formule voor de totale kromming van S_2 hier worden:

$$K_2 = \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_\alpha^{\,2}} \frac{Q_1{}' A \sin \alpha + P_1{}' C \cos \alpha}{Q_1 A \cos \alpha - P_1 C \sin \alpha}.$$

Voert men hierin de waarden van P_1 enz. in, dan vindt men voor de waarde der tweede breuk -1 en dus:

$$K_2 = -\frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_\alpha^{\,2}}.$$

Wijl zoowel φ als ϱ_α constant zijn, is het brandoppervlak S_2 een oppervlak van constante negatieve kromming; hetzelfde vindt men voor S_1, door bijv. S_2 als het oorspronkelijk gegeven oppervlak aan te nemen. Derhalve heeft men de eigenschap:

$$K_1 K_2 = \left(\frac{\sin \varphi}{\varrho_\alpha}\right)^4 \text{ doch } K_1 K_2 = -\left(\frac{\sin \varphi}{\varrho_\alpha}\right)^4,$$

hetgeen onmiddellijk uit de, door Waelsch bewezen eigenschap, voortvloeit.

In de mededeeling van Cosserat, voorkomende in het bovengenoemde deel der Comptes-rendus wordt voor de eerste maal bewezen, dat de, door Ribaucour gevonden, eigenschap voor stralenstelsels, waarbij de asymptotische lijnen op S_1 en S_2 overeenstemmen, mag worden omgekeerd, dat zij dus karakteristiek is voor die stralenstelsels.

De brandoppervlakken van een pseudospherisch stralenstelsel zijn pseudospherische oppervlakken, die dezelfde constante, negatieve kromming hebben. Die kromming zal gelijk zijn aan het omgekeerde der tweede macht van den constanten afstand der grenspunten, met het negatieve teeken genomen.

Bij deze stralenstelsels zullen de asymptotische lijnen der beide brandoppervlakken overeenstemmende krommen zijn. Dit volgt onmiddellijk uit de omkeerbaarheid van de stelling van Ribaucour, doch kan ook als volgt direct worden aangetoond. Nemen wij op het pseudospherische oppervlak S_1 de kromtelijnen als parameterkrommen aan, dan is $D_2 = 0$. Dit geeft de volgende vereenvoudigingen:

$$P_1 = \frac{D_1 \cos\alpha}{A}, \quad Q_1 = \frac{D_3 \sin\alpha}{C}, \quad P_1{}' = \frac{D_1 \sin\alpha}{A}, \quad Q_1{}' = -\frac{D_3 \cos\alpha}{C},$$

$$p = \frac{D_1 \sin\alpha}{A^2\, C}, \quad q = -\frac{D_3 \cos\alpha}{AC^2}, \quad m_1 = A\cos\alpha, \quad m_2 = C \sin\alpha.$$

Ten gevolge daarvan gaan de fundamenteele grootheden $E \ldots . D_3{}'$ van het tweede brandoppervlak S_2, die bepaald worden door de formule (59) over in

$$E = A^2 \cos^2\alpha + \frac{D_1{}^2\, \varrho_\alpha{}^2 \cos^2\alpha}{A^4\, C^2 \sin^2\varphi}$$

d. i. wijl

$$\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_\alpha{}^2} = -K_1 = -\frac{D_1\, D_3}{A^4\, C^4} \text{ is:}$$

$$\left.\begin{aligned}
&E = \frac{\cos^2\alpha}{D_3}(A^2 D_3 - C^2 D_1).\\
&\text{Evenzoo vindt men:}\\
&F = 0,\ G = -\frac{\sin^2\alpha}{D_1}(A^2 D_3 - C^2 D_1).\\
&\text{Verder:}\\
&D_1' = \frac{D_1^{\,2}\,\varrho_\alpha \sin\alpha\cos\alpha}{A^4\,C^2\sin\varphi} + \frac{A^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi}{\varrho_\alpha}\\
&\quad = \frac{\varrho_\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{A^2\,C^2\sin\varphi}\left\{\frac{D_1^{\,2}}{A^2} + A^2\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_\alpha^{\,2}}\right\}\\
&\quad = \frac{\varrho_\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{A^2\,C^2\sin\varphi}\left\{\frac{D_1}{A^2} - \frac{D_3}{C^2}\right\}D_1\\
&\text{terwijl men op analoge wijze verkrijgt:}\\
&D_2' = 0,\ D_3' = \frac{\varrho_\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{A^2\,C^2\sin\varphi}\left\{\frac{D_1}{A^2} - \frac{D_3}{C^2}\right\}D_3.
\end{aligned}\right\}\ \ldots.(63)$$

Uit deze formules blijkt nu onmiddellijk, dat de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen op het tweede brandoppervlak S_2, nl.

$$D_1'\,du^2 + 2\,D_2'\,du\,dv + D_3'\,dv^2 = 0$$

zich reduceert tot:

$$D_1\,du^2 + D_3\,dv^2 = 0$$

m. a. w., dat de asymptotische lijnen op beide brandoppervlakken correspondeerende krommen zullen zijn. Doch bovendien is $D_2' = 0$, $F = 0$, derhalve zullen de krommen $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$ op S_2 een orthogonaal stelsel van verwante krommen bepalen, d. w. z. ook de kromtelijnen der beide brandoppervlakken zijn correspondeerende krommen, terwijl daaruit dan verder volgt, dat met elk stelsel van verwante krommen op het eene brandoppervlak een dergelijk stelsel op het andere overeenstemt.

Doch bovendien blijkt nog, dat correspondeerende bogen der asymptotische krommen op de beide brandoppervlakken dezelfde lengte hebben. Immers, de lijnelementen op beide oppervlakken worden bepaald door:

$$ds_1^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$$

$$ds_2^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

$$= (A^2 D_3 - C^2 D_1)\left(\frac{\cos^2\alpha}{D_3}du^2 - \frac{\sin^2\alpha}{D_1}dv^2\right).$$

Deze lijnelementen zijn dan alleen aan elkander gelijk, wanneer voldaan is aan de betrekkingen:

$$A^2 = (A^2 D_3 - C^2 D_1)\,\frac{\cos^2\alpha}{D_3};\; C^2 = -(A^2 D_3 - C^2 D_1)\frac{\sin^2\alpha}{D_1}.$$

Uit beide volgt:

$$A^2\, D_3 \sin^2\alpha + C^2\, D_1 \cos^2\alpha = 0.$$

Doch dit geeft, wanneer men $\frac{D_1 \cos\alpha}{A}$ door P_1, $\frac{D_3 \sin\alpha}{C}$ door Q_1 vervangt, de vroeger, op pag. 39, gevonden vergelijking der asymptotische lijnen van het oppervlak S_1. Derhalve:

Heeft men een pseudospherisch stralenstelsel, dan zullen de asymptotische lijnen der beide brandoppervlakken correspondeerende krommen zijn; dezelfde eigenschap geldt voor de k omtelijnen dier oppervlakken. Correspondeerende bogen der asymptotische krommen op die oppervlakken hebben dezelfde lengte.

In al het voorgaande werd aangenomen, dat pseudospherische stralenstelsels bestaan d. w. z. zulke stelsels, bij welke zoowel de afstand der op een straal gelegen brandpunten, als die der op dien straal liggende grenspunten constant is. Ten einde dit aan te toonen en tevens te doen zien, hoe men dergelijke stelsels kan verkrijgen, bepalen wij den hoek α, dien de raaklijnen aan een pseudospherisch oppervlak met de parameterkrommen $v =$ Const. moeten maken, opdat dit stelsel een pseudospherisch stralenstelsel zij, als functie van u en v. De voorwaarde daarvoor is, zooals uit de vergelijking (46) ter bepaling van de grenspunten volgt:

$$\varrho_\alpha = \frac{A\,Q_1 \sin\alpha + C\,P_1 \cos\alpha}{P\,Q_1 - P_1\,Q} = a$$

$$\frac{R_\alpha}{r_\alpha} = -\,A\,C\,\frac{C\,P\cos\alpha + A\,Q\sin\alpha}{C\,P_1\cos\alpha + A\,Q_1\sin\alpha} = m$$

waarin a en m constanten voorstellen.

