TH. I. VAN BUUREN.

BIJDRAGE

TOT DE

LEER DER BALLISTICA.

Diss Leiden

1879 nr 34

34

BIJDRAGE TOT DE LEER DER BALLISTICA.

BIJDRAGE

TOT DE

LEER DER BALLISTICA.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Mr. A. E. J. MODDERMAN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN,

op Zaterdag den 21sten Juni 1879, des namiddags te 1 uur,

DOOR

Théodorus Ignatius van Buuren,

Civ. Ingenieur,

GEBOREN TE GOUDA.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

LEIDEN. — A. W. SIJTHOFF.

1879.

34

Aan mijn Vader.

[illegible] ..... mijne [illegible]

[illegible] die mij in [illegible]

hebben geholpen. In de eerste plaats moet ik aan U, geachten vader, mijne dankbaarheid betuigen, immers gij waart het, die mij door uwe woorden en daden de lust tot studie inboezemde en mij daarin het eerst behulpzaam zijt geweest.

Ouderen, Hooggel. HH. Professoren der Rijkshoogeschool te [illegible] en Hooggel. HH. Professoren der Polytechnische school te

Bij het eindigen van mijne academische loopbaan is het mij aangenaam al diegenen te herdenken, die mij in mijne studiën hebben geholpen. In de eerste plaats moet ik aan U, geachten vader, mijne dankbaarheid betuigen; immers gij waart het, die mij, door uwe woorden en daden, de lust tot studie inboezemde en mij daarin het eerst behulpzaam zijt geweest.

Ontvang, Hooggel. HH. Professoren der Philosophische faculteit en Hooggel. HH. Professoren der Polytechnische school te

Delft, mijn dank èn voor het genoten onderwijs èn voor de vele blijken van welwillendheid, welke ik van enkelen uwer heb mogen ontvangen. In uw aller vriendschappelijk aandenken blijf ik mij steeds aanbevelen.

INLEIDING.

Wanneer een stoffelijk punt met zekere snelheid volgens eene willekeurige richting, mits niet de vertikale, opgeworpen wordt in het luchtledig, dan zal de beschreven baan een parabool zijn. Zoodra echter dat stoffelijk punt zich bewegen moet in eene weerstandbiedende middenstof, dan gaat de parabool over in de **Ballistica** of werplijn.

Al het geen betrekking heeft om die werplijn nader te bepalen vormt te zamen de leer der Uitwendige Ballistica in tegenoverstelling van de leer der Inwendige Ballistica, welke zich alléén bezig houdt met het onderzoek naar de beweging van het stoffelijk punt of lichaam zoolang het zich in aanraking bevindt met het werktuig, waaruit het wordt voortbewogen. [1])

De Ballistica (van 't grieksch: *βάλλω* ik werp) de leer van het werpen, in lateren zin en gebruik ook de werplijn zelve, vindt voornamelijk hare toepassing bij het nagaan van de beweging der

---

[1]) De wetten van beweging der projectielen in het inwendige van het kanon kan men vinden in Piobert „Cours d'artillerie en 1841 et en 1846." Verder in verschillende militaire tijdschriften; eene belangrijke bijdrage over het berekenen van gasspanningen in den vuurmond, vindt men in SIMON, „losse aanteekeningen over eenige Artillerieonderwerpen."

projectielen en bekleedt dus bij de artillerie-wetenschappen eene eerste plaats.

Het doel van dit geschrift is om een beknopt historisch overzicht te geven van de voornaamste uitkomsten, welke omtrent de uitwendige Ballistica verkregen zijn; het eerste gedeelte geeft een overzicht daarvan, èn met het oog op de anal-mech: zijde van het vraagstuk, èn met het oog op de literatuur omtrent den weerstand van de lucht.

Het 2e gedeelte bevat de ontwikkeling der ballistische formulen, indien de weerstand in het algemeen afhankelijk wordt gesteld van de snelheid, waarna de benaderingsmethoden van DIDION en van PAUL ST. ROBERT zijn behandeld en de laatste toegepast, op een numeriek voorbeeld, waarbij de wet van weerstand uitgedrukt is door: $\varrho = a v^2 + b v^4$ ten einde de uitkomsten, door beide benaderingsmethoden verkregen, te kunnen vergelijken.

EERSTE GEDEELTE.

§ 1.

Vóór GALILEI (1564—1642), de grondlegger van de Leer der Beweging, waren de geleerden der meening toegedaan, dat een lichaam, waaraan door een stoot zekere hoeveelheid van beweging wordt medegedeeld, zich volgens eene rechte lijn voortbeweegt tot op het oogenblik dat die hoeveelheid van beweging is uitgeput; na dat tijdstip neemt het lichaam eene kromlijnige beweging aan; zulks werd door die geleerden aangenomen, zonder dat zij trachtten zich hiervan behoorlijk rekenschap te geven. In het werk over de Ballistica door NICOLAS TARTAGLIA vindt men de beschouwingen over den vorm der banen alsmede de verkeerde, steeds willekeurige, soms kinderlijke begrippen over beweging, die in dien tijd door de geleerden gehuldigd werden. Dat werk verscheen in twee gedeelten, het eerste werd in 1537, het tweede in 1546 uitgegeven; beiden zijn uit het Italiaansch vertaald geworden door RIEFFEL, prof. a. d. artill. School te Vincennes (Parijs 1846). TARTAGLIA echter was de eerste, die van bovenvermelde meening afstapte en op mathimatischen weg aantoonde, dat de geheele vluchtbaan kromlijnig zijn moet. Hij trachtte te vergeefs de beweging van kanonkogels te verklaren, aangezien hij eveneens van geheel verkeerde begrippen uitging, totdat eindelijk GALILEÏ, in 1590, de parabolische vluchtbaan bewees. Vooraf had deze de aard-attractie ontdekt en de wetten van den vrijen val daaruit verklaard; men kan zulks vinden in zijn werk: „Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove science," dat in 1638 verscheen.

Die laatste ontdekkingen, in wetten geformuleerd, hebben hem tot basis verstrekt voor de oplossing van het vraagstuk over de beweging van een lichaam, waaraan zekere snelheid wordt medegedeeld en waarop slechts éène kracht, met name de zwaartekracht werkt. Uit zijne berekeningen trachtte de artillerie van den 17den eeuw partij te trekken; in dien tijd kwam het werpen van bommen in zwang en het bleek maar al te vaak, dat de bestaande worptabellen geheel onvoldoende waren. Het werk van BLONDEL „l'art de jetter les bombes, Paris 1683" is het classieke werk van dien tijd, waarin de parabool-eigenschappen uiteengezet worden met het doel, om voor de praktijk van dienst te zijn; schoottafels echter heeft BLONDEL niet gegeven.

Eerst in 't midden van den 18den eeuw gaf de parabolische theorie aanleiding tot het samenstellen dier tabellen, welke in toepassing kwamen bij het gebruik van mortieren. Dat men zoo lang gewacht heeft met de berekening dier tabellen moet voornamelijk geweten worden aan de groote onnauwkeurigheid, waarmede de proeven over worpsverheid, snelheid, enz. genomen konden worden tengevolge van onvoldoende instrumenten. Daarbij kwam het algemeen verbreid begrip, dat de werking van den luchtwederstand een allergeringsten invloed had op de baan en geheel te verwaarloozen was in vergelijking van de zwaarte der projectielen. Dit blijkt uit hetgeen in l'Histoire de l'Academie des sciences 1707 p. 123 daaromtrent geschreven staat, nl. „Il ne parait pas que l'on ait présentement rien à desirer sur la pratique de cet art (celui de lancer des bombes) Peut-être seulement pourrait-on encore perfectionner l'instrument qui sert à pointer la pièce ou le mortier... Mais la géometrie étant quitte, pour ainsi dire envers la pratique est en droit de pousser plus loin la spéculation et de donner quelque chose à la simple curiosité, quand l'utilité est satisfaite." Hierbij komt nog, dat de wiskundigen van dien tijd niet in staat waren om de werking van den luchtwederstand analytisch in berekening te brengen. In BILIDOR's „Bombardier français ou nouvelle méthode de jetter les bombes avec précision (Amsterdam 1734)" vindt men de eerste schoottafels, die uit de parabolische theorie zijn afgeleid geworden.

Het ballistisch probleem echter was gedurende dien tijd een grooten stap vooruitgegaan. Het was NEWTON, die, na in 1687 eene theorie over den luchtwederstand te hebben opgebouwd, op wiskundigen weg de beweging naging van een materieel punt in eenig weêrstandbiedende middenstof. Indien de beweging vertikaal geschiedde, loste hij het vraagstuk van de beweging op, in de beide onderstellingen, dat de weêrstand evenredig aan de enkele en aan de tweede macht der snelheid is. Het onderzoek naar de beweging van een stoffelijk punt, hetwelk onder zekere elevatiehoek wordt opgeworpen, is door hem ingesteld geworden in de onderstelling, dat de weêrstand van de lucht evenredig is aan de 1ste macht der snelheid in 't 2de Boek zijner „Principia;" hij geeft echter toe, dat de luchtweêrstand die wet niet volgt, dat zijne geleverde berekeningen en beschouwingen niet overeenkomstig kunnen zijn met de waarnemingen.

De twee vergelijkingen, die NEWTON geeft ter bepaling van de horizontale en vertikale ontbondenen der snelheid op eenig willekeurig oogenblik zijn linéair, van de 1ste order en met constante coëfficienten, de twee onbekenden komen gescheiden voor, zoodanig, dat de twee vergelijkingen onafhankelijk van elkaâr worden opgelost. Dit is niet meer het geval, indien de weêrstand evenredig aan het vierkant van de snelheid gesteld wordt: als dan komen de twee onbekenden in beide bewegingsvergelijkingen, die niet meer linéair zijn, voor en het is slechts door eene speciale combinatie te verkrijgen, dat de variabelen gescheiden en de vergelijkingen tot kwadratuur kunnen gebracht worden. Het is te verwonderen, dat NEWTON het ballistisch probleem niet opgelost heeft, in deze laatste onderstelling omtrent den luchtweêrstand; EULER geeft daarover zijne verwondering in een zijner werken te kennen, aangezien NEWTON veel ingewikkelder analytische vraagstukken opgelost heeft.

In 't zelfde jaar, dat NEWTON zijne onderzoekingen omtrent de beweging van lichamen in weêrstandbiedende middenstoffen in het 2de boek der „Principia" uitgaf, deelde WALLIS, (1616—1703) zijne resultaten over hetzelfde onderwerp mede in the Royal Society of London. Zijne oplossingen van het ballistisch probleem, in dezelfde onderstellingen over den weêrstand als NEWTON, kan men vinden in de „Philosophical transactions." Vele geleerden in dien tijd hielden zich bezig met de analytische onderzoekingen omtrent de beweging van een punt in een weêrstandbiedend middenstof o. a. LEIBNITZ, (1646—1716) CHRISTIAAN HUYGENS, (1629—1695) in zijne „Discours sur la cause dela pesanteur (1690)," doch geen van allen gelukten het eene oplossing te geven van het probleem, indien de weerstand evenredig aan het vierkant van de snelheid wordt aangenomen. Het is dan ook niet te verwonderen, dat het vraagstuk in die dagen als onoplosbaar werd beschouwd. De engelsche wiskundige KEILL daagde alle wiskundigen van het Continent uit om het vraagstuk op te lossen, aan welke uitdaging door JEAN BERNOULLI, (1667—1748) gevolg werd gegeven. Deze loste het vraagstuk op, 30 jaren na NEWTON, bracht het ballistisch probleem tot kwadratuur, in de onderstelling, dat de weêrstand van de lucht evenredig is aan de n^e de macht van de snelheid. Zijne wiskundige onderzoekingen, evenals die van zijn neef NICOLAS BERNOULLI, zijn te vinden in de Acta eruditorum 1719, pag. 216.

D'ALEMBERT toonde daarna in zijn „Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides" aan, dat de herleiding tot kwadratuur ook mogelijk is wanneer

$$\varrho = a + b\, v^n.$$

en wanneer $\varrho = a + b\, log.\, v$ genomen wordt.

LEGENDRE in „Sur la question de la ballistique, Mem: de l'Acad. de Berlin 1782 pag. 59;" alsmede JACOBI in „de motu puncti singularis Crelle's Journal, Bd. XXIV, pag. 25," losten het ballistisch probleem op bij de wet van weêrstand, uitgedrukt door: $\varrho = a + b\, v^n$, waarin a en b coefficienten zijn, die door proefnemingen bepaald moesten worden; die oplossing vindt men in SCHELL, „Theorie der Bewegung und Kräfte" en in andere werken over Anal. Mechanica. Door die oplossingen was het ballistische probleem tot zoodanige hoogte ontwikkeld geworden, dat de praktijk, met name de artillerie, nut en dienst kon gaan trekken uit de geleverde formulen, die verkregen waren door de wet van NEWTON aantenemen, als de wet van weêrstand van de lucht. Het kwam er slechts op aan numerieke berekeningen der integralen, die de tijd en de 2 coördinaten van het zwaartepunt van het bolvormig lichaam in functie van een vierde variabele uitdrukken, in te stellen.

Met dit doel hebben vele wiskundigen hunne krachten gewijd aan de oplossing van 't ballistisch probleem, uitgaande van de onderstelling, dat de weêrstand van de lucht evenredig is aan de 2de macht der snelheid. Als het ware zijn door hen drie verschillende methoden aan de hand gegeven.

Bij de eerste methode wordt de baan partieel berekend en de verkregen diff. formulen toegepast op de zeer kleine deelen waarin de geheele projectielen-baan wordt verdeeld; bij die toepassing worden enkele variabele grootheden als constant beschouwd, waardoor de diff. vorm voor dat beschouwde baan-element in eindigen vorm kan worden uitgedrukt. Aldus is deze methode toegepast door S. D. POISSON in zijne „Traité de mécanique" en door EULER in zijne „Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air, insérées dans l'Histoire de l'Académie de Berlin 1573." POISSON's methode is die der kwadraturen, hij volgt den boven beschreven weg om voor verschillende punten van de baan de coördinaten te berekenen en alsdan de baan in teekening te brengen. EULER handelt op dezelfde wijze, echter met dit onderscheid, dat hij de lengte der verschillende baan-elementen berekent en bij elk element de gemiddelde der hellingshoeken van de uiteinden als bekend aanneemt; uit die doorloopen bogen leidt hij de daarbij behoorende abscissen en ordinaten af. Voor dat doel heeft EULER tabellen samengesteld die bij dergelijke baan-berekeningen gebruikt kunnen worden; bij zijne coördinatenberekening beschouwt EULER de projectie der partieële bogen als of zij gedeelten van rechte lijnen zijn; het is duidelijk dat daardoor de worpsverheden en élevaties steeds te groot zullen zijn.

LEGENDRE verbeterde EULER's methode door de projectie dier partieële bogen te bepalen als of die bogen, gedeelten van cirkelbogen zijn, hetgeen veel nauwkeuriger is. Men kan zulks vinden in de „Dissertation balistique par LEGENDRE, pag. 14.

De benadering is nog nauwkeuriger, indien men in plaats van den cirkelboog een paraboolboog substitueert, welke osculeert aan één der uiteinden van den te beschouwen partieëlen boog en ophoudt aan het andere uiteinde onder dezelfde helling. Dit is de methode welke DIDION in zijne „Traité de Ballistique. Paris 1847" gegeven heeft.

Door eene tweede methode worden de baan-elementen, die men zoekt, in reeksen volgens de machten van initiale gegevens verkregen. Deze methode is voornamelijk gevolgd door LAMBERT, (Histoire de l'Académie Royale de Berlin 1765); door BORDA (Mémoire de l'académie des sciences de Paris, 1769) door TEMPELHOF en FRANÇAIS. BORDA is met behulp van de theorie der onbepaalde coefficienten tot de reeksontwikkeling voor de baan geraakt. TEMPELHOF in zijn „Mémoire sur le problème balistique" behandelt bij het gestelde vraagstuk nog het geval, dat de dichtheid van de lucht veranderlijk is, hetzij dat de dichtheid eene functie is van de inclinatie van de baan, hetzij van de lengte van den doorgeloopen boog, en ten slotte als zij eene functie is van de veranderlijke hoogte van het materieele punt boven den horizont. Uitgaande van de eindige betrekking tusschen de lengte van een boog en de inclinaties aan de uiteinden, bepaalt hij door de methode der onbepaalde coëfficienten de reeks, die de coord: x en y van de baan geeft in functie van s, de initiale hellingshoek en de initiale snelheid. De ontwikkeling in reeksen van FRANÇAIS kan men vinden in „Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résestants, manuscrit de l'Ecole applic: an. XIII p. 134 alsmede in DIDION's „Mémoire sur la Ballistique présenté à l'académie des sciences le 17e Nov. 1845. Opmerkelijk is het, dat dezelfde formulen, ofschoon in éénvoudiger vorm te vinden zijn in de „Ballistische Tafeln, nebst einer Anleitung etc. von F. OTTO, Berlin 1834 bei Dümmler.

In GRÜNERT's Archivder Mathematik und physik, Bd 46 en 47 vindt men eene oplossing door NELL, die eveneens de methode der onbepaalde coëfficienten gebruikt om tot de vergelijking van de vluchtbaan te geraken; daaruit bepaalt hij de coördinaten der verschillende punten van de baan, daarbij de opvolgende partiëele baan-elementen beschouwende als gedeelten van parabolen met gelijke kromtestraal.

In Band 22 pag. 376 vindt men van GRÜNERT zelf eene benaderingsmethode voor de oplossing van het ballistisch probleem, welke van meer belang is voor de Integraalleer dan wèl voor de beoogde oplossing, zoowals de schrijver zelf erkent.

