P. De Carpentier Wildervanck Jr.

Theorie en Toepassing

van

De Karakteristieke functie van Hamilton.

THEORIE EN TOEPASSING

VAN

DE KARAKTERISTIEKE FUNCTIE VAN HAMILTON.

Theorie en Toepassing

VAN

De Karakteristieke functie van Hamilton.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Mr. S. J. FOCKEMA ANDREAE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

OP ZATERDAG 7 JULI 1894, DES NAMIDDAGS TEN 3 URE,

DOOR

PIETER DE CARPENTIER WILDERVANCK Jr.,

GEBOREN TE COEVORDEN.

LEIDEN. – A. W. SIJTHOFF.

AAN

MIJN VADER

EN AAN

DEN HEER A. W. SIJTHOFF

UIT DANKBAARHEID OPGEDRAGEN.

Aan het einde van mijn Academische studiën gekomen, betuig ik ten zeerste mijn dank aan allen, die voor mij het pad wat effenden.

Steeds zal ik U, Hooggeleerde VAN BEMMELEN, erkentelijk zijn voor de mij in den beginne betoonde welwillendheid en den mij verleenden steun. Diep is ook nog de indruk, dien Gij, Hooggeleerde KAMERLINGH ONNES, bij mij teweegbracht door Uwe lessen over de grondbegrippen der mechanica; zij hadden voor een groot deel ten gevolge, dat ik met mijn studiën een anderen weg insloeg.

Ten slotte een woord van dank aan U, Hooggeleerde VAN GEER; aangenaam zal mij steeds de herinnering zijn aan Uwe lessen en aan de welwillendheid, mij betoond bij de vervaardiging van dit proefschrift.

Jeder Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen muss auch einen Fortschritt in der Mechanik herbeiführen.

Jacobi.

INLEIDING.

De bewegingsvergelijkingen van een stelsel punten, dat onderworpen is aan de werking van willekeurige krachten, die afhangen van de coördinaten en de snelheden der punten en van den tijd, en dat aan zekere, in vergelijkingen uit te drukken voorwaarden (verbindingen) moet voldoen, kunnen voor elk punt altijd gebracht worden in den vorm:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + S_x,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + S_y,$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + S_z.$$

Hierin zijn X, Y en Z de componenten der krachten, die op eenig punt van het stelsel werken, functies van x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ en t; S_x, S_y en S_z zijn de componenten der verbindingskrachten; door de invoering van deze is het stelsel als geheel vrij te beschouwen. S_x, S_y en S_z zijn over 't algemeen ook functies van x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ en t. De voorwaarden, aan welke het stelsel moet voldoen, moeten uit te drukken zijn door functies van de coördinaten, de snelheden en den tijd. Laten er k van deze voorwaarden zijn; door het invoeren van onbepaalde coëfficiënten (gebruik makende van de methode der multiplicatoren) kan men dan (bij n punten) $3n$ bewegingsvergelijkingen verkrijgen met $3n + k$ onbekenden; hierbij komen dan nog de k voorwaardensvergelijkingen; zoodat men heeft $3n + k$ differentiaalvergelijkingen met $3n + k$ van t afhankelijke onbekenden.

Zijn deze opgelost, d. w. z. zijn hare eerste integralen (die alleen de eerste differentiaalquotiënten bevatten) en hare tweede integralen (die geen differentiaalquotiënten meer bevatten) bepaald, dan is het probleem opgelost. De moeilijkheid is gelegen in het bepalen dezer integralen. Is het stelsel onveranderlijk, dan is het vraagstuk opgelost, zoodra de plaatsen van 3 punten bepaald zijn. Hiertoe zijn noodig 6 vergelijkingen; bij een onveranderlijk stelsel zijn dus 6 integralen voldoende. Is het stelsel veranderlijk, dan zijn meer integralen noodig.

De theorie der differentiaalvergelijkingen is nog niet zoover gevorderd, dat het bepalen dezer integralen in het algemeen mogelijk is; slechts bijzondere gevallen zijn rechtstreeks op te lossen. Daarom heeft men in den loop der tijden getracht eerste of tweede integralen te vinden, die behalve den tijd de coördinaten en de snelheden van meer dan één punt of die van een bijzonder punt bevatten. Men vond aldus de wet van het behoud der beweging van het zwaartepunt, de wet der sectoren, de wet van het behoud der levendige kracht, het beginsel der kleinste werking en het beginsel van den kleinsten dwang. Lagrange [1]) bracht bij m coördinaten, die aan de voorwaarden identiek voldoen, het aantal bewegingsvergelijkingen terug tot $2m$ differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

W. R. Hamilton [2]) deelde in April 1834 in de Royal Society

[1]) Mécanique analytique, tome II.

[2]) Philosophical transactions, 1834.

te Londen twee partiëele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en van den tweeden graad van een functie mede, die hij karakteristieke functie noemde. JACOBI toonde aan, dat zij reeds geheel bepaald wordt door de eerste der door HAMILTON geleverde differentiaalvergelijkingen. Door differentiatie worden uit haar de integralen der bewegingsvergelijkingen gevonden. HAMILTON bepaalde zijn karakteristieke functie slechts voor een stelsel van elkander aantrekkende of afstootende punten, bij welke de krachten alleen afhangen van de afstanden der punten, met een overwegend middelpunt van massa of energie.

Bij een gegeven vraagstuk de partiëele differentiaalvergelijking der eerste orde, die de karakteristieke functie bepaalt, op te stellen, levert geen moeilijkheid op. Deze differentiaalvergelijking op te lossen is echter slechts in weinige gevallen mogelijk. Vooral JACOBI heeft zich voor die oplossing verdienstelijk gemaakt [1]). Hij was reeds in het bezit van de beginselen zijner methode van oplossing in 1836 en jaren lang onderwees hij haar te Königsberg. Na zijn dood werd zij echter eerst door CLEBSCH uitgegeven (1866). Toen waren reeds de meeste stellingen van JACOBI door andere wiskundigen (LIOUVILLE, BOUR, DONKIN) bekend gemaakt.

In het volgende heb ik mij bezig gehouden met het bepalen van de karakteristieke functie uit de partiëele differentiaalvergelijking in een paar eenvoudige gevallen. Vooraf heb ik echter deze vergelijking voor een zeer algemeen geval afgeleid en wel voor de relatieve beweging, van welke de absolute beweging steeds als bijzonder geval kan beschouwd worden. Over de karakteristieke functie bij de relatieve beweging schreven o. a. BOUR [2]) (Les mouvements relatifs, een verhandeling, die reeds

---

[1]) Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von CLEBSCH.

[2]) Journal de Math. de Liouville, 2e reeks, deel 8, jaarg. 1863.

25 Febr. 1856 bij de Académie des Sciences werd ingediend), Kamerlingh Onnes [1]) en Rachmaninow [2]).

In den beginne beschouwde men slechts de gevallen van beweging, bij welke de voorwaarden niet expliciet van den tijd afhangen en voor de krachtcomponenten een krachtfunctie bestaat, die slechts van de coördinaten en van den tijd afhangt.

Over het geval, dat de voorwaarden wel expliciet van den tijd afhangen, schreven van Geer [3]) en Rijkens [4]).

Een uitbreiding onderging het onderwerp door de invoering van de Scheringsche krachtfunctie [5]).

---

[1]) Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde, proefschrift, 1879.

[2]) Zeitschr. für Math. und Phys. von Schlömilch, deel 34, 1889.

[3]) Nieuw Archief voor Wiskunde, deel 7 en 8, 1881.

[4]) Transformatie en int-gratie van de dynamische vergelijkingen, proefschrift, 1887.

[5]) Zie „Hamilton-Jacobische Theorie etc." in Abh. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, deel 18, 1873.

Holzmüller „Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamiltonsche Methode" in Schlömilch's Zeitschrift für Mathem. und Phys. (1870).

G. J. Michaëlis „Over het beginsel van het behoud der energie" in het Nieuw Archief voor Wisk., deel 6.

HOOFDSTUK I.

Afleiding der algemeene bewegingsvergelijkingen van Lagrange.

Een willekeurig punt van een stelsel stoffelijke punten hebbe tot coördinaten ten opzichte van een vast rechthoekig coördinatenstelsel x, y en z en zij aan krachten onderworpen, wier resultante X, Y, Z tot componenten heeft in de richtingen dezer vaste coördinaatassen. Verder zijn alle punten van dit stelsel verbonden door k betrekkingen in den vorm

$$f\,(x, y, z \;.\;.\; t) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

In deze vergelijkingen stelt t den van een willekeurig gekozen oogenblik af getelden tijd voor; x, y en z zijn functies van t. Ons doel is deze functies te bepalen, wanneer alle grootheden X, Y, Z en alle vergelijkingen $f = 0$ gegeven zijn. Wij maken omtrent X, Y en Z slechts de onderstelling, dat zij functies van $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ en t zijn. X, Y en Z en de vergelijkingen $f = 0$ bevatten dus ook den tijd expliciet en de krachtcomponenten hangen bovendien van de beweging der punten af.

Voor elk punt zijn thans de bewegingsvergelijkingen de volgende:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} + \sum_1^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \sum_1^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \sum_1^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

In deze stelt m de massa van het punt voor.

Wij nemen nu een bewegelijk rechthoekig coördinatenstelsel aan en noemen de coördinaten van een punt van het stelsel ten opzichte van deze bewegelijke assen u, v en w. Laten de cosinussen der hoeken, die de u-as met de vaste x-, y- en z-as maakt, a, b en c, die, welke de v-as met genoemde vaste assen maakt, a', b' en c' en die, welke de w-as met de vaste assen maakt, a'', b'' en c'' zijn, dan is

$$\left.\begin{aligned} x &= au + a'v + a''w + x_0, \\ y &= bu + b'v + b''w + y_0, \\ z &= cu + c'v + c''w + z_0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0), \\ v &= a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0), \\ w &= a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0), \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

waarin x_0, y_0 en z_0 de coördinaten van den bewegelijken oorsprong ten opzichte van het vaste coördinatenstelsel zijn. Verder bestaan de betrekkingen

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}\right. && \left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}\right. \\ &\left\{\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0. \end{aligned}\right. && \left\{\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0. \end{aligned}\right. \end{aligned} \quad . (5)$$

$$\left\{\begin{aligned} &a\,\frac{da}{dt}+b\,\frac{db}{dt}+c\,\frac{dc}{dt}=0,\\ &a'\,\frac{da'}{dt}+b'\,\frac{db'}{dt}+c'\,\frac{dc'}{dt}=0,\\ &a''\,\frac{da''}{dt}+b''\,\frac{db''}{dt}+c''\,\frac{dc''}{dt}=0. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &a\,\frac{da}{dt}+a'\,\frac{da'}{dt}+a''\,\frac{da'}{dt}=0,\\ &b\,\frac{db}{dt}+b'\,\frac{db'}{dt}+b''\,\frac{db''}{dt}=0,\\ &c\,\frac{dc}{dt}+c'\,\frac{dc'}{dt}+c''\,\frac{dc''}{dt}=0. \end{aligned}\right. \quad (6)$$

$$\left\{\begin{aligned} &a'\,\frac{da}{dt}+b'\,\frac{db}{dt}+c'\,\frac{dc}{dt}=-\left(a\,\frac{da'}{dt}+b\,\frac{db'}{dt}+c\,\frac{dc'}{dt}\right)=\varphi_3,\\ &a''\,\frac{da'}{dt}+b''\,\frac{db'}{dt}+c''\,\frac{dc'}{dt}=-\left(a'\,\frac{da''}{dt}+b'\,\frac{db''}{dt}+c'\,\frac{dc''}{dt}\right)=\varphi_1,\\ &a\,\frac{da''}{dt}+b\,\frac{db''}{dt}+c\,\frac{dc''}{dt}=-\left(a''\,\frac{da}{dt}+b''\,\frac{db}{dt}+c''\,\frac{dc}{dt}\right)=\varphi_2, \end{aligned}\right. \quad (7)$$

waarin φ_1, φ_2 en φ_3 de componenten in de richtingen der u-, v- en w-as zijn van de hoeksnelheid om de oogenblikkelijke as van wenteling van het stelsel.

Met behulp van (3) kan men de vergelijkingen $f=0$ in de coördinaten u, v en w uitdrukken. Zij verkrijgen dan (k in aantal) den volgenden vorm:

$$F\,(u,\,v,\,w,\;.\;.\;.\;.\;.\;x_0,\,y_0,\,z_0,\,t\,)=0\;.\;.\quad(8)$$

Ons doel is nu de bewegingsvergelijkingen te verkrijgen ten opzichte van het bewegelijke coördinatenstelsel. Daartoe differentiëeren wij de vergelijkingen (3) naar t; dan volgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a\,\frac{du}{dt}+a'\,\frac{dv}{dt}+a''\,\frac{dw}{dt}+u\,\frac{da}{dt}+v\,\frac{da'}{dt}+w\,\frac{da''}{dt}+\frac{dx_0}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=b\,\frac{du}{dt}+b'\,\frac{dv}{dt}+b''\,\frac{dw}{dt}+u\,\frac{db}{dt}+v\,\frac{db'}{dt}+w\,\frac{db''}{dt}+\frac{dy_0}{dt}\\ \frac{dz}{dt}&=c\,\frac{du}{dt}+c'\,\frac{dv}{dt}+c''\,\frac{dw}{dt}+u\,\frac{dc}{dt}+v\,\frac{dc'}{dt}+w\,\frac{dc''}{dt}+\frac{dz_0}{dt}. \end{aligned}\right\}\;.\;(9)$$

De eerste der vergelijkingen (9) achtereenvolgens vermenigvuldigende met a, a' en a'', de tweede met b, b' en b'' en de derde met c, c' en c'' en optellende, verkrijgen wij na eenige herleiding:

$$a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dt}+\varphi_2 w-\varphi_3 v+a\frac{dx_0}{dt}+b\frac{dy_0}{dt}+c\frac{dz_0}{dt}$$
$$a'\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+c'\frac{dz}{dt}=\frac{dv}{dt}+\varphi_3 u-\varphi_1 w+a'\frac{dx_0}{dt}+b'\frac{dy_0}{dt}+c'\frac{dz_0}{dt} \quad (10)$$
$$a''\frac{dx}{dt}+b''\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt}=\frac{dw}{dt}+\varphi_1 v-\varphi_2 u+a''\frac{dx_0}{dt}+b''\frac{dy_0}{dt}+c''\frac{dz_0}{dt}.$$

Van deze vergelijkingen vermenigvuldigen wij de eerste met a, b en c, de tweede met a', b' en c' en de derde met a'', b'' en c''; dan volgt na optelling en door te letten op (5)

$$\frac{dx}{dt}=a\left(\frac{du}{dt}+\varphi_2 w-\varphi_3 v\right)+a'\left(\frac{dv}{dt}+\varphi_3 u-\varphi_1 w\right)+$$
$$+a''\left(\frac{dw}{dt}+\varphi_1 v-\varphi_2 u\right)+\frac{dx_0}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt}=b\left(\frac{du}{dt}+\varphi_2 w-\varphi_3 v\right)+b'\left(\frac{dv}{dt}+\varphi_3 u-\varphi_1 w\right)+$$
$$+b''\left(\frac{dw}{dt}+\varphi_1 v-\varphi_2 u\right)+\frac{dy_0}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt}=c\left(\frac{du}{dt}+\varphi_2 w-\varphi_3 v\right)+c'\left(\frac{dv}{dt}+\varphi_3 u-\varphi_1 w\right)+$$
$$+c''\left(\frac{dw}{dt}+\varphi_1 v-\varphi_2 u\right)+\frac{dz_0}{dt}.$$

Gemakshalve stellende

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}+\varphi_2 w-\varphi_3 v&=\xi\\ \frac{dv}{dt}+\varphi_3 u-\varphi_1 w&=\eta\\ \frac{dw}{dt}+\varphi_1 v-\varphi_2 u&=\zeta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

verkrijgen wij

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a\,\xi+a'\,\eta+a''\,\zeta+\frac{dx_0}{dt},\\ \frac{dy}{dt}&=b\,\xi+b'\,\eta+b''\,\zeta+\frac{dy_0}{dt},\\ \frac{dz}{dt}&=c\,\xi+c'\,\eta+c''\,\zeta+\frac{dz_0}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Door differentiatie naar t ontstaat uit deze:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt} + \frac{d^2x_0}{dt^2},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt} + \frac{d^2y_0}{dt^2},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} + \frac{d^2z_0}{dt^2}.
\end{aligned}\right\}\quad (13)$$

Nu vermenigvuldigen wij de eerste van (13) achtereenvolgens met a, a' en a'', de tweede met b, b' en b'' en de derde met c, c' en c'' en tellen op; dan volgt, gebruik makende van (5), (6) en (7):

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d\xi}{dt} + \varphi_2\zeta - \varphi_3\eta + \\
&\quad + a\frac{d^2x_0}{dt^2} + b\frac{d^2y_0}{dt^2} + c\frac{d^2z_0}{dt^2},\\
a'\frac{d^2x}{dt^2} + b'\frac{d^2y}{dt^2} + c'\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d\eta}{dt} + \varphi_3\xi - \varphi_1\zeta + \\
&\quad + a'\frac{d^2x_0}{dt^2} + b'\frac{d^2y_0}{dt^2} + c'\frac{d^2z_0}{dt^2},\\
a''\frac{d^2x}{dt^2} + b''\frac{d^2y}{dt^2} + c''\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d\zeta}{dt} + \varphi_1\eta - \varphi_2\xi + \\
&\quad + a''\frac{d^2x_0}{dt^2} + b''\frac{d^2y_0}{dt^2} + c''\frac{d^2z_0}{dt^2}.
\end{aligned}\right\}\quad (14)$$

Op te merken is, dat de vergelijkingen (12) den zelfden vorm hebben als (3) en dat de vergelijkingen (14) op dezelfde wijze ontstaan zijn uit (12) als de vergelijkingen (10) uit (3).

