

20.

M E T I N G E N

OVER

HET VERSCHIJNSEL VAN HALL

EN DE

TOENAME VAN DEN WEERSTAND IN HET MAGNETISCH VELD.

---

PROEFSCHRIFT

DOOR

E. VAN EVERDINGEN Jr.

---

LEIDEN. — GEBR. SNEL.

1897.

Diss Leiden

1897 nr 20

Universiteit Leiden



1 586 413 0

WETJINGEN

OP

HET VERSCHIJNSEL VAN HALL

TOENAME VAN DEN WEERSTAND IN HET MAGNETISCH VELD.

PROEFSCHRIFT

VOOR DE GRADE VAN DOCTOR

IN DE WETENSCAPEN EN NATUURKUNDE

HET VERSCHIJNSEL VAN HALL

EN DE

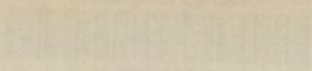
TOENAME VAN DEN WEERSTAND IN HET MAGNETISCH VELD.

Ewoud van Everdingen Jr.

1891

1891

1891



1870

HET VERBODEN VAN HANDEL

IN

DE ZAKEN VAN DEN WERKLAND IN HET MAGISTRATON FELD

M E T I N G E N

OVER

HET VERSCHIJNSEL VAN HALL

EN DE

TOENAME VAN DEN WEERSTAND IN HET MAGNETISCH VELD.

---

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. A. C. VREEDE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Woensdag 7 Juli 1897, des namiddags te 3 uren,

DOOR

Ewoud van Everdingen Jr,

GEBOREN TE DELFT.

---

LEIDEN. — GEBR. SNEL.

1897.

METTINGER

HET VERSCHUINSEL VAN HALL

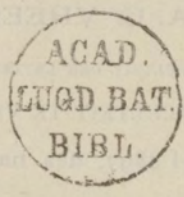
TORNAME VAN DEN WERSTAND IN HET MANNITICH VELD

PROEFSCHRIFT

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

VAN DE UNIVERSITEIT TE LEIDEN

STOOMDRUK TACONIS - LEIDEN.



Ewoud van Everdingen Jr.

1878-1879

Aan mijn Vader

en aan de nagedachtenis mijner Moeder.

Hon mijn Zuster

Weg van de Heer

en aan de heereachtigste mijner Moeder





*De voltooiing van mijn proefschrift biedt mij de gewenschte gelegenheid, mijn oprechten dank te betuigen aan U, Hoogleeraren der Faculteit van Wis- en Natuurkunde, voor het van U genoten onderwijs.*

*In 't bijzonder wend ik mij daarbij tot U, Hooggeleerde KAMERLINGH ONNES, Hooggeschatte Promotor, om mijn erkentelijkheid te betuigen voor de belangstelling, waarmede Gij mijne studiën steeds hebt gevolgd en vooral voor de talrijke nuttige wenken, die ik gedurende de voorbereiding en samenstelling van dit proefschrift van U mocht ontvangen.*

*Ook tot U, Hooggeleerde LORENTZ, wensch ik een afzonderlijk woord van dank te richten; de korte tijd, gedurende welken ik het voorrecht genoot, als Uw assistent werkzaam te zijn, zal in mijn herinnering een van de aangenaamste tijdperken uit mijn studietijd blijven.*

The following are the names of the persons who have been elected to the office of Justice of the Peace for the year 1880. The names are given in the order in which they were elected. The names of the persons who were elected to the office of Justice of the Peace for the year 1880 are as follows: [The following names are faintly visible in the text, but they are illegible due to the quality of the scan.]

# INHOUD.

	Pag.
INLEIDING . . . . .	1
HOOFDSTUK I.	
Onderzoekingen in de laatste jaren verschenen . . .	5
HOOFDSTUK II.	
Waarnemingsmethode . . . . .	16
HOOFDSTUK III.	
Berekening van de potentiaalverdeeling in een rond plaatje, waar de weerstand in verschillende rich- tingen niet dezelfde is, na het optreden van het verschijnsel van HALL . . . . .	31
HOOFDSTUK IV.	
Waarnemingen over het gemiddeld verschijnsel van HALL bij vlakke plaatjes, in verschillende standen ten opzichte van de electroden. . . . .	48
HOOFDSTUK V.	
Waarnemingen, waardoor bewezen wordt het bestaan van verband tusschen de dissymmetrie van het ver- schijnsel van HALL, den toestand van kristallisatie en de magnetische weerstandsverandering bij bismuth	59

HOOFDSTUK VI.

	Pag.
Waarnemingen ter bepaling van den aard van het verband tusschen kristalrichting en weerstand, magnetische weerstandstoename en HALL-verschijnsel bij bismuth . . . . .	77

HOOFDSTUK VII.

Voorloopige onderzoekingen van verschillenden aard.	96
---	----

HOOFDSTUK VIII.

Verklaring van het verschijnsel van HALL in electrolyten in verband met de overige in bismuth waargenomen verschijnselen . . . . .	102
--	-----

HOOFDSTUK IX.

Zijn de voorstellingen omtrent het mechanisme der electriciteitsgeleiding in metalen volgens de theorie van LORENTZ te vereenigen met het bestaan van het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename? . . . . .	115
--	-----

---

STELLINGEN . . . . .	131
----------------------	-----

## INLEIDING.

---

De onderzoekingen over het verschijnsel van HALL, beschreven in het proefschrift van DR. A. LEBRET<sup>1)</sup> hadden gevoerd tot het uitwerken eener methode van waarneming, die beter dan de tot dusver gevolgde methoden den waarnemer in staat stelde, het verschijnsel te meten vrij van de vele storingen, welke veroorzaakt worden door thermo-electrische en thermo-magnetische potentiaal- en temperatuurverschillen. Met behulp van deze methode was de verandering van den coëfficiënt van HALL in bismuth met de temperatuur tusschen ver uiteen gelegen temperatuurgrenzen bepaald, terwijl verder de belangrijke uitkomst verkregen werd, dat de dissymmetrie in het effect een verschijnsel was, eigen aan de stof. Het belang van deze uitkomst lag vooral hierin, dat, gelijk door LEBRET werd aangetoond, daaruit kon worden afgeleid, dat in een bismuthkristal, hetwelk in het magnetisch veld is gebracht, de galvanische weerstand in verschillende richtingen, die naar alle waarschijnlijkheid in nauw verband met de kristallisatie zouden blijken te staan, verschillende veranderingen door een zelfde magnetische kracht ondergaat.

---

<sup>1)</sup> Metingen over het verschijnsel van HALL in bismuth, Leiden, 1895.

Toen ik nu in het najaar van 1895 de genoemde onderzoekingen voortzette, was het oorspronkelijk mijn doel, het gebied der waarnemingen van LEBRET naar den kant der zeer lage temperaturen uit te breiden, en in 't bijzonder nader de magnetische verandering van den weerstand in verschillende richtingen bij lagere temperaturen te onderzoeken.

Bij dit onderzoek diende vooreerst wel buiten twijfel te worden gesteld dat de dissymmetrie van het HALL-verschijnsel afhankelijk van de kristallisatie is, en dat het inderdaad het verschil in magnetische verandering van den weerstand in verschillende richtingen is, dat dit veroorzaakt.

In het begin lag het buitendien voor de hand alle krachten aan dit deel van het onderzoek te wijden, omdat professor KAMERLINGH ONNES door op grond van de hinderwet ingebrachte bezwaren verhinderd werd gebruik te maken van de hulpmiddelen, die hij voor onderzoekingen bij zeer lage temperaturen had ingericht. Die belemmeringen zijn nog altijd niet opgeheven, en zoo is het onderzoek bij zeer lage temperaturen op den achtergrond getreden, en is het voornamelijk het verband van de magnetische weerstandstoename en van het HALL-effect met de kristalrichtingen, dat door mij onderzocht is geworden.

Van de uitkomsten bij dit onderzoek verkregen is zeker voor de theorie van het verschijnsel de meest belangrijke dat ook voor het HALL-effect in kristallijn bismuth een anisotropie blijkt te bestaan.

Dat het onderzoek naar het verband van magnetische weerstandsverandering en HALL-effect met de kristallisatie een grooten omvang aannam, lag vooreerst in het optreden van verschillen in het gemiddelde HALL-effect, waargenomen

bij een rond bismuthplaatje in standen, alleen verschillende door de plaats der electroden ten opzichte van de symmetrie-assen. Een reeks van zeer tijdroovende onderzoekingen was noodig om uit te maken, of men hier met een nieuw verschijnsel dan wel met een storing tengevolge van fouten in de waarnemingsmethode te doen had. Deze verschijnselen gaven tevens aanleiding tot het berekenen van den potentiaal in een rond bismuthplaatje, geplaatst in het magnetische veld, met inachtneming van de termen van de tweede orde.

Wat nu den loop van het onderzoek over de anisotropie betreft zoo werd het bestaan van verband tusschen regelmaat in kristallisatie en dissymmetrie vrij spoedig vastgesteld; het bleek echter noodzakelijk, bij de meting en berekening der dissymmetrie te letten op de toename van den weerstand van bismuth in het magnetisch veld. Daarna lag het voor de hand, door directe meting den weerstand van eenzelfde stuk bismuth in verschillende richtingen te bepalen en te onderzoeken of werkelijk in het magnetisch veld de toename voor die richtingen verschillend uitviel. Toen dit vermoeden juist gebleken was, moest de aard van het verband tusschen kristalrichting en weerstandsverandering opgespoord worden; de hiertoe noodige onderzoekingen leidden tevens tot de bedoelde ontdekking van een dergelijk verband tusschen de grootte van den HALL-coëfficiënt en de kristalrichtingen.

Binnen de grenzen der door LEBRET gebruikte temperaturen werden nog enkele waarnemingen gedaan over weerstandsverandering, HALL-effect en dissymmetrie bij lage temperaturen, over afhankelijkheid van den temperatuur-coëfficiënt van het HALL-effect van de sterkte van het magnetisch veld en over het HALL-effect in antimonium.

Aan de beschrijving der waarnemingen en berekeningen

gaat vooraf een overzicht van de door andere waarnemers in de beide laatste jaren gepubliceerde onderzoekingen over het HALL-effect en de verwante verschijnselen.

In de beide laatste Hoofdstukken is de theorie der electriche verschijnselen van LORENTZ op het verschijnsel van HALL en verwante verschijnselen toegepast en nagegaan, in hoeverre dit verschijnsel een keuze tusschen de voornaamste vroeger en later opgestelde theoriën van electriche stroom en weerstand kan rechtvaardigen.

Van verschillende zijden ontving ik bij mijne onderzoekingen raad en hulp. Prof. BEHRENS te Delft verschaftte mij behalve inlichtingen over de kristallografische eigenschappen van bismuth, een adres, door bemiddeling waarvan wij van de directie van het „*Königliches Blaufarbenwerk Oberschlema*”, eenige regelmatig gekristalliseerde stukken bismuth ontvingen. Het grootste gedeelte der waarnemingen is verricht met den grooten electromagneet uit *Teyler's Museum* te Haarlem, daartoe zeer welwillend door H.H. Directeuren van *Teyler's Stichting* afgestaan. Dr. STORTENBEKER te Delft diende mij van goeden raad bij het vervaardigen van bismuthplaatjes langs electrolytischen weg. Voor al deze blijken van belangstelling en hulpvaardigheid wensch ik hier mijn hartelijken dank uit te spreken.



## HOOFDSTUK I.

### Onderzoekingen, in de laatste jaren verschenen.

#### § 1. *Het verschijnsel van Hall in electrolyten.*

Het is bekend dat ROTTI <sup>1)</sup> in 1882 te vergeefs beproefde het verschijnsel van HALL- in electrolyten waar te nemen, daar hij alleen een potentiaalverschil vond dat langzamerhand ontstond en aan concentratieverschillen geweten kon worden.

Beter ging het BAGARD, die in 1896 kon mededeelen <sup>2)</sup> dat het hem gelukt was in oplossingen van zink- en koper-sulfaat potentiaal-verschillen te weeg te brengen, die zeer veel gemeen hadden met die van het verschijnsel van HALL. De waarde, verkregen bij een oplossing van zinksulfaat die  $\frac{1}{2}$  aequivalent per Liter bevatte, was van hetzelfde teeken en van dezelfde orde van grootte als die, welke LEDUC bij bismuth gevonden had.

Zooals uit een latere mededeeling <sup>3)</sup> blijkt was de ten slotte gevolgde waarnemingsmethode de volgende:

Twee gelijke rechthoekige glazen bakjes waren verbonden door een smaller en ondieper gedeelte. In de bakjes stonden de plaatvormige elektroden die den hoofdstroom aanvoerden, de geheele doorsnede vullende. Het smallere gedeelte werd in horizontalen stand tusschen de verticaal boven elkaar gestelde polen van een electromagneet geplaatst. In het

<sup>1)</sup> Atti della R. Acc. dei Lincei 12 p. 397, 1882; Journ. de Phys. 1883.

<sup>2)</sup> C.R. T. CXXIII, p. 77, 1896.

<sup>3)</sup> Journ. de Phys. Sér. 3 T.V. p. 499, 1896.

bovenste dekglas waren vier openingen, verbonden door glazen buizen en hevels met vier bakjes, waarin zich electroden bevonden, alles gevuld met dezelfde oplossing. Twee der openingen waren in de richting van den stroom aangebracht, twee in de richting loodrecht daarop. Gemeten werd nu met een capillair-electrometer het potentiaal verschil bij deze beide paren van electroden voor beide richtingen van het magneetveld, en daaruit werden berekend de potentiaalverschillen per lengte-eenheid. Het verschil der potentiaalvervallen tusschen de transversale electroden, gedeeld door de som dier vervallen tusschen de longitudinale, gaf de maat voor het HALL-effect, die hier dus overeenkwam met de grootheid  $D$  van LEDUC.<sup>1)</sup>

Er werd waargenomen bij drie magneetvelden van bepaalde sterkte, nl. 385, 707 en 962 c.g.s. De hoofdstroom was nooit grooter dan 0,05 amp. De gang der waarnemingen was steeds dezelfde: Wanneer de stroom een uur lang was doorgestaan, werd de magneet aangezet met het zwakste magneetveld. Na 1 minuut was dan het potentiaalverschil aan de transversale electroden bijna, na 3 á 4 minuten volkomen constant geworden. Eerst na 10 minuten werd de denifitieve aflezing gedaan; kort van te voren was het longitudinale potentiaalverschil bepaald. Nu werd het veld omgekeerd, eenzelfde reeks waarnemingen verricht, en zoo nog eenige malen. Daarna hetzelfde met het middelste, eindelijk met het sterkste magnetische veld. Was dit geschied, dan werd de hoofdstroom op de helft of een derde gebracht en de bepaling met het zwakste veld herhaald. De uitkomsten volgen hier gedeeltelijk.

<sup>1)</sup> Zie LEBRET, Diss. p. 20.

## Zinksulfaat.

Concentratie. in gr. aeq.	Hoofdstroom.		D	
	in amp.	in veld 385	707	962
$\frac{1}{2}$	0,045	0,0006	0,0007	0,0009
$\frac{1}{4}$	40	11	14	20
$\frac{1}{8}$	36	17	20	27
$\frac{1}{16}$	27	25	27	35

## Kopersulfaat.

$\frac{1}{2}$	0,044	0,0005	0,0008	0,0011
$\frac{1}{4}$	42	9	15	19
$\frac{1}{8}$	37	16	27	35
$\frac{1}{16}$	26	18	24	34

De temperatuur werd met een waterbad vrijwel constant gehouden en varieerde slechts tusschen  $21^{\circ}$  en  $26^{\circ}$ .

De slot-waarneming met zwakkeren stroom gaf altijd een veel lagere waarde voor D, soms slechts de helft van de vroegere.

BAGARD trekt uit de waarnemingen slechts als conclusie: Het HALL-effect neemt toe:

- 1<sup>o</sup>. Wanneer het zoutgehalte der oplossing afneemt.
- 2<sup>o</sup>. „ de stroomdichtheid toeneemt.
- 3<sup>o</sup>. „ de sterkte van 't magneetveld toeneemt.

De proeven van BAGARD zijn herhaald door FLORIO <sup>1)</sup>, die echter de verschijnselen niet meer kon waarnemen, wanneer hij de electroden onpolariseerbaar maakte en ze buiten het magnetisch veld bracht, zoodat hij de resultaten van BAGARD toeschreef aan een ponderomotische werking der magneetkracht op deeltjes losgelaten door de electroden.

<sup>1)</sup> Il Nuovo Cimento, Ser 4, T. IV, p. 106, 1896.

BAGARD heeft daarop <sup>1)</sup> zijn proeven met dergelijke voorzorgen als door FLORIO genomen waren herhaald, en zijn vroegere resultaten bevestigd gevonden. Hij wijst eenige oorzaken aan die het ongunstige resultaat van FLORIO kunnen veroorzaakt hebben en houdt zich aan zijn vroegere uitspraken.

§ 2. a. *Het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename in bismuth.*

In een reeks van onderzoeken heeft BEATTIE <sup>2)</sup> getracht bij bismuth het verband op te sporen tusschen het HALL-effect en de vermeerdering van den weerstand in het magnetisch veld. Hij gaat daarbij uit van de meening, dat deze weerstandsvermeerdering evenredig is aan het vierkant van de magnetisatie, wat volgens hem door GOLDHAMMER <sup>3)</sup> bewezen zou zijn, zoodat op deze wijze het HALL-effect tegelijk als functie van de magnetisatie zou gevonden worden.

Omtrent de waarnemingsmethode kan opgemerkt worden, dat als maat van het HALL-effect dient de blijvende uitslag van een galvanometer, verbonden met de secundaire electroden, en dat deze uitslag wordt waargenomen bij beide magnetisatie- en beide hoofdstroomrichtingen; van deze vier uitslagen wordt het gemiddelde genomen. Om de anaequipotentialiteit der secundaire electroden te compenseeren wordt gebruik gemaakt van den zijstroom. <sup>4)</sup> Er wordt geen vloeistofbad aangewend.

<sup>1)</sup> C. R. T. CXXIII, p. 1270, 1896.

<sup>2)</sup> Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. 38 (1), p. 225, 241, 1896.  
Gedeeltelijk ook in Wien. Sitz. Ber. 104, Abth. IIa, p. 653, 1895.

<sup>3)</sup> Wied. Ann. 36. p. 804, 1889.

<sup>4)</sup> Zie LEBRET, Diss. p. 27.

In de eerste plaats wordt nu aangetoond, dat wanneer men behalve de galvanometer-geleiding met grooten weerstand nog een tweede verbinding met kleinen weerstand  $s$  aanbrengt tusschen de secundaire electroden, terwijl de weerstand van het plaatje tusschen die electroden  $n$  is, de stroom in den galvanometer afneemt in reden van  $\frac{n+s}{s}$

Dan wordt opgemerkt, dat in sommige plaatjes uit onzuiver bismuth bij sterke magneetvelden het HALL-effect van teeken omkeert. Alleen in dunne plaatjes werd deze omkeering verkregen. Hameren of afschaven van de plaatjes had ten gevolge dat het punt waar het effect 0 was naar hoogere magneetvelden werd verschoven. Iets dergelijks was door VON ETTINGSHAUSEN EN NERNST<sup>1)</sup> waargenomen bij alliages van bismuth met weinig tin.

Behalve het HALL-effect werden nog twee andere verschijnselen zoowel in zuiver als onzuiver bismuth waargenomen.

Het eerste is de dissymmetrie, die in verband gebracht wordt zoowel met de gewone weerstandstoename als met het ontstaan van anisotropie in den weerstand door magnetisatie.

Het tweede openbaart zich als een langzame vermindering van den blijvenden galvanometer-uitslag bij sommige van de plaatjes. Het wordt gemeten door alleen den hoofdstroom te verbreken en het magneetveld te houden, waarbij een langzaam verdwijnende blijvende uitslag wordt waargenomen, altijd den HALL-stroom tegenwerkende. Het blijkt evenredig te zijn aan den hoofdstroom en dus niet toe te schrijven aan JOULE-warmte. Daarom wordt de verklaring van

1) Wied. Ann. 33, p. 474, 1888.

SHELFORD-BIDWELL, <sup>1)</sup> door mechanische vervorming, te hulp geroepen.

Uit de omkeering van het teeken van het HALL-effect bij sommige plaatjes volgt reeds, dat de evenredigheid met den wortel uit de weerstandsvermeerdering bij deze niet op kan gaan. Niettemin *definieert* BEATTIE het HALL-effect als dat gedeelte van het transversaal-effect, dat evenredig is aan de magnetisatie, en voert dus ter verklaring der feiten een *tweede* transversaal-effect in, evenredig aan de *derde* macht van de magnetisatie.

In een aantal plaatjes wordt nu het transversaal-effect en de weerstandsverandering direct gemeten. Het resultaat is:

1. In *zuiver* bismuth is geen tweede effect merkbaar, dus het HALL-effect is daar evenredig aan den wortel uit de weerstandsvermeerdering.

2. In *onzuiver* bismuth treedt het tweede effect op, dat het tegengestelde teeken heeft van het HALL-effect, en ongeveer evenredig is aan de derde macht van den wortel uit de weerstandsvermeerdering.

Voor iedere sterkte van het magnetisch veld worden de beide constanten in de formule —  $E = c_1 \sqrt{\Delta w} + c_2 (\sqrt{\Delta w})^3$  ( $E =$  transversaal effect,  $\Delta w =$  weerstandsvermeerdering) berekend door combinatie met *alle* andere waarnemingen, behalve de onmiddellijk voorafgaande en volgende. Bij 1 worden dan gemiddelde waarden voor  $c_1$  gevonden tusschen 0,42 en 0,40. Bij 2 zijn de verschillen over 't algemeen grooter, bijv.  $c_1$  tusschen 0,15 en 0,17,  $c_2$  tusschen 1,6 en 1,8. Daar deze getallen niet bijzonder geschikt zijn om te doen zien

<sup>1)</sup> Zie LEBRET, Diss. p. 7.

in hoeverre waarneming en berekening overeenstemmen, heb ik in het laatste geval uit de waargenomen weerstandsverandering met de door BEATTIE bij ieder magneetveld opgegeven constanten E berekend. Ik vind dan:

Magneetveld.	E waargenomen	E berekend	E berekend (met constante coëff).
3180	— 0,01974	— 0,0184	— 0,0184
4100	— 0,01784	— 0,0166	— 0,0188
8500	+ 0,01361	+ 0,0137	+ 0,0220
10800	+ 0,02650	+ 0,0342	+ 0,0361
12840	+ 0,06014	+ 0,0689	— 0,0646
14170	+ 0,07676	+ 0,0784	+ 0,0784
15600	— 0,09602	+ 0,0992	+ 0,0896
17780	+ 0,12024	+ 0,1126	+ 0,1020

In de laatste kolom zijn als coëfficiënten voor alle magneetvelden genomen de gemiddelden uit de door BEATTIE voor de afzonderlijke velden opgegeven coëfficiënten.

Ten slotte heeft deze met allerlei middelen beproefd zijn beide effecten te scheiden door de coëfficiënten in verschillende mate te doen veranderen. Dit gelukte echter slechts door hameren en vijlen, zooals reeds werd medegedeeld.

*b. Het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename in verband met het thermo-electrisch vermogen.*

Na te hebben opgemerkt, dat het teeken van het HALL-effect niet kan worden voorspeld met behulp van het magnetisch gedrag of het teeken van het Thomson-effect bij de metalen, onderzocht BEATTIE<sup>1)</sup> het verband met de plaats in de thermo-electrische reeks, en komt tot het resultaat:

1) Proc. R. S. of Edinburgh XX. p. 481, 1895.

„Met uitzondering van kobalt wordt in metalen en alliages het teeken van het HALL-effect zeker, en de grootte waarschijnlijk, bepaald door het thermo-electrisch vermogen.”

Voor de weerstandsverandering der alliages besluit hij:

„Het *schijnt* dat de waarnemingen er op wijzen dat de verandering van den weerstand in een standvastig magnetisch veld voorspeld kan worden uit de weerstandsveranderingen der samenstellende metalen.”

Onder HALL-effect wordt in de eerste uitspraak verstaan het gedeelte evenredig aan den wortel uit de weerstandstoename, het *eerste* effect van BEATTIE dus. Het *tweede* effect werd alleen in alliages van bismuth met andere metalen gevonden.

c. *Het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename in nikkel, antimonium en tellurium.*

Door BEATTIE <sup>1)</sup> werd bij de genoemde metalen waargenomen de weerstandsverandering en het verschijnsel van HALL. Daar het blijkt, dat het HALL-effect overeenkomstig vertoont met dat in zuiver bismuth, en wordt voorgesteld door  $e \sqrt{\Delta w}$ , besluit hij, dat het HALL-effect evenredig is met de magnetisatie en komt zoo tot de uitspraak:

„De afname van weerstand bij nikkel en de toename van weerstand bij antimonium en tellurium in het magnetisch veld zijn evenredig aan het vierkant van de magnetisatie.”

§ 3. Tegen de bewijskracht van deze proeven voor zoover bismuth betreft, is naar het mij voorkomt vrij wat aan te voeren.

In de eerste plaats is de grondslag der geheele beschouwing, de evenredigheid van de weerstandsvermeerdering met het vierkant van de magnetisatie, volstrekt niet

<sup>1)</sup> Proc. R. S. of Edinburgh XX, p. 493, 1895.



boven twijfel verheven. De waarnemingen van GOLDHAMMER hebben betrekking op de weerstandstoename als functie van de *magnetische kracht*; zij strekken zich niet verder uit dan tot  $\pm 1500$  c. g. s., en reeds hier komen belangrijke afwijkingen van de quadratische wet voor. Bovendien hebben talrijke waarnemers, bijv. HENDERSON<sup>1)</sup>, aangetoond, dat in sterkere magnetische velden de toename tamelijk wel evenredig aan de *eerste* macht van de magnetische kracht wordt. BEATTIE's eigen waarnemingen bevestigen dit volkomen. Daar nu eveneens door onderzoekingen van TÖPLER e.a. bewezen is<sup>2)</sup>, dat de magnetische permeabiliteit van bismuth nagenoeg constant is, kan men wel beweren, dat in sterke magneetvelden de weerstandsvermeerdering ook evenredig is aan de *eerste* macht van de magnetisatie.

Op het tegenwoordige standpunt der theorie is voor het aannemen van een volkomen evenredigheid van HALL-effect met magnetische kracht geen voldoende grond aanwezig; ook uit de waarnemingen blijkt niet, dat men te doen heeft met verschijnselen die aan een verschillende oorzaak hun ontstaan te danken hebben; het is dus niet noodig een tweede HALL-effect in te voeren. Ook zijn te weinig voorzorgen genomen bij het waarnemen om zekere conclusies te kunnen trekken<sup>3)</sup>.

1) Wied. Ann. 53, p. 912, 1894.

2) Zie LEBRET, Diss. p. 6.

3) Bij de door BEATTIE gevolgde methode kan de waarneming van het HALL-effect o. a. onzuiver gemaakt worden door storingen tengevolge van PELTIER-effect, JOULE-warmte, galvanomagnetisch temperatuurverschil, en wijziging van weerstanden in, het magnetisch veld (Zie LEBRET, Diss. Hoofdstuk VII § 4 A 1, 3, B 6, 7 en 8). Bij de gewijzigde methode van LEBRET, zooals die door mij werd toegepast, zijn al deze storingen vermeden.

Ofschoon BEATTIE de juiste oorzaak van de dissymmetrie heeft genoemd, blijft het bij een vermoeden, daar waarnemingen over dissymmetrie bij gebruik van den zijstroom niet geheel te vertrouwen zijn.

Het tweede nieuwe verschijnsel door hem opgemerkt heeft zooveel gemeen met de storing door het galvanomagnetisch temperatuurverschil van VON ETTINGSHAUSEN dat men het veilig daarvoor houden kan. Dat de verklaring van SHELFORD BIDWELL hier evenmin opgaat als voor het HALL-effect zelf volgt uit de opmerking van LEBRET<sup>1)</sup>, dat dan de storing evenredig aan de *derde* macht van den hoofdstroom zou moeten zijn.

Bij § 2b willen we alleen nog opmerken, dat volgens de waarnemingen van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST<sup>2)</sup> bij alliages van bismuth met 1—6% tin het HALL-effect hetzelfde, de thermo-electrische kracht daarentegen het tegen-gestelde teeken van dat bij zuiver bismuth heeft.

Uit de waarnemingen, waaruit de conclusie van § 2c is getrokken, blijkt dat alleen bij nikkell het invoeren van de weerstands-verandering voordeel geeft: bij antimonium en tellurium kan men met evenveel recht zeggen, dat het HALL-effect evenredig met de magnetische kracht is.

§ 4. *Weerstand van bismuth bij lage temperaturen, in en buiten het magnetisch veld.*

In de laatste jaren zijn uitgebreide onderzoekingen over den weerstand van bismuth verricht door FLEMING en DEWAR<sup>3)</sup>. Opnieuw is daarbij gebleken de groote invloed, welke kleine

1) Dissertatie p. 10.

2) Wied. Ann. 33 p. 474, 1888.

3) Zie bijv. Proc. Roy. Soc. 60 p. 73 en 425, 1896.

onzuiverheden op de electriche eigenschappen van dit metaal hebben. Terwijl n.l. twee soorten met zorg chemisch gezuiverd bismuth in de buurt van  $-80^{\circ}$  C. een minimum van den weerstand vertoonden, een ander soort een minimum bij  $0^{\circ}$  en een maximum bij  $-200^{\circ}$ , gaf electrolytisch bereid bismuth van HARTMANN en BRAUN een constante afname van weerstand van hetzelfde bedrag als bij de meeste zuivere metalen wordt gevonden, zoodat, wanneer de verandering tot het absolute nulpunt onveranderd bleef, de weerstand nagenoeg 0 zou worden. Daarentegen bleek bij ditzelfde bismuth de magnetische weerstandstoename zoo sterk toe te nemen bij verlagings van temperatuur, dat in het magnetisch veld een minimum-weerstand bij lage temperatuur wordt bereikt, waar voorbij de weerstand snel toeneemt.<sup>1)</sup> Hier volgen eenige der resultaten.

Temperatuur.	Magnetisch veld.			
	0	2450	5500	14200
+ $19^{\circ}$	116,2.10 <sup>3</sup>	123,5	132	187
— $79^{\circ}$	78,3	105,0	158	284
— $185^{\circ}$	41,0	186,0	419	1750
— $203^{\circ}$	34,3	283,5		

In een magneetveld van 21800 c. g. s. was bij  $-185^{\circ}$  de weerstand toegenomen tot 6190, d. i.  $150 \times$  zoo groot als buiten het magneetveld.

<sup>1)</sup> De proeven van FLEMING en DEWAR bevestigen dus het vermoeden, door mij uitgesproken in mijne Mededeeling aan de Kon. Ak. v. Wet., zitting van 30 Mei 1896, p. 59.

## HOOFDSTUK II.

### Waarnemingsmethode.

§ 1. De methode, volgens welke alle hierna te vermelden onderzoekingen over het verschijnsel van HALL en de dissymmetrie daarvan zijn verricht, is de compensatie-methode zonder zijstroom zooals die door LEBRET wordt beschreven in Hoofdstuk VIII § 6 van zijn proefschrift. Thans, nu het onderzoek verschillende vroeger niet vermoede bijzonderheden over den weerstand van bismuth aan het licht heeft gebracht, zijn wij ook beter in staat te beoordeelen, of de methode werkelijk zoowel HALL-effect als dissymmetrie vrij van storingen doet kennen. Vooraf echter wensch ik even de redenen te vermelden, die mij bewogen van het gebruiken van den zijstroom af te zien.<sup>1)</sup>

§ 2. In de eerste plaats bleek dikwijls, vooral bij hooge temperaturen, dat wanneer vóór een waarneming de weerstand in den zijstroom goed gekozen was, na de waarneming in een magneetveld 0 weer een secundaire stroom optreedt bij het sluiten van den hoofdstroom. Is deze eenigszins belangrijk, dan moet men de geheele waarneming verwerpen, daar een voortgaande verandering in den zijstroom een fout brengt zoowel in de uitkomst voor den gemiddelden HALL-

---

<sup>1)</sup> Deze redenen zijn reeds medegedeeld in het Zittingsverslag der Kon. Ak. v. Wet. van 30 Mei 1896. p 47.

stroom als in die voor de dissymmetrie, en deze fout niet berekend kan worden.