Eene derde methode door BORDA 't eerst gegeven, daarna door BESOUT in zijn „Cours de mathematiques" en voornamelijk weder door LEGENDRE en FRANÇAIS verbeterd, bestaat hierin, dat voor niet-integrabele uitdrukkingen anderen genomen worden, welke wèl te integreeren zijn; de graad van benadering hangt dus geheel af van de keuze dier integrabele uitdrukkingen. LEGENDRE geeft een voorbeeld van zijne benadering in de „Exerçises de calcul intégral, tome I pag. 336" waarin hij de coordinaten van de baan berekent tot op honderdduizendste deelen. Zijne methode maakt dus alle aanspraak op nauwkeurigheid, doch voor de toepassing missen zijne formulen de noodige eenvoudigheid en leiden zij tot ingewikkelde berekeningen. Het blijkt uit het voorgaande, dat de Analyse al het mogelijke tot de oplossing van het probleem gedaan heeft; aan haar is het niet te wijten dat de formulen niet strooken met de uitkomsten der praktijk. De reden daarvan ligt hoofdzakelijk in de onbekendheid met de wetten van den weêrstand van de lucht, welke, volgens de talrijke genomen proeven, geenzins de wet van het vierkant der snelheid volgt.

§ 2.

Op twee verschillende wijzen oefent de lucht invloed uit op de beweging van eenig lichaam; in de eerste plaats worden de luchtdeeltjes medebewogen en de levendige kracht dier deeltjes moet in de berekening worden opgenomen en in de tweede plaats ondervindt het lichaam bij zijne beweging een weêrstand, die het gevolg is van wrijving, van cohesie als anderzins. NEWTON [1]) die zich het eerst met de beweging van eenig lichaam in een weêrstandbiedende middenstof heeft bezig gehouden, bracht de laatstgenoemde omstandigheid in rekening en verwaarloosde de eerste. In het geval dat alléén de zwaartekracht op het lichaam werkte, paste hij de wet van ARCHIMEDES toe en wat den weêrstand betreft bewees hij, dat deze afhangt van de snelheid en afmetingen van het lichaam en van de natuur der middenstof. Voor de bepaling van dien weêrstand, staan twee wegen open nl. eene om, uitgaande van eenige hypothese, théoretisch den weêrstand te bepalen en de andere om langs proefondervindelijken weg tot die bepaling te geraken. Niettegenstaande de talrijke proefnemingen, gedaan met het doel om de wetten van weêrstand van de lucht optesporen, is tot op dezen dag de kennis daaromtrent weinig vermeerderd sedert NEWTON en staat de wetenschap nog op het zelfde standpunt om den weerstand theoretisch te bepalen als waarop NEWTON zich plaatste. De verschillende

[1]) Principia math. philosophiae naturalis. Lib. II.

hyphothesen, die in de laatste tijden gemaakt zijn omtrent de moléculaire beweging van gassen, zijn ook nog te onbepaald om eene mathematische oplossing te geven aan het vraagstuk.

Newton stelde het effect van den luchtweêrstand voor als eene kracht, in tegengestelden zin van de beweging van het lichaam, ontstaande uit de voortdurende reeks schokken van het voortbewogen lichaam tegen de omgevende luchtdeeltjes. Die luchtdeeltjes verdwijnen, na geschokt te zijn geworden met eene snelheid, overeenkomende met de verkregen kleine hoeveelheid van beweging. Uit deze beschouwing besloot newton dat, afgezien van de rotatie van het lichaam en speciaal een massieve bol als het te bewegen lichaam nemende, de weêrstand van de lucht gelijk is aan het gewicht van een luchtcilinder, welke tot basis heeft den grooten cirkel van den bol en tot hoogte de valhoogte die bij de initiale snelheid behoort. Uit zijne proeven, omtrent den val van lichamen in de lucht, zag hij zich verplicht bovengenoemde theoretischen weêrstand tot op de helft te verminderen. Uit diezelfde proeven echter leidde borda af dat zij op $^3/_5$ van de theoretisch berekende waarde diende verminderd te worden. Dezelfde theoretische beschouwingen omtrent den weêrstand worden tegenwoordig nog gevolgd om den weerstand van de lucht tegen lichamen, die zich daarin bewegen, te bepalen. In de „Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale par j. v. poncelet 1839 pages 522—697 vindt men wetenswaardige beschouwingen omtrent den weerstand van de lucht, verklaringen van vele feiten, die men waarneemt bij de beweging van projectielen in de lucht o. a. omtrent de vorming van die donkere massa lucht aan 't achtereind van 't projectiel, waarvan de lengte soms 2 à 3 maal den diameter van 't projectiel bedraagt, door Fransche schrijvers „proue" of „poupe fluide" genoemd.

Paul st. robert heeft in zijn „Etudes sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs 1860" den weg aangewezen hoe die weerstand theoretisch bepaald wordt, indien de te bewegen lichamen, omwentelingslichamen zijn.

Op de volgende wijze komt men tot de uitdrukking van den weerstand tegen een vlak met eindige afmetingen: Zij P het gewicht van 't vlak, S zijn oppervlak. en v de snelheid, waarmede het vlak botst tegen de luchtdeeltjes, welke men zich in rust denkt. Indien het vlak $\perp$ is op de richting van de beweging, dan doorloopt het vlak in den tijd $d\,t$ een weg $= v\,d\,t$ en verplaatst daardoor een volume lucht $= \mathrm{S}\,v\,d\,t$, waarvan de massa dus $\frac{\mathrm{D}}{g}\,\mathrm{S}\,v\,d\,t$.

Volgens 't tweede theorema in de Mechanica is

$$\Sigma\,(m\,v) - \Sigma\,(m\,v)_0 = \int \mathrm{F}\,d\,t;$$

dit theorema op ons geval toepassende is 't duidelijk dat $\int \mathrm{F}\,d\,t = 0$ is, aangezien gedurende den schok slechts inwendige krachten te voorschijn worden geroepen. Volgens het théorema hebben wij dus:

$$\Sigma\,(m\,v)_0 = \Sigma\,m\,v.$$

Nu is de initiale hoeveelheid van beweging nl. vóór den schok $\frac{\mathrm{P}}{g}\,v$, terwijl die hoeveelheid na den schok bedraagt

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{g} + \frac{\mathrm{D}}{g}\,\mathrm{S}\,v\,d\,t\right)(v - d\,v)$$

waarin D de dichtheid der lucht, dus

$$\frac{\mathrm{P}}{g}\,v = \left(\frac{\mathrm{P}}{g} + \frac{\mathrm{D}}{g}\,\mathrm{S}\,v\,d\,t\right)(v - d\,v)$$

waaruit

$$\varrho = \frac{\mathrm{P}}{g}\,\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{\mathrm{D}}{g}\,\mathrm{S}\,v^2$$

het eerste lid stelt de kracht voor van den weerstand der lucht tegen het vlak. Ware het vlak niet $\perp$ op de richting van de beweging, doch maakte de normaal op het vlak met die richting den hoek α, dan kunnen wij de snelheid ontbinden in ééne volgens de normaal $\mathrm{V}\,cos.\,\alpha$ en in eene andere // aan het vlak $\mathrm{V}\,sin\,\alpha$. Van de eerst ontbondene hangt de weerstand af, terwijl hij onafhankelijk van de tweede ontbondene kan beschouwd worden. De normale weerstand dus tegen het vlak zal zijn:

$$\varrho = \frac{\mathrm{P}}{g}\,\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{\mathrm{D}}{g}\,\mathrm{S}\,v^2\,cos.^2\,\alpha.$$

Aangezien bij deze beschouwing verschillende omstandigheden, die de beweging van het vlak in de lucht wijzigen niet in aanmerking worden genomen, moet men deze waarde van ϱ met een coëfficient k vermenigvuldigen, die door proefnemingen bepaald moet worden. De normale weerstand tegen een element $d\sigma$ van 't vlak is alzoo:

$$\varrho = K \frac{D}{g} d\sigma v^2 \cos.^2 \alpha.$$

Door middel van dezen elementairen weerstand der lucht is men nu in staat den weerstand te bepalen tegen lichamen van verschillenden vorm, uitgaande van de onderstelling, dat op elk element van dat deel des oppervlaks, dat blootgesteld is aan den luchtweerstand, bovengenoemde elementairen weerstand werkt. Men kan de toepassingen hiervan vinden in MAYEVSKI's „Traité de la Ballistique."

Uit de theoretische beschouwing van NEWTON en die van anderen op denzelfden grondslag opgebouwd, volgt de wet dat de weerstand van de lucht evenredig is aan 't □ van de snelheid en evenredig aan de projectie van het lichaam op een vlak dat ⊥ staat op de richting van de beweging. De tweede wijze, nl. de methode om door proefnemingen te geraken tot een empirische wet omtrent den weerstand, toont echter te groote afwijkingen van deze wet aan, dat zij bij projectielen baan-berekeningen gebruikt mag worden, indien de snelheid van het te bewegen lichaam niet groot is. Zooals reeds vermeld is, heeft NEWTON ook den proefondervindelijken weg ingeslagen om den weerstand van de lucht te bepalen; men diende daartoe de initiale snelheid te kennen, waarmede een lichaam zich in de lucht beweegt. De oudste wijze om die snelheid te meten bestond uit de bepaling van de draagwijdten, waaruit, met behulp der formulen, bij een aangenomen wet van weerstand, de snelheid werd berekend.

Deze wijze van snelheids-bepaling werd later door LOMBARD verbeterd en is door hem in zijn „Mouvement des projectiles 1797'' breedvoerig beschreven. Nauwkeuriger, doch in de toepassing moeielijker is de berekening der snelheid uit de meting van de hoogte en den duur der klimming, welke methode BERNOUILLI heeft gebruikt (Hydrodynamique, Strasbourg 1738). Nog eene andere methode, die gevolgd is geworden, bestaat in de bepaling van de snelheid met behulp van den waargenomen duur der baan; hoe korter de baan des te nauwkeuriger zal de tijdsbepaling kunnen zijn. Deze handelwijze werd toegepast om de snelheid van bommen te meten, met behulp van het rotatiemachine van MATTHEY, hetwelk door D'ANTONY beschreven is in zijn werk „Examen de la poudre", door DE FLAVIGNY in 1773 uit het Italiaansch vertaald. Door verbeterde instrumenten is deze methode nog in lateren tijd toegepast o. a. door GROBERT, wiens proeven men vindt in „Rapport à l'Institut, classe des sciences mathématiques 2e germinal an XII." Het was echter BENJAMIN ROBINS die den ballistischen slinger uitvond, met behulp waarvan men de snelheid van het lichaam in eenig willekeurig punt van zijn baan kan meten. Hij gebruikte den ballistischen slinger in 1740 bij zijne proeven en toonde weldra aan, dat de luchtweerstand nooit evenredig zijn kan aan de eerste macht van de snelheid zooals NEWTON bij zijne baanberekeningen had aangenomen, alsmede dat de weerstand sneller aangroeit dan het vierkant van de snelheid. In zijne „New principles of gunnery" (door EULER in 1745 vertaald), waarin nevens die proeven ook onderzoekingen omtrent de verbranding en de kracht van het buskruid voorkomen, maakte hij de aandacht opmerkzaam op de afwijkingen uit het vertikale vlak van beweging, tengevolge van de rotatie der bolv. projectielen. EULER leidt uit ROBIN's proeven af, dat de weerstand van de lucht kan worden uitgedrukt door de formule $\varrho = a v^2 + b v^4$. Op de proeven van ROBINS volgde die van BORDA in 1763, welke voorkomen in de „Mémoire de l'Acad. pour l'annee 1769" welke in 1846 te Parijs zijn uitgegeven.

Ongeveer in denzelfden tijd volbrachtten ANTONI en D'ARZY hunne onderzoekingen omtrent den aard van werking van het kruid en de snelheid, welke de kogel verkrijgt. ANTONI's onderzoekingen werden in 1768 uit 't Italiaansch vertaald door TEMPELHOFF en te Berlijn uitgegeven, terwijl LAMBERT in 1766 te Dresden het werk van D'ARZY uit het Fransch vertaalde en uitgaf. De twee laatstgenoemden en later THOMPSON brachten wezenlijke verbeteringen aan in het gebruik en de inrichting van den ballistischen slinger, welke men vinden kan in een engelsch werk daaromtrent door BENJ. V. RUMFORD (1778) uitgegeven, die insgelijks vele proeven genomen heeft met den ballistischen slinger. Dit werk is door VON RÖDLICH te Berlijn in 1830 vertaald.

De gewichtigste van alle ballistische proeven, tot op het eind van de vorige eeuw, zijn echter die van HUTTON, welke voor de eerste maal den ball. slinger gebruikte om snelheden te meten van projetielen van groot caliber, terwijl de genoemde voorgangers dien slechts aanwendden bij proefnemingen met klein geweer. Uit zijne proeven met kogels van 1 pond gewicht, gehouden te Woolwich gedurende de jaren 1775—1786 en uit die met kogels van 1[1] 3[1] en 6[1] (av: du poids) gedurende 1786—1791 heeft HUTTON belangrijke proefondervindelijke wetten afgeleid, die tot grondslag gediend hebben voor latere proeven met kogels van nog grooter caliber, wetten, die het verband uitdrukken tusschen den luchtweerstand en de snelheden van af de geringste tot de grootste waarde. Hij heeft deze proeven, welke door groote zorg en nauwkeurigheid uitmunten, uitgegeven in zijn „Tracts on mathematical and philosophical subjects etc. Londen 1812. Zijne eerste proeven zijn in het Fransch vertaald door TERQUEM (Paris 1826). De eerste HUTTON'sche proeven van het jaar 1775 komen ook voor in het werk van LOMBARD „les nouveaux principes de l'artillerie de BENJ: Robins traduit par EULER de l'Allemand avec des notes (DYON 1783 [1]).

Uit zijne proeven trok HUTTON de conclusie, dat de weerstand sneller dan het vierkant van de snelheid toenam van af de zwakste snelheden tot ongeveer 440^M en dat zij ongeveer de wet van de vierk. der snelheden volgt van af 440^M tot 600^M. PONCELET heeft uit de proeven van HUTTON de volgende waarden van k berekend. (Zie Introduction à la Mecanique pag 618).

De weerstand tegen een bolv: projectiel waarvan d de middellijn en v de snelheid is, zal zijn

$$\varrho = k \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{v^2}{2g} \gamma$$

waarin γ 't specifiek gewicht van de lucht.

v	1^M	3^M	5^M	10^M	25^M	50^M	100^M	200^M	300^M	400^M	500^M	600^M
k	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04	1,01

[1]) LOMBARD heeft ook uitgegeven „Traité du mouvement des projectiles appliqué au tir des bouches à feu, DYON an V en „Tabler du tir des canons et des obusiers 1787.

Deze getallen echter zijn door eene interpolatie verkregen, waar bij uitgegaan is van de wet der vierkanten; zij zullen dus nooit tot een zuiver resultaat kunnen leiden, daarbij komt nog dat GEORGE PIOBERT, die de constanten-bepaling van HUTTON eveneens aan een nauwgezet onderzoek onderwierp, bevond, dat de coëfficient k voor groote snelheden bepaald was geworden door de geringste waarden bij de proeven gevonden en niet door de gemiddelden der snelheden. In PIOBERT's „Memoire présenté au concours etc. par M. M. PIOBERT, MORIN en DIDION in 1837, vindt men de volgende weerstands-formule, die gebaseerd is op de resultaten van HUTTON's proeven bij kleinere snelheden.

$$\varrho = \pi R^2 (1 + 0{,}0017\, V)\, V^2 \sqrt{0{,}012\, \pi R^2 + 0{,}00121.}$$

In 1839 echter was door PONCELET reeds aangetoond, dat deze formule, door PIOBERT afgeleid, een te grooten weerstand van de lucht gaf, aangezien bij de proeven van HUDSON en bij de daarop gebaseerde beschouwingen van PIOBERT geen rekening was gehouden met de rotatie-beweging der projectielen. Dit bleek dan ook werkelijk bij de artillerieproeven te Metz in 1839—1840 gedaan.

De resultaten van die verschillende proefnemingen zijn door Gen. DIDION samengevat in zijne „Lois de la résistance de l'air. Uit die proeven is de volgende formule voor den weerstand afgeleid:

$$\varrho = 0{,}027\, \pi R^2 \frac{d}{d'} v^2 \left(1 + \frac{v}{435}\right)$$

welke geldig is voor bolvormige projectielen van af de geweerkogels tot de kogels voor de grootste calibers; d is de dichtheid van de lucht gedurende de proefnemingen en d' die bij 15° C. en bij eene barometerhoogte van 76 c.M. Uit dezelfde proeven komt PAUL ST. ROBERT in „du mouvement des projectiles dans les milieux résistants 1859" tot de formule

$$\varrho = 0{,}0387\, \pi R^2 \frac{d}{d'} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{(696)^2}\right)$$

Om tot eene nauwkeurige uitdrukking voor eene wet van weerstand te geraken, is het zeer zeker noodig om de snelheid te meten van een projectiel in de verschillende punten van zijne baan; nu geeft de gewone ballistische slinger aanleiding om slechts de snelheid in één punt van de baan te bepalen; de snelheid in eenig ander punt wordt afgeleid uit dezelfde waarneming bij een ander projectiel van dezelfde afmeting en alles zoo mogelijk onder dezelfde omstandigheden; die twee snelheden worden beschouwd als behoorende bij één zelfden projectielen-baan. De bepaling van den weerstand, op deze snelheids-metingen gebouwd, is zeer zeker niet nauwkeurig; dit bleek dan ook bij baanberekeningen van projectielen, die onder groote élévatie-hoeken en groote snelheden werden opgeworpen en gaf aanleiding tot eene nieuwe reeks proefnemingen, die in de jaren 1856—1859 te Metz genomen werden, waarbij de Electro-ballistischen slinger van NAVEZ gebruikt werd [1]). Door de inrichting van dezen slinger is bovenstaand bezwaar opgeheven en kan men de snelheid in twee punten van de baan meten. De commissie, aan welks hoofd de KOL. VIRLET stond, heeft uit de groote reeks proeven, op welker resultaten de waarschijnlijkheidsrekening werd toegepast, gevonden, dat de weerstand van de lucht tegen spherische projectielen kan worden uitgedrukt door de formule

$$\varrho = 0{,}000142\, \pi\, R^2 \frac{d}{d'}\, v^3$$

(de M. en Kg. voor éénheden genomen).