Lost men uit beide vergelijkingen P en Q op, dan vindt men, P, Q, P_1 en Q_1 door hunne waarden vervangende, waarbij weder ondersteld wordt, dat de parameterkrommen samenvallen met de kromtelijnen van het eerste brandoppervlak S_1:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{A\sin\alpha}{a} - m\,\frac{D_1\cos\alpha}{A^2\,C}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} = -\,\frac{C\cos\alpha}{a} - m\,\frac{D_3\sin\alpha}{A\,C^2}$$

of

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial u} &= \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{A\sin\alpha}{a} - m\,\frac{D_1\cos\alpha}{A^2\,C} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial v} &= -\,\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{C\cos\alpha}{a} - m\,\frac{D_3\sin\alpha}{A\,C^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (64).$$

Zal het nu mogelijk zijn, uit deze beide vergelijkingen α als functie van u en v te bepalen, dan moet aan de integrabiliteitsvoorwaarde voldaan zijn, d.w.z. de beide waarden van $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}$, die men uit deze vergelijkingen kan afleiden moeten aan elkander gelijk zijn. Dit geeft:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial A}{\partial v}\sin\alpha - m\cos\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1}{A^2 C}\right)+$$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left\{\frac{A\cos\alpha}{a}+m\frac{D_1\sin\alpha}{A^2 C}\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)-\frac{1}{a}\frac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha - m\sin\alpha\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_3}{A C^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left\{\frac{C\sin\alpha}{a}-m\frac{D_3}{A C^2}\cos\alpha\right\}.$$

Substitueert men hierin de waarden van $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ en $\frac{\partial\alpha}{\partial v}$ uit (64), dan wordt dit na eenige herleiding:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)-\frac{A\,C}{a^2}-m^2\frac{D_1 D_3}{A^3 C^3}-$$

$$-m\cos\alpha\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1}{A^2 C}\right)-\frac{D_3}{A C^3}\frac{\partial A}{\partial v}\right\}-$$

$$-m\sin\alpha\left\{-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_3}{A C^2}\right)+\frac{D_1}{A^3 C}\frac{\partial C}{\partial u}\right\}=0.$$

Nu is, volgens de bekende formules van Gauss en Codazzi, die de betrekkingen geven, welke tusschen de fundamenteele grootheden A, C, D_1 en D_3 van het oppervlak S_1 bestaan [1]):

$$K=\frac{D_1 D_3}{A^4 C^4}=-\frac{1}{A\,C}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)\right\}$$

waarin K de totale kromming van het oppervlak S_1 voor-

[1]) Zie bijv. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S 90—91.

stelt, terwijl de coefficiënten van $m \cos \alpha$ en $m \sin \alpha$ nul zijn. Voert men dit in, dan gaat derhalve de gevonden voorwaarde over in:

$$-A\,C\,K - \frac{A\,C}{a^2} - m^2\,A\,C\,K = 0$$

waaruit volgt:

$$K = -\frac{1}{a^2\,(1 + m^2)}$$

De integrabiliteitsvoorwaarde der vergelijkingen (64) zegt dus niets anders, dan wat boven reeds langs anderen weg gevonden was, dat het brandoppervlak S_1 en evenzoo S_2 een pseudospherisch oppervlak moet zijn, terwijl de totale kromming van beide oppervlakken dezelfde is.

Is dus het pseudospherisch oppervlak, dat brandoppervlak van het te bepalen stelsel moet zijn, gegeven, dan vindt men den hoek α als functie van u en v uit (64). Daaruit volgt toch:

$$d\,\alpha = \left\{ \frac{1}{C}\,\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{A \sin \alpha}{a} - m\,\frac{D_1 \cos \alpha}{A^2\,C} \right\} du +$$
$$\left\{ -\frac{1}{A}\,\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{C \cos \alpha}{a} - m\,\frac{D_3 \sin \alpha}{A\,C^2} \right\} dv.$$

Voert men hier eene nieuwe veranderlijke in, door te stellen $w = tg\,\frac{\alpha}{2}$ en dus:

$$d\alpha = \frac{2\,dw}{1 + w^2}, \quad \sin \alpha = \frac{2\,w}{1 + w^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}$$

dan gaat deze vergelijking over in:

$$dw = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C}\,\frac{\partial A}{\partial v} \left(1 + w^2\right) + 2\,\frac{A}{a}\,w - \frac{m\,D_1}{A^2\,C} \left(1 - w^2\right) \right\} du$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{A}\,\frac{\partial C}{\partial u} \left(1 + w^2\right) - 2\,\frac{m\,D_3}{A\,C^2}\,w - \frac{C}{a} \right\} dv$$

Deze differentiaalvergelijking is van den vorm:

$$dw = (P + Qw + Rw^2)\,du + (P_1 + Q_1 w + R_1 w^2)\,dv \quad . \; . \; . \; (65)$$

waarin P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 bekende functies van u en v zijn. Door deze vergelijking, die van het type der vergelijkingen van Riccati is, wordt w en dus ook α als eene functie van u en v bepaald.

Derhalve: *Is een pseudospherisch oppervlak gegeven, dan zijn er* ∞^1 *pseudospherische stralenstelsels voor welke dit oppervlak een der beide focaaloppervlakken is. De krommen* (α) *op het gegeven oppervlak, welke door de stralen van het stelsel worden aangeraakt, worden bepaald door de vergelijking* (65).

Kiezen wij ter toepassing het oppervlak, dat bepaald wordt door de formules:

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u + \log tg \frac{u}{2}$$

welk oppervlak ontstaat door de tractrix $x = \sin u$, $z = \cos u + \log tg \frac{u}{2}$ om de as $O\,Z$ te laten wentelen.

In dat geval heeft men:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos u \cos v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos u \sin v \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\cos^2 u}{\sin u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\sin u \sin v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u \cos v \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sin u \cos v \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\sin u \sin v \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\frac{\cos u\,(1 + \sin^2 u)}{\sin^2 u}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\cos u \sin v \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \cos u \cos v \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sin u \cos v, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -\sin u \sin v \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

waaruit volgt:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \cot^2 u \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dx}{\partial v} = 0 \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \sin^2 u.$$

Het lijnelement van dit oppervlak heeft den vorm

$$ds^2 = \cot^2 u\, du^2 + \sin^2 u\, dv^2.$$

Verder wordt:

$$D_1 = -\frac{\cos^2 u}{\sin u}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = \cos^2 u \sin u$$

De parameterkrommen zijn hier, zooals ook onmiddellijk uit de voor x, y en z gegeven uitdrukkingen volgt, de kromtelijnen, terwijl de totale kromming van 't oppervlak zal zijn $\frac{D_1 D_3}{A^4 C^4} = -1$.

Werkelijk hebben wij dus hier met een pseudospherisch oppervlak te doen. De vergelijking (65) ter bepaling van $w = tg\,\frac{\alpha}{2}$ wordt in dit geval, wijl $A = \cot u$, $C = \sin u$ is:

$$dw = \frac{1}{2a}\left\{ -am\, w^2 + 2\, w \cot u + am \right\} du$$

$$+ \frac{1}{2a}\left\{ -a\, w^2 \sin u - 2\, am\, w \cos u - (1 + a) \sin u \right\} dv$$

Hier bestaat tusschen de beide constanten a en m nog eene betrekking. Immers de totale kromming van het oppervlak is in deze constanten uitgedrukt $K = -\frac{1}{a^2(1+m^2)}$; wijl echter die totale kromming voor het gegeven oppervlak gelijk -1 is, moet men hebben:

$$a^2(1 + m^2) = 1.$$

Elke integraal van de gevonden differentiaalvergelijking levert nu een pseudospherisch stralenstelsel op, waarvoor het gegeven oppervlak een der brandoppervlakken is.