Doch zelfs wanneer voor en na de waarneming de zijstroom de juiste waarde heeft, is men er niet zeker van, dat de waargenomen secundaire stroomen alléén door het verschijnsel van HALL met zijn dissymmetrie zijn ontstaan.

Men ziet dit het best in door beschouwing van een denkbeeldig plaatje waarin geen HALL-effect of dissymmetrie (veroorzaakt door anisotropie in den weerstand), maar alleen weerstandsvermeerdering in het magnetisch veld voorkomt. De inrichting van den zijstroom is schematisch voorgesteld in Fig. I. Stellen we ons voor dat de hoofdstroom door het plaatje gaat van A naar B, dat de secundaire electroden C en D verbonden zijn door den galvanometer G, en dat de zijstroom is aangebracht volgens EF. Is de weerstand hierin zoo gekozen, dat de galvanometer geen uitslag vertoont bij het sluiten van den hoofdstroom, dan zijn C en E aequipotentiaal. Het gedeelte van den hoofdstroom onder de stroomlijn AD gaat verder langs DEF.

Het geheel kan nu opgevat worden als een brug van Wheatstone; de vier weerstanden zijn dan ADE, ACD, CDF en EF. Wordt het plaatje nu in het magnetisch veld gebracht, dan neemt de weerstand van het bismuth toe. Alleen wanneer de evenredigheid tusschen de vier weerstanden bleef bestaan, zou de galvanometer nog in rust blijven bij het sluiten van den hoofdstroom. Daar echter de weerstand van DE, EF en BF niet verandert, bestaat hierop weinig kans, zoodat een secundaire stroom zal waargenomen worden, noch door HALL-effect, noch door dissymmetrie veroorzaakt. Deze secundaire stroom, niet van richting veranderend bij omkeering van het magnetisch veld,

zou, tegelijk met de HALL-stroomen optredende, dissymmetrie veroorzaken of de bestaande dissymmetrie wijzigen. Op het gemiddelde HALL-effect echter heeft deze storing geen invloed.

Meet men den secundairen stroom in het magneetveld 0 (dien we voortaan  $S_0$  zullen noemen) met den compensatiestroom, dan geeft de weerstandstoename ook een fout, maar thans kan die fout berekend worden. De weerstand van het plaatje kan tegenover dien van de geheele primaire geleiding wel verwaarloosd worden, dus verandert door de weerstandstoename in het plaatje de hoofdstroom niet, en nemen alle van den weerstand afhingende potentiaalverschillen in het plaatje, ook dat tusschen de secundaire elektroden, bijv. met  $p$  0/0 toe. Ook  $S_0$  moet dus met  $p$  0/0 vermeerderd worden om den secundairen stroom te krijgen, die er zijn zou, wanneer geen HALL-effect en geen anisotropie van weerstand bestond.

Neemt men voor  $S_0$  het gemiddelde der waarden, voor en na de waarneming van het HALL-effect verkregen, dan is ook het eerste bezwaar opgeheven, tenminste grootendeels.

§ 3. Dat de weerstandstoename oorzaak kan zijn van schijnbare dissymmetrie is reeds door VAN AUBEL <sup>1)</sup> opgemerkt, die meestal de methode van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST <sup>2)</sup> toepaste. Terwijl echter VAN AUBEL meende, met deze storing in elk geval de dissymmetrie te kunnen verklaren, heeft LEBRET aangetoond, dat de dissymmetrie evengoed kan optreden wanneer  $S_0 = 0$ . Aan den anderen kant heeft LEBRET het belang van de storing bij zijne

1) Arch. d. Sciences nat. et phys. de Genève 33, 15 Maart 1895.

2) Zie LEBRET, Diss. p. 27; Wien. Sitz. Ber. 94, p. 572.

proeven onderschat; wel is de weerstand van het plaatje bij zijne en mijne proeven klein, maar de potentiaalverschillen tengevolge van den weerstand zijn volstrekt niet klein *vergeleken met die door het verschijnsel van HALL veroorzaakt*. Men kan dan ook gerust aannemen, dat de groote verschillen die VAN AUBEL waarnam uitsluitend aan deze storing mogen worden toegeschreven, daar de plaatjes electrolytisch neergeslagen en waarschijnlijk volkomen onregelmatig waren. Overigens moeten we nog opmerken, dat het voor het belang der storing onverschillig is of men dunne of dikke plaatjes bezigt, daar HALL-effect en weerstand beide omgekeerd evenredig zijn aan de dikte van het plaatje; ook is het niet juist, dat, zooals LEBRET meent,<sup>1)</sup> de invloed van het DANIELL-element op het potentiaalverschil aan de secundaire electroden bij de proeven van VAN AUBEL afhankelijk was van den weerstand van het bismuthplaatje.

§ 4. Zooals in een volgend Hoofdstuk wordt medegedeeld, zijn bijna voor ieder stuk bismuth de getallen voor de weerstandstoename anders, en het zal dikwijls voorkomen dat deze niet met groote nauwkeurigheid bepaald kunnen worden. Het is daarom van belang te zorgen, dat  $S_0$  nooit zoo groot wordt dat een fout in de correctie een aanmerkelijken invloed op de resultaten zou kunnen hebben. Dit maakte het wenschelijk, de methode van bevestiging der electroden op het plaatje door inschroeven te verlaten en de electroden verstelbaar te maken, hetgeen op de volgende wijze door mij bereikt werd<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Dissertatie pag. 41.

<sup>2)</sup> Reeds medegedeeld in Zittingsverslag der Kon. Ak. v. Wet. van 30 Mei 1896, pag. 50.

Aan de zijkanten van een houten raampje A<sup>1)</sup> zijn koperen reepen aangebracht, die van boven met klemschroeven worden verbonden aan de draden van den hoofdstroom. In 't midden van de zijkanten gaan schroefjes B, B<sub>1</sub> door de koperen reepen en het hout, tusschen welke het vierkante of ronde plaatje geklemd wordt.

In 't midden van de onderzijde is een schroef C aangebracht, aan het ondereinde horizontaal doorboord om den dubbelen draad van de secundaire geleiding door te laten, die er met een schroefje in vastgeklemd wordt, aan het bovineinde voorzien van een verticale uitboring, waarin het schroefje D zich beweegt, dat als onderste secundaire electrode dient. Aan de bovenzijde eindelijk is met twee hout-schroefjes het plaatje E bevestigd, dat, met de tweede electrode F, eenige millimeters in horizontale richting kan worden verschoven, zoodat men een stand kan opzoeken, waar S<sub>0</sub> zoo klein mogelijk is. (Ook de onderste electrode is wel eens verschuifbaar gemaakt).

Over 't algemeen heeft deze inrichting goed voldaan. Tegen temperaturen boven 150° C. is echter het houten raampje op den duur niet bestand; ook kwam het wel voor, dat bij een sterke verwarming of na een sterke afkoeling het contact aan de electroden te wenschen overliet. (Dit zou wellicht kunnen vermeden worden door veerende contacten aan te brengen). Bij alle waarnemingen, waar het op juiste numerieke uitkomsten aankwam, is daarom in den laatsten tijd vóór en na de waarneming de weerstand tusschen de einden der secundaire verbindingsdraden gemeten op de volgende wijze:

---

1) Zie Fig. II.



Nadat alle commutators uit hunne kwikbakken waren genomen, werd de hoofdstroom kort gesloten door een beugel tusschen de kwikbakken, waarin de draden die met het element verbonden zijn uitkomen. In die kwikbakken werden geplaatst twee draden, die zich in tweeën splitsten en zoo twee takken vormden. In ieder der takken werd opgenomen een weerstandsbank en één der windingen van den differentiaal-galvanometer, in een van beide bovendien de secundaire geleiding van het plaatje. Nadat de weerstanden zoo geregeld waren dat bijna evenwicht tusschen de twee takstroomen was verkregen, werd de secundaire geleiding uitgeschakeld en vervangen door een korten koperen beugel, en waargenomen de verplaatsing die deze vervanging in den galvanometer gaf. Daarop werd uit den anderen tak een weerstand van 0,1 Ohm weggenomen en nogmaals de verplaatsing waargenomen. De verhouding der verplaatsingen geeft dan de verhouding tusschen den gezochten weerstand en 0,1 Ohm. Alle voor deze stroomverbinding noodige geleiddraden waren op één plankje bevestigd, zoodat in zeer korten tijd de verbindingen voor de meting van het HALL-effect in die voor de meting van dezen weerstand werden veranderd. Nooit werd de waarneming behouden wanneer de weerstand meer dan 0,05 Ohm was, terwijl die meestal slechts 0,03 Ohm bedroeg.

Met uitzondering van deze laatste inrichting is de geheele stroomloop voorgesteld in Fig. III, gedeeltelijk schematisch, gedeeltelijk overeenkomstig de werkelijkheid. De beteekenis der letters is: *E* Element, *H* commutator van den hoofdstroom, voorgesteld door een enkelen pijl; *Em* electromagneet, *P* plaatje, *S* commutator van den secundairen- of HALL-stroom, voorgesteld door een dubbelen pijl; *R* rheotan-

draden <sup>1)</sup>, *C* commutator, *W* weerstandsbank voor den compensatie-stroom, voorgesteld door een kleinen enkelen pijl; *B* accumulatorenbatterij, *M* commutator van den magnetisatie-stroom (driedubbele pijl); *G* differentiaal-galvanometer.

§ 5. *Fouten en Storingen.*

Voor de bespreking der mogelijke fouten in de waarnemingen zullen we ons uitsluitend met waarnemingen over de verschijnselen in bismuth bezighouden, en daarvoor drie gevallen onderscheiden:

A. Het bismuth is amorph of in zulke kleine kristallen volkomen onregelmatig gekristalliseerd, dat het, buiten het magneetveld, als isotroop beschouwd kan worden.

B. Het bismuth is geheel regelmatig gekristalliseerd.

C. Het bismuth bestaat uit kleine regelmatig gevormde deelen, die onregelmatig vergroeid zijn.

A. Dit geval wordt het best vertegenwoordigd door electrolytisch afgescheiden bismuth.

In het magnetisch veld blijft het bismuth niet geheel isotroop. De weerstand neemt n.l. sterker toe in de richtingen van het vlak, loodrecht op de magnetische kracht, dan in de richting van die kracht. Staat echter de magnetische kracht loodrecht op het vlak van het plaatje, dan blijft de isotropie *in* dit vlak bestaan. Bij een dun plaatje, waar de stroom stellig in de richting van dit vlak loopt, zal dus in 't geheel geen dissymmetrie optreden. Schijnbaar kan er dissymmetrie ontstaan wanneer de secundaire electroden niet equipotentiaal zijn, n.l. door de toename van den weerstand. Bepaalt men die toename met het plaatje zelf, bijv. volgens de methode beschreven in Hoofdstuk V

<sup>1)</sup> Zie LEBRET, Diss. pag. 70.

§ 3, dan kan men het bedrag der correctie, aan  $S_0$  aan te brengen, volkomen juist bepalen en moet dan een symmetrisch HALL-effect overhouden. Weet men dat men met een isotroop plaatje te doen heeft, dan zou men uit de schijnbare dissymmetrie de weerstandstoename kunnen bepalen, wat echter geen zeer nauwkeurige methode zou zijn.

Draaien van het plaatje in zijn eigen vlak, over een willekeurigen hoek zoo het rond is, over  $90^\circ$  of  $180^\circ$  zoo het vierkant is, zal op de uitkomsten geen invloed hebben. Behalve de door LEBRET opgenoemde foutenbronnen<sup>1)</sup>, welke door de waarnemingsmethode onschadelijk worden gemaakt, zijn er *geen* storingen, die op het gemiddelde HALL-effect invloed zouden kunnen uitoefenen.

Is het plaatje eenigszins dik in verhouding tot zijn vlakteafmeting, dan kan het gebeuren dat de stroom voor een klein deel in de richting van de normaal loopt. In het magnetisch veld wordt de verhouding tusschen den weerstand in normale richting en die in het vlak loodrecht daarop gewijzigd, de aequipotentiaalvlakken worden iets gedraaid, en, wanneer de secundaire electroden niet beide even ver van de zijvlakken verwijderd staan, zal deze draaiing bij een van beide een grooter potentiaalverandering te weeg brengen. Het gevolg is een dissymmetrie, echter een andere dan we gewoonlijk daaronder verstaan. Deze heeft n.l. niets uit te staan met kristalrichting en zou even goed in een amorphe stof kunnen optreden.

De waarnemingen over de weerstandstoename in de richting der magnetische kracht zijn nog te onvolledig om te kunnen beoordeelen, of deze toename ongeveer op dezelfde wijze

---

1) Diss. pag. 74 en volgende.

van de magnetische kracht afhangt als de toename in een vlak loodrecht op de krachtlijnen. Is dit het geval, dan zal de besproken dissymmetrie eveneens diezelfde wet volgen, dat is, bij kleine magneetkrachten evenredig aan de tweede bij grootere nagenoeg evenredig aan de eerste macht van de magneetkracht zijn.

B. Men kan veilig zeggen dat waarnemingen met plaatjes uit geheel homogeen kristallijn bismuth nog nooit zijn verricht, hoewel een plaatje door mij vervaardigd uit een nagenoeg homogeen kristalstuk, toevallig gevonden in een zending bismuth van MERCK, waarschijnlijk bijna aan dezen eisch voldoet. Dit plaatje was echter zoo klein, dat de metingen met het gewone raampje uitgevoerd niet al te nauwkeurig konden uitvallen.

Toch is het gelukt uit waarnemingen bij nagenoeg homogene *zuiltjes* met vrij groote waarschijnlijkheid wetten voor de verschijnselen in kristallijn bismuth af te leiden<sup>1)</sup>.

Vrij eenvoudig zijn deze bij plaatjes die genomen zijn of loodrecht op de hoofdas, of uit een vlak door de hoofdas (bismuth kristalliseert in het hexagonale stelsel).

In het eerste geval zijn ze wat hunne vlakke-richtingen betreft geheel isotroop en geldt hiervoor dus alles wat omtrent de plaatjes uit klasse A is gezegd.

In het tweede geval is de weerstand in de richting der hoofdas reeds buiten het magneetveld grooter dan die in de richting loodrecht daarop. Feitelijk is er dus reeds dissymmetrie in het magneetveld 0, d. w. z. wanneer men de secundaire elektroden volkomen symmetrisch met betrekking

---

1) Zie Hoofdstuk VI.

tot den hoofdstroom aanbrengt, krijgt men een potentiaalverschil tusschen die electroden, zoodra de hoofdas een anderen hoek met de verbindingslijn der primaire electroden maakt dan  $0^{\circ}$  of  $90^{\circ}$ . Practisch zal het bereiken van die volkomen symmetrie wel nooit mogelijk zijn, en men zal de secundaire electroden zoo stellen dat  $S_0$  nul wordt. Hoe men echter ook handelt, in het magnetisch veld nemen alle weerstanden in het vlak van het plaatje in gelijke mate toe, zoodat  $S_0$  ook in diezelfde mate verandert. Na het aftrekken der correctie blijft dan geen dissymmetrie over, hoewel  $K_{11} - K_{22}$  1) tamelijk groot kan zijn.

Het blijkt dus dat de waargenomen dissymmetrie in andere plaatjes ook geen maat behoeft te zijn voor  $(K_{11} - K_{22})$ . We zullen later 2) zien dat men in plaats daarvan bij eerste benadering de dissymmetrie evenredig kan stellen aan  $(K_{11} + K_{22}) \Delta \left( \frac{K_{11} - K_{22}}{K_{11} + K_{22}} \right)$ , waar  $\Delta$  aanduidt de toename van de aangegeven breuk in het magnetisch veld.

Ook hier is geen storing te verwachten die een fout zou geven in den gemeten HALL-coëfficiënt, die evenwel een andere waarde zal hebben dan bij een plaatje  $\perp$  hoofdas. Of misschien bij het draaien van het plaatje in zijn eigen vlak verschillende HALL-coëfficiënten zullen gevonden worden naarmate men dichter bij een symmetrie- dan wel een dissymmetriestand is 3), kan door de voorhanden waarnemingen nog niet uitgemaakt worden.

Ook in deze plaatjes kan de schijnbare dissymmetrie.

1) Zie LEBRET, Diss. pag. 107.

2) Zie Hoofdstuk III § 8.

3) Zie Hoofdstuk IV § 4-7.

besproken onder A, optreden, echter alleen wanneer de stroom niet overal evenwijdig aan de platte zijvlakken loopt.

Meer ingewikkeld wordt het geval wanneer de hoofdas scheef staat ten opzichte van de normaal en dus ook ten opzichte van de magnetische kracht.

Vooreerst is er dan evenals in het vorige geval reeds buiten het magneetveld verschil tusschen den weerstand in twee onderling loodrechte richtingen. De eene richting is de doorsnede van het vlak door normaal en hoofdas met het vlak van het plaatje, de tweede staat daar loodrecht op. In het magneetveld wordt de verhouding der weerstanden nog gewijzigd; na het aanbrengen van de correctie aan  $S_0$  wordt de overblijvende dissymmetrie weer voorgesteld door  $(K_{11} + K_{22}) \Delta \left( \frac{K_{11} - K_{22}}{K_{11} + K_{22}} \right)$ .

Heeft het plaatje een eenigszins aanzienlijke dikte, dan zal thans in ieder geval, ook als de stroom geheel evenwijdig aan het vlak van het plaatje blijft loopen, de stand van de equipotentiaal-vlakken niet meer loodrecht op de zijvlakken blijven, daar de assen van weerstand in de dwarsdoorsnede in 't algemeen niet meer evenwijdig aan en loodrecht op die zijvlakken zijn. Zoodra dan de secundaire electroden niet meer beide symmetrisch ten opzichte van de zijvlakken aangebracht zijn, komt er een fout in de dissymmetrie, die deze versterken of verzwakken kan. Ook voor het gemiddelde verschijnsel van HALL echter zal men dan niet in elken stand van de electroden ten opzichte van de zijvlakken dezelfde waarde vinden, daar waarschijnlijk het potentiaal verval door dit verschijnsel teweeggebracht het sterkst is in een vlak  $\perp$  magnetisatie. De magnetisatie

richting nu valt bij een dergelijk plaatje niet meer samen met de normaal. <sup>1)</sup>

Het is dus wel zaak in dergelijke gevallen met dunne plaatjes te werken. Mocht het echter gewenscht zijn ook dikkere te gebruiken, dan moeten òf de electroden zeer nauwkeurig gesteld worden, òf men moet electroden nemen die de geheele breedte van den rand bedekken.

De besproken dissymmetrie in de dwars-richting zou ook de bepaling der symmetrie-assen storen, daar ze bij een geheelen rondgang slechts *tweemaal* van teeken wisselt; ze is 0 bijv. in den eersten en derden, maximum daarentegen in den tweeden en vierden symmetrie-stand. Het gevolg zou dus kunnen zijn dat we twee *niet onderling loodrechte* symmetrieassen vonden.

C. Het derde geval is aanwezig geweest bij verreweg de meeste proeven die over het verschijnsel van HALL in bismuth genomen zijn, daar deze toestand ontstaat wanneer men de plaatjes giet en geen bijzondere voorzorgen voor de afkoeling neemt. <sup>2)</sup>

Het spreekt van zelf dat men theoretisch niets over de stroomverdeeling in zulk een plaatje kan zeggen, en dat de waarnemingen er mede weinig belang hebben wat hun absolute waarde aangaat. Relatieve metingen kunnen echter van zeer veel waarde zijn; bijv. die van veranderingen der verschijnselen met de temperatuur, daar men als vrij waarschijnlijk kan aannemen, dat de bijdragen der verschillende deelen van het plaatje daarbij nagenoeg evenredig veranderen.

<sup>1)</sup> Zie Hoofdstuk VI § 6.

<sup>2)</sup> Zie bijv. de schets van het vierkante plaatje in Fig. IV, waarin de verschillende velden, door etsen met salpeterzuur zichtbaar gemaakt, zijn aangetekend.

Is de verdeeling der velden niet al te onregelmatig, dan zal men nog kunnen spreken van gemiddelde kristalrichtingen, dus gemiddelde hoofdrichtingen van weerstand enz. Deze zullen in 't algemeen scheef op het plaatje staan, zoodat we in de eerste plaats dezelfde storingen kunnen verwachten als bij de in 't laatste deel van B besproken kristalplaatjes. Bovendien echter kan men nog een speciale invloed verwachten van de velden, die in de onmiddellijke nabijheid der electroden geplaatst zijn. Deze invloed zal het sterkst merkbaar zijn in het gemiddelde HALL-effect, omdat de verschillende HALL-coëfficiënten voor een zelfde stuk bismuth in sommige gevallen een verhouding van meer dan 7 vertoonden. Verschillen in den stand der electroden van onderdeelen van een millimeter kunnen dus waarschijnlijk reeds merkbare veranderingen in het gemiddelde HALL-effect teweegbrengen, en zoo zal ook na een draaien over  $90^{\circ}$  of  $180^{\circ}$  in het vlak van het plaatje een eenigszins ander HALL-effect gevonden worden. Grooter kunnen natuurlijk de verschillen zijn, wanneer men een oneven aantal malen  $45^{\circ}$  draait, daar dan de electroden op geheel andere plaatsen staan. Toch aarzel ik de verschillen tusschen symmetrie- en dissymmetrie-standen <sup>1)</sup> hieraan toe te schrijven omdat niet verklaard is waarom in de meerderheid der gevallen het kleinere HALL-effect in de dissymmetrie-standen werd waargenomen.

Zien we nog even op het voorgaande terug, dan blijkt, dat wanneer de plaatjes dun zijn of de secundaire electroden symmetrisch aangebracht, het HALL-effect altijd volkomen zuiver wordt gemeten, maar dat de meting bij onregel-

<sup>1)</sup> Zie Hoofdstuk IV § 4—7.



matige plaatjes voor verschillende standen toch verschillende uitkomsten kan geven; bij dergelijke plaatjes kan men dus eigenlijk niet van een vasten HALL-coëfficiënt spreken. Verstaan we onder dissymmetrie een *draaien* van de aequipotentialijnen of vlakken, dat *niet* met de magneetkracht van teeken wisselt, dan wordt ook dit verschijnsel in dezelfde gevallen zuiver gemeten.

#### § 6. *Het gieten der plaatjes.*

De meeste door mij vervaardigde plaatjes moesten dienen voor waarnemingen die op de eene of andere wijze in verband stonden met de dissymmetrie van het verschijnsel van HALL. Daar nu reeds van den aanvang af het vermoeden bestond, dat deze dissymmetrie alleen in regelmatig gekristalliseerde plaatjes met een groot bedrag optrad, werd beproefd die regelmatigheid te bevorderen door het afkoelen van het gesmolten bismuth uiterst langzaam te doen plaats hebben. Daartoe werd als volgt te werk gegaan: Een glazen cylinder van ongeveer 4 cM. middellijn en 8 cM. hoogte werd met vischlijm op een vlak glazen plaatje bevestigd en geplaatst in een zandbad, met het vlakke plaatje horizontaal. Om den glazen vorm werd een blikken cylinder gezet die er eenige cM. boven uitstak, en zoolang verhit tot men zeker was dat de temperatuur van den vorm boven het smeltpunt van bismuth ( $264^{\circ}$ ) was gestegen. Tegelijkertijd werd nog een andere hoeveelheid zand sterk verhit. Daarop werd een hoeveelheid van 40—80 gram bismuth in een porceleinen schaalje gesmolten, in den vorm gegoten, deze met een porceleinen deksel gedekt en daarna de ruimte tusschen den glazen en blikken cylinder geheel aangevuld met warm zand, dat ook het deksel be-

dekte. Dan werden de vlammen langzaam verminderd, terwijl men op een thermometer de afkoelingssnelheid waarnam.

Meestal was na de afkoeling het plaatje gemakkelijk uit den vorm te krijgen, daar de beide deelen daarvan na de verhitting heel gemakkelijk van elkaar te scheiden waren. Een enkele maal, na een zeer langdurige verwarming en afkoeling was het bismuth zoo stevig aan het glas bevestigd, dat het er afgezaagd moest worden. Om dit te voorkomen zou het misschien aanbeveling verdienen het glas met een dun laagje olie in te smeren.

De aldus verkregen plaatjes hadden meestal wel tamelijk groote regelmatig gekristalliseerde gedeelten, maar geheel regelmatig werden ze toch niet. Het oorspronkelijke doel, verkrijgen van groote dissymmetrie, is evenwel enkele malen bereikt.

### HOOFDSTUK III.

---

#### Berekening van de potentiaalverdeling in een rond plaatje, waar de weerstand in verschillende richtingen niet de- zelfde is, na het optreden van het verschijnsel van HALL.

§ 1. Bij vele van de waarnemingen, waarover in de volgende Hoofdstukken zal gesproken worden, werden ronde plaatjes gebruikt. Het was nu van belang te weten, of men aan de secundaire electroden het volle HALL-effect meet en in welk verband de waargenomen dissymmetrie staat tot de grootheid  $K_{11} - K_{22}$ , door LEBRET<sup>1)</sup> ter verklaring van de dissymmetrie ingevoerd. Tevens was het wenschelijk de berekening uit te strekken tot de termen van de tweede orde, omdat het HALL-effect in bismuth in sterke velden zoo groot is, dat die termen volstrekt niet zeer klein worden vergeleken met die van de eerste orde (d. i. het HALL-effect zelf.)

Voor deze berekening wordt het plaatje homogeen ondersteld en zoo dun, dat we mogen rekenen dat de stroom overal evenwijdig aan de vlakke-richting loopt. Het is dan voldoende de vergelijkingen voor streaming in twee afmetingen op te stellen.

§ 2. De  $X$ -as<sup>2)</sup> wordt gekozen in de richting van

1) Dissertatie p. 107.

2) Zie fig. V.

grootsten weerstand ( $k_1$ ), de  $Y$ -as in die van kleinsten weerstand ( $k_2$ ). De vergelijkingen die het verband tusschen potentiaalverval en stroomdichtheid uitdrukken, luiden dan wanneer  $p$  den potentiaal voorstelt:

$$\frac{dp}{dx} = -k_1 u - hv \quad \frac{dp}{dy} = hu - k_2 v \quad 1)$$

Hieruit volgt:

$$u = \frac{1}{k_1 k_2 + h^2} \left( -k_2 \frac{dp}{dx} + h \frac{dp}{dy} \right) \quad v = \frac{1}{k_1 k_2 + h^2} \left( -k_1 \frac{dp}{dy} - h \frac{dp}{dx} \right)$$

De voorwaarde van omsamendrukbaarheid,  $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$  geeft:

$$k_2 \frac{d^2 p}{dx^2} + k_1 \frac{d^2 p}{dy^2} = 0$$

Dit schrijven wij in den vorm:

$$\frac{k_2 + k_1}{2} \left( \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} \right) + \frac{k_1 - k_2}{2} \left( \frac{d^2 p}{dy^2} - \frac{d^2 p}{dx^2} \right) = 0$$

of, wanneer we  $\frac{k_2 + k_1}{2} = k$  en  $\frac{k_1 - k_2}{2} = d$  stellen

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} = \frac{d}{k} \left( \frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{d^2 p}{dy^2} \right) \quad (I)$$

Een tweede voorwaarde is deze, dat aan den vrijen rand de stroom in de richting van dien rand moet loopen. Verstaan we onder  $a$  den hoek dien de naar binnen getrokken normaal in een punt van den omtrek met de  $X$ -as maakt, dan wordt deze voorwaarde uitgedrukt door:

$$u \cos a + v \sin a = 0.$$

Zijn  $x$  en  $y$  de coördinaten van een punt aan den omtrek, en  $s$  de straal van het plaatje, dan kunnen we hiervoor schrijven

1) Daar in de vergelijkingen nooit een andere  $K$  voorkomt dan  $K_{11}$  of  $K_{22}$ , achtte ik het onnoodig de dubbele indices te behouden.

$$\begin{aligned}
 u \frac{x}{s} + v \frac{y}{s} &= 0, \text{ dus} \\
 - (k_2 x + h y) \frac{d p}{d x} + (h x - k_1 y) \frac{d p}{d y} &= 0, \text{ of} \\
 - \frac{k_2 + k_1}{2} \left( x \frac{d p}{d x} + y \frac{d p}{d y} \right) + \frac{d p}{d x} \left( \frac{k_1 - k_2}{2} x - h y \right) \\
 + \frac{d p}{d y} \left( - \frac{k_1 - k_2}{2} y + h x \right) &= 0
 \end{aligned}$$

waarvoor we ook kunnen schrijven

$$x \frac{d p}{d x} + y \frac{d p}{d y} + \frac{d p}{d x} \frac{1}{k} (-dx + hy) + \frac{d p}{d y} \frac{1}{k} (-hx + dy) = 0 \quad (\text{II})$$

Aan deze vergelijking wordt alleen voldaan wanneer  $x^2 + y^2 = s^2$ .

Een derde voorwaarde wordt gegeven door de grensvoorwaarde aan de electroden waar de stroom in en uit het plaatje gaat. Deze voorwaarde zal in een practisch geval meestal moeilijk in behoorlijken vorm opgesteld kunnen worden. We kunnen ons echter voorstellen dat we aan die electroden den vorm geven van een equipotentiaallijn, behoorende bij een oplossing die aan I en II voldoet; in dat geval wordt de voorwaarde eenvoudig, dat de potentiaal aan de electroden gegeven *constante* waarden aanneemt.

§ 3. Als eerste benadering zoeken we een oplossing die voldoet aan de vergelijkingen I en II, wanneer we daaruit alle termen met  $\frac{d}{k}$  en  $\frac{h}{k}$  weglaten <sup>1)</sup>; dit zal natuurlijk alleen tot het doel leiden, wanneer beide breuken tamelijk klein zijn.

Men kan daarvoor nemen de bekende uitdrukking:

$$p = C \log \frac{r_2}{r_1}$$

<sup>1)</sup> De hier gevolgde methode is ontleend aan een oplossing van hetzelfde vraagstuk door den heer J. WEEDER, phil. doct., waarin de termen van de eerste orde zijn berekend.

waarin  $\log$  de natuurlijke logaritmie voorstelt en  $r_1$  en  $r_2$  de afstanden zijn van een willekeurig punt  $Z$  tot twee diametraal tegenover elkaar gelegen randpunten  $P$  en  $Q$  <sup>1)</sup> De stroomlijnen zijn hier cirkelbogen door  $P$  en  $Q$ , de aequipotentiaallijnen cirkels, die den rand van het plaatje evenals alle overige stroomlijnen rechthoekig snijden. Als electroden moeten hierbij gedacht worden twee kleine cirkelbogen bij  $P$  en  $Q$ . Onderstellen we voor 't gemak dat deze de potentialen  $+\frac{1}{2}$  en  $-\frac{1}{2}$  hebben, dan wordt

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{QR}{PR}} = \frac{1}{2 \log a}$$

Worden de cirkelbogen om  $P$  en  $Q$  kleiner, dan naderen we tot het geval van de strooming in een rond bismuthplaatje, buiten het magneetveld, tusschen twee puntvormige electroden, wanneer de weerstand in alle richtingen dezelfde is.