Wij hernemen nu de vergelijkingen (2), vermenigvuldigen de eerste met a, de tweede met b en de derde met c en tellen op tot

$$m\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) = a\,X + b\,Y + c\,Z +$$

$$+ \sum_1^k \lambda_r\left(a\frac{\partial f_r}{\partial x} + b\frac{\partial f_r}{\partial y} + c\frac{\partial f_r}{\partial z}\right)\quad .\ .\ .\ .\ (15)$$

Hierin is:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_r}{\partial x} &= \frac{\partial f_r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f_r}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial f_r}{\partial u}+a'\frac{\partial f_r}{\partial v}+a''\frac{\partial f_r}{\partial w}\\ \frac{\partial f_r}{\partial y} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b\frac{\partial f_r}{\partial u}+b'\frac{\partial f_r}{\partial v}+b''\frac{\partial f_r}{\partial w}\\ \frac{\partial f_r}{\partial z} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = c\frac{\partial f_r}{\partial u}+c'\frac{\partial f_r}{\partial v}+c''\frac{\partial f_r}{\partial w}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

De eerste van deze vermenigvuldigende met a, de tweede met b, de derde met c en optellende, verkrijgen wij:

$$a\frac{\partial f_r}{\partial x}+b\frac{\partial f_r}{\partial y}+c\frac{\partial f_r}{\partial z}=\frac{\partial f_r}{\partial u}.$$

Ook is $a\,X+b\,Y+c\,Z$ de component der resultante van de krachten, op het punt x, y, z (u, v, w) werkende, in de richting der u-as; stellen wij deze component gelijk aan X' en eveneens $a'X+b'Y+c'Z=Y'$ en $a''X+b''Y+c''Z=Z'$ (de componenten dier resultante in de v- en w-asrichtingen), dan gaan met behulp van (14), (16) en (8) verg. (15) en de twee overeenkomstige over in:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\xi}{dt}+m(\varphi_2\zeta-\varphi_3\eta)+m\left(a\frac{d^2x_0}{dt^2}+b\frac{d^2y_0}{dt^2}+c\frac{d^2z_0}{dt^2}\right) &= X'+\sum_1^k\mu_r\frac{\partial F_r}{\partial u}\\ m\frac{d\eta}{dt}+m(\varphi_3\xi-\varphi_1\zeta)+m\left(a'\frac{d^2x_0}{dt^2}+b'\frac{d^2y_0}{dt^2}+c'\frac{d^2z_0}{dt^2}\right) &= Y'+\sum_1^k\mu_r\frac{\partial F_r}{\partial v}\\ m\frac{d\zeta}{dt}+m(\varphi_1\eta-\varphi_2\xi)+m\left(a''\frac{d^2x_0}{dt^2}+b''\frac{d^2y_0}{dt^2}+c''\frac{d^2z_0}{dt^2}\right) &= Z'+\sum_1^k\mu_r\frac{\partial F_r}{\partial w}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Is de beweging van het bewegelijke coördinatensysteem gegeven, zijn dus $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', \frac{d^2x_0}{dt^2}, \frac{d^2y_0}{dt^2}$ en $\frac{d^2z_0}{dt^2}$ als functies van t bekend, dan bepalen de vergelijkingen (17), (8) en (11) de relatieve beweging van het puntenstelsel. Wij zullen nu aannemen, dat dit stelsel uit n punten bestaat; dan heeft men $3n$ vergelijkingen

(17), $3n$ vergelijkingen (11) en k vergelijkingen (8), in het geheel dus $6n + k$ vergelijkingen met $6n + k$ van t afhankelijke onbekende grootheden, namelijk de n coördinaten u, de n coördinaten v, de n coördinaten w, de n grootheden ξ, de n grootheden η, de n grootheden ζ en de k multiplicatoren μ.

Wij stellen nu

$$T = \tfrac{1}{2}\, \Sigma m\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

$$P = \left(a\frac{d^2x_0}{dt^2} + b\frac{d^2y_0}{dt^2} + c\frac{d^2z_0}{dt^2} \right)\Sigma mu +$$
$$+ \left(a'\frac{d^2x_0}{dt^2} + b'\frac{d^2y_0}{dt^2} + c'\frac{d^2z_0}{dt^2} \right)\Sigma mv +$$
$$+ \left(a''\frac{d^2x_0}{dt^2} + b''\frac{d^2y_0}{dt^2} + c''\frac{d^2z_0}{dt^2} \right)\Sigma mw,$$

$$S = \Sigma\, m \left\{ (\varphi_2 w - \varphi_3 v)\,\xi + (\varphi_3 u - \varphi_1 w)\,\eta + (\varphi_1 v - \varphi_2 u)\,\zeta \right\}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = m\xi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = m\eta$$

en $$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = m\zeta,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = m\,(\varphi_2 w - \varphi_3 v),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = m\,(\varphi_3 u - \varphi_1 w)$$

en $$\frac{\partial S}{\partial \zeta} = m\,(\varphi_1 v - \varphi_2 u).$$

Met behulp van deze betrekkingen worden de vergelijkingen (11)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = m\frac{du}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = m\frac{dv}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = m\frac{dw}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \zeta}$$

of

$$\left.\begin{aligned} m\frac{du}{dt} &= \frac{\partial\,(\mathrm{T-S})}{\partial\xi} \\ m\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial\,(\mathrm{T-S})}{\partial\eta} \\ m\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial\,(\mathrm{T-S})}{\partial\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

De vergelijkingen (17) worden door de invoering van T, P en S

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\xi}{dt} &= \mathrm{X}' + \frac{\partial\,(\mathrm{S-P})}{\partial\,u} + \sum_1^k \mu_r \frac{\partial F_r}{\partial u} \\ m\frac{d\eta}{dt} &= \mathrm{Y}' + \frac{\partial\,(\mathrm{S-P})}{\partial\,v} + \sum_1^k \mu_r \frac{\partial F_r}{\partial v} \\ m\frac{d\zeta}{dt} &= \mathrm{Z}' + \frac{\partial\,(\mathrm{S-P})}{\partial\,w} + \sum_1^k \mu_r \frac{\partial F_r}{\partial w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

Wij merken bovendien op, dat T alleen van ξ, η en ζ afhangt en dat P ξ, η en ζ niet bevat.

Daarom zijn voor de vergelijkingen (18) ook de volgende te schrijven:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\,\xi} \\ m\frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\,\eta} \\ m\frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\,\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Uit de vergelijkingen (19) en (20) zullen wij de vergelijkingen van Lagrange afleiden, d. z. de bewegingsvergelijkingen, bij welke de coördinaten identiek aan de voorwaarden-vergelijkingen

$$F = 0$$

voldoen. Deze algemeene coördinaten zullen wij door q_1, q_2, q_3 enz., in het algemeen door q, voorstellen. Zij zijn $3n - k$ in getal.

Voor deze is

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

en

$$F(q_1 \quad . \quad . \quad . \quad q_{3n-k}, t) \text{ identiek} = 0,$$

$$u = \psi_1 (q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_{3n-k}, t)$$

$$v = \psi_2 (q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_{3n-k}, t)$$

$$w = \psi_3 (q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_{3n-k}, t).$$

De eerste der vergelijkingen (19) vermenigvuldigende met $\frac{\partial u}{\partial q}$, de tweede met $\frac{\partial v}{\partial q}$ en de derde met $\frac{\partial w}{\partial q}$ en de voor alle punten aldus verkregen vergelijkingen optellende, verkrijgt men:

$$\Sigma\, m \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial w}{\partial q} \right) = \left(\mathrm{X}' \frac{\partial u}{\partial q} + \mathrm{Y}' \frac{\partial v}{\partial q} + \mathrm{Z}' \frac{\partial w}{\partial q} \right) +$$

$$+ \Sigma \left[\frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial q} \right] +$$

$$+ \sum_1^k \mu_r\, \Sigma \left(\frac{\partial F_r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial F_r}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial F_r}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial q} \right).$$

Nu is

$$\Sigma \left(\frac{\partial F_r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial F_r}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial F_r}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial q} \right) = \frac{\partial F_r}{\partial q} = 0.$$

De verkregen vergelijking wordt dus

$$\left. \begin{aligned} \Sigma\, m \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial w}{\partial q} \right) &= \Sigma \left(\mathrm{X}' \frac{\partial u}{\partial q} + \mathrm{Y}' \frac{\partial v}{\partial q} + \mathrm{Z}' \frac{\partial w}{\partial q} \right) + \\ + \Sigma \left[\frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q} \right. &\left. + \frac{\partial\,(\mathrm{S}-\mathrm{P})}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial q} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Vermenigvuldigende vervolgens de eerste der vergelijkingen (20) met $\frac{\partial \xi}{\partial q}$, de tweede met $\frac{\partial \eta}{\partial q}$ en de derde met $\frac{\partial \zeta}{\partial q}$ en de aldus voor alle punten verkregen vergelijkingen optellende, verkrijgt men:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\left(\dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial\xi}{\partial q}+\dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial\eta}{\partial q}+\dfrac{dw}{\partial t}\dfrac{\partial\zeta}{\partial q}\right)= \\ =-\Sigma\left[\dfrac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial q}+\dfrac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial q}+\dfrac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial q}\right]. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Daarna trekken wij (22) van (21) af, in aanmerking nemende, dat T alleen van ξ, η en ζ afhangt.

Dan volgt:

$$\begin{array}{l} \Sigma\, m\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{\partial u}{\partial q}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{\partial v}{\partial q}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{\partial w}{\partial q}\right)-\Sigma\, m\left(\dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial\xi}{\partial q}+\dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial\eta}{\partial q}+\dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial\zeta}{\partial q}\right)= \\ \qquad =\Sigma\left(\mathrm{X}'\dfrac{\partial u}{\partial q}+\mathrm{Y}'\dfrac{\partial v}{\partial q}+\mathrm{Z}'\dfrac{\partial w}{\partial q}\right)+ \\ +\Sigma\left[\dfrac{\partial(\mathrm{S-P-T})}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial q}+\dfrac{\partial(\mathrm{S-P-T})}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial q}+\dfrac{\partial(\mathrm{S-P-T})}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial q}+\right. \\ \left.+\dfrac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial q}+\dfrac{\partial(\mathrm{S-P-T})}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial q}+\dfrac{\partial\,(\mathrm{S-P-T})}{\partial\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial q}\right]. \end{array} \quad (23)$$

Deze vergelijking zullen wij op de volgende wijze verder herleiden:

$$u'=\frac{\partial u}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial u}{\partial q_2}q_2'+\ldots\ldots\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial q}=\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial q'}}{\partial q}q_1'+\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial q_2}}{\partial q}q_2'+\ldots\ldots\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial q}=$$

$$=\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\partial q_2}q_2'+\ldots\ldots\frac{\partial\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\partial t}=\frac{d\dfrac{\partial u}{\partial q}}{dt},$$

waarbij, evenals $u'=\dfrac{du}{dt}$, $q'=\dfrac{dq}{dt}$ voorstelt.

