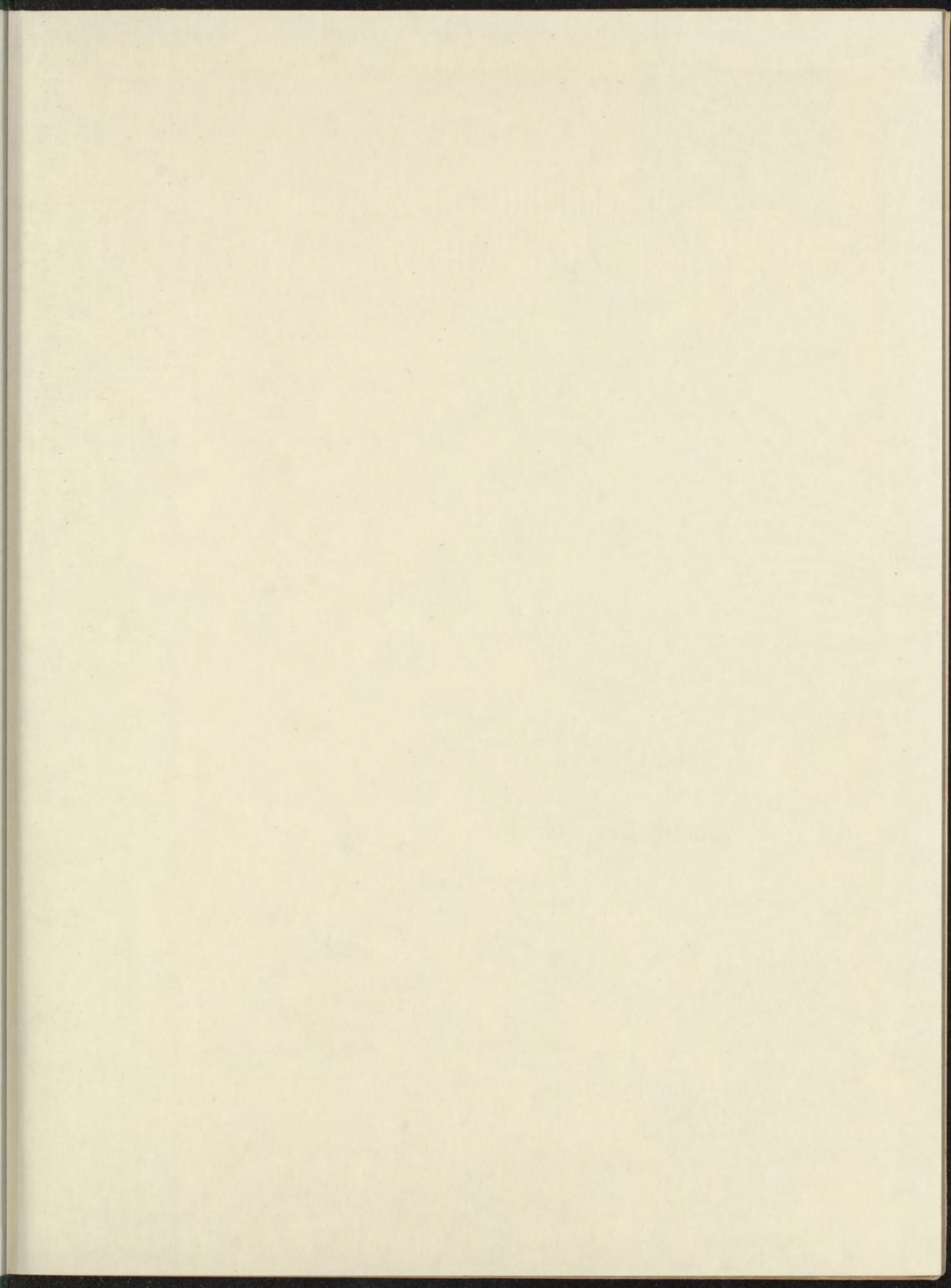


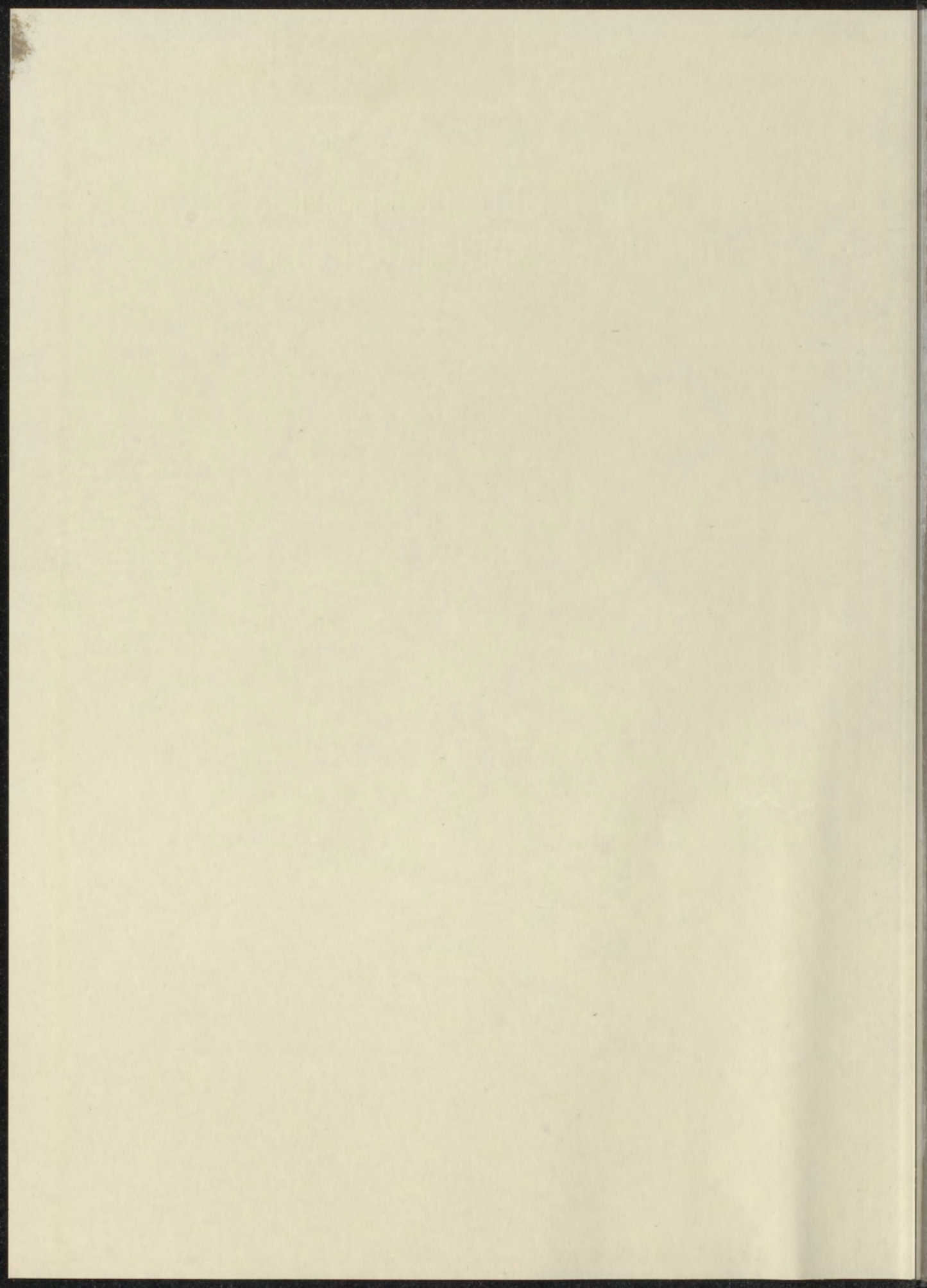
Diss. Leiden 94
1919

Universiteit Leiden



2 166 452 4





VRAAGSTUKKEN UIT DE ELECTRONEN-
THEORIE VAN HET MAGNETISME.

H. JOHANNA VAN LEEUWEN.

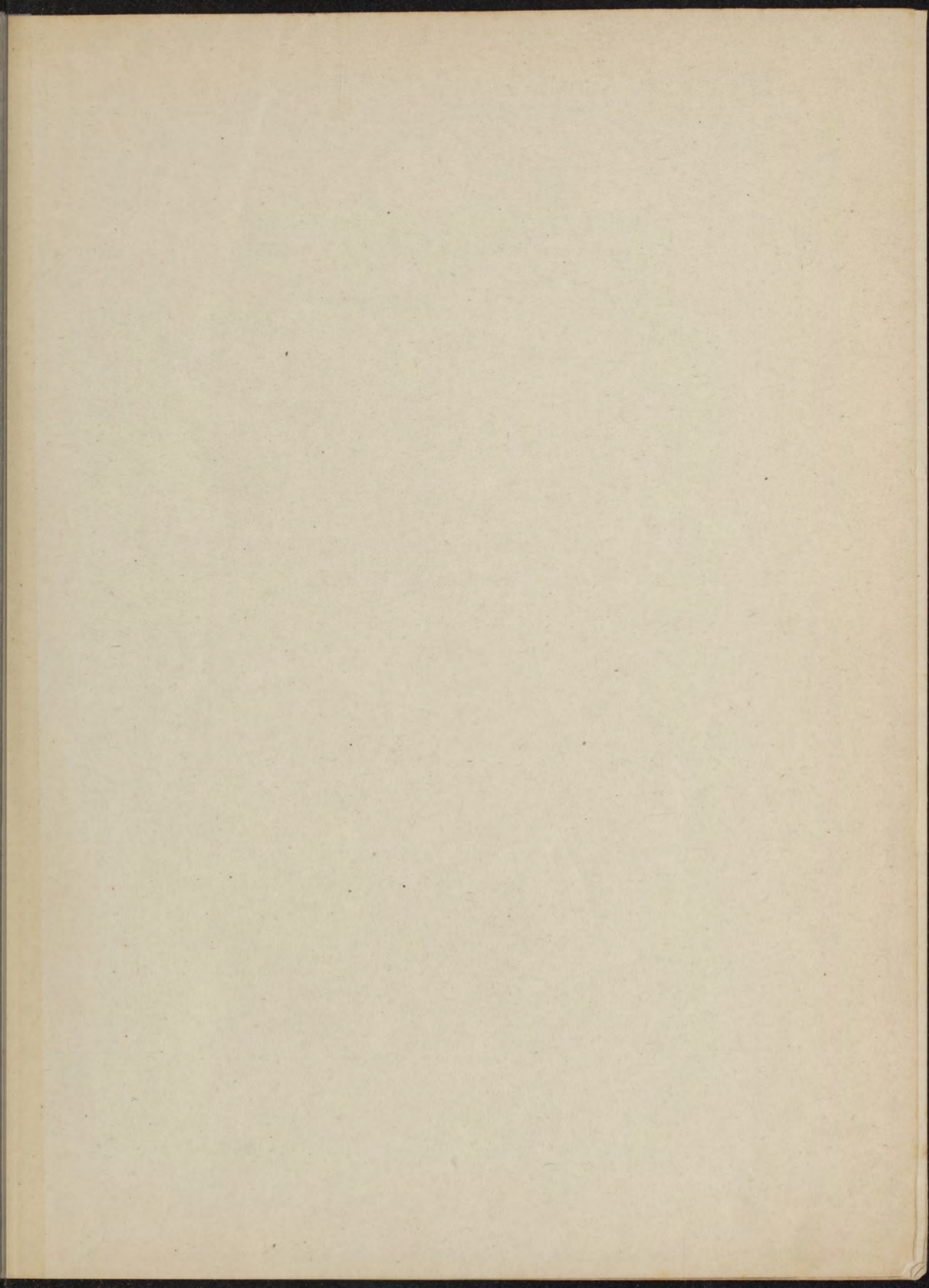
LEIDEN. — EDUARD IJDO. — 1919.

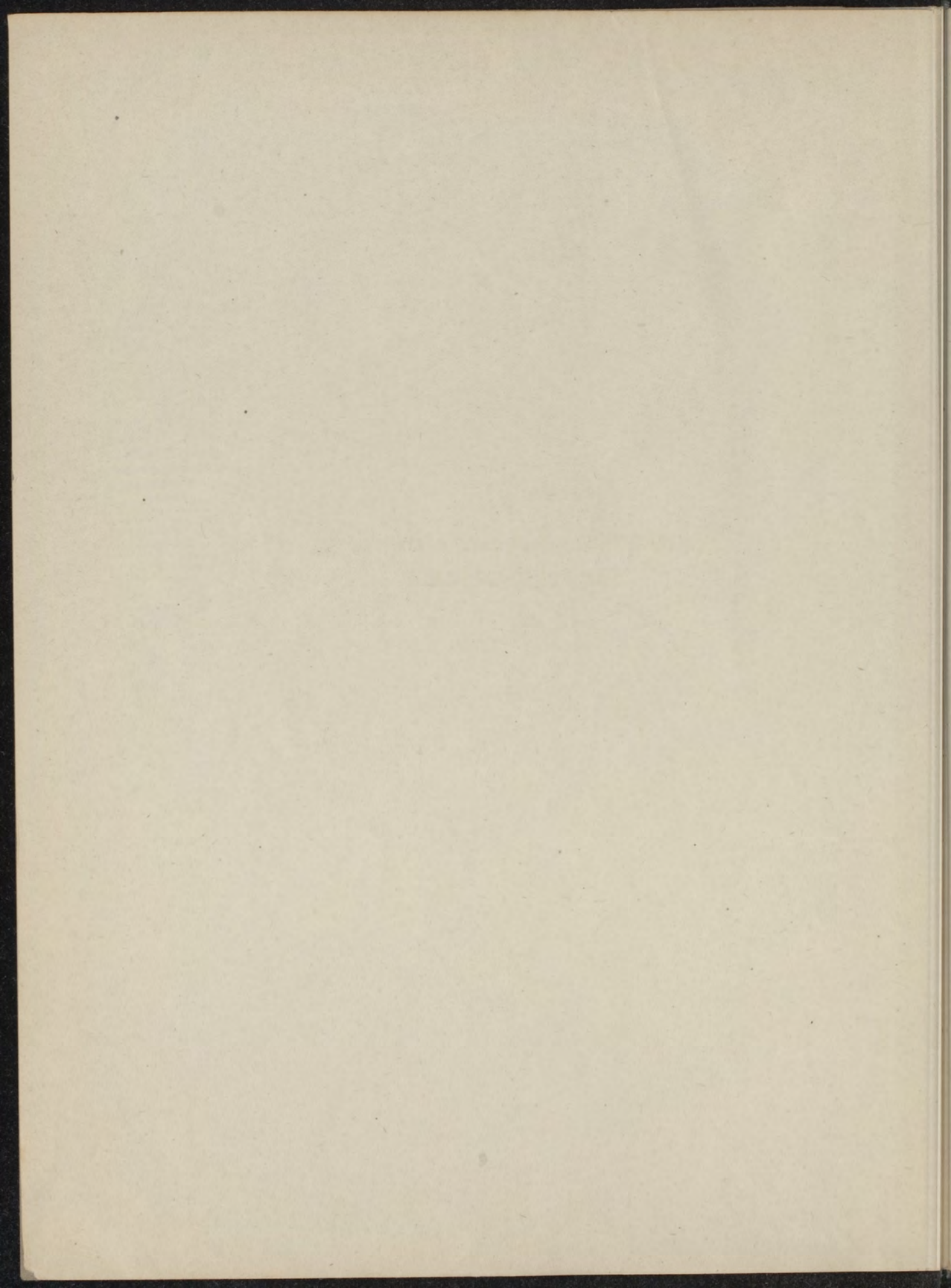
4°
Diss.
Leiden
1918

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK LEIDEN



03886434





VRAAGSTUKKEN UIT DE ELECTRONENTHEORIE
VAN HET MAGNETISME.

BOEK- EN STEENDRUKKERIJ EDUARD IJDO. — LEIDEN

73276

VRAAGSTUKKEN UIT DE ELECTRONEN- THEORIE VAN HET MAGNETISME.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUUR-
KUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE
LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAG-
NIFICUS, DR. P. C. T. VAN DER HOEVEN,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
GENEESKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN
OP MAANDAG 20 JANUARI, DES NAMIDDAGS
TE 3 UUR,



DOOR

HENDRIKA JOHANNA VAN LEEUWEN,
GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE.

LEIDEN — EDUARD IJDO — 1919.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

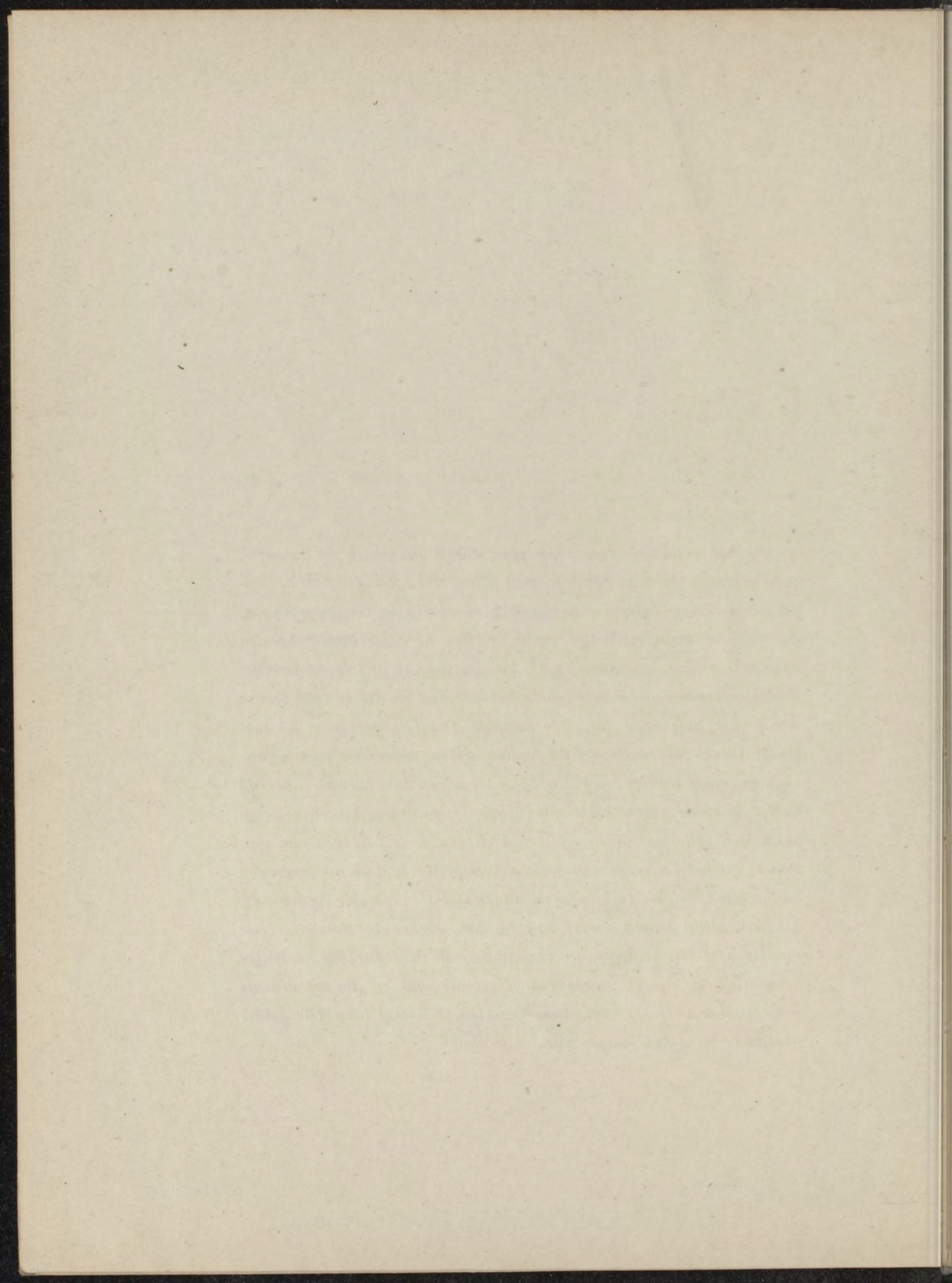
THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

AAN MIJN MOEDER.
AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
PRESS

Bij het voltooien van mijn proefschrift gevoel ik de behoefte, mijn warmen dank te betuigen aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben medegewerkt en er toe hebben bijgedragen, dat ik aan mijn studietijd zulke prettige herinneringen behouden zal. In het bijzonder dank ik U, hoogleeraren in de wis- en natuurkundige faculteit, wier colleges ik heb gevolgd en die mij ook verder steeds met hun raad ter zijde stonden. Dat Gij, professor KAMERLINGH ONNES een college hebt willen geven, waarvoor ik een jaar lang de eenige toehoorderes was, blijft bij mij in dankbare herinnering

In de eerste plaats geldt mijn dank U, professor LORENTZ, hooggeschatten promotor, wien nooit tijd en moeite te veel was, om mij, zoowel bij het bewerken van mijn proefschrift, als door het bespreken van andere vragen, te helpen en daarnaast U, professor EHRENFEST, die ook altijd bereid waart mij bij het werken te steunen. Niet minder hebt Gij beiden mij verheugd door de voortdurende hartelijke belangstelling, die ik steeds van U ondervond en die het mij als een groot voorrecht heeft doen gevoelen, een tijd lang Uw beider assistente te hebben mogen zijn.



I N H O U D.

		Blz.
§ 1.	Inleiding	1
§ 2.	Onderstellingen omtrent den bouw van het molecuul	2
§ 3.	De stelling van BOLTZMANN en haar bewijs	3
§ 4.	Algemeen bewijs voor de stelling van LIOUVILLE voor de verschillende gevallen, die behandeld zullen worden	10
§ 5.	Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen I. Nadere bepaling der stroomdragende moleculen en voorbereiding van de afleiding der verdeelingsfunctie	13
§ 6.	Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen II. Bepaling van een mogelijke verdeelingsfunctie bij de eerste onderstelling omtrent de botsing en bewijs, dat deze de eenig mogelijke is	18
§ 7.	Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen III. Bepaling van het resulterend magnetisch moment bij de eerste onderstelling omtrent de botsing	26
§ 8.	Bewijs, dat de gevonden verdeelingsfunctie ook nog een stationaire verdeeling geeft, als de moleculen tijdens de botsing magnetische krachten op elkaar uitoefenen.....	28
§ 9.	Schatting van de grootte der magnetische werkingen van moleculen op elkander tijdens de botsing in verhouding tot die van de mechanische krachten	29
§ 10.	Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen IV. Afleiding van de verdeelingsfunctie bij de tweede onderstelling omtrent de botsing.....	31
§ 11.	Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen V. Bepaling van het resulterend magnetisch moment bij de tweede onderstelling omtrent de botsing.....	34
§ 12.	Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen I. Nadere bepaling en afleiding van de verdeelingsfunctie bij de eerste onderstelling omtrent de botsingen	34
§ 13.	Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen II. Bepaling van het resulterend moment bij de eerste onderstelling omtrent de botsingen.....	39

	Blz.
§ 14. Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen III. Resulteerend magnetisch moment bij andere onderstellin- gen omtrent de botsingen	40
§ 15. Magnetisch gedrag van dipolen I. Nadere bepaling en voorbereiding van de afleiding der verdeelingsfunctie	41
§ 16. Magnetisch gedrag van dipolen II. Verdere afleiding van de verdeelingsfunctie en van het resulteerend magnetisch moment bij de eerste onder- stelling omtrent de botsingen.....	45
§ 17. Magnetisch gedrag van dipolen III. Afleiding der verdeelingsfunctie en van het resulteerend magnetisch moment bij de tweede onderstelling omtrent de botsing	46
§ 18. Magnetisch gedrag van vrije electronen in metalen bij twee onderstellingen omtrent de botsing.....	49
§ 19. Opmerkingen over het magnetisch gedrag van willekeurige moleculen	52
§ 20. Berekening van additieve bewegingsintegralen voor enkele andere gevallen	55
§ 21. Bespreking van de door anderen verkregen uitkomsten voor de drie soorten neutrale moleculen.....	58
§ 22. Bespreking van het werk van anderen over het magnetisch gedrag der vrije electronen in metalen.....	66
§ 23. Magnetisch gedrag van stroomdragers, ladingdragers en dipo- len, als er geen botsingen plaats hebben.....	73
§ 24. Samenvatting van het behandelde en bespreking van moeilijk- heden, verbonden aan een electronentheorie van het mag- netisme	79
Aanhangsel	81
Literatuurlijst	113

INLEIDING.

§ 1.

Voor de meest eenvoudige gevallen zal in dit proefschrift de electronentheorie van het magnetisme worden behandeld. Over de hoofdpunten daarvan bestaat nog een diepgaand verschil van meening; we behoeven om dit aan te toonen slechts te wijzen op de uitspraken van LANGEVIN [13]¹⁾ en KROO [12]. De eerste komt tot het besluit, dat zoowel het dia- als het paramagnetisme in de electronentheorie verklaard kunnen worden, de laatste, dat de electronentheorie alleen het diamagnetisme verklaren kan. Het schijnt dus wel gerechtvaardigd voor enkele van de eenvoudigste onderstellingen, die omtrent den bouw der moleculen gemaakt kunnen worden, een methode, waarmede wel algemeene instemming zal bestaan, geheel uit te werken om zodoende tot resultaten te komen, waaraan de tot nog toe afgeleide getoetst kunnen worden. Voor die methode kunnen we gebruiken die van het H-theorema van BOLTZMANN [2], maar moeten ons dan beperken tot gassen, waarin de moleculen alleen in wisselwerking zijn gedurende den korten duur van hun botsingen en tot een temperatuurgebied, waarin de wetten van de klassieke mechanica kunnen worden toegepast, zoo hoog dus, dat de quanta nog geen rol spelen.

Voorts zullen we bij alle bewegingen van electriche ladingen van straling moeten afzien, anders is een stationaire toestand niet mogelijk. De bewegingen moeten dus quasi-stationair zijn.

Het uitwerken van deze methode, die we eerst kort in herinnering zullen brengen, is slechts voor bijzondere onderstellingen omtrent den bouw van het molecuul en omtrent de botsingen der moleculen on-

¹⁾ De getallen binnen vierkante haken verwijzen naar de literatuurlijst achteraan toegevoegd, de formules in het werk zelf zijn met Arabische cijfers genummerd, die in het aanhangsel met Romeinsche.

derling volledig gelukt. Die onderstellingen zijn in aansluiting aan de tot nog toe uitgekomen literatuur gekozen. Op de behandeling van de bijzondere gevallen zullen eenige opmerkingen over het algemeene probleem volgen en een bespreking van de literatuur erover.

Hulprekeningen en opmerkingen, die den gang der redeneering te veel zouden storen, vindt men in het aanhangsel.

§ 2. Onderstellingen omtrent den bouw van het molecuul.

We zullen drie gevallen van electrisch neutrale moleculen behandelen, het eerste uitvoerig, de volgende wat beknopter, n. l.:

1^o. *Stroomdragers*, waarmede we zullen aanduiden moleculen, die zelf rotatieellipsoïdes zijnde, in hun aequator een ring dragen, waarin positieve electriciteit vast zit, terwijl negatieve er vrij in kan bewegen.

2^o. *Ladingdragers*, waarmede we bedoelen moleculen, die binnen het oppervlak van een rotatieellipsoïde zoowel constante massa- als ladingdichtheid hebben. Om het molecuul neutraal te maken, kunnen we evenveel lading van het andere teeken in een bolletje om het middelpunt vereenigd denken; als dit bolletje een veel grooter massa en grootere traagheidsmomenten heeft dan de ellipsoïde, zullen we de magnetische werking ervan mogen verwaarloozen, omdat we zullen zien, dat deze in alle gevallen des te kleiner wordt, naarmate de quotiënten van lading en massa (of traagheidsmomenten) kleiner worden.

3^o. *Dipolen*; zoo noemen we moleculen bestaande uit twee bolvormige deeltjes, die gelijke en tegengestelde lading dragen en elkaar onderling centraal aantrekken met een kracht, die een willekeurige functie is van hun onderlingen afstand.

Voor elk van die gevallen zullen we omtrent de botsingen nog twee verschillende onderstellingen maken.

Ten slotte zal nog worden beschouwd het magnetisch gedrag der *vrije electronen in metalen*.

§ 3. De stelling van Boltzmann en haar bewijs.

In het algemeen zij de toestand van het x^{de} der k moleculen bepaald door n coördinaten: $q_1^{(x)}, \dots, q_\nu^{(x)}, \dots, q_n^{(x)}$ en evenzovele snelheidscomponenten: $\dot{q}_1^{(x)}, \dots, \dot{q}_\nu^{(x)}, \dots, \dot{q}_n^{(x)}$. Is L de functie van LAGRANGE¹⁾ voor het beschouwde stelsel, d. w. z. kunnen de bewegingsvergelijkingen worden geschreven in den vorm:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = Q_\nu \quad 2)$$

waarin Q_ν een kracht voorstelt, die nog op het molecuul kan werken, dan kunnen we in plaats van de \dot{q}_ν ($\nu = 1, \dots, n$) momenten p_ν invoeren, gedefinieerd door:

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}.$$

We vragen nu naar het aantal moleculen $f(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) d\omega$, dat „ligt”³⁾ in een element $d\omega$ van de $2n$ -dimensionale phaseuitbreidheid, waarin de q 's en p 's coördinaten zijn.