§ 4. Ter bepaling van de termen van de *eerste* orde handelen we als volgt: We substitueeren den verkregen eersten term van den potentiaal, dien we  $p_1$  zullen noemen, in de *volledige* vergelijkingen I en II. Daarop zoeken we een functie  $p_2$ , zoodat

$$\frac{d^2 p_2}{dx^2} + \frac{d^2 p_2}{dy^2} = \frac{d^2 p_1}{dx^2} - \frac{d^2 p_1}{dy^2}$$

De oplossing  $p_1 + \frac{d}{k} p_2$  voldoet dan aan I op termen van de orde  $\frac{d^2}{k^2}$  na. Substitueeren we dezen vorm in II, dan wordt het eerste lid niet 0, maar

<sup>1)</sup> Zie fig. V.

$$\frac{d}{k} \left( x \frac{dp_2}{dx} + y \frac{dp_2}{dy} \right) + \frac{dp_1}{dx} \frac{1}{k} (-dx + hy) + \frac{dp_1}{dy} \frac{1}{k} (-hx + dy) = F$$

nauwkeurig tot de eerste orde.

Nu zoeken we nog een functie  $p_3$ , zoo dat

$$\frac{d^2 p_3}{dx^2} + \frac{d^2 p_3}{dy^2} = 0 \text{ en}$$

$$\frac{d}{k} \left( x \frac{dp_3}{dx} + y \frac{dp_3}{dy} \right) = -F$$

dan voldoet  $p_1 + \frac{d}{k} (p_2 + p_3)$  nog aan I, en thans ook

aan II, altijd tot op termen van de orde  $\frac{d^2}{k^2}$  na.

Voor de uitvoering der substituties is het gemakkelijk,  $p_1$  te splitsen in  $C \log r_2 - C \log r_1$ . Voorloopig houden we ons alleen met den eersten term bezig, waarvan we de  $C$  weglaten. Het blijkt voordeelig te zijn, al de verschillende grootheden ten slotte uit te drukken in  $r$  en  $\theta$ , de waarden aan den rand van het plaatje in  $\theta$  alleen.

Daartoe dienen b. v. de substituties

$$x = r_2 \cos \theta_2 + x_2 = r_2 \cos \theta_2 + s \cos \alpha$$

$$y = r_2 \sin \theta_2 + y_2 = r_2 \sin \theta_2 + s \sin \alpha$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{dr}{dx} = \cos \theta \quad \frac{dr}{dy} = \sin \theta$$

terwijl voor punten aan den rand van het plaatje

$$r = -2x_2 \cos \theta_2 - 2y_2 \sin \theta_2$$

In 't vervolg laten we deze indices 2 weg. Waar het noodig is zullen we de loopende coördinaten ter onderscheiding door  $x$  en  $y$  voorstellen.

De substitutie van  $\log r$  in I geeft

$$\frac{d^2 p_2}{d x^2} + \frac{d p_2}{d y^2} = -2 \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

Hieraan voldoet  $p_2 = \frac{1}{2} \cos 2\theta$ .

In II moet dus gesubstitueerd worden  $\log r + \frac{1}{2} \frac{d}{k} \cos 2\theta$ .

We vinden dan:

$$F = \frac{d}{k} \left( -\cos 2\theta + \frac{1}{r} (y \sin \theta - x \cos \theta) \right) \\ + \frac{h}{k} (-x \sin \theta + y \cos \theta) + \frac{d}{k} \sin 2\theta \frac{1}{r} (x \sin \theta - y \cos \theta)$$

Om alles in  $\cos \theta$  en  $\sin \theta$  te kunnen uitdrukken moet met  $r$  vermenigvuldigd worden

$$-r F = \frac{d}{k} \left\{ -2x \cos^3 \theta + 2y \sin^3 \theta - \cos \theta (-x + \frac{h}{d} y) \right. \\ \left. + \sin \theta (-y + \frac{h}{d} x) \right\}$$

Voor  $p_3$  beproeven we  $A r \cos \theta + B r \sin \theta + C \log r + D \theta$

een functie die aan de vergelijking  $\frac{d^2 p_3}{d x^2} + \frac{d^2 p_3}{d y^2} = 0$  voldoet.

We vinden dan

$$r \left( x \frac{d p_3}{d x} + y \frac{d p_3}{d y} \right) = \cos^3 \theta (4 A (x^2 - y^2) - 4 B (2 x y) \\ + \sin^3 \theta (-4 A (2 x y) - 4 B (x^2 - y^2) \\ + \cos \theta (2 A (-x^2 + 2 y^2) + 6 B x y - C x + D y) \\ + \sin \theta (6 A x y + 2 B (-y + 2^2 x^2) - C y - D x)$$

Ter bepaling van  $A$  en  $B$  hebben we dus

$$2 A (x^2 - y^2) - 2 B (2 x y) = -x \\ -2 A (2 x y) - 2 B (x^2 - y^2) = +y$$

$$A = -\frac{x}{2(x^2 + y^2)} \quad B = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$$



Deze waarden substitueeren we in de coëfficiënten van  $\cos \theta$  en  $\sin \theta$  en vinden dan voor C en D

$$- C x + D y = - \frac{h}{d} y$$

$$+ C x + D y = - \frac{h}{d} x$$

$$C = 0 \qquad D = - \frac{h}{d}$$

Zoodat de uitkomst is

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{r}{2(x^2 + y^2)} (-x \cos \theta + y \sin \theta) - \frac{h}{d} \theta \\ &= - \frac{r}{2s} \cos(\alpha + \theta) - \frac{h}{d} \theta \end{aligned}$$

Op het gedeelte dat  $- C \log r_1$  levert komen we later terug.

§ 5. Op dezelfde wijze gaan we voort ter bepaling van de termen van de tweede orde. Daartoe zouden we moeten beginnen met  $p_2 + p_3$  in het tweede lid van I te substitueeren. Om evenwel de formules niet al te lang te maken, bepalen we de termen van de tweede orde in twee gedeelten, en zoeken eerst de termen, die wij zouden hebben als de eenige term van de eerste orde  $-\frac{h}{d} \frac{d}{k} \theta$  was, later

de termen behoorende bij  $\frac{d}{k} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{r}{2s} \cos(\alpha + \theta) \right)$

a. Termen van de tweede orde, behoorende bij  $-\frac{h}{k} \theta$

Substitutie in I

$$\frac{d^2 p_4}{d x^2} + \frac{d^2 p_4}{d y^2} = - \frac{2 h \sin 2 \theta}{d r^2}$$

$$p_4 = \frac{1}{2} \frac{h}{d} \sin 2 \theta$$

$$F = \frac{d}{k} \left( x \frac{d p_4}{d x} + y \frac{d p_4}{d y} \right) - \frac{h}{d} \left( \frac{d \theta}{d x} \frac{1}{k} (-dx + hy) + \frac{d \theta}{d y} \frac{1}{k} (-hx + dy) \right)$$

$$-rF = \frac{h}{k} \left\{ \cos^3 \theta (2y) + \sin^3 \theta (2x) + \cos \theta \left(-2y + \frac{h}{d}x\right) + \sin \theta \left(-2x + \frac{h}{d}y\right) \right\}$$

In  $r \frac{d}{k} \left( x \frac{d p_5}{d x} + y \frac{d p_5}{d y} \right)$  substitueeren we

$$p_5 = \frac{h}{d} (E r \cos \theta + F r \sin \theta + G \log r + H \theta)$$

waarvan het resultaat is

$$\frac{h}{k} \left\{ \begin{aligned} &\cos^3 \theta (4 E (x^2 - y^2) - 4 F (2 x y)) \\ &+ \sin^3 \theta (-4 E (2 x y) - 4 F (x^2 - y^2)) \\ &+ \cos \theta (-2 E (x^2 - 2y^2) + 6 F x y - G x + H y) \\ &+ \sin \theta (6 E x y - 2 F (y^2 - 2x^2) - G y - H x) \end{aligned} \right\}$$

De coëfficiënten van  $\cos^3 \theta$  en  $\sin^3 \theta$  gelijkstellend vinden we

$$2 E (x^2 - y^2) - 2 F (2 x y) = y$$

$$2 E (2 x y) + 2 F (x^2 - y^2) = -x$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad F = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Dientengevolge worden de vergelijkingen voor G en H:

$$-G x + H y = +\frac{h}{d} x$$

$$G y + H x = -\frac{h}{d} y$$

$$G = -\frac{h}{d} \quad H = 0$$

$$\text{dus } p_5 = -\frac{h}{d} \left[ \frac{r}{2(x^2 + y^2)} (y \cos \theta + x \sin \theta) + \frac{h}{d} \log r \right]$$

$$= -\frac{h}{d} \left[ \frac{r}{2s} \sin(\alpha + \theta) + \frac{h}{d} \log r \right]$$

b. Termen van de tweede orde behoorende bij

$$\frac{d}{k} \left( \frac{1}{2} \cos 2 \theta - \frac{r}{2s} \cos(\alpha + \theta) \right)$$

Substitutie in I

$$\frac{d^2 p_6}{d x^2} + \frac{d^2 p_6}{d y^2} = 2 \frac{\cos 4 \theta}{r^2}$$

$$p_6 = -\frac{1}{8} \cos 4 \theta$$

In den eersten term van F wordt  $p_6$  gesubstitueerd, in den tweeden en derden  $\left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{r}{2s} \cos(\alpha + \theta)\right)$ . Het resultaat, vermenigvuldigd met  $-r$  en geordend naar machten van  $\cos \theta$  en  $\sin \theta$  is:

$$\frac{d}{k} \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta (4x) \\ &+ \sin^5 \theta (4y) \\ &+ \cos^3 \theta (-6x + 8x \sin^2 \alpha - 4y \frac{h}{d}) \\ &+ \sin^3 \theta (-6y + 8y \cos^2 \alpha - 4x \frac{h}{d}) \\ &+ \cos \theta (x(1 - 6 \sin^2 \alpha) + 4y \frac{h}{d}) \\ &+ \sin \theta (y(1 - 6 \cos^2 \alpha) + 4x \frac{h}{d}) \end{aligned} \right\}$$

Als functie die voldoet aan de vergelijking  $\frac{d^2 p_7}{d x^2} + \frac{d^2 p_7}{d y^2} = 0$

beproeven we hier

$$p_7 = K r^2 \cos 2\theta + L r^2 \sin 2\theta + M r \cos \theta + N r \sin \theta + O \log r + P \theta$$

De substitutie in  $r \frac{d}{k} (x \frac{d p_7}{d x} + y \frac{d p_7}{d y})$  levert

$$\frac{d}{k} \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta (-32 K x^3 + 96 K x y^2 + 96 L x^2 y - 32 L y^3) \\ &+ \sin^5 \theta (+32 K y^3 - 96 K x y^2 + 96 L x^2 y - 32 L x^3) \\ &+ \cos^3 \theta (+24 K x^3 - 136 K x y^2 - 104 L x y^2 + 56 L y^3 - \\ &\quad + 4 M x^2 - 8 N x y - 4 N y^2) \\ &+ \sin^3 \theta (-24 K y^3 + 136 K x y^2 - 104 L x^2 y + 56 L x^3 - \\ &\quad - 8 M x y - 4 N x^2 + 4 M y^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \theta (40 K x y^2 + 16 L x^2 y - 24 L y^3 + 4 M y^2 - 2 M x^2 + \\
 & \quad + 6 N x y - O x + P y) \\
 & + \sin \theta (-40 K x^2 y + 16 L x y^2 - 24 L x^3 + 4 N x^2 - 2 N y^2 + \\
 & \quad + 6 M x y - O y - P x)
 \end{aligned}$$

Ter oplossing van K en L vinden we dus

$$x = 4 K (6 x y^2 - 2 x^3) + 4 L (6 x^2 y - 2 y^3)$$

$$y = -4 K (6 x^2 y - 2 y^3) + 4 L (6 x y^2 - 2 x^3)$$

$$K = \frac{1}{8} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad L = \frac{1}{8} \frac{2 x y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Gebruik makende van deze waarden kunnen we voor M en N afleiden:

$$4 M (x^2 - y^2) - 8 N x y = -3 x + 8 x \sin^2 \alpha - 4 y \frac{h}{d}$$

$$-8 M x y - 4 N (x^2 - y^2) = -3 y + 8 y \cos^2 \alpha - 4 x \frac{h}{d}$$

$$M = \frac{1}{4s^2} \left\{ x (4 \sin^2 \alpha - 3) + 4 y \frac{h}{d} \right\} \quad N = \frac{1}{4s^2} \left\{ y (4 \cos^2 \alpha - 3) + 4 x \frac{h}{d} \right\}$$

De vergelijkingen voor O en P worden nu

$$-O x + P y = -\frac{1}{2} x$$

$$-O y - P x = -\frac{1}{2} y$$

$$O = \frac{1}{2} \quad P = 0$$

Schrijven we voor x en y hunne waarden  $s \cos \alpha$  en  $s \sin \alpha$  dan wordt  $p_7$

$$\begin{aligned}
 p_7 = & -\frac{r^2}{8s^2} \cos (2\alpha + 2\theta) + \frac{r}{2s} \sin 2\alpha \sin (\alpha + \theta) - \\
 & -\frac{3r}{4s} \cos (\theta - \alpha) + \frac{hr}{ds} \sin (\alpha + \theta) + \frac{1}{2} \log r
 \end{aligned}$$

De volledige potentiaal is nu

$$p = p_1 + \frac{d}{k} (p_2 + p_3) + \frac{d^2}{k^2} (p_4 + p_5 + p_6 + p_7)$$

§ 6. Gaan we nu na, wat we op dezelfde wijze zullen vinden, uitgaande van den term  $-C \log r_1$ , dan blijkt, dat alle berekeningen daarbij precies hetzelfde verloop hebben; alleen moeten we de teekens omkeeren en overal  $x_2$  en  $y_2$  vervangen door  $x_1$  en  $y_1$ , hetgeen hierop neerkomt dat in plaats van  $\alpha$  moet genomen worden  $\alpha + 180^\circ$ . Indien we dit in 't oog houden, kunnen we den volledige potentiaal als een verschil van twee reeksen schrijven, als volgt:

$$p = C \left\{ \log r + \frac{d}{k} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{r}{2s} \cos (\theta + \alpha) - \frac{h}{k} \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{dh}{k^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \frac{r}{2s} \sin (\alpha + \theta) - \frac{h^2}{k^2} \log r \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d^2}{k^2} \left( -\frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{r^2}{8s^2} \cos (2\alpha + 2\theta) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r}{2s} \sin 2\alpha \sin (\alpha + \theta) - \frac{3r}{4s} \cos (\theta - \alpha) + \frac{1}{2} \log r \right\} \frac{Q}{P}$$

Daar P en Q ondersteld worden aan de uiteinden van een zelfde middellijn te liggen, kunnen we dit vrij gemakkelijk als enkele reeks schrijven. Noemen we 1)  $\angle P Z Q$   $\eta$ ,  $\angle Z P Q$  en  $\angle Z Q P$  resp.  $q_1$  en  $q_2$ , OZ  $\rho$  en  $\angle Z O X$   $\beta$ , dan vinden we

$$p = C \left\{ \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{d}{k} \left( \sin \eta \sin (2\alpha + q_1 - q_2) - \frac{\rho}{s} \cos (\beta + 2\alpha) \right) - \frac{h}{k} \eta \right. \\ \left. - \frac{dh}{k^2} \left( \sin \eta \cos (2\alpha + q_1 - q_2) - \frac{\rho}{s} \sin (\beta + 2\alpha) \right) - \frac{h^2}{k^2} \log \frac{r_2}{r_1} \right. \\ \left. + \frac{d^2}{k^2} \left( \frac{1}{4} \sin 2\eta \sin (4\alpha + 2(q_1 - q_2)) - \frac{r_2^2}{8s^2} \cos (2\alpha + 2\theta_2) \right) \right. \\ \left. + \frac{r_2^2}{8s^2} \cos (2\alpha + 2\theta_1) + \frac{\rho}{s} \sin 2\alpha \sin (\beta + 2\alpha) - \frac{3\rho}{2s} \cos \beta + \frac{1}{2} \log \frac{r_2}{r_1} \right\}$$

1) Zie fig. V.

Hieruit volgt voor het potentiaalverschil tusschen de einden van de middellijn loodrecht op P Q

$$P_A - P_B = C \left( 4 \frac{d}{k} \sin 2\alpha + \frac{h}{k} \pi \right)$$

Voor datzelfde verschil tusschen B en een punt C, op een boogafstand  $\varepsilon$  rechts van A gelegen, wanneer  $\varepsilon$  klein is en alleen grootheden van de tweede orde worden behouden

$$P_C - P_B = C \left( -\varepsilon + \frac{d}{k} (4 \sin 2\alpha - 2 \varepsilon \cos 2\alpha) + \frac{h}{k} \pi \right)$$

§ 7. Om nu de aan het begin van dit Hoofdstuk gestelde vragen te beantwoorden moeten we ook nog nagaan, hoe groot bij hetzelfde potentiaalverschil tusschen de primaire electroden de totale stroom door het plaatje is. Immers bij de proeven wordt niet het potentiaalverschil aan de primaire electroden, maar de hoofdstroom als maat van het HALL-effect enz. gebezigd. Wenschen we ten slotte het potentiaalverschil aan de secundaire electroden nauwkeurig tot de tweede orde te kennen, dan is het voldoende de berekening van den hoofdstroom nauwkeurig tot de eerste orde te verrichten. Daartoe berekenen we de integralen

$$\int_B^A u \, dy - \int_B^A v \, dx$$

voorstellende den stroom per eenheid van dikte door het vlak A B gaande.

De vereenvoudigde waarden van  $u$  en  $v$  zijn:

$$u = \frac{1}{k^2} \left( -k_2 \frac{dp}{dx} + h \frac{dp}{dy} \right) \quad v = \frac{1}{k^2} \left( -k_1 \frac{dp}{dy} - h \frac{dp}{dx} \right)$$

Wanneer we nu bedenken dat, voor punten op AB, waar  $r_1 = r_2$  en  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

$$\frac{dr_1}{dx} = - \left( \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dx} \right) = - \frac{2}{r_1} \sin \alpha \cos \varphi_1$$

$$\frac{dr_1}{dy} = - \left( \frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi_2}{dy} \right) = - \frac{2}{r_1} \cos \alpha \cos \varphi_1$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\varphi_2}{dx} = - \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \alpha}{r_1}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{d\varphi_2}{dy} = - \frac{2 \sin \varphi_1 \sin \alpha}{r_1}$$

dan vinden we

$$\frac{dp}{dx} = C \left\{ - \frac{2s \cos \alpha}{s^2 + \rho^2} - \frac{2d}{kr_1} (\sin \alpha \sin 2\alpha \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \cos \alpha \cos 2\alpha \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1) - \frac{2h}{kr_1} \sin \alpha \cos \varphi_1 - \frac{d}{ks} \cos \alpha \right\}$$

$$\frac{dp}{dy} = C \left\{ - \frac{2s \sin \alpha}{s^2 + \rho^2} - \frac{2d}{kr_1} (-\cos \alpha \sin 2\alpha \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \sin \alpha \cos 2\alpha \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1) + \frac{2h}{kr_1} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \frac{d}{ks} \sin \alpha \right\}$$

Bij de substitutie in u en v kan men voor den term met h volstaan met den den eersten term van  $\frac{dp}{dx}$  en  $\frac{dp}{dy}$ .

Bepaald moet dus worden

$$\int_B^A u dy = \frac{C}{k^2} \int_B^A \left[ k_2 \frac{2s \cos \alpha}{s^2 + \rho^2} + \frac{2d}{r_1} \sin \alpha \sin 2\alpha \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \cos \alpha \cos 2\alpha \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1 + \frac{2h}{r_1} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \frac{d}{s} \cos \alpha + \frac{2d s \sin \alpha}{s^2 + \rho^2} \right] dy$$

$$\begin{aligned}
 - \int_B^A v \, dx &= - \frac{C}{k^2} \int_B^A \left[ k_1 \frac{2s \sin \alpha}{s^2 + \rho^2} \right. \\
 &+ \frac{2d}{r_1} (-\cos \alpha \sin 2\alpha \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \sin \alpha \cos 2\alpha \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1) \\
 &\left. - \frac{2h}{r_1} \cos \alpha \cos \varphi_1 - \frac{d}{s} \sin \alpha - \frac{2d s \cos \alpha}{s^2 + \rho^2} \right] dx.
 \end{aligned}$$

Hierin moet nu nog  $dx$  vervangen worden door  $-d\rho \sin \alpha$  en  $dy$  door  $+d\rho \cos \alpha$ . Telt men dan de vergelijkingen op dan valt een groot deel weg en we houden over

$$\begin{aligned}
 \frac{I}{\delta} &= - \frac{C}{k^2} \left[ - (k - d \cos 2\alpha) \int_{-s}^{+s} \frac{2s \, d\rho}{s^2 + \rho^2} - \right. \\
 &2d \cos 2\alpha \int_{-s}^{+s} \frac{\sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1 \, d\rho}{r_1} - \frac{d}{s} \cos 2\alpha \int_{-s}^{+s} d\rho \left. \right] \\
 &= \frac{C}{k^2} \left[ \pi (k - d \cos 2\alpha) + 2d \cos 2\alpha \left( -1 + \frac{\pi}{2} \right) + 2d \cos 2\alpha \right] = \frac{C\pi}{k}
 \end{aligned}$$

( $\delta$  is de dikte van het plaatje).

De totale weerstand van het plaatje is dus, tot op termen van de tweede orde na, onafhankelijk van den stand der primaire electroden ten opzichte van de weerstandsassen.

Dit is nu de stroom per eenheid van dikte in een rond plaatje tusschen twee nagenoeg half-cirkelvormige electroden met potentiaal verschil 1;  $C$  is dan  $\frac{1}{2 \log a}$  (zie p. 34)

De werkelijke toestand wijkt eenigszins hiervan af; doch de afwijking zal niet groot zijn. Men zou tot den werkelijken toestand komen door thans nog eens de stroomverdeling in het plaatje te bepalen, die ontstaat wanneer aan de denk-



beeldige cirkelvormige electroden een potentiaalverdeling bestond, gelijk aan het verschil tusschen de constante waarde  $\frac{1}{2}$  en den werkelijken potentiaal. Deze tweede stroomverdeling zou echter alleen in de onmiddellijke nabijheid der electroden merkbare potentialen teweegbrengen, omdat de som der verschillen aan ieder der electroden nagenoeg nul moet zijn. Daar nu de werkelijke toestand toch niet nauwkeurig mathematisch kan worden beschreven, zullen we van de verschillen afzien en ons aan de oplossing van het denkbeeldige geval houden.

§ 8. We zullen nu vooreerst nagaan wat we moeten waarnemen wanneer de secundaire electroden juist in A en B zijn aangebracht.

We vinden dan buiten het magneetveld een potentiaalverschil  $(p_A - p_B)_0 = 4C \left(\frac{d}{k}\right) \sin 2\alpha$

In het magneetveld wordt dit

voor de eene richting van het magneetveld  $C \left( 4 \left(\frac{d}{k}\right)_M \sin 2\alpha + \frac{h}{k} \pi \right)$

„ „ andere „ „ „ „ „  $C \left( 4 \left(\frac{d}{k}\right)_M \sin 2\alpha - \frac{h}{k} \pi \right)$

Deze potentiaalverschillen moeten nu nog gedeeld worden door den hoofdstroom om een maat voor het HALL-effect op te leveren. We vinden dus

Eerste richting magneetveld  $\left( \frac{4}{\pi} d \sin 2\alpha + h \right) \frac{1}{\delta}$

Tweede „ „ „  $\left( \frac{4}{\pi} d \sin 2\alpha - h \right) \frac{1}{\delta}$

Hieruit zien we vooreerst dat we meten het volle HALL-effect, daar de gemiddelde waarde van het potentiaal ver-

schil (indien we dat bij verschillende richtingen van het magneetveld ook in verschillenden zin positief rekenen) eenvoudig gelijk wordt aan  $\frac{h}{d}$ .

Voor isotrope plaatjes van willekeurigen vorm was dit reeds experimenteel <sup>1)</sup> en theoretisch <sup>2)</sup> gevonden; het laatste echter slechts nauwkeurig tot de eerste orde.

De schijnbare dissymmetrie is  $\frac{8}{\pi} \frac{d_M}{\delta} \sin 2\alpha$

Er was echter reeds buiten het magneetveld een potentiaalverschil. Deelen we dat door  $C \frac{\pi}{k} \delta$  dan vinden we als maat van  $S_0$  <sup>3)</sup>  $\frac{4}{\pi} \frac{d_0}{\delta} \sin 2\alpha$ .

Volgens onze methode wordt dit nu vermenigvuldigd met  $\frac{k_M}{k_0}$  en dan het dubbel ervan afgetrokken van de schijnbare dissymmetrie. Wat wij dan als ware dissymmetrie beschouwen is dus evenredig aan

$$\begin{aligned} & \frac{8}{\pi \delta} \sin 2\alpha \left( d_M - d_0 \frac{k_M}{k_0} \right) \\ &= \frac{8}{\pi \delta} \sin 2\alpha k_M \left( \frac{d_M}{k_M} - \frac{d_0}{k_0} \right) = \frac{8}{\pi \delta} \sin 2\alpha k_M \Delta \left( \frac{d}{k} \right) \end{aligned}$$

In een onbegrensd vlak plaatje zouden we in een richting loodrecht op den stroom (overal in dezelfde richting gedacht) waarnemen een dissymmetrie evenredig aan

$$\frac{2}{\delta} \sin 2\alpha k_M \Delta \left( \frac{d}{k} \right)$$

1) VON ETTINGSHAUSEN en NERNST, Wien. Sitz. Ber. 94, p. 568, 1887,

2) BOLTZMANN, Wien. Sitz. Ber. 94, p. 808, 1887.

3) Zie p. 18.

In het ronde plaatje nemen we dus waar een  $\frac{4}{\pi} \times$  grootere dissymmetrie.

Verder wenschen we nog te onderzoeken, wat we moeten vinden wanneer we een der secundaire electroden zoo ver verschuiven dat  $S_0$  nul wordt. Het eenvoudigst wordt deze vraag wanneer  $\alpha = 45^\circ$  of een oneven veelvoud daarvan. Dan is

$$p_C - p_B = C \left( \varepsilon \pm 4 \frac{d}{k} + \frac{h}{k} \pi \right)$$

Het HALL-effect zelf wordt weer in volle grootte gemeten. Zal buiten het magneetveld  $p_C - p_B = 0$  zijn, dan moet

$$E = \pm 4 \frac{d_0}{k_0}$$

Deelen we door  $\frac{C\pi}{k_M} \delta$ , dan vinden we in het magnetisch veld:

$$\text{Voor de eene richting } \frac{1}{\delta} \left( \mp \frac{4}{\pi} d_0 \frac{k_M}{k_0} \pm \frac{4}{\pi} d_M + h \right)$$

$$\text{Voor de andere richting } \frac{1}{\delta} \left( \mp \frac{4}{\pi} d_0 \frac{k_M}{k_0} \pm \frac{4}{\pi} d_M - h \right)$$

zoodat ook thans de waargenomen dissymmetrie evenredig is aan  $\frac{1}{j} k_M \Delta \left( \frac{d}{k} \right)$

Ten slotte merken we op, dat volgens deze berekening het gemiddelde HALL-effect in alle standen van het plaatje volkomen hetzelfde zou moeten zijn.

## HOOFDSTUK IV.

---

### Waarnemingen over het gemiddeld verschijnsel van HALL bij vlakke plaatjes, in verschillende standen ten opzichte van de electroden.

§ 1. Bij waarnemingen ter bepaling eener as van symmetrie in een rond bismuthplaatje is het onvermijdelijk, waar te nemen bij verschillende standen van het plaatje ten opzichte van de electroden. Onwillekeurig let men daarbij meer op de waarde der dissymmetrie in die verschillende standen dan op de waarden van het gemiddelde HALL-effect. Toen ik echter bij eenige van de gebezigde plaatjes deze laatste waarden vergeleek, bleek het mij, dat tamelijk algemeen de waarden van het gemiddelde HALL-effect in de symmetrie-standen anders waren dan die in de dissymmetrie-standen. (Onder symmetrie-standen worden verstaan die standen, waarbij een symmetrie-as samenvalt met de verbindingslijn der primaire-electroden; onder dissymmetrie-standen, de standen midden tusschen de andere). Bij het onderzoek naar de vraag, of die verschillen tusschen alle symmetrie- en dissymmetrie-standen voorkwamen, bleek nu tevens, dat ook de symmetrie standen onderling verschilden; evenzoo de dissymmetrie-standen.<sup>1)</sup> Als voorbeeld geven we hier de waarden verkregen bij de ronde plaatjes

---

<sup>1)</sup> Reeds medegedeeld in Zittingsverslag der Kon. Ak. v. Wet. van 30 Mei 1896, pag. 49.

N<sup>o</sup>. 2 en N<sup>o</sup>. 3 in de 8 hoofdstanden; de oneven nummers zijn dissymmetrie-standen.

Rond plaatje N <sup>o</sup> . 2								M <sup>1)</sup> = 8600 c. g. s.
Stand 1	2	3	4	5	6	7	8	
S <sup>2)</sup>	9,89;	11,30;	10,12;	12,39;	11,16 <sup>s</sup> ;	12,96;	11,35;	11,36.
Gemiddelde van 1, 3, 5 en 7	10,63			Grootste verschil	1,46			
"	"	2, 4, 6 en 8	12,00	"	"	1,66		

Rond plaatje N <sup>o</sup> . 3								M = 8500 c. g. s.
S.	40,88;	50,70;	40,40;	44,55;	36,10;	47,27;	37,97 <sup>s</sup> ;	51,40
Gemiddelde van 1, 3, 5, 7	38,84			Grootste verschil	4,78			
"	"	2, 4, 6, 8	48,48	"	"	6,85		

M. = 5450 c. g. s.

S.	28,80;	33,93;	25,74;	31,23;	25,83;	33,12;	29,34;	35,82
Gemiddelde van 1, 3, 5, 7	27,43			Grootste verschil	3,60			
"	"	2, 4, 6, 8	33,52 <sup>s</sup>	"	"	4,59		

Zooals men ziet, zijn bij N<sup>o</sup>. 2 de verschillen tusschen standen van een zelfde soort onderling nog grooter dan dat tusschen de beide middelwaarden, terwijl ze bij N<sup>o</sup>. 3 ongeveer tot de helft van dat verschil klimmen.

§ 2. Met de theorie zoover als die door LEBRET ontwikkeld was, waren deze verschillen niet te verklaren. Er bleven nu verschillende mogelijkheden over.

1<sup>o</sup>. De verschillen konden veroorzaakt zijn door waarnemingsfouten en onregelmatigheden in de plaatjes.

2<sup>o</sup>. Het was mogelijk dat in de uitdrukking voor het potentiaalverschil aan de secundaire electroden van een rond, anisotroop plaatje, termen voorkwamen, hetzij van de eerste, hetzij van de tweede orde, die aanleiding konden geven tot de waargenomen verschillen.

<sup>1)</sup> Magnetische kracht.

<sup>2)</sup> Gemiddelde secundaire of HALL-stroom.

3<sup>o</sup>. Het was mogelijk, dat men te doen had met een nieuw verschijnsel.

Het laatste zal men natuurlijk niet aannemen, zoolang er nog kans is de verschillen op de eerste of tweede wijze te verklaren.

We weten thans, dat het als 2<sup>o</sup> uitgesproken vermoeden niet gegrond was (zie het vorige Hoofdstuk), terwijl reeds in Hoofdstuk II is besproken, dat de verschillen volgens 1<sup>o</sup> stellig voorhanden geweest zijn en, althans wat de verschillen bijv. tusschen symmetrie standen onderling aangaat, waarschijnlijk ook in voldoende mate.