Ten gevolge van ontdekte onnauwkeurigheden in den gang van de eerste electro-ballistischen toestellen van NAVEZ, die te Metz gebruikt werden zijn in 1868—1869 nieuwe proeven door de Russische artillerie genomen te St. Petersburg, waarbij de snelheden met behulp van twee chronograven van LE BOULENGÉ en den electro-ballistischen slinger van NAVEZ werden bepaald; door middel van deze chronografen kon een tijdsverloop van 0,10″ à 0,15″ gemeten worden. De electro-ballistischen slinger van NAVEZ was sedert verbeterd geworden door VIGNOTTI naar aanleiding van wijzigingen in het instrument, die door SIEMENS en

---

[1]) Het denkbeeld om de electriciteit toe te passen op de snelheidsmeting van projectielen wordt in 't algemeen aan WHEATSTONE (1840) toegeschreven. De samengestelde electro-ballistischen slinger van NAVEZ vindt men beschreven in „Application de l'électricité à la mesure de la vitesse des projectiles Paris Corréard 1853." Uitvoerig worden de electro-ballistische toestellen ook beschreven in het werk: „Etude sur les appareils électro-magnétiques destinés aux expériences de l'artillerie etc. par MARTIN DE BRETTES capitaine d'artillerie Paris 1854."

door MARTIN DE BRETTES in 1858 waren voorgesteld. Gelijktijdig werden door BASHFORTH te Woolwich in 1868 proeven genomen, waarvan men de resultaten vinden kan in de „Proceedings of the Royal Artillery Institution Woolwich 1868"; hij komt tot de conclusie, dat de weerstand van de lucht evenredig is aan de derde macht van de snelheid [1]). MAYEVSKI heeft de resultaten van de Petersburger proeven en die van BASHWORTH gecombineerd en komt tot de volgende formulen voor den weerstand van de lucht tegen bolv. projectielen:

$$\varrho = 0{,}061\,\pi\,R^2\,\frac{d}{d'}\,v^2$$

welke geldt voor snelheden van af 530 M. tot 376 M. en

$$\varrho = 0{,}012\,\pi\,R^2\,\frac{d}{d'}\,v^2\left(1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right)$$

voor snelheden van af 376 M. tot de kleinste gebruikelijke.

Omtrent den weerstand van de lucht tegen l a n g w e r p i g e

---

[1]) Deze proeven gaven Prof. G. T. W. BAEHR aanleiding tot een opstel „over de beweging in eene middenstof, wier weerstand evenredig is aan de 3e macht der snelheid" hetwelk voorkomt in de Verhandelingen van de Acad. v. Kunsten en Wetenschappen 1870. BASHFORTH leidde uit zijne proeven met bolv. projectielen de volgende betrekking tusschen doorloopen baan en tijd af:

$$t = a\,s + b\,s^2$$

waaruit,

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = \frac{1}{a + 2\,b\,s}$$

en

$$f = \frac{d^2\,v}{d\,t^2} = -\frac{2\,b}{(a + 2\,b\,s)^3} = -2\,b\,v^3$$

welke laatste uitdrukking de versnelling van den luchtweêrstand voorstelt. Hiervan uitgaande spoort BAEHR eene bewegingsformule, op waaruit $2\,b$ direct bepaald wordt, indien de richting en grootte van de initiale snelheid benevens de horizontale boogschootsverheid gegeven zijn.

Het besluit, dat hij trekt uit de toepassingen van de gevondene waarde voor $2\,b$ op speciale projectielen banen nl. dat de luchtweêrstand i n d e r d a a d evenredig is aan de 3e macht der snelheid, is naar mijn inzien zeer gewaagd; immers geen interpolatietafel, gemaakt in de onderstelling van eene bepaalde wet van weêrstand, kan gebruikt worden, indien van eene andere wet van weêrstand, in de formulen, is uitgegaan.

projectielen zijn in 1857 te Metz reeds proeven genomen; volgens die proeven bedroeg de weerstand slechts $^3/_5$ van die, welke een spherisch projectiel van denzelfden diameter ondervindt bij eene snelheid van 300 M.; die verhouding wordt kleiner bij toename van snelheid, nl. $^2/_5$ bij eene snelheid van 240 M. Over den luchtweerstand tegen spitsvormige projectielen kan men ook raadplegen „Essai sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants par THIROUX (premier cahier, Paris 1852). In 1869 werden ook te St. Petersburg proeven genomen met de langwerpige projectielen, welke aanleiding gaven aan MAYEVSKI om den weerstand van de lucht tegen langwerpige projectielen, waarvan de figuuras samenvalt met de richting van de initiale snelheid, uit te drukken: van af eene snelheid van 510 M. tot 360 M. door

$$\varrho = 0{,}044\, \pi\, R^2 \frac{d}{d'} v^2$$

van af 360 M. door

$$\varrho = 0{,}00000000000026\, \pi\, R^2 \frac{d}{d'} v^6$$

van af 280 M. tot de kleinste snelheden:

$$\varrho = 0{,}012\, \pi\, R^2 \frac{d}{d'} v^2 \left[1 + \left(\frac{v}{488}\right)^2\right]$$

Bij het eindigen van dit overzicht van de literatuur betreffende den weerstand van de lucht, mogen de diensten niet onvermeld blijven, welke de toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening heeft bewezen om dien weerstand in functie van de snelheid uit te drukken. Uit de diff: verg: van de beweging van het lichaam, welke het verband uitdrukken tusschen de snelheden in de verschillende punten van de baan, moet de weerstand als eene functie van de snelheid worden bepaald. Indien voor $f(v)$ in 't algemeen genomen wordt

$$f(v) = a + bv + cv^2 + dv^3 + \text{enz.}$$

dan moeten de verschillende proeven dienen om de constanten a, b, c enz. te bepalen; de tallooze proefnemingen omtrent de snelheidsbepaling gaven aan de verschillende proefnemers aanleiding om, uitgaande van een voorafgestelde wet van weerstand, dezen in getallenwaarde uit te drukken. Door toepassing van de regelen der waarschijnlijkheidsberekening moet dan de waarden der constanten bepaald worden. Uitvoerig vindt men die toepassing in 't werkje van DIDION „Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles, hetwelk in 1858 verscheen; die toepassing is sedert dien tijd veel verbeterd en verkort door de interpolatieformulen van TCHEBYCHEFF, welke men vinden kan in zijn mémoire „sur les valeurs moyennes 1866."

Zoolang men echter door eene vooraf gestelde wet van weerstand, uit de snelheids-bepalingen geraken moet tot de waarde van den weerstand van de lucht tegen eenig lichaam, dat zich daarin beweegt, zal men onmogelijk kunnen komen tot een absoluut-nauwkeurige bepaling van dien weerstand, want, door vergelijking van de theoretische baan met die, welke in de praktijk wordt waargenomen, zal het steeds kunnen gebeuren, dat door compensatie van fouten, de praktijk met de theorie overeenstemt, zonder dat juist de aangenomen theoretische baanvergelijking nauwkeurig de werkelijk beschrevene baan teruggeeft. Slechts één middel bestaat er om èn theorie èn praktijk te doen overeenstemmen, daartoe zal nl. de initiale snelheid en de constanten in de weerstandswet zonder hulp van theoretische formulen bepaald moeten worden en voor elk soort van lichaam, dat zich in de lucht beweegt, afzonderlijk.

§ 3.

Zooals vermeld is, had EULER uit ROBIN's proeven afgeleid dat de wet van den luchtweerstand kan uitgedrukt worden door de formule $\varrho = av^2 + bv^4$. Voor de ontwikkeling der baan-elementen in reeksen, heeft EULER hulptabellen samengesteld, welke uitvoerig berekend zijn geworden door een Pruisischen art: officier JACOBI; deze zijn echter verloren geraakt. Eene daaropvolgende bewerking van den graaf v. GRÄVENITZ, voorkomende in zijne „Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln, Rostock 1764" moet in vele opzichten gebrekkig zijn; deze laatste verhandeling is door RIEFFEL in het Fransch vertaald onder den titel „Memoire sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie (Paris 1845)." EULER is later van deze weêrstandswet afgestapt, voornamelijk, omdat zijne reeksen niet-convergent en voor de praktijk niet te gebruiken zijn.

CHARLES HUTTON, door zijne proeven geleid, heeft ook een tweeledigen vorm voor de weêrstandswet voorgesteld, doch slaagde niet om de diff: vergelijking voor de baan op te maken. Hij berekent de baan evenals LOMBARD in zijn „Traité du mouvement des projectiles, appliqué aux bouches à feu 1796," door eene benaderingsmethode, die slechts toepasselijk is voor eene zeer geringe initiale elevatiehoek. De oplossingen van het ballistisch probleem door BERNOULLI, LEGENDRE JACOBI en vele anderen hebben voor de praktijk niet dat nut opgeleverd, dat daarvan te verwachten was; want de vormen van de weerstandswet, waarbij tot kwadratuur kon geraakt worden, sloten niet met de uitkomsten der praktijk; evenmin gaven hunne eindformulen aanleiding om bij speciale baan-berekeningen gebruikt te worden. Sedert de proeven te Metz in 1839—1840, tot eene weerstandsformule leidden, door DIDION aldus uitgedrukt: $\varrho = f(v) = av^2 + b\,v^3$ heeft DIDION eene benaderings-methode gegeven, welke gebaseerd is op de substitutie van $\varrho = \dfrac{f\,(p\,v\,cos.\,\varphi)}{p\,cos.\,\varphi}$ in plaats van $f\,(v)$, waarin p eene constante; door die substitutie worden de variabelen in de diff: vergelijkingen der beweging gescheiden. Deze substitutie kan zonder groote fout gebeuren, indien de hoek φ, gedurende het geheel verloop van de kromme, binnen geringe grenzen varieert en men aan p eene waarde geeft, zoodanig, dat het produkt $p\,cos.\,\varphi$ weinig van de eenheid verschilt. De bezwaren tegen deze methode is, dat bij eene baanberekening met groote initiale-elevatiehoek, men verplicht is om de constante p successievelijk te doen varieeren, m. a. w. dat de baan bij gedeelten berekend moet worden. Deze DIDION'sche methode is door MAYEVSKI in zijn „Traité de ballistique," toegepast, bij verschillende uitdrukkingen voor den weerstand, waarvan de mogelijkheid door DIDION zelve reeds was aangewezen.

PAUL DE ST. ROBERT heeft echter in „Du mouvement des projectiles dans les milieux résistants" eene methode gegeven voor benadering, welke in het tweede gedeelte van dit proefschrift bij eene algemeene wet van weerstand ontwikkeld en toegepast is op eene projectielenbaan met de weerstandsformule: $\varrho = f(v) = av^2 + bv^4$; diezelfde projectielenbaan is door MAYEVSKI in meergenoemd werk naar de methode van DIDION berekend; uit de verkregen resultaten blijkt dat de berekening volgens

ST. ROBERT's methode nauwkeuriger uitkomsten geeft dan die door MAYEVSKI verkregen zijn, niettegenstaande de nauwkeurige wijze, waarop DIDION's methode is toegepast.

In een onlangs verschenen werkje van kapitein HAUPT komen ballistische beschouwingen voor, waarop een aantal formulen berusten, die geschikt zijn tot het berekenen der verschillende baan-elementen. Uitgaande van bekende aanvangssnelheid, bekenden luchtweerstands-coefficient en waargenomen vluchttijd geeft de schrijver de formulen voor de verschillende elementen.

Het mag eenige bevreemding verwekken, dat voor de veranderlijke grootheid, waarvan alle berekeningen afhankelijk worden gemaakt, de vluchttijd genomen is, zijnde juist het element, dat in de praktijk zoo moeilijk met groote nauwkeurigheid waar te nemen is, althans zoo lang men zich bedient van de gewone hulpmiddelen, die bij het vuren meestal beschikbaar zijn zooals b. v. tertshorlogiën. Zijne door hem ontwikkelde formulen berusten op de wet der 3e machten voor den luchtweerstand; daardoor zijn de eindsnelheden voor groote afstanden, door de formulen van HAUPT berekend, in het algemeen te klein. Door Luit. Kol. SIMON te Breda zijn de HAUPTsche formules eveneens getoetst aan de praktijk; deze geeft als zijn gevoelen, dat bij nauwkeurige kennis van den vluchttijd, de formulen van HAUPT tot vertrouwbare uitkomsten leiden, doch de eindresultaten op groote afstanden niet te vertrouwen zijn. Door de laatstgenoemde is ook den weg aangewezen om door middel der HAUPT'sche formules schootstafels samen te stellen. Hij heeft zulks beschreven in een werkje „Losse aanteekeningen over eenige artillerie onderwerpen" en neemt eveneens de wet der derde machten voor den luchttegenstand aan.

Omtrent de wijze van het samenstellen dier tabellen kan men raadplegen E. JOUFFRET „L'établissement et l'usage des tables de tir," het Handboek der artillerie van SEYFFARTH, van PREHN en anderen.

§ 4.

Bij gebruikmaking van de nauwkeurigste benaderingsmethode en van de wet, die volgens de laatste proeven het nauwkeurigst den weêrstand van de lucht tegen een projectiel uitdrukt, stuit men steeds op belangrijke afwijkingen of déviaties.

Die déviaties moeten worden toegeschreven aan oorzaken, waarvan de gevolgen steeds het projectiel in zijne beweging vergezellen.

Die oorzaken, waarvan de gevolgen op wiskundige wijze bepaald zijn geworden, zijn hoofdzakelijk de volgenden: 1°. de beweging van de luchtdeeltjes ten gevolge van den wind, 2°. de rotatie beweging, welke het projectiel heeft tegelijkertijd met de translatie beweging en 3°. de invloed van de rotatie der aarde op de beweging van het lichaam.

Met den invloed der beweging van de atmosfeer tengevolge van den wind heeft BORDA zich het eerst bezig gehouden in de onderstelling, dat de richting van den wind gelegen is in het vertikale schietvlak. PERSY in zijn „Cours de ballistique, lith: de l'ecole d'application de l'artillerie et du génie à Metz 1834" behandelt het geval, dat de windrichting loodrecht staat op het vertikale schietvlak; zijne methode is benaderend. Van de hand van Dr. DIPPE komt in GRÜNERT's archiv Band 6 eene verhandeling voor, waarbij hij het vraagstuk van de BALLISTICA oplost, in de onderstelling, dat de lucht zelve in beweging is, hetgeen overeenkomt met het nagaan van den invloed van den wind op de baan. Jammer is het dat hij den weêrstand evenredig stelt aan de 1e macht der snelheid. DIDION behandelt die kwestie in het algemeen geval, waaruit af te leiden is, dat de déviatie van het projectiel evenredig is aan de snelheid van den wind en omgekeerd evenredig aan die van het projectiel.

De tweede hoofdoorzaak van déviatie van het bolv. projectiel is de rotatie-beweging, welke het tegelijkertijd met de translatie-beweging heeft. Reeds vóór ROBINS moet deze oorzaak van déviatie vermeld zijn, ten minste ROBINS laat zich zoodanig uit in zijne „New principles of gunnery." De oorzaken van die rotatie-beweging, wanneer zij al niet opzettelijk is medegedeeld, zooals bij getrokken kanonnen met inwendigen schroefgang, ligt hierin, dat de diameter van den kogel kleiner is dan de diameter van de monding van het geschut; de kogel rust dus op den ondersten rand van het vuurwapen en laat door de bovenste spleetopening de gassen door, die ontstaan door de verbranding van het kruid; die gassen oefenen eene aanmerkelijke drukking uit op het projectiel; daar zij tegelijkertijd het achterste gedeelte van den kogel vooruitdringen, ontstaat er eene wrijving, aangrijpende in het punt van aanraking.

Die tangentiëele kracht veroorzaakt, dat het projectiel eene rotatie-beweging aanneemt om eene as, die $\perp$ staat op den straal van het raakpunt en op de richting van de translatie-beweging. De grootte van deze rotatie is niet te bepalen, aangezien ze voor elk projectiel, uit het zelfde vuurwapen voortgedreven, zal verschillen. Eene andere oorzaak van de rotatie-beweging is deze, dat de bolvormige projectielen excentrisch zijn, d. w. z. het zwaartepunt valt niet samen met het middelpunt van den bol, ten gevolge van niet-homogeniteit van het projectiel; deze oorzaak van rotatie is voor 't eerst aangewezen door de geschutsproeven, die de Hannoveraansche Artillerie in 1798 deden met 7ponds houwitsers en met excentrieke bommen. Die proeven vindt men in „SCHARNHORST's Handbuch der Artillerie 2e Bd. 49, 50 en 51 und 3e Bd. § § 191 en 192. Eveneens zijn daaromtrent in 1828 te Mainz proeven genomen, waarvan de resultaten vermeld zijn in „Bericht über die von der hochlöblichen militair commission der hohen Deutschen Bundesversammlung angeordneten und in den monaten Mai, Juni, Juli, August und September 1828 bei Mainz ausgeführten Artillerie versuche, Mainz 1829." Verder kan men nog raadplegen „Delobel's Mémoires et notices relatifs à l'influence de la rotation des projectiles sur leur trajectoire" te vinden in de „Revue de technologie militaire par DELOBEL Liège 1854." Bovenvermelde oorzaak heeft POISSON in 1839 analytisch onderzocht en eveneens het geval, dat het projectiel een weinig van den bolvorm afwijkt, waardoor ook het projectiel eene rotatie-beweging bij zijne voortgaande beweging verkrijgt [1]. Het essentiëele van het vraagstuk, om den invloed van de rotatie op de voortgaande beweging na te gaan, is: de bewegingsvergelijkingen op te maken voor een geheel vrij lichaam, waarvan de beweging ontbonden wordt in eene translatie beweging van het zwaartepunt en eene rotatie om dat punt of om eene as, gaande door dat punt, welke as gedurende de beweging steeds veranderlijk is in richting.