De boven verkregen resultaten omtrent pseudospherische stralenstelsels en nog enkele andere kan men in een zeer symmetrischen vorm verkrijgen door invoering eener grootheid, die in het voorgaande niet werd beschouwd, den hoek namelijk, dien de beide door een punt van het pseudospherische oppervlak gaande asymptotische lijnen met elkander maken. Zij 2ω die hoek en nemen wij weder de kromtelijnen van het oppervlak tot parameterkrommen aan.

De cosinus van den hoek, gevormd door twee krommen op het oppervlak, die door een zeker punt (u, v) gaan, terwijl de richtingen der raaklijnen aan die beide krommen worden bepaald door $\left(\frac{dv}{du}\right)_1$ en $\left(\frac{dv}{du}\right)_2$, is gelijk aan:

$$\frac{A^2 + C^2\left(\frac{dv}{du}\right)_1\left(\frac{dv}{du}\right)_2}{\sqrt{\left\{A^2 + C^2\left(\frac{dv}{du}\right)_1^2\right\}\left\{A^2 + C^2\left(\frac{dv}{du}\right)_2^2\right\}}}.$$

Wijl nu de asymptotische lijnen van het oppervlak worden bepaald door $D_1\, du^2 + D_3\, dv^2 = 0$ is:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_1\left(\frac{dv}{du}\right)_2 = +\frac{D_1}{D_3};\ \left(\frac{dv}{du}\right)_1 + \left(\frac{dv}{du}\right)_2 = 0.$$

Daaruit volgt voor den hoek tusschen die krommen:

$$\cos 2\,\omega = \frac{A^2 D_3 + C^2\, D_1}{A^2 D_3 - C^2\, D_1}$$

$$\cos^2\omega = \frac{A^2\, D_3}{A^2\, D_3 - C^2 D_1};\ \sin^2\omega = \frac{-\,C^2\, D_1}{A^2 D_3 - C^2\, D_1}.$$

Het gegeven brandoppervlak is van constante negatieve kromming en kan vooraf door eene gelijkvormigheidstransformatie worden omgezet in een ander dergelijk oppervlak, waarvoor die kromming gelijk -1 wordt; dan is

$$D_1 D_3 = - A^4 C^4$$

Substitueert men dit in de, voor $\cos^2\omega$ en $\sin^2\omega$ gevonden, uitdrukkingen, dan geeft de eerste:

$$(A^2 D_3{}^2 + A^4 C^6) \cos^2 \omega = A^2 D_3{}^2$$

waaruit volgt:

$$D_3 = \pm AC^3 \cot \omega.$$

Evenzoo vindt men uit de tweede:

$$D_1 = \mp A^3 C \, tg \, \omega.$$

Welk teeken voor D_3 gekozen wordt, doet niets ter zake, wijl eene verandering van teeken eenvoudig daarop neerkomt, dat de hoek ω door zijn supplement wordt vervangen; wij nemen aan:

$$D_1 = - A^3 C \, tg \, \omega \qquad D_3 = + AC^3 \cot \omega.$$

Wijl tusschen de grootheden A, C, D_1 en D_3 de betrekkingen moeten bestaan, die aangegeven worden door de formules van Codazzi, is hier, evenals in 't voorgaande:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1}{A^2 C}\right) - \frac{D_3}{AC^3}\frac{\partial A}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_3}{AC^2}\right) - \frac{D_1}{A^3 C}\frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Substitueert men hierin de boven gevonden uitdrukkingen van D_1 en D_3 in functie van $A_1 C$ en ω, dan gaan zij over in

$$\frac{\partial}{\partial v}(- A \, tg \, \omega) - \cot \omega \frac{\partial A}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial u}(C \cot \omega) + tg \, \omega \frac{\partial C}{\partial u} = 0$$

of:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{1}{\cos \omega}\frac{\partial \cos \omega}{\partial v} = 0; \quad \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{1}{\sin \omega}\frac{\partial \sin \omega}{\partial u} = 0$$

waaruit volgt:

$$A = \varphi(u) \cos \omega \qquad C = \psi(v) \sin \omega.$$

Hierin is $\varphi(u)$ eene functie van u alleen, $\psi(v)$ eene functie van v alleen. Het lijnelement op het willekeurig aangenomen pseudospherische oppervlak kan derhalve steeds worden geschreven in den vorm:

$$ds_1{}^2 = \{\varphi(u) \cos \omega\}^2 du^2 + \{\psi(v) \sin \omega\}^2 dv^2$$

of, als men nieuwe parameters invoert, n.l. $\varphi(u)\,du$ door du_1 en $\psi(v)\,dv$ door dv_1 vervangt, in den vorm:

$$ds_1{}^2 = \cos^2\omega\, du_1{}^2 + \sin^2\omega\, dv_1{}^2$$

waarin ω den halven hoek voorstelt, door de asymptotische lijnen in een punt (u_1, v_1) met elkander gevormd.

De hoek ω voldoet hierbij aan de partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1{}^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v_1{}^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Dit blijkt onmiddellijk, wanneer men in de formule van G a u s s, die de totale kromming van het oppervlak in functie van A en C uitdrukt, nl.

$$K = -\frac{1}{AC}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v_1}\right)\right\}$$

$K = -1$, $A = \cos \omega$, $C = \sin \omega$ stelt.

Voor de fundamenteele grootheden der eerste orde E, F en G van het tweede brandoppervlak vindt men hier uit (63), wijl $D_1 = -\sin^2\omega \cos^2\omega$, $D_3 = \sin^2\omega \cos^2\omega$ is:

$$E = \cos^2\alpha, \qquad F = 0, \qquad G = \sin^2\alpha.$$

Het lijnelement op dit oppervlak S_2 wordt dus bepaald door:

$$ds_2{}^2 = \cos^2\alpha \, du_1{}^2 + \sin^2\alpha \, dv_1{}^2.$$

Uit dien vorm voor het lijnelement van S_2 volgt, dat ook de krommen $u_1 = \text{Const.}$ en $v_1 = \text{Const.}$ kromtelijnen op S_2 zullen zijn, terwijl α den halven hoek, door de asymptotische lijnen van S_2 met elkaar gevormd, voorstelt.

Derhalve:

De hoek tusschen de asymptotische lijnen in een zeker punt op een der brandoppervlakken van een pseudospherisch stralenstelsel is gelijk aan het dubbele van den hoek, dien de straal van het stelsel, door dit punt gaande, maakt met eene der kromtelijnen door het overeenkomstige punt op het andere brandoppervlak.

De asymptotische lijnen op de beide brandoppervlakken worden in dit geval bepaald door:

$$du_1{}^2 - dv_1{}^2 = 0 \text{ of } u_1 + v_1 = \text{Const.}, \; u_1 - v_1 = \text{Const.}$$

Neemt men nu die asymptotische lijnen als parameterkrommen $p = \text{Const.}$, $q = \text{Const.}$ aan, dan verkrijgen de lijnelementen der beide brandoppervlakken een anderen vorm, die men vindt door in de bovengevonden uitdrukkingen voor die lijnelementen te substitueeren: $du_1 = (dp + dq)$ en $dv_1 = (dp - dq)$. Daardoor gaan zij over in:

$$ds_1{}^2 = dp^2 + 2 \cos 2\omega \, dp \, dq + dq^2$$
$$ds_2{}^2 = dp^2 + 2 \cos 2\alpha \, dp \, dq + dq^2$$

en hieruit volgt weder de reeds boven bewezen eigenschap, dat namelijk de lijnelementen der asymptotische lijnen, welke men hieruit verkrijgt door p of $q = \text{Const.}$ te nemen, op beide brandoppervlakken aan elkander gelijk zijn.