Beide resultaten zijn echter eerst later verkregen, nadat de onderzoekingen over het karakter der verschillen, die we thans zullen beschrijven, waren afgelopen.

§ 3. In de eerste plaats zijn met een aantal *vierkante* plaatjes waarnemingen gedaan in 4 verschillende standen, soms ook herhaald na verwisseling van voor en achtervlak. Een gedeelte van de resultaten wordt vanzelf medegedeeld bij het onderzoek naar het verschil tusschen symmetrie- en dissymmetriestanden; hier vermelden we dus alleen de waarnemingen, opzettelijk voor de verschillen tusschen gelijksoortige standen genomen.

Vierkant plaatje IV. Symmetrie-as volgens diagonaal.

Stand	1	2	3	4
M = 5200 c. g. s.	7,90(5)	7,98(1)	9,12(2)	8,48(1)
Grootste afwijking	0,28		0,25	

Vierkant plaatje V. Symmetrie-as evenwijdig aan de zijde.

Stand	1	2	3	4	1a	2a	3a	4a
M = 4400	8,39	8,50	9,08	8,58	8,84	9,00	9,11	8,49
	(3)	(3)	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)	(2)
Gr. afw.	0,03	0,05	0,12	0,08	0,15	0,00	0,22	0,03

De getallen tusschen haakjes geven aan het aantal waar-

nemingen op verschillende tijden in een zelfden stand gedaan.

De standen 1a, 2a enz zijn ontstaan uit 1, 2 enz. door verwisselen van voor- en achtervlak, waarbij de plaatjes om een verticale as gedraaid werden.

De verschillen tusschen de waarnemingen in denzelfden stand zijn slechts klein. De veel grooter verschillen tusschen de gemiddelden in de verschillende standen kunnen dus niet aan waarnemingstouten worden toegeschreven. Niettemin waren bij deze waarnemingen eenige storingen aanwezig, die vermeden konden worden.

1<sup>o</sup>. Verandering van den magnetisatie-stroom, dus van het magnetisch veld, gedurende een waarnemingsreeks. Deze fout kan vermeden worden wanneer men den stroom nauwkeurig meet; de destijds gebruikte ampère-meter van KOHLRAUSCH liet echter slechts aflezigen toe nauwkeurig tot 0,2 ampère; dit geeft in de waarde van het magnetisch veld zooals het hier werd aangewend een onnauwkeurigheid van 2 à 3 %.

2<sup>o</sup>. Kleine verschillen in de plaatsing van het plaatje tusschen de polen, die echter alleen van invloed kunnen zijn wanneer het magneetveld niet homogeen is.

3<sup>o</sup>. Verandering van temperatuur. Gedeeltelijk om den daaraan verbonden omslag, voornamelijk echter om zekerder te zijn van den stand van het plaatje tusschen de polen werden de waarnemingen verricht bij kamertemperatuur zonder gebruikmaking van een vloeistofbad. De afwijkingen van de gemiddelde temperatuur zijn allicht niet grooter geweest dan 3° C., wat een onzekerheid van ongeveer 1 % veroorzaakt.

4<sup>o</sup>. Het bleek, dat wanneer de contactweerstand aan de secundaire electroden grooter was dan 0,05 Ohm, zelfs wanneer daarvoor een correctie aan den weerstand der secundaire ge-

leiding werd aangebracht, te kleine waarden voor den HALL-stroom werden verkregen. Te groote waarden van  $S_0$  hadden een dergelijken invloed.

Bij latere metingen werden deze fouten vermeden op de volgende wijze: De ampère-meter van KOHLRAUSCH werd vervangen door een WESTON-ampère-meter, verdeeld in tienden van ampères, zoodat de honderste ampères nog geschat konden worden. De electromagneet van RUHMKORFF, die tot nu toe gediend had werd vervangen door een dergelijk, maar veel grooter instrument, op verzoek zeer welwillend afgestaan door H. H. Directeuren van TEYLER's stichting, dat gebruikt werd met platte poolstukken van 6 cM. middellijn, geplaatst op een afstand van 16,5 mM. Naast het plaatje werd in de ruimte tusschen de polen een thermometer aangebracht, en bij iedere waarneming de temperatuur afgelezen. Ten slotte werd gezorgd dat noch de contactweerstand, noch  $S_0$  te groote waarden bereikten.

Ondanks deze maatregelen bleven groote verschillen over. Bijvoorbeeld:

Rond plaatje N <sup>o</sup> . 2.					
M = 4400	Stand <sup>1)</sup>	2	4	6	8
		6,26	7,90	8,38	6,82

Vierkant plaatje VI b.					
M = 4350	Stand	1	2	3	4
		16,81(3)	16,45(3)	16,08(4)	16,75(3)
	Grootste afw.	0,50	0,70	0,32	0,18

Ten einde den invloed van kleine verschuivingen van de primaire electroden te ontgaan en tevens de proef eenvou-

<sup>1)</sup> De nummering is dezelfde als in § 1.



diger te maken uit een theoretisch oogpunt, werden aan dit plaatje met Wood's metaal twee koperen reepen gesoldeerd langs twee overstaande zijden; men kon nu rekenen dat de stroom overal in het plaatje evenwijdig aan de vrije randen liep. De waarnemingen in overeenkomstige standen gaven nu

M = 5600	Stand	2	4	2a	4a
		14,05	14,33	13,84	15,63

De afwijkingen zijn niet minder geworden. Dat hier in een sterker veld een zwakker HALL-effect werd gevonden, komt doordat men bij deze wijze van waarnemen in vierkante plaatjes niet het volle HALL-effect waarneemt, zooals reeds o. a. door VON ETTINGSHAUSEN en NERNST<sup>1)</sup> was opgemerkt.

Het eenige wat dus met zekerheid uit de in deze § vermelde waarnemingen kon worden afgeleid was, dat de onregelmatige verschillen evengoed bij vierkante plaatjes voorkomen.

§ 4. Ook bij het verschil in gemiddeld HALL-effect in symmetrie en dissymmetrie-standen was een belangrijk gedeelte van het onderzoek gewijd aan de vraag, of ook met vierkante plaatjes iets dergelijks kon worden waargenomen. Daar het nu niet wel mogelijk is, bij vierkante plaatjes waar te nemen in een stand, veel verschillende van dien waarbij de elektroden in 't midden van de beide zijden uitkomen, moest hier een andere weg ingeslagen worden. Oorspronkelijk meende ik, dat het voldoende zou zijn, uit eenzelfde rond plaatje na bepaling der symmetrie-assen twee vierkante plaatjes te vervaardigen, het eene met de assen

1) Wien. Sitz. Ber. 94 p. 563, 1887.

volgens de diagonalen, het andere met de assen de zijden, en deze ieder in 4 standen te onderzoeken. Op deze wijze werd dan ook met het eerste voor dit doel gegoten plaatje gehandeld. Het werd in de dikte in tweeën gezaagd, hetgeen niet al te best gelukte, zoodat de helften zeer ongelijk van dikte waren. Deze helften hadden de symmetrie-assen nog beide in dezelfde richtingen als het oorspronkelijke plaatje. Nu werden de beide vierkante plaatjes er uit gezaagd, gewogen en gemeten; dit gaf beide malen nagenoeg dezelfde verhouding; daar de oppervlakken gelijk waren, werd de verhouding der gewichten, als het nauwkeurigst bekend, als verhouding der dikten aangenomen.

De resultaten waren nu:

Vierkant plaatje *VIa* (assen volgens diagonalen).

$M = 4400$ . Stand 1 2 3 4  
29,79 29,27 28,21 29,01 Gemiddeld 29,07,

Vierkant plaatje *VIb* (assen evenwijdig zijden).

15,12 15,16 15,78 15,67 Gemiddeld 15,43,

Elk afzonderlijk getal is een gemiddelde van twee waarden, die bij *VIa* minder dan 1%, bij *VIb* soms 4% verschilden. *VIb* was  $2,058 \times$  zoo dik als *VIa*, dus vinden we als verhouding der HALL-coëfficiënten 31,76 : 29,07. Nemen we, in plaats van de gemiddelden, bij *VIa* de hoogste en bij *VIb* de laagste waarde, dan is de verhouding nog 31,12 : 29,79. We vinden dus ook bij deze vierkante plaatjes het HALL-effect zwakker voor het plaatje met dissymmetrie.

Nu is evenwel één omstandigheid vergeten, die veel van de bewijskracht van dit resultaat wegneemt, n.l. dat niet is gebleken, dat niet reeds de ronde plaatjes een verschillenden HALL-coëfficiënt hadden. Daar de beide plaatjes uit

één stuk bismuth afkomstig waren, en toen ter tijd nog niet bekend was, dat de HALL-coëfficiënt van bismuth niet dezelfde waarde heeft voor ieder vlak uit een kristal, zou ik allicht dezen twijfel niet geopperd hebben, zoo niet het volgende stel vierkante plaatjes, op gelijke wijze verkregen, juist een zeer groot verschil in HALL-effect had opgeleverd. Gereduceerd op zelfde dikte waren nl. de gemiddelden

8,32 en 15,49 (het laatste voor den symmetriestand).

Bij onderzoek bleek nu dat bij het controleeren van den stand der symmetrie-assen bij de ronde plaatjes was gevonden  
9,28 en 13,90.

Wel is dus de verhouding sterk toegenomen, maar vooreerst waren de laatstgenoemde bepalingen slechts ruw en in één stand verricht, ten tweede is het niet geraden uit de vergelijking van zóó verschillende plaatjes zekere gevolgtrekkingen te maken.

§ 5. Bij het derde stel ronde plaatjes werd van deze ervaringen partij getrokken. Allereerst werden de symmetrie-assen op nieuw bepaald. Bij het eene plaatje, VIIIa, waren deze nog nagenoeg in dezelfde richting als bij het oorspronkelijke, maar de dissymmetrie was 13 % tegen 9 % in den overeenkomstigen stand van het oorspronkelijke. Bij VIIIb daarentegen waren de assen ongeveer over 20° gedraaid, en de dissymmetrie was slechts 7 %. Vervolgens werden beide in de 8 hoofdstanden onderzocht. Het magneetveld was steeds ongeveer 5600 c. g. s.; de waarnemingen zijn alle op deze waarde van het veld gereduceerd.

Stand	1	3	5	7
Rond plaatje VIIIa	21,10	21,00	21,31	20,91
„ „ VIIIb	19,97	20,25	19,84	20,17

Stand	2	4	6	8
Rond plaatje VIIIa	21,72	21,72	21,82	21,38
" " VIIIb	20,73	20,46	19,82	20,05

De gewichten der plaatjes waren: *a* 20,31 gr. *b* 21,18 gr. Als verhouding der dikten kunnen we dus nemen 1,043. Van *a* werd nu een vierkant gemaakt met de assen evenwijdig aan de zijden, van *b* een met de assen als diagonalen. Daarmede werd gevonden:

Stand	1	3	5	7
Vierkant plaatje VIIIb	18,73	18,99	19,44	19,23
Stand	2	4	6	8
Vierkant plaatje VIIIa	22,69	22,66	22,81	22,30

Overgaande tot gemiddelden vinden we dus:

Gemiddelde van:	4 symm. standen	4 diss. standen	8 standen.
Rond VIIIa	21,66	21,08	21,37
" VIIIb	20,26	20,06	20,16
Vierk. VIIIa	22,62		
" VIIIb		19,10	

Vermenigvuldigen we de getallen voor *b* met 1,043 wegens de grootere dikte van dit plaatje, dan vinden we als verhouding:

van gemiddelden van 8 standen	1,016 (ronde plaatjes)
van gem. diss. standen <i>b</i> en symm. st. <i>a</i>	1,035 ( " " )
" " " " <i>b</i> " " " <i>a</i>	1,136 (vierk. " " )

Niet alleen vinden we dus ook bij deze vierkante plaatjes het verschil terug, maar het is zelfs grooter geworden.

§ 6. Behalve de waarnemingen uit de vorige §§ zijn ook nog eenige reeksen bepaald bij ronde plaatjes, die voor anderen doeleinden vervaardigd waren. In de eerste plaats zijn de waarnemingen met N<sup>o</sup>. 3 (zie § 1) later nog eens

herhaald met meer voorzorgen vooral wat den weerstand aan de secundaire electroden betreft.

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 3.

$$M = 3400.$$

Stand	1	3	5	7	2	4	6	8
	7,77	7,69	7,70	7,95	9,00	8,94	9,19	9,17

De verschillen na draaien over 90° of 180° zijn dus vrij gering, die tusschen dissymmetrie en symmetriestanden echter aanzienlijk.

Later werd nog een bepaling gedaan met alle voorzorgen met den grooten electromagneet in een veld van 6150 c. g. s. Deze gaf voor een symmetriestand 13,07, voor een dissymmetriestand 11,25.

Verder is waargenomen met een plaatje, vervaardigd uit een waarschijnlijk bijna homogeen kristalstuk (zie Hoofdstuk V).

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 6.

$$M = 5500.$$

Stand	1	3	5	7	2	4	6	8
	4,60	4,87	4,67	4,65	3,91	4,04	4,03	3,90
Gemiddelden			4,70				3,97	

Dit was het eerste der door mij vervaardigde plaatjes dat ontwijfelbaar in de dissymmetriestanden een *hooger* HALL-effect opleverde. Daar deze kwestie wel van gewicht schijnt te zijn bij de beoordeeling van de vraag, of we met een nieuw verschijnsel te doen hebben, geef ik hier nog even een opsomming van de plaatjes die in dit opzicht onderzocht zijn. Ik plaats daarin een vraagteeken achter diegene waar het verschil twijfelachtig is.

## Gemiddeld verschijnsel van HALL.

Kleiner in dissymmetriestand. Grooter in dissymmetriestand.

R 2

R 1

R 3

R 6

R 8

R 7 ?

V en R VI ?

V en R VII ?

V en R VIII

§ 7. We hebben gezien dat zoowel theoretisch als practisch is gevonden, dat het verschijnsel niet kan worden verklaard als een gevolg van den ronden vorm der plaatjes. Blijven dus over de verklaringen 1: onregelmatigheden en 3: nieuw verschijnsel. Naar mijn meening zijn de waarnemingen niet voldoende om hiertusschen een keus te doen zoodat ik er mij toe bepalen zal, het voor en tegen der beide verklaringen op te noemen.

*Voor* de eerste pleit: dat niet in alle plaatjes het verschil hetzelfde teeken heeft; dat we van vele der onderzochte plaatjes weten dat ze onregelmatig zijn, en dat deze onregelmatigheid kan leiden tot verschil in het HALL-effect, vooral, omdat de plaatsen der electroden bij de dissymmetriestanden geheel andere zijn dan bij de symmetriestanden.

*Tegen* de eerste pleit: dat het verschil in de *meeste* plaatjes (in alle door mij *gegoten* plaatjes op één na) hetzelfde teeken heeft; dat ook de regelmatige plaatjes R 3 en R 6 het verschil in sterke mate vertoonen.<sup>1)</sup>

*Voor* de tweede kan aangevoerd worden al wat *tegen* de eerste, *tegen* de tweede al wat *voor* de eerste pleit.

<sup>1)</sup> Plaatje R 2, ofschoon dit blijkens de groote dissymmetrie tamelijk regelmatig moet wezen, heb ik met opzet hier weggelaten, omdat dit in zoo sterke mate de verschillen bij draaien over 90° of 180° vertoont, die door onregelmatigheden, zij het ook alleen aan den rand, verklaard moeten worden.

## HOOFDSTUK V.

**Waarnemingen, waardoor bewezen wordt het bestaan van verband  
tusschen de dissymmetrie van het verschijnsel van HALL,  
den toestand van kristallisatie en de magnetische  
weerstandverandering bij bismuth.**

§ 1. *Verband van de dissymmetrie van het verschijnsel van HALL in bismuth met den toestand van kristallisatie.*<sup>1)</sup>

Reeds door LEBRET is opgemerkt,<sup>2)</sup> dat de dissymmetrie in verband gebracht kan worden met de splijtingsvlakken die in de plaatjes werden waargenomen, en zijn pogingen aangewend, een groot bismuthkristal of regelmatig aaneengegroeide kristallen van handelaren in mineralen te verkrijgen. Deze pogingen werden door mij voortgezet, maar niet met goeden uitslag bekroond.

Op daarna tot het Königliches Blaufarbenwerk Oberschlema gericht verzoek heeft dit de groote vriendelijkheid gehad, mij zeer fraaie exemplaren van aaneengegroeide kristallen toe te zenden, die echter minder geschikt bleken om er plaatjes uit te vervaardigen, hoewel ze later bij het onderzoek van zuiltjes goede diensten hebben bewezen. Inmiddels had ik getracht, zelf plaatjes te vervaardigen, waarin de kristallen regelmatiger naast elkaar zouden liggen, om aldus eenigszins tot het gewenschte doel te naderen. Dit

<sup>1)</sup> In hoofdzaak reeds medegedeeld in Zittingsverslag der Kon. Ak v. W. van 30 Mei 1896, p. 55.

<sup>2)</sup> Dissertatie p. 92.

gelukte het best bij het ronde plaatje N<sup>o</sup>. 2, waarin een zeer sterke dissymmetrie werd waargenomen.

Dit plaatje is vervaardigd uit een grooter rond bismuth-plaatje, gegoten van bismuth I<sup>1)</sup> op de wijze als in Hoofd stuk II, § 6 is beschreven. Ter vergelijking van de regelmaat in de ligging der kristallen werden dit en een vierkant plaatje gladgeslepen, en een oogenblik in verdund salpeterzuur verwarmd; het ronde vertoonde zich toen, op drie kleine plekjes na, geheel gelijk van uiterlijk, terwijl op het vierkante plaatje, waarin nagenoeg geen dissymmetrie gevonden was, na de behandeling een honderdtal onregelmatig gevormde en zeer verschillend getinte velden te zien waren. Het ronde plaatje vertoonde onder het microscoop op allerlei plaatsen parallele strepen in twee nagenoeg onderling loodrechte richtingen, over het geheele plaatje en aan voor- en achterkant dezelfde, welke richtingen niet geheel samenvielen met de symmetrie-assen, die er later op werden gevonden. (Zie fig. IV).

Met het ronde plaatje werd nu in een stand van de secundaire electroden, dicht bij een der richtingen van grootste dissymmetrie, gevonden:

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 2.

M	S <sub>A</sub>	S <sub>B</sub>	S	D	S <sub>o</sub>	S <sub>o(c)</sub>	Q
1200	1,79	1,66	1,72	0,13	1,47	1,51	0,05
5400	9,29	3,67	6,48	5,62	1,44	1,74	0,27
7400	15,39	2,87	9,13	12,52	1,28	1,71	0,38
± 13700	29,53	-8,39	10,57	37,92	1,10	1,92	0,52

<sup>1)</sup> LEBRET, Dissertatie p. 100.



In deze en de volgende tabellen verstaan we onder:

M: de magnetische kracht in c. g. s. eenheden.

$S_A$ : den HALL-stroom bij magnetisatie-richting A.

$S_B$ : " " " " " " " B.

S: " gemiddelden HALL-stroom.

D: het verschil van  $S_A$  en  $S_B$ .

$S_0$ : den secundairen stroom in een magneetveld 0.

$S_{0(c)}$ : denzelfden, gecorrigeerd voor de weerstandstoename door magnetisatie.

Q: het quotient van D en de getallen, die volgens HENDERSON<sup>1)</sup> de weerstandstoename in pCt. uitdrukken. (Zie § 2.)

De getallen voor de secundaire stroomen worden verkregen door de compensatieweerstanden op 1000 te deelen.

De bijvoeging van  $S_0$  geschiedt om een oordeel over de nauwkeurigheid der uitkomsten voor de dissymmetrie mogelijk te maken. 2)

Bij de waarnemingen van bovenstaande tabel had  $S_0$  dezelfde richting als  $S_A$ .

Het — teeken bij  $S_B$  in de laatste rij duidt aan, dat hier de richting van den HALL-stroom *niet* met de magnetisatie van teeken wisselde.

In den stand van maximum dissymmetrie werd gevonden:

8600    21,14    -1,36    9,89    22,50    2,16    3,01

Hiermede vergelijken we nu de waarnemingen met het

1) Wied. Ann. 53, p. 912, 1894.

2) Ook voor de berekening der correcties zijnde getallen van HENDERSON gebruikt. Later is gebleken, dat in plaatje N<sup>o</sup>. 2 de weerstandstoename slechts weinig meer dan de helft van die waarden bereikt. Daar evenwel de juiste getallen niet nauwkeurig bekend zijn, en de dissymmetrie toch nog *groot* zou worden, heb ik de correcties gelaten zooals ze waren.

ronde plaatje N<sup>o</sup>. 1, hetzelfde, dat gediend heeft voor het onderzoek van LEBRET, beschreven in Hoofdstuk VIII § 5 en 6 zijner dissertatie.

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 1.

M	S <sub>A</sub>	S <sub>B</sub>	S	D	S <sub>0</sub>	S <sub>0(c)</sub>	Q
1350	3,44	3,94	3,69	0,50	0,66 <sup>5</sup>	0,68	0,17
2700	5,78	7,34	6,56	1,56	0,66	0,71	0,21
5050	6,94	10,66	8,80	3,72	0,38	0,45	0,20
6800	6,69	12,23	9,46	5,54	0,35	0,45	0,19
8600	6,22	13,75	9,98 <sup>5</sup>	7,53	0,34 <sup>5</sup>	0,48	0,19

S<sub>0</sub> had weer dezelfde richting als S<sub>A</sub>.

De resultaten bij plaatje N<sup>o</sup>. 3, gegoten van bismuth, afkomstig van MERCK („purissimum”) waren :

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 3.

M	S <sub>A</sub>	S <sub>B</sub>	S	D	S <sub>0</sub>	S <sub>0(c)</sub>	Q
1750	15,79	17,07	16,43	1,82	1,82	1,89	0,32
3400	25,39	29,18	27,28	3,79	1,90	2,08	0,40
5400	36,02	42,30	39,16	6,28	1,86	2,22	0,33
6700	42,92	51,83	47,38	8,91	1,84	2,33	0,33
8500	48,79	59,31	54,05	10,52	1,81	2,49	0,28

S<sub>0</sub> had dezelfde richting als S<sub>A</sub>.

Dit plaatje is het regelmatigste der van bismuth MERCK gegoten plaatjes; er waren echter na de behandeling met salpeterzuur nog wel eenige verschillende velden op te zien. De absolute waarde der dissymmetrie is niet zoo heel veel kleiner dan bij N<sup>o</sup> 2, maar, doordat bij dit bismuth het

HALL-effect zooveel sterker is, schijnt de dissymmetrie veel kleiner.

Van de latere uit dit bismuth gegoten plaatjes was geen zoo regelmatig gevormd als de zoo juist besproken plaatjes, en er werd dan ook in sommige bijna geen, in andere slechts een matige dissymmetrie gevonden. <sup>1)</sup> Uit deze proeven kan dus met zekerheid worden afgeleid, dat de dissymmetrie in verband staat met den kristallografischen toestand.

§ 2. *Verband van de dissymmetrie met de magnetische weerstandstoename.*

De in de vorige § gegeven tabellen kunnen tevens dienen om te onderzoeken, of de dissymmetrie bij het stijgen der magnetische kracht hetzelfde verloop vertoont als de magnetische toename van den weerstand; over 't algemeen had LEBRET dit bij plaatje N<sup>o</sup>. 1 bevestigd gevonden, en dit beschouwd als een bevestiging van de verklaring der dissymmetrie door een verschillenden weerstand in verschillende richtingen. <sup>2)</sup> Hiertoe is aan de tabellen toegevoegd de kolom Q, waaruit we zien, dat de overeenkomst bij

<sup>1)</sup> Als controle op deze onderzoekingen kan dienen de meting van het verschijnsel van HALL in een electrolytisch neergeslagen plaatje. In een willekeurigen stand geplaatst, gaf dit als resultaat:

$$M = 5650 \quad S_A = 56,95 \quad S_B = 56,54.$$

In een stand, 45<sup>o</sup> van dezen verschillende:

$$M = 5650 \quad S_A = 57,50 \quad S_B = 57,40$$

Tot nauwkeurige metingen kon dit plaatje, dat slechts aan een kant tamelijk vlak was, niet dienen. Het is echter duidelijk dat de dissymmetrie zeer gering is. Dergelijke resultaten werden met meerdere electrolytische plaatjes verkregen.

<sup>2)</sup> LEBRET, Dissertatie p. 12. Zittingsverslag Kon. Ak. v. Wet. van 18 April 1895, p. 298.

No. 1 goed en bij No. 3 matig genoemd kan worden, maar dat bij No. 2 de dissymmetrie veel sneller toeneemt dan de magnetische weerstandstoename volgens HENDERSON. Wel is waar gelden voor dit plaatje de cijfers van HENDERSON niet, maar het verloop kan niet veel anders zijn, zooals mijn eigen metingen bij dit plaatje ook aanduiden. (Zie § 3 (2)).

Bestaat er werkelijk verband tusschen de beide grootheden, dan moet dit verband ook bij wijziging van de temperatuur blijven bestaan. Het is hier dus de plaats om de onderzoeken over de dissymmetrie bij hooge en lage temperatuur te vermelden, die ook reeds gedeeltelijk voorkomen in de mededeeling aan de Kon. Ak. v. Wetensch. van 30 Mei 1896.

#### Rond plaatje No. 1.

Uit alle waarnemingen blijkt, dat de dissymmetrie sterk afneemt bij verhooging van temperatuur, sterker dan het HALL-effect zelf. De meest vertrouwbare (grootte dissymmetrie en kleine  $S_0$ ) geven voor een magneetveld van 8600 :

	D		D		D			
	17°	6,44	;	12°	8,31	;	16°	3,90
	100°	2,92	;	100°	3,31	;	100°	1,88

Waaruit volgt  $\frac{D_{20}}{D_{100}} = 2,13$                       2,29                      1,98  
terwijl de verhouding der weerstandstoenames bij 20° en 100° voor dit magneetveld 3,17 is.

#### Rond plaatje No. 2.

M = 5500	T	D	Q	(Q heeft dezelfde beteekenis als vroeger.)
	16°	10,59	0,49	} $\frac{D_{20}}{D_{100}} = 3,52$
±	63°	4,86	0,46	
	100°	2,87	0,48	

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 3;

$$M = 7400 \quad \begin{array}{ccc} T & D & Q \\ 17^{\circ} & 8,88 & 0,27 \\ 100^{\circ} & 2,84 & 0,31 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} T & D & Q \\ 17^{\circ} & 8,88 & 0,27 \\ 100^{\circ} & 2,84 & 0,31 \end{array}} \right\} \frac{D_{20}}{D_{100}} = 3,01$$

Met plaatje N<sup>o</sup>. 2 is ook een reeks waarnemingen gedaan in een veld van 6000 c. g. s. tusschen  $-70^{\circ}$  en  $+20^{\circ}$ . Daar de weerstandstoename door magnetisatie bij temperaturen onder  $0^{\circ}$  destijds nog niet bekend was, werd  $S_0$  zoo klein mogelijk gemaakt en geconstateerd, dat deze stroom steeds klein bleef. Om fouten door mogelijke kleine veranderingen van den weerstand der secundaire geleiding van minder gewicht te maken, werd in die geleiding nog 3 Ohm opgenomen, terwijl de gewone weerstand  $\pm 1$  Ohm bedraagt. 1)

Het aanbrengen van een correctie voor weerstandstoename aan  $S_0$  zou tengevolge hebben, dat grootere waarden voor de dissymmetrie werden verkregen. Hier volgen eenige door interpolatie verkregen getallen.

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 2.

M	T	S <sub>A</sub>	S <sub>B</sub>	S	D	Q
6000	$-70^{\circ}$	-3,60	8,50	2,45	12,10	0,14
"	$-50^{\circ}$	-1,94	8,06	3,06	10,00	0,17
"	$-30^{\circ}$	-0,47	6,97	3,25	7,44	0,19
"	$-10^{\circ}$	+0,73	5,67	3,20	4,94	0,19
"	$+17^{\circ}$	+1,59	4,69	3,14	3,10	0,21

Om de verandering van de dissymmetrie met de temperatuur in plaatje N<sup>o</sup>. 2 nog duidelijker te doen uitkomen, vermenig-

1) Dezelfde voorzorg is bij bijna alle latere waarnemingen genomen.

vu'digen we de getallen der laatste reeks met 4, om den grooteren weerstand der secundaire geleiding in rekening te brengen, en herleiden de getallen 10,59 en 2,87 in een veld van 5500, tot 12,40 en 3,36 in een veld van 6000. We vinden dan voor een zeldte magneetveld van 6000

T	100°	16°	—70°
D	3,36	12,40	48,40.

Eenigen tijd nadat deze waarnemingen verricht waren, zijn de resultaten bekend gemaakt, door FLEMING en DEWAR bij het onderzoek naar de weerstandsvermeerdering in het magnetisch veld bij zeer lage temperaturen verkregen. Uit hunne waarnemingen<sup>1)</sup> heb ik de getallen voor de weerstandstoename in % voor de vijf hier genoemde temperaturen in een veld van 5500 c. g. s. berekend en daarvan gebruik gemaakt om ook hier de waarden van Q te vinden.

Hoewel ook hier dus afwijkingen van de evenredigheid voorkomen, zijn ze toch, tenminste bij het plaatje N<sup>o</sup>. 2, lang niet zoo groot als bij de waarnemingen bij verschillende magnetische kracht.

Neemt men bovendien nog in aanmerking dat de plaatjes N<sup>o</sup>. 1 en 2 vervaardigd zijn uit bismuth, dat een kleinere toename van weerstand in het magnetisch veld vertoont dan het electrolytische bismuth van FLEMING en DEWAR, tenminste bij gewone temperatuur, en dat ook de vermeerdering der toename bij lage temperatuur wel iets langzamer kan plaats hebben in het bismuth dier plaatjes, dan is het niet te gewaagd uit de waarnemingen het besluit te trekken, dat dissymmetrie en weerstandstoename in het magnetisch veld in ieder geval nauw verwante verschijnselen zijn.

1) Zie Hoofdstuk I § 4.

§ 3. Nadat door de in de vorige §§ beschreven waarnemingen eenerzijds was vastgesteld, dat de dissymmetrie alleen optreedt in kristallografisch homogene, anisotrope plaatjes, anderzijds gebleken was, dat de dissymmetrie bij verandering van magnetische kracht en temperatuur analogie vertoont met de toename van den weerstand in het magnetisch veld, lag het voor de hand, thans de hypothese van LEBRET, die verband brengt tusschen de verschillende resultaten, eveneens experimenteel op de proef te stellen. Volgens deze hypothese neemt de weerstand van een homogeen kristallijn bismuthplaatje in twee onderling loodrechte richtingen *in verschillende mate toe*. Het kwam er dus op aan te onderzoeken, of het bestaan van dit verschil in weerstand op onmiddellijke wijze kon worden aangetoond.<sup>1)</sup> Daartoe werden de volgende proeven genomen.