---

[1]) Denkelijk is POISSON tot dit anal. onderzoek overgegaan naar aanleiding van een verzoek door F. OTTO in 1837, aan hem gericht, ten einde een oordeel te vellen over eene methode, die OTTO voorstelde; aan dat verzoek heeft POISSON nooit voldaan.

Nadat POISON in zijn „Traité de Mécanique" op de eenvoudigste wijze tot de diff: verg: der beweging van een geheel vrij lichaam, waarop verschillende krachten werken, geraakt was en hen tot den vorm, waarin EULER hen verkreeg, had teruggebracht, paste hij deze algemeene oplossing toe op het geval, dat het lichaam een niet-homogeene bol is, waarop de zwaartekracht en de weêrstand van de lucht werken. Hij beschouwt in zijne „Recherches sur le mouvement des projectiles en ayant égard à leur figure, à leur rotation etc. Journal de l'ecole polytechnique XVI en XVII cahier" den weêrstand van de lucht tegen elk element van het oppervlak als uit twee deelen bestaande; het ééne, normaal op het element werkende, is de eigentlijke weêrstand en het andere rakende aan het element, ontstaande door de wrijving van het lichaam tegen de omhullende luchtlaag. Dezelfde beschouwingen omtrent den weerstand heeft hij gevolgd in zijne „mémoire sur les mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant, tome XI des Mémoires de l'academie des sciences."

De resultaten, waartoe POISSON geraakt, in het kort samengevat, zijn deze: Wanneer een volmaakt bolvormig en homogeen projectiel om een zijner diameters wentelt, dan zal de rotatie voortduren gedurende de geheele baan, in dezelfde richting en om denzelfden diameter, die steeds evenwijdig aan zich zelve blijft; de rotatie-snelheid neemt in omgekeerde reden van het produkt van den diameter en de dichtheid van het projectiel af met oneindig kleine hoeveelheden. De rotatie heeft invloed op de richting van het projectiel en dien ten gevolge ook op de worps verheid. De horizontale afwijking uit het vertikale schietvlak, welke rechts of links zijn kan, is onafhankelijk van den hoek, welke dit vlak maakt met het vertikale vlak, waarin de rotatie-as, ligt; zij hangt af van de lengte van den doorgeloopen boog; staat de rotatie-as vertikaal, dan is de horizontale deviatie rechts of links, al naarmate het voorste halfrond des bol van den rechter naar den linkerkant of omgekeerd draait; geschiedt de rotatie om eene horizontale as, dan is die déviatie nul.

De vertikale déviatie, of de hoeveelheid, welke de kogel in zijne baan rijst of daalt ten gevolge van de rotatie, staat gedurende den tijd, waarin de baan wordt afgelegd, in constante verhouding tot de zooeven vermelde horizontale déviatie; als de rotatie-as vertikaal is, dan is zij nul; is zij horizontaal en tevens $\perp$ op het vertikale schietvlak, dan heeft de rotatie eene rijzing of daling van het projectiel ten gevolge, al naarmate het voorste halfrond van boven naar beneden of omgekeerd wentelt. Is het projectiel excentrisch, dan valt niet altijd de rotatie-as samen met de as, die door het zwaartepunt van het projectiel en het middenpunt van den bol gaat; de rotatie-as is dus in het algemeen geen hoofdas van het lichaam; zij verplaatst zich bij de beweging onophoudelijk en valt achtereenvolgens samen met de verschillende diameters van den bol. Het resultaat van zijne wiskundige ontwikkelingen in dit geval is, dat de invloed van de excentriciteit te verwaarloozen is bij de berekening van de voortgaande beweging, indien de initiale rotatie-snelheid niet zeer groot is, echter niet te verwaarloozen bij de berekening van de rotatie-beweging. Uit de berekeningen, door POISSON ingesteld, blijkt dus, dat ten gevolge van de wrijving van de lucht tegen het projectiel, welke tegelijk roteert, het projectiel eene déviatie geven zal in tegengestelden zin van de beweging van het vóórste halfrond; nu hebben echter de proeven juist het tegendeel aangetoond. Reeds onmiddelijk na het verschijnen van POISSON's verhandeling verscheen van F. OTTO eene verhandeling in het „Archiv. für die Offiziere der K. Pr. Art. und Ing.-Corps Band XI § 118-142 waarin hij de niet-overeenstemming van POISSON's uitkomsten met de praktijk aantoonde. In 1843 gaf OTTO wederom zijne „Bemerkungen über den einflusz der Umdrehung der Artillerie-geschosze auf ihre Bahn im Algemeinen sowie über die Unzulänglichheit des desfallsigen Unter-suchungen des Herrn POISSON in's besondere, Berlin 1843 bei Behr'' uit, waarin hij de onhoudbaarheid van POISSON's begrip over den luchtweêrstand aantoont; door zijne verdere proeven over déviatie van projectielen wijst hij telkens op de onjuiste uitkomsten, door POISSON verkregen. Trouwens de onderstelling van POISSON omtrent den luchtweêrstand is gebrekkig; hij heeft nl. niet in aanmerking genomen, dat de drukking van de lucht op zekere deelen van het projectiel-oppervlak toe- en afneemt, zooals MAGNUS door physische proeven nauwkeurig heeft aangetoond. De eerste, die eene theoretische verklaring gaf van de déviaties bij roteerende projectielen, was de Belgische overste BORMANN; zijne beschouwingen, die met de praktijk overeenstemmen, kan men vinden in „DELOBEL's Revue de technologie militaire."

MAGNUS toont in zijne „Mémoire, présenté à l'Academie des Sciences 1851 et 1852 impr. à Berlin, traduit par O. TERQUEM" en in „Sur la déviation des projectiles par G. MAGNUS, traduit par M. RIEFFEL 1863" ten duidelijkste aan, dat die elementen, welke eene rotatie-beweging hebben in tegengestelden zin van de voortgaande beweging, eene vermindering van weêrstand ondervinden, terwijl die elementen, die in denzelfden zin van de translatie-beweging roteeren, eene vermeerdering van druk ondervinden. Dit is de voornaamste oorzaak van de aanzienlijke déviaties, welke de spherische excentrieke projectielen, die om eene as $\perp$ op hunne translatie beweging roteeren, vertoonen. De beschouwingen, door POISSON geleverd, verdienen dus als bijdrage tot de kennis van den weêrstand van de lucht ter zijde gelegd te worden, terwijl niemand de groote verdiensten van zijne analytisch-mechanische beschouwingen zal ontkennen. De niet-overeenstemming tusschen théorie en praktijk heeft ten slotte aanleiding gegeven aan F. OTTO in 1853, om eene onderstelling omtrent den weêrstand te maken, die hij wiskundig uitdrukken en dus bij zijne bewegingsvergelijkingen gebruiken kon. De resultante van den weêrstand stelt OTTO zich voor in twee anderen ontbonden, waarvan de eene de eigenlijke weêrstand is, gericht in tegengestelden zin der beweging van het zwaartepunt van het projectiel, terwijl de andere eene richting heeft $\perp$ op de laatste en welke de déviatie veroorzaakt. Voor de waarde van de eerste ontbondene neemt hij die aan, welke reeds NEWTON had bepaald nl. het gewicht van een luchtcilinder, die tot basis heeft de grootste doorsnede van het projectiel en tot hoogte de helft van de valhoogte, behoorende bij de snelheid van het projectiel, vermenigvuldigd met een coefficient, dien hij aan de opgaven van HUTTON in zijn „Cours of Malthematics Vol. III London 1827 4[de] Edition" ontleende; de waarde van de versnelling van de andere neemt hij $= - m + h\,\frac{g}{v^2}$ waarin m en h grootheden zijn, die, bij elk geschut en daarbij behoorende lading, constant genomen wordt. Ook heeft hij voor de waarde van den normalen luchtweêrstand aangenomen de door DIDION afgeleiden vorm $\mathrm{A}\,v^2 + \mathrm{B}\,v^3$ en het probleem in die veronderstelling getoetst aan zijne uitkomsten, bij proefneming verkregen. De verhandelingen van F. OTTO „Uber den Luftwiderstand in der Ballistik und Kritik der Didionschen werken über Ballistik" zijn te vinden in het Archiv für die Officieren der Königl. Preussischen Artillerie und des Ingenieurs-corps S. 75 Bd. 33 und S. 105 Bd. 35. Denzelfden gang van onderzoek vindt men bij ROUVEROY „Bemerkungen und Untersuchugen über einige gegenstände der Ballistik. Zeitschrift für Mathematik und Physik von SCHLÖMILCH und WITSCHEL 1 Jahrgang 1856 S. 325"

Later heeft F. OTTO in een ander werk „Hülfsmittel für ballistische rechnungen Berlin 1855" de bijzondere aandacht gewijd aan de verschillende formulen, die sedert gebruikt zijn geworden om den luchtweêrstand in berekening te brengen en komt tot de conclusie, dat het voor de meest practische gevallen tamelijk onverschillig is, welke wet van luchtweêrstand men bij de ballistische berekeningen voor geschutkogels kiest.

Eene derde oorzaak van déviatie, welke langen tijd is verwaarloosd geworden, is de rotatie van de aarde. Behalve dat de dagelijksche wenteling van de aarde de versnelling van de zwaartekracht doet verminderen, welke vermindering afhankelijk is van de breedte, is zij oorzaak van déviaties uit recht- en kromlijnige banen van lichamen op onze aarde, die het eerst door GAUSS en LAPLACE zijn berekend. Dezen hebben hunne berekeningen alleen toegepast, voor gevallen dat de relatieve baan van een lichaam rechtlijnig is en geen weêrstand der lucht de beweging tegenwerkt. Wederom was POISSON de eerste, die den invloed van de rotatie der aarde op de Ballistica analytisch onderzocht in zijne „Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la rotation de la terre. Journal de l'ecole polytechnique 26ième cahier." Hij maakt de diff. vergelijkingen van de absolute beweging van het lichaam (bolv. projectiel) ten opzichte van een coördinaten stelsel in de ruimte op, leidt daaruit de relatieve beweging van den bol af, zoo als die beweging op de aarde wordt waargenomen; hij gaat dus van het onveranderlijk coördinatenstelsel in de ruimte over tot een veranderlijk coördinatenstelsel, hetwelk deelneemt aan de rotatie van de aarde.

Zijne ingewikkelde formulen worden vereenvoudigd doordien men de seconde voor éénheid van tijd aannemende, de hoeksnelheid van de dagelijksche beweging als zeer klein beschouwt, waardoor de termen, waarin die hoeksnelheid voorkomt, verwaarloosd kunnen worden. Voor de toepassing echter zijn de formulen niet te gebruiken, aangezien de diff: vergelijking, welke de déviatie, door de rotatie der aarde veroorzaakt, geven moet, niet te integreeren is. — St. ROBERT heeft in „des effets de la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles," voorkomende in het Journal des sciences militaires 1858, de veroorzaakte déviaties bepaald, zoodanig, dat zij bij ballistische berekeningen te gebruiken zijn. Ook in de „comptes rendus de l'académie des sciences, N⁰. 12 1866," komt onder den titel van „Note sur l'influence de la rotation de la terre sur la dérivation des projectiles par les canons rayés," een kort opstel van MARTIN DE BRETTES voor, waarin de formule van FOUCAULT voor de schijnbare verplaatsing van het slingervlak, aanbevolen wordt om de door aswenteling der aarde voortgebrachte déviaties te berekenen.

Ook heeft onze landgenoot HOYEL, kapitein der artillerie, den invloed van de rotatie der aarde op de Ballistica aan een nauwgezet onderzoek onderworpen met het doel om na te gaan in hoeverre die invloed bij ballistische berekeningen zich doet gelden. Hij toont in „De invloed van de dagelijksche beweging der aarde op het schot, Schiedam H. A. M. ROELANTS" aan dat in plaats van de zwaartekracht, de aantrekkingskracht op het projectiel in rekening moet gebracht worden, zoodra hij de monding van het geschut verlaten heeft. Hij neemt aan, dat de lucht in schijnbare rust is, dus in werkelijkheid de luchtmoleculen cirkels beschrijven wier middelpunten in de aardas gelegen zijn en wier vlakken $\perp$ op de aardas gericht zijn. Bij het verlaten van de monding heeft de kogel dezelfde tangentieele snelheid als de hem omringende luchtlagen, welke steeds veranderlijk is; hij toont aan, dat het verschil in tangentieele snelheid van hooger en lager gelegen punten des dampskrings bij de berekening mag verwaarloosd worden. Als uitgangspunt om tot de vergelijkingen der volstrekte beweging te geraken, neemt de schrijver aan, dat de coord: van 't zwaartepunt x, y, en z op eenig tijdstip door de gewone ballistische formulen gevonden zijn en brengt de twee bovengenoemde correcties daaraan, alsmede brengt hij daarbij in rekening de werking van den, in de dagelijksche beweging der aarde deelende, dampkring. De drie vergelijkingen, die hij daardoor verkrijgt, geven de wijzigingen aan die de berekende coördinaten x, y en z, ingevolge de dagelijksche beweging der aarde, behoeven, ten opzichte van een coord: stelsel, dat in de ruimte onveranderlijk blijft.

Uit deze vergelijkingen worden de vergelijkingen van de relatieve of schijnbare beweging afgeleid. De conclusies waartoe HOYEL komt zijn in 't kort: de schootsverheden worden op het N. halfrond verkleind indien het azimuth van het richtvlak [1]) tusschen 0° en 180° is gelegen, terwijl ze voor het Z. halfrond, onder overigens gelijke omstandigheden, vergroot worden indien het azimuth van het richtvlak tusschen 180° en 360° valt. De déviaties uit het richtvlak zullen voor het N. halfrond rechts voor het Z. halfrond links zijn en onder den aequator $=0$ terwijl de grootte der déviaties volgens door hem berekende voorbeelden aantoont, dat het in rekening brengen van den invloed van de dagelijksche beweging der aarde op het schot niet alléén van zuiver theoretisch, maar ook van practisch nut is.

§ 5.

Bij al de vermelde analytische onderzoekingen is steeds voor het te bewegen lichaam een sferisch projectiel aangenomen; wèl heeft POISSON de diff. verg. voor de beweging van een willekeurig lichaam opgemaakt, doch dat onderzoek niet toegepast op langwerpige projectielen. Sedert echter in de artillerie voornamelijk de langwerpige projectielen in gebruik zijn gekomen, heeft de analyse zich daarmede moeten bezighouden. Dit theoretisch vraagstuk is door DIDION in zijn „Traité de Ballistique" op synthetische wijze onderzocht. In de Annales scientifiques de l'école normale supérieure 1868 vindt men eene verhandeling van GAUTIER over dit onderwerp; de conclusies, waartoe hij geraakt, komen niet met de waarnemingen overeen; de reden daarvan is, dat hij onderstellingen omtrent den weerstand van

[1]) Onder het azimuth van het richtvlak wordt verstaan de hoek gevormd door het vlak van den meridiaancirkel van 't middelpunt der monding en den grooten cirkel in wiens vlak de as des vuurmonds is gelegen.

de lucht maakt, die niet gerechtvaardigd zijn, en welke hij alleen maakt om tot integratie te kunnen geraken.

Vooraf waren de „Etudes sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs 1859 en 1860" van den graaf ST. ROBERT verschenen, waarin de baan partieel berekend wordt in de onderstelling dat de weêrstand van de lucht als een constant koppel op het projectiel werkt en dat de raaklijn aan de baan van het zwaartepunt, gedurende kleine tijdsverloopen, onveranderlijk is. Op het voetspoor van ST. ROBERT heeft MAYEVSKI in eene verhandeling „de l'influence du mouvement de rotation sur la trajectoire des projectiles oblongs dans l'air" de berekening toegepast op een bijzonder voorbeeld. Deze kwam tot andere gevolgtrekkingen en onderwierp het vraagstuk aan een nader onderzoek, waarbij hij de restricties van ST. ROBERT op zij' zette en daardoor tot uitkomsten geraakte, die met de werkelijkheid overeenstemmen. Men vindt zijne analytische beschouwingen in het werk. „Traité de la Ballistique" waarin hij echter niet in aanmerking neemt de vermeerdering of vermindering van drukking tegen enkele deelen van het oppervlak van het langwerpig projectiel, welke, tot op dit oogenblik nog niet in wiskundigen vorm is uitgedrukt kunnen worden. Op den door ST. ROBERT aangewezen weg, heeft MAYEVSKI het aangrijpingspunt bepaald van den luchtweêrstand tegen het langwerpig projectiel. Dat aangrijpingspunt, centrum van weêrstand genoemd, is veranderlijk; het ligt bij het begin van de beweging als wanneer de figuuras van het projectiel met de richting van de initiale snelheid of wat hetzelfde is, met de raaklijn aan de baan van het zwaartepunt nog een zeer kleine hoek maakt vóór het zwaartepunt van het projectiel. Naarmate die hoek in de baan toeneemt, komt het centrum van weêrstand nader bij het zwaartepunt, kan daarmede samenvallen en voor enkele projectiel-vormen achter het zwaartepunt komen. Bij de meest gebruikelijke langwerpige projectielen ligt het bewuste punt vóór het zwaartepunt en aangezien de luchtweêrstand steeds gericht is in tegengestelden zin van de beweging, zal de luchtweêrstand, als koppel werkende op het projectiel trachten de figuuras hoe langer hoe meer te doen verwijderen van de raaklijn aan de baan, door het zwaartepunt beschreven. Het is dus duidelijk, dat het weêrstandskoppel niet constant mag beschouwd worden; hiermede is door MAYEVSKI rekening gehouden. Uit de diff: vergelijkingen voor de beweging van het langwerpig projectiel, met behulp der EULER'sche formulen opgesteld, wordt afgeleid, dat de hoeksnelheid van het projectiel rondom de figuur-as gedurende de geheele beweging constant is, terwijl die figuur-as eene periodieke beweging heeft rondom de raaklijn van de baan beschreven door het zwaartepunt, welke raaklijn gedurende de beweging steeds daalt. De richting van die rotatie-beweging van de figuur-as hangt af van de initiale rotatie-richting van het projectiel rondom de figuuras alsmede van de richting van het weêrstands-koppel. Gewoonlijk heeft bij getrokken vuurmonden de rotatie van het projectiel rondom de figuuras plaats van links naar rechts, indien men zich verbeeldt geplaatst te zijn in het schietvlak met het gelaat naar de monding gericht; indien nu het centrum van weêrstand achter het zwaartepunt lag dan zou de figuur-as zich beginnen te bewegen rondom de raaklijn aan de baan van rechts naar links.