We zullen nu voor elk van de gevallen, die we zullen behandelen, bewijzen, dat de stelling van LIOUVILLE geldt, d. w. z. dat een groep moleculen $f d\omega$ gedurende de beweging steeds in volumenelementen komt, die gelijk aan $d\omega$ zijn, terwijl bij botsing van twee moleculen in de ruimte, waarin hun beider coördinaten en momenten coördinaten zijn, een analoge stelling geldt. BOLTZMANN bewijst nu, dat als dit theorema geldt en wanneer door een willekeurige botsing van een molecuul, dat in den toestand: $(q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$ verkeerde met een molecuul $(q_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$, hun coördinaten en momenten overgaan in $(q_1^{(1)'}, \dots, p_n^{(1)'})$ en $(q_1^{(2)'}, \dots, p_n^{(2)'})$, in den stationairen toestand van het stelsel de betrekking moet bestaan:

$$f(q_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}) f(q_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}) = f(q_1^{(1)'}, \dots, p_n^{(1)'}) f(q_1^{(2)'}, \dots, p_n^{(2)'})$$

1) L is het verschil van kinetische en potentieele energie, eventueel vermeerderd met het verschil van magnetische en elektrische energie (zie § 4).

2) De aanwijzers (x) zullen we alleen schrijven, waar dit voor de duidelijkheid gewenscht is.

3) Dit zij een verkorte uitdrukking daarvoor, dat het punt met coördinaten $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$, dat den toestand van een molecuul in de phasenruimte afbeeldt, ligt in $d\omega$.

waarvoor we korter kunnen schrijven:

$$f_1 f_2 = f'_1 f'_2 \dots \dots \dots (1)$$

Is aan vergelijking (1) voldaan, dan is voor elke groep de winst en het verlies door botsingen even groot. Hiervan gebruik makende kan men nog een tweede voorwaarde voor den stationairen toestand opstellen.

Botsten de moleculen van de groep $f d\omega$ niet, dan zouden ze een tijd t later b.v. gekomen zijn in $d\omega_1$. Daar in werkelijkheid door botsingen evenveel moleculen bij de groep zijn gaan behooren, als er uitgevallen zijn, komen na dien tijd t in $d\omega_1$ evenveel moleculen als er voor dien tijd in $d\omega$ lagen. Voorts is $d\omega_1 = d\omega$, zoodat de dichtheid in $d\omega_1$ na een tijd t dezelfde is als vóór dien tijd in $d\omega$. Opdat de toestand stationair is, moet dus dezelfde dichtheid bestaan *op alle plaatsen, die bij een beweging zonder botsingen zouden worden doorloopen*, wat uitgedrukt wordt door de vergelijking:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{v=1}^{v=n} \frac{\partial f}{\partial q_v} \dot{q}_v + \sum_{v=1}^{v=n} \frac{\partial f}{\partial p_v} \dot{p}_v = 0, \dots \dots \dots (2)$$

die we moeten toepassen alsof er geen botsingen waren (dus met $Q'_v = 0$, als Q'_v een botsingskracht voorstelt).

Wij zullen voor elk der drie molecuulsoorten (en ook voor de vrije electronen in metalen) de meest algemeene oplossing van de vergelijkingen (1) en (2) bepalen. Soms zal het bovendien nog noodig zijn betrekkingen van symmetrie van het stelsel te gebruiken.

Bewijs van formule (1):

BOLTZMANN, [2], geeft dit bewijs voor het geval, dat er geen andere krachten op de moleculen werken dan die, welke ze bij botsing op elkander uitoefenen. Feitelijk zullen wij de stelling toepassen in gevallen, waarin er wel zulke krachten zijn, maar we zullen zien, dat het bewijs bijna onveranderd ook voor die gevallen geldig is.

We definiëeren een grootheid H door de formule:

$$H = \int f \log f d\omega,$$

waarin de integratie over alle waarden van coördinaten en momenten moet worden uitgestrekt en zullen bewijzen, dat:

$$\frac{dH}{dt}$$

negatief of nul is en wel alleen nul, als aan vergelijking (1) voldaan is, zoodat (1) een noodzakelijke voorwaarde is voor het bestaan van een stationairen toestand ¹⁾.

Vatten we de moleculen $f d\omega$ in het oog; deze dragen tot de som $\sum \log f$, waarmede we te doen hebben, elk $\log f$ bij. Zoolang er geen botsingen plaats hebben, blijft die groep even talrijk en blijft ze gedurende de beweging in een even groot volumenelement, dus f en ook $\log f$ blijft er hetzelfde voor. Afgezien van botsingen draagt deze en dus ook elke groep voortdurend hetzelfde bedrag tot H bij. Alleen ten gevolge der botsingen kan $\frac{dH}{dt}$ dus van nul verschillen.

Wij zullen nu zeggen, dat een botsing duurt, zoolang de afstand der zwaartepunten van twee moleculen kleiner is dan of gelijk is aan een kritischen afstand B , waarbij B dus klaarblijkelijk aan de voorwaarde moet voldoen, dat bij grooter afstand de moleculen nooit op elkaar werken. Wij kunnen nu een ruimte μ beschouwen, waarin de coördinaten en momenten van twee moleculen, wij noemen ze het 1^e en het 2^e van het molecuulpaar, coördinaten zijn. Onder die coördinaten nemen we ξ , η en ζ , de relatieve coördinaten van het zwaartepunt van het tweede molecuul t/o van het gemeenschappelijk zwaartepunt ²⁾. Het punt, dat den toestand van beide moleculen in de ruimte μ voorstelt, het „toestandspunt,” beschrijft bij de beweging der moleculen een „bewegingslijn,” en waar deze stuit tegen het oppervlak $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} B^2$ in een punt c_1 begint een volkomen bepaalde botsing, die wij een botsing van de eerste soort zullen noemen. Stel, dat deze botsing eindigt in een punt c'_1 , zoodat vandaar de bewegingslijn weer verder loopt. Wij kunnen nu een punt c_2 opzoeken, dat uit c'_1 verkregen wordt door de teekens van ξ , η , ζ om te keeren en verder alle coördinaten hetzelfde te laten. In c_2 kan dan weer een botsing beginnen en we noemen deze een botsing van de 2^e soort. Wij laten nu een speelruimte toe voor de botsingen van de 1^e soort; we beschouwen n.l. alle bewegingslijnen, die eindigen op een element dC_1 van het oppervlak $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} B^2$, deze zullen na de botsing

1) Dit bewijs zal worden gegeven in den vorm, waarin prof. LORENTZ het in een college (1915—1916) behandelde.

2) Welke andere grootheden we als coördinaten kiezen, is in aanhangsel 1 aangegeven.

hun voortzetting vinden vanaf een element dC_1 en men kan hieraan weer toevoegen een element dC_2 , waarvan alle punten aan die van dC_1 beantwoorden, zooals c_2 aan c_1 beantwoordde. Daarmee krijgen we een speelruimte voor de botsingen van de 2^e soort, n.l. door alle bewegingslijnen te beschouwen, die in dC_2 eindigen. Juist zooals we van de botsingen van de 1^e soort zijn gekomen tot botsingen van de 2^e soort, kunnen we uit de botsingen van de 2^e soort botsingen van de 3^e soort afleiden enz. Is nu $d\mu_1$ het cylindertje, in den tijd dt doorloopen door de toestandspunten der molecuulparen, die tusschen t en $t + dt$ botsen en wier bewegingslijn daarbij eindigt op dC_1 , dan is het aantal botsingen van de 1^e soort tusschen de oogenblikken t en $t + dt$:

$$\left. \begin{array}{l} f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\mu_1, \\ \text{en evenzoo, als } d\mu_2, d\mu_3, \dots \text{ een dergelijke beteekenis} \\ \text{hebben als } d\mu_1, \text{ het aantal botsingen van de 2^e soort:} \\ f_2^{(1)} f_2^{(2)} d\mu_2, \\ \text{dat van de 3^e soort:} \\ f_3^{(1)} f_3^{(2)} d\mu_3, \text{ enz.,} \end{array} \right\} \dots (3)$$

als $f_1^{(1)} d\omega^{(1)}$ het aantal moleculen is, dat ligt in een element $d\omega^{(1)}$, waarin het 1^e molecuul zich bevindt, als het toestandspunt van het molecuulpaar in c_1 ligt, $f_1^{(2)} d\omega^{(2)}$ het aantal moleculen binnen $d\omega^{(2)}$, waarin het 2^e molecuul bij den genoemden toestand van het paar ligt, enz.¹⁾ (De index boven wijst dus het molecuulnummer, die beneden het botsingsnummer aan). Verondersteld is hierbij, dat de waarschijnlijkheid van voorkomen van het 1^e molecuul binnen $d\omega^{(1)}$ en van het 2^e molecuul binnen $d\omega^{(2)}$ onafhankelijk van elkaar zijn. (De onderstelling, bekend onder den naam Stoszzahlansatz [3], zie voor de afleiding van (3) aanhangsel 1).

Door elke botsing van de 1^e soort verandert $\sum \log f$ met:

$$(\log f_1^{(1')} - \log f_1^{(1)} + \log f_1^{(2')} - \log f_1^{(2)}),$$

(als we met accenten de waarde aanduiden, die f heeft in elementen $d\omega'$, waarin de moleculen na de botsing liggen). Door alle botsingen

¹⁾ De begrenzing van de elementen $d\omega$ mag daarbij willekeurig zijn, ze is niet uit die van $d\mu$ afgeleid, wat trouwens alleen bij bijzondere begrenzing van $d\mu$ mogelijk zou zijn.

van de 1^e soort, die in dt gebeuren, verandert $\sum \log f$ dus met:

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} (\log f_1^{(1)'} - \log f_1^{(1)} + \log f_1^{(2)'} - \log f_1^{(2)}) d\mu_1,$$

of met:

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} (\log f_2^{(1)} - \log f_1^{(1)} + \log f_2^{(2)} - \log f_1^{(2)}) d\mu_1,$$

omdat de moleculen over de ruimte gelijkmatig verdeeld zijn en dus $f_1^{(1)'} = f_2^{(1)}$ en $f_1^{(2)'} = f_2^{(2)}$.

Nu is wegens de stelling van LIOUVILLE (zie aanhangsel 2):

$$d\mu_1 = d\mu_2 = d\mu_3 = \dots\dots\dots$$

De totale verandering dH van H in dt is dus, als we $f_1^{(1)} f_1^{(2)} = k_1$ stellen, bepaald door de formule:

$$\frac{dH}{d\mu_1} = k_1 (\log k_2 - \log k_1) + k_2 (\log k_3 - \log k_2) + \dots k_n (\log k_{n+1} - \log k_n),$$

of:

$$\frac{dH}{d\mu_1} = (k_1 - k_2) \log k_2 + (k_2 - k_3) \log k_3 + \dots (k_{n-1} - k_n) \log k_n + (k_n \log k_{n+1} - k_1 \log k_1),$$

als we gaan tot botsingen van de n° soort.

Kiezen we de speelruimten voor den toestand van één molecuul niet al te klein, dan zal er voor elk molecuul en dus ook voor elk moleculupaar slechts een eindig aantal bewegingstoestanden zijn, zoodat na de botsing van de n° soort die van de 1^e soort zich weer herhaalt ¹⁾. De laatste term wordt dan:

$$k_n \log k_{n+1} - k_1 \log k_1 = (k_n - k_1) \log k_1,$$

dus:

$$\frac{dH}{d\mu_1} = (k_1 - k_2) \log k_2 + (k_2 - k_3) \log k_3 + \dots (k_{n-1} - k_n) \log k_n + (k_n - k_1) \log k_1.$$

De k 's vormen nu een gesloten kring. Ze zijn of alle even groot, of er is een getal aan te wijzen, stel k_v , dat niet ligt tusschen k_{v-1} en k_{v+1} . Letten we nu op:

$$(k_{v-1} - k_v) \log k_v + (k_v - k_{v+1}) \log k_{v+1};$$

¹⁾ BOLZMANN'S bewijs, dat het juist de botsing van de 1^e soort is, die zich het eerst herhaalt, laten we hier achterwege.

schreven we daarvoor, wat er zou staan, als k_v in de rij ontbrak, n.l.:

$$(k_{v-1} - k_{v+1}) \log k_{v+1},$$

dan zou weggelaten zijn:

$$\begin{aligned} (k_{v-1} - k_v) \log k_v + (k_v - k_{v+1}) \log k_{v+1} - (k_{v-1} - k_{v+1}) \log k_{v+1} = \\ = (k_{v-1} - k_v) \log \frac{k_v}{k_{v+1}}, \end{aligned}$$

wat wegens de voorwaarde, waaraan k_{v-1} , k_v en k_{v+1} moesten voldoen, steeds negatief is, behalve als $k_{v-1} = k_v = k_{v+1}$, in welk geval het 0 is. Laten we k_v weg, dan is dus de nieuwe reeks, die in de plaats van $\frac{dH}{d\mu_1}$ komt, grooter dan of gelijk aan de oude. Na wegnemen van k_v hebben we weer precies zoo'n kring, waarmede we op dezelfde manier te werk kunnen gaan, tot we eindelijk twee termen overhouden, stel:

$$(k_\delta - k_\epsilon) \log k_\epsilon + (k_\epsilon - k_\delta) \log k_\delta = (k_\delta - k_\epsilon) \log \frac{k_\epsilon}{k_\delta},$$

wat weer 0 of negatief is. Hiermede is bewezen, dat, wat de in aanmerking genomen, een kring vormende soorten van botsingen betreft, dH nul of negatief moet zijn. Daar alle botsingen in kringen, zooals de beschouwde, kunnen worden samengevat, komen wij tot hetzelfde besluit omtrent de totale verandering der grootheid H , en wel kan die verandering alleen dan 0 zijn, als voor elken kring $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n$ is. In den stationairen toestand, die eindelijk wel zal ontstaan, moet $dH = 0$ zijn en dus:

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} = f_2^{(1)} f_2^{(2)} = f_1^{(1)'} f_1^{(2)'}$$

d. w. z. voor elke botsing:

$$f^{(1)} f^{(2)} = f^{(1)'} f^{(2)'}$$

Nu is er van gebruik gemaakt, dat de talrijkheid der groepen van moleculen door het verwisselen van de zwaartepunten van botsende moleculen niet verandert. Zoolang er geen uitwendige krachten zijn, zijn we daarvan zeker, omdat elke stand in de ruimte dan even waarschijnlijk was. We mogen er echter ook in het magneetveld gebruik van maken, 1e omdat we zullen vragen naar het magnetisch gedrag van een gas in een homogeen veld en 2e omdat we in ieder

geval steeds beschouwen het aantal moleculen in volumenelementen, waarin nog vele moleculen liggen ¹⁾. Bij de bedoelde plaatsverandering der moleculen blijven we in hetzelfde element, behalve in de te verwaarloozen gevallen, dat het molecuul al juist bij de grens van het volumenelement lag.

Dat nu, als aan (1) voldaan is, elke groep moleculen bij zijn beweging een even groote winst als verlies door botsingen heeft, kan men door de volgende redeneering inzien.

De uitdrukking $f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\mu_1$ stelt het aantal botsingen voor, die plaats hebben in den tijd dt , eindigen in het bovengenoemd element dC'_1 , en na afloop waarvan het gemeenschappelijk zwaartepunt in een bepaald volumenelement dV ligt, terwijl, eveneens na de botsing, de momenten, behoorende bij de beweging der beide zwaartepunten, alsmede de „inwendige” coördinaten en momenten der beide deeltjes, alle tezamen genomen, in een zekere speelruimte $d\omega$ liggen. Let men verder op de wijze, waarop de tweede soort van botsingen uit de eerste werd afgeleid, dan kan men zeggen, dat $f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\mu_2$ het aantal botsingen, eveneens in den tijd dt voorstelt, die beginnen in het element dC_2 , en aan het begin waarvan het gemeenschappelijk zwaartepunt ligt in een volumenelement, gelijk aan dV en de overige, zooeven genoemde grootheden in dezelfde speelruimte $d\omega$. Nu kan men deze speelruimte op willekeurige wijze begrenzen; zij kan worden samengesteld uit twee speelruimten $d\omega^{(1)}$ en $d\omega^{(2)}$, waarvan de eerste behoort bij den bewegingstoestand en de configuratie van het eerste molecuul en de tweede op dezelfde wijze op het tweede molecuul betrekking heeft. Daar nu $f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\mu_1 = f_2^{(1)} f_2^{(2)} d\mu_2$ is, kan men besluiten: Worden in den tijd dt door zekere soort van botsingen deeltjes gebracht in een door de speelruimte $d\omega^{(1)}$ gekenmerkte groep, dan kunnen andere, per volumeneenheid even talrijke, botsingen worden aangewezen, door welke deeltjes uit die groep worden verwijderd, waarmede het gestelde bewezen is. Eene der overwegingen, waarop de conclusie berust, is deze, dat wanneer de elementen dC'_1 aan elkaar

¹⁾ Was het veld niet homogeen, dan zou het alleen dan geoorloofd zijn nog van een functie f gebruik te maken, als de verandering van het veld over den afstand van naburige moleculen onmerkbaar was en er dus volumenelementen konden worden gevonden, die vele moleculen bevatten en waarin toch het veld niet merkbaar veranderde.

sluiten, zonder over elkaar te grijpen, hetzelfde van de daaruit afgeleide elementen dC_2 zal gelden.

De vergelijkingen (1) en (2) zijn dus noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van een stationairen toestand, ze zijn echter ook voldoende daarvoor, want de dichtheid in een willekeurig gekozen element blijft gedurende de strooming, die in de phasenruimte bestaat, steeds dezelfde.

§ 4. Algemeen bewijs voor de stelling van Liouville voor de verschillende gevallen, die behandeld zullen worden.

Om dit bewijs te geven, zullen we uitgaan van de bewegingsvergelijkingen, die we steeds in den vorm:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} = Q_v + Q'_v \quad (v = 1, 2, \dots, n) \dots\dots (4)$$

kunnen brengen, verg. [14] p. 170. Daarin zijn Q'_v krachten bij de botsingen door de moleculen onderling op elkander uitgeoefend en wat Q_v en L betreft hebben we twee gevallen te onderscheiden:

1^o. of de electromagnetische krachten zijn in L opgenomen; dan is deze functie het verschil van kinetische en potentieele energie, vermeerderd met dat van magnetische en electricische energie, en zijn de $Q_v = 0$ ¹⁾,

2^o. of L is alleen het verschil van kinetische en potentieele energie; dan zijn de Q_v krachten door het magneetveld uitgeoefend.

In beide gevallen voeren we momenten in met behulp van de vergelijkingen:

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v}$$

1) Het uitwendige stroomstelsel, dat het magnetische veld levert, wordt daarbij tot het stelsel gerekend. Wij noemen den coördinaat, die den „stand der electriciteit” in den stroomkring bepaalt, d. w. z. de hoeveelheid electriciteit, die sedert zeker beginoogenblik door een doorsnede is gegaan, q_0 . Dan hangt L ook van de snelheid \dot{q}_0 , de stroomsterkte, af, echter niet van q_0 zelf, die een cyclische coördinaat is.

Met de grootheden q_v worden steeds coördinaten der moleculen bedoeld; q_0 is daaronder niet begrepen.

In plaats van de snelheden \dot{q}_v zullen we momenten p_v invoeren; we behouden echter in de volgende formules steeds \dot{q}_0 en voeren niet het moment p_0 in.

en een nieuwe functie R , die we zullen definiëren door:

$$R = \sum_1^k \sum_1^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v^{(k)}} \dot{q}_v^{(k)} - L$$

We noemen ze functie van ROUTH, omdat de som in de vergelijking, waardoor we haar bepalen, zich niet over *alle* coördinaten (n.l. niet over q_0) uitstrekt (verg. aanhangsel 3).

R wordt uitgedrukt in de p 's en q 's, niet in de q 'en; de Q 's, die eerst in de q 's en \dot{q} 'en waren uitgedrukt, worden nu in de q 's en p 's uitgedrukt.

De bewegingsvergelijkingen gaan dan over in:

$$\dot{q}_v = \frac{\partial R}{\partial p_v}, \quad \dot{p}_v = -\frac{\partial R}{\partial q_v} + Q_v + Q'_v.$$

(zie aanhangsel 3).

We bewijzen vooreerst, dat de speelruimte in de phaseuitgebreidheid, die voor een molecuul is toegelaten, op de tijden t en $t + dt$, even groot is, als tusschen die oogenblikken geen botsing plaats heeft. De coördinaten en momenten, die op den tijd t de waarden $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ hadden, hebben op den tijd $t + dt$ de waarden $q'_1 = q_1 + \dot{q}_1 dt, \dots, p'_n = p_n + \dot{p}_n dt$, dus moeten we bewijzen:

$$\Delta = 1,$$

als Δ de volgende determinant is:

$$\Delta = \frac{\partial(q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(q_1 + \dot{q}_1 dt, \dots, p_n + \dot{p}_n dt)}{\partial(q_1, \dots, p_n)}.$$

Alle termen in de ontwikkeling, behalve het product der elementen op den hoofddiagonaal zijn hier minstens van de tweede orde in dt , dus zal alleen het genoemde product overblijven, dus:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 + dt \left(\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_n} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_n}{\partial p_n} \right) = \\ &= 1 + dt \left(\frac{\partial^2 R}{\partial q_1 \partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 R}{\partial q_n \partial p_n} - \frac{\partial^2 R}{\partial p_1 \partial q_1} - \dots - \frac{\partial^2 R}{\partial p_n \partial q_n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \right) = 1 + dt \sum_1^n \frac{\partial Q_v}{\partial p_v}. \end{aligned}$$

In geval 1 zijn de Q_v 's nul, dus is $\Delta = 1$.

In geval 2 zijn de Q_v 's krachten door het magneetveld op elektrische ladingen uitgeoefend, ze zullen dus lineair in de snelheidscomponenten zijn, stel daarin worden ze als volgt uitgedrukt:

$$Q_v = a_{v1} \dot{q}_1 + \dots + a_{vn} \dot{q}_n.$$

Bij de werkelijke beweging verrichten ze geen arbeid. Voor alle waarden van de \dot{q}_v en moet dus:

$$Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_n \dot{q}_n = 0$$

zijn, dus:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_{\nu\mu} + a_{\mu\nu}) \dot{q}_\nu \dot{q}_\mu = 0^1).$$

Daar dit voor alle waarden van de snelheden moet gelden, en de coëfficiënten $a_{\mu\nu}$ onafhankelijk daarvan zijn, moet men hebben:

$$a_{\nu\nu} = 0, \quad a_{\nu\mu} = -a_{\mu\nu} \quad \text{of} \quad \frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\nu} = 0, \quad \frac{\partial Q_\mu}{\partial \dot{q}_\nu} = -\frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \dots (5).$$

Drukken we nu de Q 's weer in de p 's en q 's uit, dan is:

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial p_\nu} = \sum_{\mu} \frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu}, \quad \text{dus:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{\partial Q_\nu}{\partial p_\nu} &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} \frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu} + \frac{\partial Q_\mu}{\partial \dot{q}_\nu} \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial p_\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sum_{\mu} \frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \left(\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial p_\mu} \right) \quad \text{wegens (5)}. \end{aligned}$$

Daar $\dot{q}_\mu = \frac{\partial R}{\partial p_\mu}$ en $\dot{q}_\nu = \frac{\partial R}{\partial p_\nu}$ is elk van de termen van deze som

nul, dus $\sum_{\nu} \frac{\partial Q_\nu}{\partial p_\nu} = 0$, waarmede de stelling van LIOUVILLE bewezen is voor alle te behandelen gevallen, als we daarvoor de bewegingsvergelijkingen maar in den vorm (4) brengen.

Nu moeten we nog bewijzen, dat het element in de phaseuitge-

1) Waarbij echter de termen $a_{11} \dot{q}_1^2, \dots, a_{nn} \dot{q}_n^2$ slechts eens mogen worden genomen.

breidheid van een molecuulpaar tijdens de botsing even groot blijft, d. w. z. dat:

$$\Delta^{(1, 2)} = \frac{\partial(q_1^{(1)} + \dot{q}_1^{(1)} dt, \dots, p_n^{(1)} + \dot{p}_n^{(1)} dt, q_1^{(2)} + \dot{q}_1^{(2)} dt, \dots, p_n^{(2)} + \dot{p}_n^{(2)} dt)}{\partial(q_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})} = 1 \text{ is.}$$

Weer blijft alleen het product der termen op den hoofddiagonaal over, waarvoor we, omdat nu de krachten $Q^{(1)}$ en $Q^{(2)}$, die op beide deeltjes werken, alsmede de botsingskrachten $Q^{(1)'}$ en $Q^{(2)'}$ moeten worden ingevoerd, vinden:

$$\Delta^{(1, 2)} = 1 + dt \left[\sum_1^n \frac{\partial Q^{(1)} + Q^{(1)'}}{\partial p_v^{(1)}} + \sum_1^n \frac{\partial Q^{(2)} + Q^{(2)'}}{\partial p_v^{(2)}} \right].$$

We zullen steeds botsingskrachten aannemen, die alleen van de coördinaten, niet van de snelheden en dus ook niet van de momenten afhangen, dus $\frac{\partial Q_v'}{\partial p_v} = 0$.

Op de beide overblijvende sommen kunnen we de bovengegeven beschouwing toepassen, zoodat we mogen besluiten:

$$\Delta^{(1, 2)} = 0.$$

§ 5. Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen I.

Nadere bepaling der stroomdragende moleculen en voorbereiding van de afleiding der verdeelingsfunctie.

In het ellipsoïdische molecuul leggen we een assenstelsel $O\xi\eta\zeta$, $O\xi$ is de omwentelingsas. We bepalen de ligging ervan ten opzichte van een in de ruimte vaststaand assenstelsel $OXYZ$, waarvan we de X -as evenwijdig aan de magnetische krachtlijnen nemen, door middel van de hoeken van EULER q_1, q_2, q_3 . De eerste q_1 is de hoek tusschen OX en $O\xi$ ¹⁾, q_2 is die tusschen het vlak $XO\xi$ en het vlak XOY ,

¹⁾ We kiezen in elk molecuul een richting $O\xi$ als de positieve, zonder daarbij acht te slaan op de beweging van het molecuul zelf of van den ring. De hoek q_1 wordt positief gerekend en kan alle waarden van 0 tot π hebben. Voor q_2 , die we van het vlak XOY naar het vlak $XO\xi$ rekenen, is de positieve richting die van

Een meridiaanvlak, verbonden met den beweeglijken electriciteitsring, maakt een hoek q_l met een, dat in het molecuul een vasten stand heeft. Wanneer we het magneetveld gegeven denken door een uitwendig stroomsysteem, dat een magneetkracht \mathfrak{H} levert en een stroomsnelheid \dot{q}_0 heeft, dan heeft de functie van LAGRANGE, als we daarvoor in dit geval de som van kinetische en magnetische energie nemen (de potentieele energie van de botsingskrachten nemen we niet in L op, en de elektrische energie is nul) de gedaante:

$$L = \sum \left[\frac{m}{2} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2) + \frac{\alpha}{2} (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3)^2 + \frac{\beta}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) + \frac{\lambda}{2} \dot{q}_l^2 + \mu \dot{q}_l \dot{q}_0 \cos q_1 \right] + \frac{\nu}{2} \dot{q}_0^2 \dots \dots \dots (6)$$

Daarin moeten we de som uitstrekken over alle moleculen, α en β zijn traagheidsmomenten om de Ξ - en om de H- of Z-as, λ en ν coëfficiënten van zelfinductie van het moleculaire stroompje en van het uitwendige stroomsysteem, μ hun coëfficiënt van wederkerige inductie, als de stroombanen parallel staan en de voor q_l en q_0 aangenomen positieve richtingen overeenstemmen ¹⁾, q_x, q_y, q_z zijn de coördinaten van het zwaartepunt.

De eerste drie termen zijn op te vatten als mechanische energie, de componenten van de hoeksnelheid langs $O\Xi, OH, OZ$ zijn n.l.:

$$\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3, \quad \dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_3, \quad \dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3,$$

de laatste drie als magnetische. Ondersteld is, dat producttermen van \dot{q}_l met \dot{q}_1, \dot{q}_2 of \dot{q}_3 evenals bij macroscopische stroomsystemen te verwaarloozen zijn tegenover de andere termen (zie aanhangsel 4).

Het magnetisch moment van een molecuul heeft op de X-as een projectie:

$$\delta \dot{q}_l \cos q_1,$$

waarin δ een constante is (zie aanhangsel 5).

Om verschillende redenen is het nu gewenscht in plaats van de snelheidscomponenten momenten en in plaats van L een functie van ROUTH R in te voeren.

In de eerste plaats zou de stelling van LIOUVILLE niet hebben

¹⁾ λ en μ zijn niet de inductiecoëfficiënten in den gewonen zin, maar verschillen daarvan door een constanten factor, omdat q_l een hoek is en niet een doorgeschoven hoeveelheid electriciteit.

gegolden als in de phaseuitgebreidheid coördinaten en snelheden der moleculen als coördinaten waren gekozen, dus moeten we voor de moleculen wel momenten invoeren. Voor de p_v 's en q_v 's worden de bewegingsvergelijkingen dan zeer eenvoudig, als we daarbij de functie R in plaats van L invoeren. Ze krijgen n.l. den kanonischen vorm:

$$\dot{q}_v = \frac{\partial R}{\partial p_v}, \quad \dot{p}_v = -\frac{\partial R}{\partial q_v} + Q'_v,$$

die voor q_0 wordt daarentegen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_0} = -Q_0$$

(zie voor het bewijs aanhangsel 3).