1. Nadat in een rond plaatje (*Vb*) de symmetrie-assen waren bepaald, werd daaruit een vierkant gezaagd met de zijden evenwijdig aan die assen. Uit de overschietende randen werden twee langwerpige stukjes bismuth verkregen; aan ieder van deze werden op eenzelfde zijvlak met Wood's metaal twee „weerstandselectroden” gesoldeerd, welke verbonden waren door een weerstandsbank en één der klossen van een differentiaal-galvanometer. Vervolgens werden de stukjes zoo tusschen de polen van den magneet opgesteld, dat ze elkaar, ofschoon ze door een micablad gescheiden bleven, geheel bedekten, en werd door beide een stroom gezonden die ze achter elkander doorliep. In een der weerstandsbanken werd de weerstand op bijv. 100 Ohm gehouden, en in de andere bij verschillende magneetvelden

<sup>1)</sup> De resultaten van dit onderzoek zijn medegedeeld in het Zittingsverslag der Kon. Ak. v. Wet. van 21 April 1897. p. 492.

de weerstand opgezocht, waarbij geen uitslag van den differentiaal-galvanometer werd waargenomen bij het sluiten van den hoofdstroom. Van de waarden, aldus voor beide richtingen van eenzelfde magneetveld verkregen, werd het gemiddelde genomen om den invloed van het HALL-effect te elimineeren.<sup>1)</sup>

Noemen we de verhouding der weerstanden buiten het magneetveld  $a$ , dan werd voor diezelfde verhouding gevonden:

in het magneetveld 5500 c. g. s. 1,005 .  $a$

      "      "      "      7800 c. g. s. 1,022 .  $a$

2. Om nu te beproeven of ook in de plaatjes zelf, die voor de bepaling der dissymmetrie gediend hadden het op deze wijze gevonden verschil der weerstanden in verschillende richting kon worden aangetoond, werden er weerstandselectroden opgeklemd in de richting der assen, en de weerstand gemeten met den compensatiestroom.

De weerstands-electroden waren op onveranderlijken afstand in een ebonieten schijfje bevestigd, in twee punten op een zelfde middellijn en even ver van het middelpunt gelegen. Dit schijfje had ongeveer dezelfde middellijn als de te onderzoeken plaatjes, en werd met twee koperen veeren, van het bismuth door mica geïsoleerd, aan deze vastgeklemd. De bismuth-plaatjes werden dan op de gewone wijze in den drager bevestigd met de te onderzoeken assen tusschen de primaire electroden.

Daar de stroom in de plaatjes volstrekt niet overal in de richting van de verbindingslijn der primaire electroden loopt, had ik niet verwacht op deze wijze de juiste ver-

<sup>1)</sup> De vraag, of deze handelwijze gewettigd is, wordt in het volgende Hoofdstuk besproken.



houding der weerstanden in de hoofdrichtingen te leeren kennen. De resultaten waren echter nog veel ongunstiger dan ik verwacht had. Als voorbeeld geef ik de waarden gevonden voor de weerstandstoename bij R 2.

Magneetveld	5700	8100
Eerste as	11,1 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	19,2 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>
Tweede „	10,1 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	17,5 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>

Deze verschillen, waarvan we nog niet eens zeker zijn, daar geen voldoende gegevens aanwezig waren voor de noodzakelijke temperatuur-correcties, zijn in 't geheel niet in staat de sterke dissymmetrie in dit plaatje te verklaren. (Zie voor de berekening der waarschijnlijke verschillen § 5).

Na de berekening van de sterkte van den hoofdstroom, ontstaan door een bepaald potentiaal-verschil aan de primaire electroden, zooals die is uitgevoerd in Hoofdstuk III behoeft dit negatieve resultaat ons niet meer te verbazen. We zien daar immers dat die sterkte geheel onafhankelijk is (tenminste tot op termen van de tweede orde na) van den stand der assen ten opzichte van de primaire electroden. Omgekeerd zal dus ook het potentiaalverschil, door een bepaalden hoofdstroom aan de primaire electroden teweeggebracht, onafhankelijk zijn van dien stand. Nu waren onze weerstands-electroden, teneinde den weerstand niet al te klein te maken, dicht bij de primaire electroden aangebracht, zoodat het schijnbare verschil in weerstand tusschen beide assen in het magnetisch veld waargenomen slechts een zeer klein deel van het ware verschil uitmaakte.

Voor het doel van dit Hoofdstuk kon dus deze methode niet dienen en zij werd dan ook verlaten. Voor de bepaling van de gemiddelde weerstandstoename echter is ze wel geschikt, wat o. a. voor de correctie aan  $S_0$  nuttig kan zijn.

3. Thans werd beproefd, den weerstand te meten van bismuth-zuiltjes, waarvan men met grond kon vermoeden dat ze denzelfden weerstand hadden als het plaatje, waarin de dissymmetrie gemeten was.

Een der voor andere proeven gebezigde ronde plaatjes (R 6) was vervaardigd uit een stuk bismuth, dat uiterlijk homogeen van kristalstructuur scheen. Uit het overgebleven stuk werden nu twee bismuthzuiltjes (N<sup>o</sup>. 1 en N<sup>o</sup>. 2) gezaagd, met de lengterichting evenwijdig aan het vlak van het plaatje (dat zelf evenwijdig was aan een slijtvlak van het kristalstuk), in onderling loodrechte richtingen. Deze zuiltjes werden in een ebonieten raampje geklemd tusschen twee koperen schroeven, die de geheele eindvlakken bedekten, terwijl op een der zijden twee fijne weerstands-electroden uitkwamen. Het zuiltje werd door den hoofdstroom doorloopen, en de weerstand tusschen de weerstands-electroden evenals in 2 vergeleken met dien van de rheotandraden van den compensatiestroom. Het bleek nu dat in een magneetveld van  $\pm 5700$  c. g. s. de weerstand van N<sup>o</sup>. 1 was toegenomen met 5,4 pCt., die van N<sup>o</sup>. 2 met 7,4 pCt. De soortgelijke weerstand dezer zuiltjes was  $\pm 154000$  in c. g. s. eenheden <sup>1)</sup>; 2 pCt. hiervan is  $\pm 3100$  c. g. s. De dissymmetrie van het verschijnsel van HALI, waargenomen in een der standen van het plaatje was  $\pm 2700$  c. g. s. De richtingen der ribben van de zuiltjes ten opzichte van het stuk waaruit ze gesneden waren vielen niet volkomen samen met die welke de symmetrie-assen van het plaatje ten opzichte van hetzelfde stuk hadden ingenomen;

1) In deze bepaling kan een tamelijk groote fout voorkomen, daar de afstand der electroden slechts 6 m.M. was.

bovendien is bij ronde plaatjes  $k_1 - k_2$  wel evenredig, maar niet volkomen gelijk aan de dissymmetrie; immers in de onderstelling, dat buiten het magneetveld  $k_1 - k_2$  nul is, vonden we in Hoofdstuk III voor de maximum dissymmetrie  $\frac{4}{\pi}(k_1 - k_2)$ . Neemt men echter de onvermijdelijke waarnemingsfouten in aanmerking, die bij dit plaatje grooter zijn dan anders, omdat het HALL-effect er nogal zwak in is (zie Hoofdstuk VI § 5) dan is de overeenstemming tusschen de boven gegeven cijfers wel voldoende te noemen.

Ook bij deze manier van waarnemen werden bij de beide richtingen van het magneetveld soms verschillende waarden voor den weerstand gevonden. De onderzoekingen naar de oorzaak van dit verschijnsel worden in het volgende Hoofdstuk vermeld. Uit de waarnemingen in 1 en 3 medegedeeld kan men echter wel reeds besluiten, dat een verschillende weerstandstoename in het magnetisch veld voor verschillende richtingen in kristallijn bismuth werkelijk bestaat, en als oorzaak van de dissymmetrie van het verschijnsel van HALL beschouwd mag worden.

§ 4. We komen thans nog even terug op de vragen besproken in § 1 en § 2. Het resultaat van § 1 is nu onmiddellijk verklaard. Worden in het magnetisch veld de weerstanden verschillend in richtingen, die in nauwe betrekking tot de hoofdrichtingen van het kristal staan, dan krijgt in een onregelmatig plaatje de dissymmetrie in het eene veld het positieve, in een ander het negatieve teeken; immers bij een draaiing der assen over  $90^\circ$  keert het teeken van de dissymmetrie om, terwijl in het onregelmatige plaatje de kristalrichtingen over alle richtingen verdeeld zullen voorkomen. Alles bijeengenomen zal het dus schijnen, dat

er geen of weinig dissymmetrie in het plaatje voorkomt.

Om de uitkomsten van § 2 te beoordeelen moeten we beschouwen de uitdrukking voor de dissymmetrie, in Hoofdstuk III § 8 afgeleid en reeds vermeld in Hoofdstuk II, § 5 B, volgens welke  $D$ , in absolute maat uitgedrukt (d. w. z. in de electromagnetische eenheid van electromotorische kracht), voorgesteld wordt door

$$D^1 = \frac{8}{\pi} k_M \Delta \left( \frac{d}{k} \right)$$

Noemen we voor een oogenblik de weerstanden in de hoofdrichtingen  $a$  en  $b$  buiten,  $A$  en  $B$  in het magnetische veld dan kunnen we stellen

$$A = a(1 + p) \quad B = b(1 + q)$$

waarin  $p$  en  $q$  functies van de magnetische kracht zijn.

Substitueeren we nu in  $D^1$

$$k_M = \frac{a(1 + p) + b(1 + q)}{2} \quad \frac{d_M}{k_M} = \frac{a(1 + p) - b(1 + q)}{a(1 + p) + b(1 + q)}$$

$$\frac{d_0}{k_0} = \frac{a - b}{a + b}$$

dan vinden we na een kleine herleiding

$$D^1 = C \frac{ab}{a + b} (p - q) \quad \left( C = \frac{8}{\pi} \right)$$

De procentische toename van den gemiddelden weerstand wordt voorgesteld door

$$100 \frac{k_M - k_0}{k_0} = 100 \frac{ap + bq}{a + b}$$

Gemakkelijk ziet men in, dat de beide aldus verkregen uitdrukkingen in  $p$  en  $q$  alleen evenredig kunnen zijn voor alle waarden van  $p$  en  $q$ , wanneer de *verhouding* van  $p$  en  $q$  *constant* is. Aan deze voorwaarde zou stellig voldaan zijn, wanneer  $p$  en  $q$  beide eenvoudig evenredig waren aan een

of andere macht van de magnetische kracht. Daar de trekking echter in werkelijkheid van meer ingewikkelden aard is, is de volkomen evenredigheid van dissymmetrie en weerstandstoename a priori niet waarschijnlijk. Daar  $p$  en  $q$  slechts tot de eerste macht voorkomen in beide uitdrukkingen en tenminste nagenoeg evenredig veranderen, kan men wel een overeenkomstige verandering van beide grootheden verwachten, zooals de waarnemingen die dan ook hebben opgeleverd.

Aan het einde van het volgende Hoofdstuk komen we nog even op deze vraag terug.

§ 5. In de mededeeling aan de Kon. Ak. v. Wet., Zittingsverslag van 30 Mei 1896, pag. 53 en volgende, komen eenige berekeningen voor van weerstands-coëfficiënten in onderling loodrechte richtingen bij ronde plaatjes, gebaseerd op de in die plaatjes waargenomen dissymmetrie. Voor die berekeningen is evenwel gebruik gemaakt van onderstellingen, die thans gebleken zijn onjuist te wezen, waarom we hier de berekeningen zullen herhalen.

Terecht is daar ter plaatse twijfel uitgesproken, of de dissymmetrie wel gelijk gesteld mocht worden aan  $K_{11}—K_{22}$ ; we kunnen er thans wel bijvoegen dat dit in vierkante plaatjes evenmin geoorloofd is, tenminste wanneer men den hoofdstroom in twee punten laat intreden, daar dan ook niet overal de hoofdstroom in de richting van de verbindinglijn der primaire electroden loopt. Ten onrechte evenwel wordt aangenomen, dat de waargenomen HALL-stroom en dissymmetrie toch nog dezelfde verhouding hebben, die zou bestaan wanneer de hoofdstroom overal evenwijdig liep; we weten thans dat in ronde plaatjes *hetzelfde* HALL-effect wordt waargenomen als in andere plaatjes van welken vorm

ook bij gebruik van puntvormige electroden, dat daarentegen de dissymmetrie in ronde plaatjes gelijkgesteld moet worden aan  $\frac{4}{\pi} \times$  het bedrag, dat ze zou hebben wanneer de hoofdstroom overal in het plaatje evenwijdig aan de verbindingslijn der primaire electroden stroomde. Ook is dus niet juist dat de HALL-coëfficiënt voor het plaatje R 2 gelijkgesteld wordt aan den bij andere (vierkante) plaatjes uit hetzelfde bismuth gevonden bedrag. De opmerking (l. c. p. 49) dat *altijd* het HALL-effect in ronde plaatjes kleiner is dan in vierkante van hetzelfde bismuth en dezelfde dikte, is dan ook door latere waarnemingen gelogenstraft.

We zouden nu de dissymmetrie  $D^1$  moeten gelijkstellen aan  $\frac{8}{\pi} k_M \Delta \left( \frac{d}{k} \right)$  Om vervolgens de weerstanden in de hoofdrichtingen daaruit af te leiden, zouden we dus moeten kennen  $\frac{d_0}{k_0}$  In § 3 (2) is evenwel medegedeeld, hoe de pogingen om de weerstandsverschillen in het plaatje zelf te meten mislukten en moesten mislukken. We zullen daarom hier de onderstelling maken, dat  $d_0 = 0$ ; we zullen dan een *onderste grens* voor  $d$  vinden die waarschijnlijk bij R 1 en R 2 niet ver van de werkelijkheid verwijderd zal zijn, omdat het bijzonder lage HALL-effect in deze plaatjes er op wijst, dat de richting van grootsten weerstand daar niet te ver van de normale richting verwijderd was<sup>1)</sup>. De uitdrukking voor  $D^1$  wordt dan eenvoudig  $\frac{8}{\pi} d$

$D^1$  wordt afgeleid uit  $D$  als volgt:

$D$  is het verschil van de getallen, verkregen door de weerstanden, noodig in den compensatie-stroom voor beide

1) Ter rechtvaardiging van deze uitspraak verwijs ik naar het volgende Hoofdstuk.

richtingen van het magneetveld, op 1000 te deelen. Noemen we deze  $w_A$  en  $w_B$ , dan is

$$D = 1000 \left( \frac{1}{w_A} - \frac{1}{w_B} \right)$$

Het verschil der secundaire stroomen is gelijk aan dat der compensatie-stroomen en dus gelijk aan

$$I w_R \left( \frac{1}{w_A} - \frac{1}{w_B} \right)$$

wanneer  $w_R$  den weerstand der rheotandraden voorstelt.

Uit de secundaire stroomen krijgt men het potentiaalverschil aan de secundaire electroden door te vermenigvuldigen met  $w_s$ , den weerstand van de secundaire geleiding. Het dubbele potentiaalverschil, door dissymmetrie teweeggebracht, is dus

$$I w_R w_s \left( \frac{1}{w_A} - \frac{1}{w_B} \right) = \frac{1}{1000} I w_R w_s D.$$

Ditzelfde potentiaalverschil wordt ook voorgesteld door

$$\frac{I}{\delta} \frac{8}{\pi} d = \frac{I}{\delta} D^1$$

$$\text{dus } D^1 = \delta w_R w_s \frac{D}{1000}$$

Drukt men de weerstanden uit in Ohms, dan moet deze uitdrukking nog met  $10^9$  vermenigvuldigd worden, om de waarde van  $D^1$  in c. g. s. eenheden te krijgen.

Op deze wijze vinden we:

$$\text{Rond plaatje N}^\circ 1. \quad M = 8600.$$

$$D = 7,53 \quad \delta = 0,245 \quad w_R = 0,0025^1) \quad w_s = 1.15$$

$$\text{dus } D^1 = 5300 \text{ en } d = 2080.$$

1) Deze weerstand is bepaald op de wijze als door LEBRET op p. 101 zijner dissertatie wordt beschreven, zoodat de mogelijke ongelijke invloed van secundaire en compensatiestroom op den galvanometer-magneet, waarop boven niet gerekend is, toch geëlimineerd wordt.

Daar  $k$  voor dit bismuth niet gemeten is, moeten we daarvoor nemen de waarde voor zuiver bismuth, die bij  $20^\circ$  buiten het magneetveld 136000, in een veld van 8600 c. g. s. 188000 is. We vinden dus:

$$k_1 = 1,90 \cdot 10^5 \quad k_2 = 1,86 \cdot 10^5$$

Rond plaatje N<sup>o</sup>. 2.  $M = 8600$ .

$$D = 22,50 \quad \delta = 0,248 \quad w_R = 0,0025 \quad w_s = 1,15$$

$$D^1 = 16000 \quad d = 6300$$

Voor dit plaatje is tenminste de gemiddelde weerstandstoename bepaald voor de magneetvelden 5700 en 8100 (zie § 3, (2)). Voor het veld van 8600 zal die toename ongeveer 20 0/0 bedragen, zoodat  $k_M = 163000$ .

$$k_1 = 1,693 \cdot 10^5 \quad k_2 = 1,567 \cdot 10^5.$$

Rond plaatje N<sup>o</sup> 3.  $M = 8500$ .

$$D = 10,52 \quad \delta = 0,206 \quad w_R = 0,0025 \quad w_s = 1,00$$

$$D^1 = 6230 \quad d = 2450.$$

De weerstandstoename is hier ongeveer 29 0/0, dus  $k_M = 175000$ ,  $k_1 = 1,775 \cdot 10^5$   $k_2 = 1,725 \cdot 10^5$ ,

Nemen we ten slotte de sterkst waargenomen dissymmetrie, die bij R 2 in een veld van 6000 c. g. s. bij  $-70^\circ$ .

$$D = 12,10, \quad \delta = 0,248 \quad w_R = 0,0025 \quad w_s = 4,00$$

$$D^1 = 30000 \quad d = 11800.$$

Blijft de weerstandstoename ook voor lage temperaturen voor dit bismuth evenredig aan die van zuiver bismuth dan kan men uit de getallen van FLEMING en DEWAR afleiden een toename van 43 0/0 bij  $-70$ . De weerstand buiten het magnetisch veld is bij die temperatuur 122000, dus

$$k_M = 175000 \text{ en}$$

$$k_1 = 1,87 \cdot 10^5 \quad k_2 = 1,63 \cdot 10^5.$$



## HOOFDSTUK VI.

### Waarnemingen ter bepaling van den aard van het verband tusschen kristalrichting en weerstand, magnetische weerstandstoename en HALL-verschijnsel bij bismuth. <sup>1)</sup>

§ 1. Het doel waarmede de onderzoekingen, die in dit Hoofdstuk beschreven worden, werden aangevangen, was een ander dan de titel zou doen vermoeden. Het was n.l. eenigszins zonderling dat de pogingen, om plaatjes met groote dissymmetrie te gieten slechts éénmaal, en dat wel den allereersten keer, een bijzonder gunstigen uitslag gehad hadden en dat overigens schijnbaar regelmatige plaatjes, zooals het kristallijne plaatje R 6, slechts een matige dissymmetrie vertoonden. Daar niettemin aan het bestaan van het verband tusschen de weerstandstoename in de kristalhoofdrichtingen en de dissymmetrie niet meer behoefde getwijfeld te worden, scheen de eenig mogelijke verklaring deze te zijn, dat de wijze van gieten van de plaatjes een wijze van kristallisatie bevorderde, waarbij de richting met de meest karakteristieke eigenschappen loodrecht op het vlak van het plaatje kwam te staan, zoodat we van die richting bij de proeven weinig of niets konden bemerken. Daar nu van het kristalstuk, waaruit plaatje R 6 en de beide in § 3 (3) besproken zuiltjes waren vervaardigd, nog een

<sup>1)</sup> De meeste resultaten van dit onderzoek zijn reeds medegedeeld in het Zittingsverslag der Kon. Ak. v. Wet. van 21 April 1897, p. 494.

gedeelte over was, kon dit vermoeden onmiddellijk op de proef gesteld worden, door de weerstandsbepalingen te herhalen met een zuiltje dat uit hetzelfde kristalstuk gesneden was in een richting  $\perp$  de beide vorige, dus  $\perp$  het (voornaamste) splijtingsvlak. Het bleek, dat dit zuiltje niet alleen een grooteren soortelijken weerstand had, maar ook een veel grootere magnetische weerstandsvermeerdering vertoonde. Terwijl bijv. voor N<sup>o</sup>. 2 was gevonden een weerstand buiten het magnetisch veld van 154000 c.g.s. en een magnetische weerstandstoename van 7,4<sup>o</sup>/<sub>o</sub>, waren hier de overeenkomstige getallen 176000 en 12,2<sup>o</sup>/<sub>o</sub>. Een verschil in weerstand buiten het magnetisch veld is reeds in 1855 door MATTEUCCI<sup>2)</sup> opgemerkt, die opgeeft dat het geleidingsvermogen van bismuth in de richting  $\perp$  (voornaamste) splijtingsvlak zich verhoudt tot het geleidingsvermogen  $\parallel$  dat vlak als 1 : 1,16.

Het vermoeden was dus althans voor plaatje R 6 bevestigd, daar in ieder geval de verschillen tusschen het derde zuiltje en een der beide andere veel grooter waren dan die tusschen de eerste twee onderling. Tevens bleek uit deze waarnemingen, dat ook de weerstand buiten het magneetveld voorwerp van onderzoek zou moeten worden.

Het scheen nu van belang te trachten plaatjes te verkrijgen, bij welke de richting van grootsten weerstand buiten het magnetisch veld evenwijdig aan de platte zijvlakken zou loopen; bij zulke plaatjes werd een groote dissymmetrie verwacht. Het onderzoek van deze plaatjes moest dan worden aangevuld met dat van drie zuiltjes, gesneden in de hoofdrichtingen. De onregelmatigheden, die bij de uitvoering van het onderzoek voor den dag kwamen,

<sup>2)</sup> C. R. T. XL p. 541, 914, 1855.

hebben nu geleid tot het opnemen ook van den coëfficiënt van HALL onder de te onderzoeken grootheden en tot het opstellen van een volledige verklaring van het verband tusschen de in den titel van dit Hoofdstuk genoemde onderwerpen. Het schijnt mij daarom het beste ook hier de historische volgorde in acht te nemen, en de verschillende verklarende onderstellingen te maken daar waar zich de behoefte aan een verklaring voordoet.

§ 2. Geen van de voorhanden kristalstukken was groot genoeg om er een plaatje uit te maken, dat zijvlakken zou hebben loodrecht op het meer genoemde voornaamste splijtingsvlak en daardoor de richting van grootsten weerstand evenwijdig aan die zijvlakken zou krijgen. Het plaatje moest dus gegoten worden; in de onderstelling, in § 1 geuit, dat bij de gewone wijze van gieten de richting van grootsten weerstand waarschijnlijk loodrecht op het voormalig horizontaal oppervlak der gesmolten bismuthmassa zou komen, besloot ik, thans een grootere massa op dezelfde wijze te gieten. Daartoe werd  $\pm 300$  gram bismuth gesmolten, in een porceleinen schaalje gegoten en daarin langzaam afgekoeld op de wijze beschreven in § 6 van Hoofdstuk II.

Uit dit stuk bismuth werden gezaagd:

- 1<sup>o</sup>. Een rond plaatje met de zijvlakken verticaal, d. w. z.  $\perp$  horizontaal oppervlak van de gestolde bismuthmassa. (R 7).
- 2<sup>o</sup>. Een rond plaatje met de zijvlakken horizontaal (R. 8).
- 3<sup>o</sup>. Uit het bismuth onmiddellijk naast het eerste plaatje twee verticale en twee horizontale zuiltjes. (1, 2, I, II).
- 4<sup>o</sup>. Een horizontaal zuiltje,  $\perp$  de vorige, naast het tweede plaatje genomen. (3).

Ditmaal werd het vermoeden omtrent den stand der

richting van grootsten weerstand niet bevestigd gevonden. Wel had plaatje R 7 de symmetrie-assen in de richting van de zuiltjes 1 en I, zooals ook bij bevestiging van het vermoeden het geval geweest zou zijn, maar de dissymmetrie was niet bijzonder groot. Voor  $D^1$  werd n.l. gevonden in een veld van 7700 c. g. s. ongeveer 5200, terwijl we in § 5 van het vorige Hoofdstuk voor plaatje R 2 vonden 16000 in een veld van 8600 c. g. s., en voor plaatje R 3 6200 in een veld van 8500 c. g. s. Plaatje R 8 daarentegen gaf juist de grootste dissymmetrie wanneer de met zuiltje 3 overeenkomende richting zich tusschen de primaire electroden bevond, terwijl deze dissymmetrie weinig minder dan bij R 7, n.l. 4700 in een veld van 7500 c. g. s. bedroeg. Had de richting van grootsten weerstand overal de richting van zuiltje 1 gehad, dan had dit plaatje in 't geheel geen dissymmetrie moeten geven. Overigens zal later in dit Hoofdstuk blijken, dat wanneer werkelijk die richting in het vlak van plaatje R 7 had gelegen, juist *dat* plaatje geen dissymmetrie zou vertoond hebben.

Een ander onverwacht resultaat was, dat de HALL-coëfficiënt van R 8 veel grooter was dan die der van R 7. Van deze omstandigheid zal straks gebruik gemaakt worden.

§ 3. Bij het onderzoek van de weerstandsvermeerdering der zuiltjes was het eerste, wat de aandacht trok, dat de waarden, verkregen bij de twee richtingen van het magneetveld (Magn. A, Magn. B), dat altijd loodrecht stond op een van de lange zijvlakken, somtijds bijzonder veel verschilden, veel meer, dan het geval was geweest bij de zuiltjes 1 en 2, besproken in § 3 (2) van het vorige Hoofdstuk. Zoo vonden wij bijv. bij zuiltje N<sup>o</sup>. II in een veld van 7700

	Magn. A.	Magn. B.	Gem.
Toename	41,2 0/0	23,6 0/0	32,4 0/0.
Bij zuiltje N <sup>o</sup> . 2 in hetzelfde veld	37,9 0/0	10,5 0/0	24,2 0/0.

Het scheen onaannemelijk, dat dergelijke verschillen veroorzaakt konden worden door HALL stroomen. Immers de beide weerstands-electroden kwamen uit op hetzelfde zijvlak en wel het onderste. Was het zuiltje zeer lang geweest in vergelijking met de doorsnede en overal juist even dik, dan moest aan beide electroden dus precies dezelfde potentiaalwijziging optreden door het HALL-effect. Thans, nu de zuiltjes ongeveer 16 m.M. lang waren en dwarsafmetingen van 4 m.M. hadden, terwijl de weerstands-electroden ongeveer 5 m.M. van de naastbijzijnde hoofdstroom-electrode verwijderd waren, kon men wel eenige ongelijkheid verwachten, maar toch geen verschillen, die, zooals in het laatste geval, voor hun verklaring een HALL-effect eischten, bijna zoo groot als het volle HALL-effect dat men zou waarnemen, wanneer de electroden zich op *onder* en *bovenvlak* bevonden en de HALL-coëfficiënt die van plaatje R 7 was. En toch was het HALL-effect vrijwel de eenige storing die voldeed aan den eisch, van teeken te veranderen zoowel wanneer de hoofdstroom als wanneer de magnetisatie-stroom van richting veranderde; er werd nl. altijd bij beide richtingen van den hoofdstroom nagenoeg hetzelfde gevonden.

Om nu in de eerste plaats zekerheid te verkrijgen, dat de oorzaak der verschillen niet in de waarnemingsmethode kon gelegen zijn, en verder zoo mogelijk den aard van het verschijnsel op te sporen, bleek het wenschelijk, waar te nemen:

- a.* Met hoofdstroomen van verschillende sterkte.
- b.* In vier standen (1, 2, 3 en 4), verkregen door draaien van de zuiltjes om de verbindingslijn der hoofdstroom-electroden, telkens 90° verder.
- c.* In vier overeenkomstige standen, doch met verwisseling van voor- en achtervlak (gezien van uit de magneetpolen).
- d.* In dezelfde standen, nadat de dwarsafmetingen ongeveer tot de helft verminderd waren.
- e.* Met een electrolytisch neergeslagen plaatje.

Deze waarnemingen leverden de volgende resultaten:

- a.* De uitkomsten zijn volkomen onafhankelijk van de stroomsterkte en stroomrichting.
- b.* Voor zuiltje N<sup>o</sup>. II.

Stand.	Magn. A.	Magn. B.	Gemiddelde.	Vershil.
1	41,2 0/0	23,6 0/0	32,4 0/0	+ 17,6
2	12,2	32,1	22,2	— 19,9
3	37,1	25,0	31,0	+ 12,1
4	11,5	39,8	25,7	— 28,3

- c.* Voor hetzelfde zuiltje.

1	20,7	34,0	27,4	— 13,3
2	31,8	16,6	24,2	+ 15,2
3	18,6	34,8	26,7	— 16,2
4	41,7	10,8	26,2	+ 30,9

d. 1) Voor hetzelfde zuiltje.

1	28,6	35,8	32,2	— 7,2
2	28,7	20,8	24,7	+ 7,9
3	27,6	31,0	29,3	— 3,4
4	32,0	19,7	25,8	+ 12,3

e. Bij beide magnetisatie-richtingen (A en B) geheel dezelfde weerstandstoename.

Bij het bovenstaande is op te merken:

1<sup>o</sup>. Overeenkomst tusschen de standen 1 en 3 of 2 en 4; verschil tusschen 1 en 2 of 3 en 4. In de standen 2 en 4 is steeds het gemiddelde lager.

2<sup>o</sup>. Bij verwisselen van voor- en achtervlak keert het teeken van het verschil om. Bijzonder hooge of lage waarden komen nu bij tegengestelde magnetisatie voor.

3<sup>o</sup>. Bij *d* zijn de verschillen gemiddeld ruim tweemaal zoo klein geworden.

Een vrij waarschijnlijke verklaring van deze bijzonderheden kunnen we nu ontleenen aan de waarneming van het HALL-verschijnsel in de plaatjes R 7 en R 8. Terwijl n.l. R 7 als HALL-constante in een veld van 7700 c. g. s. opleverde 3,36 c. g. s., gaf R 8 6,39 c. g. s., dus bijna tweemaal zooveel. Onderstellen we eens, dat dit verschil veroorzaakt wordt, doordat bij de waarneming met R 8 de kristalrichtingen anders geplaatst zijn ten opzichte van de magneetkracht dan bij

---

1) Door een vergissing staat in de mededeeling aan de K. A. v. W. van 23 April 1897, p. 497, een andere reeks vermeld, ook wel bij het afgevielde zuiltje N<sup>o</sup>. II waargenomen, maar met de electroden op een der verticale zijvlakken, waardoor het optreden van HALL-stroomen begunstigd wordt.

die met R 7. De verschillen tusschen de zuiltjes onderling toonen duidelijk genoeg aan, dat het bismuth niet geheel regelmatig gekristalliseerd was. Nemen we nu aan, dat de kristallen aan het eene einde van een zuiltje anders liggen dan aan het andere, dan zal ook aan het eene einde een tweemaal zoo sterk HALL-effect kunnen optreden, en het volle HALL-effect van plaatje R 7 als storing kunnen optreden in de weerstands-bepalingen. Na een draaiing over  $90^\circ$  om de lengteas van het zuiltje komt op de plaats, waar eerst het kleinste HALL-effect was, nu het grootste, tenminste wanneer de kristallen in eenzelfde dwarsdoorsnede nagenoeg parallel liggen; immers ook de standen van R 7 en R 8 verschillen  $90^\circ$ : vandaar de omkeering van het teeken in het verschil. Worden voor- en achtervlak verwisseld, dan komt aan de electrode waar vroeger het sterke HALL-effect was nu het zwakke (de weerstandselectroden komen uit op het onderste vlak); ook thans keert dus het teeken van het verschil om. Worden de dwarsafmetingen tweemaal zoo klein, dan wordt de weerstand viermaal grooter, het HALL-effect slechts tweemaal, dus de storing wordt betrekkelijk tweemaal kleiner.

De waarnemingen met de overige zuiltjes bevestigden deze verklaring daar zij over 't algemeen dezelfde regelmatigigheden vertoonden. Hier vermelden we alleen nog de waarnemingen volgens b en d met zuiltje N<sup>o</sup>. I.