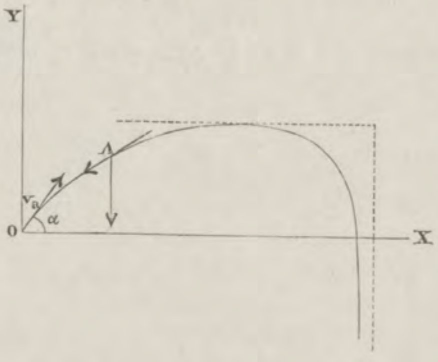
Niettegenstaande de rotatie-beweging van de figuur-as rondom de raaklijn aan de baan, zal de baan door het zwaartepunt van het projectiel beschreven, gelegen zijn in een vertikaalvlak, indien de resultante van den luchtweêrstand steeds in tegengestelden zin van de raaklijn aan de baan gericht was; aangezien dit bij langwerpige projectielen niet het geval is, daar die resultante met de figuur-as steeds een hoek vormt die grooter is dan de hoek, welke de figuur-as met de raaklijn maakt en daarbij die resultante steeds gelegen is in het vlak, hetwelk door de figuur-as en de raaklijn gaat, zoo is het duidelijk dat de baan, beschreven door het zwaartepunt, steeds eene lijn van dubbele kromming is. Wordt de resultante van den luchtweêrstand in drie anderen ontbonden, de één gericht in tegengestelden zin van de raaklijn; de ander loodrecht op de raaklijn in het horizontale vlak en de derde loodrecht op de raaklijn in het vertikale vlak dan zal de eerst ontbondene de translatie-beweging van het projectiel doen vertragen; de tweede veroorzaakt eene rechtsche afwijking van het zwaartepunt, indien het centrum van weêrstand vóór het zwaartepunt ligt, terwijl de laatste ontbondene het zwaartepunt van het projectiel doet rijzen, indien de figuuras zich boven de raaklijn, daarentegen dalen, als die figuuras zich daaronder bevindt. Valt het centrum van weêrstand met het zwaartepunt samen, dan is de waarde van het weêrstands-koppel nul;

de rotatie-beweging van de figuur-as heeft dan niet plaats, zij zal gedurende den tijd dat de baan doorloopen wordt, evenwijdig aan zich zelve in de ruimte en steeds in het vertikale vlak, dat door de raaklijn van de baan gaat, blijven; de baan zelve zal eene lijn van enkele kromming zijn, aangezien de resultante van den luchtweêrstand ook in dat vertikale vlak ligt.

TWEEDE GEDEELTE.

§ 1. Ontwikkeling van de ballistische formulen.

Het te bewegen lichaam is een sferisch-homogeen projectiel, waarvan het gewicht is P en waaraan bij het verlaten van de monding de translatie-snelheid v_0 is medegedeeld onder een elevatiehoek α, terwijl de wet van weerstand van de lucht tegen het projectiel wordt aangenomen: $\varrho = \mathrm{P}\,f(v)$.



Op het projectiel werken twee krachten, de zwaartekracht en de weerstand van de lucht. Volgens het theorema van de beweging van het zwaartepunt, kunnen wij de beweging van het projectiel herleiden tot die van een punt, waarvan de massa gelijk is aan die van het projectiel en waarop al de krachten in richting en grootte worden overgebracht [1]). Aangezien wij aannemen dat

[1]) Wij verwaarloozen hierbij de massa van de lucht, die het projectiel vergezelt; het was DUBUAT die in zijne „Principes d'Hydraulique tome II sect. I en II het eerst daarop de aandacht vestigde en bevond dat het volume van de medegesleepte lucht ongeveer 0,6 bedraagt van het volume van het projectiel.

het projectiel slechts eene voortgaande beweging heeft, zal de resultante van den weerstand van de lucht tegen het projectiel steeds rakend blijven aan de kromme, die door het zwaartepunt wordt beschreven en in tegengestelden zin van de translatie-beweging. Zij A, op eenig tijdstip t, de plaats van het zwaartepunt; verrichten we de natuurlijke ontbinding der versnellingen, die op het zwaartepunt werken, volgens de raaklijn en de normaal in A, dan zijn de bewegings-vergelijkingen:

in de richting der raaklijn

1) .... $\frac{d\,v}{d\,t} = -g\, sin.\, \varphi - \frac{\varrho\, g}{P}$ (geldig v. d. klimm. tak).

in de richting van de normaal

2) .... $\frac{v^2}{R} = g\, cos.\, \varphi$

$\frac{\varrho\, g}{P}$ is de versnelling van den weerstand ϱ tegen de beweging van het projectiel, waarvan het gewicht is P. We verwaarloozen hierbij het verlies aan gewicht, hetwelk het projectiel in de lucht ondergaat.

Nu is $R = -\frac{d\,s}{d\,\varphi}$, ($\varphi$ neemt af bij toeneming van s). Deze waarde van R in 2) gesubstitueerd wordt zij

$$-\frac{v^2\, d\,\varphi}{d\,s} = g\, cos.\, \varphi.$$

waaruit:

3) .... $d\,s = -\frac{v^2\, d\,\varphi}{g\, cos.\, \varphi}$

4) .... $d\,x = d\,s\, cos.\, \varphi = -\frac{v^2\, d\,\varphi}{g}$

5) ...... $d\,y = d\,s\, sin.\, \varphi = -\frac{v^2\, tg.\, \varphi\, d\,\varphi}{g}.$

De snelheid $v = \frac{d\,s}{d\,t}$ dus

6) .... $d\,t = \frac{d\,s}{v} = -\frac{v\, d\,\varphi}{g\, cos.\, \varphi}$

en

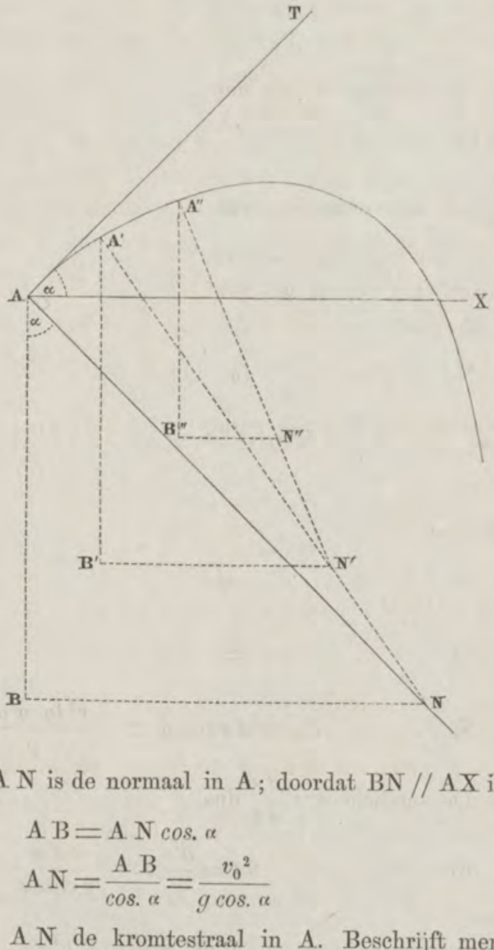
7) .... $R = -\frac{d\,s}{d\,\varphi} = \frac{v^2}{g\, cos.\, \varphi}.$

Geen dier zeven vergelijkingen is geschikt tot integratie, omdat in allen, drie variabelen voorkomen; elimineeren we uit 1) en 6) dt dan verkrijgen we de diff: verg: van de 1e order:

$$8) \ldots\ldots\ldots \quad dv = \frac{v\, d\varphi}{cos.\, \varphi}\left(sin.\, \varphi + \frac{\varrho}{P}\right)$$

welke in dezen vorm kan geschreven worden:

$$9) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\,(v\, cos.\, \varphi)}{v\, d\varphi} = \frac{\varrho}{P} = f(v).$$



Kenden wij door de eene of andere benaderingsmethode de opvolgende waarden van v, behoorende bij de reeks opvolgende waarden van φ, dan is de baan graphisch op de volgende wijze in teekening te brengen:

A is de oorsprong, A T de richting van de initiale snelheid. De loodlijn A B op A X is bepaald door

$$A\,B = 2\,h_0,$$

waarin $h_0 = \frac{v_0^2}{2\,g}$, A N is de normaal in A; doordat BN // AX is

$$A\,B = A\,N\, cos.\, \alpha$$

$$A\,N = \frac{A\,B}{cos.\, \alpha} = \frac{v_0^2}{g\, cos.\, \alpha}$$

dus volgens 7) is A N de kromtestraal in A. Beschrijft men dus van uit het middelpunt N met den straal A N een cirkel boogje $A\,A' = A\,N\,(\varphi_1 - \alpha)$, dan zal men een element van de baan in teekening gebracht hebben. Verrichten we hetzelfde in het punt A' dan vinden we een tweede element $A'\,A'' = A'\,N'\,(\varphi_2 - \varphi_1)$, enz. Op dusdanige wijze zal de baan door een reeks cirkelbogen graphisch voorgesteld zijn. Eene dergelijke graphische methode met behulp van osculleerende cirkels vindt men in PONCELET's „Mécanique Industrielle Bruxelles 1839."

Het vraagstuk van de Ballistica hangt dus af van de oplossing van de diff. verg. 9); die oplossing verandert met de uitdrukking, welke voor $f(v)$ wordt genomen. Zonder eene speciale wet van den weerstand van de lucht aan te nemen, stellen de verkregen vergelijkingen ons in staat eigenschappen van de baan af te leiden, die voor elke wet gelden.

Op het voetspoor van ST. ROBERT in „du mouvement des projectiles dans les milieux résistants 1859" kunnen wij tot de volgende eigenschappen geraken, alléén aannemende dat de weerstand met de snelheid toeneemt, ∞ wordt bij ∞ snelheid van het projectiel en steeds $<$ dan het gewicht van het projectiel bij eene oneindig kleine snelheid.

We stellen dus voor $(fv) = \frac{\varrho}{P}$ de volgende condities:

$$f'(v) > 0,\ f(\infty) = \infty,\ f(0) < 1.$$

Voor den klimmende tak geldt de formule:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,(sin.\,\varphi + f(v), \text{ waarin } \varphi \text{ en } sin.\,\varphi + \text{ zijn;}$$

de snelheid neemt dus af totdat zij minimum wordt, dit geschiedt wanneer

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ of } sin.\,\varphi' + f(v') = 0$$

de waarde v', die aan de laatste vergelijking voldoet, zal die minimumsnelheid zijn; in dat punt voorbij den top, waarbij die minimumsnelheid bereikt is, behoort de hellingshoek φ'.

Van eenig punt in den klimmenden tak af, neemt de snelheid tot in den top van de baan af; in den dalenden tak, waarin φ en $sin\ \varphi$ steeds negatief zijn, behoudt $\frac{dv}{dt}$ het $-$ teeken tot dat

$\frac{d\,v}{d\,t} = o$ wordt; alsdan heeft de snelheid een minimum bereikt, hetgeen ook blijkt indien we $\frac{d^2 v}{d\,t^2}$ voor dat punt opmaken.

Door differentiatie verkrijgen wij:

$$\frac{d^2 v}{d\,t^2} = -g\,f'(v)\,\frac{d\,v}{d\,t} - g\,cos.\,\varphi\,\frac{d\,\varphi}{d\,t},$$

hierin de waarde $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ uit 6) gesubstitueerd:

$$\frac{d^2 v}{d\,t^2} = -g\,f(v)\,\frac{d\,v}{d\,t} + \frac{g^2\,cos.^2\,\varphi}{v},$$

doch in dat punt $\frac{d\,v}{d\,t} = o$ zijnde, wordt de laatste vergelijking

$$\frac{d^2 v}{d\,t^2} = \frac{g^2\,cos.^2\,\varphi}{v} \text{ hetwelk steeds } + \text{ is.}$$

Voorbij dat punt wordt nu $\frac{d\,v}{d\,t} > o$, de snelheid neemt met de tijd toe, tot dat ten laatste eene limietsnelheid v'' bereikt wordt, welke bepaald wordt door:

$$f(v'') + sin.\,\varphi = 0.$$

Om na te gaan welke waarde van φ aan deze vergelijking voldoet, integreeren wij verg: 6), welke geeft:

$$t = -\int_{\alpha}^{\varphi} \frac{v}{g}\,\frac{d\,\varphi}{cos.\,\varphi},$$

hierin heeft $\frac{v}{g}$ steeds eene eindige waarde; stellen we de gemiddelde waarde van $\frac{v}{g}$ tusschen de grenzen α en $\varphi = k$ dan kunnen we deze gemiddelde buiten het $\int$ teeken stellen.

dus is
$$t = k \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{cos.\,\varphi},$$

waaruit

$$t = k\,log.\,\frac{tg.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,\alpha)}{tg.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,\varphi)}.$$

Nu neemt t onbepaald toe, voor $t = \infty$ moet $45 + \frac{1}{2}\varphi$ tot 0, ergo φ tot $-\frac{\pi}{2}$ naderen.

De limietsnelheid in den dalenden tak wordt dus bepaald door de verg:

$$f(v'') - 1 = 0$$

hetgeen te verwachten was; want stellen we de vergelijking in dezen vorm: $\frac{\varrho}{P} - 1 = 0$, of $\varrho = P$ dan is de beteekenis van deze vergelijking deze, dat de snelheid die grens zal bereiken, waarbij de weerstand van de lucht gelijk is aan het gewicht van het projectiel. Die hoek $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ is dus ook de limiet van de helling van de baan in den dalenden tak; ze geeft dus een assymptoot aan den dalenden tak aan; de afstand van die assymptoot, welke $\perp$ op de X as staat, tot den oorsprong 0 wordt bepaald door verg. 4)

$$X_0 = -\int_{\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{v^2}{g}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{v^2}{g}\, d\varphi,$$

de waarde van $\frac{v^2}{g}$ is steeds eindig tusschen de integratiegrenzen, de gemiddelde waarde k' noemende dan is:

$$X_0 = k' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\varphi = k'\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

de maximumsnelheid wordt dus op een' eindigen afstand bereikt.

De lengte van den boog, doorloopen van af het begin der beweging, tot dat de minimum-snelheid v' is bereikt, wordt gevonden door verg. 3)

$$ds = -\frac{v^2\, d\varphi}{g \cos.\varphi}$$

de lengte van dien doorloopen boog zal zijn:

$$S_1 = -\int_{\alpha}^{\varphi'} \frac{v^2}{g} \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = k'' \int_{\varphi'}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}$$

of

$$S_1 = k'' \log. \frac{tg.\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{tg.\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)}$$

terwijl de lengte van den boog van af het punt waar de snelheid minimum is, tot het punt, waarbij de maximum-snelheid wordt bereikt, bepaald wordt door:

$$S_2 = -\int_{\varphi'}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{v^2}{g} \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = k'' \log. \frac{tg.\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)}{tg.\,0}$$

dus $$S_2 = \infty.$$

Ter bepaling van de snelheid, waarmede het projectiel aankomt in het snijpunt van de baan met de X as, hebben we in

verg. 1) $$\frac{dv}{dt} = -g\left(\sin.\varphi + f(v)\right)$$

te stellen: $$dt = \frac{ds}{v}$$

dus

$$v\,dv = -g \sin.\varphi\,ds - g f(v)\,ds$$

of

$$v\,ds = -g\,dy - g f(v)\,ds$$

is v_0 de initiale snelheid en V de gevraagde snelheid dan verkrijgen we door integratie:

$$\int_{v_0}^{V} v\,dv = -g\int_0^s f(v)\,ds$$

$$V^2 - v_0^2 = -2g\int_0^s f(v)\,ds$$

dus

$$V^2 = v_0^2 - 2g\int_0^s f(v)\,ds$$

waaruit blijkt $V < v_0$.

Uit verg. 7) nl. $R = \frac{v^2}{g \cos. \varphi}$.
zien we dat de kromtestraal afneemt tot aan den top want v neemt af alsmede $\frac{1}{\cos \varphi}$.

Zooals in 't voorgaand bewezen is, neemt v voorbij den top noch af, doch $\frac{1}{\cos. \varphi}$ groeit aan; om na te gaan of R al dan niet afneemt, moeten we $\frac{d R}{d \varphi}$ opmaken:

$$\frac{d R}{d \varphi} = \frac{2 v \cos. \varphi}{g} \frac{d v}{d \varphi} + \frac{v^2}{g} \frac{\sin. \varphi}{\cos.^2 \varphi},$$

verg. 8) nl. $\frac{d v}{d \varphi} = \frac{v}{\cos. \varphi} \left(\sin. \varphi + f(v)\right)$ hierin gesubstitueerd:

$$\frac{d R}{d \varphi} = \frac{v^2}{g \cos.^2 \varphi} \{2 f(v) + 3 \sin. \varphi\}$$

in den top is $\frac{d R}{d \varphi} +$, R varieert van af den top in denzelfden zin als φ, d. w. z. neemt voorbij den top noch af tot aan het punt, waarbij φ voldoet aan de vergelijking:

$$2 f(v) + 3 \sin. \varphi = 0,$$

alsdan is $\frac{d R}{d \varphi} = o$ waarna $\frac{d R}{d \varphi}$ -- wordt, hetgeen blijkt uit het positieve teeken van $\frac{d^2 R}{d \varphi^2}$.