Eindelijk geven de formules (64) ter bepaling van den hoek α, wanneer men in die formules $A = \cos \omega$ enz. substitueert en verder opmerkt dat de daarin optredende constanten a en m kunnen worden uitgedrukt in den constanten hoek φ, dien de beide brandvlakken, door een straal gaande, met elkaar maken, nl.

$$a = \sin\varphi \qquad m = \cot\varphi,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u_1} + \frac{\partial\omega}{\partial v_1} = \frac{\sin\alpha\cos\omega + \cos\alpha\sin\omega\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v_1} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\frac{\cos\alpha\sin\omega + \cos\omega\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Hierin is, wanneer men van een gegeven pseudospherisch oppervlak uitgaat, ω eene bekende functie van u_1 en v_1, terwijl φ eene constante is. Ook deze vergelijkingen nemen een meer symmetrischen vorm aan, wanneer men de asymptotische lijnen als parameterkrommen kiest. Dan toch worden zij, $u_1 + v_1 = 2p$ en $u_1 - v_1 = 2q$ stellende:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial p} + \frac{\partial\alpha}{\partial q} + \frac{\partial\omega}{\partial p} - \frac{\partial\omega}{\partial q}\right\} = \frac{\sin\alpha\cos\omega + \cos\alpha\sin\omega\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\alpha}{\partial q} + \frac{\partial\omega}{\partial p} + \frac{\partial\omega}{\partial q}\right\} = -\frac{\cos\alpha\sin\omega + \cos\omega\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Hieruit volgt door combinatie dezer beide vergelijkingen:

$$\frac{\partial(\alpha+\omega)}{\partial p} = \frac{\sin(\alpha-\omega)(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}\sin(\alpha-\omega)$$

$$\frac{\partial(\alpha-\omega)}{\partial q} = \frac{\sin(\alpha+\omega)(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \cot\frac{\varphi}{2}\sin(\alpha+\omega).$$

Van de integratie dezer beide partieele differentiaalvergelijkingen hangt nu het geheele vraagstuk der werkelijke bepaling van pseudospherische stralenstelsels, voor welke een gegeven pseudospherisch oppervlak een der brandoppervlakken is, af. Elke integraal dier vergelijking zal een dergelijk stelsel en daarmede ook het tweede brandoppervlak volkomen bepalen [1]).

Op bladzijde 81 werd eene eigenschap afgeleid van stralenstelsels, bij welke op de beide brandoppervlakken de asymptotische lijnen overeenstemmende krommen zijn. Er bleek, dat in dat geval het product der totale krommingen van die oppervlakken in twee overeenstemmende punten gelijk is aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der grenspunten, gelegen op den straal, die deze beide punten verbindt. Van zulke stralenstelsels, die in de theorie der oneindig kleine verbuigingen van oppervlakken een belangrijke rol spelen en waartoe o. a., blijkens het voorgaande, de pseudospherische stralenstelsels behooren, onderzoeken wij ten slotte nog de volgende:

Twee willekeurige ruimtekrommen K_1 en K_2 zijn gegeven. Wordt een willekeurig punt P_1 der eerste met een willekeurig punt P_2 van de tweede kromme verbonden en door het midden M van P_1P_2 eene lijn gebracht, evenwijdig aan de doorsnede der osculatievlakken der beide krommen in de punten P_1 en P_2, dan zal deze lijn, wanneer die punten de gegeven ruimtekrommen doorloopen, een stralenstelsel voortbrengen.

Laten de rechthoekige coördinaten van het punt P_1, in functie van een parameter u, waarvoor wordt aangenomen de lengte van den boog der kromme K_1, afgerekend van een vast punt dier kromme, worden uitgedrukt door de formules:

$$x = \varphi_1(u) \qquad y = \varphi_2(u) \qquad z = \varphi_3(u)$$

---

[1]) Zie over deze stralenstelsels o. a. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 451 en volg. Guichard. Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. t. VI, 3e Série.

terwijl a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; ϱ_1 en τ_1 achtereenvolgens voorstellen de richtingscosinussen van raaklijn, hoofdnormaal en binormaal, benevens den kromte- en den torsiestraal in een punt (u) der kromme K_1.

Evenzoo drukken

$$x = \psi_1(v) \qquad y = \psi_2(v) \qquad z = \psi_3(v)$$

de coördinaten van een punt P_2 der kromme K_2 uit in functie van een parameter v, waarvoor wij weder aannemen de lengte van den boog der kromme K_2, afgerekend van een vast punt dier kromme, terwijl a_1, a_1', a_1''; b_1, b_1', b_1''; c_1, c_1', c_1'', ϱ_2 en τ_2 voor deze kromme eene dergelijke beteekenis hebben als de analoge grootheden voor K_1.

De coördinaten van het punt M_1, midden van $P_1 P_2$, zijn:

$$x = \frac{1}{2}\left\{\varphi_1(u) + \psi_1(v)\right\}, \quad y = \frac{1}{2}\left\{\varphi_2(u) + \psi_2(v)\right\}$$
$$z = \frac{1}{2}\left\{\varphi_3(u) + \psi_3(v)\right\}$$

waaruit volgt, dat het punt M een translatieoppervlak doorloopt, dat ontstaan kan gedacht worden door een kromme, die congruent is met de kromme:

$$x = \frac{1}{2}\varphi_1(u) \qquad y = \frac{1}{2}\varphi_2(u) \qquad z = \frac{1}{2}\varphi_3(u)$$

eene translatiebeweging te geven, waarbij één en dus elk harer punten eene kromme doorloopt, congruent met de kromme:

$$x = \frac{1}{2}\psi_1(v) \qquad y = \frac{1}{2}\psi_2(v) \qquad z = \frac{1}{2}\psi_3(v)$$

en omgekeerd. Verder zijn de richtingscosinussen der snijlijn van de osculatievlakken der krommen K_1 en K_2 in de willekeurige punten P_1 en P_2:

$$X = \frac{c' c_1'' - c'' c_1'}{\sin \alpha} \quad Y = \frac{c'' c_1 - c c_1''}{\sin \alpha} \quad Z = \frac{c c_1' - c' c_1}{\sin \alpha}$$

waarin α de hoek is tusschen de binormalen of de osculatievlakken der krommen in die punten P_1 en P_2.

De stralen van het bovengenoemde stelsel worden nu bepaald door de vergelijkingen:

$$\xi = x + rX \qquad \eta = y + rY \qquad \zeta = z + rZ$$

waarin r de abscis van een punt op een der stralen, d. i. de afstand van dat punt tot het, op dien straal liggende, punt M is. Ter berekening van de fundamentaalgrootheden $e = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}$, $L = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$ enz. van dit stelsel, hebben wij:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} a \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} a' \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} a''$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} a_1 \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2} a_1' \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2} a_1''.$$

Verder:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ \sin \alpha \left(c_1'' \frac{dc'}{du} - c_1' \frac{dc''}{du} \right) - \right.$$
$$\left. - \left(c' c_1'' - c'' c_1' \right) \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\}.$$

Nu is volgens de bekende formules van Frenet:

$$\frac{dc}{du} = \frac{b}{\tau_1} \qquad \frac{dc'}{du} = \frac{b'}{\tau_1} \qquad \frac{dc''}{du} = \frac{b''}{\tau_1}$$

terwijl $\cos \alpha = c c_1 + c' c_1' + c'' c_1''$ en dus $- \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{1}{\tau_1} (b c_1 + b' c_1' + b'' c_1'')$ is.