Bovendien is:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial q}\left(\dfrac{du}{dt}\xi\right)=\dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial\xi}{\partial q}+\xi\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{du}{dt}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\xi\dfrac{\partial u}{\partial q}\right)=\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{\partial u}{\partial q}+\xi\dfrac{d}{\partial q}\dfrac{\partial u}{dt}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

Trekken wij de vergelijkingen (24) van elkaar af en maken wij daarbij gebruik van de gevonden betrekking $\dfrac{\partial \dfrac{du}{dt}}{\partial q} = \dfrac{d \dfrac{\partial u}{\partial q}}{dt}$, dan volgt

$$\frac{d}{dt}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\xi \frac{du}{dt}\right) = \frac{d\xi}{dt}\frac{\partial u}{\partial q} - \frac{du}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial q}.$$

Op overeenkomstige wijze vindt men

$$\frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial v}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\eta \frac{dv}{dt}\right) = \frac{d\eta}{dt}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{dv}{dt}\frac{\partial \eta}{\partial q},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\zeta \frac{\partial w}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\zeta \frac{dw}{dt}\right) = \frac{d\zeta}{dt}\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{dw}{dt}\frac{\partial \zeta}{\partial q}.$$

Met behulp van deze vergelijkingen verandert (23) in

$$\frac{d}{dt}\Sigma m \left(\xi \frac{\partial u}{\partial q} + \eta \frac{\partial v}{\partial q} + \zeta \frac{\partial w}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\Sigma m \left(\xi \frac{du}{dt} + \eta \frac{dv}{dt} + \zeta \frac{dw}{dt}\right) =$$
$$= \Sigma\left(X' \frac{\partial u}{\partial q} + Y' \frac{\partial v}{\partial q} + Z' \frac{\partial w}{\partial q}\right) + \frac{\partial\,(S-P-T)}{\partial q}. \tag{25}$$

Wij zullen nu stellen $\Sigma m \left(\xi \dfrac{\partial u}{\partial q} + \eta \dfrac{\partial v}{\partial q} + \zeta \dfrac{\partial w}{\partial q}\right) = p$, waarvoor wij op de volgende wijze een andere uitdrukking kunnen vinden.

$$u' = \frac{\partial u}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial u}{\partial q_2} q_2' + \ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial t},$$

waaruit volgt $\dfrac{\partial u'}{\partial q'} = \dfrac{\partial u}{\partial q}$:

bovendien is $\dfrac{\partial \xi}{\partial q'} = \dfrac{\partial u'}{\partial q'}$,

dus $\dfrac{\partial u}{\partial q} = \dfrac{\partial \xi}{\partial q'}$,

en $\Sigma m \left(\xi \dfrac{\partial u}{\partial q} + \eta \dfrac{\partial v}{\partial q} + \zeta \dfrac{\partial w}{\partial q}\right) = \Sigma m \left(\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial q'} + \eta \dfrac{\partial \eta}{\partial q'} + \zeta \dfrac{\partial \zeta}{\partial q'}\right) = \dfrac{\partial T}{\partial q'} = p.$

Met behulp van deze betrekking wordt de vergelijking (25):

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial}{\partial q} \Sigma\, m \left(\xi \frac{du}{dt} + \eta \frac{dv}{dt} + \zeta \frac{dw}{dt}\right) + \\ + \Sigma \left(X' \frac{\partial u}{\partial q} + Y' \frac{\partial v}{\partial q} + Z' \frac{\partial w}{\partial q}\right) + \frac{\partial\,(S-P-T)}{\partial q}. \quad . \quad . \quad (26)$$

Op de volgende wijze kan S worden geëlimineerd.

$$2\,T = \Sigma\, m\, (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

$$S = \Sigma\, m \left\{ \xi\,(w\,\varphi_2 - v\,\varphi_3) + \eta\,(u\,\varphi_3 - w\,\varphi_1) + \zeta\,(v\,\varphi_1 - u\,\varphi_2) \right\},$$

$$2T - S = \Sigma\, m \left\{ \xi\,(-w\,\varphi_2 + v\,\varphi_3 + \xi) + \eta\,(-u\,\varphi_3 + w\,\varphi_1 + \eta) + \\ + \zeta\,(-v\,\varphi_1 + u\,\varphi_2 + \zeta) \right\} = \Sigma\, m \left\{ \xi \frac{du}{dt} + \eta \frac{dv}{dt} + \zeta \frac{dw}{dt} \right\}.$$

Met behulp hiervan wordt (26)

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial(T-P)}{\partial q} + \Sigma \left(X' \frac{\partial u}{\partial q} + Y' \frac{\partial v}{\partial q} + Z' \frac{\partial w}{\partial q}\right)$$

of

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial\,(T-P)}{\partial q} + Q,$$

indien $\Sigma \left(X' \frac{\partial u}{\partial q} + Y' \frac{\partial v}{\partial q} + Z' \frac{\partial w}{\partial q}\right) = Q$ gesteld wordt.

Deze vergelijking is de vergelijking van Lagrange in haar algemeensten vorm.

Wij zullen nu omtrent X', Y' en Z' onderstellen, dat zij zoodanig van u, v, w, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ en t afhangen, dat voor haar een Scheringsche krachtfunctie bestaat. Dit is zulk een functie van u, v, w, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ en t, dat X', Y' en Z' met haar samenhangen door de volgende betrekkingen

$$X' = \frac{d\frac{\partial V}{\partial u'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial u}$$

$$Y' = \frac{d\frac{\partial V}{\partial v'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial v}$$

$$Z' = \frac{d\frac{\partial V}{\partial w'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial w},$$

waarin $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ en $w' = \frac{dw}{dt}$.

Hangt V niet van u', v' en w' af en zijn dus ook X', Y' en Z' van u', v' en w' onafhankelijk, dan gaat de Scheringsche krachtfuntie in de gewone krachtfunctie over, want dan heeft men

$$X' = -\frac{\partial V}{\partial u},\ Y' = -\frac{\partial V}{\partial v} \text{ en } Z' = -\frac{\partial V}{\partial w}.$$

Deze V kan nog expliciet van t afhangen.

Bestaat een Scheringsche krachtfunctie, dan zijn de vergelijkingen van Lagrange verder te herleiden. In dat geval wordt namelijk

$$Q = \Sigma\left[\left(\frac{d\frac{\partial V}{\partial u'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial q} + \left(\frac{d\frac{\partial V}{\partial v'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial q} + \left(\frac{d\frac{\partial V}{\partial w'}}{dt} - \frac{\partial V}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial q}\right] =$$

$$= \Sigma\left[\frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial q}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial q'}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial w'}\frac{\partial w'}{\partial q'}\right)}{dt}\right] -$$

$$- \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial w'}\frac{\partial w'}{\partial q}\right),$$

omdat

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial u'}}{dt}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial q}\right) - \frac{\partial V}{\partial u'}\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial q}\right) - \frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial q} \text{ is}$$

enz.

Q is dus gelijk aan $\Sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial q'} + \frac{\partial V}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial q'} + \frac{\partial V}{\partial w'}\frac{\partial w'}{\partial q'}\right) - \frac{\partial V}{\partial q} =$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial q'} - \frac{\partial V}{\partial q},$$

analoog aan de waarde van X' enz.

En in het geval der Scheringsche krachtfunctie wordt de vergelijking van Lagrange

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial (T-P-V)}{\partial q} + \frac{d\frac{\partial V}{\partial q'}}{dt} \qquad (27)$$

De vergelijkingen (27) zijn $3n-k$ in aantal.

Wij merken nog het volgende op: u, v en w zijn functies van q en t; u', v' en w' zijn functies van q, q' en t en wel lineair ten opzichte van q'; ξ, η en ζ zijn dus ook lineaire functies van q' en bovendien functies van q en t; T is een quadratische (maar niet homogene) functie van q' en bovendien een functie van q en t; P is alleen een functie van q en V een functie van q, q' en t.

HOOFDSTUK II.

Vergelijkingen en functie van Hamilton.

Wij hebben reeds opgemerkt, dat ξ, η en ζ, behalve functies van q en t, lineaire functies van q' zijn en dat T een quadratische functie van q' is. $\frac{\partial T}{\partial q'} = p$ is derhalve een lineaire functie van q'. Door middel van deze is het mogelijk alle q''s lineair in de p's uit te drukken. Ten gevolge daarvan worden T en V functies van q en p. Om nu tot de canonische vergelijkingen van Hamilton te komen slaan wij den volgenden weg in.

Kortheidshalve stellen wij

$$T - V = L, \quad \frac{\partial L}{\partial q'} = r \text{ en } \theta = \Sigma\, rq' - L.$$

Differentiëeren wij de laatste vergelijking naar q en q', dan volgt:

$$d\theta = \Sigma\, rdq' + \Sigma q'dr - \Sigma \frac{\partial L}{\partial q} dq - \Sigma \frac{\partial L}{\partial q'} dq' = \Sigma\, q'dr - \Sigma \frac{\partial L}{\partial q} dq.$$

Beschouwen wij in $\theta = \Sigma rq' - L = \Sigma rq' - T + V$ echter r en q als de veranderlijken, dan is θ ook als een functie van deze in plaats van van q en q' op te vatten. Hierbij doet zich echter een bezwaar voor. V behoeft namelijk niet een quadratische functie van q' te zijn en daarom zal q' over het algemeen niet lineair in r uit te drukken zijn. Beschouwt men θ als een functie van r en q, dan is

$$d\theta = \left(\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) dr + \left(\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial q}\right) dq,$$

waarbij de haakjes zullen aanduiden, dat r en q de veranderlijken zijn.

Uit de twee waarden voor $d\theta$ volgt:

$$q' = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) \quad \text{en} \quad -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial q}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

De vergelijking van Lagrange (27) is ook aldus te schrijven:

$$\frac{d \dfrac{\partial (\mathrm{T}-\mathrm{V})}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial (\mathrm{T}-\mathrm{P}-\mathrm{V})}{\partial q} \quad \text{of} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial (\mathrm{L}-\mathrm{P})}{\partial q}.$$

Nu valt op te merken, dat P niet q' bevat en daarom als functie van q niet veranderen zal bij het vervangen van q' door r. Hieruit volgt, dat de tweede der vergelijking (28) ook aldus te schrijven is:

$$-\frac{\partial (\mathrm{L}-\mathrm{P})}{\partial q} = \left(\frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial q}\right).$$

Met behulp hiervan wordt de vergelijking van Lagrange

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial q},$$

met r en q als onafhankelijk veranderlijken.

Ook is voor de eerste der vergelijkingen (28) te schrijven

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial r}.$$

De canonische vergelijkingen van Hamilton zijn dus:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial r} \quad \text{en} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial q} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Hangt V niet van q' en dus evenmin van r af, dan wordt

$$\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial (T - V)}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial q'} = p$$

en gaat r in p over; in dit geval is q' wel lineair in p uit te drukken (zie het bezwaar op blz. 19) en worden de vergelijkingen van Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial (\theta + P)}{\partial p} = \frac{\partial (\theta_1 + P + V)}{\partial p}$$

$$\text{en } \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial (\theta + P)}{\partial q} = -\frac{\partial (\theta_1 + P + V)}{\partial q},$$

waarin $\theta_1 = \theta - V = \Sigma pq' - T$ is.

Uit de canonische vergelijkingen kunnen wij nog het volgende afleiden.

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial (\theta + P)}{\partial q},$$

$$\frac{\partial (\theta + P)}{\partial r} = \frac{dq}{dt}.$$

Vermenigvuldigen wij deze, dan volgt

$$\frac{\partial (\theta + P)}{\partial r} \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial (\theta + P)}{\partial q} \frac{dq}{dt},$$

en, tellen wij de zoo voor alle q verkregen vergelijkingen samen, dan verkrijgt men

$$\Sigma \left(\frac{\partial (\theta + P)}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial (\theta + P)}{\partial q} \frac{dq}{dt} \right) = 0$$

$$\text{of } \frac{d (\theta + P)}{dt} - \frac{\partial (\theta + P)}{\partial t} = 0,$$

want $\theta + P$ is een functie van r, q en t.

Hangt $\theta + \mathrm{P}$ niet expliciet van t af, dan is

$$\theta + \mathrm{P} = \text{contant}$$

een integraal, die het beginsel van het behoud der levendige kracht uitdrukt. [1])

Het beginsel van Hamilton drukt uit, dat voor de werkelijke beweging tusschen twee standen van het stelsel

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \mathrm{P} - \mathrm{V})\, dt = 0,$$

indien t_0 en t_1 de tijden zijn, op welke de begin- en de eindstand worden ingenomen.

Langs verscheidene wegen kan men zich het stelsel uit den beginstand naar den eindstand gaande denken; al die wegen hebben den begin- en den eindstand gemeen en voor elk is op te maken:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \mathrm{P} - \mathrm{V})\, dt = \left(\Sigma \frac{\partial (\mathrm{T} - \mathrm{P} - \mathrm{V})}{\partial q'} \delta q \right)_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \left(\frac{\partial (\mathrm{T} - \mathrm{P} - \mathrm{V})}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathrm{T} - \mathrm{P} - \mathrm{V})}{\partial q'} \right) \delta q\, dt,$$

omdat $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \Sigma \frac{\partial(\mathrm{T}-\mathrm{P}-\mathrm{V})}{\partial q'} \delta q' dt = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \frac{\partial(\mathrm{T}-\mathrm{P}-\mathrm{V})}{\partial q'} \cdot \frac{d\delta q}{dt} dt =$

$$= \left(\Sigma \frac{\partial(\mathrm{T}-\mathrm{P}-\mathrm{V})}{\partial q'} \delta q \right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \Sigma \frac{\partial(\mathrm{T}-\mathrm{P}-\mathrm{V})}{\partial q'} \delta q\, dt \text{ is.}$$

---

[1]) J. J. Müller, Prof. te Zürich, leidde de vergelijking $\frac{d(\theta + \mathrm{P})}{dt} - \frac{\partial (\theta + \mathrm{P})}{\partial t} = 0$ af uit de karakteristieke functie. Zie „Ueber ein aus der Hamilton'schen Theorie der Bewegung hervorgehendes mechanisches Princip" in „Annalen der Physik und Chemie von Poggendorff" (1874). Bij hem bevat de krachtfunctie de snelheden niet en evenmin behandelt hij het geval der relatieve beweging.

Voor t_0 en t_1 verdwijnen echter δq en daarom is

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T-P-V})\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \left(\frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q'} \right) \delta q\, dt.$$

Voor de werkelijke beweging is bovendien volgens (27)

$$\frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q'} = 0.$$

Bijgevolg is voor haar ook

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T-P-V})\, dt = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

De karakteristieke functie van Hamilton wordt voorgesteld door:

$$\mathrm{W} = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{T-P-V})\, dt,$$

waarin t_0 het oogenblik van den beginstand en t een willekeurig oogenblik aangeeft. W is een functie van q, q' en t. Wij zullen een partiëele differentiaalvergelijking afleiden, die haar bepaalt. Is zij uit die vergelijking bepaald, dan geven differentiaties de betrekkingen tusschen de coördinaten en den tijd.

Evenals bij het beginsel van Hamilton is

$$\delta \mathrm{W} = \left(\Sigma \frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q'} \delta q \right)_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \left\{ \frac{\partial(\mathrm{T-V-P})}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathrm{T-V-P})}{\partial q'} \right\} \delta q dt.$$

Nu is voor de bovenste grens (t) δq niet gelijk aan 0 en daarom wordt

$$\delta \mathrm{W} = \left(\Sigma \frac{\partial(\mathrm{T-P-V})}{\partial q'} \delta q \right)_{t_0}^{t} = \left(\Sigma \frac{\partial(\mathrm{L-P})}{\partial q'} \delta q \right)_{t_0}^{t} = \left(\Sigma r \delta q \right)_{t_0}^{t} =$$

$$= \Sigma r \delta q - \Sigma r_0 \delta q_0,$$

waarbij t_0 en q_0 de waarden van r en q voorstellen op het tijdstip t_0.

In W komen de grootheden q' ten getale van $3n$-k voor; wij kunnen ze geëlimineerd denken door de grootheden q en q_0 en t en dus W als een functie van q, q_0 en t beschouwen. Dan is

$$\delta W = \Sigma \frac{\partial W}{\partial q} \delta q + \Sigma \frac{\partial W}{\partial q_0} \delta q_0.$$

Uit de twee waarden van δW volgt:

$$r = \frac{\partial W}{\partial q} \quad \text{en} \quad -r_0 = \frac{\partial W}{\partial q_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

De eerste leden dezer vergelijkingen zijn functies van q, q' en t, de tweede van q, q_0 en t.

q_0 bevat t niet, q wel, en daarom is

$$\frac{dW}{dt} = T - V - P = \frac{\partial W}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial W}{\partial q} q' = \frac{\partial W}{\partial t} + \Sigma r q',$$

of $$\frac{\partial W}{\partial t} + \Sigma r q' - L + P = 0$$

of $$\frac{\partial W}{\partial t} + \theta + P = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

In deze vergelijking vervangen wij r door $\frac{\partial W}{\partial q}$; dan volgt een partiëele differentiaalvergelijking van de eerste orde ter bepaling van W als een functie van t, q en constanten. q' moet namelijk door middel van $\frac{\partial L}{\partial q'} = r$ geëlimineerd worden.

Wij zullen nu bewijzen, dat de verkregen waarde van W, naar elk der constanten gedifferentiëerd, tweede integralen der bewegingsvergelijkingen geven, of, m. a. w., wij zullen bewijzen, dat uit

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \text{constant}$$

$$\text{en } \frac{\partial W}{\partial q} = r$$

de canonische vergelijkingen van Hamilton volgen, wanneer a

een der in W voorkomende constanten (zij zijn $3n-k$ in getal) is.