R bereikt eene minimum-waarde bij het punt van de baan waarin waarin:

$$2 f(v) + 3 \sin. \varphi = 0$$

en waarbij de snelheid bepaaldt wordt door:

$$\frac{d v}{d \varphi} = - \tfrac{1}{2} v \, tg. \varphi.$$

Voorbij dat punt groeit R tot ∞ aan.

De laatste waarde van $\frac{d v}{d \varphi}$ is $+$ aangezien φ in den dalenden tak negatief is; in het punt van maximum-kromming varieeren

v en φ in denzelfden zin, d. w. z. dat v afneemt en noch niet de minimumwaarde bereikt heeft. Hieruit kan men besluiten dat het punt van maximumkromming dichter bij den top gelegen is dan het punt, dat correspondeert aan de minimumsnelheid.

Noemen we Y de grootste hoogte, waartoe het lichaam naderen kan, dan wordt deze bepaald uit de verg.:

$$g\,Y = -\int_{\alpha}^{0} v^2\, tg.\, \varphi\, d\,\varphi$$

of

$$g\,Y = \int_{0}^{\alpha} v^2\, tg.\, \varphi\, d\,\varphi.$$

De daarbij behoorende abscis X vindt men uit verg. 4, nl.

$$X = -\int_{\alpha}^{0} \frac{v^2}{g}\, d\,\varphi = \int_{0}^{\alpha} \frac{v^2}{g}\, d\,\varphi$$

Deze waarde X is de amplitude van den klimmenden tak, kan ook bepaald worden uit de verg. $d\,x = \dfrac{d\,y}{tg.\,\varphi}$, waaruit:

$$X = \int_{0}^{Y} \frac{d\,y}{tg.\,\varphi}.$$

Noemen we X′ de amplitude van den dalenden tak, dan wordt deze gegeven door

$$X' = \int_{Y}^{0} \frac{d\,y}{tg.\,\varphi'} = -\int_{0}^{Y} \frac{d\,y}{tg.\,\varphi'}$$

of in aanmerking nemende dat φ' in den dalenden tak negatief is, dus $-\varphi'$ in plaats van φ' stellende:

$$X' = \int_{0}^{Y} \frac{d\,y}{tg.\,\varphi'}.$$

Aangezien de hoeken φ', behoorende bij punten in den dalenden tak, grooter zijn dan de hoeken φ, behoorende bij punten van den klimmenden tak, welke in hetzelfde horiz: vlak liggen met de eerst genoemden, zoo is het duidelijk dat

$$\int_0^Y \frac{d\,y}{tg.\,\varphi'} < \int_0^Y \frac{d\,y}{tg.\,\varphi}$$

of

$$X' < X.$$

Dat $\varphi' > \varphi$ is, kan uit het volgende worden afgeleid.

Uit de vergelijking 5)

$$g\,y = -\int_\alpha^\varphi v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi$$

leiden we af

$$0 = \int_\alpha^0 v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi + \int_0^{-\varphi_1} v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi$$

want bij den oorsprong en in het snijpunt met de X as is $y = 0$. Nemen we in aanmerking dat φ in den dalenden tak — is en stellen we in $\int_0^{-\varphi} v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi'$ $-\varphi$ in plaats van φ, dan wordt de laatste vergelijking:

$$\int_0^\alpha v^2\,tg\;\varphi\,d\,\varphi = \int_0^{\varphi_1} v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi$$

hetgeen niet anders kan of φ_1, de valhoek, moet grooter zijn dan de elevatiehoek α.

Door verg. 9) kan de wet van weerstand bepaald worden naar de baan $y = f(x)$, die het projectiel beschrijven moet.

Dit vraagstuk is in 't eerst door NEWTON behandeld geworden en daarna door LAGRANGE in zijne „Théorie des fonction analytiques 3[e] partie chap. IV hervat.

Zij de verg. van de baan $y = f(x)$ dan is $tg.\,\varphi = \frac{d\,y}{d\,x} = y'$ welke gediff. zijnde, geeft

$$\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi} = y''\,d\,x$$

in deze verg. de waarde van $d\,x$ sub 4) gesteld verkrijgen we:

$$\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi} = -\,y''\,\frac{v^2\,d\,\varphi}{g}$$

waaruit

$$\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots v\,cos.\,\varphi = \sqrt{\frac{g}{-\,y''}}$$

waarin $\sqrt{-\,y''}$ eene reëele waarde heeft aangezien y'' steeds — is (de baan is steeds met de holle zij naar X as gericht)

in α) de waarde van $cos.\,\varphi = \frac{1}{sec.\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ gesubstitueerd

$$\beta) \ldots\ldots\ldots\ldots v = \sqrt{\frac{(1+y'^2)\,g}{-\,y''}}.$$

α) Differentieerende verkrijgt men

$$\gamma).\, d\,(v\,cos.\,\varphi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\frac{y'''}{y''\sqrt{-\,y''}}\,d\,x = \frac{v^2}{2\sqrt{g}}\,.\,\frac{y'''}{y''\sqrt{-\,y''}}\,d\,\varphi$$

de waarde van $d\,(v\,cos.\,\varphi)$ en van v sub β) in formule 9) gesubstitueerd, geeft ten slotte

$$\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots \varrho = \frac{\mathrm{P}}{2}\,\frac{-\,y'''\sqrt{1+y'^2}}{y''^2}.$$

In de formule door NEWTON gegeven, is de noemer $3\,y''^2$; de oorzaak van deze fout is door LAGRANGE aangegeven.

§ 2. Benaderings-Methode van Didion.

Zij de algemeene wet van weêrstand $\varrho = \mathrm{P}\,f\,(v)$

In verg. 9) $\qquad \frac{d\,(v\,cos.\,\varphi)}{d\,\varphi} = v\,\frac{\varrho}{\mathrm{P}} = v\,f\,(v)$

is $v\,cos.\,\varphi$ de horiz: comp: der snelheid $= v_1$; de verg: is dus

$$\frac{d\,(v_1)}{d\,\varphi} = f\,(v)\,\frac{v_1}{cos.\,\varphi}$$

Stellen we hierin voor $f\,(v)$, deze functie: $\frac{f\,(p\,v\,cos.\,\varphi)}{p\,cos.\,\varphi} = \frac{f\,(p\,v_1)}{p\,cos.\,\varphi}$ waarin p eene constante (waarover later) dan kunnen de variabelen in de verg. 9) gescheiden worden, hoedanig ook de vorm van $f\,(v)$ zij. Die substitutie mag geschieden zonder te groote fout mits voor p eene waarde genomen worde, zoodanig dat het produkt lim: $(p \cos. \varphi) = 1$ zij voor alle waarden van $\varphi = \alpha$ tot φ. (α is de initiale elevatiehoek).

Verrichten we in 9) die substitutie dan wordt zij

$$\frac{d v_1}{d \varphi} = \frac{f(p v_1) v_1}{p \cos.^2 \varphi}$$

waaruit

$$\text{I} \ldots\ldots\ldots \frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi} = p \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)}$$

deze verg: geïntegreerd tusschen de grenzen α en φ waarbij de grenzen van $p v_1$ zijn: $p V_1$ en $p v_1$, $(V_1 = V_0 \cos. \alpha)$, dan verkrijgen we

$$tg. \varphi - tg. \alpha = p \int_{p V_1}^{p v_1} \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)}$$

dus

$$\text{II.} \ldots\ldots tg. \varphi = tg. \alpha - p \int_{p v_1}^{p V_1} \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)}$$

waardoor de inclinatie in de baan uitgedrukt is in functie van de snelheid.

In verg. 4)

$$d x = -\frac{v^2 d \varphi}{g} = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi}$$

substitueeren we de waarde van $\frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi}$ sub I

$$d x = -\frac{1}{g} v_1^2 p \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)} = -\frac{1}{g} \frac{(p v_1)^2}{p^2} p \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)}$$

waaruit

$$p\, d x = -\frac{1}{g} \frac{p v_1 d(p v_1)}{f(p v_1)}$$

integreerende tusschen de grenzen $x = 0$ tot x

$$p x = -\frac{1}{g} \int_{p V_1}^{p v_1} \frac{p v_1 d(p v_1)}{f(p v_1)}$$

of

$$\text{III)} \ldots\ldots p x = \frac{1}{g} \int_{p v_1}^{p V_1} \frac{p v_1 d(p v_1)}{f(p v_1)}$$

In verg. 5)

$$d\,y = -\frac{v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi}{g} = -\frac{v_1^{\,2}}{g}\,\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi}\,tg.\,\varphi = -\frac{v_1^{\,2}}{g}\,\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi}\int\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi}$$

hierin de waarde van $\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi}$ gesubstitueerd, verkrijgen we:

$$d\,y = -\frac{v_1^{\,2}}{g}\,p^2\,\frac{d\,(p\,v_1)}{(p v_1)\,f\,(p v_1)}\int\frac{d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)\,f\,(p\,v_1)}$$

waaruit

$$\text{III}'). \;.\;.\; y = \frac{1}{g}\int_{p\,v_1}^{p\,V_1}\frac{(p\,v_1)\,d\,(p\,v_1)}{f\,(p\,v_1)}\int\frac{d\,(p\,v_1)}{(p v_1)\,f\,(p v_1)}$$

Door verg: III) is $p\,x$ in functie van $p\,v_1$ en $p\,V_1$ uitgedrukt; hieruit is af te leiden:

$$\text{IV})\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p\,v_1 = \psi\,(p\,x_1,\; p\,V_1)$$

alsmede

$$\text{V})\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\left(\frac{1}{p\,v_1}\right)^2 = \psi_1\,(p\,x_1,\; p\,V_1)$$

Door verg. II is de inclinatie φ in de baan uitgedrukt in functie van snelheid, zij kan ook in functie van x worden uitgedrukt.

Verg. 4) $$d\,x = -\frac{v_1^{\,2}}{g}\,\frac{d\,\varphi}{cos^2\,\varphi}$$

geeft

$$\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi} = -\,g\,\frac{d\,x}{v_1^{\,2}} = -\,p\,g\,\frac{d\,(p\,x)}{(p\;v_1)^2}$$

hierin de waarde van $\frac{1}{(p\,v_1)^2}$ uit V) gesubstitueerd:

$$\frac{d\,\varphi}{cos.^2\,\varphi} = p\,g\,\psi_1\,(p\,x_1, p\,V_1)\,d\,(p\,x)$$

integreerende van $\varphi = \alpha$ tot φ, waarbij de grenzen van $p\,x$ zijn o en $p\,x$, verkrijgen we

$$\text{VI}.\;.\;.\;.\; tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - p\,g\int_0^{p\,x}\psi_1\,(p\,x_1, p\,V_1)\,d\,(p\,x),$$

stellen we hierin $tg.\,\varphi = \frac{d\,y}{d\,x}$, dan verkrijgen we de verg: van de baan

$$dy = tg.\,\alpha\, dx - p g\, dx \int_0^{px} \psi_1 (p x_1, p V_1)\, d(px)$$

integreerende van $x = o$ waarbij $y = o$ is

$$\text{VII.}\ .\ \ y = x\, tg.\,\alpha - g \int_0^{px} p x \int_0^{px} \psi_1 (p x_1, p V_1)\, d(px).$$

Om den tijd in functie van de snelheid te verkrijgen, nemen we verg. 6), nl.:

$$dt = -\frac{v\, d\varphi}{g \cos.\,\varphi} = -\frac{1}{g} v_1 \frac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$$

hierin de waarde sub I van $\dfrac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}$ gesubstitueerd

$$dt = -\frac{1}{g} v_1 p \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)} = -\frac{1}{g} \frac{p v_1}{p} . p \frac{d(p v_1)}{p v_1 f(p v_1)}$$

dus

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{d(p v_1)}{f(p v_1)}$$

integreerende van $t = 0$ tot t.

$$\text{VIII.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ t = \frac{1}{g} \int_{p v_1}^{p V_1} \frac{d(p v_1)}{f(p v_1)}.$$

Ten einde de tijd in functie van x uit te drukken hebben we de vergelijking:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} \text{ dus } dt = \frac{dx}{v_1} = \frac{d(px)}{p v_1}$$

hierin de waarde van $\dfrac{1}{p v_1}$ sub VI gesteld

$$dt = \sqrt{\psi_1 (p x_1, p V_1)}\, d(px)$$

dus

$$\text{IX.}\ t = \int_0^{px} \sqrt{\psi_1 (p x_1, p V_1)}\, d(px).$$

Deze vergelijkingen zullen we toepassen op het geval dat de weerstand uitgedrukt wordt door den vorm $\varrho = a v^3$; een analytisch geval, dat, wel is waar van minder belang is omdat het probleem bij deze weerstandswet rechtstreeks in vrij eenvoudige kwadraturen kan worden uitgedrukt, doch waaruit de toepassing van DIDION's methode moge blijken. Stellen we

$$\varrho = A\,\pi\,R^2 \frac{d}{d'} v^3 \quad ^{1)}$$

en hierin, $d = d'$ genomen:

$$\frac{P}{2\,A\,\pi\,R^2\,g} = c^2$$

dan is

$$\frac{\varrho}{P} = f(v) = \frac{v^3}{2\,g\,c^2}.$$

Stellen we volgens voorgaand voor $f(v)$ de waarde $\dfrac{f(p\,v_1)}{p\,cos.\,\varphi}$ dus

$$\frac{f(p\,v_1)}{p\,cos.\,\varphi} = \frac{v^3}{2\,g\,c^2}$$

$$f(p\,v_1) = p\,\frac{v^3\,cos.\,\varphi}{2\,g\,c^2}$$

dan mogen we daarvoor ook stellen:

$$f(p\,v_1) = \frac{(p\,v_1)^3}{2\,g\,c^2}.$$

Verg. II wordt, na deze waarde van $f(p\,v_1)$ gesubstitueerd te hebben:

$$tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - 2\,p\,g\,c^2 \int_{p\,v_1}^{p\,V_1} \frac{d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)^4}$$

na oplossing van de integraal

$$tg.\,\varphi = tg.\,\alpha + \frac{2}{3}\,p\,g\,c^2 \left[\frac{1}{(p\,V_1)^3} - \frac{1}{(p\,v_1)^3}\right]$$

$$tg\;\varphi = tg.\,\alpha - \frac{2}{3}\,\frac{g\,c^2}{p^2}\left[\frac{1}{v_1{}^3} - \frac{1}{V_1{}^3}\right]$$

$$\mathrm{II}_a.\;.\;.\quad tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - \frac{2}{3}\,\frac{g\,c^2}{p^2\,v_1{}^3}\left\{1 - \left(\frac{v_1}{V_1}\right)^3\right\}$$

---

1) Deze formule, waarin $A = 0{,}00014$, wordt bij ballistische berekeningen gebruikt indien men de luchtweerstand tegen een bolv. projectiel door één term wil uitdrukken van af de zwakste tot de grootste snelheden. Zij is afgeleid geworden uit de Russische en Engelsche proeven, in 1868 genomen. In het handboek der Ballistica door VAN DAM VAN YSSELT wordt deze weerstandswet, met andere waarden voor de constanten, ook aangehouden voor langwerpige projectielen. MAYEVSKI geeft echter voor de langwerpige projectielen

$$\varrho = A\,\pi\,R^2\,\frac{d}{d'}\,v^4$$

waarin $A = 0{,}00000027$.

waardoor de hoek φ, uitgedrukt is in functie van de snelheid.

Verg. III. $p\,x = \frac{1}{g}\int_{p\,v_1}^{p\,V_1} \frac{(p\,v_1)\,d\,(p\,v_1)}{f(p\,v_1)}$ wordt

$$p\,x = 2\,c^2 \int_{p\,v_1}^{p\,V_1} \frac{p\,v_1\,d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)^3} = 2\,c^2 \int_{p\,v_1}^{p\,V_1} \frac{d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)^2}$$

ten slotte

$$x = \frac{2\,c^2}{p}\left(\frac{1}{p\,v_1} - \frac{1}{p\,V_1}\right)$$

of

$$\mathrm{III}_a. \;\ldots\ldots\; x = \frac{p^2\,V_1}{2\,c^2}\left\{\frac{V_1}{v_1} - 1\right\}$$

de abscis x in functie van de snelheid uitgedrukt.