*b*

Stand.	Magn. A.	Magn. B.	Gem.	Vershil.
1	33,9	30,6	32,3	+ 3,3
2	24,3	35,1	29,7	- 10,8
3	35,9	27,6	31,7	+ 8,3
4	24,6	31,8	28,2	- 7,2



*d*

Stand.	Magn. A.	Magn. B.	Gem.	Vershil.
1	32,5	30,6	31,5	+ 1,9
2	29,6	28,2	28,9	+ 1,4
3	34,1	30,8	32,4	+ 3,3
4	29,7	27,8	28,8	+ 1,9

Oftochoon bij *d* niet in alle gevallen het teeken van het verschil is omgekeerd, zijn de verschillen zoo klein geworden, dat we hierin geen tegenspraak met bovenstaande verklaring behoeven te zien. Wordt nl. het verschil tusschen de beide einden van het zuiltje zoo gering, dan kunnen verschillen *in dezelfde doorsnede* meer op den voorgrond komen.

Wat nu nog te bewijzen overbleef, was dat werkelijk het HALL-effect, bij een zelfde stuk bismuth gemeten, verschillend kon uitvallen naarmate van den stand die een of andere richting in dit stuk ten opzichte van de magneetkracht innam. Te dien einde werd van deze zelfde zuiltjes het HALL-effect direct bepaald in een voor dit doel opzettelijk samengesteld ebonieten raampje, en wel in de standen 1, 2, 3 en 4 (verg. p. 82). Het resultaat was, in overeenstemming met wat verwacht werd, dat in vele gevallen zeer verschillende HALL-coëfficiënten werden verkregen. Zoo bijv. bij zuiltje N<sup>o</sup>. I.

Stand.	HALL-coëfficient.
1	1,77
2	7,77

De op p. 83 gemaakte onderstelling omtrent den oorzaak van het verschil in HALL-coëfficient bij de plaatjes R 7 en R 8 wordt door deze waarnemingen gerechtvaardigd, zoodat we ook de daarop gegronde verklaring der schijnbare weerstandsverschillen als juist kunnen beschouwen. We zullen daarom voortaan die verschillen steeds op rekening van HALL-effect stellen en dus, om de waarde van den weerstand van bismuth-

zuiltjes te krijgen, het gemiddelde nemen van de waarden voor beide richtingen van het magneetveld. De verschillen tusschen de standen 1 en 3 of 2 en 4 vertoonen in 't geheel geen regelmatigheden; we zullen daarom ook de waarden voor 1 en 3 en voor 2 en 4 tot een gemiddelde vereenigen.

Is dit geschied, dan blijft in vele gevallen nog een zeer goed merkbaar verschil over tusschen de beide middelwaarden voor de weerstandstoename; bijv. bij zuiltje N<sup>o</sup>. 1:

Stand.	Weerstandstoename.
1	21,5
2	27,9

Men ziet, dat de kleinste weerstandstoename gevonden wordt in den stand, waarin ook het HALL-effect het zwakst optreedt.

§ 4. Nu deze bismuthzuiltjes, ofschoon nog niet bijzonder regelmatig gekristalliseerd, reeds tamelijk regelmatige verschijnselen vertoonden, kon men verwachten, bij zuiltjes, uit een homogene kristal massa gesneden, de overblijvende verschillen zeer duidelijk te zien optreden. Een van de kristalstukken, geschonken door het „*Königliches Blaufarbenwerk Oberschlema*” scheen voor de vervaardiging van dergelijke zuiltjes zeer geschikt te zijn. Daaruit werd gesneden een zuiltje, lang 16 m.M. en van gelijke doorsnede als de vroegere, waarvan de zijvlakken evenwijdig liepen aan of loodrecht stonden op het voornaamste splijtingsvlak, terwijl de ribben evenwijdig liepen met een tweede splijtingsvlak (5); een tweede met zijvlakken als het vorige, maar ribben  $\perp$  de vorige, zoo lang als het kristalstuk toeliet ( $\pm 8$  m.M.) (6); een derde met de zijvlakken alle  $\perp$  voornaamste splijtingsvlak, terwijl de zijden van de doorsnede evenwijdig waren aan of loodrecht stonden op de ribben der vorige zuiltjes (eveneens  $\pm 8$  m.M.) (4).

Terwijl het algemeen overzicht der resultaten in § 5 gegeven

wordt, vermelden we hier alleen de waarnemingen over de weerstandsvermeerdering met de zuiltjes 4 en 5.

	Stand.	Magn. A.	Magn. B.	Gem.	Vershil.
N <sup>o</sup> . 4.	1	40,9	28,0	34,4	+ 12,9
	2	23,2	36,2	29,7	— 13,0
	3	37,9	26,3	32,1	+ 11,6
	4	29,1	37,5	33,3	— 8,4
N <sup>o</sup> . 5.	1	17,3	17,7	17,5	— 0,5
	2	28,1	27,1	27,6	+ 1,0
	3	17,2	17,6	17,4	— 0,4
	4	27,9	28,3	28,1	— 0,4

Terwijl de gemiddelden bij 4 slechts kleine onregelmatige verschillen vertoonen, zijn die verschillen bij 5 groot en zeer regelmatig.

Ten slotte zijn de drie kristalzuiltjes No. 1, 2 en 3 uit het kristalstuk van MERCK opnieuw onderzocht, thans ook telkens in meer standen. Hier geven we als voorbeeld de waarnemingen met No. 1 en 2.

	Stand.	Magn. A.	Magn. B.	Gem.	Vershil.
N <sup>o</sup> . 1.	1	6,7	6,3	6,5	+ 0,4
	2	15,1	14,5	14,8	+ 0,6
	3	7,1	5,9	6,5	+ 1,2
	4	15,6	14,4	15,0	+ 1,2
N <sup>o</sup> . 2.	1	9,9	6,7	8,3	+ 3,2
	2	19,2	17,8	18,5	+ 1,4
	3	7,3	7,3	7,3	0
	4	17,7	18,5	18,1	— 0,8

Deze beide zuiltjes, die ten opzichte van de richting van grootsten weerstand (richting van N<sup>o</sup>. 3) denzelfden stand innemen, vertoonen onderling slechts kleine verschillen, veel kleiner dan die tusschen de 90<sup>o</sup> verschillende standen van *hetzelfde* zuiltje.

§ 5. Vatten we de hier vermelde resultaten samen, dan blijkt reeds duidelijk, dat de verschijnselen in bismuth verklaard kunnen worden door aan te nemen dat er één richting is met bijzondere eigenschappen, vergeleken met de richtingen in het vlak loodrecht daarop. Dit nu is juist wat men, op grond van vroegere waarnemingen, verwacht zou hebben.

Zooals bekend is, kristalliseert bismuth in het hexagonale stelsel en wel in rhomboeders, die zeer weinig van kubussen afwijken. De hoofdas verbindt de twee scherpste ruimtehoeken en staat loodrecht op het voornaamste splijtingsvlak (het basisvlak.) Deze hoofdas valt samen met FARADAY'S magne-crystal-as. Volgens MATTEUCCI is zij ook as van grootsten weerstand; ook mijne metingen voeren tot dit resultaat.

De stand van *deze* as blijkt nu volgens mijne waarnemingen ook van grooten invloed te zijn op de verschijnselen, die bismuth in het magnetisch veld vertoont. Zoowel het verschijnsel van HALL, waargenomen in een vlak  $\perp$  krachtlijnen, als de magnetische weerstandstoename, gemeten in richtingen van dat zelfde vlak, treden aanmerkelijk zwakker op, wanneer de hoofdas in richting met de krachtlijnen samenvalt.

De volgende tabellen moeten dienen om deze uitspraak te bevestigen. Bij de kristalstukken was de stand der hoofdas bekend, daar de splijtingsvlakken zeer goed ontwikkeld waren. Bij het gegoten bismuth, dat niet geheel regelmatig gekristalliseerd was, zooals ook bleek uit het onderzoek der splijtingsvlakken, kon men zich van dit hulpmiddel niet bedienen en is daarom als hoofdas aangenomen de richting van het zuiltje met den grootsten soortelijken weerstand (3).

Zoowel bij de plaatjes en zuiltjes, van dit stuk bismuth afkomstig als bij die, uit kristalstukken vervaardigd, komen nog wel hier en daar verschillen tusschen de beide richtingen loodrecht op de hoofdas voor. Regelmaat is daarin evenwel niet te ontdekken, en bovendien zijn de verschillen soms zeer gering en altijd veel kleiner dan die tusschen een van beide en de hoofdas. Om het overzicht duidelijker te maken, heb ik daarom van de waarden voor die beide richtingen alleen een gemiddelde opgenomen, te vinden in de kolom „tweede richting.”

## GEGOTEN BISMUTH (§ 2).

Richting :	Hoofdas ( $\perp$ plaatje R 7.)	Tweede richting.	N <sup>o</sup> .	Opmerkingen.
<i>Soortelijke weerstand.</i>	147000	130000	3 1, 2, I, II.	
<i>Weerstand- toename in %.</i>	21,5	27,9	1	De getallen in de eerste kolom zijn niet de vermeerdering van den weerstand 147000, maar de vermeerdering van den weerstand 130000, wanneer de hoofdas met de krachtlijnsamenvalt
	25,4	28,5	2	
	25,0	29,6	II	
	32,6	28,6	I	
		33,5	3	
<i>HALL-constante.</i>	1,77	7,77	1	De getallen achter de accolades zijn gemiddelden.
	3,36	8,73	2	
	5,12	4,78	II	
	5,22	5,65	I	
		9,17	3	
	3,36		R 7	
	6,39	R 8		

Ofschoon er nog groote verschillen overblijven, is toch duidelijk zichtbaar dat de als „hoofdass” aangenomen richting de opgegeven eigenschappen heeft. Het gemiddelde der HALL-constanten voor de vier zuiltjes in den stand, overeenkomende met dien van het plaatje R 7 tusschen de polen, 3,87, wijkt niet veel af van de met R 7 verkregen waarde 3,36; evenzoo stemt het gemiddelde 6,53 met de waarde 6,39 van R 8 overeen.

De verschillen in de eerste kolom voor weerstandstoename moeten dienen ter verklaring van de in R 7 waargenomen dissymmetrie. Vormen we er twee gemiddelden uit, dan vinden we 23,5 (1,2) en 28,3 (I, II), dus verschil 4,8 0/0. De oorspronkelijke weerstand was voor beide richtingen 130000. De grootte d, in Hoofdstuk III § 2 ingevoerd, is hier dus 2130 c. g. s., zoodat  $\frac{8}{\mu}$  d, de maat voor de dissymmetrie,  $\pm 8000$  c. g. s. wordt, terwijl in § 2 van dit Hoofdstuk werd opgegeven als uitkomst der meting  $\pm 5200$  c. g. s. Dat deze getallen niet geheel overeenstemmen mag zeker wel voor een groot deel daaraan toegeschreven worden, dat de zuiltjes I en II genomen waren uit gedeelten van het gegoten stuk bismuth, dichter bij den rand daarvan gelegen dan het plaatje zelf. Alle metingen met I wijzen er bovendien op, dat de hoofdass in dit zuiltje meer overeenkwam met wat we bij de andere „tweede richting” hebben genoemd. Van veel gewicht is verder, dat hier kon worden nagegaan, dat het teeken van de dissymmetrie ook overeenstemde met het teeken der gevonden verschillen.

## KRISTALSTUK VAN OBERSCHEMA.

Richting:	Hoofdas	Tweede richting.	N <sup>o</sup> .	Opmerkingen.
<i>Soortelijke weerstand.</i>	146000		4	
		122000	5	
		156000?	6	In 6 was een barst.
<i>Weerstands- toename in 0/0.</i>	17,5		5	
	26,8		6	
		30,5	4, 5, 6	
HALL-constante.	0,96		5	
	4,43		6	
		7,59	4, 5, 6	Bij 5 7,37.

## KRISTALSTUK VAN MERCK.

Richting:	Hoofdas (Lplaatje R 6)	Tweede richting.	N <sup>o</sup> .	Opmerkingen.
<i>Soortelijke weerstand.</i>	172000		3	
		151500	1, 2	
<i>Weerstands- toename in 0/0.</i>	6,5		1	
	7,7		2	
	$\pm 9,0$	16,4	1, 2, 3 R 6	Bepaald volgens Hoofdstuk VI § 3 (2).
HALL-constante.	1,28		1	
	1,47		2	
	$\pm 2,00$	7,30	1, 2, 3 R 6	

De grootere weerstand en kleinere weerstandsvermeerdering over 't algemeen zal misschien moeten worden toegeschreven aan den invloed van snel afkoelen.

Het zou wenschelijk geweest zijn ook de meting der dissymmetrie bij de zuiltjes als controle van de gegeven verklaring aan te wenden. Om redenen, in Hoofdstuk II § 5, A en B, aangevoerd, zijn echter deze metingen zoo onbetrouwbaar, dat we de proeven hier niet zullen vermelden.

§ 6. De tot hiertoe gemaakte onderstellingen zijn voldoende om de verschijnselen in plaatjes, wier vlak loodrecht op de hoofdas staat of door de hoofdas gaat, en in zuiltjes, wier lengterichting met de hoofdas samenvalt of daar loodrecht op staat, te verklaren. *Werkelijke dissymmetrie zal in deze nooit optreden*, omdat in alle richtingen van het vlak  $\perp$  de magnetische kracht de weerstand evenredig toeneemt.<sup>1)</sup> Om echter te verklaren, waarom in het geval dat de hoofdas een willekeurigen stand inneemt, de weerstand in verschillende richtingen verschillend toeneemt, moet nog een nieuwe onderstelling gemaakt worden:

*In het magnetisch veld neemt de weerstand slechts toe in alle richtingen van een vlak  $\perp$  de magnetisatie; in dit vlak worden alle weerstanden evenredig vermeerderd.*

Een magnetische kracht, gericht volgens de hoofdas, veroorzaakt een grooter magnetisatie, dan dezelfde kracht werkende in een richting loodrecht op deze. Het gevolg daarvan is dat, wanneer de hoofdas niet loodrecht op het

---

1) Dit blijkt uit de bijna volkomen overeenstemming tusschen de waarden, bijv. bij de zuiltjes 1, 2 en 3 van het kristalstuk van MERCK voor de weerstandstoename verkregen in de standen, onder „tweede richting” bijeen gebracht.



plaatje staat of in het vlak daarvan ligt, de *magnetisatie*, door een magnetische kracht loodrecht op het plaatje opgewekt, *niet* loodrecht op het plaatje staat. Volgens onze hypothese zal nu de weerstandstoename plaats grijpen alleen in de richtingen van een vlak, dat het vlak van het plaatje snijdt. In de snijlijn van beide neemt de weerstand met het volle bedrag toe, in de richting van het plaatje loodrecht hierop slechts met een kleiner bedrag, te kleiner naarmate de hoek tusschen magnetisatie en magneetkracht grooter is. (Stelt men de maximum toename in  $\%$  door  $p$  voor, den genoemden hoek door  $\alpha$ , en verwaarloost hoogere machten van  $p$ , dan is de procentische toename in de tweede richting  $p \cos^2 \alpha$ ).

Zien we thans nog even terug op de vraag naar de evenredigheid tusschen dissymmetrie en weerstandstoename, besproken in Hoofdstuk V, § 2, dan zien we dat die vraag beslist wordt door de al of niet veranderlijkheid van dezen hoek ( $\alpha$ ) bij verandering van de magnetische kracht. Blijft de verhouding der magnetische permeabiliteit *in en loodrecht op* de richting van de hoofdas constant bij verandering van de magnetische kracht, dan blijft  $\alpha$  constant en moet de dissymmetrie evenredig blijven aan de weerstandstoename. De afwijkingen van deze laatste evenredigheid zouden dus volgens onze hypothese bewijzen, dat ook de verhouding der permeabiliteiten niet constant blijft.

Den toestand in een bismuthplaatje met scheef geplaatste hoofdas in het magnetisch veld kunnen we ons nu als volgt denken:

Het vlak van het plaatje wordt voorgesteld door

*Pl.* (fig. VI) de magnetische kracht, loodrecht hierop aangebracht, door *H*. De hoofdas loopt in de richting *OA*. Het vlak door *OH* en *OH* snijdt het vlak *Pl.* volgens *OA*<sup>1</sup>. Stelt de lengte van *OA* de magnetisatie voor, teweeggebracht door een magneetkracht gelijk aan *H* in de richting van de hoofdas werkende, *OR* de magnetisatie wanneer diezelfde kracht werkt in een richting loodrecht op de hoofdas, en maken we de verhouding  $\frac{OD}{OB} = \sqrt{\frac{OA}{OB}}$  dan wordt de *richting* van de magnetisatie in ons geval bepaalt door het raakpunt van de raaklijn, evenwijdig aan *OA*<sup>1</sup> getrokken, met de ellips *BD*; de *grootte* van de magnetisatie door de lengte van den vector door dit raakpunt in de ellips *AB*<sup>1</sup>. (In plaats van ellips en raaklijn zou men ook omwentelings-ellipsoïde en raakvlak  $\perp$  *Pl.* kunnen gebruiken). Was de magnetisatie *M* volgens *OA* gericht dan zou de HALL-coëfficiënt klein zijn en door *OE* worden voorgesteld; door *OF* daarentegen zoo de magnetisatie de richting *OB* had. Thans wordt de HALL-coëfficiënt bepaald door de lengte *OR* van den vector *OM* in de ellips *EF*. Niet onmogelijk zou zijn, dat het sterkste HALL-effect thans optrad in een vlak  $\perp$  *OM* in plaats van in *Pl.* en voor het HALL-effect in *Pl.* de componenten van *OM* volgens *OH* in rekening gebracht moest worden.

Voor de weerstandsverandering beschouwen we fig. VII, waarin *OM* reeds in de juiste richting is aangebracht. Om de hoofdas, hier door *OS* voorgesteld, als omwentelingsas wordt een weerstands-ellipsoïde beschreven, waarvan *ACD*

<sup>1</sup>) In de mededeeling aan de Kon. Ak. v. Wet., Zittingsverslag van 21 April '97 staat ten onrechte, dat richting en grootte der magnetische kracht met behulp van één ellipsoïde gevonden worden.

de doorsnede met het vlak door  $OS$  en  $OH$  voorstelt, en  $BD$  de doorsnede met het vlak  $W$ , loodrecht op  $OM$ . De symmetrie-assen van het plaatje en de weerstanden in de richting dier assen buiten het magnetisch veld worden door  $OA$  en  $OB$  voorgesteld.

Viel  $OM$  samen met  $OS$  dan zou de weerstand toenemen met het kleine procent voorgesteld door  $OG$ ; viel  $OM$  daarentegen in de richting loodrecht hierop, dan zou de toename door  $OK$  worden aangegeven; thans wordt de toename voorgesteld door  $OP$ , en heeft plaats in het vlak  $W$ . De weerstands-ellips  $BD$  wordt dus vergroot tot  $B^1D^1$ , waarbij de assen-verhouding ongewijzigd blijft. In de richting  $OM$  heeft geen weerstandsvermeerdering plaats: de nieuwe weerstands-ellipsoïde, thans drie-assig geworden, wordt dus in doorsnede door  $D^1C^1A^1$  voorgesteld. De nieuwe weerstand-assen van het plaatje zijn nu  $OA^1$  en  $OB^1$ ; de verhouding van  $OB^1$  tot  $OB$  is grooter dan die van  $OA^1$  tot  $OA$ . In het plaatje zal dus dissymmetrie worden waargenomen.

## HOOFDSTUK VII.

### Voorloopige onderzoekingen van verschillenden aard.

§ 1. *Verandering van den gemiddelden HALL-stroom in bismuth met de temperatuur bij verschillende waarden van de magnetische kracht.*

Bij de waarnemingen over verandering van de dissymetrie met de temperatuur in plaatje N<sup>o</sup>. 1 werd tevens opgemerkt, dat tusschen de daarbij voorkomende temperatuurgrenzen (10° en 100°) de gemiddelde HALL-stroom niet merkbaar afnam bij verwarming. Dit scheen in strijd met de resultaten van LEBRET, die voor  $\frac{S_{100}}{S_{20}}$  vond 0,668 bij bismuth I en 0,656 bij bismuth II.

De genoemde waarnemingen waren verricht in een veld van 8600.

Latere waarnemingen in een veld van 5500 gaven echter *wel* daling van gemiddelden HALL-stroom bij verhooging van temperatuur.

Ik heb daarop onderzocht of de sterkte van het magneetveld ook van invloed was op den temperatuurcoëfficiënt van het HALL-effect en de volgende resultaten verkregen.

Rond plaatje N <sup>o</sup> . 1.		N <sup>o</sup> . 2.		N <sup>o</sup> . 3.	
M	$\frac{S_{100}}{S_{20}}$	M	$\frac{S_{100}}{S_{20}}$	M	$\frac{S_{100}}{S_{20}}$
7600	0,893	8600	0,728	7600	0,706
5500	0,783	5500	0,680	4800	0,700
500	0,658	1400	0,582	1400	0,575

Deze getallen zijn uit slechts enkele waarnemingen berekend, zoodat de nauwkeurigheid niet groot is. Ofschoon dus verder onderzoek wenschelijk is, blijkt er reeds duidelijk uit dat de relatieve *toename* van het HALL-effect bij *verlaging* van temperatuur *grooter* wordt, naarmate het magneetveld *zwakker* is. Men kan dit ook aldus uitdrukken: Bij hogere temperaturen neemt de HALL-stroom *sterker toe* met de magnetisatie dan bij lagere temperaturen.

Bijna hetzelfde ziet men bij de geleidbaarheid van bismuth: De *toename* van de geleidbaarheid bij *verlaging* van temperatuur wordt *grooter*, naarmate het magneetveld *zwakker* is.

Bij hogere temperaturen neemt de geleidbaarheid *minder af* met de magnetisatie dan bij lagere temperaturen.

In de velden van 7600 en 1400 is de verhouding  $\frac{r_{100}}{r_{20}}$  ( $r =$  weerstand) respectievelijk 1,10 en 1,34.

Interpoleert men uit bovenstaande tabellen de waarden in de velden van 7600 en 1400 voor de drie plaatjes en vermenigvuldigt de verkregen getallen met 1,10 en 1,34 dan vindt men

M	N <sup>o</sup> . 1.	N <sup>o</sup> . 2.	N <sup>o</sup> . 3.
	$\frac{S_{100}}{S_{20}}$	$\times$	$\frac{r_{100}}{r_{20}}$
7600	0,982	0,781	0,777
1400	0,904	0,780	0,770

Uit de waarnemingen van HENDERSON blijkt, dat in sterke magneetvelden de geleidbaarheid van bismuth tusschen 0

100° een maximum heeft, welk maximum zich bij zwakker wordende velden naar lagere temperatuur verschuift. Uit de waarnemingen van FLEMING en DEWAR<sup>1)</sup> blijkt, dat bijv. voor een veld van 5500 c.g.s. dit maximum dicht bij 0° te vinden is, terwijl het bij 2450 c.g.s. eerst bij — 60° bereikt wordt. Aanvankelijk scheen het, dat ook hier de overeenkomst tusschen HALL-effect en geleidbaarheid bleef bestaan, daar LEBRET bij bismuth II<sup>2)</sup> een maximum had gevonden voor den HALL-coëfficiënt bij — 20° ongeveer, terwijl die coëfficiënt voor bismuth I bij — 70° tot een maximum scheen te naderen. Mijn waarneming met plaatje R 2 geeft, zooals men op p. 65 ziet, voor bismuth I een maximum bij — 30°.

Hoogstwaarschijnlijk echter zijn deze maxima veroorzaakt door een zeer geringe onzuiverheid van deze beide bismuthsoorten, die ook aanleiding gaf tot het maximum in de geleidbaarheid van bismuth *buiten* het magneetveld, waargenomen door FLEMING en DEWAR<sup>3)</sup>. De enkele waarnemingen, door mij bij lage temperatuur verricht met het bismuth van MERCK en het kristallijne bismuth van OBERSCHLEMA, toonen tenminste duidelijk aan, dat er bij dit bismuth voor die temperaturen geen sprake is van een maximum HALL-coëfficiënt. In de onderstaande tabel worden de waarden voor den HALL-stroom bij plaatje R 3 voor drie magneetvelden opgegeven. Daar de waarnemingen niet zeer nauwkeurig zijn, bepalen we ons tot geïnterpoleerde waarden.

M	— 60°	— 50°	— 40°	— 30°	— 20°	— 10°	0°
6150	—	14,65	13,85	13,20	12,62	12,15	11,70
4350	13,60	12,60	11,70	10,95	10,32	9,90	9,52
2950	—	9,95	9,37	8,82	8,32	7,87	7,42

<sup>1)</sup> Zie Hoofdstuk I § 4.

<sup>2)</sup> Dissertatie p. 97.

<sup>3)</sup> Zie Hoofdstuk I § 4.

De verhouding  $\frac{S_0}{S_{-50}}$  is, in de velden 2950, 4350 en 6150 respectievelijk 0,746, 0,756, en 0,792 zoodat ook hier de verandering met de temperatuur het zwakst blijkt te zijn in sterke magneetvelden.

Het geleidingsvermogen neemt tusschen 0 en  $-50^{\circ}$  toe voor het zwakste, sterk af voor het sterkste veld. Vermenigvuldigen met  $\frac{r_0}{r_{-50}}$  zou hier de rangorde der getallen omkeeren en de verschillen grooter maken.

§ 2. *Waarnemingen over weerstand en weerstandstoename door magnetisatie bij lage temperatuur.*

Deze waarnemingen zijn uitsluitend verricht met zultje N<sup>o</sup>. 5 van het kristalstuk uit OBERSCHLEMA.

*Verandering van den weerstand met de temperatuur buiten het magnetisch veld.*

Stellen we den, uit de waarnemingen geïnterpoleerden weerstand bij  $0^{\circ}$  gelijk aan 1, dan werd gevonden voor den weerstand bij:

— $68^{\circ}$	0,792	— $21^{\circ}$	0,930
— $63^{\circ}$	0,800	— $11^{\circ}$	0,964
— $63^{\circ}$	0,808	— $5^{\circ}$	0,988
— $55^{\circ}$	0,825	— $2^{\circ}$	1,000
— $49^{\circ}$	0,842	+ $1^{\circ}5$	1,013
— $41^{\circ}$	0,870	+ $5^{\circ}$	1,026
— $32^{\circ}$	0,899	+ $7^{\circ}$	1,034

Vóór de afkoeling was bij  $+11^{\circ}5$  eveneens de waarde 1,034 verkregen. De waarden bij lage temperatuur, behalve die bij  $-68^{\circ}$  liggen volkomen op een rechte lijn; de afwijkingen in de buurt van  $0^{\circ}$  kunnen misschien door een fout in de temperatuur veroorzaakt zijn. Daar nl. de in de

dissertatie van LERRET beschreven bak voor het vloeistofbad niet tusschen de klossen van den grooten electromagneet paste, werd een eenvoudig plat koperen bakje gebruikt, dat niet veel alcohol kon bevatten, zoodat, als het vaste koolzuur geheel verdwenen was, wel eens te weinig alcohol aanwezig was om het zuiltje geheel te bedekken.

De temperatuur-coëfficiënt tusschen  $0^{\circ}$  en  $-70^{\circ}$  is volgens deze waarnemingen 0,0032. De waarde van FLEMING en DEWAR bij electrolytisch bismuth was 0,00353.

*Weerstandstoename door magnetisatie.*

Bij dit zuiltje is in de standen 1 en 2 de weerstand in een magnetisch veld van  $\pm 7800$  c. g. s. bepaald. Uit de waarnemingen zijn de weerstanden voor de temperaturen  $-70^{\circ}$ ,  $-60^{\circ}$  enz. geïnterpoleerd, waarna door vergelijking met den weerstand buiten het magneetveld de procentische toename berekend werd.

Stand.	$-70^{\circ}$	$-60^{\circ}$	$-50^{\circ}$	$-40^{\circ}$	$-30^{\circ}$	$-20^{\circ}$	$-10^{\circ}$	$0^{\circ}$	$+10^{\circ}$
1	57,2	48,8	40,9	34,2	28,4	23,9	21,0	18,6	16,8
2	77,5	67,8	58,5	50,3	43,6	38,0	34,1	30,6	28,0

Het verschil in toename is dus bij  $-70^{\circ}$  juist tweemaal zoo groot als bij  $+10^{\circ}$ . De verandering met de temperatuur is analoog aan die van het electrolytische bismuth, maar de absolute bedragen zijn kleiner.

Bij ditzelfde zuiltje is het HALL-verschijnsel nog gemeten tusschen  $0^{\circ}$  en  $-70^{\circ}$ . De waarnemingen zijn nog te weinig talrijk om zekere uitkomsten te geven. Het schijnt echter dat de toename in den stand van het zwakke HALL-effect kleiner is dan in dien van het groote. Terwijl n.l. in den



stand 1 de verhouding  $\frac{S_{-70}}{S_0} = 1,26$ , is diezelfde verhouding in den stand 2  $\mu$  1,39.

§ 3. *Waarnemingen met Antimonium.*

De voorloopige resultaten van het onderzoek van een vierkant en een rond plaatje, gegoten op de manier ook voor bismuth gebezigd, maar bij een temperatuur van den vorm nog ver beneden het smeltpunt van Antimonium ( $\pm 450^\circ$ ) zijn:

Coëfficiënt van HALL  $R = 0,22$  in een veld van 5450 c. g. s. In zwakkere velden schijnt  $R$  iets hooger te zijn; in een veld van 2900 c. g. s. werd bijv. 0,27 gevonden. Waarnemingen met dunne plaatjes zouden evenwel noodig zijn om dit resultaat buiten twijfel te stellen.

Dissymmetrie te klein om stellig geconstateerd te worden.

Afname van  $R$  van  $13^\circ$  tot  $200^\circ$  in reden van 1 tot 0,66.

Waarnemingen gedurende of kort na een afkoeling geven steeds een te laag bedrag van  $R$ . Hetzelfde deed zich in zeer sterke mate voor bij de proeven van DRUDE en NERNST (Zie Dissertatie LEBRET pag. 39).

De geringe dissymmetrie kan een gevolg zijn van de structuur der onderzochte plaatjes, die nog vrij onregelmatig was, kan echter ook in verband staan met een zeer geringe waarde van  $k_M \Delta \left(\frac{d}{k}\right)$ . Voor de geheele weerstandstoe- name werd door von ETTINGSHAUSEN in een veld van 10600 slechts 1,1 pCt. en door LENARD in een veld van 6600 1,2 pCt. gevonden.

## HOOFDSTUK VIII.

---

### Verklaring van het verschijnsel van Hall in electrolyten, in verband met de overige in bismuth waargenomen verschijnselen.

§ 1. Reeds kort na de ontdekking van het verschijnsel van HALL is van verschillende zijden<sup>1)</sup> de opmerking gemaakt, dat bij de beschrijving van dit verschijnsel twee opvattingen mogelijk zijn. Men kan denken aan een wijziging van de betrekking tusschen potentiaal-verval en stroomdichtheid in het magnetische veld, of wel een directe werking van de magnetische kracht op den stroom aannemen en dus het verschijnsel beschouwen als gevolg van het optreden eener nieuwe electromotorische kracht.

LORENTZ<sup>2)</sup> heeft aangetoond, dat voor de verklaring in dat geval bovendien nog moet worden aangenomen een verschil tusschen het gedrag van positieve en negatieve electriciteit.

In de onderstelling, dat dit verschil bestaat in een verschillende snelheid van de beide electriciteiten heeft BOLTZMANN<sup>3)</sup> er op gewezen, dat men uit de grootte van het HALL-verschijnsel het verschil dier snelheden in absolute maat zou kunnen berekenen.

---

1) Zie o.a. LEBRET, Dissertatie Hoofdstuk II.