In de tweede plaats blijft, als we \dot{q}_0 (dus ook de intensiteit \mathfrak{H} van het magneetveld) constant en gegeven denken, R constant, wat we bij de oplossing der verlijkingen (1) en (2) zullen gebruiken. Om dit te bewijzen, merken we op, dat we de som E van de kinetische en de magnetische energie uit L krijgen, als we voor alle coördinaten, dus ook voor q_0 te werk gaan, zooals we voor R met de q_v 's deden, n.l.:

$$E = \sum_1^k \sum_1^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v^{(x)}} \dot{q}_v^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 - L = R + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0$$

(vgl. aanhangsel 3).

De toename van E moet gelijk zijn aan den arbeid, door Q_0 en de botsingskrachten Q'_v verricht. De arbeid dezer laatste is $-dU$, als U de potentieele energie is, die aan Q'_v beantwoordt, en voor Q_0 kunnen we schrijven:

$$-Q_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \right),$$

omdat R niet van q_0 afhangt; dus is:

$$Q_0 \dot{q}_0 dt - dU = dE$$

$$\text{of:} \quad -\dot{q}_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \right) dt - dU = d \left[R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right],$$

$$-dU = dR^1). \dots\dots\dots (7)$$

1) Korter volgt dit trouwens uit:

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{v,x} \left(\frac{\partial R}{\partial q_v^x} \dot{q}_v^x + \frac{\partial R}{\partial p_v^x} \dot{p}_v^x \right) + \frac{\partial R}{\partial q_0} \dot{q}_0 + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \ddot{q}_0.$$

Wij kunnen aannemen, dat de potentieele energie, die twee deeltjes ten opzichte van elkaar hebben, nul is, zoolang zij elkander niet aanraken. Dan kan, als de botsingen als instantaan beschouwd worden, de potentieele energie van het geheele stelsel nul worden gesteld, zoodat uit (7) de standvastigheid van R volgt.

In de derde plaats heeft R een voordeel boven de totale energie E van het stelsel, wanneer we beide in erbij passende momenten uitdrukken. We hadden n.l. ook, evenals voor de q_v 's, het moment $p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0}$ kunnen invoeren in plaats van \dot{q}_0 , dan was de transformatie op momenten volledig geweest en alle vergelijkingen, dus ook die voor q_0 hadden den kanonischen vorm verkregen. Bij constant gehouden p_0 zou dan ook E constant blijven, maar E zou niet kunnen worden geschreven als een som van termen, die elk op één enkel molecuul betrekking hebben, en een constante, wat voor R wel het geval is (zie aanhangsel 6). Dit vereenvoudigt onze rekening met R zeer. Zoodat we boven zagen is het verband tusschen E en R :

$$E = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0.$$

Voor de momenten en de functie R hebben we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{q}_x, & p_y &= m\dot{q}_y, & p_z &= m\dot{q}_z, \\ p_1 &= \beta\dot{q}_1, & p_2 &= \alpha(\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) \cos q_1 + \beta\dot{q}_2 \sin^2 q_1, \\ p_3 &= \alpha(\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3), & p_l &= \lambda\dot{q}_l + \mu\dot{q}_0 \cos q_1, \\ R &= L - \sum \mu \dot{q}_0 \dot{q}_l \cos q_1 - \nu \dot{q}_0^2 = \sum \left[\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} + \\ &+ \left. \frac{1}{2\lambda} \left\{ p_l^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \dot{q}_0^2 \mu^2 \cos^2 q_1 \right\} \right] - \frac{\nu}{2} \dot{q}_0^2 \dots \dots (8) \end{aligned}$$

We kunnen hiervoor schrijven

$$R = \sum_1^k R_x - \frac{\nu}{2} \dot{q}_0^2$$

R hangt n.l. niet van q_0 af, \dot{q}_0 is nul en men heeft dus, blijkens de vergelijkingen, die \dot{q}_v en \dot{p}_v bepalen:

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{v,x} Q_v^{(x)} \dot{q}_v^{(x)} = - \frac{dU}{dt}.$$

en zullen nu nog aantonen, dat, zoolang een molecuul niet botst, R_x daarvoor constant blijft en dat bij een botsing van een molecuul (1) met een molecuul (2) de som $R_1 + R_2$ niet verandert. Behalve bij botsingen is n.l.:

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dt} &= \sum_1^n \frac{\partial R_x}{\partial q_v} \dot{q}_v + \sum_1^n \frac{\partial R_x}{\partial p_v} \dot{p}_v + \frac{\partial R_x}{\partial q_0} \dot{q}_0 + \frac{\partial R_x}{\partial \dot{q}_0} \ddot{q}_0 = \\ &= \sum_1^n \left[\frac{\partial R_x}{\partial q_v} \frac{\partial R_x}{\partial p_v} - \frac{\partial R_x}{\partial p_v} \frac{\partial R_x}{\partial q_v} \right] = 0, \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

omdat $\frac{\partial R_x}{\partial q_0}$ en \ddot{q}_0 beide nul zijn.

De botsing zullen we steeds instantaan denken. Coördinaten en momenten der overige, niet botsende moleculen veranderen terwijl zij plaats heeft niet, dus volgt uit vergelijking (7), dat bij botsing van molecuul (1) met molecuul (2):

$$R_1 + R_2 = \text{constant} \dots\dots\dots (10)$$

is ¹⁾. (Verg. § 8 en § 9 voor magnetische wisselwerking bij botsing).

§ 6. Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen II.

Bepaling van een mogelijke verdeelingsfunctie bij de eerste onderstelling omtrent de botsing en bewijs, dat deze de eenig mogelijke is.

De eerste onderstelling omtrent de botsing zal zijn, dat bij de volkomen elastische botsing der twee ellipsoïdes de beweging van den ring niet gestoord wordt.

Stel b is de lengte van de omwentelingsas, a die van de andere assen der ellipsoïde, $2b$ of $2a$ zal dan samenvallen met de kritische B van § 3. De afstand der middelpunten van de moleculen zal in 't algemeen gedurende zekeren tijd kleiner dan B zijn. Ergens in dien

¹⁾ Dit bewijs kon korter geleverd worden op dezelfde manier als dat voor $\frac{dR_x}{dt} = 0$, als we bij $R_1 + R_2$ een term voegen, die de potentieele energie van de botsingskrachten voorstelt. Deze energie is vóór en na de botsing nul. Bij bovenstaand bewijs zien we echter tevens het verband tusschen E en R .

tijd valt de eigenlijke, instantane botsing, en daar nu alleen bij deze de grootheid H (zie p. 4) kan veranderen, kunnen we in vergelijking (1) onder de grootheden zonder accenten die verstaan, welke op een oogenblik vlak voor de aanraking betrekking hebben en onder de grootheden met accenten die, welke betrekking hebben op dat, waarop de aanraking ophoudt. Stellen we $\log f = \phi$, dan moet volgens (1):

$$\phi^{(1)} + \phi^{(2)} = \phi^{(1)'} + \phi^{(2)'} \dots \dots \dots (11)$$

Dit moet een gevolg zijn van de vergelijkingen, die tusschen de grootheden, die den stand en den bewegingstoestand van de moleculen bepalen, vóór en na de botsing bestaan.

In het homogene veld zal de toestand overal dezelfde zijn en dus f onafhankelijk van q_x, q_y, q_z . Daar deze gedurende de botsing niet veranderen, behoeven we er in het geheel niet op te letten. Voor elk molecuul blijven dan 11 grootheden over:

$$p_x, p_y, p_z, q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, q_4, p_4$$

Om deze 22 grootheden na de botsing te berekenen, moeten we, behalve hun waarden vóór de botsing, nog twee grootheden geven, die de botsing nog nader bepalen, b.v. de coördinaten van het raakpunt op één der ellipsoïdes; dat op de tweede is dan tegelijkertijd bepaald. Na eliminatie van die 2 grootheden, zullen er dus 20 vergelijkingen tusschen de bepalende grootheden der moleculen vóór en na de botsing overblijven; van die 20 vergelijkingen moet (11) dus gevolg zijn. De bedoelde vergelijkingen zijn:

de 8 q 's blijven onveranderd (8 vergelijkingen), omdat de botsing instantaan is,

de p_3 's blijven onveranderd (2 vergelijkingen), omdat er geen moment om $O\xi^{(1)}$ of $O\xi^{(2)}$ is,

$p_x^{(1)} + p_x^{(2)}, p_y^{(1)} + p_y^{(2)}, p_z^{(1)} + p_z^{(2)}$ blijven onveranderd (3 vergelijkingen),

$R_1 + R_2$ blijft onveranderd (1 vergelijking),

de p_4 's blijven onveranderd (2 vergelijkingen), omdat de beweging van de ringen niet gestoord wordt.

De overige vier vergelijkingen drukken het behoud van moment van hoeveelheid van beweging uit. Ze zijn:

$$p'_1 - p_1 = -(a^2 - b^2) Q_\xi \frac{(p'_x - p_x)(-\sin q_1) + (p'_y - p_y) \cos q_1 \cos q_2 + (p'_z - p_z) \cos q_1 \sin q_2}{\sqrt{a^2 Q_\xi^2 + b^2 (Q_\eta^2 + Q_\zeta^2)}}$$

$$\frac{p'_2 - p_2}{\sin q_1} = -(a^2 - b^2) Q_\xi \frac{(p'_y - p_y)(-\sin q_2) + (p'_z - p_z) \cos q_2}{\sqrt{a^2 Q_\xi^2 + b^2 (Q_\eta^2 + Q_\zeta^2)}}$$

voor elk molecuul,

waarin Q_ξ , Q_η en Q_ζ de projecties op $O\xi$, $O\eta$ en Oz zijn van een vector, waarvan de componenten langs OX , OY en OZ zijn:

$$Q_x = p'_x - p_x, \quad Q_y = p'_y - p_y, \quad Q_z = p'_z - p_z.$$

(voor het bewijs zie men aanhangsel 7).

Ons vraagstuk is dus: ϕ zoodanig te bepalen, dat:

$$\phi^{(1)} + \phi^{(2)} = \phi^{(1')} + \phi^{(2')}, \dots \dots \dots (11)$$

als voldaan blijft aan:

$$\begin{aligned} p_x^{(1)} + p_x^{(2)} &= p_x^{(1')} + p_x^{(2')}, & (\alpha) \\ p_y^{(1)} + p_y^{(2)} &= p_y^{(1')} + p_y^{(2')}, & (\beta) \\ p_z^{(1)} + p_z^{(2)} &= p_z^{(1')} + p_z^{(2')}, & (\gamma) \\ p_l^{(1)} &= p_l^{(1')}, & (\delta_1) \\ p_l^{(2)} &= p_l^{(2')}, & (\delta_2) \\ R^{(1)} + R^{(2)} &= R^{(1')} + R^{(2')}, & (\epsilon) \\ p_3^{(1)} &= p_3^{(1')}, & (\zeta_1) \\ p_3^{(2)} &= p_3^{(2')}, & (\zeta_2) \\ H^{(1)} &= 0, & (\eta_1) \\ H^{(2)} &= 0, & (\eta_2) \\ \Theta^{(1)} &= 0, & (\theta_1) \\ \Theta^{(2)} &= 0, & (\theta_2) \\ q_\nu^{(1)} &= q_\nu^{(1')}, & (\kappa_{\nu 1}) \quad (\nu \text{ is } 1, 2, 3 \text{ of } l) \\ q_\nu^{(2)} &= q_\nu^{(2')}, & (\kappa_{\nu 2}) \end{aligned}$$

waarbij ter verkorting is ingevoerd:

$$H = \frac{p'_2 - p_2}{\sin q_1} + (a^2 - b^2) Q_\xi \frac{(p'_y - p_y)(-\sin q_2) + (p'_z - p_z) \cos q_2}{\sqrt{a^2 Q_\xi^2 + b^2 (Q_\eta^2 + Q_\zeta^2)}}, \quad (12)$$

en

$$\Theta = (p'_1 - p_1) + (a^2 - b^2) Q_\xi \frac{(p'_x - p_x)(-\sin q_1) + (p'_y - p_y) \cos q_1 \cos q_2 + (p'_z - p_z) \cos q_1 \sin q_2}{\sqrt{a^2 Q_\xi^2 + b^2(Q_y^2 + Q_z^2)}} \quad (13).$$

Nu zien we onmiddellijk, dat wegens deze vergelijkingen:

$$\Phi = -\varepsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z + \psi(p_3, p_1, q_1, q_2, q_3), \quad (14)$$

waarin ε_0 , m_x , m_y en m_z constanten zijn, en ψ een willekeurige functie is, aan vergelijking (11) voldoet. We zullen bewijzen, dat het de meest algemeene oplossing is ¹⁾.

Vergelijking (11) moet gelden voor alle waarden, die aan (α), (β), (θ) en de vergelijkingen (x) voldoen, dus moet ook de vergelijking, die we door differentiatie uit (11) afleiden, gevolg zijn van de vergelijkingen, die we door differentiatie uit (α), (x) afleiden. Nu konden we zooveel differentialen, als we vergelijkingen (α), (β), (x) hebben, dus 20, in de overige door middel van deze vergelijkingen uitdrukken, de andere konden dan willekeurig gekozen worden en men moest dus elk van hun coëfficiënten nul stellen. Dit eliminatieproces gaat, zooals bekend is, symmetrischer in zijn werk, als we elk der vergelijkingen (α), (x) na differentiatie met onbepaalde vermenigvuldigers, die we α , x zullen noemen, vermenigvuldigen en ze daarna bij de gedifferentieerde vergelijking (11) optellen. Het elimineeren van 20 differentialen bestaat dan in het nulstellen van hun coëfficiënten, het gebruik maken van de onafhankelijkheid der overige eveneens in het nul stellen van hun coëfficiënten. Als voorwaarde krijgen we dus, dat de coëfficiënt van elken differentiaal nul is. Drukken we dit b.v. voor de coëfficiënten van $dp_1^{(1)}$, $dp_1^{(1)'}$, $dp_1^{(2)}$ en $dp_1^{(2)'}$ uit, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial p_1^{(1)}} + \varepsilon \frac{p_1^{(1)}}{\beta} + \theta^{(1)} &= 0, & \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial p_1^{(2)}} + \varepsilon \frac{p_1^{(2)}}{\beta} + \theta^{(2)} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi^{(1)'}}{\partial p_1^{(1)'}} + \varepsilon \frac{p_1^{(1)'}}{\beta} + \theta^{(1)} &= 0, & \frac{\partial \Phi^{(2)'}}{\partial p_1^{(2)'}} + \varepsilon \frac{p_1^{(2)'}}{\beta} + \theta^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

¹⁾ Daar echter bij de afleiding van de meest algemeene oplossing aan $\Phi (= \log f)$ ook de voorwaarde (2) wordt opgelegd, vinden we in plaats van de functie ψ een functie van p_3 en p_1 alleen.

waaruit kan worden afgeleid, dat:

$$\frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_1^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_1^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial p_1^{(2)}} - \frac{\partial \phi^{(2)'}}{\partial p_1^{(2)'}}}{\frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_1^{(2)}} - \frac{\partial R^{(2)'}}{\partial p_1^{(2)'}}} = -\varepsilon.$$

Dezelfde uitkomst: $-\varepsilon$ zouden we gevonden hebben, als we in plaats van $p_1^{(1)}$, $p_1^{(1)'}$, $p_1^{(2)}$ en $p_1^{(2)'}$ een stel p 's met anderen index beneden hadden beschouwd, zoodat we krijgen:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_1^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_1^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_2^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_2^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_2^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_2^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_3^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_3^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_3^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_3^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_l^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_l^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_l^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_l^{(1)'}}} = \\ & \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_x^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_x^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_x^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_x^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_y^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_y^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_y^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_y^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial p_z^{(1)}} - \frac{\partial \phi^{(1)'}}{\partial p_z^{(1)'}}}{\frac{\partial R^{(1)}}{\partial p_z^{(1)}} - \frac{\partial R^{(1)'}}{\partial p_z^{(1)'}}} = \frac{\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial p_1^{(2)}} - \frac{\partial \phi^{(2)'}}{\partial p_1^{(2)'}}}{\frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_1^{(2)}} - \frac{\partial R^{(2)'}}{\partial p_1^{(2)'}}} = \dots = -\varepsilon. \quad (15) \end{aligned}$$

Voor het bewijs, dat ik verder in hoofdzaak aan prof. LORENTZ te danken heb, worden de conclusies uit deze voorwaarde voor ϕ pas getrokken, nadat aan ϕ ($= \log f$) de conditie (2) opgelegd is.

Vergelijking (2) zegt, dat ϕ alleen van integralen der bewegingsvergelijkingen van het molecuul (afgezien van botsingen) mag afhangen en wel zullen slechts die integralen voorkomen, die beteekenis hebben voor den aard der beweging van het molecuul (niet b.v. het beginoogenblik, vanwaar we den tijd rekenen enz.). Deze integralen blijken te zijn: R , p_2 , p_3 , p_l , p_x , p_y , p_z ¹⁾. (Zie aanhangsel 8).

Als we ϕ , die we als functie der p 's en q 's beschouwen, in de grootheden R , p_2 , \dots , p_z uitgedrukt denken, zullen we er Φ voor schrijven. Dan is, welke p we ook nemen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p}.$$

1) Hier wordt in plaats van $R^{(k)}$ voor één molecuul R zonder index geschreven, evenals p_x, \dots, p_z zonder index geschreven zijn. Waar verwarring met de functie

$R = \sum_1^k R^{(k)}$ zou kunnen komen, is de index steeds toegevoegd.

Als de verandering van een grootheid bij de botsing door het teeken Δ aangeduid wordt, zegt vergelijking (15) dus, dat:

$$\Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p} \right) = -\epsilon \Delta \frac{\partial R}{\partial p}. \dots\dots\dots (16)$$

We beginnen nu de gevolgtrekkingen uit deze vergelijking bij een bepaalde keus van p te maken.

1°. Neem voor p de grootheid p_l , dan is:

$$\frac{\partial R}{\partial p_l} = \frac{1}{\lambda} p_l - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 \cos q_1.$$

Daar dit bij de botsing niet verandert, moet ook:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_l} + \frac{1}{\lambda} p_l \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cos q_1$$

niet veranderen. Wij merken hierbij op, dat $\frac{\partial \Phi}{\partial p_l}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ functiën zijn van $p_2, p_3, p_l, p_x, p_y, p_z$ en R , maar verder q_1 niet bevatten. Nu kunnen wij ons allerlei botsingen voorstellen, die het molecuul ondervindt in standen, waarbij q_1 een bepaalde waarde heeft. Bij die botsingen blijven p_3 en p_l (zooals altijd) onveranderd, maar p_x, p_y, p_z, p_2 en R kunnen door een zeker aantal ervan, die wij ons op elkaar volgend denken, uit willekeurig gekozen beginwaarden in willekeurig gekozen eindwaarden overgaan. Wij hebben dus:

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_l} + \frac{1}{\lambda} p_l \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cos q_1 \right\}_{p'_x, p'_y, p'_z, p'_2, R', p_3, p_l} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_l} + \frac{1}{\lambda} p_l \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cos q_1 \right\}_{p_x, p_y, p_z, p_2, R, p_3, p_l}$$

als we nu met p_x, \dots, p_l de waarden vóór de bedoelde reeks van botsingen en met p'_x, \dots, p'_l de waarden na deze reeks van botsingen aanduiden. Daar we een vergelijking van denzelfden vorm, met dezelfde waarden van $p_x, \dots, p_l, p'_x, \dots, p'_l$ enz. kunnen opstellen voor een andere waarde van q_1 mogen wij besluiten:

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_l} \right\}_{p'_x, \dots, R', p_3, p_l} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_l} \right\}_{p_x, \dots, R, p_3, p_l}$$

en

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right\}_{p'_x, \dots, R', p_3, p_l} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right\}_{p_x, \dots, R, p_3, p_l},$$

d. w. z. $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ zijn functiën van p_3 en p_1 alleen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = F(p_3, p_1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = G(p_3, p_1).$$

Uit beide vergelijkingen volgt: $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0$, zoodat wij kunnen stellen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = F(p_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = G(p_3, p_1)$$

en:

$$\Phi = F(p_3)R + H(p_3, p_1) + K(p_x, p_y, p_z, p_2, p_3) \dots (17)$$

2^e. Men heeft:

$$\frac{\partial R}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial R}{\partial p_2} = \frac{1}{\alpha} p_3,$$

wat bij een botsing niet verandert. Uit (16) volgt dan, dat hetzelfde geldt van:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \left(\frac{\partial R}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial R}{\partial p_2} \right),$$

dus ook van:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2},$$

daar wij reeds weten, dat $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ niet verandert. Door een dergelijke redeneering als boven werd gebezigd, besluiten wij daaruit, dat $\frac{\partial \Phi}{\partial p_3}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}$ functiën van p_3 en p_1 alleen zijn. Derhalve geldt, als wij (17) gebruiken, dezelfde conclusie omtrent:

$$R \frac{dF}{dp_3} + \frac{\partial H}{\partial p_3} + \frac{\partial K}{\partial p_3} \text{ en } \frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

Daar R alleen in den eersten term staat, moet

$$\frac{dF}{dp_3} = 0, \quad F = c$$

zijn. De tweede term $\frac{\partial H}{\partial p_3}$ is reeds een functie van p_3 en p_1 .

Wij moeten hebben (daar p_1 niet in K voorkomt):

$$\frac{\partial K}{\partial p_3} = I(p_3), \quad \frac{\partial K}{\partial p_2} = L(p_3),$$

uit welke vergelijkingen volgt:

$$\frac{\partial L}{\partial p_3} = 0, \text{ dus } L = c', \quad K = c'p_2 + M(p_3) + P(p_x, p_y, p_z)$$

en, als wij den term $M(p_3)$ onder $H(p_3, p_l)$ begrijpen:

$$\Phi = cR + H(p_3, p_l) + c'p_2 + P(p_x, p_y, p_z).$$

Substitutie in de vergelijking (16) voor p_3 geeft $c = -\varepsilon = -\varepsilon_0$ (met den index 0 constanten aanduidende).

3^e. Schrijven we nu (15) voor p_x, p_y, p_z op:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 &= \frac{-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial R}{\partial p_x} - \frac{\partial R'}{\partial p'_x} \right) + \frac{\partial P}{\partial p_x} - \frac{\partial P'}{\partial p'_x}}{\frac{\partial R}{\partial p_x} - \frac{\partial R'}{\partial p'_x}} = \frac{-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial R}{\partial p_y} - \frac{\partial R'}{\partial p'_y} \right) + \frac{\partial P}{\partial p_y} - \frac{\partial P'}{\partial p'_y}}{\frac{\partial R}{\partial p_y} - \frac{\partial R'}{\partial p'_y}} = \\ &= \frac{-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial R}{\partial p_z} - \frac{\partial R'}{\partial p'_z} \right) + \frac{\partial P}{\partial p_z} - \frac{\partial P'}{\partial p'_z}}{\frac{\partial R}{\partial p_z} - \frac{\partial R'}{\partial p'_z}}. \end{aligned}$$

Daaruit volgt: $\Delta \frac{\partial P}{\partial p_x} = 0$, $\Delta \frac{\partial P}{\partial p_y} = 0$, $\Delta \frac{\partial P}{\partial p_z} = 0$, dus

$$\frac{\partial P}{\partial p_x} = m_x, \quad \frac{\partial P}{\partial p_y} = m_y, \quad \frac{\partial P}{\partial p_z} = m_z,$$

als m_x, m_y en m_z constanten zijn. We krijgen dus voor Φ , als we een additieve constante van P opnemen in $H(p_3, p_l)$:

$$\Phi = -\varepsilon_0 R + H(p_3, p_l) + c'p_2 + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z.$$

4^e. Substitutie van deze uitkomst in $\Delta(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}) = 0$ geeft, omdat $\Delta(R^{(1)} + R^{(2)}) = 0$, $\Delta(p_x^{(1)} + p_x^{(2)}) = 0$, $\Delta(p_y^{(1)} + p_y^{(2)}) = 0$, $\Delta(p_z^{(1)} + p_z^{(2)}) = 0$:

$$c'(p_2^{(1)} + p_2^{(2)} - p_2^{(1)'} - p_2^{(2)'}) = 0,$$

dus, omdat de grootheid binnen haken in 't algemeen niet nul is:

$$c' = 0.$$

De definitieve vorm van Φ , waarvoor we nu wel weer ϕ kunnen schrijven is dus:

$$\phi = -\varepsilon_0 R + H(p_3, p_l) + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z \dots (18)$$

§ 7. Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen III.

Bepaling van het resulterend magnetisch moment bij de eerste onderstelling omtrent de botsing.

Voor elk molecuul is het magnetisch moment in de richting OX :

$$\delta \dot{q}_1 \cos q_1 = \delta \frac{\partial R}{\partial p_1} \cos q_1 = \delta \left(\frac{p_1}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 \cos q_1 \right) \cos q_1.$$

De gemiddelde waarde van het moment voor alle moleculen is dus:

$$\bar{m} = \frac{\delta}{\lambda} \frac{\int (p_1 \cos q_1 - \mu \dot{q}_0 \cos^2 q_1) e^{-\varepsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z + H(p_3, p_l)} d\omega}{\int e^{-\varepsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z + H(p_3, p_l)} d\omega},$$

waarin $d\omega = dp_x dp_y dp_z dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 dp_l$ is, want in den teller staat het geheele moment van alle moleculen en in den noemer hun aantal. Is N het aantal moleculen van de volumeneenheid, dan is het magnetisch moment van de volumeneenheid, in de richting van de uitwendige kracht, N maal zoo groot. Geïntegreerd moet worden over alle waarden der coördinaten en momenten, die voorkomen.

De integrand bevat q_2 en q_3 niet; de integralen naar deze veranderlijken vallen dus in teller en noemer tegen elkander weg (de grenzen ervan zijn constant), eveneens die naar p_x, p_y, p_z en p_1 , omdat die integralen als factoren voorkomen, ze bevatten de andere variabelen niet. Dan blijft over voor $M = N\bar{m}$:

$$M = N \frac{\delta}{\lambda} \frac{\int (p_1 \cos q_1 - \mu \dot{q}_0 \cos^2 q_1) e^{-\varepsilon_0 \left[\frac{1}{2\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{2\alpha} p_3^2 + \right.}}{\int e^{-\varepsilon_0 \left[\frac{1}{2\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{2\alpha} p_3^2 + \frac{1}{2\lambda} (p_l^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \right.}} + \left. \left. \frac{1}{2\lambda} (p_l^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1) \right] + H(p_3, p_l)} dq_1 dp_2 dp_3 dp_l}{\int e^{-\varepsilon_0 \left[\frac{1}{2\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{2\alpha} p_3^2 + \frac{1}{2\lambda} (p_l^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1) \right] + H(p_3, p_l)} dq_1 dp_2 dp_3 dp_l}.$$

Nu voeren we in plaats van p_2 een nieuwe variabele p'_2 in en behouden q_1, p_3 en p_l :

$$\frac{1}{\sin q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1) = p'_2, \quad dq_1 dp_2 dp_3 dp_1 = \sin q_1 dq_1 dp'_2 dp_3 dp_1.$$

Daardoor kunnen de integralen naar p'_2 en p_3 in teller en noemer weer worden weggelaten, waarbij $H(p_3, p_1)$ moet worden vervangen door $\Phi(p_1)$ (Φ is een willekeurige functie).

Stel $\mu q_0 = \mu' \mathfrak{H}$ en voer nog in: $\cos q_1 = x$, $-\sin q_1 dq_1 = dx$:

$$M = N \frac{\delta}{\lambda} \frac{\iint (p_1 x - \mu' \mathfrak{H} x^2) e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} (p_1^2 - 2\mu' \mathfrak{H} p_1 x + \mu'^2 \mathfrak{H}^2 x^2) + \Phi(p_1)} dx dp_1}{\iint e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} (p_1^2 - 2\mu' \mathfrak{H} p_1 x + \mu'^2 \mathfrak{H}^2 x^2) + \Phi(p_1)} dx dp_1} \quad (19).$$

De hoek q_1 zal van 0 tot π , dus x van -1 tot $+1$ loopen, p_1 kan van $-\infty$ tot $+\infty$ gaan, daarbij zal het van de functie $\Phi(p_1)$ afhangen, of dit geheele gebied iets op zal leveren.

De integratie naar x kan worden uitgevoerd, als de exponent naar machten van $\mathfrak{H}x$ (dus ook naar machten van de veldsterkte) mag worden ontwikkeld. De uitkomst daarvan is:

$$M = N \frac{\delta}{\lambda} \frac{\int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} \left[+ \mu' \mathfrak{H} \left(-\frac{1}{3} + \frac{\epsilon_0 p_1^2}{3\lambda} \right) + c_3 \mathfrak{H}^3 + \dots \right]}{\int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} \left[1 + c_2 \mathfrak{H}^2 + \dots \right]},$$

waarin de c 's gemakkelijk kunnen worden uitgedrukt in ϵ_0 , μ' en p_1 .