De verg. III′ geeft na substitutie

$$y = \frac{(2\,g\,c^2)^2}{3\,g}\int_{p\,V_1}^{p\,v_1} \frac{d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)^5}$$

waaruit

$$\mathrm{III}'_a. \;\ldots\ldots\; y = \frac{g\,c^4}{3\,p^4\,V^4}\left\{1 - \left(\frac{V_1}{v_1}\right)^4\right\}.$$

Lossen we uit III_a) v_1 op, dan verkrijgen we

$$v_1 = \frac{V_1 \,.\, 2\,c^2}{p^2\,V_1\,x + 2\,c^2} = \frac{V_1}{\frac{1}{2}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2} + 1}$$

$$v_1 = v\,cos.\,\varphi, \qquad V_1 = V\,cos.\,\alpha \text{ dus}$$

$$\mathrm{IV}_a. \;\ldots\ldots\; v = \frac{V}{1 + \frac{1}{2}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2}} \cdot \frac{cos.\,\alpha}{cos.\,\varphi}.$$

Om te zien wat verg. VI wordt, moeten we eerst $\frac{1}{(p\,v_1)^2}$ bepalen. Uit de voorlaatste vergelijking volgt:

$$\frac{1}{(p\,v_1)^2} = \frac{1}{p^2\,V_1^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2} + 1\right)^2$$

dus

$$\frac{1}{(p\,v_1)^2} = \psi_1\,(p\,v_1\,p\,V_1) = \frac{1}{p\,V_1^2}\left\{\frac{p^4\,V_1^2\,x^2}{c^4} + 1 + \frac{p^2\,V_1\,x}{c^2}\right\}$$

dit in VI gesteld:

$$tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - \frac{g}{V_1^2}\int_0^{p\,x}\left(\frac{1}{4}\,\frac{p^3\,V_1^2\,x^2}{c^4} + \frac{1}{p} + \frac{p\,V_1\,x}{c^2}\right)d\,(p\,x)$$

na integratie

$$tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - \frac{g}{V_1^2}\left(\frac{V_1\,p^4\,x^3}{12\,c^4} + x + \frac{p^2\,V_1\,x^2}{2\,c^2}\right)$$

of na rangschikking

$$\text{VI}_a.\quad tg.\,\varphi = tg.\,\alpha - \frac{g\,x}{V_1^2}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2} + \frac{1}{12}\left(\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2}\right)^2\right\}$$

hierin $tg.\,\varphi = \dfrac{d\,y}{d\,x}$ stellende,

$$d\,y = tg.\,\alpha\,.\,d\,x - \frac{g}{V_1^2}\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{p^2\,V_1\,x^2}{c^2} + \frac{1}{12}\,\frac{p^4\,V_1^2\,x^3}{c^4}\right)d\,x$$

en integreerende verkrijgen wij de vergelijking van de baan:

$$\text{VII}_a.\quad y = x\,tg.\,\alpha - \frac{g\,x^2}{2\,V_1^2}\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2} + \frac{1}{24}\left(\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2}\right)^2\right\}.$$

Verg. VIII, welke de tijd in functie van de snelheid geeft, wordt door de substitutie

$$t = 2\,c^2\int_{p\,v_1}^{p\,V_1}\frac{d\,(p\,v_1)}{(p\,v_1)^3}$$

na integratie

$$\text{VIII}_a.\;\ldots\ldots\; t = \frac{c^2}{v_1^2\,p^2}\left[1 - \left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2\right]$$

terwijl verg. IX de tijd in functie van x zal geven, nl.:

$$t = \int_0^{p\,x}\frac{1}{p\,v_1}\,d\,(p\,x)$$

$$t = \frac{1}{p\,V_1}\int_0^{p\,x}\left(\frac{\frac{1}{2}\,p^2\,V_1\,x}{c^2} + 1\right)d\,(p\,x)$$

waaruit na integratie

$$\text{IX}_a.\;\ldots\ldots\ldots\; t = \frac{x}{V_1}\left[1 + \frac{1}{4}\,\frac{p^2\,V_1\,x}{c^2}\right].$$

Beteekenis van p.

We zagen dat door substitutie van $\dfrac{f\,(p\,v\,cos.\,\varphi)}{p\,cos.\,\varphi}$ voor $f\,(v)$ we de diff: verg: hebben kunnen integreeren. Indien $f\,(v) = a\,v$

m. a. w. de weerstand van de lucht evenredig wordt gesteld aan de 1e macht der snelheid dan zouden de verkregen vergelijkingen nauwkeurig zijn. Bij elk andere hypothese omtrent den weerstand, moet de waarde van p, wil de substitutie niet te groote onnauwkeurigheden opleveren, zoodanig gekozen zijn dat het product $p \cos. \varphi$ zoo weinig mogelijk van de éénheid verschilt, voor alle waarden, welke φ verkrijgt van af α tot φ. Uit deze conditie volgt dat p gelijk moet zijn aan eene zekere gemiddelde waarde van al die waarden, welke de uitdrukking $\frac{1}{\cos. \varphi}$ of wat het zelfde is $\frac{d\,x}{d\,s}$ tusschen die grenzen verkrijgt.

Didion, die het eerst deze constante gebruikt bij eene hypothese omtrent den weêrstand van den lucht, uitgedrukt door:

$$\varrho = a\,v^2 + b\,v^3$$

neemt voor p aan de verhouding van den parabool-boog (baan in het luchtledig), begrepen tusschen de grenzen α en φ en des zelfs horizontale projectie. Voor de parabool, in het luchtledig beschreven, geldt de formule

$$y = x\,tg.\,\varphi - \frac{x^2}{4\,h^2 \cos.^2 \varphi}$$

waaruit

$$\frac{d\,y}{d\,x} = p = tg.\,\varphi - \frac{x}{2\,h \cos.^2 \varphi}$$

alsmede

$$d\,p = - \frac{d\,x}{2\,h \cos.^2 \varphi}.$$

De lengte van een boog s is:

$$s = \int d\,x \sqrt{1 + p^2} = 2\,h \cos.^2 \varphi \int (1 + p^2)\,d\,p$$

integreerende

$$S = 2\,h \cos.^2 \varphi \,.\, \tfrac{1}{2} \left[p \sqrt{1 + p^2} + l\,(p + \sqrt{1 + p^2})\right] + C$$

stellen we voor:

$$\sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + tg.^2 \varphi} = sec.\,\varphi = \frac{1}{\cos.\,\varphi}$$

en voor

$$p + \sqrt{1 + p^2} = tg.\,\varphi + sec.\,\varphi = \frac{sin.\,\varphi + 1}{\cos.\,\varphi}$$

dan verkrijgen we

$$S = 2\,h \cos.^2 \varphi + \tfrac{1}{2} \left(\frac{sin.\,\varphi}{\cos.^2 \varphi} + log.\,\frac{sin.\,\varphi + 1}{\cos.\,\varphi}\right) + C.$$

Rekenen we de lengte van den boog van af den oorsprong, waarbij $\varphi = \alpha$ tot φ en stellen we de functie

$$1) \ldots \frac{1}{2}\left(\frac{sin.\,\varphi}{cos.^2\,\varphi} + log.\,\frac{sin.\,\varphi + 1}{cos.\,\varphi}\right) = \xi(\varphi) = \int \frac{d\,\varphi}{cos.^3\,\varphi}$$

dan is de lengte van den boog

$$S = 2\,h\,cos.^2\,\varphi\,[\xi(\alpha) - \xi(\varphi)]$$

verder is

$$x = 2\,h\,cos.^2\,\varphi\,[tg.\,\alpha - tg.\,\varphi]$$

dus

$$2) \ldots\ldots\ldots\ldots \; p = \frac{s}{x} = \frac{\xi(\alpha) - \xi(\varphi)}{tg.\,\alpha - tg.\,\varphi}.$$

In de formule 1) blijkt, dat $\xi(0) = 0$, $\xi(-\varphi) = -\xi(\varphi)$ en aangezien $tg.\,0 = 0$ en $tg. -\varphi = -tg.\,\varphi$, zoo is tusschen de grenzen α en φ:

$$p = \frac{\xi(\alpha) - \xi(\varphi)}{tg.\,\alpha - tg.\,\varphi},$$

tusschen de grenzen α en 0, alsmede tusschen de grenzen α en $-\alpha$:

$$p = \frac{\xi(\alpha)}{tg.\,\alpha}.$$

In DIDION en MAYEVSKI „Traité de Ballistique" vindt men de tabellen voor de waarden van p, bij verschillende bogen behoorende. De kleinste waarde van p is de éénheid, nemen we $p = 1$ dan is $\frac{f(p\,v\,cos.\,\varphi)}{p\,cos.\,\varphi} < f(v)$ en stellen we dus voor den weêrstand van de lucht eene kleinere waarde, de ordinaten y van de baan worden te groot, de aldus berekende baan zal boven de reëel beschreven baan vallen.

Stellen we $p = \frac{1}{cos.\,\alpha}$ dan nemen we voor den weêrstand eene te groote waarde en de berekende baan valt binnen de beschreven baan. Het is daarom bij nauwkeurige baanberekeningen van belang de baan bij gedeelten te berekenen, bij elk gedeelte tusschen zekere grenzen eene andere waarde van p nemende. Voorbeelden daarvan, doch bij andere weêrstandswetten, vindt men in bovengenoemde werken; MAYEVSKI neemt voor enkele gedeelten van de baan tevens een andere weêrstands-wet aan. De praktijk echter leert dat, indien de initiale snelheid niet te groot is en de projectielen van groot caliber zijn, zooals bij bommen, die gewoonlijk onder elevatiehoeken $< 45^\circ$ opgeworpen worden en waarvan de dracht < 1200 M. blijven, of bij zeer geringe initiale elevatiehoek men volstaan kan om in de baanberekening voor p aan te nemen de initiale waarde $\frac{\xi(\alpha)}{tg.\,\alpha}$.

Deze vereenvoudiging heeft tot gevolg, dat de weêrstand van de lucht tegen het projectiel in het begin en op het eind van de baan te zwak en bij den top te sterk is in rekening gebracht; de aldus berekende baan blijft van af het beginpunt onder de ware baan, zal daartoe in den dalenden tak naderen; de berekende baan zal steeds eene te groote draagwijdte aangeven.

§ 3. Benaderings-methode van St. Robert.

Bij de toepassing van deze methode wordt ondersteld, dat de functie van de snelheid, welke de wet van den luchtweêrstand uitdrukt, onbekend, toch dat die weerstand bekend zij door proefnemingen i. a. w., dat men eene tabel heeft van gemeten snelheden en daarbij behoorende waarden van den weêrstand; ware die tabellen reeds volledig, geen methode zou nauwkeuriger zijn dan deze, welke PAUL ST. ROBERT heeft gegeven. Ook bij de onvolledigheid der tabellen is de methode van ST. ROBERT nauwkeuriger dan elke andere, omdat zij alle andere in zich bevat.

De numerieke oplossing van verg. 9) berust op het volgende beginsel:

Indien men in de diff: verg:

$$d\,y = f\,(x\,y)\,d\,y$$

weet, dat, y_0 de correspondeerende waarde is van x_0 dan kan men benaderend de waarde Y van y, behoorende bij eene andere waarde X van x, berekenen, door tusschen de grenzen x_0 en X eene toe- of afnemende reeks van nieuwe waarden van x te interpoleeren en de daarbij behoorende reeks van waarden van y te berekenen, zoodanig, dat x en $x + \Delta\,x$ opvolgende waarden van x, y en $y + \Delta\,y$ de daarbij correspondeerende waarden van y zijnde, men hebbe:

$$\Delta\,y = f\,(x\,y)\,\Delta\,x.$$

De laatste waarde van y, die men aldus berekent en welke bij de waarde X van x behoort, zal van de ware waarde van y eene hoeveelheid verschillen welke $<$ is dan de uitdrukking

$$\left(\frac{B + A\,C}{2}\right)\left(\frac{(1 + C\,\vartheta)^n - 1}{C}\right)\vartheta$$

waarin A, B, C drie getallen zijn, welke resp: $>$ zijn dan

$$f(x\,y), \qquad \frac{d\,f(x\,y)}{d\,x}, \qquad \frac{d\,f(x\,y)}{d\,y},$$

tusschen de grenzen $x = x_0$, $y = y_0$ en $x = X$, $y = Y$.

n is het aantal elementen, waarin men het interval $X - x_0$ verdeelt en ϑ een getal $> \Delta\,x$. Deze uitdrukking voor de limiet van de begane fout is door M. CAUCHY gegeven. Het bewijs kan men vinden in „Calcul Integral de Moigno 28e leçon" eveneens in een Mémoire de Coriolis dat voorkomt in 't 2de deel van het „Journal de Mathematiques de Liouville."

Hoe grooter n, des te kleiner $\Delta\,x$, des te nauwkeuriger zal de berekende waarde Y zijn. Men heeft het in de hand om eene bepaalde graad van nauwkeurigheid te bereiken. Stel dat de berekende Y van deszelfs ware waarde minder dan $\left(\frac{1}{10}\right)^m$ mag verschillen dan moet men aan de elementen $\Delta\,x$ van het interval $X - x_0$ eene waarde geven

$$\vartheta < \frac{2\,c}{10^m\,(B + A\,C)\,[(1 + C\,\vartheta)^n - 1]}.$$

Past men dit beginsel toe op verg. 9)

$$d\,(v\,cos.\,\varphi) = v\,f\,(v)\,d\,\varphi,$$

dan kan men eene reeks waarden v_0, v_1, v_2 enz. correspondeerende bij de reeks φ_0, φ_1, φ_2 enz. berekenen.

Door middel der verg:

$$3) \ldots\ldots\ldots \quad g\,d\,s = -\,v^2\,\frac{d\,\varphi}{cos.\,\varphi}$$

$$4) \ldots\ldots\ldots \quad g\,d\,x = -\,v^2\,d\,\varphi$$

$$5) \ldots\ldots\ldots \quad g\,d\,y = -\,v^2\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi$$

$$6) \ldots\ldots\ldots \quad g\,d\,t = -\,v\,\frac{d\,\varphi}{cos.\,\varphi}$$

is het dan gemakkelijk, door behulp der kwadratuur, de waarden van s, x, y en t te berekenen.

St. robert gaat, bij de toepassing van het vermeld beginsel, uit van de veronderstelling dat $\frac{f(v)}{v^2}$ bij de gebruikelijke projectielen-snelheden, binnen enge grenzen, slechts weinig varieert. Geeft men verg: 9 deze gedaante

$$\frac{d\,(v \cos.\varphi)}{v^3 \cos.^3 \varphi} = \frac{f(v)}{v^2} \frac{\cos.^3 \varphi}{d\,\varphi}$$

en stelt men

$$\left(\frac{1}{v \cos.\varphi}\right)^2 = \eta \text{ en } 2\int \frac{d\,\varphi}{\cos.^3 \varphi} = \xi$$

dan wordt de vergelijking

$$d\,\eta = -\frac{f(v)}{v^2}\, d\,\xi.$$

De waarde van v kan niet expliciet door ξ en η uitgedrukt worden, doch door behulp der tabellen van den integraal

$$\xi = 2\int \frac{d\,\varphi}{\cos.^3 \varphi} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.^2 \varphi} + 2\, l\, tg. \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

kan men altijd de waarden van ξ en η vinden, indien die van φ en v gegeven zijn en omgekeerd.

Zij ξ_0 en η_0 de uiterste waarde van ξ en η, correspondeerende bij $\varphi = \varphi_0$ en $v = v_0$, indien dan $\xi = \xi_0 + \varDelta\,\xi$ wordt heeft men

$$\varDelta\,\eta_0 = -\frac{f(v_0)}{{v_0}^2}\, \varDelta\,\xi$$

en dus

$$\eta_1 = \eta_0 + \varDelta\,\eta_0 = \eta_0 - \frac{f(v_0)}{{v_0}^2}\, \varDelta\,\xi.$$

Stellen we hierin de waarde voor η, dan is

$$\left(\frac{1}{v_1 \cos.\varphi_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{v_0 \cos.\varphi_0}\right)^2 - \frac{f(v_0)}{{v_0}^2}\, \varDelta\,\xi$$

waaruit

$$v_1^{\,2} = \frac{\dfrac{\cos^2.\varphi_0}{\cos.^2 \varphi_1}\, {v_0}^2}{1 - f(v_0) \cos.^2 \varphi_0 \,.\, \varDelta\,\xi};$$

evenzoo vindt men

$$v_2^{\,2} = \frac{\dfrac{\cos.^2 \varphi_1}{\cos.^2 \varphi_2}\, {v_1}^2}{1 - f(v_1) \cos.^2 \varphi_1\, \varDelta\,\xi} \text{ enz.}$$

Aldus berekent men de opvolgende waarden van v_1, v_2 enz. en, indien men $\varDelta\,\xi$ constant neemt, dus:

$$\varDelta\,\xi = \xi_1 - \xi_0 = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\,\varphi}{cos.^3\,\varphi} = \xi_2 - \xi_1 = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\,\varphi}{cos.^3\,\varphi} = \text{enz.}$$

zal de integraaltabellen de opvolgende waarden van φ_1, φ_2 en φ_3 doen kennen of neemt men $\varDelta\,\varphi$ constant, dan is $\varDelta\,\xi$ veranderlijk en kunnen we de successievelijke waarden van $\varDelta\,\xi$ uit de bovenstaande integralen bepalen. In DIDION „Traité de Ballistique" en andere werken vindt men tabellen voor de waarden van

$$\psi\,(\varphi) = \int \frac{d\,\varphi}{cos.^3\,\varphi}.$$

Uit de waarden van v, die bij eene reeks van elken waarden van φ behooren kan men de opvolgende waarden van s, x, y en t berekenen door middel der verg.:

$$\triangle\,s = -\,\frac{v^2}{g}\,\frac{\triangle\,\varphi}{cos.\,\varphi}$$

$$\triangle\,x = -\,\frac{v^2}{g}\,\triangle\,\varphi$$

$$\triangle\,y = -\,\frac{v^2}{g}\,tg.\,\varphi\,\alpha\,\varphi$$

$$\triangle\,t = -\,\frac{v}{g}\,\frac{\triangle\,\varphi}{cos.\,\varphi}.$$

De begane fout in de berekening van de laatste waarde

$$\eta_n = \left(\frac{1}{v_n\,cos.\,\varphi_n}\right)^2$$

van η is minder dan

$$\left(\frac{\mathrm{B} + \mathrm{A\,C}}{2}\right)\left[\frac{(1 + \mathrm{C}\,\vartheta)^n - 1}{c}\right]\vartheta$$

waarin $\vartheta = \varDelta\,\xi$ en A, B, C drie getallen gelijk aan de grootste numerieke waarde welke de volgende functies verkrijgen:

$$\mathrm{F} = \frac{f\,(v)}{v^2}$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\,x} = \left(\frac{f\,(v)}{v^2}\right)'\,\frac{d\,v}{d\,\xi} = -\,\tfrac{1}{2}\,v\left(\frac{f\,(v)}{v^2}\right)'\,sin.\,\varphi\,cos.^2\,\varphi$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\,y} = \left(\frac{f\,(v)}{v^2}\right)'\,\frac{d\,v}{d\,\eta} = -\,\tfrac{1}{2}\,v^3\left(\frac{f\,(v)}{v^2}\right)'\,cos.^2\,\varphi$$

indien men φ laat varieeren van φ_0 tot φ_n en v tusschen de grenzen v en v_n.

§ 4. Toepassing van de methode St. Robert.

De baanberekening van een bolvormig projectiel van 80', met eene initiale snelheid van 115 M. en onder eene elevatiehoek $\varphi = 45°$, opgeworpen.