Substitueeren wij dit in de juist voor $\frac{\partial X}{\partial u}$ gevonden uitdrukking, dan gaat deze daardoor over in:

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1}{\tau_1 \sin\alpha}\left(b' c_1'' - b'' c_1'\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_1 \sin^3\alpha}\left(c' c_1'' - c'' c_1'\right)\cos\gamma$$

waarbij $b\, c_1 + b'\, c_1' + b''\, c_1''$ d.i. de cosinus van den hoek tusschen de hoofdnormaal der kromme K_1 in P_1 met de binormaal der kromme K_2 in P_2 gelijk $\cos\gamma$ gesteld is. Evenzoo stellen wij nog:

$$b_1\, c + b_1'\, c' + b_1''\, c'' = \cos\delta, \qquad b\, b_1 + b' b_1' + b''\, b_1'' = \cos\beta.$$

β is dan de hoek tusschen de hoofdnormalen der beide krommen in P_1 en P_2, terwijl δ de hoek zal zijn door de hoofdnormaal van K_2 in het punt P_2 met de binormaal van K_1 in P_1 gevormd.

Op dezelfde wijze als voor $\dfrac{\partial X}{\partial u}$ vinden we:

$$\frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{1}{\tau_1 \sin\alpha}\left(b'' c_1 - b\, c_1''\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_1 \sin^3\alpha}\left(c'' c_1 - c\, c_1''\right)\cos\gamma$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u}=\frac{1}{\tau_1 \sin\alpha}\left(b\, c_1' - b' c_1\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_1 \sin^3\alpha}\left(c\, c_1' - c' c_1\right)\cos\gamma$$

Verder heeft men:

$$\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\sin\alpha\left(c'\frac{dc_1''}{dv} - c''\frac{dc_1'}{dv}\right) - \cos\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(c' c_1'' - c'' c_1'\right)\right\}$$

Maar:

$$-\sin\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{\tau_2}\left(c\, b_1 + c'\, b_1' + c''\, b_1''\right)=\frac{\cos\delta}{\tau_2},$$

derhalve:

$$\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{\tau_2 \sin\alpha}\left(c' b_1'' - c'' b_1'\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_2 \sin^3\alpha}\left(c' c_1'' - c'' c_1'\right)\cos\delta$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{1}{\tau_2 \sin\alpha}\left(c'' c_1 - c\, b_1''\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_2 \sin^3\alpha}\left(c'' c_1 - c\, c_1''\right)\cos\delta$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v}=\frac{1}{\tau_2 \sin\alpha}\left(c\, b_1' - c' b_1\right)+\frac{\cos\alpha}{\tau_2 \sin^3\alpha}\left(c\, c_1' - c' c_1\right)\cos\delta.$$

Hieruit volgt dan:

$$e = \Sigma \frac{\partial x}{du} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{2\,\tau_1 \sin\alpha} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c_1 & c_1{}' & c_1{}'' \end{vmatrix} + \frac{\cos\alpha}{2\,\tau_1 \sin^3\alpha} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ c & c' & c'' \\ c_1 & c_1{}' & c_1{}'' \end{vmatrix} \cos\gamma.$$

Heeft men nu de positieve richtingen op raaklijn, hoofdnormaal en binormaal van elk der krommen in een willekeurig punt zoo aangenomen, dat:

$$\begin{vmatrix} a\, a'\, a'' \\ b\, b'\, b'' \\ c\, c'\, c'' \end{vmatrix} = +1 \qquad \begin{vmatrix} a_1\, a_1{}'\, a_1{}'' \\ b_1\, b_1{}'\, b_1{}'' \\ c_1\, c_1{}'\, c_1{}'' \end{vmatrix} = +1$$

dan zal elk der elementen van een dezer determinanten gelijk zijn aan de daarbij behoorende onderdeterminante, dus $a = b'\,c'' - b''\,c'$ enz. Met behulp daarvan gaat de juist voor e gevonden uitdrukking over in:

$$\left.\begin{aligned}
e &= \frac{\cos\alpha}{2\,\tau_1 \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha \cos^2\gamma}{2\,\tau_1 \sin^3\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\,\tau_1 \sin^3\alpha} \left\{ \sin^2\alpha - \cos^2\gamma \right\} \\
&\text{Op geheel overeenkomstige wijze vindt men:} \\
g &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} = - \frac{\cos\alpha}{2\,\tau_2 \sin^3\alpha} \left\{ \sin^2\alpha - \cos^2\delta \right\} \\
f &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{2\,\tau_1 \sin^3\alpha} \left\{ \cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta \right\} \\
f' &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \frac{1}{2\,\tau_2 \sin^3\alpha} \left\{ \cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta \right\} \\
L &= \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{\tau_1{}^2 \sin^4\alpha} \left\{ \sin^2\alpha - \cos^2\gamma \right\} \\
N &= \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{\tau_2{}^2 \sin^4\alpha} \left\{ \sin^2\alpha - \cos^2\delta \right\} \\
M &= \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \frac{\cos\alpha}{\tau_1\, \tau_2 \sin^4\alpha} \left\{ \cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta \right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (66)$$

Uit deze formules volgt allereerst, dat het stralenstelsel een normaal stralenstelsel zal zijn als $f = f'$ of:

$$\frac{1}{2\sin^3\alpha}\left\{\cos\beta\,\sin^2\alpha + \cos\alpha\cos\gamma\cos\delta\right\}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right) = 0.$$

Wijl de vorm tusschen haken niet voor alle waarden van u en v nul kan zijn, is de eenige manier om hieraan te voldoen $\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2} = 0$. Zal dit voor alle punten der beide gegeven krommen waar zijn, dan moeten τ_1 en τ_2 beide constant en bovendien $\tau_1 = -\tau_2$ zijn. Derhalve:

Alleen, wanneer de beide gegeven ruimtekrommen K_1 en K_2 krommen van constante torsie zijn en bovendien $\tau_1 = -\tau_2$ is, zal het in 't voorgaande beschouwde stralenstelsel een normaalstelsel zijn.

De oppervlakken, waarvan in dit geval de stralen van het stelsel de normalen zijn, verkrijgt men op de gewone wijze. Zijn ξ, η, ζ de coördinaten van een punt op een straal, in 't welk deze de normaal is van het, door dit punt doorloopen oppervlak, dan moet $\Sigma X\,d\xi = 0$ zijn. Daaruit volgt:

$$dr = -\left\{\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right\}$$

d. i. wijl:

$$\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2\sin\alpha}\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ c & c' & c'' \\ c_1 & c_1' & c_1'' \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

en evenzoo $\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\cos\delta}{2\sin\alpha}$, $r = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}\,du - \frac{\cos\delta}{\sin\alpha}\,dv\right\}$.

Nu is, zooals boven bleek:

$$-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{1}{\tau_1}\cos\gamma \text{ en } -\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{\tau_2}\cos\delta.$$

Voert men dit in de voor r verkregen uitdrukking in, dan wordt deze:

$$r=-\frac{1}{2}\,l\int\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial u}du+\frac{\partial\alpha}{\partial v}dv\right\}=-\frac{1}{2}l(\alpha+C)\;.\;.\;.\;(67)$$

waarin de constante torsiestralen der krommen K_1 en K_2 nl. τ_1 en τ_2 gelijk l gesteld zijn, terwijl C eene integratie-constante voorstelt. De oppervlakken, voor welke de stralen van het stelsel de normalen zijn, worden derhalve bepaald door de formules:

$$\xi=x-\frac{1}{2}lX(\alpha+C),\quad \eta=y-\frac{1}{2}lY(\alpha+C),$$

$$\zeta=z-\frac{1}{2}lZ(\alpha+C).$$

De abscissen der brandpunten, op een straal van het stelsel gelegen, worden in 't algemeen bepaald door de vergelijking (20)

$$\varrho^2((LN-M^2)+\varrho(eN-(f+f')M+gL)+eg-ff'=0.$$

Door invoering van de, boven voor $e \ldots . N$ gevonden, uitdrukkingen heeft men nu:

$$eN-(f+f')M+gL=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{2\tau_1\tau_2\sin^7\alpha}\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\Big\{(\sin^2\alpha-\cos^2\gamma)(\sin^2\alpha-$$

$$-\cos^2\delta)-(\cos\beta\sin^2\alpha+\cos\alpha\cos\gamma\cos\delta)^2\Big\}$$

$$eg - ff' =$$

$$= \frac{1}{4\tau_1 \tau_2 \sin^6\alpha} \left\{ (\cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta)^2 - \right.$$

$$\left. - \cos^2\alpha (\sin^2\alpha - \cos^2\gamma)(\sin^2\alpha - \cos^2\delta) \right\}$$

$$LN - M^2 = \frac{1}{\tau_1{}^2 \tau_2{}^2 \sin^8\alpha} \left\{ (\sin^2\alpha - \cos^2\gamma)(\sin^2\alpha - \right.$$

$$\left. - \cos^2\delta) - \cos^2\alpha \, (\cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta)^2 \right\}.$$

Nu is:

$$(\cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta)^2 = (\sin^2\alpha - \cos^2\gamma)(\sin^2\alpha - \cos^2\delta)$$ [1].