Er is dus diamagnetisme, als:

$$\frac{1}{3} \int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} > \frac{\epsilon_0}{3\lambda} \int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} p_1^2,$$

paramagnetisme, als:

$$\frac{1}{3} \int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} < \frac{\epsilon_0}{3\lambda} \int dp_1 e^{-\frac{\epsilon_0}{2\lambda} p_1^2 + \Phi(p_1)} p_1^2.$$

Het eenvoudigste geval hebben we, als $\Phi(p_1)$ zoodanig is, dat slechts één waarde van p_1 , stel p , bij alle moleculen voorkomt¹⁾;

¹⁾ Is dit vóór dat het veld wordt aangebracht het geval, dan blijft het ook in het veld zóó, omdat we in § 23 zullen zien, dat de waarde van p_1 bij het ontstaan van het veld onveranderd blijft.

van de integralen blijft dan slechts één element over:

$$M = N \frac{\delta}{\lambda} \mu' \mathfrak{H} \left(-\frac{1}{3} + \frac{\epsilon_0 p^2}{3\lambda} \right).$$

Voor kleine waarden van \mathfrak{H} geeft dit ons het magnetisch moment van de volumeneenheid.

Daaruit lezen we af:

ten 1^o: Is het moment p voor alle moleculen nul, dan is het gedrag diamagnetisch, met een susceptibiliteit onafhankelijk van de temperatuur: $-\frac{1}{3} N \frac{\delta}{\lambda} \mu'$.

ten 2^o: Is het moment p daarentegen zeer groot, dan wordt het moment M benaderd door $\epsilon_0 N \frac{\delta}{3\lambda^2} \mu' \mathfrak{H} p^2$. Berekenen we de gemiddelde kinetische energie der voortgaande beweging voor deze moleculen (of voor éénatomige moleculen, die er mee botsen), dan krijgen we $\frac{3}{2\epsilon_0}$, zoodat we kT voor $\frac{1}{\epsilon_0}$ zullen kunnen schrijven. Het paramagnetisch moment, dat we zoo vinden, is dus omgekeerd evenredig met de temperatuur.

§ 8. Bewijs, dat de gevonden verdeelingsfunctie ook nog een stationaire verdeeling geeft, als de moleculen tijdens de botsing magnetische krachten op elkaar uitoefenen.

Als we aannemen, dat de botsingen weliswaar niet instantaan zijn, maar toch slechts kort duren ten opzichte van de bewegingen van een molecuul tusschen twee botsingen en als we rekening houden met magnetische werkingen der botsende moleculen op elkander, is het nog wel mogelijk te laten zien, dat formule (18) een stationaire verdeeling kenmerkt, maar het is veel moeilijker, dan nog te bewijzen, zooals bij formule (18) was gebeurd, dat dit de eenige is.

Men zal in dit geval gedurende de botsing rekening hebben te houden met een extra term in de functie van LAGRANGE, die als het 1^o en het 2^o molecuul botsen, van de gedaante is:

$$\lambda^{(1, 2)} \dot{q}_1^{(1)} \dot{q}_1^{(2)} \dots \dots \dots (20)$$

Tijdens die botsing gelden voor $q_l^{(1)}$ en $q_l^{(2)}$ dus de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}(\lambda \dot{q}_l^{(1)} + \mu \dot{q}_0 \cos q_1^{(1)} + \lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(2)}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(1)} + \mu \dot{q}_0 \cos q_1^{(2)} + \lambda \dot{q}_l^{(2)}) = 0.$$

Stel op t_0 zijn de moleculen nog, en op t_1 weer ver genoeg van elkander, om van wisselwerking af te zien; dan is:

$$(\lambda \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(1)} \dot{q}_0 + \lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(2)})_{t_0} = (\lambda \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(1)} \dot{q}_0 + \lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(2)})_{t_1},$$

$$(\lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(2)} \dot{q}_0 + \lambda \dot{q}_l^{(2)})_{t_0} = (\lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(2)} \dot{q}_0 + \lambda \dot{q}_l^{(2)})_{t_1},$$

maar voor t_0 en t_1 is $\lambda^{(1,2)} = 0$, dus:

$$(p_l^{(1)})_{t_0} = (\lambda \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(1)} \dot{q}_0)_{t_0} = (\lambda \dot{q}_l^{(1)} + \mu \cos q_1^{(1)} \dot{q}_0)_{t_1} = (p_l^{(1)})_{t_1}$$

en evenzoo: $(p_l^{(2)})_{t_0} = (p_l^{(2)})_{t_1}$.

Voeren we in: $R' = R + \lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(1)} \dot{q}_l^{(2)}$, dan blijft gedurende de botsing van het 1^e en 2^e molecuul $R' + U$ constant, wat juist zoo bewezen wordt als in § 5, dat $R + U$ constant blijft en daar voor de niet botsende moleculen $R^{(*)}$ constant blijft, is ook nu nog:

$$R^{(1)} + R^{(2)} + \lambda^{(1,2)} \dot{q}_l^{(1)} \dot{q}_l^{(2)} + U = \text{constant},$$

dus:

$$(R^{(1)} + R^{(2)})_{t_0} = (R^{(1)} + R^{(2)})_{t_1}.$$

$$f = e^{-\varepsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z + H(p_x, p_y)}$$

zal dus ook nu nog een stationaire verdeling kenmerken, omdat men kan afzien van het kleine aantal moleculen, dat op een gegeven oogenblik botst.

§ 9. Schatting van de grootte der magnetische werkingen van moleculen op elkander tijdens de botsing in verhouding tot die van de mechanische krachten.

Wij hebben te doen met de koppels, die twee stroomen, in cirkels rondlopende, op elkaar uitoefenen. De maximale waarde, die de

coëfficiënt van wederkeerige inductie kan krijgen, is de coëfficiënt van zelfinductie van één van de stroomkringen. Voor een cirkelvormigen draad van straal R en dikte 2ρ is deze: $L = 4\pi R \left[\log \left(\frac{R}{\rho} \right) + 0,33 \right]$ (zie [11] p. 605). Bij een stroomsterkte i in de 2 draden is de wederkeerige energie in twee standen, waarin de beide cirkels vlak langs elkaar loopen en de stroomrichtingen samenvallen of tegengesteld zijn Li^2 en $-Li^2$. Voor een ruwe schatting van de koppels, die de stroomen hoogstens op elkaar uitoefenen, kunnen we uitgaan van het koppel, dat gemiddeld zou moeten werken, om bij een draaiing over π den arbeid te doen, die aan dit energieverkil beantwoordt, d.i. $\frac{2Li^2}{\pi}$. We stellen, dat dit koppel onveranderd werkte gedurende den tijd, dat de centra der moleculen een matig aantal (ν) maal een moleculaire afmeting, dus b.v. R doorloopt (d. w. z., daar wij zoowel op de nadering als op de verwijdering moeten letten, dat de werking ophoudt als de afstand der centra grooter wordt dan ongeveer $\frac{\nu}{2} R$). Is de snelheid van de voortgaande beweging v , dan is de tijd van werking $\frac{\nu R}{v}$. De magnetische koppelstoot is dus (ruw berekend):

$$\frac{2Li^2}{\pi} \frac{\nu R}{v} = \frac{8\pi R \left[\log \left(\frac{R}{\rho} \right) + 0,33 \right] \nu Ri^2}{\pi v} = \frac{8\nu R^2 \left[\log \left(\frac{R}{\rho} \right) + 0,33 \right] i^2}{v}$$

De mechanische koppelstoot kan wat orde van grootte betreft worden voorgesteld door mvR . Opdat we de magnetische werking mogen verwaarloozen, moet dus:

$$\frac{8\nu R^2 \left[\log \left(\frac{R}{\rho} \right) + 0,33 \right] i^2}{mv^2 R} = \frac{8\nu Ri^2 \left[\log \left(\frac{R}{\rho} \right) + 0,33 \right]}{mv^2}$$

veel kleiner dan 1 zijn. Nu is het magnetisch moment van een molecuul $\pi R^2 i$. Droeg het één magneton, dan was $\pi R^2 i = 2 \times 10^{-24}$, dus $i = \frac{10^{-24}}{R^2}$. Voor R , die een moleculaire afmeting is, nemen we 10^{-8} , voor m 10^{-23} , voor v^2 10^{10} , voor ρ den straal van een electron,

dus 10^{-13} . Dan wordt bovenstaande verhouding wat orde van grootte betreft:

$$\frac{8\nu \cdot 10^{-42} [\log 10^5 + 0,33]}{10^{-23} \times 10^{-24} \times 10^{10}} = \frac{10^{-40} \nu}{10^{-37}} = 10^{-3} \nu.$$

Daar in werkelijkheid de magnetische wisselwerking sterk afneemt, als de stroomkringen zich van elkaar verwijderen, en we voor L een te groote waarde hebben genomen, mogen we voor ν wel een matig getal nemen. Dan blijkt uit de gevonden uitkomst, dat de magnetische werkingen, die twee moleculen op elkaar uitoefenen, mogen worden verwaarloosd tegenover de mechanische werkingen, als die moleculen een magnetisch moment hebben, dat niet veel grooter dan een magneton is.

§ 10. Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen IV.

Afleiding van de verdeelingsfunctie bij de tweede onderstelling omtrent de botsing.

In het te voren behandelde geval zagen we, dat de verdeelingsfunctie de veranderlijken alleen mocht bevatten in de combinaties: R , p_x , p_y , p_z , p_3 en p_l . Het magnetisch moment hing echter niet van p_x , p_y , p_z en p_3 af, zoodat de willekeur, wat verdeling over p_3 betreft, zonder invloed was en alleen die over p_l een belangrijke rol speelde. Om nu te onderzoeken, wat er van M wordt, als p_l bij de botsingen kan veranderen, maken we over de botsingen een andere, meer gekunstelde hypothese. We onderstellen, dat het gas gemengd is met een éénatomig gas, waarvan de moleculen tegen een meridiaanvlak ΞOH_1 , dat met den beweeglijken ring verbonden moge zijn, kunnen botsen. Ter vereenvoudiging onderstellen we nog, dat de botsing slechts tegen een smalle tong van ΞOH_1 in den aequator van het molecuul kan gebeuren, zoodat de as van het botsingskoppel met de as van het molecuul samenvalt. Dat geval kan ons tot overgang dienen naar dat, waarin de electriciteitsbeweging in het molecuul bestaat in het rondloopen van afzonderlijke geladen deeltjes.

Hier hebben we, behalve de q 's, die constant blijven tijdens de

botsing (korte botsingsduur), de waarden van $p_x, p_y, p_z, p_1, p_2, p_3, p_0, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}$ na de botsing uit te drukken in hunne waarden ervoor. (Hier zijn voor het gecompliceerde molecuul geen indices gebruikt, voor het éénatomige de index 1, met accenten duiden we weer de waarden na de botsing aan). Om de botsing volledig te bepalen is nog één grootheid noodig, n.l. de afstand van het raakpunt bij de botsing tot de as van het gecompliceerde molecuul. Bij eliminatie daarvan zullen dus, behalve de vergelijkingen voor de q 's, 9 vergelijkingen overblijven tusschen de waarden vóór en na de botsing. Deze zijn, vooreerst:

$$p_1 = p'_1 \quad (\alpha)$$

$$p_2 = p'_2 \quad (\beta)$$

$$p_3 = p'_3 \quad (\gamma)$$

$$R + \frac{p_{x1}^2 + p_{y1}^2 + p_{z1}^2}{2m_1} = R' + \frac{p'_{x1}{}^2 + p'_{y1}{}^2 + p'_{z1}{}^2}{2m_1} \quad (\epsilon)^1.$$

Verder blijft de hoeveelheid van beweging van elk der moleculen afzonderlijk evenwijdig aan het meridiaanvlak ΞOH_1 dezelfde en van beide samen in de richting loodrecht erop, dus voor het eerste molecuul, als q_1 de hoek is, dien op het oogenblik der botsing OH_1 met OH maakt:

$$\begin{aligned} // O\Xi: \quad \Delta &\equiv p_x \cos q_1 + p_y \sin q_1 \cos q_2 + p_z \sin q_1 \sin q_2 = \\ &= p'_x \cos q_1 + p'_y \sin q_1 \cos q_2 + p'_z \sin q_1 \sin q_2, \end{aligned} \quad (\delta)$$

$$\begin{aligned} // OH_1: \quad H &\equiv p_x \{-\sin q_1 \cos(q_3 + q_l)\} + p_y \{\cos q_1 \cos q_2 \cos(q_3 + q_l) - \\ &\quad - \sin q_2 \sin(q_3 + q_l)\} + p_z \{\cos q_1 \sin q_2 \cos(q_3 + q_l) + \\ &\quad + \cos q_2 \sin(q_3 + q_l)\} = H', \end{aligned} \quad (\eta)$$

voor de twee moleculen samen:

$$\begin{aligned} // OZ_1: \quad Z + Z_1 &\equiv (p_x + p_{x1}) \{\sin q_1 \sin(q_3 + q_l)\} + \\ &\quad + (p_y + p_{y1}) \{-\cos q_1 \cos q_2 \sin(q_3 + q_l) - \sin q_2 \cos(q_3 + q_l)\} + \\ &\quad + (p_z + p_{z1}) \{-\cos q_1 \sin q_2 \sin(q_3 + q_l) + \cos q_2 \cos(q_3 + q_l)\} = \\ &= Z' + Z'_1, \end{aligned} \quad (\zeta)$$

¹⁾ Het bewijs voor (ϵ) is juist als dat voor formule (10) geleverd.

voor het tweede molecuul eindelijk:

$$// O\Xi: \Delta_1 \equiv p_{x_1} \cos q_1 + p_{y_1} \sin q_1 \cos q_2 + p_{z_1} \sin q_1 \sin q_2 = \Delta'_1, \quad (\delta_1)$$

$$// OH_1: H_1 \equiv p_{x_1} \{-\sin q_1 \cos (q_3 + q_l)\} + p_{y_1} \{\cos q_1 \cos q_2 \cos (q_3 + q_l) - \\ - \sin q_2 \sin (q_3 + q_l)\} + p_{z_1} \{\cos q_1 \sin q_2 \cos (q_3 + q_l) + \\ + \cos q_2 \sin (q_3 + q_l)\} = H'_1. \quad (\gamma_1)$$

Als hoofdvergelijking, waarbij dit nevenvoorwaarden zijn, hebben we weer:

$$\phi + \phi_1 = \phi' + \phi'_1 \dots \dots \dots (11)$$

Nu kunnen we hier weer juist zoo te werk gaan als bij de eerste onderstelling omtrent botsing is gebeurd n.l. verg. (11) totaal differentieeren¹⁾, de voorwaarden (α), (β)...(γ_1) eveneens, de laatste met α , β ,... γ_1 vermenigvuldigen en ze bij de eerste optellen; dan moet weer de coëfficiënt van elken differentiaal nul zijn. De daaruit verkregen functie ϕ moet dan nog voldoen aan $\frac{d\phi}{dt} = 0$. We zullen deze afleiding echter alleen in het aanhangsel (n^o. 9) geven, omdat uit den vorm der bijkomstige voorwaarden zich alles omtrent ϕ laat voorspellen, wat we bij de berekening van het magnetisch moment noodig hebben. In die voorwaarden komt n.l. p_1 alleen in R voor, daarom verwachten we voor de meest algemeene oplossing:

$$\phi = -\epsilon_0 R + F \dots \dots \dots (21)$$

waarin ϵ_0 een constante is en F een functie voorstelt, die niet van p_1 afhangt. (Het bewijs, dat werkelijk de meest algemeene oplossing in dien vorm kan worden geschreven, is in aanhangsel n^o. 9 te vinden, waar tevens de vorm van F nader aangegeven is).

¹⁾ Ter vereenvoudiging is het bewijs van BOLTZMANN, waarop formule (11) berust, gegeven voor het geval, dat alle moleculen van dezelfde soort zijn. Op de veranderingen, die aangebracht moeten worden in het bewijs, als ongelijksoortige moleculen botsen, zullen we niet nader ingaan.

§ 11. Magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen V.

Bepaling van het resulterend magnetisch moment bij de tweede onderstelling omtrent de botsing.

Het magnetisch moment van een molecuul in de richting OX is:

$$\delta \dot{q}_l \cos q_1 = \delta \frac{\partial R}{\partial p_l} \cos q_1,$$

zoodat het resulterend moment (verg. § 7) is:

$$M = \delta N \frac{\int \frac{\partial R}{\partial p_l} \cos q_1 e^{-\varepsilon_0 R + F} dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 dp_l dp_x dp_y dp_z}{\int e^{-\varepsilon_0 R + F} dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 dp_l dp_x dp_y dp_z}.$$

Integreeren wij eerst naar p_l , dan komt er in den teller:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial R}{\partial p_l} e^{-\varepsilon_0 R} dp_l = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[e^{-\varepsilon_0 R} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

In dit geval, waar de electriciteitsbeweging bij de botsing gestoord wordt, is het resulterend magnetisch moment dus nul¹⁾.

§ 12. Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen I.

Nadere bepaling en afleiding van de verdeelingsfunctie bij de eerste onderstelling omtrent de botsingen.

We gaan nu over tot de beschouwing van moleculen, ellipsoïdisch van gedaante, symmetrisch om een as $O\xi$, die homogeen en homogeen geladen zijn. We bepalen hun stand weer door de coördinaten van het zwaartepunt q_x, q_y, q_z en de hoeken van EULER q_1, q_2, q_3 (verg. § 5). De massa van de volumeneenheid zij ρ , de lading ervan e , de totale

¹⁾ Met behulp van de hier gebezigde redeneering kan ook worden aangetoond, dat in het vorige geval (zie § 7) het resulterend magnetisch moment nul is, zoodra in formule (18) de functie $H(p_3, p_l) = 0$ is. De functie $\phi(p_l)$ in formule (19) is in dat geval ook nul, zoodat deze formule voor M de waarde nul geeft.

massa m , de traagheidsmomenten t. o. van O Ξ α en t. o. van OH of OZ β . We zullen hier als functie van LAGRANGE enkel de kinetische energie nemen, d. i. voor elk molecuul:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2) + \frac{\alpha}{2} (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3)^2 + \frac{\beta}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1).$$

Voor de momenten hebben we dan: $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ en $R = \sum \dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - T$ wordt aan T gelijk, maar wordt in de p 's en q 's in plaats van de \dot{q} 'en en de q 's uitgedrukt:

$$R = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right].$$

De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\dot{q}_v = \frac{\partial R}{\partial p_v}, \quad \dot{p}_v = -\frac{\partial R}{\partial q_v} + Q_v + Q'_v,$$

waarin Q'_v weer krachten zijn, die alleen tijdens botsingen werken en Q_v de krachten zijn, door het magneetveld uitgeoefend:

$$Q_x = Q_y = Q_z = 0,$$

$$Q_1 = \frac{e \hbar}{\rho c} \left[-\frac{1}{2} p_3 \sin q_1 + \frac{2\beta - \alpha}{2\beta} \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \cos q_1 \right],$$

$$Q_2 = \frac{e \hbar}{\rho c} \left[\frac{\alpha - \beta}{\beta} p_1 \sin q_1 \cos q_1 \right], \quad (\text{zie aanhangsel n}^\circ 10)$$

$$Q_3 = \frac{e \hbar}{\rho c} \left[\frac{\alpha}{2\beta} p_1 \sin q_1 \right].$$

Daar de krachten Q_v geen arbeid doen, is voor elk molecuul, zolang het niet botst:

$$R_x = \text{constant} \dots \dots \dots (22)$$

en bij botsing van twee moleculen, omdat de arbeid, door de botsingskrachten Q' verricht, gelijk is aan de afname van de potentieele energie, die aan die krachten beantwoordt, welke potentieele energie we vóór en na de botsing nul mogen stellen:

$$R^{(1)} + R^{(2)} = R^{(1)'} + R^{(2)'} \dots \dots \dots (23)$$

De eerste onderstelling omtrent botsing zij nu, dat de beide ellipsoïdes (volkomen veerkrachtig) botsen met hun ellipsoïdische oppervlakken tegen elkander.

Het aantal bijkomstige voorwaarden wordt nu (als we weer direct invoeren, dat de verdeelingsfunctie niet van q_x, q_y, q_z afhangt en we dus op deze coördinaten niet letten) 16, want voor elk molecuul moeten 9 grootheden na de botsing worden berekend uit hun waarden ervoor. Daarbij komen echter weer twee grootheden in de formules voor, die noodig zijn ter nadere bepaling van de botsing (b. v. twee richtingscosinussen van den normaal in het raakpunt). Na eliminatie daarvan blijven 16 vergelijkingen over. Dit zullen zijn:

de q 's blijven constant (6 vergelijkingen)

$p_x^{(1)} + p_x^{(2)}, p_y^{(1)} + p_y^{(2)}, p_z^{(1)} + p_z^{(2)}$ blijven constant (3 vergelijkingen)

de p_3 's blijven constant (2 vergelijkingen)

$R^{(1)} + R^{(2)} = R^{(1)'} + R^{(2)'}$ (wegens (23)) (1 vergelijking)

en ten slotte 4 momentenvergelijkingen (verg. § 6), n. l.:

$$H^{(1)} = 0,$$

$$H^{(2)} = 0,$$

$$\Theta^{(1)} = 0,$$

$$\Theta^{(2)} = 0.$$

Geheel als in § 6 voor de stroomdragende moleculen kunnen we nu voor ϕ de vergelijkingen (15) en (16) afleiden (alleen het lid met p_1 ontbreekt). Eerst wordt echter weer de voorwaarde (2) aan ϕ opgelegd, waaruit volgt, dat ϕ slechts mag afhangen van: $R, p_{20} = p_2 + (\alpha - \beta) \hbar \cos^2 q_1, p_{30} = p_3 + \alpha \hbar \cos q_1, p_x, p_y, p_z$, waarbij $\hbar = \frac{e \hbar}{2\rho c}$ ter afkorting ingevoerd is (verg. aanhangsel 11).

Is ϕ in deze grootheden uitgedrukt, dan schrijven we er Φ voor. We merken nog op, dat $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{20}}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{30}}$ en dat in plaats van $p_3 = p_3'$ mag worden geschreven: $p_{30} = p_{30}'$.

1^e. We letten nu weer eerst op de vergelijkingen (16) voor p_2 en p_3 .

Daar $\frac{\partial R}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial R}{\partial p_2} = \frac{1}{\alpha} p_3$ bij botsing niet verandert, verandert

ook $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{30}} + \cos q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{20}} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \left(\frac{\partial R}{\partial p_3} + \cos q_1 \frac{\partial R}{\partial p_2} \right)$ bij botsing niet. Wij

kunnen hiervoor schrijven:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{30}} + \cos q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{20}} + \frac{1}{\alpha} p_{30} \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \eta \cos q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Daar dit voor alle waarden van q_1 bij elke botsing onveranderd moet blijven en dus ook bij een reeks botsingen, die alle bij dezelfde waarde van q_1 gebeuren en waardoor willekeurige beginwaarden van R, p_{20}, p_x, p_y, p_z in willekeurige eindwaarden overgaan, moet:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{30}} + \frac{p_{30}}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = F(p_{30}) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_{20}} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial R} = G(p_{30})$$

zijn, omdat Φ niet van q_1 afhangt (F en G willekeurige functies). De oplossing van de eerste van deze vergelijkingen is:

$$\Phi - H(p_{30}) = K \left\{ \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} \right), p_{20}, p_x, p_y, p_z \right\} \quad (\text{zie aanhangsel 12}).$$

$$(K \text{ is een willekeurige functie, en } H \equiv \int F(p_{30}) dp_{30}).$$

Substitutie hiervan in de tweede vergelijking geeft:

$$\frac{\partial K}{\partial p_{20}} - \eta \frac{\partial K}{\partial \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} \right)} = G(p_{30}),$$

waarvan de oplossing is:

$$K - G(p_{30}) p_{20} = L \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \eta p_{20}, p_x, p_y, p_z \right),$$

(L is een willekeurige functie, verg. aanhangsel 12) zoodat:

$$\Phi = H(p_{30}) + G(p_{30}) p_{20} + L \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \eta p_{20}, p_x, p_y, p_z \right).$$

Ter afkorting voeren we in $S = R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \eta p_{20}$ en passen dan vergelijking (15) toe, het lid, dat op p_1 betrekking heeft gelijkstellende aan dat, waarin naar p_2 gedifferentieerd wordt:

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial S} \frac{\partial R}{\partial p_1} - \frac{\partial L'}{\partial S'} \frac{\partial R'}{\partial p_1'}}{\frac{\partial R}{\partial p_1} - \frac{\partial R'}{\partial p_1'}} = \frac{\frac{\partial L}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial p_2} - \frac{\partial L'}{\partial S'} \frac{\partial S'}{\partial p_2'}}{\frac{\partial R}{\partial p_2} - \frac{\partial R'}{\partial p_2'}}$$

of:

$$\frac{\left(\frac{\partial L}{\partial S} - \frac{\partial L'}{\partial S'}\right) \frac{p_1}{\beta} + \frac{\partial L'}{\partial S'} \frac{p_1 - p_1'}{\beta}}{\frac{p_1 - p_1'}{\beta}} = \frac{\left(\frac{\partial L}{\partial S} - \frac{\partial L'}{\partial S'}\right) \left(\frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\beta \sin^2 q_1} + \eta\right) + \frac{\partial L'}{\partial S'} \frac{p_{20} - p_{20}'}{\beta \sin^2 q_1}}{\frac{p_{20} - p_{20}'}{\beta \sin^2 q_1}}$$

of:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial S} - \frac{\partial L'}{\partial S'}\right) \left(\frac{p_1}{p_1 - p_1'} - \frac{p_{20} - p_{30} \cos q_1 + \eta \beta}{(p_{20} - p_{20}')}\right) = 0.$$

De tweede factor is in het algemeen niet nul, dus moet de eerste nul zijn, en bijgevolg is $\frac{\partial L}{\partial S}$ een constante, die wegens (15) gelijk aan $-\varepsilon$ moet zijn, dus $\frac{\partial L}{\partial S} = -\varepsilon_0$, zoodat:

$$\Phi = H(p_{30}) + G(p_{30})p_{20} - \varepsilon_0 \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \eta p_{20}\right) + M(p_x, p_y, p_z).$$

Precies als in § 6 bewijzen we, dat $M(p_x, p_y, p_z) = m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z$ moet zijn. (De constante die er nog bijgeteld mag worden, kan in $H(p_{30})$ opgenomen worden). Daar H en G willekeurige functies zijn, kunnen we daaruit $-\varepsilon_0 S$ aanvullen tot $-\varepsilon_0 R$ en hebben daarmede verkregen:

$$\Phi = H(p_{30}) + G(p_{30})p_{20} - \varepsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z.$$

Uit (11) volgt nu, omdat $R^{(1)} + R^{(2)}$, $p_x^{(1)} + p_x^{(2)}$, $p_y^{(1)} + p_y^{(2)}$ en $p_z^{(1)} + p_z^{(2)}$ bij botsing niet veranderen, dat:

$$G(p_{30}) (p_2^{(1)'} + p_2^{(2)'} - p_2^{(1)} - p_2^{(2)}) = 0$$

en daar de grootheid binnen haken in het algemeen niet nul is, dat $G(p_{30}) = 0$.

Ten slotte vinden we dus voor Φ , die we nu wel door ϕ kunnen vervangen:

$$\phi = -\varepsilon_0 R + H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1) + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z.$$

§ 13. Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen II.

Bepaling van het resulterend moment bij de eerste
onderstelling omtrent de botsingen.

Het magnetisch moment van een molecuul langs de X-as is $\frac{e}{2\epsilon c}$
maal het moment van hoeveelheid van beweging om de X-as, d. i.

$$\frac{e}{2\epsilon c} p'_2. \quad (\text{Zie aanhangsel 13}).$$

Voor het moment van de volumeneenheid vinden we dus, als
daarin N moleculen aanwezig zijn:

$$M = \frac{Ne}{2\epsilon c} \frac{\int p_2 e^{-\frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{p_1^2}{\beta} + \frac{(p_2 - p_3 \cos q_1)^2}{\beta \sin^2 q_1} + \frac{p_3^2}{\alpha} \right] + H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1)} dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3}{\int e^{-\frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{p_1^2}{\beta} + \frac{(p_2 - p_3 \cos q_1)^2}{\beta \sin^2 q_1} + \frac{p_3^2}{\alpha} \right] + H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1)} dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3}.$$

De zoewel in teller als noemer als factor voorkomende integralen
naar p_x , p_y en p_z zijn alvast weggelaten, en dit kunnen we evenzeer
doen met de integralen naar q_2 , q_3 en p_1 .