Er komt nl.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial a}=0$$

$$\text{of}\quad \frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial a}+\Sigma\frac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial a}\frac{dq}{dt}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{A})$$

Maar (32) geeft

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial a}+\Sigma\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial a}=0$$

$$\text{of}\quad \frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial a}+\Sigma\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial r}\frac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial a}=0\quad\ldots\ldots\ (\mathrm{B})$$

Uit (A) en (B) volgt

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial r}\quad\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{C})$$

Ook is

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial q_s}+\Sigma\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q_s}-\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial q_s}=0$$

$$\text{of}\quad \frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial q_s}+\Sigma\frac{\partial\frac{\partial W}{\partial q_s}}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial q_s}=0$$

$$\text{of}\quad \frac{dr_s}{dt}+\frac{\partial(\theta+\mathrm{P})}{\partial q_s}=0\quad\ldots\ldots\ (\mathrm{D}).$$

(C) en (D) zijn de canonische vergelijkingen.

Over het algemeen is het opstellen der vergelijking (32) niet moeilijk; meer moeite veroorzaakt het integreeren van (32) en in de meeste gevallen is dit nog niet mogelijk. De vergelijking (32) is zeer algemeen; in haar liggen verscheidene bijzondere gevallen opgesloten. Wij zullen er eenige van nagaan.

Bijzondere gevallen. 1^0. De bewegelijke oorsprong en de bewegelijke assen zijn vast. Zij vallen op t_0 met den vasten oorsprong en de vaste assen samen. De relatieve beweging gaat dan over in de absolute beweging. Men heeft dan $P = 0$ en $S = 0$ (zie blz. 11), $\xi = u'$, $\eta = v'$, $\zeta = w'$, $T = \frac{1}{2} \Sigma m (u'^2 + v'^2 + w'^2)$ en (32) wordt

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \theta = 0.$$

De canonische vergelijkingen zijn in dit geval:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \text{ en } \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial \theta}{\partial q}$$

en de karakteristieke functie is:

$$W = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt.$$

2^0. P verdwijnt ook in het geval van $\frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0, \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0, \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0,$ dus wanneer de bewegelijke oorsprong een eenparige rechtlijnige beweging heeft; hiertoe behoort ook het geval, dat deze oorsprong met den vasten oorsprong blijft samenvallen. De bewegelijke assen veranderen echter doorloopend van richting.

3^0. De voorwaardenvergelijkingen $F = 0$ bevatten den tijd niet expliciet; dan bevatten evenmin $u = \psi_1 (q\,.\ \ .\ \ .t), v = \psi_2 (q.\ \ .\ \ .t)$ en $w = \psi_3\ (q.\ \ .\ \ .t)$ (zie blz. 12) den tijd expliciet. u', v' en w' zijn dan homogene lineaire functies van q'; veranderen dan bovendien de bewegelijke assen niet van richting, dan is $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$ en $\zeta = u'$, $\eta = v'$ en $\zeta = w'$; waaruit volgt, dat in dat geval T een homogene quadratische functie van q' is. Wij kunnen dan schrijven

$$2\,T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'} q' = \Sigma p q' \text{ en } \theta_1 = \Sigma p q' - T = T.$$

4^0. Ons puntenstelsel zij onveranderlijk en wij kiezen zijn massamiddelpunt tot bewegelijken oorsprong: dan is $\Sigma mu = 0$, $\Sigma mv = 0$ en $\Sigma mw = 0$, dus $P = 0$. Omdat nu S in de vergelijkingen van LAGRANGE, de canonische vergelijkingen en de partiëele differentiaalvergelijking voor W niet voorkomt, bevatten dan al deze vergelijkingen de grootheden, die de draaiingen der bewegelijke assen aangeven, slechts voor zoover zij in ξ, η en ζ voorkomen.

HOOFDSTUK III.

Partiëele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

Gevraagd wordt een functie (W) van n onafhankelijk veranderlijke (q_1 . . . q_n) zoodanig te bepalen, dat haar differentiaalquotiënten voldoen aan

$$F = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin F een functie is van q_i en $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ (i loopende van 1 tot n) en C een constante is.

Hebben wij n vergelijkingen van den vorm (1) bepaald, die ten opzichte der grootheden $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ van elkaar onafhankelijk zijn, dan zijn uit haar deze differentiaalquotiënten op te lossen en de voor haar verkregen waarden in $\Sigma \frac{\partial W}{\partial q} dq$ te zetten.

$\Sigma \frac{\partial W}{\partial q} dq$ moet dan een volkomen differentiaal worden en daarom moeten de n functies F aan eenige voorwaarden voldoen.

Sophus Lie heeft een stelling gevonden, die bij de oplossing van part. diff. verg. van de eerste orde van veel nut kan zijn [1].

Zij luidt

„Moet een functie W van n onafhankelijk veranderlijken q ge-

[1]) Mayer „Die Lie'sche Integrationsmethode" in Math. Ann. VI.

vonden worden, die bepaald is door m ($\leq n$) gegeven, van elkaar onafhankelijke vergelijkingen tusschen deze veranderlijken en de partiëele differentiaalquotiënten

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

dan bestaat (mits de gegeven vergelijkingen aan eenige voorwaarden voldoen) een enkele partiëele differentiaalvergelijking van de eerste orde met $n - m + 1$ onafhankelijk veranderlijken, die W volkomen bepaalt".

Deze voorwaarden zijn dezelfde als die, welke Σpdq tot een volkomen differentiaal maken.

Wij zullen daarom eerst deze voorwaarden afleiden.

Laten $F_1 = C_1$, $F_2 = C_2$, $F_3 = C_3$. . . $F_m = C_m$, waarin C_1, C_2 . . . C_m constanten zijn, de gegeven differentiaal-vergelijkingen zijn met de n onafhankelijk veranderlijken q_i. Uit $p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}$ en $p_s = \frac{\partial W}{\partial q_s}$ volgt

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_r \, \partial q_s} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \, \partial q_r} = \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$$

of

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r} = 0.$$

$\frac{n(n-1)}{2}$ dergelijke voorwaarden bestaan en deze zijn noodig en voldoende, opdat Σpdq een volkomen differentiaal zij.

Uit haar zullen wij de voorwaarden afleiden, aan welke de functies F moeten voldoen. Nemen wij twee willekeurige dier functies, F_r en F_s, dan is, voor alle waarden van i van 1 tot n,

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_i} + \frac{\partial F_r}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F_r}{\partial p_2}\frac{dp_2}{\partial q_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\partial F_r}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_i} + \frac{\partial F_s}{\partial p_1}\frac{dp_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F_s}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\partial F_s}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0.$$

Uit elk paar dezer vergelijkingen elimineeren wij $\frac{\partial p_i}{\partial q_i}$; dan ontstaan de volgende n vergelijkingen:

$$\left(\frac{\partial F_r}{\partial q_i}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial q_i}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\right)+\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_r}{\partial p_l}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial p_l}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_l}{\partial q_i}=0.$$

Tellen wij deze voor i van 1 tot n samen, dan volgt

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial F_r}{\partial q_i}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial q_i}\frac{\partial F_r}{\partial q_i}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_r}{\partial p_l}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial p_l}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_l}{\partial q_i}=0.$$

Hierin is de coëfficiënt van $\frac{\partial p_m}{\partial q_k}$ gelijk aan

$$\frac{\partial F_r}{\partial p_m}\frac{\partial F_s}{\partial p_k}-\frac{\partial F_s}{\partial p_m}\frac{\partial F_r}{\partial p_k}$$

en die van $\frac{\partial p_k}{\partial q_m}$ gelijk aan

$$\frac{\partial F_r}{\partial p_k}\frac{\partial F_s}{\partial p_m}-\frac{\partial F_s}{\partial p_k}\frac{\partial F_r}{\partial p_m}.$$

Omdat nu $\frac{\partial p_m}{\partial q_k}=\frac{\partial p_k}{\partial q_m}$ moet zijn, is de som der termen met de genoemde coëfficiënten $=0$ en herleidt zich de bovengenoemde vergelijking tot

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial F_r}{\partial q_i}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial q_i}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\right)=0,$$

gewoonlijk geschreven

$$(F_r,\ F_s)=0,$$

voor alle waarden van r en s van 1 tot m.

Is omgekeerd dit laatste waar, dan volgt uit deze vergelijking en uit de vergelijkingen op blz. 29

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_r}{\partial p_l}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}-\frac{\partial F_s}{\partial p_l}\frac{\partial F_r}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_l}{\partial q_i}=0.$$

Het geheele getal dezer vergelijkingen bedraagt $\frac{1}{2}\, m(m-1)$; bovendien zijn zij lineair t. o. v.

$$\frac{\partial p_l}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_l},$$

gevende $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ grootheden. Omdat nu $n \geqq m$ is, voldoen aan haar alleen

$$\frac{\partial p_l}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_l} = 0.$$

Opdat derhalve $\Sigma p d q$ een totale differentiaal zij, is noodig en voldoende

$$(F_r, F_s) = 0,$$

waarin r en s loopen van 1 tot m.

Lie noemt de functies F, die zoodanig zijn, dat voor elk paar

$$(F_r, F_s) = 0$$

is, in involutie.

Keeren wij nu terug tot de gegeven differentiaalvergelijking

$$F_1 = C$$

en trachten wij $n-1$ andere functies F te vinden, die met F_1 in involutie zijn, dan moeten die functies voldoen aan de lineaire partiëele differentiaal-verg.

$$(F_1, F) = 0.$$

Is F_2 een functie, die aan deze voldoet, dan moet F_3 bepaald worden uit

$$(F_1, F) = 0 \text{ en } (F_2, F) = 0.$$

Voldoet aan deze twee F_3, dan moet F_4 bepaald worden uit

$$(F_1, F) = 0,\ (F_2, F) = 0,\ (F_3, F) = 0.$$

Zoo voortgaande, komen wij tot n functies F. Elk dezer stelt men gelijk aan een constante en uit de komende vergelijkingen lost men $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ op om met de verkregen waarden $\Sigma \frac{\partial W}{\partial q_i}\, dq_i$ tot een volkomen differentiaal te maken (dW), van welke men door integraties tot W opklimt.

Past men op de n vergelijkingen $F = C$ het theorema van Lie toe, dan komt men terstond tot één quadratuur. Voor dit bijzondere geval ($m = n$) zullen wij genoemd theorema bewijzen, omdat er bij de volgende vraagstukken in dezen vorm gebruik van gemaakt wordt.

Denken wij namelijk $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$ uitgedrukt in de q_i en zij dan

$$p_i = f_i \ (i \text{ loopende van 1 tot } n),$$

dan zijn de functies $p_i - f_i$ even goed in involutie als de functies F_i.

Nemen wij namelijk twee dier functies, $p_r - f_r$ en $p_s - f_s$, dan wordt

$$(p_r - f_r,\ p_s - f_s) = \frac{\partial f_s}{\partial q_r} - \frac{\partial f_r}{\partial q_s}.$$

Denken wij ons de waarden f_i voor p_i gesubstitueerd in F_i, dan volgt uit

$$(F_r, F_s) = 0$$

evenals op blz. 30

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial p_l} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_s}{\partial p_l} \frac{\partial F_r}{\partial p_i} \right) \frac{\partial f_l}{\partial q_i} = 0.$$

Die vergelijkingen zijn $\frac{1}{2} n (n-1)$ in aantal en lineair t. o. v. de $\frac{1}{2} n (n-1)$ grootheden

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_l},$$

$$\text{waaruit} \quad \frac{\partial f_s}{\partial q_r} - \frac{\partial f_r}{\partial q_s} = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

Nu voeren wij de volgende substututies in:

$$q_1 = u_1$$
$$q_i = a_i + (u_1 - a_1)\, u_i,$$

waarbij i loopt van 2 tot n en waarin a_1 en a_i onbepaalde in de gegeven differentiaal-vergelijkingen niet voorkomende constanten zijn. Wij zullen dus W bepalen als een functie van u_1 en u_i. Dan is:

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = \frac{\partial W}{\partial q_1} + \sum_{i=2}^{i=n} u_i \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} (u_1 - a_1),$$

i loopende van 2 tot n.

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = f_1 + \sum_{i=2}^{i=n} f_i u_i = H_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = (u_1 - a_1) f_i = H_i,$$

i loopende van 2 tot n,
waarin H_1 en H_i functies zijn van de grootheden u. Deze zijn zoodanig, dat $H_1 - \frac{\partial W}{\partial u_1}$ en $H_r - \frac{\partial W}{\partial u_r}$ nog in involutie zijn.

Wij verkrijgen namelijk

$$\left(H_1 - \frac{\partial W}{\partial u_1}, H_r - \frac{\partial W}{\partial u_r}\right) = \frac{\partial H_r}{\partial u_1} - \frac{\partial H_1}{\partial u_r} =$$

$$= f_r + (u_1 - a_1) \frac{\partial f_r}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_r} - f_r - \sum_{i=2}^{i=n} u_i \frac{\partial f_i}{\partial u_r} =$$

$$= (u_1 - a_1) \left[\frac{\partial f_r}{\partial q_1} + \sum_{i=2}^{i=n} u_i \frac{\partial f_r}{\partial q_i}\right] - (u_1 - a_1) \left[\frac{\partial f_1}{\partial q_r} + \sum_{i=2}^{i=n} u_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r}\right] = 0.$$

Nu volgt uit

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = H_1$$

$$W = \int_{a_1}^{u_1} H_1 \, du_1 + \varphi(u_i),$$

i loopende van 2 tot n.

Leiden wij hieruit $\frac{\partial W}{\partial u_i}$ af en substitueeren wij de waarde daarvan in de vergelijking

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = H_i,$$

dan volgt

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \int_{a_1}^{u_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_i} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i},$$

hetgeen volgens de gegeven differentiaalvergelijking voor $u_1 = a_1$ gelijk aan 0 moet worden; stellen wij $u_1 = a_1$, dan wordt

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\right)_{u_1 = a_1} = \int_{a_1}^{a_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_i} du_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_{u_1 = a_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_{u_1 = a_1} = 0.$$

Maar φ bevat u_1 niet; derhalve moet steeds $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0$ zijn of φ moet een constante zijn, die 0 is, als voor $u_1 = a_1$ $W = 0$ genomen wordt.

De eenige quadratuur is dus

$$W = \int_{a_1}^{u_1} H_1 \, du_1,$$

waarin $u_2, u_3 \dots . u_n$ bij de integratie constant genomen worden.

Om F_2 te bepalen uit $(F_1, F) = 0$ moet men een integraal bepalen van

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{\frac{\partial F_1}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial F_1}{\partial q_2}} = \dots \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial F_1}{\partial q_n}} = \\ = -\frac{dq_1}{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}} = -\frac{dq_2}{\frac{\partial F_1}{\partial p_2}} = \dots = -\frac{dq_n}{\frac{\partial F_1}{\partial p_n}}, \end{aligned} \qquad (A)$$

die een of meer der grootheden p bevat. Is $F_2 = 0$ zoo'n integraal, dan is $(F_1, F_2) = 0$.