Derhalve wordt:

$$eN - (f + f') M + gL = 0$$

terwijl

$$eg - ff' = \frac{\tau_1 \tau_2 \sin^2\alpha}{4} (LN - M^2).$$

Daardoor gaat dan de vergelijking ter bepaling van de abscissen der brandpunten over in:

$$\varrho^2 + \frac{\tau_1 \tau_2 \sin^2\alpha}{4} = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

---

[1]) Tot deze betrekking komt men o. a. als volgt. Brengt men door den oorsprong lijnen, evenwijdig aan de binormalen en de hoofdnormalen der beide krommen in P_1 en P_2, dan snijden deze lijnen een bol, die den oorsprong tot middelpunt heeft, terwijl de straal gelijk de eenheid is, in vier punten B_1, B_2, H_1 en H_2, die de hoekpunten van een volledigen bolvierhoek zijn. Van dezen vierhoek zijn de beide overstaande zijden $B_1 H_1$ en $B_2 H_2$, ieder 90°, de beide overstaande zijden $B_1 B_2$ en $H_1 H_2$ achtereenvolgens α en β, terwijl eindelijk de zijde $B_2 H_1$ gelijk γ, $B_1 H_2 = \delta$ is. Uit de elementaire betrekkingen tusschen zijden en hoeken van een boldriehoek, leidt men dan dadelijk de bovenstaande vergelijking af.

Zet men derhalve op elken straal van het stelsel, van af het punt M op dien straal, naar beide kanten stukken uit gelijk aan $\frac{1}{2} \sin\alpha \sqrt{-\tau_1\tau_2}$, dan zullen de uiteinden dezer stukken de beide brandoppervlakken van het stralenstelsel doorloopen Het translatieoppervlak, meetkundige plaats van het punt M zal derhalve het middenoppervlak van het stralenstelsel zijn.

De brandoppervlakken zullen alleen dan reëel zijn, wanneer τ_1 en τ_2 verschillend teeken hebben.

De grenspunten, op een straal van het stelsel gelegen, worden bepaald door de vergelijking (10):

$$(LN - M^2)\, r^2 + (Lg - (f + f')\, M + Ne)\, r + eg - \\ - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0.$$

Hier is:

$$eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 =$$

$$= - \frac{\cos^2\alpha}{4\tau_1\tau_2 \sin^6\alpha} (\sin^2\alpha - \cos^2\gamma)(\sin^2\alpha - \cos^2\delta) - \\ - \frac{1}{16 \sin^6\alpha}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)^2 (\cos\beta \sin^2\alpha + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta)^2$$

$$= - \left\{ \frac{\cos^2\alpha}{4\,\tau_1\,\tau_2 \sin^6\alpha} + \frac{1}{16 \sin^6\alpha}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)^2 \right\} (\cos\beta \sin^2\alpha + \\ + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta)^2.$$

Derhalve gaat de vergelijking ter bepaling van de grenspunten over in:

$$r^2 - \frac{1}{16} \left\{ 4\,\tau_1\,\tau_2 \cos^2\alpha + (\tau_2 - \tau_1)^2 \right\} = 0$$

of:

$$r^2 - \frac{1}{16} \left\{ (\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\,\tau_1\,\tau_2 \sin^2\alpha \right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (69).$$

Zet men derhalve op elken straal van het stelsel, van af het punt M op dien straal, naar beide kanten stukken uit gelijk $\frac{1}{4}\sqrt{\{(\tau_1+\tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2\sin^2\alpha\}}$, *dan zullen de uiteinden van deze stukken de beide grensoppervlakken van het stralenstelsel doorloopen.*

Zijn de beide krommen van constante torsie en is $\tau_1 = -\tau_2 = l$, dan is de afstand van M tot een der brandpunten $\frac{1}{2} l \sin\alpha$ en evenzoo de afstand van M tot een der grenspunten $\frac{1}{2} l \sin\alpha$. In dat geval is, zooals boven bleek, het stelsel een normaal stralenstelsel en vallen, evenals bij elk dergelijk stelsel, de op een straal gelegen brandpunten samen met de grenspunten.

Bij de beschouwde stralenstelsels zullen nu de asymptotische lijnen op de beide brandoppervlakken correspondeerende krommen zijn. De coördinaten toch van een punt op het eene brandoppervlak worden bepaald door de formules:

$$\xi = x + \frac{c'c_1'' - c''c_1'}{2}\sqrt{-\tau_1\tau_2}$$

$$\eta = y + \frac{c''c_1 - cc_1''}{2}\sqrt{-\tau_1\tau_2}$$

$$\zeta = z + \frac{cc_1' - c'c_1}{2}\sqrt{-\tau_1\tau_2}$$

terwijl die van een punt op het tweede brandoppervlak hieruit worden verkregen door $\sqrt{-\tau_1\tau_2}$ in $-\sqrt{-\tau_1\tau_2}$ te veranderen. Bedenkt men nu dat c, c', c'' en τ_1 functies van u alleen, c_1, c_1', c_1'' en τ_2 functies van v alleen zijn, dan heeft men:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{1}{2}a + \frac{c_1''}{2}\sqrt{-\tau_2}\frac{d}{du}(c'\sqrt{\tau_1}) - \frac{c_1'}{2}\sqrt{-\tau_2}\frac{d}{du}(c''\sqrt{\tau_1})$$

Nu is echter, wijl $b' = \tau_1 \dfrac{dc'}{du}$ enz. is:

$$\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} (b'c'' - b''c') = \frac{1}{2} \left(\tau_1 \frac{dc'}{du} c'' - \tau_1 \frac{dc''}{du} c' \right) =$$

$$= \frac{c''}{2} \sqrt{\tau_1} \frac{d}{du} (c' \sqrt{\tau_1}) - \frac{c'}{2} \sqrt{\tau_1} \frac{d}{du} (c'' \sqrt{\tau_1})$$

Substitueert men dit in de uitdrukking voor $\dfrac{\partial \xi}{\partial u}$, dan gaat deze daardoor over in:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{c'' \sqrt{\tau_1} + c_1'' \sqrt{-\tau_2}}{2} \frac{d}{du} (c' \sqrt{\tau_1}) -$$

$$- \frac{c' \sqrt{\tau_1} + c_1' \sqrt{-\tau_2}}{2} \frac{d}{du} (c'' \sqrt{\tau_1})$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{c'' \sqrt{\tau_1} + c_1'' \sqrt{-\tau_2}}{2} \frac{d^2}{du^2} (c' \sqrt{\tau_1}) -$$

$$- \frac{c' \sqrt{\tau_1} + c_1' \sqrt{-\tau_2}}{2} \frac{d^2}{du^2} (c'' \sqrt{\tau_1})$$

Verder is:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{2} a_1 + \frac{c'}{2} \sqrt{\tau_1} \frac{d}{dv} (c_1'' \sqrt{\tau_2}) - \frac{c''}{2} \sqrt{\tau_1} \frac{d}{dv} (c_1' \sqrt{-\tau_2})$$