Stel:

$$\frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} = p'_2, \quad p_2 = p'_2 \sin q_1 + p_3 \cos q_1, \quad dq_1 dp_2 dp_3 = \sin q_1 dq_1 dp'_2 dp_3,$$

dan wordt:

$$M = \frac{Ne}{2\epsilon c} \frac{\iint dq_1 dp_3 e^{H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1) - \frac{\epsilon_0 p_3^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'_2 (p'_2 \sin q_1 + p_3 \cos q_1) e^{-\frac{\epsilon_0 p_2'^2}{2\beta}} \sin q_1}{\iint dq_1 dp_3 e^{H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1) - \frac{\epsilon_0 p_3^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'_2 e^{-\frac{\epsilon_0 p_2'^2}{2\beta}} \sin q_1}.$$

$$M = \frac{Ne}{2\epsilon c} \frac{\iint dq_1 dp_3 e^{H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1) - \frac{\epsilon_0 p_3^2}{2\alpha}} p_3 \cos q_1 \sin q_1}{\iint dq_1 dp_3 e^{H(p_3 + \alpha \eta \cos q_1) - \frac{\epsilon_0 p_3^2}{2\alpha}} \sin q_1} \dots (24).$$

Stel $p_3 + \alpha \eta \cos q_1 = p$, dan gaat onze waarde voor M over in:

$$M = \frac{Ne}{2\rho c} \frac{\int_0^\pi \int_0^\pi e^{-\frac{\epsilon_0}{2\alpha}(p^2 - 2\alpha h p \cos q_1 + \alpha^2 h^2 \cos^2 q_1) + H(p)} (p - \alpha h \cos q_1) \cos q_1 \sin q_1 dq_1 dp}{\int_0^\pi \int_0^\pi e^{-\frac{\epsilon_0}{2\alpha}(p^2 - 2\alpha h p \cos q_1 + \alpha^2 h^2 \cos^2 q_1) + H(p)} \sin q_1 dq_1 dp}$$

Stel $\cos q_1 = x$, $\sin q_1 dq_1 = -dx$:

$$M = \frac{Ne}{2\rho c} \frac{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{\epsilon_0}{2\alpha}(p^2 - 2\alpha h px + \alpha^2 h^2 x^2) + H(p)} (p - \alpha h x) x dx dp}{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{\epsilon_0}{2\alpha}(p^2 - 2\alpha h px + \alpha^2 h^2 x^2) + H(p)} dx dp} \quad (25).$$

Deze formule heeft precies dezelfde gedaante als formule (19). Er laten zich dus hieraan ook dezelfde beschouwingen aanknoopen. Ook hier is het mogelijk, dat H van dien aard is, dat slechts één waarde van p voorkomt. (Is dit zoo, als er geen veld is, dan blijft het zoo bij het aanzetten van het veld, verg. aanhangsel 22). Naar gelang p groot is t. o. van de verandering, die het magneetveld in de momenten teweegbrengt, of klein t. o. daarvan, krijgt men paramagnetisme omgekeerd evenredig met de temperatuur of diamagnetisme onafhankelijk ervan.

§ 14. Magnetisch gedrag van ladingdragende moleculen III.

Resulteerend magnetisch moment bij andere onderstellingen omtrent de botsingen.

Zonder verdere berekening is wel duidelijk, dat, als er nog botsingen van anderen aard konden plaats hebben, waarbij $R^{(1)} + R^{(2)}$ wel constant was, maar $p_3 + \alpha h \cos q_1$ niet, alleen een verdeling met:

$$f = Ce^{-\epsilon_0 R + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z} \quad (C \text{ is een constante})$$

nog stationair zou zijn en het resulteerend moment nul. (Integreer daartoe in vergelijking (24) voor het geval $H=0$ is naar p_3). We zullen dus voor het geval, dat zulke botsingen gebeuren, de vergelijkingen (1) en (2) niet meer geheel gaan uitwerken.

§ 15. Magnetisch gedrag van dipolen I.

Nadere bepaling en voorbereiding van de afleiding der verdeelingsfunctie.

De twee deeltjes van één molecuul onderscheiden we door de indices α en β , de twee botsende moleculen weer door de indices 1 en 2 (die nu, omdat er toch geen verwarring door kan komen, onderaan geschreven zijn), de toestand vóór en na de botsing door grootheden met en zonder accent, zoodat b.v.:

het eerste molecuul samengesteld is uit:

een bolvormig deeltje α met lading $+e$, coördinaten $x_{\alpha 1}, y_{\alpha 1}, z_{\alpha 1}$ en snelheidscomponenten: $\dot{x}_{\alpha 1}, \dot{y}_{\alpha 1}, \dot{z}_{\alpha 1}$,

en een bolvormig deeltje β met lading $-e$, coördinaten $x_{\beta 1}, y_{\beta 1}, z_{\beta 1}$ en snelheidscomponenten: $\dot{x}_{\beta 1}, \dot{y}_{\beta 1}, \dot{z}_{\beta 1}$.

Het tweede molecuul is analoog samengesteld.

Het magneteveld heeft weer de sterkte \mathfrak{H} en de richting van de X-as.

We zullen als functie van LAGRANGE het verschil van kinetische en potentieele energie nemen, de momenten verschillen dan¹⁾ slechts door constante factoren van de snelheidscomponenten, zoodat we in dit geval ook de laatste in plaats van de eerste als coördinaten in de phasenruimte mogen gebruiken.

De kinetische energie is:

$$T = \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{x}_{\alpha}^2 + \dot{y}_{\alpha}^2 + \dot{z}_{\alpha}^2) + \frac{m_{\beta}}{2} (\dot{x}_{\beta}^2 + \dot{y}_{\beta}^2 + \dot{z}_{\beta}^2),$$

de potentieele energie beantwoordt aan de centrale krachten, waarmede de deeltjes α en β elkander aantrekken; deze zijn:

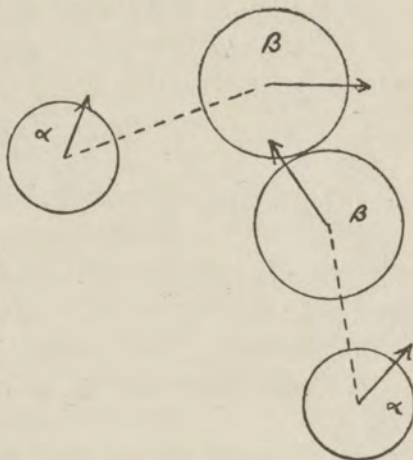


Fig. 2.

¹⁾ Niet, als we volgens de eerste opvatting (§ 4) een volledige functie van LAGRANGE opstellen, waaruit ook de krachten, door het magneteveld uitgeoefend, zijn af te leiden.

op α : $(x_\beta - x_\alpha) \rho$, $(y_\beta - y_\alpha) \rho$, $(z_\beta - z_\alpha) \rho$,
 op β : $(x_\alpha - x_\beta) \rho$, $(y_\alpha - y_\beta) \rho$, $(z_\alpha - z_\beta) \rho$,
 als ρ een willekeurige functie is van den afstand r der beide deeltjes:

$$\rho = \rho \{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2\} = \rho(r^2).$$

De potentieele energie is dan: $U = \int_{r_0}^r \frac{\rho}{2} d(r^2)$.

De functie R is de totale energie der deeltjes¹⁾, die door de krachten, in het magnetveld er op uitgeoefend, niet veranderd wordt; zoolang een molecuul α niet botst is dus

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = \frac{d(T_\alpha + U_\alpha)}{dt} = 0,$$

terwijl bij botsing van een molecuul 1 met een molecuul 2:

$$R^{(1)} + R^{(2)} = R^{(1)'} + R^{(2)'},$$

omdat we twee gevallen van volkomen elastische botsingen zullen behandelen.

Om de bewegingsvergelijkingen geheel te kunnen opstellen, hebben we nu nog noodig de krachten door het magnetveld uitgeoefend (Q_v), d. i.:

op α : 0 , $\frac{e}{c} \dot{z}_\alpha \mathfrak{H}$, $-\frac{e}{c} \dot{y}_\alpha \mathfrak{H}$ evenwijdig aan de assen
 OX , OY en OZ ,
 op β : 0 , $-\frac{e}{c} \dot{z}_\beta \mathfrak{H}$, $\frac{e}{c} \dot{y}_\beta \mathfrak{H}$.

Zoolang er geen botsingen gebeuren, zijn de bewegingsvergelijkingen dus:

$$\left. \begin{aligned} m_\alpha \ddot{x}_\alpha &= (x_\beta - x_\alpha) \rho, \\ m_\beta \ddot{x}_\beta &= (x_\alpha - x_\beta) \rho, \\ m_\alpha \ddot{y}_\alpha &= (y_\beta - y_\alpha) \rho + \frac{e}{c} \dot{z}_\alpha \mathfrak{H}, \\ m_\beta \ddot{y}_\beta &= (y_\alpha - y_\beta) \rho - \frac{e}{c} \dot{z}_\beta \mathfrak{H}, \\ m_\alpha \ddot{z}_\alpha &= (z_\beta - z_\alpha) \rho - \frac{e}{c} \dot{y}_\alpha \mathfrak{H}, \\ m_\beta \ddot{z}_\beta &= (z_\alpha - z_\beta) \rho + \frac{e}{c} \dot{y}_\beta \mathfrak{H}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

1) Daarbij is afgezien van de potentieele energie, die aan de krachten Q'_v beantwoordt, omdat die energie alleen tijdens de instantane botsingen van nul verschilt.

Omdat we ze later noodig zullen hebben, leiden we hieruit alvast vier eerste integralen af:

$$\left. \begin{aligned} X &\equiv m_\alpha \dot{x}_\alpha + m_\beta \dot{x}_\beta = C_x, \\ Y &\equiv m_\alpha \dot{y}_\alpha + m_\beta \dot{y}_\beta - \frac{e}{c} \mathfrak{H}(z_\alpha - z_\beta) = C_y, \\ Z &\equiv m_\alpha \dot{z}_\alpha + m_\beta \dot{z}_\beta + \frac{e}{c} \mathfrak{H}(y_\alpha - y_\beta) = C_z, \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

$$R \equiv \frac{m_\alpha}{2} (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) + \frac{m_\beta}{2} (\dot{x}_\beta^2 + \dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2) + \int_{r_0}^r \frac{f}{2} d(r^2) = C, \quad (28)$$

C_x , C_y , C_z en C zijn constanten.

Nu moeten de krachten Q'_v nog worden aangegeven, dus het karakter van de botsingen nader worden bepaald.

Onze eerste onderstelling zal zijn, dat van elk molecuul *elk* deeltje α of β (volkomen elastisch) met een deeltje α of β van een tweede molecuul kan botsen, de tweede onderstelling, dat van alle moleculen slechts de deeltjes α onderling kunnen botsen, terwijl de deeltjes β van botsingen geenerlei invloed zullen ondervinden.

Gedeeltelijk kunnen we die twee gevallen nog te zamen behandelen: we kunnen n.l. vragen, wat omtrent de verdeelingsfunctie f wegens vergelijking (1) (of omtrent ϕ wegens vergelijking (11)) alvast te zeggen is als er botsingen gebeuren tusschen een deeltje λ_1 van het eerste en een deeltje μ_2 van het tweede molecuul, we kunnen later λ en μ dan nog onafhankelijk α of β laten voorstellen.

De bijkomstige voorwaarden moeten nu weer worden opgesteld. Wegens het oogenblikkelijk karakter der botsingen blijven de coördinaten en snelheidscomponenten der niet botsende deeltjes μ_1 en λ_2 bij de botsing onveranderd, zoo ook de coördinaten van λ_1 en μ_2 . Behalve de gegevens voor beide moleculen afzonderlijk, zijn er nog twee noodig, om een botsing volledig te bepalen, n.l. de plaats van aanraking op één van de twee bolletjes (op het andere is het dan het punt met raakvlak evenwijdig aan dat in het eerste punt) of iets dergelijks. De zes snelheidscomponenten, die na de botsing veranderd zijn, zijn in hun waarden vóór de botsing en deze twee grootheden door zes vergelijkingen uit te drukken. Zijn die twee grootheden geëlimineerd, dan blijven vier onafhankelijke vergelijkingen over, te

weten: de drie vergelijkingen van hoeveelheid van beweging en de energievergelijking:

$$m_\lambda \dot{x}_{\lambda 1} + m_\mu \dot{x}_{\mu 2} = m_\lambda \dot{x}'_{\lambda 1} + m_\mu \dot{x}'_{\mu 2} \quad (\beta)$$

$$m_\lambda \dot{y}_{\lambda 1} + m_\mu \dot{y}_{\mu 2} = m_\lambda \dot{y}'_{\lambda 1} + m_\mu \dot{y}'_{\mu 2} \quad (\gamma)$$

$$m_\lambda \dot{z}_{\lambda 1} + m_\mu \dot{z}_{\mu 2} = m_\lambda \dot{z}'_{\lambda 1} + m_\mu \dot{z}'_{\mu 2} \quad (\delta)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_\lambda}{2} (\dot{x}_{\lambda 1}^2 + \dot{y}_{\lambda 1}^2 + \dot{z}_{\lambda 1}^2) + \frac{m_\mu}{2} (\dot{x}_{\mu 2}^2 + \dot{y}_{\mu 2}^2 + \dot{z}_{\mu 2}^2) &= \frac{m_\lambda}{2} (\dot{x}'_{\lambda 1}^2 + \dot{y}'_{\lambda 1}^2 + \dot{z}'_{\lambda 1}^2) + \\ &+ \frac{m_\mu}{2} (\dot{x}'_{\mu 2}^2 + \dot{y}'_{\mu 2}^2 + \dot{z}'_{\mu 2}^2) \quad (\alpha). \end{aligned}$$

Het is nu gemakkelijk voor de verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen, een functie ϕ aan te geven, die bij deze bijkomstige voorwaarden aan (11) voldoet (in aanhangsel 14 wordt bewezen, dat die functie de meest algemeene oplossing is).

Kunnen er alleen botsingen plaats hebben tusschen één der beide soorten van deeltjes, waaruit de moleculen zijn opgebouwd, stel tusschen de deeltjes α , dan moet $\lambda = \mu = \alpha$ genomen worden. In dit geval moet ϕ bevatten de termen:

$$-\frac{1}{2} h m_\alpha (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) + m_\alpha (\beta \dot{x}_\alpha + \gamma \dot{y}_\alpha + \delta \dot{z}_\alpha),$$

waarbij nog een term komt, die een onbepaalde functie van de snelheidscomponenten \dot{x}_β , \dot{y}_β , \dot{z}_β en van de coördinatenverschillen $x_\alpha - x_\beta$, $y_\alpha - y_\beta$, $z_\alpha - z_\beta$ is.

Iets dergelijks geldt natuurlijk, als alleen de deeltjes β tegen elkaar kunnen botsen. Dan moeten de snelheden van die deeltjes in een dergelijken quadratischen vorm, als zooeven de snelheden der deeltjes α , in ϕ voorkomen.

Kunnen weliswaar slechts gelijksoortige deeltjes tegen elkaar botsen, maar zoowel de deeltjes α , als de deeltjes β , dan moet ϕ twee quadratische functiën van den opgegeven vorm bevatten, de eene met \dot{x}_α , \dot{y}_α , \dot{z}_α , de andere met \dot{x}_β , \dot{y}_β , \dot{z}_β ; alleen de coördinatenverschillen komen nog in een onbepaalde functie voor.

Tot een vorm van ϕ als de laatstgenoemde kan men ook besluiten, zoodra men botsingen tusschen ongelijksoortige deeltjes onderstelt; bovendien moet dan elk der coëfficiënten h , β , γ , δ in de beide bovengenoemde quadratische vormen dezelfde waarde hebben.

§ 16. Magnetisch gedrag van dipolen II.

Verdere afleiding van de verdeelingsfunctie en van het resulterend magnetisch moment bij de eerste onderstelling omtrent de botsingen.

Kan elk van de deeltjes van het molecuul botsen met elk van de twee van een ander, dan geeft voorwaarde (1) ons, dat:

$$f = e^{-h \left[\frac{m_\alpha}{2} (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) + \frac{m_\beta}{2} (\dot{x}_\beta^2 + \dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2) \right] + \beta (m_\alpha \dot{x}_\alpha + m_\beta \dot{x}_\beta) + \gamma (m_\alpha \dot{y}_\alpha + m_\beta \dot{y}_\beta) + \delta (m_\alpha \dot{z}_\alpha + m_\beta \dot{z}_\beta) + \psi(x_\beta - x_\alpha, y_\beta - y_\alpha, z_\beta - z_\alpha)} \quad (29).$$

Aan f leggen we nu nog de voorwaarde (2) op en de voorwaarde, dat de gemiddelde snelheid van het zwaartepunt der moleculen nul is (voor een andere formulering zie men aanhangsel 15).

Voor we de voorwaarde (2) toepassen, merken we op, dat, omdat ψ in formule (29) toch een willekeurige functie der coördinatenverschillen is, voor die formule ook mag worden geschreven:

$$f = e^{-hR + \beta X + \gamma Y + \delta Z + \psi(x_\beta - x_\alpha, y_\beta - y_\alpha, z_\beta - z_\alpha)}.$$

Door van de formules (27) en (28) gebruik te maken, vinden we dan, dat in plaats van de voorwaarde (2) ook kan worden geschreven:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

of:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta + \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \dot{y}_\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \dot{y}_\beta + \frac{\partial \psi}{\partial z_\alpha} \dot{z}_\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial z_\beta} \dot{z}_\beta = 0.$$

Daar ψ zelf niet van de snelheidscomponenten afhangt, moeten al de coëfficiënten dezer laatste nul zijn, omdat de vergelijking moet gelden, welke waarden $\dot{x}_\alpha, \dot{y}_\alpha, \dots$ ook hebben, dus b.v. ook, als $\dot{x}_\alpha \neq 0$ en $\dot{x}_\beta = \dot{y}_\alpha = \dots = \dot{z}_\beta = 0$ is. De functie ψ reduceert zich bijgevolg tot een constante, $\log A$:

$$f = Ae^{-hR + \beta X + \gamma Y + \delta Z}.$$

Eindelijk geeft de voorwaarde, dat de gemiddelde snelheid van het zwaartepunt der moleculen nul is, b.v. voor de X-richting:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2}(m_{\alpha}\dot{x}_{\alpha}^2 + m_{\beta}\dot{x}_{\beta}^2) + \beta(m_{\alpha}\dot{x}_{\alpha} + m_{\beta}\dot{x}_{\beta})} (m_{\alpha}\dot{x}_{\alpha} + m_{\beta}\dot{x}_{\beta}) d\dot{x}_{\alpha} d\dot{x}_{\beta} = 0.$$

Analoge vergelijkingen krijgen we voor de richting van de Y en Z-as. Daaruit besluiten we, dat $\beta = \gamma = \delta = 0$ is (zie aanhangsel 16) en dus:

$$f = Ae^{-hR}.$$

De X-richting onderscheidt zich dus in niets van de Y- en Z-richtingen, er kan derhalve geen resulterend magnetisch moment zijn.

§ 17. Magnetisch gedrag van dipolen III.

Afleiding der verdeelingsfunctie en van het resulterend magnetisch moment bij de tweede onderstelling omtrent de botsing.

In tegenstelling met het vorige zullen we nu aannemen, dat slechts de deeltjes α onderling kunnen botsen, de deeltjes β nooit. Uit de voorwaarde (1) kunnen we dan niet tot de formule (29) geraken, we leiden daaruit nu slechts af, dat:

$$f=e^{-h\frac{m_{\alpha}}{2}(\dot{x}_{\alpha}^2 + \dot{y}_{\alpha}^2 + \dot{z}_{\alpha}^2) + (\beta\dot{x}_{\alpha} + \gamma\dot{y}_{\alpha} + \delta\dot{z}_{\alpha})m_{\alpha} + \psi(\dot{x}_{\beta}, \dot{y}_{\beta}, \dot{z}_{\beta}, x_{\beta}-x_{\alpha}, y_{\beta}-y_{\alpha}, z_{\beta}-z_{\alpha})}.$$

We leggen nu nog de volgende voorwaarden aan f op:

- 1°. alle richtingen loodrecht op de X-as zijn gelijkwaardig,
- 2°. voorwaarde (2).

Voor het magnetisch gedrag van het gas is het onverschillig of we nog een 3° voorwaarde invoeren, n.l. dat de gemiddelde snelheid der zwaartepunten evenwijdig aan de as OX nul is, of niet.

Alle assen loodrecht op de X-as zijn gelijkwaardig; de verdeelingsfunctie moet dus ook dezelfde waarde behouden, als we van de oorspronkelijke assen overgaan op een nieuw stel, door draaiing over een hoek $d\omega$ om de X-as uit de oude verkregen, dit geeft ons:

$$\begin{aligned} & \psi [(x_\beta - x_\alpha), (y_\beta - y_\alpha), (z_\beta - z_\alpha), \dot{x}_\beta, \dot{y}_\beta, \dot{z}_\beta] + m_\alpha (\beta \dot{x}_\alpha + \gamma \dot{y}_\alpha + \delta \dot{z}_\alpha) = \\ & = \psi [(x_\beta - x_\alpha), (y_\beta - y_\alpha) + (z_\beta - z_\alpha) d\omega, (z_\beta - z_\alpha) - (y_\beta - y_\alpha) d\omega, \dot{x}_\beta, \\ & \quad \dot{y}_\beta + \dot{z}_\beta d\omega, \dot{z}_\beta - \dot{y}_\beta d\omega] + m_\alpha [\beta \dot{x}_\alpha + \gamma (\dot{y}_\alpha + \dot{z}_\alpha d\omega) + \delta (\dot{z}_\alpha - \dot{y}_\alpha d\omega)]. \end{aligned}$$

Daaruit zien we, dat γ en δ elk nul moeten zijn, omdat in ψ $\dot{x}_\alpha, \dot{y}_\alpha, \dot{z}_\alpha$ niet voorkomen. Dus blijft over:

$$\frac{\partial \psi}{\partial (y_\beta - y_\alpha)} (z_\beta - z_\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial (z_\beta - z_\alpha)} (y_\alpha - y_\beta) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{y}_\beta} \dot{z}_\beta + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}_\beta} (-\dot{y}_\beta) = 0.$$

Als integraal van deze differentiaalvergelijking vinden we:

$$\psi = \psi [(x_\beta - x_\alpha), \{(y_\beta - y_\alpha)^2 + (z_\beta - z_\alpha)^2\}, \dot{x}_\beta, \{\dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2\}, \{(y_\beta - y_\alpha) \dot{z}_\beta - (z_\beta - z_\alpha) \dot{y}_\beta\}]$$

(zie aanhangsel 17), dus:

$$f = e^{-h \frac{m_\alpha}{2} (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) + \beta m_\alpha \dot{x}_\alpha + \psi [(x_\beta - x_\alpha), \{(y_\beta - y_\alpha)^2 + (z_\beta - z_\alpha)^2\}, \dot{x}_\beta, \{\dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2\}, \{(y_\beta - y_\alpha) \dot{z}_\beta - (z_\beta - z_\alpha) \dot{y}_\beta\}]},$$

waarvoor we ook mogen schrijven, met een andere functie ψ :

$$f = e^{-hR + \beta X + \psi [(x_\beta - x_\alpha), \{(y_\beta - y_\alpha)^2 + (z_\beta - z_\alpha)^2\}, x_\beta, \{\dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2\}, \{(y_\beta - y_\alpha) \dot{z}_\beta - (z_\beta - z_\alpha) \dot{y}_\beta\}]}$$

In dezen vorm is het gemakkelijker de voorwaarde (2) n.l. $\frac{df}{dt} = 0$ aan f op te leggen, die nu wegens de vergelijkingen (27) en (28) overgaat in:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Ter afkorting noemen we:

$$\begin{aligned} \eta &= \dot{x}_\beta, \quad \zeta = x_\beta - x_\alpha, \quad \tau = (y_\beta - y_\alpha)^2 + (z_\beta - z_\alpha)^2, \quad \sigma = \dot{y}_\beta^2 + \dot{z}_\beta^2, \\ \mu &= (y_\beta - y_\alpha) \dot{z}_\beta - (z_\beta - z_\alpha) \dot{y}_\beta. \end{aligned}$$

Nu moet:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} = 0$$

een identiteit worden, zoodra we met behulp der bewegingsvergelijkingen (26) alle versnellingen hebben uitgedrukt in de coördinaten en snelheidscomponenten:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{1}{m_\beta} \rho (x_\alpha - x_\beta) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} (\dot{x}_\beta - \dot{x}_\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} 2 \{ (y_\beta - y_\alpha) (\dot{y}_\beta - \dot{y}_\alpha) + (z_\beta - z_\alpha) (\dot{z}_\beta - \dot{z}_\alpha) \} + \\
& + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{2\dot{y}_\beta}{m_\beta} \left\{ (y_\alpha - y_\beta) \rho - \frac{e}{c} \dot{z}_\beta \eta \right\} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{2\dot{z}_\beta}{m_\beta} \left\{ (z_\alpha - z_\beta) \rho + \frac{e}{c} \dot{y}_\beta \eta \right\} + \\
& + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} (-\dot{y}_\alpha \dot{z}_\beta + \dot{z}_\alpha \dot{y}_\beta) + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{y_\beta - y_\alpha}{m_\beta} \left\{ (z_\alpha - z_\beta) \rho + \frac{e}{c} \dot{y}_\beta \eta \right\} + \\
& + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{z_\alpha - z_\beta}{m_\beta} \left\{ (y_\alpha - y_\beta) \rho - \frac{e}{c} \dot{z}_\beta \eta \right\} = 0 \dots\dots\dots (30)
\end{aligned}$$

Omdat \dot{x}_α , \dot{y}_α en \dot{z}_α in ψ niet voorkomen, moet de coëfficiënt van elk hunner nul zijn, dus:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = 0, \quad 2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} (y_\alpha - y_\beta) - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{z}_\beta = 0, \quad 2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} (z_\alpha - z_\beta) + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{y}_\beta = 0.$$

$y_\alpha - y_\beta$, $z_\alpha - z_\beta$, \dot{y}_β en \dot{z}_β kunnen elk voor zich alle mogelijke waarden (in een bepaald interval) aannemen, en de determinant op de coëfficiënten der lineaire homogene vergelijkingen voor $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial \mu}$ is dus in het algemeen niet nul. Derhalve moet:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0$$

zijn, zoodat

$$\psi = \psi(\sigma, \eta).$$

Van vergelijking (30) blijft nu slechts over:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{2\rho}{m_\beta} \{ \dot{y}_\beta (y_\beta - y_\alpha) + \dot{z}_\beta (z_\beta - z_\alpha) \} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\rho}{m_\beta} (x_\beta - x_\alpha) = 0.$$

In ψ komen $x_\beta - x_\alpha$, $y_\beta - y_\alpha$, $z_\beta - z_\alpha$ niet voor, hun coëfficiënten moeten elk nul zijn; dus:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0,$$

m. a. w.:

$$\psi = \text{constant}$$

of:

$$f = Ae^{-hR + \beta X}.$$

Is het gas in rust, dan moet de gemiddelde snelheid van de zwaartepunten der moleculen, d. w. z. de gemiddelde waarde van $\frac{X}{m_\alpha + m_\beta}$ nul zijn, en dus $\beta = 0$. Onverschillig of dit laatste zoo is of niet, is de verdeelingsfunctie onafhankelijk van de magnetische kracht, er kan dus geen resulterend moment zijn.

§ 18. **Magnetisch gedrag van vrije electronen in metalen bij twee onderstellingen omtrent de botsing.**

Om na te gaan, wat de magnetische werking der electronen in de volumeneenheid van een metaal is, hebben we op te maken het tijdgemiddelde van

$$M = \sum_{\text{volumeneenheid}} \frac{e}{2c} (yz - zy) \text{ } ^1) \dots\dots\dots (31)$$

Dit tijdgemiddelde geeft, als x , y en z de rechthoekige coördinaten der electronen voorstellen, den component langs de X -as van een magnetisch moment, dat op grooten afstand dezelfde magnetische werkingen uitoefent, als het stelsel electronen gemiddeld in een lang tijdsinterval doet. Is de toestand in het metaal stationair, dan zal dit tijdgemiddelde voor de volumeneenheid samenvallen met de oogenblikkelijke waarde op elk willekeurig tijdstip. Om de som in het rechterlid van (31) te kunnen opmaken, moeten we de verdeelingsfunctie $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ der electronen kennen. Als functie van LAGRANGE zullen we weer de kinetische energie T nemen, momenten en snelheidscomponenten verschillen dan alleen in een constanten factor ²⁾, dus kunnen we met de snelheidscomponenten als coördinaten in de phasenruimte blijven werken. Daar de krachten, door het magneetveld op ladingen uitgeoefend geen arbeid verrichten, blijft voor een electron, zoolang het niet botst

$$R = T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \text{constant} \dots\dots\dots (32)$$

¹⁾ De lading der electronen is door $+e$ voorgesteld.

²⁾ Niet als we de volledige functie van LAGRANGE gebruikten, waarin nog een term voorkomt, die aan het magnetisch veld beantwoordt.

De eenvoudigste, omtrent de botsing te maken onderstellingen zijn wel de volgende:

1°. De bolvormige electronen botsen volkomen elastisch tegen bolvormige metaalatomen. Wegens hun in verhouding zoo groote massa onderstellen we de laatste in rust.

2°. De electronen, die bolvormig zijn, botsen onderling volkomen elastisch.

In het eerste geval moet vergelijking (1), dus ook (11) bevredigd zijn voor alle waarden der snelheidscomponenten, die voldoen aan:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2,$$

terwijl voor de coördinaten:

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

is. Vergelijking (11) neemt zelf de eenvoudiger gedaante:

$$\phi = \phi'$$

aan. De oplossing daarvan is, bij de gegeven bijkomstige voorwaarden:

$$\phi = \phi [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), x, y, z] \dots\dots\dots(33)$$

waarin ϕ een willekeurige functie der 4 veranderlijken is.

De voorwaarde (2) geeft ons wegens (32) nog, dat ϕ onafhankelijk van de coördinaten moet zijn (zie aanhangsel 18).

Daar geen der drie coördinaatassen hierin een bijzondere rol speelt, is het resulterend magnetisch moment zeker nul.

In het tweede geval is het door BOLTZMANN voor éénatomige gasmoleculen gegeven bewijs (zie [2] I, blz. 124 e.v.) voor het noodzakelijk bestaan eener toestandsverdeeling:

$$f = ae^{-h[(\dot{x}-u)^2 + (\dot{y}-v)^2 + (\dot{z}-w)^2]}$$

(a , h , u , v en w kunnen functies der coördinaten zijn) ineens van toepassing.