Om F_3 te bepalen uit

$$(F_1, F)=0 \quad \text{en} \quad (F_2, F)=0$$

bepaalt men een andere integraal van A. Is $\varphi_1=0$ zulk een integraal en is

$$(F_1, \varphi_1)=0 \quad \text{en} \quad (F_2, \varphi_1)=0,$$

dan is $F_3=\varphi_1$, indien φ_1 een of meer der grootheden p bevat. Bevat φ_1 geen der differentiaalquotiënten p, dan is zij ons van geen nut. Is φ_1 echter zoodanig, dat $(F_2, \varphi_1)=\varphi_2$ is [1]), dan is ook

$$(F_1, \varphi_2)=0.$$

Om dit te bewijzen merken wij op, dat voor drie functies, A, B en C, steeds is

$$((A, B), C)+((B, C), A)+((C, A), B)=0.$$

Hierin nemende $F_1=A$, $F_2=B$ en $\varphi_1=C$, verkrijgt men:

$$((F_1, F_2), \varphi_1)+((F_2, \varphi_1), F_1)+((\varphi_1, F_1), F_2)=0,$$

waarin is

$$(F_1, F_2)=0, \ (F_1, \varphi_1)=0 \ \text{en} \ (F_2, \varphi_1)=\varphi_2.$$

Derhalve

$$(F_1, \varphi_2)=0.$$

De weg, die gevolgd moet worden, is nu deze:

Men bepaalt achtereenvolgens

$$(F_2, \varphi_1)=\varphi_2$$
$$(F_2, \varphi_2)=\varphi_3$$
$$(F_2, \varphi_3)=\varphi_4$$
$$(F_2, \varphi_4)=\varphi_5 \ \text{enz.};$$

dan komt men eindelijk tot een functie φ_i, die afhangt van de vorige, want alle vergelijkingen $\varphi_i=0$ zijn integralen van (A) op blz. 34 en het aantal dezer integralen is eindig ($2n$—1 hoogstens).

---

1) In welk geval φ_1 niet noodzakelijk een der grootheden p moet bevatten.

φ_{i+1} hangt dan ook van F_1, F_2, φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}$ af, want

$$\varphi_{i+1} = (F_2, \varphi_i) = (F_2, F)\frac{\partial \varphi}{\partial F_1} + (F_2, F_2)\frac{\partial \varphi}{\partial F_2} + (F_2, \varphi_1)\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1} +$$

$$+ \ldots + (F_2, \varphi_{i-1})\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{i-1}} = \sum_{r=1}^{r=i-1} (F_2, \varphi_r)\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_r} = \sum_{r=1}^{r=i-1} \varphi_{r+1}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_r}.$$

Dit is een functie van F_1, F_2, $\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}$.

F_3 mag dan ook beschouwd worden als een functie van deze. Dan moet zijn

$$(F_2, F_3) = (F_2, F_1)\frac{\partial F_3}{\partial F_1} + (F_2, F_2)\frac{\partial F_3}{\partial F_2} + \sum_{r=1}^{r=i-1} (F_2, \varphi_r)\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_r} =$$

$$= \sum_{r=1}^{r=i-1} \varphi_{r+1}\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_r} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Dit is weer een lineaire partiëele differentiaalvergelijking, met welke nu verder gewerkt moet worden.

Is φ_i identiek 0, dan is voor F_3 te nemen φ_{i-1}, mits deze een of meer der grootheden p bevat.

Is $\varphi_i =$ constant, dan is steeds een functie te bepalen, die aan (B) voldoet en deze functie is voor F_3 te nemen, mits $i > 2$ zij.

Om F_4 te vinden moet eerst een tweede functie bepaald worden, voldoende aan

$$(F_1, F) = 0 \text{ en } (F_2, F) = 0.$$

Met deze en met F_3 gaat men daarna op dezelfde wijze te werk als met de φ en F_2 bij de bepaling van F_3.

HOOFDSTUK IV.

Toepassingen.

Vraagstuk I.

Gevraagd de karakteristieke functie te bepalen bij de beweging van twee punten, die elkaar aantrekken met een kracht, die een functie van hun afstand is, terwijl op ieder van deze een kracht werkt, die naar een vast punt is gericht en evenredig is met den afstand tot dat vaste punt.

Zij het vaste punt de oorsprong van een vast rechthoekig coördinatenstelsel. De punten hebben respectievelijk tot massa's m_1 en m_2 en tot coördinaten $(x_1\, y_1\, z_1)$ en $(x_2\, y_2\, z_2)$.

De karakteristieke functie (W) moet nu voldoen aan de part. diff. verg.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0,$$

waarin

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2),$$
$$V = -\left[\tfrac{1}{2} k m_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} k m_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)\right],$$

waarbij ϱ_1 en ϱ_2 de afstanden der punten tot den oorsprong zijn en ϱ hun onderlinge afstand is.

W moet dus bepaald worden uit

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) -$$
$$- (\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f\varrho) = 0.$$

Bekend is, dat

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_1'} = m_1 x_1',$$
$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = \frac{\partial T}{\partial y_1'} = m_1 y_1',$$
$$\frac{\partial W}{\partial z_1} = \frac{\partial T}{\partial z_1'} = m_1 z_1',$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \frac{\partial T}{\partial x_2'} = m_2 x_2',$$
$$\frac{\partial W}{\partial y_2} = \frac{\partial T}{\partial y_2'} = m_2 y_2',$$
$$\frac{\partial W}{\partial z_2} = \frac{\partial T}{\partial z_2'} = m_2 z_2',$$

waaruit

$$x_1' = \frac{1}{m_1} \frac{\partial W}{\partial x_1},$$
$$y_1' = \frac{1}{m_1} \frac{\partial W}{\partial y_1},$$
$$z_1' = \frac{1}{m_1} \frac{\partial W}{\partial z_1},$$
$$x_2' = \frac{1}{m_2} \frac{\partial W}{\partial x_2},$$
$$y_2' = \frac{1}{m_2} \frac{\partial W}{\partial y_2},$$
$$z_2' = \frac{1}{m_2} \frac{\partial W}{\partial z_2}.$$

Onze part. diff. verg. is derhalve

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m_1}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)^2\right] + \frac{1}{2m_2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_2}\right)^2\right] - [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)] = 0.$$

Om haar op te lossen schrijven wij

$$\frac{\partial W}{\partial t} = [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)] -$$
$$- \frac{1}{2m_1}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)^2\right] -$$
$$- \frac{1}{2m_2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_2}\right)^2\right] = - h,$$

waarbij h een constante is.

Dan is

$$W = - ht + W'$$

en

$$\frac{1}{2m_1}\left[\left(\frac{\partial W'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial z_1}\right)^2\right] + \frac{1}{2m_2}\left[\left(\frac{\partial W'}{\partial x_2}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial W'}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial z_2}\right)^2\right] - [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)] = h$$

of, indien wij $\frac{\partial W'}{\partial x} = p$, $\frac{\partial W'}{\partial y} = q$ en $\frac{\partial W'}{\partial z} = r$ stellen,

$$\frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) -$$
$$- [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)] = h.$$

Stellen wij het eerste lid dezer vergelijking F_1, dan is ons doel vijf functies, F_2 . . . F_5, te bepalen, die met F_1 in involutie zijn en uit welke in verbinding met F_1 de grootheden p, q en r kunnen opgelost worden.

Daartoe beginnen wij met het eenvoudige geval, dat de aanvangssnelheden der punten met die punten en den coördinatenoorsprong in één plat vlak liggen. Wij kunnen dan met vlakcöordinaten werken en hebben

$$F_1 = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2) - [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)].$$

F_2 moet nu bepaald worden uit

$$(F_1, F) = 0.$$

Een functie, die hieraan voldoet, is gemakkelijk te bepalen uit de omstandigheid, dat voor de beweging der twee punten de wet der sectoren moet gelden, d. w. z., dat
$m_1(y_1 x_1' - x_1 y_1') + m_2(y_2 x_2' - x_2 y_2') =$ constant $= C$ moet zijn.

De functie, in het eerste lid dezer vergelijking, die men ook aldus kan schrijven:

$$y_1 p_1 - x_1 q_1 + y_2 p_2 - x_2 q_2,$$

voldoet aan de vergelijking

$$(F_1, F) = 0,$$

d. i. aan

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial p_2} +$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F}{\partial q_2} = 0.$$

Voeren wij namelijk de aangegeven bewerkingen uit, dan volgt

$$-\frac{p_1 q_1}{m_1} + \left(k\, m_1 x_1 + m_1 m_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) y_1 -$$
$$-\frac{p_2 q_2}{m_2} + \left(k\, m_2 x_2 + m_1 m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) y_2 +$$
$$+\frac{p_1 q_1}{m_1} - \left(k\, m_1 y_1 + m_1 m_2 \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) x_1 +$$
$$+\frac{p_2 q_2}{m_2} - \left(k\, m_2 y_2 + m_1 m_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\right) x_2 = 0.$$

Wij kunnen dus schrijven

$$F_2 = y_1 p_1 - x_1 q_1 + y_2 p_2 - x_2 q_2.$$

Nu moeten wij F_3 zoeken, welke functie voldoen moet aan

$$(F_1, F) = 0 \text{ en } (F_2, F) = 0.$$

Daartoe bepalen wij eerst een functie, voldoende aan

$$(F_2, \varphi) = 0,$$

d. i. aan $y_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + q_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1} - x_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} - p_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1} + y_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + q_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2} - x_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2} - p_2 \dfrac{\partial p}{\partial q_2} = 0.$

Om zulk een functie te verkrijgen moet een integraal bepaald worden van het volgend stel totale diff. verg.:

$$\frac{dx_1}{y_1}=\frac{dp_1}{q_1}=\frac{dy_1}{-x_1}=\frac{dq_1}{-p_1}=\frac{dx_2}{y_2}=\frac{dp_2}{q_2}=\frac{dy_2}{-x_2}=\frac{dq_2}{-p_2},$$

waaruit wij afleiden

$$\frac{d\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)}{m_1\,x_1+m_2\,x_2}=\frac{d\,(m_1\,y_1+m_2\,y_2)}{-(m_1\,x_1+m_2\,x_2)},$$

derhalve

$$(m_1\,x_1+m_2\,x_2)^2+(m_1\,y_1+m_2\,y_2)^2=\text{constant}$$

en

$$(m_1\,x_1+m_2\,x_2)^2+(m_1\,y_1+m_2\,y_2)^2$$

is een functie, voldoende aan $(F_2, \varphi)=0$.

Zij voldoet echter niet aan $(F_1, \varphi)=0$ en bovendien, al voldeed zij wel aan deze vergelijking, zij kan ons niet voor F_3 dienen, omdat zij niet een der diff. quot. p of q bevat. Voor de bepaling van F_3 is zij ons echter wel van nut. Stellen wij haar namelijk voor door φ_1, dan is $(F_2, \varphi_1)=0$ en

$$(F_1, \varphi_1)=2\,[(p_1+p_2)\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)+(q_1+q_2)\,(m_1\,y_1+m_2\,y_2)]=\varphi_2.$$

Uit de bovenstaande lineaire totale diff. verg. leiden wij verder af:

$$\frac{d\,(p_1+p_2)}{q_1+q_2}=\frac{d\,(q_1+q_2)}{-(p_1+p_2)},$$

waaruit

$$(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2=\text{constant}.$$

Stellen wij nu $(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2=\psi_1$, dan is

$$(F_2, \psi_1)=0$$

en

$$(F_1, \psi_1)=2k\,[(p_1+p_2)\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)+(q_1+q_2)\,(m_1\,y_1+m_2\,y_2)=\psi_2.$$

Uit de functies φ_2 en ψ_2 leidt men gemakkelijk af, dat voor F_3 genomen kan worden

$$(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 - k(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 - k(m_1 y_1 + m_2 y_2)^2.$$

Voor F_4 moet nu genomen worden een functie, voldoende aan:

$$(F_1, F) = 0,\ (F_2, F) = 0 \text{ en } (F_3, F) = 0.$$

De laatste is, voluit geschreven,

$$m_1 k(m_1 x_1 + m_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial p_1} + (p_1 + p_2)\frac{\partial F}{\partial x_1} + m_2 k(m_1 x_1 + m_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial p_2} +$$
$$+ (p_1 + p_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + m_1 k(m_1 y_1 + m_2 y_2)\frac{\partial F}{\partial q_1} + (q_1 + q_2)\frac{\partial F}{\partial y_1} +$$
$$+ m_2 k(m_1 y_1 + m_2 y_2)\frac{\partial F}{\partial q_2} + (q + q_2)\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0.$$

Een functie, die hieraan voldoet, moet het eerste lid van een tot 0 herleide integraal zijn van het volgend stel vergelijkingen:

$$\frac{dp_1}{m_1 k(m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \frac{dx_1}{p_1 + p_2} = \frac{dp_2}{m_2 k(m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \frac{dx_2}{p_1 + p_2} =$$
$$= \frac{dq_1}{m_1 k(m_1 y_1 + m_2 y_2)} = \frac{dy_1}{q_1 + q_2} = \frac{dq_2}{m_2 k(m_1 y_1 + m_2 y_2)} = \frac{dy_2}{q_1 + q_2}.$$

Hieruit leidt men af:

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{(m_1 + m_2)k(m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \frac{d(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{(m_1 + m_2)(p_1 + p_2)}$$

en

$$(p_1 + p_2)^2 - k(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 = \text{constant}.$$

Stellen wij dus $\varphi_1 = (p_1 + p_2)^2 - k(m_1 x_1 + m x_2)^2$, dan is

$$(F_3, \varphi_1) = 0$$

en $(F_2, \varphi_1) = 2[-(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) + k(m_1 x_1 + m_2 x_2)(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \varphi_2$,
$(F_2, \varphi_2) = 2[(q_1 + q_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 + k(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 - k(m_1 y_1 + m_2 y_2)] = \varphi_3$,
$(F_2, \varphi_3) = 8[(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) - k(m_1 x_1 + m_2 x_2)(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \varphi_4 = -4\varphi_2$.

Volgens B van blz. 36 is nu, om F_4 te bepalen, een integraal te nemen van

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{d\varphi_2}{\varphi_3}=\frac{d\varphi_3}{\varphi_4},$$

d. i. van

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{d\varphi_2}{\varphi_3}=\frac{d\varphi_3}{-4\,\varphi_2},$$

waaruit

$$\tfrac{1}{2}\varphi_3{}^2+2\,\varphi_2{}^2=\text{constant}.$$

Derhalve is de functie, die voldoet zoowel aan $(F_2, F)=0$ als aan $(F_3, F)=0$

$$\psi=\tfrac{1}{2}\,\varphi_3{}^2+2\varphi_2{}^2.$$

Opdat deze voor F_4 genomen kan worden, moet zij $(F_1\,F)=0$ maken. Bepalen wij (F_1, ψ), dan vinden wij:

$$\begin{aligned}
\varphi_3\Bigg[&\left(m_1\,kx_1+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)4\,(p_1+p_2)-p_1\,4\,k\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)+\\
&+\left(m_2\,kx_2+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)4\,(p_1+p_2)-p_2\,4\,k\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)-\\
&-\left(m_1\,ky_1+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)4\,(q_1+q_2)+q_1\,4\,k\,(m_1\,y_1+m_2\,y_2)-\\
&-\left(m_2\,ky_2+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)4\,(q_1+q_1)+q_2\,4\,k\,(m_1\,y_1+m_2\,y_2)\Bigg]+\\
+4\,\varphi_2\Bigg[&\left(m_1\,k\,x_1+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)2\,(q_1+q_2)-\frac{p_1}{m_1}2\,km_1\,(m_1y_1+m_2y_2)+\\
&+\left(m_2\,k\,x_2+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)2\,(q_1+q_2)-\frac{p_2}{m_2}2\,km_2\,(m_1\,y_1+m_2y_2)+\\
&+\left(m_1\,k\,y_1+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)2\,(p_1+p_2)-\frac{q_1}{m_1}2\,km_1\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)+\\
&+\left(m_2\,k\,y_2+m_1\,m_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)2\,(p_1+p_2)-\frac{q_2}{m_2}2\,km_2\,(m_1\,x_1+m_2\,x_2)\Bigg]=0.
\end{aligned}$$

Wij kunnen dus voor F_4 nemen $\frac{1}{2}\,\varphi_3{}^2+2\,\varphi_2{}^2$ en hebben dan de volgende vier van elkaar onafhankelijke vergelijkingen, uit welke p_1, q_1, p_2 en q_2 als functies van x_1, y_1, x_2 en y_2 bepaald moeten worden.

$$\frac{1}{2m_1}(p_1^2+q_1^2)+\frac{1}{2m_2}(p_2^2+q_2^2)-[\tfrac{1}{2}km_1\varrho_1^2+\tfrac{1}{2}km_2\varrho_2^2+m_1m_2f(\varrho)]=h.$$

$$y_1p_1-x_1q_1+y_2p_2-x_2q_2=C_1$$

$$(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2-k(m_1x_1+m_2x_2)^2-k(m_1y_1+m_2y_2)^2=C_2.$$

$$[(q_1+q_2)^2-(p_1+p_2)^2+k(m_1x_1+m_2x_2)^2-k(m_1y_1+m_2y_2)^2]+$$
$$+4[k(m_1x_1+m_2x_2)(m_1y_1+m_2y_2)-(p_1+p_2)(q_1+q_2)]^2=C_3.$$

Ten einde deze vergelijkingen op te lossen stellen wij ter bekorting

$p_1+p_2=P$, $q_1+q_2=Q$, $m_1x_1+m_2x_2=X$ en $m_1y_1+m_2y_2=Y$.