Maar:

$$\frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} (b_1' c_1'' - b_1'' c_1'') = \frac{1}{2} \left(\tau_2 \frac{dc_1'}{dv} c_1'' - \tau_2 \frac{dc_1''}{dv} c_1' \right) =$$

$$= - \frac{c_1''}{2} \sqrt{-\tau_2} \frac{d}{dv} (c_1' \sqrt{-\tau_2}) + \frac{c_1'}{2} \sqrt{-\tau_2} \frac{d}{dv} (c_1'' \sqrt{-\tau_2})$$

Hierdoor gaat de uitdrukking, voor $\dfrac{\partial \xi}{\partial v}$ gevonden, over in:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{c''\sqrt{\tau_1} + c_1''\sqrt{-\tau_2}}{2}\frac{d}{dv}(c_1'\sqrt{-\tau_2}) +$$

$$+\frac{c'\sqrt{\tau_1} + c_1'\sqrt{-\tau_2}}{2}\frac{d}{dv}(c_1''\sqrt{-\tau_2})$$

Waaruit dan weder volgt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = -\frac{c''\sqrt{\tau_1} + c_1''\sqrt{-\tau_2}}{2}\frac{d^2}{dv^2}(c_1'\sqrt{-\tau_2}) +$$

$$+\frac{c'\sqrt{\tau_1} + c_1''\sqrt{-\tau_2}}{2}\frac{d^2}{dv^2}(c_1''\sqrt{-\tau_2}).$$

Voor $\frac{\partial \eta}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}$, enz. verkrijgt men dergelijke vormen, die uit de bovenstaande ontstaan door cyclische permutatie van c, c', c'' en c_1, c_1', c_1''. Voor de fundamentaalgrootheid der tweede orde $D_1 = \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right|$ behoorende bij dit brandoppervlak vindt men, wanneer nog

$$\frac{c\sqrt{\tau_1} + c_1\sqrt{-\tau_2}}{2} = A, \quad \frac{c'\sqrt{\tau_1} + c_1'\sqrt{-\tau_2}}{2} = B$$

en

$$\frac{c''\sqrt{\tau_1} + c_1''\sqrt{-\tau_2}}{2} = C$$

gesteld worden:

$$\begin{array}{lll} C\frac{d^2}{du^2}(c'\sqrt{\tau_1}) - B\frac{d^2}{du^2}(c''\sqrt{\tau_1}) & A\frac{d^2}{du^2}(c''\sqrt{\tau_1}) - C\frac{d^2}{du^2}(c\sqrt{\tau_1}) & B\frac{d^2}{du^2}(c\sqrt{\tau_1}) - A\frac{d^2}{du^2}(c'\sqrt{\tau_1}) \\ C\frac{d}{du}(c'\sqrt{\tau_1}) - B\frac{d}{du}(c''\sqrt{\tau_1}) & A\frac{d}{du}(c''\sqrt{\tau_1}) - C\frac{d}{du}(c\sqrt{\tau_1}) & B\frac{d}{du}(c\sqrt{\tau_1}) - A\frac{d}{du}(c'\sqrt{\tau_1}) \\ -C\frac{d}{dv}(c_1'\sqrt{-\tau_2}) + B\frac{d}{dv}(c_1''\sqrt{-\tau_2}) & -A\frac{d}{dv}(c_1''\sqrt{-\tau_2}) + C\frac{d}{dv}(c_1\sqrt{-\tau_2}) & -B\frac{d}{dv}(c_1\sqrt{-\tau_2}) + A\frac{d}{dv}(c_1'\sqrt{-\tau_2}) \end{array}\right|$$

Doch deze determinant is, zooals onmiddellijk blijkt, wanneer men de kolommen achtereenvolgens met A, B en C vermenigvuldigt en daarna de beide laatste bij de eerste optelt, nul. Op dezelfde wijze toont men aan, dat ook D_3 nul is en dat dit ook voor het tweede brandoppervlak plaats vindt. Voor die beide oppervlakken worden derhalve de asymptotische lijnen bepaald door de vergelijking $du\, dv = $ of:

Op de beide brandoppervlakken der beschouwde stralenstelsels zijn de asymptotische lijnen correspondeerende krommen. Deze krommen stemmen bovendien overeen met die krommen op het middenoppervlak, door welker translatiebeweging men zich dit oppervlak kan denken ontstaan te zijn.

Bij dit stralenstelsel zal dus, volgens eene vroeger bewezen eigenschap, het product der totale krommingen van de beide brandoppervlakken in overeenstemmende punten gelijk zijn aan het omgekeerde der vierde macht van den afstand der beide grenspunten, gelegen op den straal, die de beide overeenstemmende punten verbindt, d.i.

$$K_1\, K_2 = \frac{16}{\{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\, \tau_1\, \tau_2 \sin^2 \alpha\}^2}$$

Voor 't geval dat het stralenstelsel een normaalstelsel en dus $\tau_1 = -\tau_2$ is, wordt dit:

$$K_1\, K_2 = \frac{1}{\tau_1{}^4 \sin^4 \alpha}.$$

In dat geval bestaat ook nog eene eenvoudige betrekking tusschen de beide hoofdkromtestralen in een willekeurig punt P van een oppervlak N, waarvoor de stralen van het stelsel de normalen zijn. Immers dit punt wordt, volgens (67) bepaald door op den daardoor gaanden straal, van af het punt M op dien straal, een stuk uit te zetten

$$r = -\frac{1}{2}\, l\, \alpha$$

Hier is de integratieconstante C, die in (67) optreedt, gelijk nul genomen. Evenzoo worden de beide, op dien straal liggende, brandpunten volgens (68) gevonden, door op dien straal van af M uit te zetten een stuk gelijk $\pm \frac{1}{2} l \sin \alpha$.

Voor de beide hoofdkromtestralen r_1 en r_2 van het oppervlak N in een willekeurig punt, heeft men dus:

$$r_1 = -\frac{1}{2} l \alpha + \frac{1}{2} l \sin \alpha; \quad r_2 = -\frac{1}{2} l \alpha - \frac{1}{2} l \sin \alpha$$

waaruit

$$r_2 - r_1 = -l \sin \alpha \quad r_2 + r_1 = -l \alpha.$$

Eliminatie van α geeft dan de tusschen r_1 en r_2 bestaande betrekking:

$$\frac{r_2 - r_1}{l} = \sin \frac{r_2 + r_1}{l}.$$

Het oppervlak N behoort dus tot de oppervlakken van Weingarten (W-oppervlakken), bij welke de hoofdkromtestralen in een willekeurig punt functies van elkander zijn. [1])

---

[1]) Zie voor de in 't voorgaande behandelde stralenstelsels en in 't algemeen die stelsels, bij welke op de brandoppervlakken de asymptotische lijnen correspondeerende krommen zijn:

Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, p. 315 en vlg.

Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces T III, p. 372 en vlg.

In beide werken worden deze stralenstelsels voornamelijk beschouwd met het oog op de rol, die zij spelen in de theorie der oneindig kleine verbuigingen van oppervlakken.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De vraag naar het teeken van den parameter P van een straal, beschouwd als behoorende tot een regelvlak, gevormd door stralen van een stralenstelsel, is van ondergeschikt belang. Alleen bij vraagstukken, betrekking hebbende op de continüe afwikkeling van regelvlakken van het stelsel op andere oppervlakken, kan dit van belang zijn. (Darboux. 3ième part. pag. 302).

II.

De uitdrukkingen: „Twee oppervlakken zijn op elkaar afwikkelbaar, of: „van twee oppervlakken zijn de lijnelementen gelijk", zijn niet equivalent.

III.