Leggen we aan f nu nog de voorwaarde (2) op en de voorwaarde, dat de toestand overal langs de X -as dezelfde is, en f dus x niet bevat, dan vinden we:

$$f = a_0 e^{-h_0 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2(\dot{x}u_0 + \dot{y}\omega z - \dot{z}\omega y + \dot{y}v_0 + \dot{z}w_0) + \frac{e}{c} \mathfrak{H} \{ \omega (y^2 + z^2) - 2w_0 y + 2v_0 z \}]} \quad (34)$$

(zie aanhangsel 19), waarin a_0 , h_0 , ω , u_0 , v_0 en w_0 constanten zijn. Waren u_0 , v_0 en w_0 niet nul, dan was er in het geheele stelsel een stroom met componenten langs de X -, de Y - en de Z -as. Dit zullen we uitsluiten. Deden we dat niet, dan kon de werking van het electronenstelsel niet tot die van een magnetisch moment worden teruggebracht. Wij stellen dus $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. Is ω niet nul, dan wordt door f de toestand beschreven van een electronenstelsel, dat in zijn geheel met de hoeksnelheid $-\omega$ om de X -as draait. Hoewel in een willekeurig deel van het stelsel daarbij voortdurend een stroom in dezelfde richting bestaat, is de stroom in een gegeven richting voor het geheele stelsel toch nul, zoodat er nog van het magnetisch moment daarvan sprake kan zijn ¹⁾).

Dat magnetisch moment zal nu, als $\omega \neq 0$ is, ook van nul verschillen. Was $\omega = 0$ vóórdat het magnetisch veld werd aangezet, dan zal in het veld $\omega \neq 0$ zijn. In dat geval vinden we voor het magnetisch moment datgene, dat aan den (macroscopischen) inductiestroom beantwoordt. Wij zien echter, daar ω een willekeurige constante is, dat zoowel in, als buiten het veld een resulterend moment te voorschijn kan komen, steeds echter beantwoordende aan een stroom in het metaal. Wij vinden bij deze onderstellingen in den stationairen toestand in het algemeen een stroom, omdat in deze interpretatie van het verschijnsel alles is weggelaten, wat bij macroscopische beschouwing weerstand genoemd worden kan. Bij de eerste onderstelling werd deze door de botsingen met de rustende metaalatomen ingevoerd; men zou het natuurlijk ook door werkingen van het oppervlak kunnen doen, waar we nu geheel van afzagen.

Behalve het moment, dat aan den inductiestroom toegeschreven moet worden, vinden we dus bij de gemaakte onderstellingen omtrent de botsingen geen magnetische momenten, aan de vrije electronen in metalen toe te schrijven.

¹⁾ Voor een gedeelte, waarin een stroom in bepaalde richting bestaat, hangt $\Sigma (y\dot{z} - z\dot{y})$ van de keus van den oorsprong af, zoodat men niet van „het” moment ervan kan spreken.

§ 19. **Opmerkingen over het magnetisch gedrag van willekeurige moleculen.**

De bewijzen, in het voorafgaande gegeven voor het al of niet bestaan van een resulterend magnetisch moment waren zoozeer aangepast aan het bijzondere geval, waarvoor ze golden, dat het niet gemakkelijk is er een algemeene lijn in te herkennen. Al zullen we voor willekeurige samenstelling van het molecuul het magnetisch moment op die manier niet geheel kunnen bepalen, iets kan er toch in 't algemeen wel over gezegd worden.

Stel, dat we den toestand van het x^{de} molecuul bepalen door n coördinaten $q_1^{(x)}, \dots, q_v^{(x)}, \dots, q_n^{(x)}$ en de daarbij passende $\dot{q}_1^{(x)}, \dots, \dot{q}_n^{(x)}$. Stel dat we er voor kunnen aangeven de volledige functie van LAGRANGE, L , die de som is der verschillen van kinetische en potentieele en van magnetische en elektrische energie, waardoor alle bewegingsvergelijkingen voor de coördinaten van het molecuul den vorm hebben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} = Q'_v,$$

waarin alleen botsingskrachten Q'_v staan ¹⁾. We gaan dan, als vroeger, over op momenten p_v in plaats van snelheidscomponenten \dot{q}_v , en een functie R , zoodat alle bewegingsvergelijkingen voor de coördinaten van het molecuul den kanonischen vorm hebben:

$$\dot{q}_v = \frac{\partial R}{\partial p_v}, \quad \dot{p}_v = -\frac{\partial R}{\partial q_v} + Q'_v \dots \dots \dots (35)$$

Stel dat het magneetveld weer wordt geleverd door een stroom met stroomsnelheid \dot{q}_0 , waarbij q_0 voor het uitwendige stelsel een cyclische coördinaat is. Dan kan men juist als in § 5 het bewijs leveren voor de formules (9) en (10).

We zullen een grootheid I , die met R de volgende eigenschappen gemeen heeft:

- 1°. op een constanten term na de som van termen $I^{(x)}$ te zijn, die slechts van de coördinaten en momenten van één molecuul afhangen,

¹⁾ De potentieele energie, die aan de krachten \vec{Q}_v beantwoordt, en die alleen tijdens de botsingen niet nul is, is dus niet in L opgenomen.

- 2°. zoo, dat $I^{(\kappa)}$ constant blijft, zoolang het κ^{de} molecuul niet botst,
 3°. en zoo, dat $I^{(\kappa)} + I^{(\lambda)}$ constant blijft bij een botsing van het κ^{de} met het λ^{de} molecuul,
 een *additieve bewegingsintegraal* noemen.

Hebben we er zoo l : I_1, I_2, \dots, I_l , dan zal

$$f = a_0 e^{a_1 I_1 + a_2 I_2 + \dots + a_l I_l},$$

waarin de a 's constanten zijn, zeker juist wegens de eigenschappen der I 's een oplossing van de vergelijkingen (1) en (2) zijn, die de voorwaarden vormden voor het bestaan van den stationairen toestand. Waren I_1, I_2, \dots, I_l alle (onderling onafhankelijke) additieve bewegingsintegralen van het stelsel, dan was hiermede de meest algemeene oplossing gevonden. Kon men n.l. voor f een uitdrukking vinden, die niet geheel door I_1, \dots, I_l bepaald was, dan zou de logarithmus van f een nieuwe, van I_1, \dots, I_l onafhankelijke additieve bewegingsintegraal zijn, wat met de gemaakte onderstelling strijdt. Daar we echter van te voren meestal niet zullen weten, hoeveel (onderling onafhankelijke) additieve bewegingsintegralen het stelsel heeft, zal in vele gevallen de volgende regel beter toe te passen zijn. Zijn er minstens zooveel additieve bewegingsintegralen gevonden, als er (onderling onafhankelijke) grootheden bij de beweging van een molecuul zonder botsingen constant blijven, of minstens zoovele als er grootheden bij de botsingen constant blijven, dan is de gevonden uitdrukking voor f zeker de meest algemeene oplossing van de vergelijkingen (1) en (2)¹⁾; in andere gevallen zal een speciaal onderzoek dit moeten leeren. In de in het vorige behandelde gevallen hadden we minder additieve bewegingsintegralen, dan er grootheden bij de botsing constant bleven (verg. § 6, § 10), er is dan een onderzoek noodig om uit te maken of uit de grootheden, die bij de beweging zonder botsing en bij de botsing constant blijven, geen nieuwe functies zijn op te bouwen, die wel de eigenschappen der additieve bewegingsintegralen hebben. Zoo leeren de beschouwingen van § 6, dat uit de grootheden

¹⁾ Want was dit niet het geval, dan zou $\log f$ weer een additieve bewegingsintegraal zijn en dus nog een grootheid opleveren, die bij de beweging zonder botsing constant blijft en bovendien de eigenschap heeft, dat bij een botsing de som der waarden, die zij voor de twee moleculen heeft, niet verandert.

H en Θ geen additieve bewegingsintegralen af te leiden zijn. In § 6 hadden we als additieve bewegingsintegralen $R, p_x, p_y, p_z, \psi(p_3, p_1)$, in § 12 b. v. $\psi(p_3 + \alpha h \cos q_1)$.

Gesteld nu, dat het onderzoek naar het karakter der grootheden, die constant blijven, tot resultaat heeft, *dat R de eenige additieve bewegingsintegraal is, dan kunnen we bewijzen, dat het resulterend magnetisch moment nul is.*

Het magnetisch moment van een molecuul is n.l. een lineaire, homogene functie van de algemeene snelheidscomponenten \dot{q}_v , stel:

$$c_1 \dot{q}_1 + \dots c_v \dot{q}_v + \dots c_n \dot{q}_n.$$

Het resulterend magnetisch moment wordt dus voorgesteld door:

$$M = \frac{\int (c_1 \dot{q}_1 + \dots c_v \dot{q}_v + \dots c_n \dot{q}_n) e^{-aR} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n}{\int e^{-aR} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n}.$$

Substitueeren we hierin voor \dot{q}_v de waarde $\frac{\partial R}{\partial p_v}$ en voeren we voor den v^{den} term van de integraal in den teller de integratie naar p_v het eerst uit, dan komt daarin als factor voor de integraal:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aR} \frac{\partial R}{\partial p_v} dp_v = \left[-\frac{1}{a} e^{-aR} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

want als e^{-aR} voor $p_v = \pm \infty$ niet in voldoende mate tot nul naderde, waren de integralen naar p_v niet convergent.

Alle termen in den teller hebben dus een factor nul, het resulterend magnetisch moment is derhalve nul.

Ditzelfde bewijs geldt nog, als er meerdere additieve bewegingsintegralen zijn, waarvan er één R als functie van ROUTH optreedt voor de coördinaten der moleculen, (d. w. z. dat de bewegingsvergelijkingen den vorm (35) hebben) en de andere $I^{(2)} \dots I^{(l)}$ diegene onder de p_v 's, waarvoor $c_v \neq 0$ is, niet bevatten. Ook dan bewijst men op dezelfde wijze als te voren, dat elk der termen in den teller een factor nul krijgt.

Opdat het resulterend magnetisch moment niet nul is, is dus noodig, dat de verdeelingsfunctie nog van andere grootheden afhangt, dan

van R alleen en dat die andere grootheden functie zijn van die bewegingsmomenten p_i , die behooren bij bewegingen, die van invloed zijn op het magnetisch moment. Zulke grootheden waren in de beschouwde bijzondere gevallen $\psi(p_3, p_t)$ en $\psi(p_3 + \alpha h \cos q_1)$.

§ 20. **Berekening van additieve bewegingsintegralen voor enkele andere gevallen.**

We zullen nu nog afleiden, welke de *additieve bewegingsintegralen* zijn, die voor R in de plaats komen in de twee volgende gevallen:

- a. *Moleculen met vaste magnetische momenten* bewegen in het veld van een staalmagneet.
- b. *Moleculen met ladingen, waarvan de ligging bepaald wordt door cyclische coördinaten, waarvoor de veranderingssnelheid constant gehouden wordt*, bewegen in het veld van een *electromagneet*, die zelf een macroscopisch stelsel is, dat geheel dezelfde eigenschappen heeft als de moleculen. (Het geval van de door GANS ingevoerde „Zwangsläufige Electronen”, een geval, dat in werkelijkheid niet kan voorkomen).
- a. Hierbij valt op te merken, dat we het gebied der electronentheorie verlaten en ons plaatsen op het standpunt eener oude theorie van het magnetisme. Wat nu geheel wegvalt is de wijziging, die de electriche krachten door inductie in het moment van een molecuul kunnen brengen. De „magnetische energie” is nu bepaaldelijk potentieele energie. De bewegingsvergelijkingen worden die van HAMILTON (van q_0 is geen sprake).

In de plaats van R komt hier de som van mechanische en magnetische energie W , wat direct volgt uit de omstandigheid, dat geenerlei krachten werken behalve bij botsingen en dat de arbeid der botsingskrachten gelijk is aan de afname van de potentieele energie, die eraan beantwoordt, welke we vóór en na de botsing nul mogen stellen; dus W blijft voor één molecuul constant, zoolang dit niet botst en $W_1 + W_2$ heeft voor twee botsende moleculen vóór en na de botsing dezelfde waarde. De uitkomsten zullen overeenstemmen met die, welke wij vinden b. v. voor de

stroomdragende moleculen, als wij onderstellen, dat de snelheid \dot{q}_l zoo groot is, dat de veranderingen, die zij wegens het uitwendig magneetveld ondergaan, klein zijn in vergelijking met hun grootte zelf, zoodat van die veranderingen mag worden afgezien. Stelt men n.l. (overeenkomstig hiermede) in de berekeningen op blz. 17 $p_l = \lambda \dot{q}_l$ in plaats van $p_l = \lambda \dot{q}_l + \mu \dot{q}_0 \cos q_l$ in den term, die reeds een factor \dot{q}_0 heeft, dan komt in de uitdrukking voor R (zie form. 8) de term:

$$- \mu \dot{q}_l \dot{q}_0 \cos q_l.$$

Dit is (verg. form. 6) een deel der energie met het tegengestelde teeken genomen. Bij de nu besproken opvatting komt een analoge term zonder omkeering van teeken als deel der energie voor. Deze quaestie hangt hiermee samen, dat bij isocyclische bewegingen het deel der kinetische energie, dat van de (niet cyclische) coördinaten (parameters) afhangt, met het tegengestelde teeken genomen, de rol van potentieele energie speelt.

b. De additieve bewegingsintegraal S , die hier de rol van R speelt, is ook een functie van ROUTH (verg. aanhangsel 3), die weer niet met de energie samenvalt. We definiëren deze functie als volgt:

We onderscheiden de coördinaten, die de ligging der ladingen in het molecuul bepalen: $q_1, \dots, q_l, \dots, q_i$ van de overige: $q_{i+1}, \dots, q_v, \dots, q_n$, de functie van LAGRANGE zij weer L . We voeren in:

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v},$$

$$S = \sum_1^k \sum_{i+1}^n p_v^{(x)} \dot{q}_v^{(x)} - L = \sum_1^k S^{(x)} - \frac{1}{2} v \dot{q}_0^2.$$

\dot{q}_0 is de stroomsnelheid van den electromagneet. We denken ons in plaats van de snelheden \dot{q}_v de momenten p_v ingevoerd, maar behouden de snelheden \dot{q}_l .

Zoolang er geen botsingen zijn is:

$$\frac{dS^{(x)}}{dt} = \sum \left(\frac{\partial S}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial S}{\partial p_v} \dot{p}_v + \frac{\partial S}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial S}{\partial q_0} \dot{q}_0 + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_0} \ddot{q}_0 = 0,$$

omdat $\frac{\partial S}{\partial q_l} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial q_0} = 0$, $\ddot{q}_l = 0$, $\ddot{q}_0 = 0$ en voor de coördinaten q_v kanonische bewegingsvergelijkingen gelden.

Bij een botsing veranderen, als deze tenminste instantaan gebeurt, de coördinaten en momenten van de niet-botsende moleculen niet merkbaar.

In de botsende moleculen (1) en (2) en het uitwendige stroomsysteem zijn krachten noodig $Q_i^{(1)}$, $Q_i^{(2)}$ en Q_0 om de \dot{q}_i 'en en \dot{q}_0 constant te houden. Omdat q_i en q_0 cyclische coördinaten zijn, is:

$$Q_i^{(1)} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \dot{q}_i^{(1)}}, \quad Q_i^{(2)} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \dot{q}_i^{(2)}}, \quad Q_0 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_0}.$$

De arbeid van die krachten in een element dt van den botsingsduur, vermeerderd met den arbeid van de botsingskrachten, die gelijk is aan de afname van de potentieele energie U , moet gelijk zijn aan de toename van de behalve deze laatste bestaande energie E , dus:

$$-\dot{q}_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_0} \right) dt - \sum_{i=1}^i \dot{q}_i^{(1)} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S^{(1)}}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} \right) - \sum_{i=1}^i \dot{q}_i^{(2)} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S^{(2)}}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} \right) - dU = dE,$$

maar
$$E = S + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 + \sum_{i, \kappa} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(\kappa)}} \dot{q}_i^{(\kappa)},$$

$$dE = d \left\{ S + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} \dot{q}_i^{(1)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} \dot{q}_i^{(2)} \right) \right\},$$

en
$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_0} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{zoodat:}$$

$0 = dS + dU$ moet zijn. Daaruit volgt:

$$0 = d(S^{(1)} + S^{(2)}) + dU,$$

omdat de andere termen van S niet veranderen¹⁾. Omdat vóór en na de botsing U nul gesteld mag worden, is de waarde van $S^{(1)} + S^{(2)}$ vóór en na de botsing dus dezelfde.

S is bijgevolg een additieve bewegingsintegraal.

¹⁾ Het bewijs, dat de som $S^{(1)} + S^{(2)}$ vóór en na de botsing even groot is, kan men ook korter leveren op dezelfde manier, als bewezen is, dat $\frac{dS^{(\kappa)}}{dt} = 0$, zoolang geen botsing gebeurt, als men de potentieele energie der botsingskrachten maar in $S^{(1)} + S^{(2)}$ opneemt, zoolang het 1e en 2e molecuul botsen. Het in den tekst gegeven bewijs laat echter tevens het verband met E zien.

§ 21. **Bespreking van de door anderen verkregen uitkomsten voor de drie soorten neutrale moleculen.**

Hier zijn te bespreken algemeene uitkomsten, gevonden door LANGEVIN [13] en KROO [12], resultaten, voor een der drie behandelde molecuulsoorten afzonderlijk geldig, gevonden door LORENTZ [15], KROO [12], HOLM [10] en GANS [4—9] en ten slotte wat betreft het magnetisch gedrag van vrije electronen in metalen de uitkomsten van J. J. THOMSON [21], VOIGT [23], LORENTZ [15, 17] en SCHRÖDINGER [19].

Werk van LANGEVIN.

LANGEVIN onderscheidt twee gevallen: de moleculen hebben, als er geen veld is alle eenzelfde van nul verschillend magnetisch moment, of van alle is het magnetisch moment nul. In die twee gevallen vindt LANGEVIN respectievelijk para- en diamagnetisme. Al wordt dus hierbij expliciet over den bouw van het molecuul en den aard der botsingen niets gezegd, impliciet wordt de onderstelling ingevoerd, dat het moment van hoeveelheid van beweging der electriche deeltjes voor elk molecuul bij de beweging niet verandert, dat er dus ook steeds nog andere additieve bewegingsintegralen (zie § 19) zijn dan de energie of de daarmede overeenkomende grootheid. De vraag, waarom er steeds zulke grootheden zouden zijn, roert LANGEVIN niet aan en juist daarin liggen de groote moeilijkheden voor de verklaring van het magnetisme in de electronentheorie. Omdat LANGEVIN aan alle moleculen hetzelfde magnetische moment toeschrijft, komt bij hem het geval, dat het resulterend magnetisch moment nul wordt, niet voor den dag (Dit geval correspondeert juist met één additieve bewegingsintegraal). De uitdrukking voor het magnetisch moment is bij LANGEVIN:

$$M = N \frac{\int e^{-\epsilon_0(E - m\mathfrak{H}x)} x m dx}{\int e^{-\epsilon_0(E - m\mathfrak{H}x)} dx}$$

waarin E de energie voorstelt, die het molecuul buiten het veld heeft en $-m\mathfrak{H}x$ de „magnetische energie” voorstelt, die het molecuul in het veld daarenboven nog krijgt.

Ondersteld wordt dat E niet van x afhangt. Dan kan men uit

deze formule wegens de formeele overeenkomst met formule (19) (als daarin wordt ingevoerd, dat er maar één waarde van het moment voorkomt en men zich beperkt tot eerste machten van de veldsterkte) de resultaten afleiden, die we voor de stroom- en ladingdragende moleculen vonden, als daarin ongestoorde electriciteitsbewegingen plaats hadden.

Werk van KROO.

KROO komt tot het besluit, dat hoe ook het molecuul samengesteld is, steeds diamagnetisme voor den dag komt. Dat KROO dit in het algemeen vindt, is daaraan te danken, dat hij de verdeelingsfunctie f voor den stationairen toestand in een magneetveld van constante sterkte ($\dot{q}_0 = \text{constant}$) onderwerpt aan de voorwaarde, dat de som van $\log f$ over alle moleculen uitgestrekt een extremum moet zijn, als de bijkomstige voorwaarden zijn, dat het aantal moleculen constant is en de geheele energie van het stelsel constant blijft. Nu hebben we gezien (zie § 19 en § 5), dat bij constante \dot{q}_0 (dus \mathfrak{H}) niet het constant blijven van E , maar dat van R ons een bijkomstige voorwaarde oplevert, terwijl het van den bouw van het molecuul en de manier, waarop het botst, afhangt, of R de eenige additieve bewegingsintegraal is. Daarmede is weerlegd, wat KROO in zijn inleiding ([12] p. 7) zegt: „Tatsächlich liegt in der Benutzung des üblichen Variationsprinzipes, mit welchem die mühsame Analyse der Zusammenstöße ganz umgangen wird, eine bedeutende Vereinfachung der mathematischen Behandlung des Problems”. Ook bij toepassing van het variatiebeginsel is onderzoek der botsingen noodig, om aantal en aard der bijkomstige voorwaarden vast te stellen. Omdat KROO E en niet R als eenigen additieven bewegingsintegraal beschouwt, (hij let er niet op, dat bij het behouden van één snelheid: \dot{q}_0 de overgang van de vergelijkingen van LAGRANGE tot die van HAMILTON niet volledig is, vergelijk aanhangsel 3) vindt hij een diamagnetisch effect in plaats van geen effect. Hij berekent het negatieve moment voor ladingdragers en dipolen (voor de laatste bij quasi-elastische kracht).

Dat er bij gebruik van E in plaats van R in de verdeelingsfunctie een negatief moment M' voor den dag komt, kan als volgt aange-toond worden. We weten dat:

$$E = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 = \sum_x \left(R^{(x)} - \frac{\partial R^{(x)}}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right) + F'(\dot{q}_0), \quad \text{zoodat:}$$

$$M' = \frac{\int m e^{-h \left(R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right)} d\lambda}{\int e^{-h \left(R - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right)} d\lambda},$$

als m het moment van één molecuul in het element $d\lambda$ van de phaseuitbreidheid voorstelt. We beperken ons tot eerste machten van \dot{q}_0 en kunnen dus ontwikkelen:

$$M' = \frac{\int m e^{-hR} \left(1 + h \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right) d\lambda}{\int e^{-hR} \left(1 + h \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 \right) d\lambda}.$$

We mogen voor den factor $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0}$ uit de 2e termen in teller en noemer nu de waarde voor $\dot{q}_0 = 0$ nemen. Volgens formule (II) van aanhangsel 3 is $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0}$ en volgens de laatste formule van aanhangsel 5 is $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = m \frac{\mathfrak{H}}{\dot{q}_0}$, omdat we alleen op den term ε van L , die lineair in \dot{q}_0 is, behoeven te letten, , zoodat we krijgen:

$$M' = \frac{\int m e^{-hR} (1 - h m \mathfrak{H}) d\lambda}{\int e^{-hR} (1 - h m \mathfrak{H}) d\lambda}.$$

Volgens § 19 is de eerste term van den teller nul; de 1e term van den noemer stelt het totale aantal moleculen voor en de 2e term van den noemer is op een constanten factor na gelijk aan den 1en in den teller, dus 0. We krijgen dus, als c een positieve constante is:

$$M' = c \int -h \mathfrak{H} m^2 e^{-hR} d\lambda,$$

wat een negatieve uitkomst moet geven.

Werk van LORENTZ.

Prof. LORENTZ behandelde in een college het magnetisch gedrag van stroomdragende moleculen. Er werden twee verdeelingen der moleculen over de phasenruimte aangegeven, die afgezien van botsingen stationair waren. Of die verdeelingen ook tegenover botsingen stationair waren, werd niet onderzocht, maar wel werd opgemerkt, dat de eene, waarbij het moment van de electriciteitsbeweging voor alle moleculen dezelfde waarde had ($p_i = p$) alleen kon bestaan, als dit moment bij de botsingen niet veranderde. Daar voor f werd genomen:

$$a_0 e^{-\epsilon_0 T},$$

waarin T met onze R identiek is, is in de §§ 5—7, 10 en 11 bewezen, dat de beschouwde verdeelingen ook tegenover de daargestelde botsingen stationair zijn. De resultaten zijn dezelfde als die in § 11 en die in § 7, (de laatste als alle moleculen hetzelfde moment p_i hebben).

Werk van HOLM.

HOLM [10] behandelt de ladingdragende moleculen en de dipolen (de laatste bij quasi-elastische bindingskracht en oneindig groote massa van het positieve deeltje, zoodat alleen met de beweging van het negatieve gerekend behoef te worden). Hij gaat uit van de door LARMOR bewezen stelling, dat de bewegingsvergelijkingen voor elektrische ladingen in een magneetveld t. o. van een assenstelsel, dat met bepaalde hoeksnelheid roteert, op grootheden van den tweeden graad in η na juist zoo luiden als die t. o. van een vaststaand assenstelsel, wanneer er geen veld is. HOLM beweert nu, dat de verdeelingsfunctie van LANGEVIN moet worden gebruikt, omdat in den exponent moet voorkomen „de kinetische energie, te nemen voor het roteerend assenstelsel” en dat men evenzoo voor het magnetisch moment moet nemen het product uit een constante en het moment van hoeveelheid van beweging in het draaiende assenstelsel.

HOLM stelt de verdeelingsfunctie afhankelijk van de genoemde „kinetische energie”, omdat „het thermodynamisch evenwicht zich instelt, doordat de deeltjes — hetzij bij botsingen, hetzij door straling — hun kinetische energie uitwisselen”.

Wij moeten nu nagaan of de door HOLM ingevoerde „kinetische

energie": $\frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2)$ (x', y', z' zijn coördinaten van het negatieve t. o. van het positieve deeltje der dipolen in een assenstelsel, dat met de hoeksnelheid $\frac{e \hbar}{2m}$ om de Z -as¹⁾ wentelt) een additieve bewegingsintegraal is. Zijn x, y en z coördinaten in een stelsel, dat niet draait, dan hebben we (verg. aanhangsel 20):

$$\frac{l}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) = \frac{l}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e \hbar}{2} (y\dot{x} - x\dot{y}).$$

De eerste term stelt in elk lid de potentieele energie voor. Volgens § 15 vormen de eerste twee termen van het rechterlid een additieve bewegingsintegraal, dus zou, bij beperking tot 1^e machten van \hbar $\frac{e \hbar}{2} (xy - y\dot{x})$ er ook één moeten zijn. Nu is bij het rondlopen om een aantrekkend centrum $y\dot{x} - x\dot{y}$, afgezien van termen, die \hbar bevatten, zoolang er geen botsing gebeurt een constante. Bij een botsing van twee van de negatieve deeltjes tegen elkander is echter de som van hun momenten $y\dot{x} - x\dot{y}$ ieder t. o. van een as door het bijbehorende centrum gaande, niet constant. Immers bij een botsing van de deeltjes 1 en 2 is: $\Delta\dot{x}_2 = -\Delta\dot{x}_1$ en $\Delta\dot{y}_2 = -\Delta\dot{y}_1$, terwijl de coördinaten niet veranderen (instantane botsing). De verandering der zoeven genoemde som is dus: $(y_1 - y_2) \Delta\dot{x}_1 - (x_1 - x_2) \Delta\dot{y}_1$, wal niet nul is, want, ofschoon de negatieve deeltjes zoo goed als dezelfde plaats in de ruimte innemen, zijn x_1, y_1 van x_2, y_2 verschillend, omdat x_1, y_1 relatieve coördinaten zijn ten opzichte van het eene, en x_2, y_2 ten opzichte van het andere positieve deeltje. Nam men voor x, y, z coördinaten t. o. van één en hetzelfde coördinatenstelsel, dan blijft wel de som van $y\dot{x} - x\dot{y}$ bij de botsing constant, maar niet $y\dot{x} - x\dot{y}$ bij de beweging om een niet in den oorsprong gelegen centrum. De door HOLM beschouwde verdeling is dus niet stationair.

Wat het gebruik betreft, dat hij van de stelling van LARMOR

1) Bij HOLM heeft het veld de richting OZ en is e uitgedrukt in electromagnetische maat.

maakt, moge nog het volgende worden opgemerkt. Neemt men voor alle electronen coördinaten t. o. van hetzelfde assenstelsel en voert men een nieuw assenstelsel in, dat draait t. o. van het vorige, dan gaan wel is waar bij geschikt gekozen hoeksnelheid alle bewegingsvergelijkingen over in den vorm, die ze zonder het veld in een rustend stelsel hadden, maar in het draaiende stelsel zijn de coördinaten der positieve deeltjes niet dezelfde eenvoudige functies van den tijd, als in het rustend stelsel zonder veld, waarin die deeltjes eenparig in rechte lijnen bewogen, zoodat de integralen der beweging in het veld, beschreven met behulp van het draaiende stelsel, niet direct uit die van de beweging zonder veld af te leiden zijn. Neemt men ook de beweeglijkheid der positieve deeltjes in aanmerking, dan kan men zich niet op de stelling van LARMOR beroepen, aangezien deze alleen geldt voor deeltjes, die alle dezelfde verhouding van e en m hebben.