2) Verslagen en Mededeelingen K. A. v W. 19, p. 217, 1883.

3) Wien. Sitz. Ber. 94, p. 644, 1887.

In de theorie der electriche verschijnselen, zooals die door LORENTZ<sup>1)</sup> is opgesteld, wordt de electriche stroom opgevat als een convection-stroom van geladen deeltjes, „ionen”. Bewegen deze zich in een magnetisch veld  $H$  met snelheid  $v$ , dan wordt aangenomen, dat zij per eenheid van lading een kracht ondervinden, die in richting en grootte wordt voorgesteld door het vector-product  $[v, H]$ . Zoodra men nu voor de positieve en negatieve geladen deeltjes een verschillende  $v$  aanneemt, volgt uit deze theorie de noodzakelijkheid van het optreden van het verschijnsel van HALL.

Terwijl de voorstellingen over de electriciteits-beweging in metalen nog zeer uiteenloopen, wordt bij de electrolyten vrij algemeen aangenomen, dat de overbrenging der electriciteit geschiedt door middel van ionen. Bovendien zijn hier de snelheden der beide ionen in vele gevallen bekend, zoodat alle gegevens aanwezig schijnen te zijn om de juistheid der theorie op de proef te stellen. We zullen daarom thans nagaan, wat de uitdrukking voor de HALL-constante in electrolyten wordt bij het aannemen van eenige vereenvoudigende onderstellingen, en vervolgens de uitkomst vergelijken met die van de waarnemingen over dit onderwerp.

Dit moest wel de eerste stap zijn, wanneer ik omtrent het mechanisme van het HALL-verschijnsel in verband met de magnetische weerstands-vermeerdering in bismuth en van het mechanisme der electriciteitsbeweging in metalen in het algemeen mij eene voorstelling wilde vormen.<sup>2)</sup>

1) Zie bijv. Lorentz, Versuch einer Theorie der electricen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.

2) Dat ook uit het KERR-verschijnsel — hetwelk met dat van HALL in zoo nauw verband staat — bijdragen tot de kennis van het wezen van den galvanischen weerstand zouden zijn te putten, heeft ook reeds SISSINGH voor den geest gestaan.

§ 2. Als eerste vereenvoudigende onderstelling nemen we aan dat in een electrolyt, bij afwezigheid van electriche of magnetische krachten, alle vrije ionen van dezelfde soort zich met dezelfde snelheid bewegen, en deze snelheden gelijkmatig over alle richtingen in de ruimte zijn verdeeld.

Onderstellen we verder dat een electrostatisch veld wordt aangebracht met constant potentiaal-verval  $E_x$  in de richting der X-as, terwijl  $E_y$  en  $E_z = 0$ . Deze kracht tracht de snelheid der ionen in de richting der X-as te vergrooten; de voortdurende botsingen met het oplosmiddel maken het echter onmogelijk dat de ionen een merkbaar grootere kinetische energie krijgen dan de moleculen van het oplosmiddel of de niet gedissocieerde moleculen der opgeloste stof; de arbeid der electriche kracht komt dus geheel ten goede aan de onregelmatige beweging der moleculen van het geheele electrolyt, de warmtebeweging. Voor de ionen zelf blijft alleen over een vermeerdering van de gemiddelde snelheid, waarmede de weg tusschen twee botsingen, de „vrije weg,” wordt afgelegd.

Letten we voorloopig alleen op de positieve ionen, stellen we de lading op  $e$ , de massa op  $m_1$  en den tijd tusschen twee botsingen op  $t_1$ , dan is de vermeerdering van de gemiddelde snelheid in de richting der X-as.

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{E_x e t_1}{m_1}$$

waarbij is ondersteld, dat het ion na iedere botsing weer met dezelfde gemiddelde snelheid begint.

De hoeveelheid electriciteit, die in dit geval door een vlakje van  $1 \text{ cm}^2$   $\perp$  X-as per tijdseenheid passeert in de richting der positieve X-as kan berekend worden als in het geval dat alleen een snelheid  $U_1$  bestond, daar bij de oor-

spronkelijke beweging naar beide zijden evenveel ging. Zijn er  $N$  vrije ionen per  $\text{cM.}^3$  aanwezig, dan is die hoeveelheid:

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{N E_x e^2 t_1}{m_1} = N e U_1$$

Voor de bijkomende snelheid in de richting der negatieve X-as vinden we bij de negatieve ionen:

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{E_x e t_2}{m_2}$$

en voor de hoeveelheid electriciteit in de richting der positieve X-as passeerende:

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{N E_x e^2 t_2}{m_2} = N e V_1$$

De totale stroomdichtheid is dus

$$u_1 + u_2 = N e (U_1 + V_1)$$

Denken we ons thans een homogeen magnetisch veld met intensiteit  $H$  in de richting der positieve Y-as aangebracht. Onder den invloed van de kracht [v. H.] zullen de „vrije wegen”, die we ons eerst als recht kunnen denken, overgaan in deelen van eirkels of schroeflijnen om de magneetkrachtlijnen. Is daarbij de doorloopen hoek niet te groot, dan zullen we mogen aannemen, dat de lijn die de plaatsen van het ion in de oorspronkelijke en in de gewijzigde beweging verbindt  $\perp$  oorspronkelijke beweging is gericht. Een schatting van dien hoek kunnen we nu door de volgende beschouwing verkrijgen:

Noemen we de componenten van de snelheid in het vlak  $\perp$  Y-as  $v$ , dan vindt men gemakkelijk voor den kromtestraal

$$r = \frac{mv}{eH}$$

zoodat de tijd, noodig voor een geheele omwenteling is

$$T = \frac{2\pi m}{eH}$$

Stellen we eens  $H = 10^4$ , dan vinden we bij waterstof, waar  $\frac{e}{m} = 10^4$   $T = 2\pi \cdot 10^{-8}$

Voor waterstofgas van  $0^\circ$  bij een druk van 760 m.M. wordt de gemiddelde duur van een vrije weg berekend op  $1 \cdot 10^{-10}$ . Voor een waterstof-ion, zich bewegende te midden van watermoleculen zal dit zeker veel minder zijn. Een andere schatting van  $t_1$  kunnen we krijgen indien we de formule voor  $U_1$  als juist aannemen. Voor een oplossing van HCl 0,1 normaal vond KOHLRAUSCH <sup>1)</sup> bij een electromotorische kracht van 1 volt per c.M.  $U_1 = 0,0029$  c.M. per seconde. 1 volt =  $10^8$  c. g. s. eenheden, dus

$$0,0029 = \frac{1}{2} \cdot 10^8 \cdot 10^4 \cdot t_1 \text{ of}$$

$$t_1 = 0,58 \cdot 10^{-14}$$

Deze waarde zou geven voor den doorloopen hoek  $\pm \frac{1}{2}$  seconde, de waarde  $10^{-10}$ , die zeker te groot is, nog slechts een halven graad. We maken dus waarschijnlijk geen groote fout wanneer we het bedoelde lijntje  $\perp$  richting der oorspronkelijke beweging aannemen.

Zonder de bijkomende bewegingen  $U_1$  en  $V_1$  zou de uitwerking der kracht [v. H] 0 zijn, daar dan altijd evenveel deeltjes in positieve als in negatieve richting zouden worden gedreven. Thans kunnen we het beginsel der superpositie toepassen en rekenen, alsof alléén  $U_1$  en  $V_1$  er waren. Op de positieve ionen werkt dan een kracht  $U_1 e H$ , op de negatieve  $V_1 e H$ , voor beide in de richting der positieve Z-as. Per eenheid electriciteit werkt dus op de

positieve ionen een kracht  $U_1 H$   
 en op de negatieve " " "  $V_1 H$ .

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 50 p, 404, 1893.

Bij verschil tusschen  $U_1$  en  $V_1$  ontstaat een potentiaalverschil in de richting der  $Z$ -as, tengevolge van ophooping van ladingen. We onderstellen nu, dat we te doen hebben met een oplossing van een stof die slechts weinig gedissocieerd is, zoodat de concentratie der vrije ionen niet verandert. Het potentiaalverschil zal dan aangroeien, totdat er evenveel negatieve als positieve electriciteit in de richting der  $Z$ -as stroomt. Noemen we het dan aanwezige potentiaalverval langs de  $Z$ -as  $E_z$ , dan zijn de resulterende krachten

$U_1 H + E_z$  voor de positieve ionen

$V_1 H - E_z$  „ „ negatieve „ per eenheid electriciteit.

Zullen de snelheden gelijk worden, dan moet

$$\frac{U_1 H + E_z}{E_x} U_1 = \frac{V_1 H - E_z}{E_x} V_1$$

dus  $E_z = -H(U_1 - V_1)$

Electricisch evenwicht is nu verkregen. Het mechanisch evenwicht zal tot stand komen door diffusie van niet gedissocieerde moleculen, welke juist de stof-verplaatsing door de met gelijke snelheid bewegende positieve en negatieve ionen zal compenseeren.

Zijn  $U$  en  $V$  de snelheden voor een potentiaalverval 1, dan is

$$U_1 = E_x U \text{ en } V_1 = E_x V, \text{ dus}$$

$$\frac{E_z}{E_x} = -H(U - V)$$

Uitgedrukt in den coëfficient  $R$  van HALL en den soortelijken weerstand  $r$  vinden we

$$\frac{E_z}{E_x} = -H \frac{R}{r}$$

$$\text{dus } R = r(U - V) = \frac{1}{N e} \frac{U - V^1}{U + V}$$

<sup>1)</sup> Dezelfde formule wordt ook afgeleid door WIND in: Een studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het HALL-effect. (Verh. Kon. Ak. v. Wet. Deel V No. 3 § 17.) Alleen ontbreekt door een vergissing de  $N$ .

§ 3. De resulteerende kracht, werkende op de positieve ionen, is per eenheid electriciteit  $H V_1$ , die werkende op de negatieve ionen  $H U_1$ . Op de in de volume-eenheid aanwezige electriciteit werkt dus nog in 't geheel een kracht  $N e (U_1 + V_1) H$ ; dit is juist het bedrag van de gewone *ponderomotorische kracht*.

Is de geleider in rust, dan worden toch de ionen in de richting van de Z-as voortgedreven. De daarbij verrichte arbeid moet als warmte te voorschijn komen. Tevens wordt de ionen-concentratie aan den eenen kant verminderd, aan den anderen kant vergroot. Het gevolg zal zijn splitsing van moleculen in ionen aan den eersten kant, vorming van moleculen aan den anderen kant, en hiermede gepaard gaande afkoeling en verwarming; alles te zamen een dergelijk verschijnsel als het *galvanomagnetisch temperatuur-verschil* van VON ETTINGSHAUSEN.<sup>1)</sup> Bovendien ontstaat nog een concentratiestroom, zooals boven werd opgemerkt.

Zoodra men aan de ionen ook een zeker aandeel in de warmtegeleiding toekent ziet men gemakkelijk in, dat ook het *transversaal thermomagnetisch effect* van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST<sup>2)</sup> te verklaren is. Letten we bijv. op de positieve ionen die passeeren door een vlak  $\perp$  de richting van den warmtestroom, dien we van links naar rechts zullen onderstellen. De naar rechts gaande ionen hebben dan een grootere snelheid dan de naar links gaande; de aantallen zijn gelijk. Beide ondervinden nu de werking der electromagnetische kracht, in tegengestelde richtingen, maar de naar rechts gaande sterker. Een ion dat eenmaal heen en weer was geweest zou dus bijv. in 't geheel genomen de

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 31 p. 737. 1887. LEBRET, Dissertatie p. 48.

<sup>2)</sup> Wied. Ann. 29 p. 343. 1886. LEBRET, Dissertatie p. 45.



werking van een kleine kracht naar boven ondervonden hebben. Een negatief ion daarentegen zou gemiddeld aan een kleine kracht naar beneden onderworpen zijn. Beide krachten zouden evenredig zijn aan het snelheidsverschil, voorkomende op den afstand van de gemiddelde weglengte. Evenwicht is dan alleen mogelijk bij aanwezigheid van een potentiaalverval van boven naar beneden, dat evenredig zou worden aan het temperatuur-verval en met de magneetkracht zou omkeeren.

§ 4. *Vergelijking van theorie en waarnemingen.*

Over mogelijke thermomagnetische verschijnselen in electrolyten zijn nooit waarnemingen gedaan en het is wel waarschijnlijk, dat die met groote moeilijkheden gepaard zouden gaan. De eenige, die wat het verschijnsel van HALL betreft positieve resultaten heeft verkregen is BAGARD<sup>1)</sup>. Wat is volgens de theorie bij een oplossing van  $\text{Cu SO}_4$ . 0,5 normaal, te verwachten?

Uit de waarnemingen van KOHLRAUSCH<sup>2)</sup> is voor die oplossing voor  $-(U-V)$  door interpolatie te vinden  $+ 11.10^{-5}$  bij  $18^{\circ}$  C. Hiermede moeten we vergelijken de waarde voor  $\frac{E_z}{E_x} : H$ , welke uit de waarnemingen van BAGARD volgt.

Voor het zwakste magneetveld is dit  $+\frac{0,0005}{385} = + 0,13 \cdot 10^{-5}$

bij  $24,05^{\circ}$  C. Vergelijken we hiermede de waarde van  $\frac{E_z}{E_x} : H$  bij bismuth, zooals die volgt uit de waarnemingen

van LEDUC, dan vinden we daarvoor  $+ 1,52 \cdot 10^{-5}$ .

Het teeken komt dus overeen, maar dat het gevonden

1) Zie Hoofdstuk I p. 5.

2) Wied. Ann. 50 p. 404, 1893.

HALL-effect van dezelfde orde van grootte is als LEDUC in bismuth vond, zooals BAGARD in zijn eerste mededeeling zegt, kan niet geheel toegegeven worden. (Voor de beoordeeling van de orde van grootte moet men n.l. letten op  $\frac{E_z}{E_x}$  zelf). Op zichzelf heeft dit gebrek aan overeenstemming niets te beteekenen, daar we weten dat de HALL-coëfficiënten zeer veel verschillen bij verschillende stoffen.

De waarden voor  $Zn SO_4$  gevonden zijn nu eens grooter dan weer kleiner dan die voor  $Cu SO_4$  van dezelfde concentratie. Uit alle waarnemingen samen volgt een verhouding van 1,03. Terwijl echter de waarde van  $U-V$  bij  $Cu SO_4$  van de concentratie  $\frac{1}{2}$  tot de concentratie  $\frac{1}{8}$  toeneemt van  $11 \cdot 10^{-5}$  tot  $14 \cdot 10^{-5}$ , stijgt bij de proeven  $\frac{E_z}{E_x}$  bijv. van 0,0005 tot 0,0018.

Verder werd nog waargenomen, dat bij zwakkere stroomen ook  $\frac{E_z}{E_x}$  kleiner werd, terwijl de vereischte evenredigheid met de magnetische kracht niet geheel uitkomt.

Hierbij moet evenwel opgemerkt worden, dat de waarnemingen steeds in dezelfde volgorde werden genomen; eerst zwakke, daarna sterke magneetkracht, en ten slotte weer de zwakke magneetkracht met een zwakkeren hoofdstroom. De mogelijkheid van een systematische fout is dus niet uitgesloten.

Het zou daarom niet overbodig zijn, de proeven van BAGARD eens onder eenigszins gewijzigde omstandigheden te herhalen. Daarbij kon dan tevens worden onderzocht of zooals de theorie het verlangt, bij oplossingen met groote waarde van  $(U-V)$ , bijv. verdund zoutzuur, werkelijk een veel sterker HALL-effect zou worden verkregen. Het zou

daarbij wenschelijk zijn ook op concentratie-verschillen te letten.

§ 5. Ofschoon blijkens het voorgaande over de quantitative overeenstemming tusschen theorie en waarneming nog niet te roemen valt, kan men toch in de juiste bepaling van het teeken een steun vinden voor de fundamenteele hypothese die tot grondslag van de afleiding heeft gediend. Onze formule is afgeleid voor het geval van weinig gedissocieerde oplossingen, terwijl de door BAGARD gebezigde reeds tamelijk sterk gedissocieerd zijn; in dergelijke oplossingen zal door de beweging der ionen de ionenconcentratie kunnen veranderen, zoodat de theorie niet meer zoo eenvoudig wordt. Volledige overeenstemming was dus ook niet te verwachten.

Zooals we reeds zagen, is het wellicht ook mogelijk het galvanomagnetisch temperatuurverschil en het transversaal thermomagnetisch effect te verklaren als veroorzaakt door de op de ionen aangrijpende electromagnetische kracht. Van de in bismuth waargenomen verschijnselen blijven er dan nog drie over: de verandering van den weerstand en van het geleidingsvermogen voor warmte,<sup>1)</sup> en het longitudinaal-thermomagnetisch effect.<sup>2)</sup> Geen van deze drie verschijnselen doet zich in een andere stof in eenigszins sterke mate voor. De beide eerste verschijnselen nu kunnen alweder in verband gebracht worden met de electromagnetische kracht. Het is n.l. denkbaar, dat het aanbrengen der magnetische kracht invloed heeft op het aantal vrij bewegende geladen

1) LEDUC, Journ. de Phys. 6 p. 387, 1887. LEBRET, Dissertatie p. 49.

2) VON ETTINGSHAUSEN en NERNST, Wied. Ann. 29 p. 343, 1886. LEBRET Diss. p. 46.

deeltjes (bij een electrolyt zou men zeggen: invloed heeft op de ionen-concentratie.)

Op p. 105 vinden we voor den kromtestraal eener oorspronkelijk rechte baan bij inwerking van de magneetkracht  $r = \frac{mv}{eH}$ . Wanneer nu in bismuth de  $v$  van de geladen deeltjes niet te groot, en de verhouding  $\frac{m}{e}$  ook zeer klein is, kan het gebeuren, dat  $r$  kleiner wordt dan de gemiddelde moleculaire afstand. In dat geval zal dus het geladen deeltje een gesloten baan gaan doorlopen en geen deel meer nemen aan de electriciteitsgeleiding. De  $N$  uit de formule  $u_1 + u_2 = Ne(U + V)$  wordt dus kleiner, tenminste wanneer we in verband met de diamagnetische eigenschappen van bismuth aannemen, dat buiten het magneetveld geen vrije ionen in gesloten banen loopen.

In verband hiermede is het wel de moeite waard op te merken, dat in den laatsten tijd van verschillende zijden waarnemingen zijn gepubliceerd, waaruit voor de verhouding  $\frac{e}{m}$  waarden, veel grooter dan  $10^4$ , de grootste verhouding bij electrolytische ionen, werden afgeleid.

In de eerste plaats noem ik hier de ontdekking door ZEEMAN<sup>1)</sup> van de magnetische verbreding der spectraallijnen. In § 23 van de tweede mededeeling aan de Akademie over dit onderwerp wordt opgegeven, dat  $\frac{e}{m}$  van de orde  $10^7$  was. Dit getal betreft de Natriumlijnen; voor de electrolytische Natrium-ionen is  $\frac{e}{m} \pm 5.10^2$ . Men kan deze

1) Zittingsverslagen der Kon. Ak. v. Wet. van 31 Oct. en 28 Nov. 1896.

grootere verhouding bij de licht-ionen toeschrijven òf aan een andere massa, òf aan een andere lading. WIECHERT <sup>1)</sup> gaat bij zijn onderzoekingen over de geladen deeltjes in kathodenstralen uit van de eerste opvatting, daar hij de lading van een electrolytisch ion opvat als een atoom electriciteit, een „electron.” Uit de kromming der kathodenstralen in het magnetisch veld, door hemzelf waargenomen, en de waarde door WARBURG voor het potentiaalverval aan de kathode gevonden leidt hij voor de snelheid  $v$  en de massa  $\alpha$  (uitgedrukt in waterstof = 1) af

$$v > 4.10^8 \quad \alpha < \frac{1}{400}$$

Een bepaling van  $v$  volgens de methode van DES COUDRES leverde  $v > 2.10^8$ , een gewijzigde methode  $v > 30.10^8$ . Een onderste grens voor  $\alpha$  vindt men door aan te nemen, dat het geheele potentiaalverval tusschen kathode en anode dient om de geladen deeltjes hun snelheid te geven. Men vindt dan  $\alpha > \frac{1}{4000}$

Eindelijk heeft J. J. THOMSON <sup>2)</sup> de numerieke resultaten van de proef van PERRIN over de lading der kathodenstralen gecombineerd met een proef van hem zelve over de verwarming van een door die stralen getroffen thermo-element en daaruit een waarde van  $\frac{e}{m} = 10^7$  afgeleid. Tegen de hiervoor noodige hypothesen zijn echter gewichtige bedenkingen aan te voeren, zooals reeds door FITZGERALD <sup>3)</sup> is geschied.

Indien de geladen deeltjes ook deelnemen aan de warmte-

1) Sitz. Ber. der phys. ökon. Geselsch. zu Königsberg, 7 Jan. 1897.

2) The Electrician, Vol 39, 21 Mei 1897, p. 104.

3) The Electrician. Vol 39, 21 Mei 1897, p. 103.

geleiding, zal ook deze in 't magnetisch veld moeilijker geschieden. Deze invloed moet echter geringer zijn dan die op het electriche geleidingsvermogen, omdat bij de warmtegeleiding de moleculen medewerken, hetgeen door waarnemingen van VON ETTINGSHAUSEN <sup>1)</sup> bevestigd is.

Wat nu het longitudinaal thermomagnetisch effect betreft, kan opgemerkt worden, zooals ook reeds meermalen is geschied, <sup>2)</sup> dat dit niet te onderscheiden is van een verandering van het thermo-electrisch vermogen door het magnetisch veld. Zoowel in de theoriën, die de oorzaak der thermo-electriciteit zoeken in een wijziging der contactkrachten, als in die, welke gegrond zijn op de hypothese van een dynamisch evenwicht, volgt op een verandering in het aantal aanwezige geladen deeltjes een wijziging van het thermo-electrisch vermogen, zoodat ook hier ten slotte de electromagnetische kracht als oorzaak beschouwd kan worden.

---

1) Wied. Ann. 33 p. 129, 1888.

2) Zie bijv. LEBRET, Diss. p. 47.

## HOOFDSTUK IX.

---

**Zijn de voorstellingen omtrent het mechanisme der electriciteitsgeleiding in de metalen, volgens de theorie van Lorentz te vereenigen met het bestaan van het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename?**

§ 1. Nu wij in het vorige Hoofdstuk gezien hebben, hoe de hypothesen omtrent de geleiding der electriciteit door geladen ponderabele deeltjes kunnen strekken tot verklaring van zoovele verschijnselen, kan het nuttig zijn te onderzoeken, in hoeverre de voornaamste vroeger reeds opgestelde theorien over electriciteitsgeleiding, voornl. in metalen, met die hypothesen in overeenstemming gebracht kunnen worden.

Theoriën van W. WEBER.

WEBER heeft, voor zijn afleiding van de wetten der inductie, steeds gebruik gemaakt van de hypothese van FECHNER, dat elke electricische stroom bestaat in de superpositie van twee even sterke, doch tegengesteld gerichte stroomen van positieve en negatieve electriciteit. Deze electriciteiten zouden zich vrij kunnen bewegen tusschen de moleculen der ponderabele stof door. Om evenwel te verklaren, waarom een constante electromotorische kracht inplaats van een eenparig versnelde beweging, volgens de wet van OHM een eenparige beweging veroorzaakt, nam hij

de aantrekkende krachten tusschen de beide soorten van geladen deeltjes te hulp, <sup>1)</sup> en stelde zich voor, dat de deeltjes zich afwisselend in rechte, en in spiraalvormige banen om elkaar zouden bewegen. Hield de electro-motorische kracht op te werken, dan bleven de deeltjes, die in elkanders nabijheid waren, zich om elkaar bewegen, en hield dus ook de stroom op. Afgezien nog van het feit, dat dergelijke gesloten banen niet bij elke snelheid der deeltjes mogelijk zijn, is deze voorstelling nog niet in staat het uitblijven eener versnelling in de beweging te verklaren, zooals WIEDEMANN <sup>2)</sup> reeds opmerkt. Immers, wanneer twee deeltjes elkaar gepasseerd zijn, kunnen we vergelijken twee standen, een vóór, een ná de ontmoeting, waarbij de onderlinge afstand dezelfde is. De aantrekkende krachten hebben dan geen arbeid verricht. De electricische kracht daarentegen heeft een positieven arbeid verricht, zoodat de snelheid *grooter* is dan voor de ontmoeting. Bij iedere volgende ontmoeting is de aanvangssnelheid weer grooter, en de beweging is toch vrijwel eenparig versneld.

Men moet dus een of andere hypothese maken over de wijze, waarop de stroomarbeid ten slotte ten goede komt aan de warmtebeweging der ponderabele deelen. Hoe dat echter geschiedt: de voornaamste karaktertrek van de theorie is de volkomen gelijkstelling van de rol van positieve en negatieve electriciteit. Zoolang men aan die gelijkstelling vasthoudt, is een verklaring van het verschijnsel van HALL, als hiervoor gegeven, niet mogelijk.

Gaat men nu na wat er tegen kan zijn, aan de twee

<sup>1)</sup> WEBER, Electrodynamische Maassbestimmungen. Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. I p. 304.

<sup>2)</sup> Electricität IV 2 p. 1032.



electriciteiten een verschillende snelheid toe te kennen, dan blijkt het, dat de wet van WEBER voor dat geval het bestaan aangeeft van aantrekking door een een gesloten stroom op een rustend electrisch deeltje, en meer dergelijke verschijnselen. <sup>1)</sup> Dit behoeft echter nog geen reden te zijn om de mogelijkheid van dat verschil te ontkennen, daar de werkingen zoo gering blijken te zijn, dat ze toch niet kunnen worden waargenomen, tenminste niet bij snelheidsverschillen zooals ze voor het verschijnsel van HALL noodig zijn.

Merkwaardig is het nu, dat WEBER zelf in latere jaren <sup>2)</sup> een voorstelling van de electriciteitsbeweging in metalen heeft gegeven, die met de gelijkwaardigheid der beide electriciteiten breekt. Hij onderstelt n.l. dat de negatieve electriciteit met de ponderabele moleculen vast verbonden is, en met deze in rust blijft, terwijl de positieve electriciteit, die hij zich als kleine deeltjes denkt, zich om de ponderabele moleculen beweegt. Al dadelijk moet echter opgemerkt worden, dat ook die electrische deeltjes een zekere kleine massa hebben en dus eigenlijk ook ponderabel zijn. Deze positieve deeltjes hebben nu een drievoudige taak: 1<sup>o</sup> vormen ze door hun beweging in gesloten banen de moleculair-stroom van AMPÈRE; 2<sup>o</sup> stelt de energie van die beweging de warmte-energie van het lichaam voor; 3<sup>o</sup>. veroorzaken ze zoowel de electrostatische als de electrodynamische verschijnselen.

De electrische stroom in een conductor bestaat in het overgaan van deze deeltjes van den eenen moleculair-stroom op den anderen. Aan de warmtebeweging wordt deelgenomen door onvergelykelyk meer deeltjes dan aan

1) Zie de berekeningen van RIECKE naar aanleiding van de theorie van C. NEUMANN, Gött. Nachr. 1873, 23 Juli.

2) Pogg. Ann. 156, p. 30, 1875.

de stroombeweging, zoodat de stroomende deeltjes al hun aanwinst aan energie aan de moleculairstroomen, dus aan de warmtebeweging afstaan. Daarbij wordt aangenomen dat het aantal deeltjes, dat per tijdseenheid een molecuul verlaat, onafhankelijk is van de grootte der electricische kracht, hetgeen tengevolge heeft, dat bij een oneindig groote electricische kracht de stroom eindig zou blijven.

Een dergelijke beschouwing had natuurlijk evengoed kunnen gegeven worden met rustende positieve en bewegende negatieve deeltjes, en men zou kunnen meenen, dat het WEBER's bedoeling was, aan het einde de onderstelling te maken dat beide gevallen gelijktijdig aanwezig zijn, waardoor de oude dubbelstroom hersteld zou zijn. Maar daartegen pleiten de pogingen van WEBER om met deze theorie ook de thermo-electrische verschijnselen te verklaren. De eerste verklaring komt voor in een verhandeling over het beginsel van het behoud van arbeidsvermogen.<sup>1)</sup> Hij redeneert daar als volgt: Raken twee metalen van gelijke temperatuur elkaar aan, dan is in beide de energie der moleculairstroomen dezelfde; maar het kan zijn dat de massa's verschillen, wanneer dan ook de snelheidsquadraten maar in omgekeerde verhouding verschillen. Voor de vrij bewegende deeltjes geldt hetzelfde. In 't begin gaat nu naar beide zijden evenveel energie door het grensvlak, maar gedragen door verschillende electricische massa's; het gevolg is een lading, die zal aangroeien tot de electricische stroom nul is geworden. Deze verklaring van de contact-potentiaalverschillen verval, wanneer men aan de negatief-geladen deeltjes dezelfde bewegingen toeschrijft als aan de positieve.

1) *Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss.* X § 20.

De tweede verklaring staat in verband met een theorie van F. KOHLRAUSCH <sup>1)</sup> over de verschijnselen der thermo-electriciteit.

KOHLRAUSCH wenscht, in tegenstelling met de algemeen gebruikelijke methode, de thermo-electrische verschijnselen te beschouwen in verband met den warmtestroom, die het onvermijdelijk gevolg is van het temperatuurverschil aan de contactplaatsen. Zonder nu over het mechanisme der verschijnselen te spreken toont hij aan, dat men van de thermo-electrische verschijnselen in een metaaldraad reenschap kan geven door aan te nemen, dat bij aanwezigheid van een warmtestroom, een vaste verhouding  $\theta$  is tusschen het daardoor teweeggebrachte potentiaalverval en het temperatuurverval, en dat een electricische stroom  $i$  op zijn beurt meebrengt een warmtestroom  $Q = c \theta i$ . Hierbij is  $\theta$  een constante afhankelijk van de stof,  $c$  een absolute constante. De meer gecompliceerde verschijnselen worden verklaard door  $\theta$  afhankelijk van de temperatuur te stellen.

Voor de verklaring van het HALL verschijnsel levert deze theorie niets op.

WEBER toont nu, alweer onder aannahme van slechts één soort electricisch geladen deeltjes, dat de toestand bij de hypothesen van KOHLRAUSCH behorende bijna overeenkomt met dien overeenkomstig zijn voorstellingen, indien men onderstelt, dat het aantal geladen deeltjes per volume-eenheid bij verhooging van temperatuur evenredig met de snelheid der deeltjes toeneemt.

Beproeft men nu dezelfde beschouwingen ook toe te passen op een stof, waarin beide electriciteiten vrij voor-

<sup>1)</sup> Pogg. Ann. 156. p. 602, 1875.

komen en in gelijke hoeveelheden, dan blijkt het dat ze niet doorgaan. Om een eenvoudig geval te nemen: Bij temperatuurverschil tusschen twee naburige lagen gaat wel een grooter aantal positieve deeltjes naar den kant der laagste temperatuur, maar ook precies hetzelfde aantal negatieve deeltjes, en van een electrischen stroom is geen sprake.

Waar dus zelfs de voornaamste verdediger van de hypothese van FECHNER haar verlaten heeft, zoodra hij andere dan electro-dynamische verschijnselen wilde verklaren, behoeft het geen verwondering te wekken, dat we in geen van de latere theoriën die hypothese opgenomen zien.