Zijn S_1 en S_2 twee oppervlakken met gelijk lijnelement en verbinden we telkens twee correspondeerende punten op S_1 en S_2 met een vast punt O, terwijl dan de voerstralen genoemd worden r_1 en r_2, dan krijgt men twee andere oppervlakken Σ_1 en Σ_2, met gelijke lijnelementen, door die voerstralen te verkorten in de verhouding $\frac{1}{r_1^2 - r_2^2}$. De uiteinden van de nieuwe voerstralen dan zullen op Σ_1 en Σ_2 weer correspondeerende punten zijn.

IV.

Wanneer een vlakke kromme een dubbelpunt heeft, zal de eerste poolkromme van een punt P, op een der raaklijnen. in het dubbelpunt, de eerstgenoemde kromme in dat dubbelpunt raken. Ook in dit geval wordt dus het aantal eigenlijke raaklijnen, dat men uit P aan de kromme kan trekken met twee verminderd. (Salmon, Traité de Géométrie Analytique. Courbes Planes. Paris 1884. pag. 78.)

V.

De cinematische methode in de vlakkentheorie, zooals die door Darboux en anderen wordt gebruikt, verdient afkeuring wegens het weinig overzichtelijke der resultaten.

VI.

De theoretische Mechanica is geen onderdeel der Analyse; deze laatste is slechts eene hulpwetenschap voor de Mechanica.

VII.

E. Study zegt bij de behandeling van de geschiedenis der imaginaire grootheden (Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd I. heft 2. pag 149.):

„Leider hatt Gauss die von ihm versprochene Rechtfertigung der Einführung der „imaginären" oder, wie er später lieber sagte, „*complexen*" Grössen niemals geliefert, und das ist wohl der Grund dafür, dass man auch heute noch in verbreiteten Lehrbüchern eine Art der Darstellung antrifft, der man schwer entnehmen kann, was nach Ansicht der Verfasser Definition und was Folgerung sein soll. Dit laatste is mijns inziens in hooge mate toepasselijk op de behandeling dezer grootheden door Laurent (Traité d'Algèbre. Chap. IV).

VIII.

Hoewel de hypothese van het uit elkaar vallen der atomen ter verklaring van de radioactieve energie verre te verkiezen is boven die van uitwendige krachten, worden de bezwaren tegen deze laatste door sommige schrijvers wel eens overdreven. (F. Soddy, Die Radioaktivität. Deutsche Uebersetzung von Prof. G. Siebert. Leipzig ,1904. pag. 38).

IX.

De samendrukbaarheid, door Amagat voor CO_2 bij hoogen druk gevonden, kan het gevolg zijn van een onvoldoend nauwkeurige correctie voor de samendrukbaarheid van het glas van den piëzometer buis.

X.

De reden, waarom de poging van Lebedew, om de theorie van Bredichin omtrent de kometen staarten (Young, Text-book of General Astronomy. pag. 415) in overeenstemming te brengen met de electromagnetische lichttheorie, eerst onopgemerkt is gebleven, moet meer gezocht worden in het ontbreken van proeven aangaande den druk van het licht, dan in den veronderstelden physischen toestand dier lichamen. (Arrhenius, Ueber die Ursache der Nordlichter. Physikalische Zeitschrift. 1900. N°. 6 pag. 82).

XI.

Het resultaat van de onderzoekingen van Crew (Young. A Text-Book of General Astronomy. pag 179. noot), omtrent de verplaatsing van de spectraallijnen aan den oost- en westrand van de zon, waaruit zou volgen, dat de absorbeerende laag gassen om de zon aan den zonsequator vertraagd wordt, vindt steun in de opvattingen van Emden. (Beiträge zur Sonnentheorie. Annalen der Physik. 4e Folge. Bd. 7. 1902).

IV.

Wanneer een vlakke kromme een dubbelpunt heeft, zal de eerste poolkromme van een punt P, op een der raaklijnen. in het dubbelpunt, de eerstgenoemde kromme in dat dubbelpunt raken. Ook in dit geval wordt dus het aantal eigenlijke raaklijnen, dat men uit P aan de kromme kan trekken met twee verminderd. (Salmon, Traité de Géométrie Analytique. Courbes Planes. Paris 1884. pag. 78.)

V.

De cinematische methode in de vlakkentheorie, zooals die door Darboux en anderen wordt gebruikt, verdient afkeuring wegens het weinig overzichtelijke der resultaten.

VI.

De theoretische Mechanica is geen onderdeel der Analyse; deze laatste is slechts eene hulpwetenschap voor de Mechanica.

VII.

E. Study zegt bij de behandeling van de geschiedenis der imaginaire grootheden (Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd I. heft 2. pag 149.):

„Leider hatt Gauss die von ihm versprochene Rechtfertigung der Einführung der „imaginären" oder, wie er später lieber sagte, *„complexen"* Grössen niemals geliefert, und das ist wohl der Grund dafür, dass man auch heute noch in verbreiteten Lehrbüchern eine Art der Darstellung antrifft, der man schwer entnehmen kann, was nach Ansicht der Verfasser Definition und was Folgerung sein soll. Dit laatste is mijns inziens in hooge mate toepasselijk op de behandeling dezer grootheden door Laurent (Traité d'Algèbre. Chap. IV).

VIII.

Hoewel de hypothese van het uit elkaar vallen der atomen ter verklaring van de radioactieve energie verre te verkiezen is boven die van uitwendige krachten, worden de bezwaren tegen deze laatste door sommige schrijvers wel eens overdreven. (F. Soddy, Die Radioaktivität. Deutsche Uebersetzung von Prof. G. Siebert. Leipzig ,1904. pag. 38).

IX.

De samendrukbaarheid, door Amagat voor CO_2 bij hoogen druk gevonden, kan het gevolg zijn van een onvoldoend nauwkeurige correctie voor de samendrukbaarheid van het glas van den piëzometer buis.

X.

De reden, waarom de poging van Lebedew, om de theorie van Bredichin omtrent de kometen staarten (Young, Text-book of General Astronomy. pag. 415) in overeenstemming te brengen met de electromagnetische lichttheorie, eerst onopgemerkt is gebleven, moet meer gezocht worden in het ontbreken van proeven aangaande den druk van het licht, dan in den veronderstelden physischen toestand dier lichamen. (Arrhenius, Ueber die Ursache der Nordlichter. Physikalische Zeitschrift. 1900. N°. 6 pag. 82).

XI.

Het resultaat van de onderzoekingen van Crew (Young. A Text-Book of General Astronomy. pag 179. noot), omtrent de verplaatsing van de spectraallijnen aan den oost- en westrand van de zon, waaruit zou volgen, dat de absorbeerende laag gassen om de zon aan den zonsequator vertraagd wordt, vindt steun in de opvattingen van Emden. (Beiträge zur Sonnentheorie. Annalen der Physik. 4e Folge. Bd. 7. 1902).

XII.

Ten onrechte wordt door Fletcher het ontstaan van meteorieten, kometen en andere kosmische stof onafhankelijk gesteld van de zon en andere hemellichamen. (British Museum (Natural History). Mineral Department. An Introduktion to the study of meteorites. By L. Fletcher. 1904).

XIII.

In de meeste leerboeken der Rekenkunde wordt de bewerking der optelling van geheele getallen direct verklaard na de behandeling der optelling zelf. Wenschelijk is het met deze verklaring te wachten tot na de behandeling van de vermenigvuldiging, daar bij de verklaring der bewerking van de optelling eene eigenschap der vermenigvuldiging wordt toegepast.

XIV.

Dat op de gymnasia de behandeling der verkorte bewerkingen niet in het leerplan der wiskunde is opgenomen, leidt voor aanstaande philosophen later tot groote moeilijkheden.

XV.

Het is wenschelijk, dat het voorbereidend onderwijs tot de Universiteit aldus worde vervormd, dat daarin eene plaats worde ingeruimd voor de behandeling van de beginselen der Differentiaal en Integraal rekening.