Voor de ladingdragers, waarvoor bovendien, zooals HOLM ook opmerkt, de stelling van LARMOR (met $\frac{e}{\rho}$ in plaats van $\frac{e}{m}$) alleen streng geldt, als alle traagheidsmomenten gelijk zijn, gelden dergelijke bezwaren als voor de dipolen.

Uitgedrukt in de coördinaten en snelheidscomponenten of momenten t. o. van het draaiende stelsel, moet de formule voor het magnetische moment bij HOLM dezelfde gedaante aannemen als hier in § 16, 17 en 14 gevonden werd, uitgedrukt in de overeenkomstige grootheden t. o. van een rustend stelsel, wat van te voren duidelijk maakt, dat zijn uitkomsten ook moeten overeenstemmen met de daar gevondene (verg. aanhangsel 20) ¹⁾.

Werk van GANS.

GANS [8] behandelt lichamen, waarvan het molecuul bestaat uit een vast electronenstelsel met twee gelijke hoofdtraagheidsassen en met een constante verhouding van massa- en ladingsdichtheid. Hij volgt denzelfden weg als KROO en neemt dus ook E in plaats van

¹⁾ Omdat over alle momenten van $-\infty$ tot $+\infty$ geïntegreerd wordt, is het voor het resultaat onverschillig, welke de beteekenis der in de formule voorkomende momenten is.

R in den exponent van de verdeelingsfunctie. GANS zegt echter niet, zooals KROO, dat de uitkomst onafhankelijk is van den aard der botsingen en den bouw van het molecuul. Integendeel hij merkt op, dat er kunnen zijn „niet statistische coördinaten” zooals er ook hier in het voorgaande moesten worden aangenomen, d. w. z. coördinaten die van de warmtebeweging geen invloed ondervinden, dus nog andere additieve bewegingsintegralen dan R . Aan deze geeft GANS voor elk molecuul dezelfde waarde, en wel een waarde, die niet nul is. Daardoor komt het, dat in de gevallen, waar wij geen magnetisme vonden (de tweede onderstelling voor de stroom- en ladingdragers) GANS diamagnetisme vindt (wegens E in plaats van R), en dat, waar wij een willekeurige superpositie van para- en diamagnetisme vonden (telkens de eerste onderstelling omtrent de botsing), GANS paramagnetisme vindt (omdat hij aan het moment van het molecuul nooit de waarde nul geeft).

In zijn andere werk [4, 5, 6, 7 en 9] behandelt GANS ook het geval van werking der afzonderlijke moleculen op elkander, niet alleen bij de botsingen (ferromagnetisme), en het magnetisme bij lagere temperaturen, waar de quanta een rol spelen.

We willen dit werk hier alleen bespreken, voor zoover het betrekking heeft op het klassieke gebied en voor het bijzondere geval, dat de wisselwerking der moleculen tot de botsingen beperkt blijft. GANS behandelt in zijn werk het magnetisch gedrag van wat hij noemt „zwangsläufige Electronen”, dat zijn moleculen, waarin de snelheid der geladen deeltjes een voorgeschreven waarde heeft. In [4] bewijst GANS, dat op dergelijke stelsels dezelfde krachten werken en dat zij dezelfde magnetische werking uitoefenen, als een ermede corresponderend stelsel vaste magnetische momenten zou doen. Verder bewijst hij, dat snel draaiende omwentelingslichamen bij benadering de eigenschappen van „zwangsläufige Electronen” zullen bezitten. In dit artikel wordt met de warmtebeweging nog geen rekening gehouden, maar het dient gedeeltelijk als basis voor de andere, waarin dit wel het geval is en die we nu zullen bespreken.

GANS leidt de verdeelingsfunctie af voor het geval van magneculen. (Geval a). Als additieve bewegingsintegraal vonden we daarvoor in § 20, a de som van mechanische en magnetische energie. Volgens GANS moet in de verdeelingsfunctie niet de energie, maar de som van

mechanische en dubbele magnetische energie voorkomen (verg. in [5] formule (35) p. 131 met (30) en (31) op p. 130).

GANS brengt echter voor elk molecuul als magnetische energie $-\frac{1}{2}(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$ in rekening in plaats van $-(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$ ¹⁾. Hij moest $-\frac{1}{2}(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$ sommeeren over alle plaatsen, waar een moment \mathfrak{m} is, d. i. over alle moleculen en over het uitwendig stelsel, dat \mathfrak{H} levert, hij sommeert alleen over de moleculen, wat alleen mag, als men met 2 vermenigvuldigt²⁾. Voor de dubbele magnetische energie vindt GANS bijgevolg $-(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$, dat is juist de enkele magnetische energie, die hij eigenlijk nemen moest.

GANS past zijn uitkomsten onveranderd toe op stelsels van electrisch geladen, met constante snelheid ronddraaiende moleculen (geval *b* [5] p. 128) en feitelijk ook op stelsels van snel om hun symmetrieas draaiende, electrisch geladen omwentelingslichamen, (geval *c* [5] p. 119), waarbij het uitwendige veld ook wordt geacht door een constanten stroom teweeggebracht te zijn. In de afleiding van de verdeelingsfunctie wordt daarbij geen verandering gebracht; deze wordt dus zowel voor *b* en *c*, als voor *a* afhankelijk gesteld van de (dubbele) energie en voor de (dubbele) energie wordt in elk van die gevallen $-(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$ in rekening gebracht. Nu is inderdaad voor stelsels met electrische stroomen de magnetische energie niet $-(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$, maar $+(\mathfrak{m} \mathfrak{H})$, maar daartegenover staat, dat in de gevallen *b* en *c* de verdeelingsfunctie in een constant magnetisch veld resp. van de functies *S* en *R* afhangt (verg. § 20 en 12), niet van de energie (die bij de beweging niet constant blijft, omdat er krachten noodig zijn om den stroom in de moleculen en het uitwendig stroomstelsel constant te houden). De twee genoemde omstandigheden, die ieder voor zich zouden maken, dat de verdeelingsfunctie voor electrische ladingen er anders zou uitzien, dan voor magneculen, maken samen, dat er in de verdeelingsfunctie voor de stroomdragers b. v. toch een term $-\frac{\mu}{\lambda} p_i \dot{q}_0 \cos q_1$ komt, die dezelfde structuur heeft als de term $-(\mathfrak{m} \mathfrak{H}) = -mH \cos q_1$ van GANS, al kan hij ook niet op dezelfde manier worden afgeleid

1) Voor vectoren gebruiken we hier Gothische letters, zoodat het scalaire product van moment en veldsterkte bedoeld wordt.

2) Verg. ook aanhangsel 5.

en al hebben $\frac{\mu}{\lambda} p_l \dot{q}_0$ en mH ook niet dezelfde beteekenis. Tegen de afleiding van de formule voor het magnetisch moment, door GANS gegeven, zijn dus wel bezwaren in te brengen, maar deze formule zelf is in denzelfden vorm te schrijven als die voor de stroomdragers bij de eerste onderstelling omtrent de botsing (voor groote waarden van p_l); de uitkomst van GANS (gespecialiseerd voor het klassieke gebied en voor het geval, dat de moleculen alleen bij botsing op elkaar werken) stemt met de uitkomst voor stroomdragers en ladingdragers overeen.

§ 22. Bespreking van het werk van anderen over het magnetisch gedrag der vrije electronen in metalen.

Over het magnetisch gedrag van vrije electronen in metalen vinden we aan den eenen kant het denkbeeld, dat deze electronen, door het rondloopen in spiralen (in de projectie op het YZ vlak in cirkels), oorzaak van een diamagnetisch gedrag van het metaal zouden moeten zijn. Dit denkbeeld sprak J. J. THOMSON het eerst uit, VOIGT opperde het onafhankelijk van THOMSON en SCHRÖDINGER werkte het nader uit. Aan den anderen kant heeft prof. LORENTZ in 't kort in zijn lezing van 1913 in Göttingen [17], en uitvoeriger in een college (1910—1911) aangetoond, dat de vrije electronen geen magnetisch moment aan een metaal geven. Dat bewijs werd op twee manieren gegeven, die we hier zullen laten volgen. Het verschilpunt met de andere onderzoekers zal daarbij vanzelf ter sprake komen. Het eigenaardige is n.l., dat er geen verschil van meening is over de verdeelingsfunctie f .

Prof. LORENTZ zag van botsingen af en toonde in dit geval aan, dat de functie f , die dan in den stationairen toestand slechts aan vergelijking (2) behoef te voldoen, in het veld denzelfden vorm kan aannemen als daarbuiten.

In § 18 is nu aangetoond, dat bij twee verschillende onderstellingen omtrent de botsingen, als er geen inductiestroom is, f onafhankelijk van het bestaan van het veld is, wat SCHRÖDINGER bij iets andere onderstellingen omtrent de botsingen (hij laat n.l. de metaalatomen om

hun evenwichtsstand trillen en daartegen de electronen botsen) ook aantoot. Hij vindt n. l.:

$$f = a_0 e^{-h_0(x^2 + y^2 + z^2)}, \dots \dots \dots (36)$$

d. i. juist onze uitdrukking (34) als noch de inductiestroom, noch een andere stroom bestaat.

Prof. LORENTZ maakt nu, zooals ook in § 18 is gedaan, de waarde van het resulterend magnetisch moment voor een bepaald oogenblik op; deze is:

$$M = N \frac{e}{2mc} \frac{\int (yz - zy) f dx dy dz d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}}{\int f dx dy dz d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}},$$

wat zeker nul oplevert, omdat f in het veld dezelfde structuur heeft als daarbuiten. Daarmede is op de eerste manier aangetoond, dat er geen magnetisch moment is.

THOMSON, VOIGT en SCHRÖDINGER bepalen de som der magnetische momenten op een andere manier, ze maken eerst een tijdgemiddelde voor elk electron op en sommeeren dan. Na elken omloop heeft het electron als bijdrage tot de tijdintegraal van $(yz - zy)$ tweemaal het oppervlak van het cirkeltje opgeleverd, dat projectie van zijn baan op het vlak YOZ , is; botste het niet, dan droeg het dus in een langen tijd zooveel malen dit bedrag bij, als in dien tijd de omloopstijd begrepen is. Om het tijdgemiddelde te vinden, wordt dan nog door dien tijd gedeeld. THOMSON merkte op, dat als er wel botsingen waren, de deelen van cirkeltjes toch wel tot geheele cirkels te vereenigen zouden zijn en SCHRÖDINGER bracht daarbij nauwkeurig de bijdrage van elke groep electronen met bepaalde snelheid en bepaalde weglengte in rekening, (36) gebruikende om de talrijkheid dier groepen te berekenen.

Nu moet, als de toestand stationair is, de momentane waarde van het resulterend moment dezelfde zijn als het tijdgemiddelde daarvan.

Bij het tweede bewijs maakt prof. LORENTZ nu ook eerst het tijdgemiddelde op. Uit het volgende moge blijken, hoe men ook op deze manier tot het besluit moet komen, dat er geen resulterend moment is. Het is duidelijk, dat formule (36) het rondloopen in cirkels (spiralen) niet uitsluit; immers, beschouwen we een bepaald punt binnen in het metaal, dan zal bij cirkelbanen, even goed als

bij rechtlijnige banen, een snelheid van elke richting daar even waarschijnlijk kunnen zijn. Opdat echter slechts volledige cirkels voorkomen,

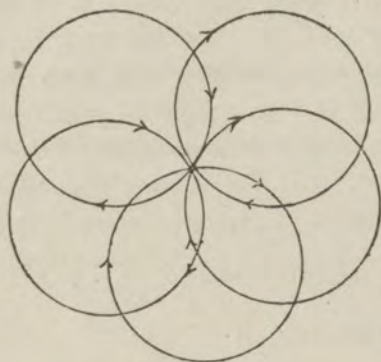


Fig. 3.

zal aan den rand van het beschouwde stuk metaal elk electron een tangentieel gerichte snelheid moeten hebben. Komen ook aan den rand alle bewegingsrichtingen gelijkelijk voor, dan hebben vele deeltjes daar zoodanige snelheden, dat hun cirkels slechts voor een deel binnen het metaal zouden vallen. Men kan zich voorstellen, dat zij telkens aan de randlijn worden teruggekaatst en dus een aaneenschakeling van cirkelboogjes doorloopen,

zoals in fig. 4 is aangegeven. De electronen, die op deze „randbanen” rondloopen, leveren een tegengesteld moment op, als die binnenin. De berekening, die prof. LORENTZ voor de beide momenten gaf, in de onderstelling, dat de electronen slechts aan den rand botsen en dat het metaal een cylinder met beschrijvende lijnen evenwijdig aan de X -as is, gaf dan ook in eerste benadering een resulteerend moment nul. We zullen hier een dergelijke berekening laten volgen voor een cilindrisch, uit het metaal gesneden gedeelte, met beschrijvende lijnen evenwijdig aan de X -as en een willekeurige richtlijn L en aantoonen, dat het resultaat hetzelfde blijft, ook als men de benadering nog een stap verder voortzet. Om het magnetisch moment voor het beschouwde

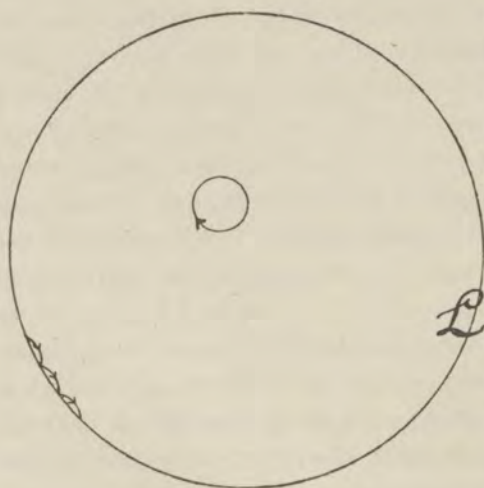


Fig. 4.

deel van het metaal te vinden, moeten wij met alle electronenbanen, voor zoover zij in dat deel liggen, rekening houden. Ofschoon de electronen dit deel kunnen verlaten en erin kunnen terugkeeren, zoodat

er geen sprake is van „terugkaatsen,” hebben wij dus toch met deelen van cirkels nabij den rand L te doen.

De figuur stelt een doorsnede van den cylinder loodrecht op de X -as voor (de krachtlijnen wijzen naar achteren). Tot die eene doorsnede kunnen wij ons beperken, in alle andere gebeurt precies hetzelfde.

De electronen doorloopen cirkels in den aangegeven positieven zin, waarvan enkele niet, enkele gedeeltelijk buiten L uitsteken; we onderscheiden daarom „binnenste” en „randelectronen”. Men kan letten op de verzameling E van alle randelectronen, die cirkels doorloopen, waarvan gelijke bogen (ook met denzelfden straal beschreven) binnen L liggen en die 2 aan 2 door eenzelfde punt van L gaan. Doorliep een electron al die bogen (binnen L) achter elkaar, dan zou het ten slotte om (bijna) het geheele oppervlak binnen L in negatieven zin rondloopen. De bijdrage van een der binnenste electronen tot $\frac{1}{2}(yz - zy)$ is na één omloop het cirkeloppervlak. Voor de randelectronen maken we eerst de bijdrage van de electronen E op. Deze zullen gelijkmatig langs den omtrek O verdeeld zijn en ze behoeven alle evenveel tijd om het binnen L gelegen deel hunner baan af te leggen. Als ze elk hun cirkelboogje binnen L doorloopen, dragen ze

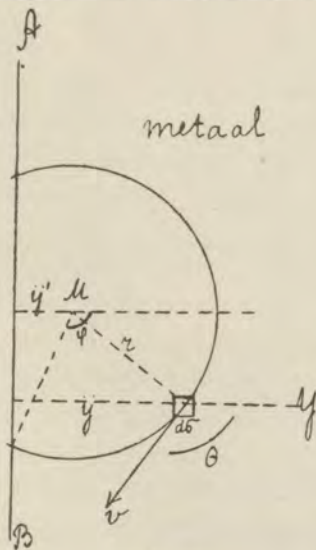


Fig. 5.

samen in de eerste benadering het oppervlak binnen L gelegen bij. Stel er zijn n_E electronen E , dus ook n_E cirkelboogjes. Moest één electron al die boogjes doorloopen, dan zou, daar bij een bepaald boogje een bepaalde snelheid behoort, het er n_E maal zo lang overdoen als om één boogje te doorloopen en het zou in dien langeren tijd evenveel tot $\frac{1}{2}(yz - zy)$ bijdragen als de electronen E in den korteren. De bijdrage van de electronen E in den tijd noodig om één cirkelboogje te doorloopen, kunnen we dus vervangen door die van één electron in den tijd, dat het volledig zou rondloopen.

Stel nu, dat per vlakte-eenheid in de beschouwde doorsnede k electronen aanwezig zijn, wier snelheid een component v in vlak YOZ heeft.

(k is onafhankelijk van de plaats en van de richting van v). We maken de bijdragen van de randelectronen (die alleen in een dunne laag langs de begrenzing L zullen voorkomen) en van de electronen in het binnengedeelte op voor een tijd, die lang is t. o. van den omloopstijd in één cirkel; die lange tijd zij onze tijdseenheid.

Bijdrage van de randelectronen:

AB zij een stuk van de richtlijn L , (de kromming daarvan zal t. o. van die der cirkelbanen te verwaarloozen zijn). We zullen letten op de electronen, die liggen in een vlakke-element $d\sigma$ en waarvan de bewegingsrichting een hoek tusschen θ en $\theta + d\theta$ maakt met de Y -as, die wij hier voor het gemak loodrecht op den rand kiezen.

Dat aantal electronen is $k \frac{d\theta}{2\pi} d\sigma$. De straal van den doorloopen cirkel, die door v bepaald is, zij r ; het middelpunt heeft dan een afstand tot den rand:

$$y' = y - r \sin \theta,$$

als y diezelfde afstand voor het electron is. T zij de omloopstijd voor

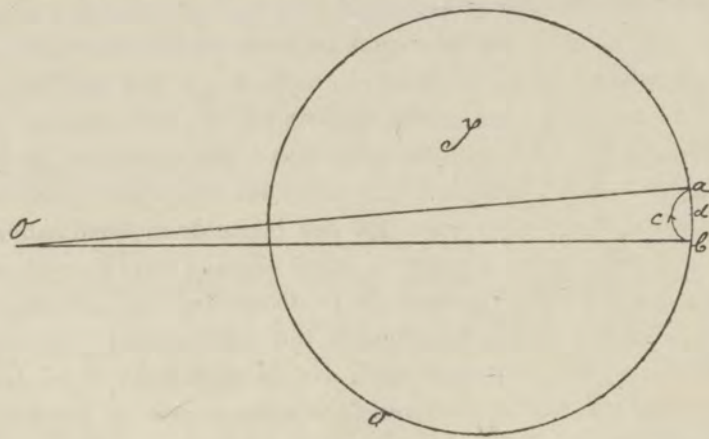


Fig. 6.

zoo'n cirkel. De beschouwde electronen gebruiken den tijd $\frac{\phi}{\pi} T$ voor het doorloopen van den cirkelboog, die in het beschouwde deel van het metaal ligt en die den hoek 2ϕ als middelpuntshoek heeft

$$\left(\cos \phi = -\frac{y'}{r} \right).$$

In plaats van *Obca* wordt nu bij het doorloopen van *ba* als bijdrage genomen *Obda*.

Nemen we alvast alle electronen samen, waarvoor de $d\sigma$'s een strookje van de breedte dy evenwijdig aan de begrenzing vormen, dan levert de som van alle corresponderende sectoren evenveel malen het oppervlak I op, als de koordsom ab den omtrek oplevert. Het aantal electronen is $k \frac{d\theta}{2\pi} Ody$, de koorde ab is $2r \sin \phi$, dus de koordsom is:

$$k \frac{d\theta}{2\pi} Ody \cdot 2r \sin \phi,$$

de sectorensom bijgevolg:

$$k \frac{d\theta}{2\pi} I dy \cdot 2r \sin \phi;$$

of, als wij in plaats van y en θ y' en θ invoeren:

$$k \frac{d\theta}{2\pi} I dy' \cdot 2r \sin \phi$$

in den tijd $\frac{\phi}{\pi} T$, dus per tijdseenheid:

$$\frac{kI}{T\phi} r \sin \phi dy' d\theta.$$

Over θ moet nu nog van $\frac{\pi}{2} - \phi$ tot $\frac{\pi}{2} + \phi$ worden geïntegreerd, dan over y' van $-r$ tot $+r$. Voeren we daarbij in: (wegens $\cos \phi = -\frac{y'}{r}$) $dy' = r \sin \phi d\phi$, dan moet de integratie over ϕ van 0 tot π loopen. De bijdrage voor de randelectronen is dus:

$$\frac{\pi k I r^2}{T} \dots \dots \dots (37)$$

Bijdrage van de binnenste electronen:

Deze leveren in elken omloopstijd elk een bijdrage πr^2 , dus per tijdseenheid: $\frac{\pi r^2}{T}$. Omdat er maar weinig randelectronen zijn, kunnen de inwendige electronen geteld worden, alsof het alle aanwezige electronen waren, d. i.: kI . Hun bijdrage is dus:

$$\frac{\pi k I r^2}{T} \dots \dots \dots (38)$$

Beide bijdragen hebben tegengesteld teeken, de magnetische werking van elke groep electronen van een bepaalde snelheid is dus alles bijeengenomen nul.

Verdere benadering geeft hetzelfde resultaat. Verwaarloosd zijn n.l. de oppervlakjes $abcd$ voor de randelectronen en het aantal randelectronen bij de telling der inwendige electronen; voor beide bijdragen (37) en (38) werd dus te veel gevonden.

Voor elk der randelectronen uit de groep $\frac{k}{2\pi} d\theta Ody$ is te veel gerekend in den tijd $\frac{\phi T}{\pi}$ het stuk $abcd$, d. i.: $\phi r^2 - r^2 \sin \phi \cos \phi$.

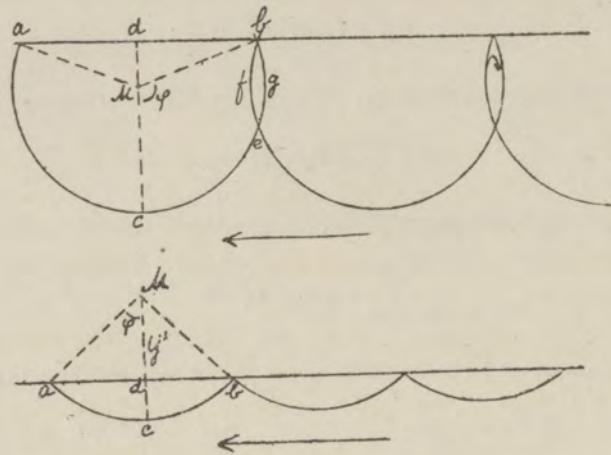


Fig. 7.

(Dit behoort ook in het geval, dat in de bovenste figuur 7 voorgesteld is, te worden afgetrokken, want op die manier telt men juist het oppervlak $adbfec$ niet mee bij de bijdrage en het oppervlak $fbge$ met tegengesteld teeken, wat men met het oog op de richting, waarin de rondgang om dit laatste plaats heeft, juist moet doen).

Voor alle randelectronen is dus te veel gerekend per tijdseenheid:

$$\begin{aligned} & \iint \frac{k}{2\pi} d\theta Ody' (\phi r^2 - r^2 \sin \phi \cos \phi) \frac{\pi}{\phi T} = \\ & = \frac{kOr^3}{T} \int_0^\pi (\phi \sin \phi - \sin^2 \phi \cos \phi) d\phi = \frac{\pi k Or^3}{T}. \end{aligned}$$

Aan inwendige electronen is te veel geteld het aantal randelectronen, d. i.:

$$\iint \frac{k}{2\pi} d\theta Ody' = \frac{kO}{2\pi} \int_0^\pi 2\phi r \sin \phi d\phi = kOr.$$

Voor elk daarvan is in den tijd T te veel geteld: πr^2 , dus per tijdseenheid $\frac{\pi r^2}{T}$, dus voor alle samen:

$$\frac{\pi kOr^3}{T}.$$

Ook in deze fijnere benadering vindt men dus, dat voor elke groep electronen met dezelfde snelheidscomponent in YOZ de bijdragen van rand- en inwendige electronen tot het magnetisch moment elkaar precies opheffen.

§ 23. Magnetisch gedrag van stroomdragers, ladingdragers en dipolen, als er geen botsingen plaats hebben.

In het voorgaande is het magnetisch gedrag van eenige hypothetische gassen behandeld, waarin de eenige wisselwerking der moleculen in botsingen bestond. Dat het beschouwen dier botsingen niet alleen essentieel is voor de methode om den stationairen toestand te bepalen, maar ook voor het resultaat, moge uit het volgende blijken, waarin nog in 't kort het magnetisch gedrag zoowel van stroom- en ladingdragers als van dipolen zal worden behandeld, als de moleculen niet botsen en dus geenerlei wisselwerking op elkander uitoefenen. Behalve voor de stroomdragers, waarvoor het resultaat onbepaald is, vinden we dan slechts diamagnetisme. Daarbij moeten we letten op de elektrische krachten, werkende tijdens het aanzetten van het veld. In het vorige speelden deze geen rol, omdat we vroegen, welke toestanden in het al aanwezige veld zich ook tegenover botsingen konden handhaven. Waar er slechts één zoo'n toestand is, doet de wijze van ontstaan er natuurlijk niets toe en waar we er meerdere vonden, waren er ook buiten het veld meerdere mogelijk, zoodat ook daar de vraag naar het ontstaan van die toestanden haar beteekenis ver-

loor. Als er echter geen botsingen zijn, zal in elk molecuul de verandering tijdens het aanzetten van het veld van invloed blijven op den toestand daarna.

Voor de stroomdragende moleculen kunnen we blijven werken met de functie van LAGRANGE, waaruit de bewegingsvergelijkingen ook kunnen worden afgeleid als \dot{q}_0 veranderlijk is. Voor de ladingdragers en de dipolen, waarvoor we de krachten, door het constante magneetveld uitgeoefend, opgaven, hebben we nu ook noodig de krachten Q' , die wegens het veranderen van het veld werken. (In aanhangsel 22 zullen we ook voor de ladingdragers de volledige functie van LAGRANGE opstellen en ook daaruit de verandering van het magnetisch moment bij aanzetten van het veld berekenen).

Bij het ontstaan van het magneetveld \mathfrak{H} , dat de richting OX heeft, zal op het electromagnetisch veld, dat al in het lichaam bestaat (wegens de ladingen der moleculen) een veld gesuperponeerd worden, dat aan de volgende vergelijkingen voldoet:

$$\frac{\partial d_z}{\partial y} - \frac{\partial d_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial d_x}{\partial z} - \frac{\partial d_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial d_y}{\partial x} - \frac{\partial d_x}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{\partial d_z}{\partial z} = 0,$$

d_x , d_y en d_z zijn hierin de componenten van de elektrische kracht.

We onderstellen, dat het magneetveld ten allen tijde homogeen is, dus \mathfrak{H} slechts functie van t , niet van x , y en z ¹⁾. Toen $\mathfrak{H} = 0$ was, was ook $d_x = d_y = d_z = 0$.

We leggen den oorsprong van het coördinatenstelsel in een of ander centraal punt van het lichaam, waar deze waarden behouden mogen blijven. De richtingen van de Y - en de Z -as hebben in het lichaam geen bijzondere beteekenis, bij draaiing van het coördinatenstelsel over 90° gaat de Y - in de Z -richting over en deze laatste in de negatieve Y -richting; derhalve zal:

$$\frac{\partial d_z}{\partial y} = -\frac{\partial d_y}{\partial z} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

1) Wanneer de verandering van het magneetveld maar langzaam genoeg plaats heeft, zooals wij zullen onderstellen, mogen wij zonder merkbare fout aannemen, dat ook gedurende de verandering het veld voortdurend homogeen blijft, zoodat

\mathfrak{H} en $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ onafhankelijk van x , y en z zijn

moeten zijn, dus:

$$d_z = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} y, \quad d_y = \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} z, \quad d_x = 0 \dots \dots \dots (39)$$

voldoen aan het geheele stel vergelijkingen. Daaruit zijn de krachten, op de ladingdragers en dipolen werkende, gemakkelijk te berekenen.

Stroomdragende moleculen.

We hebben te bepalen de toename van $\delta \dot{q}_l \cos q_1$ tijdens het aanzetten van het veld. Nu kan de bewegingsvergelijking voor q_1 :

$$\frac{d}{dt} (\lambda \dot{q}_l + \mu \dot{q}_0 \cos q_1) = 0$$

ineens worden geïntegreerd:

$$\lambda \dot{q}_l + \mu \cos q_1 \dot{q}_0 = p_l \text{ (een constante)}$$

wat ons voor het moment m als functie van den tijd de vergelijking geeft:

$$m = \delta \dot{q}_l \cos q_1 = -\frac{\mu \delta}{\lambda} \dot{q}_0 \cos^2 q_1 + \frac{\delta p_l}{\lambda} \cos q_1,$$

en dus voor het moment van de volumeneenheid:

$$M = \sum m = -\frac{\mu \delta}{\lambda} \dot{q}_0 \sum \cos^2 q_1 + \frac{\delta}{\lambda} \sum p_l \cos q_1 \dots \dots \dots (40)$$

Was voor alle moleculen eerst $\dot{q}_l = 0$ en, daar $\dot{q}_0 = 0$ was, ook $p_l = 0$, dus droegen ze buiten het veld geen stroompje, dan is M negatief. Dit is het diamagnetisme, dat WEBER [24] het eerst in de werking van geïnduceerde stroompjes zocht.