De wet van den weêrstand der lucht wordt uitgedrukt door de formule:

$$\frac{\varrho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2\,g\,c}\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)$$

waarin

$$c = \frac{P}{2\,A\,\pi\,R^2\,g}$$

en de meter en het kilogr: voor éénheden nemende

$$A = 0{,}012 \text{ en } r = 186$$

De afmetingen van het projectiel zijn: $R = 0{,}1207$ M. en $P = 36{,}16$ Kg. alsdan is $\dfrac{P}{2\,\pi\,R^2\,g} = 40{,}24$ en $c = 3353$ waarbij voor g genomen is als versnelling van de zwaartekracht $g = 9{,}8192$ ten einde de resultaten van deze methode te kunnen vergelijken met die, waartoe MAYEVSKI geraakt is, gebruik makende van de methode van DIDION.

In de vroeger verkregen formule:

$$\left(\frac{1}{v_1\,cos.\,\varphi_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{v_1\,cos.\,\varphi}\right)^2 - \frac{f(v_0)}{v_0^{\,2}}\,\Delta\,\xi$$

stellen we voor v de waarde $v = 2\,g\,h$

$$f(v) = \frac{v^2}{2\,g\,c}\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)$$

Alsdan verkrijgen we achtereenvolgens:

$$\frac{1}{h_1\,cos.^2\,\varphi_1} = \frac{1}{h_0\,cos.^2\,\varphi_0} - \frac{1}{c}\left(1 + \frac{v_0^{\,2}}{r^2}\right)\Delta\,\xi$$

$$\frac{1}{h_1\,cos.^2\,\varphi_1} = \frac{1}{h_0\,cos.^2\,\varphi_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{v_0^{\,2}}{r^2}\right)\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\frac{d\,\varphi}{cos.^3\,\varphi}$$

$$\frac{1}{h_1\,cos.^2\,\varphi_1} = \frac{1}{h_0\,cos.^2\,\varphi_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{v_0^{\,2}}{r^2}\right)[\psi(\varphi_0) - \psi(\varphi_1)].$$

Met behulp dezer laatste formule is de volgende reeks waarden van h, correspondeerende met eene reeks waarden van $\varphi = 45°$ tot $\varphi = 0°$ berekend.

φ	h	$h\,tg.\,\varphi$	$v = \sqrt{2\,g\,h}$	$\frac{v}{g\,cos.\,\varphi}$	$R = \frac{2\,h}{cos.\,\varphi}$
45°	673,42	673,42	115,— M.	16,56	1904,7 M.
44°	624,16	620,12	112,30	15,89	1785,4
43°	613,65	572,23	109,77	15,28	1678,1
42°	585,25	526,96	107,21	14,69	1575,1
41°	561,42	488,10	105,—	14,17	1488,
40°	539,63	452,80	102,94	13,68	1408,8
39°	519,54	420,71	101,01	13,23	1337,1

De waarde van x en y, correspondeerende bij het punt der baan waarbij $\varphi = 39°$, worden bepaald door de twee integralen:

$$y = 2\int_{\varphi = 39}^{\varphi = 45°} h\,tg.\,\varphi\,d\,\varphi$$

$$x = 2\int_{\varphi = 39}^{\varphi = 45°} h\,d\,\varphi$$

en de tijd, waarin dit gedeelte van de baan wordt doorloopen, door

$$t = \int_{39°}^{45°} \frac{v}{g\,cos.\,\varphi}\,d\,\varphi.$$

Op deze integralen de benaderings-methode van SIMPSON toepassende, vinden we

$$x_1 = 123{,}33 \text{ M.}$$
$$y_1 = 51{,}07 \text{ M.}$$
$$t_1 = 1''\,545.$$

Wij kunnen nu uitgaan van het punt waarbij $\varphi = 39°$ en de hoeken met 2° afnemende, verkrijgen we:

φ	h	$h\ tg.\ \varphi$	v	$\frac{v}{g\ cos.\ \varphi}$	R
39°	519,54	420,71	101,01	13,23	1337,1
37°	483,63	364,43	97,45	12,42	1211,2
35°	452,73	317,	94,28	11,73	1105,4

waaruit wij voor de waarden der coördinaten van $\varphi = 39°$ tot $\varphi = 35°$ vinden

$$x_2 = 67{,}63 \text{ M.}$$
$$y_2 = 51{,}07 \text{ M.}$$

en voor den tijd

$$t_2 = 0'',868.$$

Van af $\varphi = 35°$ tot $\varphi = 30°$ de hoeken met $2^1/_2°$ verminderende:

φ	h	$h\ tg.\ \varphi$	v	$\frac{v}{g\ cos.\ \varphi}$	R
35°	452,73	317	94,28	11,73	1105,40
32° 30′	419,59	267,31	90,77	10,96	995,03
30°	391,89	226,25	87,72	10,31	905,03

waaruit

$$x_3 = 73{,}37 \text{ M.}$$
$$y_3 = 46{,}89 \text{ M.}$$

en

$$t_3 = 0,''957$$

van af $\varphi = 35°$ tot $\varphi = 30°$.

Van af $\varphi = 30°$ tot $\varphi = 0°$ de hoeken met 5° afnemende:

φ	h	$h\ tg.\ \varphi$	v	$\frac{v}{g\ cos.\ \varphi}$	R
30°	391,89	226,25	87,72	10,31	905,03
25°	348,64	162,57	82,74	9,29	769,38
20°	316,99	115,37	78,89	8,55	674,68
15°	294,17	78,82	76,	8,01	609,09
10°	278,01	49,02	73,89	7,64	564,60
5°	267,23	23,38	72,44	7,40	536,52
0°	261,04	0	71.59	7,29	522,08

waaruit afgeleid is, van af $\varphi = 30°$ tot $\varphi = 0°$

$$x_4 = 318{,}93 \text{ M.}$$
$$y_4 = 93{,}88 \text{ M.}$$

en

$$t_4 = 4''\,327.$$

De som van de gevondene waarden van x en y zullen de coördinaten van den top geven, nl.

$$X_1 = 583{,}26$$
$$Y_1 = 303{,}68$$

Voorbij den top, de berekening op den dalenden tak toepassende moeten wij in de formule φ negatief nemen; daarbij in acht nemende, dat $\psi(-\varphi) = -\psi(\varphi)$, hebben we in den dalenden tak: $p > q$.

$$\frac{1}{h_{-p}\cos.^2(-p)} = \frac{1}{h_{-q}\cos.^2(-q)} - \frac{2}{c}\left(1 + \frac{v^2_{-q}}{r^2}\right)\int_{\varphi=-q}^{\varphi=(-p)} \frac{d\,\varphi}{\cos.^3\varphi}$$

$$\frac{1}{h_{-p}\cos.^2 p} = \frac{1}{h_{-q}\cos.^2 q} - \frac{2}{c}\left(1 + \frac{v^2_{-q}}{r^2}\right)[\psi(-p) - \psi(-q)]$$

of

$$\frac{1}{h_{-p}\cos.^2 p} = \frac{1}{h_{-q}\cos.^2 q} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{v^2_{-q}}{r^2}\right)[\psi(p) - \psi(q)].$$

Zulks toepassende, vinden we

φ	h	$h\,tg.\,\varphi$	v	$\frac{v}{g\cos.\varphi}$	R
0°	261,04	0	71,59	7,29	522,08
—5°	259,	22,66	71,31	7,30	519,97
—10°	260,24	45,88	71,49	7,39	528,51
—15°	266,21	71,33	72,30	7,62	551,21
—20°	276,54	100,65	73,69	7,98	588,58
—25°	291,84	136,09	75,70	8,50	644,03
—30°	313,08	180,75	78,41	9,22	723,02
—35°	341,72	239,27	81,91	10,18	834,34
—40°	379,88	318,75	86,37	11,48	991,80

waaruit we verkrijgen:

$$x_5 = 405{,}75 \text{ M.}$$
$$y_5 = 165{,}81 \text{ M.}$$

zijnde de waarden van x en y, van af den top tot het punt der baan, waarbij $\varphi = -40°$ is, en

$$t_5 = 5''\,883.$$

Op dezelfde wijze van af $\varphi = -40°$ tot $\varphi = -50°$:

φ	h	$h\,tg.\,\varphi$	v	$\frac{v}{g\,cos.\,\varphi}$	R
—40	379,88	318,75	86,37	11,48	991,8
—45	428,45	428,45	91,72	12,61	1211,8
—50°	496,08	594,71	98,70	15,63	1543,6

waaruit

$$x_6 = 150{,}63$$
$$y_6 = 152{,}81$$

en

$$t_6 = 2''\,25.$$

De waarden van x en y van af den top tot het punt der baan waar $\varphi = -50°$ zijn.

$$X'_2 = x_5 + x_6 = 556{,}38 \text{ M.},$$
$$Y'_2 = y_5 + y_6 = 318{,}62 \text{ M.}$$

De hoogte van den klimmenden tak is 303,68 M., dus 14,94 M. minder dan Y'_2. Om dus de amplitude van den dalenden tak te hebben moeten we 556,38 M. verminderen met

$$14{,}94\ cotg.\ 50° = 12{,}53 \text{ M.}$$

We hebben dus bijgevolg

amplitude van den klimmenden tak = 583,26
„ „ „ dalenden „ = 546,03

Boogschootsverheid = 1129,29 M.

en

Grootste hoogte = 303,68 M.

terwijl de tijd, waarin deze baan doorloopen wordt, gegeven is door de som der partieële tijden nl. 15″ 84.

Om den valhoek benaderenderwijze te bepalen kunnen we stellen dat 152,81 M. overeenkomt met 10° verschil in φ dus 12,53 M. komen overeen met een verschil van 50′ ongeveer, de valhoek is dus ten naaste bij — 49° 10′.

Uit de voorgaande tabellen blijkt dat de snelheid, alsmede de kromtestraal minimum is tusschen 0° en 10°; dit interval onderzoekende, vinden we deze waarden voor v en R

φ	v	R
0°	71,59	522,08
— 1°	71,49	520,54
— 2°	71,42	519,92
— 3°	71,38	519,63
— 4°	71,34	519,66
— 5°	71,31	519,97
— 6°	71,33	521,09

waaruit blijkt dat de snelheid minimum is in het punt van de baan waarbij $\varphi = -5°$, terwijl de kleinste kromtestraal nl. 519,63 M. behoort bij het punt van de baan waarbij $\varphi = -3°$ is.

Om de graad van nauwkeurigheid der verkregen resultaten te bepalen, zouden we de uitdrukking van CAUCHY voor de limiet van de begane fout in de bepaling der verschillende waarden van $\frac{1}{h \cos.^2 \varphi}$, moeten gebruiken.

Daartoe zouden wij de waarden van A, B en C moeten berekenen voor verschillende punten in de baan en de grootste dier gevonden waarden moeten bezigen in die uitdrukking en alsdan daaruit de limiet der begane fouten in x, y enz. afleiden.

Bij die afleiding kunnen wij dan aannemen, dat de fout begaan bij de berekening van h, geldig is voor het geheele gedeelte van den boog dat men beschouwt; i. a. w. de limiet van den fout in $h = \eta$ zijnde, dan wordt de limiet van den fout in x uitgedrukt door

$$2\,\eta\,(\varphi_0 - \varphi)$$

en die in y door

$$2\,\eta\,log.\,\frac{cos.\,\varphi}{cos.\,\varphi_0}\ ^{1)}.$$

In aanmerking nemende echter, dat bij dergelijke baanberekeningen zoovele omstandigheden verwaarloosd blijven, die èn op den weêrstand van de lucht èn dientengevolge op de snelheid van het projectiel van invloed zijn, is het voldoende de verkregen resultaten te vergelijken met de uitkomsten, welke direct door geschutsproeven geleverd worden alsmede met die, welke voortvloeien uit berekeningen, waarbij de methode van DIDION of eenig ander methode gebezigd is.

De door mij berekende baan is eveneens door MAYEVSKI berekend; hij heeft daarbij de methode van DIDION gevolgd en komt tot deze uitkomsten:

De grenzen, waar tusschen de reeële boogschootsverheid ligt, zijn: 1141 en 1114 M., terwijl de bij proeven waargenomene waarde bedraagt: 1128 M., waaruit blijkt dat de door mij gevonden waarde 1129,29 M. zeer weinig met de werkelijke verschilt.

Voor de grootste hoogte, de ordinaat van den top van de baan, vindt MAYEVSKI 308,6 M.; hij heeft deze berekend door voor p de kleinste waarde te nemen, waardoor de ordinaten steeds grooter dan de werkelijke worden; door toepassing van de methode ST. ROBERT is trouwens gevonden 303,68 M.

---

1) De fout in $h = \eta$ dan is de fout in $x = \mu$, bepaald door

$$\mu = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \eta\, d\,\varphi = 2\,\eta\,(\varphi_0 - \varphi),$$

en die in $y = \nu$ zijnde:

$$\nu = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \eta\, tg.\,\varphi\, d\,\varphi = 2\,\eta \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} tg.\,\varphi\, d\,\varphi = 2\,\eta\, log.\,\frac{cos.\,\varphi}{cos.\,\varphi_0}.$$

Verder vond MAYEVSKI: voor den tijd, waarin de baan wordt afgelegd 15″ 84, de valhoek = — 49° 26′ en de daarbij behoorende snelheid van 99 M.

Men ziet dus, dat door toepassing van ST. ROBERTS methode het meest nabij de werkelijkheid wordt gekomen; dit pleit èn voor de benaderingsmethode èn voor de keuze van de wet, waardoor de weerstand van de lucht is uitgedrukt.

Uit een analytisch oogpunt moge het van belang zijn om alle verschijnselen van beweging van het projectiel na te gaan, voor de praktijk is het voldoende, dat bij berekening van projectielenbanen de benaderings-methode van ST. ROBERT wordt gebruikt en de wet van weêrstand uitgedrukt door een binoom, waarin de 2^{de} en de 4^{de} macht voorkomen. Het zal nuttig zijn zoowel voor de artillerie als voor hen, die zich uitsluitend wijden aan de studie omtrent den weerstand van de lucht, dat eene menigte projectielen-banen worden berekend volgens deze methode en daarvan tabellen gemaakt worden, zooals er bestaan in de onderstelling, dat de weêrstand van de lucht evenredig is aan het vierkant van de snelheid; die uitkomsten vergeleken met die, welke de geschutsproeven leveren, zullen uitspraak moeten doen omtrent de keuze van den luchtweêrstandswet. Zoolang de analytische mechanica geen zuivere mathematische theorie weet op te stellen omtrent den luchtweêrstand, waardoor al de waargenomen verschijnselen, die een lichaam vergezellen gedurende zijne beweging, in analytischen vorm kunnen worden voorgesteld, zal echter bovenvermelde tabellen hare essentiëele waarde missen om met nauwkeurigheid de meest waarschijnlijken luchtweêrstandswet daaruit te mogen afleiden. Noodzakelijk zal het dus zijn voor de verdere ontwikkeling van de Leer der Uitwendige Ballistica, dat de analytische mechanica en de Artillerie samenwerken om reeksen van nauwkeurige resultaten te verkrijgen, waardoor als het ware een numerieke tabel of eene kromme lijn zal worden verkregen, die den weêrstand van de lucht, bij verschillende omstandigheden, correspondeerende aan elke snelheid en omgekeerd, zal doen kennen.

Hoofdvereischte zal het bij de samenstelling van dergelijke tabel zijn dat de parameters welke voorkomen in de baanvergelijking, door de analyse verstrekt, onafhankelijk van die, welke directe proefnemingen geven, bepaald moeten worden en omgekeerd. Is eenmaal dan op deze wijze die tabel verkregen, dan zal de benaderingsmethode van ST. ROBERT, toegepast op elk geval, het nauwkeurigst de geheele baan van eenig projectiel bepalen, zooals in dit proefschrift is aangewezen.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Het verschil van de drukking der lucht op de verschillende elementen van een projectiel ontstaat door de rotatie, welke het projectiel tegelijkertijd met zijne translatie-beweging heeft; dat verschil van drukking is de voornaamste aanleiding tot déviatie.

II.

De bepaling van déviatie, op wiskundige wijze, is onmogelijk volgens het tegenwoordig standpunt van de wetenschap ten opzichte van den luchtweerstand.

III.

Door de benaderingsmethode van ST. ROBERT kan de baan, welke een projectiel in de lucht beschrijft, met de meest mogelijke nauwkeurigheid bepaald worden.

IV.

De benaderingsmethode echter van DIDION is beter geschikt dan die van ST. ROBERT tot oplossing van de, in de praktijk voorkomende, ballistische vraagstukken.

V.

Het is niet zeker dat er verband bestaat tusschen chinine en de indigogroep.

VI.

Onwaarschijnlijk is de verklaring, die HERWIG geeft van de verschijnselen bij de lading eener vloeistofcel met polariseerbare electroden en onjuist zijne daarop steunende schatting van den onderlingen afstand der moleculen.

(WIED. Annalen II, IV).

VII.

De, in water opgeloste, zuurstof bepale men steeds volgens de methode van BUNSEN.

VIII.

De theoretische Mechanica is geen onderdeel van de analyse; de analyse is slechts hulpwetenschap.

IX.

De meening dat eene rechte lijn bestaat uit eene oneindige opvolging van punten, voorkomende in „de vrije centraalbeweging in de rechtlijnige baan door Dr. P. SCHURINGA", is onjuist.

X.

De leer der evenredigheden behoort bij het lager onderwijs niet onderwezen te worden.

XI.

Het beste conservatiemiddel van hout tegen bederf is het creosoteeren.

XII.

Het ware te wenschen, dat het gouvernement bij de wet op de spoorwegen het gebruik van de Westinghouse air-brake, als zijnde het beste remtoestel, verplichtend had gesteld.

XIII.

Le pas le plus utile dans les sciences est toujours celui, qui suit immédiatement les derniers, qui ont été faits.

HENRI ST. SIMON.