## § 2. Theorie van C. NEUMANN.

Bijna gelijktijdig met WEBER heeft ook NEUMANN <sup>1)</sup> de onderstelling uitgesproken, dat alleen de positieve electriciteit vrij bewegelijk zou zijn, de negatieve daarentegen vast verbonden met de ponderabele stof. Ter verklaring van den weerstand wordt een wrijving tusschen de positieve deeltjes en de combinatie van negatieve en ponderabele deeltjes ingevoerd. Voor de thermo-electrische verschijnselen wordt dan aangenomen, dat de positieve deeltjes bij hun beweging aan de wetten van Boyle en Gay-Lussac onderworpen zijn, en aan de grens van twee metalen verschillend door de moleculen worden aangetrokken. De grootte van dit verschil wordt verder in verband gebracht met den gemiddelden afstand der moleculen, en zoo is een oorzaak voor de thermostroom gevonden.

We merken hierbij vooreerst op, dat NEUMANN bij de afleiding der electro-dynamische wetten de werking tusschen

<sup>1)</sup> Ber. d. K. Sächs Ges. p. 386, 1871.

ponderabele en electriche massa's verwaarloost, zoodat het vreemd is, die werking voor de contact-electriciteit weer aangenomen te zien. Verder zou om het verschillend teeken van het HALL-effect in verschillende metalen te verklaren aangenomen moeten worden, dat in bismuth bijv. de negatieve, in antimonium de positieve electriciteit zich beweegt. Maar bij de strooming moeten de electriciteiten van de eene op de andere stof overgaan, en zich daarin ophoopen, wat niet wel mogelijk zou zijn. Zooals ze daar is kan deze theorie dus niet voldoende verklaring van het verschijnsel van HALL geven.

§ 3. Theorie van den weerstand van L. LORENZ.

Aan het slot van een artikel over het geleidingsvermogen voor warmte en electriciteit der metalen <sup>1)</sup> zoekt LORENZ de verklaring voor de daarbij gevonden wet, dat de verhouding van de beide genoemde geleidingsvermogens evenredig is met de absolute temperatuur, in een analogie met een geleider, bestaande uit afwisselende stukjes van gelijke doorsnede  $q$  van twee verschillende metalen. Wordt deze geleider door een electricchen stroom  $i$  doorloopen, dan ontstaat een stationaire toestand, waarbij de contactplaatsen temperaturen  $T_0$  en  $T_0^1$  aannemen. Zijn de lengten der stukjes resp.  $l$  en  $l_1$ , de warmtegeleidings-coëfficiënten  $k$  en  $k_1$ , en verwaarloost men den weerstand der afzonderlijke stukjes, dan kan de schijnbare weerstand berekend worden. De warmteontwikkeling en absorbtie aan de contactplaatsen wordt evenredig aan de absolute temperatuur

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 13 p. 422 en 582, 1881.

gesteld en voor het temperatuur-verloop in de homogene stukjes de wet aangenomen

$$T = T_0 + ax + bx^2$$

waarin  $x$  de afstand tot de naaste contactplaats links is. De voorwaarde dat het verschil der warmtestroomen gelijk moet zijn aan de ontwikkelde of verdwenen warmte geeft de vergelijking:

$$Ai E (T_0 + T_0^1) = 2q (T_0 - T_0^1) \left( \frac{k}{l} + \frac{k_1}{l_1} \right)$$

$A$  is het omgekeerde van het mechanisch aequivalent der warmte-eenheid,  $E$  de factor waarmede  $T$  vermenigvuldigd wordt om de thermo-electrische kracht te krijgen.

De potentiaaldaling op den afstand  $l + l_1$  is dus

$$E (T_0 - T_0^1) = \frac{Ai E^2}{q \left( \frac{k}{l} + \frac{k_1}{l_1} \right)} \frac{T_0 + T_0^1}{2} = \frac{Ai E^2}{q \left( \frac{k}{l} + \frac{k_1}{l_1} \right)} T$$

als  $T$  de gemiddelde temperatuur der contactplaatsen is.

Het schijnbare geleidingsvermogen voor electriciteit is dus

$$K = \frac{\left( \frac{k}{l} + \frac{k_1}{l_1} \right) (l + l_1)}{AE^2 T}$$

Het schijnbare geleidingsvermogen voor warmte

$$k_M = \frac{l + l_1}{\frac{l}{k} + \frac{l_1}{k_1}}, \text{ dus}$$

$$\frac{k_M}{K} = \frac{AE^2 T}{\left( \frac{k}{l} + \frac{k_1}{l_1} \right) \left( \frac{l}{k} + \frac{l_1}{k_1} \right)}$$

De overgang naar den weerstand der metalen wordt nu gemaakt als volgt. „Ieder lichaam is in zijn binnenste discontinu.”<sup>2)</sup> Ook in de zuivere metalen komen dus

<sup>2)</sup> l. c. p. 602.

dergelijke grensvlakken met potentiaalsprongen voor. Wat wordt er nu van de formule? Een eigenlijk warmte-geleidingsvermogen kan men niet meer aannemen; alle temperatuurverschillen worden vereffend door locale electriche stroomen.

Waarschijnlijk is dan  $\frac{k}{l} = \frac{k_1}{l_1}$ , en de formule wordt eenvoudig

$$\frac{k_m}{K} = \frac{AE^2}{4} T$$

Deze overgang is wel een weinig plotseling. Hoe moeten we ons namelijk die inwendige discontinuïteit voorstellen? Men zou nog kunnen denken aan kristallen, die verschillend geöriënteerd zijn; maar bij een metaal als lood, dat toch een grooten weerstand heeft, of kwik, dat bijna den grootsten weerstand heeft van alle metalen, zal dat toch moeilijk gaan. We moeten dus waarschijnlijk denken aan moleculaire discontinuïteit, dus ons de stof voorstellen als bestaande uit moleculen door den aether gescheiden of zoo iets. Maar wat blijft dan van den grondslag der afleiding over? Letterlijk opgevat, zou nu het molecuul aan den kant waar de electriciteit er in komt meer warmte moeten ontvangen dan waar de electriciteit er uit gaat; aan de grens molecuul-aether zijn potentiaal-sprongen, evenredig aan de absolute temperatuur; maar één molecuul heeft toch maar één temperatuur. Het is dus niet mogelijk de analogie volledig te behouden. Men zou dus genoodzaakt zijn de theorie om te werken; maar hoe men dan de energie, die het molecuul ontvangt, ongeveer evenredig aan de absolute temperatuur moet krijgen is niet duidelijk, daar men toch op dat eene molecuul niet de tweede wet der mechanische warmte-theorie kan toepassen.

Bovendien geeft de theorie wel eenigszins verklaring van

het feit, dat alliages soms een grooter weerstand hebben dan men uit hun samenstelling zou berekenen, zooals RAYLEIGH<sup>1)</sup> heeft opgemerkt; maar juist in dit geval vinden we een veel kleinere verandering van het electricisch geleidings-

vermogen dan anders. Wel is het quotient  $\frac{k_m}{K}$  evenredig aan de absolute temperatuur, maar dat komt doordat het warmtegeleidingsvermogen toeneemt met de temperatuur.

Nu is  $k_m = \frac{1 + l_1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1}}$ .  $k$  en  $k_1$  zijn de geleidingsvermogens

voor warmte van de samenstellende metalen, die *geen bijzonderen gang vertoonen*. Het is dus in 't geheel niet duidelijk waarom  $k_m$  een ander verloop heeft.

Ook deze theorie laat het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandsverandering onverklaard.

#### § 4. Theorie van E. BUDDÉ.

De bovenvermelde verklaring der electricische verschijnselen door WEBER is later door BUDDÉ<sup>2)</sup> uitgebreid. In de eerste plaats wijst hij er op, dat men ook de ponderabele moleculen een zekere beweging moet toekennen; immers, deze onder vinden krachten van de bewegende electricische deeltjes, die waarschijnlijk vrij groot zijn vergeleken met hunne massa's. Hij onderstelt dus dat de electricische deeltjes een gemiddelde kinetische energie  $u$ , de ponderabele (met hun electriciteit) een energie  $U$  hebben. Een gedeelte der electricische deeltjes heeft het molecuul verlaten en is dus vrij bewegende. Deze brengen den stroom over, krijgen gedurende hun vrije wegen

<sup>1)</sup> Electrician 10, p. 277, 1896.

<sup>2)</sup> Wied. Ann. 21. p. 294, 1884.



een grootere snelheid, maar dragen van de gewonnen energie een gedeelte evenredig aan  $\frac{u}{U}$  over op de ponderabele moleculen; daardoor ontstaat verwarming volgens de wet van JOULE.

Is er geen stroom, dan gaat door de vlakke-eenheid naar beide zijden een gelijk aantal geladen deeltjes, bijv.  $aT$ , waarin  $T$  de absolute temperatuur is, maar  $a$  nog veranderlijk met die temperatuur kan zijn. In een tweede lichaam is dit bijv.  $bT$ ; de lading van de elektrische deeltjes in beide lichamen wordt gelijk  $q$  gesteld; electrisch evenwicht is aan het grensvlak alleen mogelijk wanneer er een potentiaalverschil is, evenredig aan  $(b-a)qT$ . Op deze wijze komt men vrij natuurlijk tot thermostroomen.

Een verdere stap wordt nu gedaan, door aan te nemen, dat niet alleen positieve bijvoorbeeld, maar ook negatieve deeltjes vrij voorkomen. Dezelfde beschouwingen gaan dan nog door, als men maar aanneemt, dat er bij elke temperatuur een vaste verhouding is tusschen het aantal vrije + deeltjes en het aantal vrije - deeltjes; deze verhouding kan in verschillende lichamen andere waarden hebben en met de temperatuur veranderen. In plaats van  $a$  en  $b$  komt nu in bovenstaande formule  $(b_2-b_1)$  en  $(a_2-a_1)$ .

Eindelijk wordt nog opgemerkt dat men zich ook *alle* elektrische deeltjes bewegelijk kan denken, als dan maar negatieve en positieve aan *verschillende* massa's gebonden zijn: dit geval doet zich voor in electrolyten. Waarschijnlijk is het ook BUDE's bedoeling alleen voor electrolyten deze voorstelling aan te nemen.

Deze theorie laat zich werkelijk zeer goed vereenigen met de voorstellingen in de theorie van LORENTZ. Men heeft

vrijheid om de massa der electriche deeltjes zoo klein te nemen als men wil. Verschil tusschen positieve en negatieve electriciteit is reeds ondersteld, en niets belet ons, als het verschil in aantal niet voldoende is, ook verschil in massa aan te nemen. Alleen aan de grens van twee metalen zal men dan nog moeite hebben met de verklaring; dit is echter bij alle moleculaire theoriën het geval.

§ 5. Theorie van W. GIESE.

In een artikel „Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Electricitäts-Leitung”<sup>1)</sup>, waarin GIESE in 't algemeen de onwaarschijnlijkheid aantoonst van het voorkomen van geladen *moleculen* en alle geleiding van electriciteit aan *ionen* toeschrijft, bespreekt hij ook de geleiding in metalen. Daarbij denkt hij bepaaldelijk aan de electrolytische ionen, maar moet dan ook allerlei onderstellingen maken om niet met feiten in tegenspraak te komen. Vooreerst moeten er van eenzelfde metaal negatieve en positieve ionen voorkomen, maar ze mogen zich ook niet vrij bewegen. Hij neemt dus aan dat ook de ionen (die al voor de werking der electriche kracht aanwezig waren) aan vaste plaatsen gebonden zijn; de overbrenging der electriciteit geschiedt nu doordat twee ionen van lading wisselen gedurende een oogenblik, dat ze met elkaar verbonden zijn. Diezelfde omwisseling heeft ook aan de grens van twee metalen plaats en geeft daar aanleiding tot het ontstaan van ladingen, doordat in de omwisselingen een bepaalde zin de voorkeur heeft. Deze ladingen groeien aan totdat het potentiaalverschil het evenwicht tusschen beide „reacties” herstelt. Door verder onderstellingen te maken omtrent temperatuurinvloed kan men ook de verdere verschijnselen verklaren.

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 37. p. 576, 1889.

Daar in deze theorie de aantallen en massa's der negatieve en positieve ionen noodzakelijk altijd dezelfde zijn in het inwendige van het metaal, kan zij geen verklaring geven van het verschijnsel van HALL. Overigens is, zooals LORENTZ<sup>1)</sup> reeds opmerkt, de omwisseling der ladingen een zoo duister verschijnsel, dat er theoretisch niets mee te beginnen is. Ook de verklaring der weerstandsverandering in het magnetische veld door de werking der electro-magnetische kracht gaat niet op, wanneer men voor  $\frac{e}{m}$  de waarde moet nemen zooals die in electrolyten gevonden is. Berekent men n.l. met deze waarde de grootste snelheid, waarbij voor een veld van 10.000 c. g. s. nog een kringloop van moleculaire dimensies zou kunnen ontstaan, dan vindt men een waarde, zeer klein vergeleken met de moleculaire snelheden.

#### § 6. Theorie van R. REIFF.

Uitgaande van zeer algemeene beschouwingen over beweging van ionen, bijv. de formule voor de totale energie door HELMHOLTZ voor dit geval opgesteld, leidt REIFF<sup>2)</sup> ook de vergelijkingen voor de beweging in metalen af, die echter een hoogst eenvoudigen vorm aannemen. Hij onderstelt daarbij alle moleculen gedissocieerd in ionen, of door de kleinste kracht uiteengedreven, wat op hetzelfde neerkomt. Voor beide ionen wordt een verschillende snelheid aangenomen, dus ook een verschillende wrijvingscoëfficiënt, zonder dat evenwel dat verschil gemotiveerd wordt. Ten slotte wordt echter opgemerkt, dat het reeds voldoende is, wanneer

1) Versuch einer Theorie enz. p. 6.

2) Wied. Ann. 56, p. 42, 1895. Zie ook: Theorie Molecular-Electrischer Vorgänge, Freiburg i. B. und Leipzig, 1896.

de ionen op hun plaats blijven, en hun lading omwisselen. Behalve de zeer sterke dissociatie bevat deze theorie dus niet veel anders dan de theorie van GIESE, zoodat ook dezelfde bezwaren er tegen aangevoerd kunnen worden. Als een voordeel ervan noemt REIFF, dat de metallische weerstand of wrijving behandeld is als een bijzonder geval van de electrolytische en volgt uit de wetten voor de beweging van de electriciteit in mengsels. Hierover behoeft men zich echter niet te verwonderen, daar in gemelde theorie de metallische wrijving eigenlijk reeds ter verklaring aangenomen is.

De in de theorie der thermo-electrische verschijnselen van F. BRAUN <sup>1)</sup> voorkomende werkende „Gebilde” in de metalen leveren geen aanknooppingspunten voor de theorie van het verschijnsel van HALL.

---

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 50, p. 111.

## STELLINGEN.

## STELLINGEN.

The first of these is the fact that the  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...

... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...  
... of the ... of the ... of the ...

## STELLINGEN.

---

### I.

De coëfficiënt van HALL en de gemiddelde toename van den weerstand in het magnetisch veld zijn bij kristallijn bismuth beide afhankelijk van den stand van het vlak, waarvoor men ze meet, ten opzichte van de kristallografische hoofdas.

### II.

De dissymmetrie van het verschijnsel van HALL in bismuth wordt veroorzaakt door een wijziging in het magnetisch veld van de verhouding der weerstanden in twee onderling loodrechte richtingen; deze richtingen zijn bepaald door den stand der kristallografische hoofdas.

### III.

Het tweede van de verschijnselen door BEATTIE (Trans. Roy. Soc. of Edinburgh, 38 (1), pag. 238, 1896) in bismuth waargenomen en als nieuw beschreven, is identiek met de storing door het galvanomagnetisch temperatuurverschil van VON ETTINGSHAUSEN.

## IV.

In de waarnemingen is geen voldoende grond aanwezig om met BEATTIE (l. c. pag. 244) in bismuth het bestaan aan te nemen van een tweede HALL-effect, evenredig met de  $3/2^e$  macht van de weerstandstoename.

## V.

In het verschijnsel van HALL is geen steun te vinden voor de theorie van Föppl (Wied. Ann. 31 pag. 306, 1887), volgens welke de electriciteit samendrukbaar zou zijn.

## VI.

De aan de electro-dynamische wet van WEBER ten grondslag liggende opvatting van FECHNER van den elektrischen stroom als dubbelstroom van positieve en negatieve electriciteit is onvereinigbaar met WEBER's verklaring van de thermo-electrische verschijnselen.

## VII.

In de formule, door L. LORENZ (Wied. Ann. 13, pag. 425, 1881) gebezigd bij de bepaling van warmtegeleiding in metalen

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx f(x) = l^3 \left\{ f(l) + f(2l) + \dots + f((n-1)l) \right\} \\ + \frac{l^3}{12} (f(nl) - f(n-1)l) - f(l) + f(0) + \dots$$

moet voor  $\frac{l^3}{12}$  gelezen worden  $\frac{l^3}{6}$ .



Deze fout is waarschijnlijk oorzaak dat LORENZ moet waarschuwen, dat de methode alleen goede resultaten oplevert, wanneer men juist op dezelfde wijze als hijzelf deed te werk gaat.

## VIII.

De redeneering waardoor O. WIENER (Wied. Ann. 40, p. 203, 1890) komt tot de uitspraak: „Aus der Annahme, dass die Lichtschwingungen mit den chemisch wirksamen Schwingungen zusammenfallen, folgt vermöge der Experimente, dass die maximale chemische wirkung stehender Lichtwellen in den Schwingungsbaüchen derselben stattfindet, und umgekehrt” is onjuist.

## IX.

Het is te betreuren, dat sommige definities in O. E. MEYER'S Kinetische Theorie der Gase (2<sup>e</sup> druk, 1895) niet scherper geformuleerd zijn, zoodat men bijv. uit die voor een damp (l. c. p. 38 en 99) zou afleiden, dat waterdamp geen damp is.

## X

De elementaire afleiding van de formule voor den wrijvings-coëfficiënt der gassen, gegeven door O. E. MEYER (Die Kin. Theor. d. Gase, p. 129, 1<sup>e</sup> druk, 1877) is onjuist.

## XI.

De regel van MAXWELL ter bepaling van de richting der magneetkrachtlijnen behoorende bij een electrischen stroom is te verkiezen boven die van AMPÈRE.

## XII.

Noch de waarnemingen van LENARD, (Wied Ann. 51 p. 237, 1894) noch die van BATTELLI (Il Nuovo Cimento (4) III, April 1896) kunnen het bewijs leveren, dat kathodenstralen fotografisch werkzaam zijn. De verkregen werkingen kunnen op rekening van X-stralen gesteld worden.

## XIII.

Het is niet waarschijnlijk, dat op Mars vloeibaar water voorkomt.

## XIV.

Uit de beschouwingen van GUYE en CHAVANNE (Bull. de la Soc. Chim. de Paris, 1896, Ser. 3 T. XV, p. 177 en 275) over een maximum van rotatievermogen in homologe reeksen blijkt duidelijk, dat de theorie van GUYE van het asymmetrie-product niet in staat is, van de waargenomen verschijnselen rekenschap te geven.

## XV.

Voor de theorie der mechanica is het wenschelijk, het begrip tijd te ontleenen aan dat van beweging.

## XVI.

In de formule

$$\sqrt{pu - e_{\alpha}} = \frac{\sigma(\omega_{\alpha} + u)}{\sigma(\omega_{\alpha}) \sigma(u)} e^{-\eta_{\alpha} u}$$

staat in het eerste lid een tweewaardige, in het tweede een eenwaardige functie. Dat hierin geen tegenspraak gelegen is wordt verklaard door de opmerking, dat  $\sqrt{pu - e_{\alpha}}$  geen vertakkingspunten heeft.

## XVII.

Wanneer men volgens de methode van CHARPIT uit eene partieele differentiaalvergelijking

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

twee nieuwe betrekkingen

$$\varphi_1(x, y, z, p, q, a_1) = 0 \text{ en } \varphi_2(x, y, z, p, q, a_2) = 0$$

heeft afgeleid, zal de eliminatie van  $p$  en  $q$  uit  $f$ ,  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  alleen dan een complete integral opleveren, wanneer zoowel de combinatie van  $f$  met  $\varphi_1$  als die van  $f$  met  $\varphi_2$  tot denzelfden integral voert. Is dit niet het geval, dan is er een methode om met behulp van den complete integral, uit  $f$  en  $\varphi_1$  afgeleid, de oplossing die aan  $\varphi_2 = 0$  voldoet te vinden.

---

XVII

Wann man gewisse Methoden von Anfang an  
 anwendet, so ist die Lösung der Aufgabe  
 nicht anders als die Lösung der Aufgabe  
 in der Theorie der Differentialgleichungen  
 von der Form  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$   
 wobei  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome von  
 höchstens erster Ordnung sind.  
 Die allgemeine Lösung der homogenen  
 Gleichung  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$   
 ist  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , wobei  $y_1$  und  
 $y_2$  zwei linear unabhängige  
 Lösungen der homogenen Gleichung  
 sind. Die allgemeine Lösung der  
 inhomogenen Gleichung ist  
 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$ , wobei  
 $y_p$  eine particular solution ist.  
 Die Methode der Variation der  
 Konstanten liefert eine particular  
 solution  $y_p$  der inhomogenen  
 Gleichung, wenn man die  
 Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  in der  
 allgemeinen Lösung der homogenen  
 Gleichung als Funktionen von  $x$   
 ansieht und die Bedingung  
 $C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_p$  annimmt.  
 Die Methode der Störansätze liefert  
 eine particular solution  $y_p$  der  
 inhomogenen Gleichung, wenn man  
 eine Form für  $y_p$  annimmt, die  
 der Form der rechten Seite  $r(x)$   
 entspricht.

XVIII

Die Methode der Störansätze liefert eine particular  
 solution  $y_p$  der inhomogenen Gleichung, wenn man  
 eine Form für  $y_p$  annimmt, die der Form der  
 rechten Seite  $r(x)$  entspricht.

XIX

Die Methode der Störansätze liefert eine particular  
 solution  $y_p$  der inhomogenen Gleichung, wenn man  
 eine Form für  $y_p$  annimmt, die der Form der  
 rechten Seite  $r(x)$  entspricht.

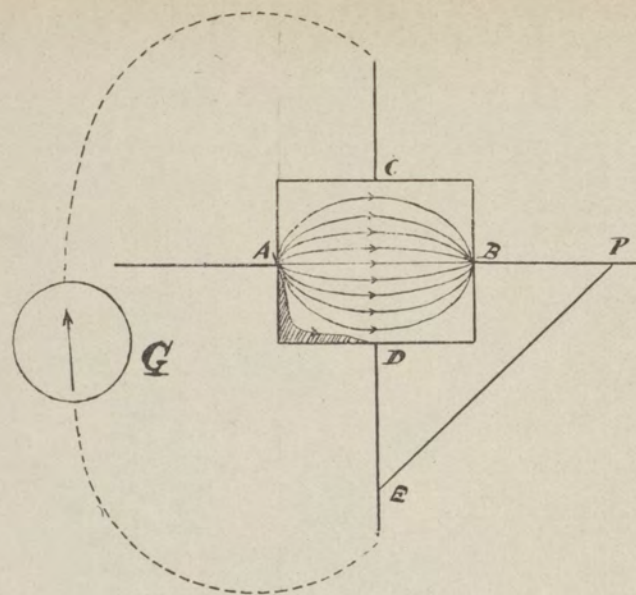


FIG. I.

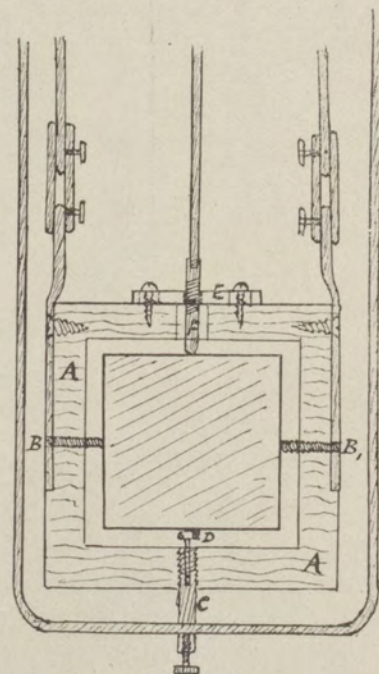


FIG. II.

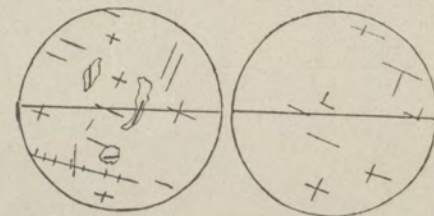
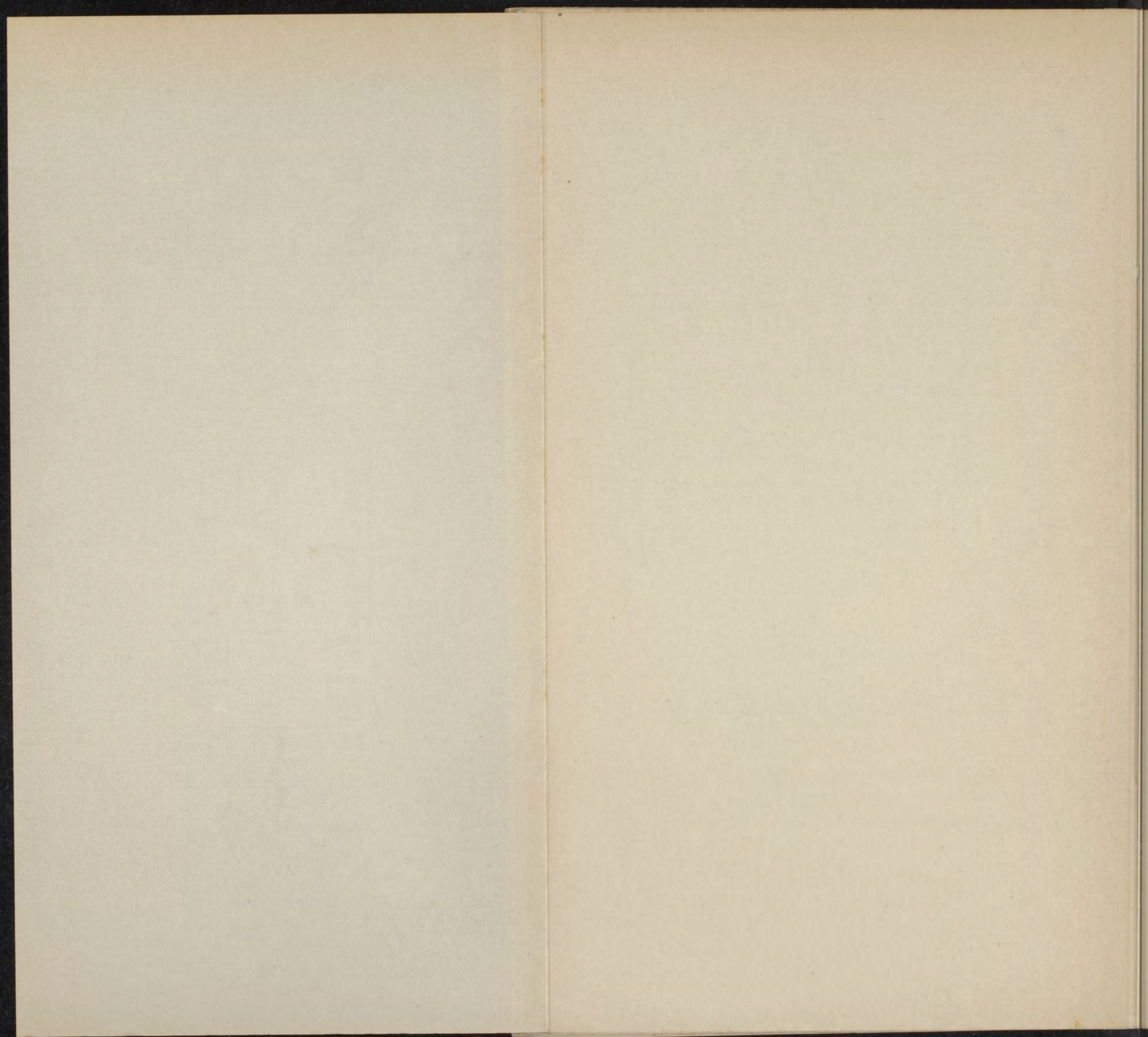


FIG. IV.



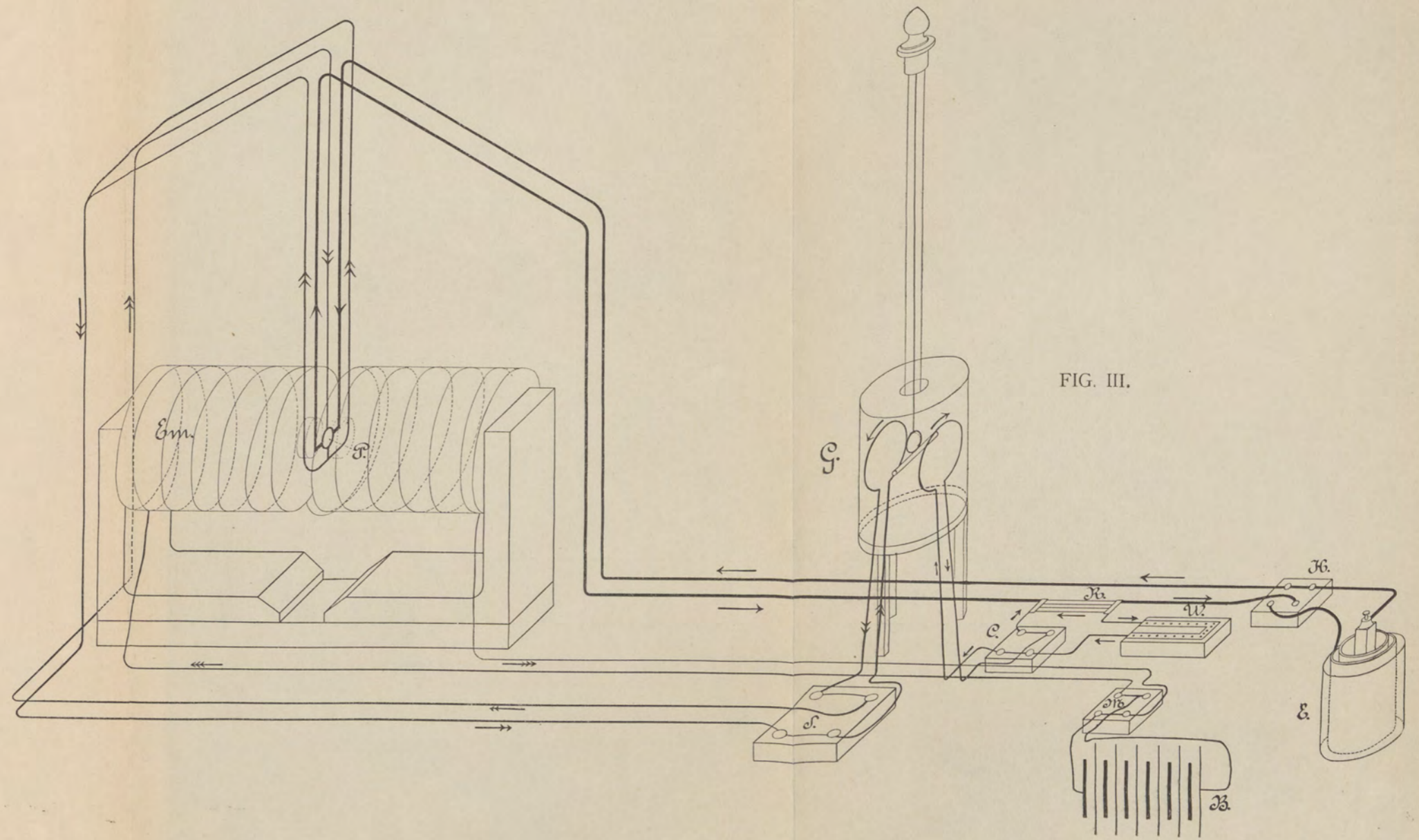


FIG. III.