Dan worden de laatste twee

$$P^2+Q^2-k(X^2+Y^2)=C_2,$$

$$[Q^2-P^2+k(X^2-Y^2)]^2+4[kXY-PQ]^2=C_3.$$

Ontwikkelen wij de laatste, dan komt er na eenige herleiding

$$[Q^2+P^2-k(X^2+Y^2)]^2+4k(XQ-YP)^2=C_3.$$

of (in verband met de functie F_3)

$$4k(XQ-YP)^2=C_3-C_2^2,$$

d. i.
$$XQ-YP=C_4.$$

De vierde vergelijking is dus te vervangen door

$$(m_1x_1+m_2x_2)(q_1+q_2)-(m_1y_1+m_2y_2)(p_1+p_2)=C_3.$$

Uit de verkregen vier vergelijkingen kunnen wij bepalen

$$p_1=f_1, p_2=f_2, q_1=f_3 \text{ en } q_2=f_4.$$

Maken wij nu gebruik van het op blz. 32 genoemde theorema van LIE, dan moeten wij beginnen met in bovengenoemde vergelijkingen te stellen

$$x_1 = u_1,$$
$$x_2 = a_2 + (u_1 - a_1)\, u_2,$$
$$y_1 = b_1 + (u_1 - a_1)\, v_1,$$
$$y_2 = b_2 + (u_1 - a_1)\, v_2.$$

Hierdoor worden p_1, q_1, p_2 en q_2 als functies van u_1, v_1, u_2 en v_2 verkregen. Zij

$$p_1 = \varphi_1, p_2 = \varphi_2, q_1 = \varphi_3 \text{ en } q_2 = \varphi_4,$$

dan volgt

$$W' = \int_{a_1}^{u_1} (\varphi_1 + u_2\,\varphi_2 + v_1\,\varphi_3 + v_2\,\varphi_4)\, du_1,$$

bij welke integratie v_1, v_2 en u_2 als constanten beschouwd worden.

Het terugbrengen van W' tot deze quadratuur is mogelijk, indien de vier vergelijkingen, die p en q bepalen, op te lossen zijn. De mogelijkheid van dit blijkt al spoedig. Uit de 3e en de 4e vergelijking zijn namelijk $p_1 + p_2$ en $q_1 + q_2$ te bepalen. Men heeft dan 3 verg., die t. o. v. p en q lineair zijn, en 1 quadratische vergelijking. Met de oplossing van deze en met het nagaan der integraal heb ik mij nog niet beziggehouden. De vormen zullen zeer samengesteld worden en vermoedelijk zal men tot andere coördinaten moeten overgaan. In elk geval kunnen hierbij de verkregen vergelijkingen van dienst zijn.

Na de integratie komt W' (en dus ook W) te voorschijn als een functie van u_1, $v_1, u_2, v_2, a_1, b_1, a_2, b_2, h$, C_1, C_2 en C_3: zij zal dus 8 constanten bevatten, van welke vier als functies der overige moeten beschouwd worden bij de differentiaties, die ten doel hebben de vier betrekkingen tusschen de coördinaten en den tijd te leeren kennen. Is de integraal bepaald, dan moeten in plaats van u_1, v_1, u_2 en v_2 de veranderlijken x_1, y_1, x_2 en y_2 weer ingevoerd worden.

Is $u_1 = a_1$, dan behoeft niet steeds teven $x_2 = a_2$, $y_1 = b_1$ en $y_2 = b_2$ te zijn. Wij nemen aan, dat voor $t = 0$ te gelijker tijd $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $y_1 = b_1$ en $y_2 = b_2$ is. Wordt gedurende de beweging $x_1 = a_1$, dan moet, zal x_2 bijv. dan niet $= a_2$ zijn, $u_2 = \infty$ worden. Hetzelfde geldt voor v_1 en v_2. De mogelijkheid bestaat echter, dat op een ander tijdstip weer te gelijker tijd $x_1 = a_1, x_2 = a_2, y_1 = b_1, y_2 = b_2$; dit moet dan na de integratie blijken. Zal voor $t = 0$ en $u_1 = a_1$ $W' = 0$ worden, dan moet $W + ht$ door $u_1 - a_1$ deelbaar zijn, d. i. door $x_1 - a_1$. Omdat ons vraagstuk t. o. v. x_1, x_2, y_1 en y_2 een volkomen symmetrisch vraagstuk is, moet $W + ht$ ook deelbaar zijn door $x_2 - a_2, y_1 - b_1$ en $y_2 - b_2$ en kan geschreven worden.

$$W = -ht + (x_1 - a_1)(y_1 - b_1)(x_2 - a_2)(y_2 - b_2)F(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Liggen de aanvangssnelheden en het vaste punt niet in één plat vlak, dan moeten voor elk der bewegelijke punten drie rechthoekige coördinaten aangenomen worden. De partiëele differentiaalvergelijking, die W′ bepaalt, is dan:

$$\frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) -$$
$$- \left[\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)\right] = h.$$

(Zie blz. 39).

Zij is slechts een schrijfwijze voor het behoud der levendige kracht en haar eerste lid moet genomen worden voor F_1.

Het beginsel der sectoren geeft nu drie functies, namelijk:

$$\varphi_1 = z_1 q_1 - y_1 r_1 + z_2 q_2 - y_2 r_2,$$
$$\varphi_2 = x_1 r_1 - z_1 p_1 + x_2 r_2 - z_2 p_2,$$
$$\varphi_3 = y_1 p_1 - x_1 q_1 + y_2 p_2 - x_2 q_2,$$

Elk dezer voldoet aan $(F_1, \varphi) = 0$, maar

$$(\varphi_3, \varphi_1) = -\varphi_2 \quad \text{en} \quad (\varphi_3, \varphi_2) = \varphi_1,$$

waaruit volgt, dat om een functie te verkrijgen, die behalve F_1 aan $(\varphi_3, \varphi) = 0$ voldoet, een integraal genomen moet worden van

$$\frac{d\varphi_1}{-\varphi_2} = \frac{-d\varphi_2}{-\varphi_1}.$$

Hieruit volgt $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \text{constant}$.

Voor de symmetrie nemen wij echter

$$F_2 = \varphi_3$$
$$F_3 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2.$$

Nu moeten nog 3 functies met p, q en r bepaald worden. Ten einde F_4 te vinden beginnen wij met een functie van $(\varphi_3, F) = 0$, d. i. met een integraal van

$$\frac{dx_1}{y_1} = \frac{dp_1}{q_1} = \frac{dy_1}{-x_1} = \frac{dq_1}{-p_1} = \frac{dx_2}{y_2} = \frac{dp_2}{q_2} = \frac{dy_2}{-x_2} = \frac{dq_2}{-p_2}$$

of van

$$\frac{d\,(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{m_1 y_1 + m_2 y_2} = \frac{d\,(m_1 y_1 + m_2 y_2)}{-(m_1 x_1 + m_2 x_2)},$$

d. i. met

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 + (m_1 y_1 + m_2 y_2)^2 = \text{constant}.$$

Nagaande, of het eerste lid hiervan aan $(F_1, F) = 0$ voldoet vindt men

$$-2\,[(m_1 x_1 + m_2 x_2)(p_1 + p_2) + (m_1 y_1 + m_1 y_1)(q_1 + q_2)].$$

Dit brengt ons ertoe ook de volgende functie te nemen:

$$(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2.$$

Deze geeft met (F_1, F)

$$-2k\,[(m_1 x_1 + m_2 x_2)(p_1 + p_2) + (m_1 y_1 + m_2 y_2)(q_1 + q_2)].$$

Hieruit volgt, dat aan $(F_1, F) = 0$ voldoet

$$(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 - k(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 - k(m_1 y_1 + m_2 y_2)^2 = \psi.$$

Dit kan echter nog niet voor F_4 genomen worden, omdat

$$(F_3, \psi) = 4\,\varphi_2\,[(r_1 + r_2)(p_1 + p_2) - k\,(m_1\,x_1 + m_2\,x_2)(m_1\,z_1 + m_2\,z_2)] -$$
$$- 4\,\varphi_1\,[(r_1 + r_2)(q_1 + q_2) - k\,(m_1\,y_1 + m_1\,y_2)(m_1\,z_1 + m_1\,z_2)].$$

Wel is $(F_3,\ F_4) = 0$, indien genomen wordt

$$F_4 = (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 + (r_1 + r_2)^2 -$$
$$- k\,(m_1\,x_1 + m_2\,x_2)^2 - k\,(m_1\,y_1 + m_2\,y_2)^2 - k\,(m_1\,z_1 + m_2\,z_2)^2.$$

Bepaling van F_5. Op blz. 44 vonden wij, dat aan

$$(F_1, F) = 0, \quad (F_2, F) = 0 \quad \text{en} \quad (F_4, F) = 0$$

voldoen

$$\psi_1 = (m_1\,y_1 + m_2\,y_2)(r_1 + r_2) - (m_1\,z_1 + m_2\,z_2)(q_1 + q_2),$$
$$\psi_2 = (m_1\,z_2 + m_2\,z_2)(p_1 + p_2) - (m_1\,x_1 + m_2\,x_2)(r_1 + r_2),$$
$$\psi_3 = (m_1\,x_1 + m_2\,x_2)(q_1 + q_2) - (m_1\,y_1 + m_2\,y_2)(p_1 + p_2).$$

Deze voldoen niet aan $(F_3, F) = 0$. Stellen wij namelijk op

$$\Sigma\,\Sigma \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial p}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right),$$

dan volgt $\qquad \varphi_2\,\psi_3 - \varphi_3\,\psi_2.$

Nemen wij dus in plaats van ψ_1 ψ_1^2, dan is

$$\Sigma\,\Sigma \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial \psi_1^2}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial p}\frac{\partial \psi_1^2}{\partial x}\right) = 2\psi_1\,(\varphi_2\,\psi_3 - \varphi_3\,\psi_2).$$

Doet men hetzelfde met ψ_2^2 en ψ_3^2, dan is de som der 3 dubbelsommen $= 0$. Derhalve mag men nemen:

$$F_5 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2.$$

De som der 3 dubbelsommen wordt ook 0, wanneer men neemt $\varphi_1\,\psi_1 + \varphi_2\,\psi_2 + \varphi_3\,\psi_3$, want dan komt

$$\varphi_1\,(\varphi_2\,\psi_3 - \varphi_3\,\psi_2) + \varphi_2\,(\varphi_3\,\psi_1 - \varphi_1\,\psi_3) + \varphi_3\,(\varphi_1\,\psi_2 - \varphi_2\,\psi_1) = 0,$$

in aanmerking nemende, dat

$$(F_3,\ \varphi_1) = 0, \quad (F_3, \varphi_2) = 0 \quad \text{en} \quad (F_3, \varphi_3) = 0 \text{ is.}$$

Wij kunnen nu stellen $F_6 = \varphi_1\,\psi_1 + \varphi_2\,\psi_2 + \varphi_3\,\psi_3$, indien

$$(F_2, F_6) = 0 \quad \text{en} \quad (F_5, F_6) = 0 \text{ is.}$$

$$(F_2, F_6) = (\varphi_3, \varphi_1\psi_1) + (\varphi_3, \varphi_2\psi_2) + (\varphi_3, \varphi_3\psi_3) =$$
$$= (\varphi_3, \varphi_1)\,\psi_1 + (\varphi_3, \psi_1)\,\varphi_1 + (\varphi_3, \varphi_2)\,\psi_2 + (\varphi_3, \psi_2)\,\varphi_2 + (\varphi_3, \varphi_3)\,\psi_3 +$$
$$+ (\varphi_3, \psi_3)\,\varphi_3 = -\varphi_2\,\psi_1 - \psi_2\,\varphi_1 + \varphi_1\,\psi_2 + \psi_1\,\varphi_2 = 0.$$
$$(F_5, F_6) = 2\,\psi_1\,(\psi_1, F_6) + 2\,\psi_2\,(\psi_2, F_6) + 2\,\psi_3\,(\psi_3, F_6) =$$
$$= 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_2\,\psi_1\,\psi_3 - 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_3\,\psi_1\,\psi_2 +$$
$$+ 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_3\,\psi_2\,\psi_1 - 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_1\,\psi_2\,\psi_3 +$$
$$+ 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_1\,\psi_3\,\psi_2 - 2\,(m_1 + m_2)\,\varphi_2\,\psi_3\,\psi_1 = 0.$$

Wij hebben derhalve:

$$F_1 = \frac{1}{2\,m_1}\,(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2\,m_2}\,(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) -$$
$$- \left[\tfrac{1}{2}\,km_1\,\varrho_1^2 + \tfrac{1}{2}\,km_2\,\varrho_2^2 + m_1\,m_2\,f(\varrho)\right].$$
$$F_2 = y_1\,p_1 - x_1\,q_1 + y_2\,p_2 - x_2\,q_2.$$
$$F_3 = (z_1\,q_1 - y_1\,r_1 + z_2\,q_2 - y_2\,r_2)^2 + (x_1\,r_1 - z_1\,p_1 + x_2\,r_2 - z_2\,p_2)^2 +$$
$$+ (y_1\,p_1 - x_1\,q_1 + y_2\,p_2 - x_2\,q_2)^2.$$
$$F_4 = (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 + (r_1 + r_2)^2 - k\,(m_1\,x_1 + m_2\,x_2)^2 -$$
$$- k\,(m_1\,y_1 + m_2\,y_2)^2 - k\,(m_1\,z_1 + m_2\,z_2)^2.$$
$$F_5 = [(m_1\,y_1 + m_2\,y_2)\,(r_1 + r_2) - (m_1\,z_1 + m_2\,z_2)\,(q_1 + q_2)]^2 +$$
$$+ [(m_1\,z_1 + m_2\,z_2)\,(p_1 + p_2) - (m_1\,x_1 + m_2\,x_2)\,(r_1 + r_2)]^2 +$$
$$+ [(m_1\,x_2 + m_2\,x_2)\,(q_1 + q_2) - (m_1\,y_1 + m_2\,y_2)\,(p_1 + p_2)]^2.$$
$$F_6 = (z_1\,q_1 - y_1\,r_1 + z_2\,q_2 - y_2\,r_2)\,[(m_1\,y_1 + m_2\,y_2)\,(r_1 + r_2) -$$
$$- (m_1\,z_1 + m_2\,z_2)\,(q_1 + q_2)] +$$
$$+ (x_1\,r_1 - z_1\,p_1 + x_2\,r_2 - z_2\,p_2)\,[(m_1\,z_1 + m_2\,z_2)\,(p_1 + p_2) -$$
$$- (m_1\,x_1 + m_2\,x_2)\,(r_1 + r_2)] +$$
$$+ (y_1\,p_1 - x_1\,q_1 + y_2\,p_2 - x_2\,q_2)\,[(m_1\,x_1 + m_2\,x_2)\,(q_1 + q_2) -$$
$$- (m_1\,y_1 + m_2\,y_2)\,(p_1 + p_2)].$$

F_5 is nog te herleiden. Schrijven wij namelijk ter bekorting

$$p_1 + p_2 = \mathrm{P},\, q_1 + q_2 = \mathrm{Q},\, r + r_2 = \mathrm{R},$$
$$m_1\,x_1 + m_2\,x_2 = \mathrm{X},\, m_1\,y_1 + m_2\,y_2 = \mathrm{Y},\, m_1\,z_1 + m_2\,z_2 = \mathrm{Z},$$

dan is

$$F_4 = P^2 + Q^2 + R^2 - k(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

$$F_5 = (RY - QZ)^2 + (PZ - RX)^2 + (QX - PY)^2 =$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)(P^2 + Q^2 + R^2) - (PX + QY + RZ)^2 =$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) F_4 + k(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - (PX + QY + RZ)^2.$$

Deze zes functies moeten weer elk gelijk aan een constante (de eerste gelijk aan h) gesteld worden. Men verkrijgt dan 6 vergelijkingen om p, q en r in functie van x, y en z uit te drukken. Evenals op blz. 45 stellen wij weer

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1, \\
x_2 &= a_2 + (u_1 - a_1) u_2, \\
y_1 &= b_1 + (u_1 - a_1) v_1, \\
y_2 &= b_2 + (u_1 - a_1) v_2, \\
z_1 &= c_1 + (u_1 - a_1) w_1, \\
z_2 &= c_2 + (u_1 - a_1) w_2,
\end{aligned}$$

in de voor p, q en r verkregen waarden.

Te integreeren blijft dan nog

$$W' = \int_{a_1}^{u_1} (p_1 + u_2 p_2 + v_1 q_1 + v_2 q_2 + w_1 r_1 + w_2 r_2)\, du_1,$$

waarin voor p, q en r de verkregen waarden moeten gesteld en u_2, v_1, v_2, w_1 en w_2 als constanten beschouwd worden.

De karakteristieke functie is dan weer

$$W = -ht + W'.$$

Vraagstuk II.

Gevraagd de karakteristieke functie bij de relatieve beweging van twee punten, met de massa's m_1 en m_2, die elkaar aantrekken met een kracht, die een functie is van hun afstand. Zij worden bovendien elk aangetrokken door een kracht, die naar een derde punt gericht is en evenredig is met den afstand tot dat punt. Dit punt behoort tot een onveranderlijk puntenstelsel, dat een gegeven beweging heeft.

Om dit vraagstuk op te lossen moeten wij de vergelijking (32) van blz. 24 nemen:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \theta + P = 0.$$

Hierin is

$$\theta = \Sigma\, rq' - T + V,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, m\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

V is de krachtfunctie,

$$P = \left(a\frac{d^2x_0}{dt^2} + b\frac{d^2y_0}{dt^2} + c\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)\Sigma\, mu + \left(a'\frac{d^2x_0}{dt^2} + b'\frac{d^2y_0}{dt^2} + c'\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)\Sigma mv +$$

$$+ \left(a''\frac{d^2x_0}{dt^2} + b''\frac{d^2y_0}{dt^2} + c''\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)\Sigma mw,$$

$$\xi = \frac{du}{dt} + \varphi_2 w - \varphi_3 v,$$

$$\eta = \frac{dv}{dt} + \varphi_3 u - \varphi_1 w,$$

$$\zeta = \frac{dw}{dt} + \varphi_1 v - \varphi_2 u.$$

Zijn ϱ_1 en ϱ_2 de afstanden van de eerste twee punten tot het derde en is ϱ de onderlinge afstand, dan is

$$V = -\left[\tfrac{1}{2}\, km_1\, \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{2}\, km_2\, \varrho_2{}^2 + m_1\, m_2\, f(\varrho)\right].$$

De grootheden q zijn u_1, v_1, w_1 (voor het punt m_1) en u_2, v_2, w_2 (voor het punt m_2).

$$\frac{\partial W}{\partial q} = r = \frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial q'} \text{ (want V hangt niet van } q' \text{ af)} = m\xi, m\eta \text{ of } m\zeta.$$

$$\theta = \Sigma m\,(\xi u' + \eta v' + \zeta w') - \tfrac{1}{2}\, \Sigma m\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + V.$$

De karakteristieke functie is dus bepaald door

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Sigma m\,(\xi u' + \eta v' + \zeta w') - \tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + V + P = 0$$

of $$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\,\Sigma m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \Sigma m\left[\xi\,(\varphi_2 w - \varphi_3 v) + \eta\,(\varphi_3 u - \varphi_1 w) + \right.$$
$$\left. + \zeta\,(\varphi_1 v - \varphi_2 u)\right] + V + P = 0.$$

Hierin moet nu nog ξ door $\frac{1}{m}\frac{\partial W}{\partial u}$

η door $\frac{1}{m}\frac{\partial W}{\partial v}$

ζ door $\frac{1}{m}\frac{\partial W}{\partial w}$

vervangen worden, gevende

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2\right] -$$
$$- \Sigma\left[\frac{\partial W}{\partial u}\,(\varphi_2\, w - \varphi_3\, v) + \frac{\partial W}{\partial v}\,(\varphi_3\, u - \varphi_1\, w) + \frac{\partial W}{\partial w}\,(\varphi_1\, v - \varphi_2\, u)\right] + V + P = 0.$$

Dit is een partiëele differentiaal-vergelijking met 7 onafhankelijk veranderlijken $(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2\, w_2, t)$; t komt ook voor in $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \frac{d^2x_0}{dt^2}, \frac{d^2y_0}{dt^2}, \frac{d^2z_0}{dt^2}$. Wij moeten hierbij nog 6 functies zoeken, die met het eerste lid der diff. verg. in involutie zijn. Ter bekorting stellen wij weer

$$\frac{\partial W}{\partial u} = p,\ \frac{\partial W}{\partial v} = q \text{ en } \frac{\partial W}{\partial w} = r.$$

Laat bovendien het genoemde derde punt de oorsprong der bewegelijke coördinaten zijn.

E e r s t e b ij z o n d e r g e v a l. Het onveranderlijke puntenstelsel heeft een translatie-beweging en de punten trekken elkaar aan met een kracht, die evenredig is met hun afstand. φ_1, φ_2 en φ_3 zijn dan nul en

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2\,m_1}\,(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2\,m_2}\,(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\,[k m_1\, \varrho_1^2 + k m_2\, \varrho_2^2 + k' m_1\, m_2\, \varrho^2] + P = 0$$

Wij zullen nu het geval behandelen, dat de translatiebeweging (rechtlijnig) eenparig versneld is, en de bewegelijke coördinaatassen evenwijdig aan de vaste nemen. Dan is

$$P = \frac{d^2x_0}{dt^2}\,\Sigma\, mu + \frac{d^2y_0}{dt^2}\,\Sigma\, mv + \frac{d^2z_0}{dt^2}\,\Sigma\, mw = \alpha\,\Sigma mu + \beta\,\Sigma mv + \gamma\,\Sigma mw.$$

Dan is te schrijven

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -h$$

$$W = -ht + W',$$

$$F_1 = \frac{1}{2\,m_1}(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2\,m_2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\left[km_1\,\varrho_1^2 + km_2\,\varrho_2^2 + k'\,m_1\,m_2\,\varrho^2\right] +$$
$$+ \alpha\,(m_1\,u_1 + m_2\,u_2) + \beta\,(m_1\,v_1 + m_2\,v_2) + \gamma\,(m_1\,w_1 + m_2\,w_2) = h.$$

Hierin is W′ slechts een functie van u_1, v_1, w_1, u_2, v_2 en w_2 en

$$\frac{\partial W'}{\partial u_1} = p_1,\quad \frac{\partial W'}{\partial v_1} = q_1,\quad \frac{\partial W'}{\partial w_1} = r_1 \text{ enz.}$$

Wij moeten bij F_1 nog 5 functies bepalen. Om tot deze te geraken stellen wij

$$\psi_1 = v_1\,p_1 - u_1\,q_1 + v_2\,p_2 - u_2\,q_2,$$

het beginsel der sectoren bij een vast derde punt uitdrukkende. Verder wordt:

$$(F_1, \psi_1) = \alpha\,(m_1\,v_1 + m_2\,v_2) - \beta\,(m_1\,u_1 + m_2\,u_2) = \psi_2,$$
$$(F_1, \psi_2) = \beta\,(p_1 + p_2) - \alpha\,(q_1 + q_2) = \psi_3,$$
$$(F_1, \psi_3) = k\left[\alpha\,(m_1\,v_1 + m_2\,v_2) - \beta\,(m_1\,u_1 + m_2\,u_2)\right] = k\,\psi_2.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\psi_1}{\psi_2} = \frac{d\psi_2}{\psi_3} = \frac{d\psi_3}{k\psi_2},$$
$$k\psi_2^2 - \psi_3^2 = \text{constant}.$$

Wij nemen nu aan, dat de initiale snelheden in één plat vlak met de punten liggen en dat het derde punt zich ook in dit vlak beweegt. Dan kunnen wij met vlakcoördinaten werken en is

$$F_1 = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\left[km_1\varrho_1^2 + km_2\varrho_2^2 + k'm_1m_2\varrho^2\right] + \alpha(m_1u_1 + m_2u_2) + \beta(m_1v_1 + m_2v_2),$$

$$F_2 = k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right]^2 - \left[\beta(p_1 + p_2) - \alpha(q_1 + q_2)\right]^2.$$

Hierbij moeten nu nog F_3 en F_4 bepaald worden. Om F_3 te krijgen bepalen wij een functie, die voldoet aan

$$(F_2, \varphi) = 0,$$

d. i. aan:

$$2k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right](-\beta m_1)\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} +$$

$$+ 2k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right](-\beta m_2)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} +$$

$$+ 2k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right](\alpha m_1)\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} +$$

$$+ 2k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right](\alpha m_2)\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} +$$

$$+ 2\left[\beta(p_1 + p_2) - \alpha(q_1 + q_2)\right]\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right) -$$

$$- 2\left[\beta(p_1 + p_2) - \alpha(q_1 + q_2)\right]\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\right) = 0.$$

Een integraal moet dus bepaald worden van:

$$\frac{dp_1}{-m_1\beta\psi} = \frac{dp_2}{-m_2\beta\psi} = \frac{dq_1}{m_1\alpha\psi} = \frac{dq_2}{m_2\alpha\psi} = \frac{du_1}{\beta\chi} = \frac{du_2}{\beta\chi} = \frac{dv_1}{-\alpha\chi} = \frac{dv_2}{-\alpha\chi},$$

waarbij $\quad 2k\left[\alpha(m_1v_1 + m_2v_2) - \beta(m_1u_1 + m_2u_2)\right] = \psi,$

en $\quad 2\beta(p_1 + p_2) - 2\alpha(q_1 + q_2) = \chi.$

Wij nemen hiervan de volgende integraal:

$$u_1 - u_2 = \varphi_1;$$

dan is

$$(F_1, \varphi_1) = \frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2} = \varphi_2,$$

$$(F_1, \varphi_2) = (u_1 - u_2)\left[+k + k'(m_1 + m_2)\right] = \left[k + k'(m_1 + m_2)\right]\varphi_1.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{[k + k'(m_1 + m_2)]\,\varphi_1},$$

$$\varphi_1^2\,[k + k'(m_1 + m_2)] - \varphi_2^2 = \text{constant}.$$

$$F_3 = (u_1 - u_2)^2\,[k + k'(m_1 + m_2)] - \left[\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right]^2.$$

Evenzoo wordt gevonden:

$$F_4 = (v_1 - v_2)^2\,[k + k'(m_1 + m_2)] - \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_1}\right)^2.$$

Bovendien blijkt $(F_3, F_4) = 0$.

Stelt men elk der functies F_1, F_2, F_3 en F_4 gelijk aan een constante, dan heeft men vier vergelijkingen, door middel van welke p_1, q_1, p_2 en q_2 als functies van u_1, v_1, u_2 en v_2 bepaald moeten worden. Stelt men ter bekorting:

$$k + k'(m_1 + m_2) = \mathrm{A}$$

en bovendien $F_1 = h$, $F_2 = \mathrm{C}_2$, $F_3 = \mathrm{C}_3$ en $F_4 = \mathrm{C}_4$, dan is

$$\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2} = \sqrt{\mathrm{A}\,(u_1 - u_2)^2 - \mathrm{C}_3}\,,$$

$$\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} = \sqrt{\mathrm{A}\,(v_1 - v_2)^2 - \mathrm{C}_4}\,,$$

$$\beta(p_1 + p_2) - \alpha(q_1 + q_2) = \sqrt{k\,[\alpha\,(m_1 v_1 + m_2 v_2) - \beta\,(m_1 u_1 + m_2 u_2)]^2 - \mathrm{C}_2}.$$

Hieruit en uit $F_1 = h_1$ zijn dan p_1, p_2, q_1 en q_2 op te lossen. Zij nu $p_1 = f_1$, $p_2 = f_2$, $q_1 = f_3$ en $q_2 = f_4$.

Dan stellen wij weer:

$$u_1 = \xi_1,$$
$$v_1 = \beta_1 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\eta_1,$$
$$u_2 = \alpha_2 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\xi_2,$$
$$v_2 = \beta_2 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\eta_2.$$

Evenals in vraagstuk II verkrijgt men dan:

$$\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial \xi_1} = f_1 + \xi_2 f_2 + \eta_1 f_3 + \eta_2 f_4 = \varphi_1,$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \eta_1} = (\xi_1 - \alpha_1) f_3 = \varphi_3,$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \xi_2} = (\xi_1 - \alpha_1) f_2 = \varphi_2,$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \eta_2} = (\xi_1 - \alpha_1) f_4 = \varphi_4$$

$$\text{en} \quad W' = \int_{\alpha_1}^{\xi_1} \varphi_1 \, d\xi_1,$$

waarin bij het integreeren weer ξ_2, η_1 en η_2 als constanten moeten beschouwd worden.

Liggen de initiale snelheden niet in één plat vlak, dan is

$$F_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \tfrac{1}{2}\left[k m_1 u_1^2 + k m_2 u_2^2 + k' m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2\right] + \\ + \alpha (m_1 u_1 + m_2 u_2),$$

$$F_2 = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} - \tfrac{1}{2}\left[k m_1 v_1^2 + k m_2 v_2^2 + k' m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2\right] + \\ + \beta (m_1 v_1 + m_2 v_2),$$

$$F_3 = \frac{r_1^2}{2m_1} + \frac{r_2^2}{2m_2} - \tfrac{1}{2}\left[k m_1 w_1^2 + k m_2 w_2^2 + k' m_1 m_2 (w_1 - w_2)^2\right] + \\ + \gamma (m_1 w_1 + m_2 w_2),$$

$$F_4 = (u_1 - u_2)^2 \left[k + k'(m_1 + m_2)\right] - \left[\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right]^2,$$

$$F_5 = (v_1 - v_2)^2 \left[k + k'(m_1 + m_2)\right] - \left[\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right]^2,$$

$$F_6 = (w_1 - w_2)^2 \left[k + k'(m_1 + m_2)\right] - \left[\frac{r_1}{m_1} - \frac{r_2}{m_2}\right]^2.$$

Uit $F_1 = C_1$ en $F_4 = C_4$ kunnen dan p_1 en p_2, uit $F_2 = C_2$ en $F_5 = C_5$ q_1 en q_2 en uit $F_3 = C_3$ en $F_6 = C_6$ r_1 en r_2 berekend worden. De substitutie

$$u_1 = \xi_1,$$

$$v_1 = \beta_1 + (\xi_1 - \alpha_1)\eta_1,$$

$$w_1 = \gamma_1 + (\xi_1 - \alpha_1)\zeta_1,$$

$$u_2 = \alpha_2 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\xi_2,$$
$$v_2 = \beta_2 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\eta_2,$$
$$w_2 = \gamma_2 + (\xi_1 - \alpha_1)\,\zeta_2$$

herleidt het vraagstuk dan tot een quadratuur, waarbij $\eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2$ en ζ_2 als constanten beschouwd worden.

T w e e d e b ij z o n d e r g e v a l. Het overanderlijke puntenstelsel roteert om het genoemde derde punt. P is dan $= 0$ en

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) - \left[\tfrac{1}{2}\,k m_1 \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{2}\,k m_2 \varrho_2{}^2 + m_1 m_2 f(\varrho)\right] -$$
$$- \Sigma\left[p\,(\varphi_2 w - \varphi_3 v) + q\,(\varphi_3 u - \varphi_1 w) + r\,(\varphi_1 v - \varphi_2 u)\right] = 0.$$

Noemen wij het eerste lid hiervan F_1, dan zijn nog 6 functies te bepalen, die met F_1 in involutie zijn.

Is nu
$$\psi_3 = v_1 p_1 - u_1 q_1 + v_2 p_2 - u_2 q_2,$$
$$\psi_2 = u_1 r_1 - w_1 p_1 + u_2 r_2 - w_2 p_2,$$
$$\psi_1 = w_1 q_1 - v_1 r_1 + w_2 q_2 - v_2 r_2,$$

dan is in 't algemeen (F_1, ψ) niet 0.

Werken wij echter met vlak-coördinaten en is dus

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\frac{1}{m}(p^2 + q^2) - \left[\tfrac{1}{2}\,k m_1 \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{2}\,k m_2 \varrho_2{}^2 + m_1 m_2 f(\varrho)\right] - \Sigma\,\varphi\,(qu - pv) = 0,$$

dan is voor F_2 te nemen

$$\psi = v_1 p_1 - u_1 q_1 + v_2 p_2 - u_2 q_2.$$

In plaats van F_1 is nu ook te nemen

$$F_1 - \varphi F_2$$

en daaruit blijkt, dat overeenkomstig vraagstuk I

$$F_3 = (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 - k\,(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2 - k\,(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2,$$
$$F_4 = (m_1 u_1 + m_2 u_2)\,(q_1 + q_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)\,(p_1 + p_2).$$

Hierbij moet nu nog F_5 bepaald worden. Daartoe zoeken wij de waarde van

$$(F_1, X_1),$$

als $X_1 = \dfrac{\partial F}{\partial t}$ is.

X_1 is dan in involutie met F_2, F_3 en F_4.

$$(F_1, X_1) = \varphi'\psi = X_2,$$
$$(F_1, X_2) = -\varphi''\psi = X_3,$$
$$(F_1, X_3) = \varphi'''\psi = X_4,$$

waaruit volgt

$$\frac{dX_1}{\varphi'} = \frac{d(\varphi'\psi)}{-\varphi''} = \frac{d(-\varphi''\psi)}{\varphi'''}.$$

De eerste en de tweede vorm geven

$$\frac{dX_1}{\varphi'} = -\psi\, dt - \frac{\varphi'}{\varphi''}\, d\psi. \tag{1}$$

De eerste en de derde vorm geven

$$\frac{dX_1}{\varphi'} = -\psi\, dt - \frac{\varphi''}{\varphi'''}\, d\psi. \tag{2}$$

Na eliminatie van $d\psi$ uit (1) en (2) volgt

$$\frac{dX_1}{\psi} = -\varphi'\, dt,$$

$$\frac{X_1}{\psi} + \varphi = \text{constant}.$$

Derhalve is te nemen $F_5 = X_1 + \psi\varphi$ of

$$F_5 = \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\,(v_1 p_1 - u_1 q_1 + v_2 p_2 - u_2 q_2).$$

Voor F_1 is dan ook te nemen

$$\frac{1}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2) - \left[\tfrac{1}{2} k m_1 \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} k m_2 \varrho_2^2 + m_1 m_2 f(\varrho)\right].$$

Bepaal W′ in het geval, dat de assen vast zijn. Schrijf dan

$$dW = \frac{\partial W}{\partial t}\, dt + dW'$$

en neem voor $\frac{\partial W}{\partial t}$ de waarde $C\varphi - h$, waarbij

$v_1 p_1 - u_1 q_1 + v_2 p_2 - u_2 q_2 = -$ C en h een constante is.
Dan is

$$dW = (C\varphi - h)\, dt + dW'$$

$$W = C\int \varphi dt - ht + W'.$$

Nu kan het vraagstuk ook met ruimte-coördinaten behandeld worden. In overeenstemming met vraagstuk I verkrijgt men:

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) - [\tfrac{1}{2} km_1 \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{2} km_2 \varrho_2{}^2 + m_1 m_2 f(\varrho)] -$$

$$- \Sigma[p(\varphi_2 w - \varphi_3 v) + q(\varphi_3 u - \varphi_1 w) + r(\varphi_1 v - \varphi_2 u)],$$

$$F_2 = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \varphi_3 \psi_3 \qquad \text{(zie blz. 57)},$$

$$F_3 = \psi_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \psi_3{}^2,$$

$$F_4 = (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 + (r_1 + r_2)^2 -$$

$$- k(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2 - k(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 - k(m_1 w_1 + m_2 w_2)^2,$$

$$F_5 = [(m_1 v_1 + m_2 v_2)(r_1 + r_2) - (m_1 w_1 + m_2 w_2)(q_1 + q_2)]^2 +$$

$$+ [(m_1 w_1 + m_2 w_2)(p_1 + p_2) - (m_1 u_1 + m_2 u_2)(r_1 + r_2)]^2 +$$

$$+ [(m_1 u_1 + m_2 u_2)(q_1 + q_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)(p_1 + p_2)]^2,$$

$$F_6 = \psi_1 [(m_1 v_1 + m_2 v_2)(r_1 + r_2) - (m_1 w_1 + m_2 w_2)(q_1 + q_2)] +$$

$$+ \psi_2 [(m_1 w_1 + m_2 w_2)(p_1 + p_2) - (m_1 u_2 + m_2 u_2)(r_1 + r_2)] +$$

$$+ \psi_3 [(m_1 u_1 + m_2 u_2)(q_1 + q_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)(p_1 + p_2)],$$

$$F_7 = \frac{\partial W}{\partial t} - (\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \varphi_3 \psi_3).$$

Deze functies gelden echter alleen als φ_1, φ_2 en φ_3 constant zijn. De eerste wordt vervolgens gelijk 0 en de andere worden gelijk aan constanten gesteld. Uit de verkregen vergelijkingen lost men p, q, r en $\frac{\partial W}{\partial t}$ op en men verkrijgt dan weer

$$W = \frac{\partial W}{\partial t}\int dt + W',$$

waarbij W′ op dezelfde wijze uit F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 en $F_1 - F_7$ bepaald wo rdt als in vraagstuk I.

Vraagstuk III.

Gevraagd de karakteristieke functie te bepalen bij de beweging van drie punten (massa's: m_1, m_2 en m_3), die elkaar aantrekken met krachten, welke evenredig zijn aan de afstanden.

De coördinaten der punten zijn (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) en (x_3, y_3, z_3).

De vergelijking der karakteristieke functie is dan:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \Sigma m (p^2 + q^2 + r^2) - \tfrac{1}{2} k [m_1 m_2 \varrho_{12}{}^2 + m_2 m_3 \varrho_{23}{}^2 + m_3 m_1 \varrho_{31}{}^2] = 0.$$

ϱ_{12}, ϱ_{23} en ϱ_{31} zijn de afstanden der punten.

$$p = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{en } r = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Stellen wij weer $\frac{\partial W}{\partial t} = -h$, dan is

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} (p^2 + q^2 + r^2) - \tfrac{1}{2} k [m_1 m_2 \varrho_{12}{}^2 + m_2 m_3 \varrho_{23}{}^2 + m_3 m_1 \varrho_{31}{}^2] = h.$$

Uit het eerste lid dezer vergelijking zijn 3 functies F af te leiden. Ook geeft de beweging van het massa-middelpunt 3 functies. Derhalve

$$F_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{p^2}{m} - \tfrac{1}{2} k [m_1 m_2 (x_1 - x_2)^2 + m_2 m_3 (x_2 - x_3)^2 + m_3 m_1 (x_3 - x_1)^2],$$

$$F_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{q_2}{m} - \tfrac{1}{2} k [m_1 m_2 (y_1 - y_2)^2 + m_2 m_3 (y_2 - y_3)^2 + m_3 m_1 (y_3 - y_1)^2],$$

$$F_3 = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{r^2}{m} - \tfrac{1}{2} k [m_1 m_2 (z_1 - z_2)^2 + m_2 m_3 (z_2 - z_3)^2 + m_3 m_1 (z_3 - z_1)^2],$$

$$F_4 = \Sigma p,$$

$$F_5 = \Sigma q,$$

$$F_6 = \Sigma r.$$

Om F_7 te vinden zoeken wij een functie, voldoende aan

$$(F_4, \psi) = 0,$$

d. i. aan
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0,$$

of een integraal van $dx_1 = dx_2 = dx_3$.

Nemen wij $x_1 - x_2$, dan is

$$(F_5, \psi) = 0 \text{ en } (F_6, \psi) = 0.$$

Bovendien is

$$(F_1, \psi) = \frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2} = \psi_1,$$

$$(F_1, \psi_1) = k\mathrm{M}\,(x_1 - x_2) = k\mathrm{M}\,\psi.$$

F_7 moet dus bepaald worden uit

$$\frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{k\mathrm{M}\psi}$$

$(\mathrm{M} = m_1 + m_2 + m_3)$.

Dit geeft

$$\psi_1^2 - k\mathrm{M}\,\psi^2 = \text{constant}.$$

$$F_7 = \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right)^2 - k\mathrm{M}\,(x_1 - x_2)^2,$$

$$F_8 = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)^2 - k\mathrm{M}\,(y_1 - y_2)^2,$$

$$F_9 = \left(\frac{r_1}{m} - \frac{r_2}{m_2}\right)^2 - k\mathrm{M}\,(z_1 - z_2)^2.$$

Uit $F_1 = C_1$, $F_4 = C_4$ en $F_7 = C_7$ kunnen dan p_1, p_2 en p_3, uit $F_2 = C_2$, $F_5 = C_5$ en $F_8 = C_8$ q_1, q_2 en q_3 en uit $F_3 = C_3$, $F_6 = C_6$ en $F_9 = C_9$ r_1, r_2 en r_3 bepaald worden. De bekende substitutie

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = a_2 + (u_1 - a_1)\,u_2 \text{ enz.}$$

herleidt het vraagstuk ten slotte tot een quadratuur.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Zijn F_1 en F_2 twee functies van n onafhankelijk veranderlijken x en de n partiëele differentiaal-quotiënten van z naar x, dan kan, als $(F_1, F_2) = 0$, een functie F, voldoende aan

$$(F_1, F) = 0,$$

op dezelfde wijze bepaald worden als een functie F, voldoende aan

$$(F_1, F) = 0 \quad \text{en} \quad (F_2, F) = 0.$$

II.

De uitspraak van Sophus Lie (over de methode van Jacobi ter oplossing van een partiëele differentiaal-vergelijking van de 1e orde sprekende [1])

„Ich glaube, dass die zur Begründung dieser Methode entwickelten grossartigen Hülfstheorien in noch höheren Grade als die Methoden selbst einen bleibenden Werth behalten werden" is niet voldoende gemotiveerd.

---

[1]) Math. Ann. XI, blz. 531.

III.

Een partiëele diff. verg. van de 1e orde met n onafhankelijk veranderlijken, die de afhankelijk veranderlijke expliciet bevat, beschouwt Lie als opgelost, zoodra n functies gevonden zijn, die met het eerste lid van de tot 0 herleide gegeven diff. verg. in involutie zijn. Dit doet een middel aan de hand om in sommige gevallen het oplossen van een part. diff. verg., die de afhankelijk veranderlijke niet expliciet bevat, te vereenvoudigen.

IV.

Een willekeurig krachtenstelsel is in 't algemeen aequivalent met twee elkaar kruisende krachten, van welke een in richting en ligging willekeurig gekozen kan worden, mits men niet een rechte lijn (dubbellijn) kieze, loodrecht op het moment, dat ontstaat, als men het krachtenstelsel herleidt tot een resultante en een koppel.

De belangrijkste eigenschappen dezer dubbellijnen kunnen langs zeer eenvoudigen weg gevonden worden.

V.

Behalve de zwaartepunts- en de vlakken-integralen kunnen geen integralen bestaan, die onafhankelijk zijn van de wet van aantrekking tusschen de punten van een beweeglijk stelsel.

VI.

Kent men alle functies op één na, die voldoen aan $(F_1, F) = 0$ (stelling I), dan is de laatste door quadraturen alleen te vinden.

VII.

Het aannemen van spanningen langs en van drukkingen loodrecht op de krachtlijnen van een electrisch veld van de door Maxwell aangenomen grootte leidt tot tegenstrijdigheden.

VIII.

Alleen een definitie, die uitgaat van $\int \frac{dQ}{T}$, kan een helder begrip van entropy geven.

IX.

De in verscheidene leerboeken voorkomende definitie „Elke oorzaak, die een lichaam een beweging geeft of een reeds bestaande beweging in snelheid of richting wijzigt, wordt kracht genoemd" mag niet als definitie beschouwd worden.

X.

Het door Schell in zijn „Theorie der Bewegung und der Kräfte" gegeven bewijs van de gelijkheid van twee evenwijdige koppels met gelijke momenten en gelijke draaiingsrichtingen verdient geen aanbeveling.

XI.

Het invoeren van het begrip „arbeid der versnelling" (Schell „Theorie der Bew. u. Kr." I, 326) heeft geen nut.

XII.

Het beginsel der traagheid en dat der gelijkheid van actie en reactie kunnen geen grondstellingen der mechanica genoemd worden.

XIII.

Ten behoeve van een juist begrip van snelheid en versnelling is het noodig, dat reeds bij het elementaire onderwijs in de mechanica het begrip vector ingevoerd worde.

XIV.

De begrippen „ruimte”, „tijd” en „stof” zijn niet te definiëeren.

XV.

Wenschelijk is het tabellen te maken van de reeds opgeloste differentiaal-vergelijkingen.

XVI.

Het populariseeren der wetenschap is in het belang der wetenschap.

INHOUD.

Bladz.

CORRIGENDA.

	staat:	lees:
blz. 3 regel 19	1866	1862.
blz. 41 regel 5	$\frac{d(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{m_1 x_1 + m_2 x_2}$	$\frac{d(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{m_1 y_1 + m_2 y_2}$.
blz. 44 regel 6	[ ]	[ ]^2.
blz. 49 regel 20	$m_1 x_2$	$m_1 x_1$.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN A. W. SIJTHOFF.