Maar juist omdat p_l en ook R, p_x, p_y, p_z, p_2 en p_3 constanten zijn, is elke willekeurige verdeling der moleculen over de verschillende waarden van deze grootheden stationair. Dit maakt, dat voor moleculen met een gegeven waarde van R en een gegeven positieve waarde van p_l de som $\sum \cos q_1$ nog even goed positief als negatief kan zijn; voor één molecuul is n.l. het tijdgemiddelde van $\cos q_1$ zeker positief, als het een schommelende beweging, waarbij $|q_1| < \frac{\pi}{2}$ blijft, maakt om den door $q_1 = 0$ bepaalden evenwichtsstand en zeker negatief, als het molecuul (wat q_1 betreft) kan rondloopen. (Is p_l nega-

tief, dan keeren de twee tijdgemiddelden van $\cos q_1$ ook hun teeken om). De tweede term in het rechterlid van (40) moet het resultaat dus onbepaald maken (zie aanhangsel 21)¹⁾. Is p_1 groot t. o. van den term $\mu \dot{q}_0 \cos q_1$, dan hebben we het geval van AMPÈRE [1, p. 105], waarin de stroomdragende moleculen zich bij benadering gedragen alsof ze vaste magnetische momenten droegen.

Ladingdragende moleculen.

Uit de formules (39) leiden we de krachten Q'_1 , Q'_2 en Q'_3 af, die op het molecuul werken wegens het aangroeien van \mathfrak{H} . Deze zijn (zie aanhangsel 22):

$$\begin{aligned} Q'_1 &= 0, \\ Q'_2 &= -\frac{e\alpha}{2\rho c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{e}{2c} \frac{\beta - \alpha}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \sin^2 q_1, \\ Q'_3 &= -\frac{e\alpha}{2\rho c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \cos q_1. \end{aligned}$$

We hebben te berekenen de verandering van het magnetisch moment bij het aanzetten van het veld, dus van p_2 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= Q_2 + Q'_2, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{e\alpha}{2\rho c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{e}{2c} \frac{\beta - \alpha}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \sin^2 q_1 + \frac{e\mathfrak{H}}{2\rho c} 2 \frac{\alpha - \beta}{\beta} p_1 \sin q_1 \cos q_1. \end{aligned}$$

Integreeren we en noemen we de integratieconstante P_2 , dan krijgen we:

$$p_2 + \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} - e \frac{\alpha - \beta}{2\rho c} \mathfrak{H} \sin^2 q_1 = P_2 \quad (41)$$

¹⁾ De twee gevallen zijn te vergelijken met analoge bij een gas onder invloed van de zwaartekracht en waarin de moleculen niet botsen. Daarin is zoowel een toestand mogelijk, waarbij alle moleculen een te kleine energie hebben om boven te komen, zoodat de dichtheid boven nul is, als die, waarbij alle moleculen boven kunnen komen en daar wegens hun kleinere snelheid langer blijven, zoodat de dichtheid boven grooter is dan beneden.

²⁾ Hierin is begrepen de uitkomst, vermeld in § 12 en afgeleid in aanhangsel 11, dat $p_{20} = p_2 + \frac{e\mathfrak{H}}{2\rho c} (\alpha - \beta) \cos^2 q_1$ in een constant gehouden veld niet verandert. Immers als P_2 bij willekeurige verandering van het veld constant blijft, moet dat ook het geval zijn in een onveranderlijk veld. Het verschil tusschen p_{20} en P_2 is $\frac{e\beta}{2\rho c} \mathfrak{H}$, wat inderdaad in een constant veld niet verandert

Het magnetisch moment van het molecuul in de veldrichting $\frac{e}{2\rho c} p_2$ wordt bijgevolg:

$$\frac{e}{2\rho c} p_2 = \frac{e}{2\rho c} P_2 - \frac{e^2\alpha}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} + \frac{e^2(\alpha - \beta)}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} \sin^2 q_1.$$

Nu moet nog gesommeerd worden over alle moleculen van de volumeneenheid. De eerste term van het rechterlid geeft daarbij $\frac{e}{2\rho c} \sum P_2$. Zooals uit bovenstaande vergelijking volgt, is dit de waarde van het magnetisch moment, als $\mathfrak{H} = 0$. Wij zullen aannemen, dat dit nul is, waartoe noodig is, dat $\sum P_2 = 0$ is. Zijn er N moleculen in de volumeneenheid, dan wordt dus de uitkomst:

$$\sum \frac{e}{2\rho c} p_2 = -\frac{e^2\alpha}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} N + \frac{e^2(\alpha - \beta)}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} \sum \sin^2 q_1.$$

$\sum \sin^2 q_1$ zal, zoolang er geen veld is, $\frac{2N}{3}$ bedragen, omdat alle standen van de \bar{x} -as dan evenveel zullen voorkomen. In het veld zal de waarde van de bedoelde som van $\frac{2N}{3}$ afwijken met een bedrag, dat van \mathfrak{H} afhankelijk is. Zoolang we ons beperken tot een uitkomst, die lineair is in de veldsterkte, mogen we $\sum \sin^2 q_1$ ook in het veld door $\frac{2N}{3}$ vervangen, omdat die som nog met \mathfrak{H} vermenigvuldigd wordt, zoodat we vinden:

$$M = \sum \frac{e}{2\rho c} p_2 = -\frac{e^2\alpha}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} N + \frac{e^2(\alpha - \beta)}{4\rho^2 c^2} \mathfrak{H} \frac{2N}{3} = -\frac{e^2(\alpha + 2\beta)N}{12\rho^2 c^2} \mathfrak{H}.$$

Dit diamagnetische effect berekende VOIGT [23] in de onderstelling, dat het veld plotseling wordt aangebracht.

Uit de hier verkregen uitkomst blijkt, dat, als in een gas met ladingdragende moleculen geen botsingen voorkomen, het gas zich diamagnetisch gedraagt. Het paramagnetisme, dat we in § 13 bij zulk een gas vonden, was dus bepaaldelijk aan de botsingen te danken.

Dipolen.

Ter vereenvoudiging zullen we hier het positieve deeltje van elk molecuul in rust onderstellen en het negatieve daaraan door een quasi-

elastische kracht gebonden. Dan zijn $x_\alpha = X$, $y_\alpha = Y$ en $z_\alpha = Z$ constanten, we stellen $x_\beta = X + x$, $y_\beta = Y + y$ en $z_\beta = Z + z$.

De verandering van het magnetisch moment is dan gedurende het aanzetten van het veld per tijdseenheid:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= -\frac{e}{2c} \frac{d}{dt} (y_\beta \dot{z}_\beta - z_\beta \dot{y}_\beta) = -\frac{e}{2c} \{ (Y+y)\ddot{z} - (Z+z)\ddot{y} \} = \\ &= -\frac{e}{2c} \left[(Y+y) \left\{ -\frac{R}{m} z + \frac{e}{mc} \dot{y} \mathfrak{H} + \frac{e}{2mc} \mathfrak{H} (y+Y) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - (Z+z) \left\{ -\frac{R}{m} y - \frac{e}{mc} \dot{z} \mathfrak{H} - \frac{e}{2mc} \mathfrak{H} (z+Z) \right\} \right], \end{aligned}$$

als R de constante van de quasi-elastische kracht is.

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{e}{2c} \left[\frac{R}{m} (Zy - Yz) + \frac{e}{2mc} \frac{d}{dt} \{ \mathfrak{H} ([z+Z]^2 + [y+Y]^2) \} \right].$$

De tweede term hiervan kan ineens worden geïntegreerd, voor den eersten zullen we nog eerst wat anders in de plaats zetten. We kunnen n.l. door integreren der bewegingsvergelijkingen, in het geval, dat \mathfrak{H} zeer klein is, dat we termen met \mathfrak{H}^2 mogen verwaarloozen en als we ons tot eerste machten van \mathfrak{H} en $\dot{\mathfrak{H}}$ beperken, vinden: (zie aanhangsel 23)

$$\begin{aligned} y &= A \cos \nu t \cos \vartheta + B \sin \nu t \cos \vartheta - C \cos \nu t \sin \vartheta - D \sin \nu t \sin \vartheta - \frac{e \mathfrak{H} Z}{2c m \nu^2}, \\ z &= A \cos \nu t \sin \vartheta + B \sin \nu t \sin \vartheta + C \cos \nu t \cos \vartheta + D \sin \nu t \cos \vartheta + \frac{e \mathfrak{H} Y}{2c m \nu^2}, \end{aligned}$$

waarin A, B, C en D integratieconstanten zijn, $\nu^2 = \frac{R}{m}$ en $\vartheta = \int \frac{e \mathfrak{H}}{2mc} dt$.

De eerste vier termen in y en z hebben in den loop van den tijd afwisselend positieve en negatieve waarden. Voor een bepaalde waarde van t hangt het positief of negatief zijn van de phase van de beweging af. Voor de verschillende moleculen zal die phase alle mogelijke waarden kunnen aannemen. Wij mogen daarom wel aannemen, dat de bedoelde termen in $M = \sum \mu$ niets opleveren. We laten ze dus weg, dan blijft over:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} (=) & \frac{R}{m} \frac{e^2}{4c^2 m \nu^2} \mathfrak{H} (Z^2 + Y^2) - \frac{e^2}{4mc^2} \frac{d}{dt} [\mathfrak{H} \{ (z+Z)^2 + (y+Y)^2 \}]. \\ \mu (=) & - \frac{e^2}{4c^2 m} \mathfrak{H} [z^2 + y^2 + 2zZ + 2yY]. \end{aligned}$$

In $zZ + yY$ hebben we alleen termen, die een positief of negatief teeken hebben in afhankelijkheid van de phase van de beweging, we nemen aan, dat deze bij de sommatie over alle moleculen dus weer niets opleveren, zoodat slechts overblijft:

$$M = \sum \mu = - \frac{e^2}{4mc^2} \sum (y^2 + z^2),$$

dus weer een diamagnetisch effect.

THOMSON vond in dit geval geen magnetische werking [22], omdat hij met de inductiekrachten geen rekening hield. VOIGT vond hetzelfde resultaat [23] als THOMSON, hoewel hij elektrische krachten invoert, omdat hij die alleen als stoot laat werken in een bepaald punt van de baan (het veld denkt hij instantaan aangezet). Deze stooten kunnen natuurlijk nooit een rondloopen der electronen in een bepaalde richting veroorzaken.

LANGEVIN leidde dit magnetisch effect af voor moleculen, waarbij ondersteld werd, dat zekere integralen of sommen over het molecuul uitgestrekt altijd nul blijven [13] en professor LORENTZ [15, 16] voor het geval dat het veld symmetrisch is om de lijn evenwijdig aan de X -as door den evenwichtsstand van het electron gebracht.

§ 24. **Samenvatting van het behandelde en bespreking van moeilijkheden, verbonden aan een electronentheorie van het magnetisme.**

De uitkomsten van het voorgaande samenvattende, besluiten wij, dat het mogelijk is onderstellingen over den bouw van een uit geladen deeltjes bestaand gasmolecuul te maken van zoodanigen aard, dat het gas paramagnetisch, diamagnetisch of niet magnetisch is. Dit is in tegenspraak met het besluit, waartoe KROO kwam en voor het geval van para- en diamagnetisme in overeenstemming met de uitkomsten van LANGEVIN. Echter is het niet van zelf sprekend, zooals LANGEVIN aanneemt, dat alle moleculen éven groote magnetische momenten hebben; integendeel, indien het molecuul uit afzonderlijke geladen deeltjes is opgebouwd, zal alleen in zeer bijzondere gevallen het moleculaire moment bij botsingen der moleculen onveranderd blijven. Een van de moeilijkheden voor een moleculaire theorie van het magnetisme ligt juist

in de beantwoording der vraag, waarom het moleculaire moment niet (door botsingen) alle mogelijke waarden aanneemt. Is het laatste het geval, dan is in het voorgaande bewezen, dat het gas niet magnetisch is. Als tweede moeilijkheid blijft nog, een verklaring te geven, waarom we, zooals hier gedaan is, mogen afzien van straling, indien een molecuul samengesteld is uit rondlopende, electricisch geladen deeltjes en toch moeten we er van afzien, omdat anders geen stationaire toestand kan bestaan. Mogelijk moeten we aannemen, dat de bewegingen der geladen deeltjes in het molecuul regelmatigheden vertoonen, waardoor de straling uiterst zwak wordt (verg. [22] en G. A. SCHOTT, *Electromagnetic Radiation* 1912 p. 102—110), mogelijk moet hiervoor de oplossing in een quantatheorie worden gezocht (verg. BOHR, *Phil. Mag.*, 6, 26, 1913, p. 1).

Wat het gedrag van vrije electronen in metalen betreft, vindt men in het voorgaande de uitkomst, door prof. LORENTZ verkregen, dat deze aan het metaal geen magnetisch moment geven, in tegenstelling met de uitkomsten van THOMSON, VOIGT en SCHRÖDINGER.

A A N H A N G S E L.

1 (bij blz. 5). In elk punt wordt de bewegingslijn met zekere snelheid doorlopen. Stel die snelheid v_1 en v_2 respectievelijk vóór het bereiken van dC_1 en dC_2 en v'_1 na het verlaten van dC'_1 . Om de cilindervolumes $d\mu_1$, $d\mu_2$ en $d\mu'_1$ te krijgen, moeten we dus op de bewegingslijnen vanaf dC_1 , dC_2 en dC'_1 afzetten: $v_1 dt$, $v_2 dt$ en $v'_1 dt$. Wij zullen nu $d\mu_1$, $d\mu_2$ en $d\mu'_1$ voor de elementen schrijven, als we als coördinaten (dus als maat) gebruiken de coördinaten en daarbij passende momenten der twee moleculen, elk voor zich, $\overline{d\mu_1}$, $\overline{d\mu_2}$ en $\overline{d\mu'_1}$ daarentegen, als we als coördinaten gebruiken de coördinaten van het zwaartepunt van het paar: x, y, z , de relatieve coördinaten ξ, η, ζ en de inwendige coördinaten $q_v^{(1)}$ en $q_v^{(2)}$ van elk molecuul en alle daarbij passende momenten: $p_x, p_y, p_z, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, p_v^{(1)}, p_v^{(2)}$. De coördinaten der zwaartepunten van de twee moleculen noemen we $q_x^{(1)}, q_y^{(1)}, q_z^{(1)}, q_x^{(2)}, q_y^{(2)}, q_z^{(2)}$ en de er bij passende momenten $p_x^{(1)} \dots p_z^{(2)}$.

We berekenen eerst het aantal molecuulparen, die in $d\mu_1$ liggen, voor het bijzondere geval; dat $d\mu_1$ een product is van elementen $d\omega_1^{(1)}$ en $d\omega_1^{(2)}$ in de phaseuitgebreidheid voor één molecuul, waarin resp. het 1e en 2e molecuul liggen, als het paar ligt in $d\mu_1$.

Als er $f^{(1)} d\omega_1^{(1)}$ moleculen in $d\omega_1^{(1)}$ liggen en $f^{(2)} d\omega_1^{(2)}$ moleculen in $d\omega_1^{(2)}$ en het voorkomen van de moleculen in de elementen $d\omega_1^{(1)}$ en $d\omega_1^{(2)}$ onderling onafhankelijke gebeurtenissen zijn, dan zijn er $f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\omega_1^{(1)} d\omega_1^{(2)}$ molecuulparen met 't 1e molecuul in $d\omega_1^{(1)}$ en het 2e in $d\omega_1^{(2)}$, dus paren, die liggen in $d\mu_1$; maar $d\mu_1 = d\omega_1^{(1)} d\omega_1^{(2)}$, dus:

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} d\mu_1$$

1) $d\mu'_1$ is het cilindertje, doorlopen door de toestandspunten der molecuulparen, wier bewegingslijn tusschen t en $t + dt$ op dC_1 eindigt en op dC'_1 weer begint, in het tijdselement dt , dat voor elk paar op de botsing volgt.

is het aantal moleculparen, dat op den tijd t in $d\mu_1$ ligt. Daar het aantal moleculparen, in een element $d\mu$ gelegen, evenredig is met dit element, moet de formule bij willekeurige begrenzing van $d\mu_1$ juist blijven.

Evenzoo is het aantal paren in $\overline{d\mu_1}$:

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} \overline{d\mu_1},$$

omdat:

$$d\mu_1 = \overline{d\mu_1},$$

want:

$$\overline{d\mu_1} = \frac{\partial(x, y, z, p_x, p_y, p_z, \xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, q_1^{(1)} \dots q_v^{(1)} \dots, q_1^{(2)} \dots q_v^{(2)} \dots, p_1^{(1)} \dots p_v^{(1)} \dots, p_1^{(2)} \dots p_v^{(2)} \dots)}{\partial(q_x^{(1)}, q_y^{(1)}, q_z^{(1)}, p_x^{(1)}, p_y^{(1)}, p_z^{(1)}, q_x^{(2)}, q_y^{(2)}, q_z^{(2)}, p_x^{(2)}, p_y^{(2)}, p_z^{(2)}, p_1^{(1)} \dots p_v^{(1)} \dots, q_1^{(2)} \dots q_v^{(2)} \dots, p_1^{(2)} \dots p_v^{(2)} \dots)} d\mu_1,$$

$$\overline{d\mu_1} = \frac{\partial(x, y, z, p_x, p_y, p_z, \xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta)}{\partial(q_x^{(1)}, q_y^{(1)}, q_z^{(1)}, p_x^{(1)}, p_y^{(1)}, p_z^{(1)}, q_x^{(2)}, q_y^{(2)}, q_z^{(2)}, p_x^{(2)}, p_y^{(2)}, p_z^{(2)})} d\mu_1.$$

Nu is:

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= x - \xi, & q_y^{(1)} &= y - \eta, & q_z^{(1)} &= z - \zeta, & p_x^{(1)} &= \frac{1}{2}(p_x - p_\xi), \\ p_y^{(1)} &= \frac{1}{2}(p_y - p_\eta), & p_z^{(1)} &= \frac{1}{2}(p_z - p_\zeta), \\ q_x^{(2)} &= x + \xi, & q_y^{(2)} &= y + \eta, & q_z^{(2)} &= z + \zeta, & p_x^{(2)} &= \frac{1}{2}(p_x + p_\xi), \\ p_y^{(2)} &= \frac{1}{2}(p_y + p_\eta), & p_z^{(2)} &= \frac{1}{2}(p_z + p_\zeta). \end{aligned}$$

$$d\mu_1 = \overline{d\mu_1} \times \frac{1}{64} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \overline{d\mu_1}.$$

2 (bij blz. 7). Om uit het theorema van LIOUVILLE te bewijzen, dat $d\mu_1 = d\mu_2$, toonen wij aan, dat zoowel $d\mu_1$ als $d\mu_2$ gelijk zijn aan het op blz. 81 genoemde cylindertje $d\mu'_1$. Wat het eerste betreft, merken wij op, dat de moleculparen, die op den tijd t in $d\mu_1$ liggen, niet tegelijkertijd in $d\mu'_1$ liggen, omdat de botsing niet voor alle even lang duurt. De botsingsduur zal echter voor de verschillende paren slechts zeer weinig verschillen, omdat voor de botsing slechts een zeer

kleine speelruimte is gelaten. Stel nu, dat τ de langste botsingsduur is, dan is op den tijd $t + dt + \tau$ voor alle beschouwde paren de botsing afgeloopen. Stel dat ze dan liggen in een gebied $d\mu''_1$. Volgens de stelling van LIOUVILLE is dan $d\mu_1 = d\mu''_1$. Echter zijn de afwijkingen van $d\mu'_1$ en $d\mu''_1$ te verwaarloozen (ze zijn klein ten opzichte van elk dier elementen, omdat het verschil in botsingsduur klein is), dus is ook $d\mu_1 = d\mu'_1$.

Nu moeten we nog bewijzen, dat $d\mu'_1 = d\mu_2$. Als we aan $d\mu'_1$ een cylindertje $d\mu$ toevoegen door aan alle punten van $d\mu'_1$ punten met tegengestelde waarden van ξ , η en ζ en gelijke waarden van alle andere coördinaten toe te voegen, dan is: $d\mu'_1 = d\mu^1$). Ze hebben, even als $d\mu'_1$ en $d\mu_2$ de grondvlakken dC'_1 en dC_2 . Hun hoogten krijgen we uit de verschillen der coördinaten der overeenkomstige punten van grond- en bovenzvlak:

$$x'_1 dt, y'_1 dt, z'_1 dt, \xi'_1 dt, \eta'_1 dt, \zeta'_1 dt, q'_1 dt, \dots q'_v dt, \dots p'_1 dt, \dots p'_v dt, \dots$$

en de richtingsconstanten van den normaal van het oppervlak

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} B^2, \text{ dat zijn: } 0, 0, 0, \frac{2\xi}{B}, \frac{2\eta}{B}, \frac{2\zeta}{B}, 0, \dots, 0,$$

als volgt:

$$\frac{2 | \xi \xi'_1 + \eta \eta'_1 + \zeta \zeta'_1 | dt}{B}$$

Deze is dus voor $d\mu'_1$ en $d\mu$ hetzelfde, dus zijn ook hun grondvlakken even groot, dus $dC'_1 = dC_2$.

Van $d\mu'_1$ en $d\mu_2$ zijn dus de grondvlakken even groot en de hoogten:

$$\frac{2 | \xi_1 \xi'_1 + \eta_1 \eta'_1 + \zeta_1 \zeta'_1 | dt}{B} \text{ en } \frac{2 | \xi_2 \xi_2 + \eta_2 \eta_2 + \zeta_2 \zeta_2 | dt}{B}$$

ook, dus $d\mu'_1 = d\mu_2$.

3 (bij blz. 11). Stel L was behalve van de coördinaten q_v^* en de daarbij behorende snelheidscomponenten nog functie van coördinaten q_λ ($\lambda = 1 \dots l$) en de erbij passende \dot{q}_λ 's. We gaan nu voor de coör-

¹⁾ We merken op, dat de cylinders $d\mu$ en $d\mu_2$ het grondvlak dC_2 gemeen hebben, maar niet samenvallen. Men kan de punten van het bovenzvlak van deze twee cylinders zoodanig aan elkaar toevoegen, dat ze dezelfde waarden van ξ , η en ζ hebben, maar dan hebben ze verschillende waarden van x , y en z .

dinaten $q_v^{(*)}$ op momenten over in plaats van de snelheidscomponenten, maar behouden de snelheidscomponenten \dot{q}_λ ¹⁾. We zullen dan voor alle coördinaten de bewegingsvergelijkingen afleiden, die met behulp van de functie R , gedefinieerd door:

$$R = \sum_{v, \kappa} \frac{\partial L}{\partial q_v^{(*)}} \dot{q}_v^{(*)} - L = \sum_{v, \kappa} p_v^{(*)} \dot{q}_v^{(*)} - L \dots \dots \dots (I)$$

zeer eenvoudig te schrijven zijn. De functie R wordt uitgedrukt in de grootheden q , \dot{q} , q en p . Geven we n.l. aan de coördinaten en momenten willekeurige oneindig kleine aangroeiingen, dan moet de vergelijking (I) nog steeds gelden, dus:

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \frac{\partial R}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta \dot{q}_\lambda + \sum_{v, \kappa} \frac{\partial R}{\partial q_v^{(*)}} \delta q_v^{(*)} + \sum_{v, \kappa} \frac{\partial R}{\partial p_v^{(*)}} \delta p_v^{(*)} &= \sum_{v, \kappa} p_v^{(*)} \delta \dot{q}_v^{(*)} + \\ + \sum \dot{q}_v^{(*)} \delta p_v^{(*)} - \sum_{v, \kappa} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v^{(*)}} \delta \dot{q}_v^{(*)} - \sum_{v, \kappa} \frac{\partial L}{\partial q_v^{(*)}} \delta q_v^{(*)} - \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda - \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta \dot{q}_\lambda. \end{aligned}$$

De termen met $\delta \dot{q}_v^{(*)}$ vallen weg, de variaties δq , δp , δq en $\delta \dot{q}$ zijn onafhankelijk, dus moet elk hunner coëfficiënten nul zijn of:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial q_v^{(*)}} &= - \frac{\partial L}{\partial q_v^{(*)}}, & \frac{\partial R}{\partial p_v^{(*)}} &= \dot{q}_v^{(*)}, \\ \frac{\partial R}{\partial q_\lambda} &= - \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}, & \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\lambda} &= - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \dots \dots \dots (II) \end{aligned}$$

We hadden voor alle coördinaten bewegingsvergelijkingen in den vorm van LAGRANGE, dus nu worden ze:

$$\begin{aligned} \dot{p}_v^{(*)} &= - \frac{\partial R}{\partial q_v^{(*)}} + Q_v^{(*)} + Q_v^{(*)'}, & \dot{q}_v^{(*)} &= \frac{\partial R}{\partial p_v^{(*)}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_\lambda} &= - \mathfrak{Q}_\lambda - \mathfrak{Q}_\lambda'. \end{aligned}$$

Uit deze afleiding (vgl. [18] I p. 318) blijkt, dat de vergelijkingen alle den kanonischen vorm zouden aannemen, als we voor alle coördinaten momenten in plaats van snelheidscomponenten invoerden

¹⁾ In de toepassing, die we hiervan maken, zal er maar één q zijn, die we dan q_0 noemen n.l. de coördinaat, waarvan de fluxie de stroomsterkte van het uitwendige stroomstelsel meet.

en de transformatie, die ons van L op R brengt ook voor alle coördinaten uitvoerden; slechts dan zullen we van een functie van HAMILTON spreken. Deze laatste is identiek met de energie, R in 't algemeen niet.

4 (bij blz. 15). Dit hangt ermee samen, dat de massa der bewegende electriciteit zoo klein is, want feitelijk heeft deze behalve de snelheid \dot{q}_1 nog die van het bewegende molecuul. Was de massa dus van belang, dan zouden zeker ook termen met b.v. $(\dot{q}_3 + \dot{q}_1)^2$ als factor optreden, dus ook producttermen.

5 (bij blz. 15). Wanneer de stroomsterkte van het uitwendige stelsel en de veldsterkte in elkander uitgedrukt worden door

$$\mu \dot{q}_0 = \mu' \mathfrak{H}$$

dan moet

$$\delta = \mu'$$

zijn. Dit volgt uit de theorie der stroomen op de volgende manier.

De coëfficiënt van wederkeerige inductie is het aantal krachtlijnen, dat één van beide stroomketens, stel de uitwendige, als deze de eenheid van stroomsterkte heeft, stuurt door het vlak van de andere.

Als het oppervlak van de moleculaire stroombaan O is, vinden we dus voor dien coëfficiënt: $O \frac{\mathfrak{H}}{\dot{q}_0} \cos q_1$ en voor den term in de functie van LAGRANGE, als i de stroomsterkte in het molecuul is:

$$i \dot{q}_0 O \frac{\mathfrak{H}}{\dot{q}_0} \cos q_1 = \mu \dot{q}_1 \dot{q}_0 \cos q_1 = \mu' \mathfrak{H} \dot{q}_1 \cos q_1,$$

dus:

$$\mu' = \frac{i \dot{q}_0 O}{\mathfrak{H} \dot{q}_1} \frac{\mathfrak{H}}{\dot{q}_0} = \frac{i O}{\dot{q}_1}.$$

De component van het magnetisch moment langs de X -as is het product van stroomsterkte en oppervlak vermenigvuldigd met $\cos q_1$,

dus:

$$i O \cos q_1 = \delta \dot{q}_1 \cos q_1$$

$$\delta = \frac{i O}{\dot{q}_1}$$

dus $\mu' = \delta$.

Wij kunnen het nog op een andere manier afleiden, waaruit tevens blijkt, hoe we ook tot een uitdrukking voor de functie van LAGRANGE kunnen komen, die dezelfde gedaante heeft als de in

§ 5 gebruikte zonder dat de term $\mu \dot{q}_l \dot{q}_0 \cos q_1$ wordt ontleend aan de theorie der stroomen ¹⁾. Deze afleiding gaf KROO het eerst [12].

Hij maakte daartoe gebruik van den vorm, waarin SCHWARZSCHILD de kracht op geladen deeltjes had gebracht [20]. Voor die kracht is n.l. te schrijven:

$$Q_v^* = \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_v^*} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \dot{q}_v^*} \right),$$

waarin:

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \int (\rho v_x a_x + \rho v_y a_y + \rho v_z a_z) dS,$$

als dS een ruimte-element is, waarin de lading met dichtheid ρ beweegt met snelheid v in een veld met vectorpotentiaal a ; geïntegreerd wordt over het geheele systeem van moleculen. Dit geldt voor gevallen, waarin er geen electrostatische werkingen zijn.

SCHWARZSCHILD toonde aan, dat de kracht in dezen vorm kan worden geschreven, als rigide deeltjes translatiebewegingen uitvoeren met de snelheden v in een gegeven veld, bepaald door a . LORENTZ [14 p. 160] laat zien, dat de kracht in een stelsel met willekeurig bewegende ladingen, die zelf ook het veld a teweegbrengen op dezelfde manier is af te leiden uit:

$$\varepsilon' = \frac{1}{2c} \int (\rho v_x a_x + \rho v_y a_y + \rho v_z a_z) dS,$$

waarbij ook over het uitwendige stelsel moet worden geïntegreerd.

Bij de ingevoerde beperkingen zullen we zien, dat de integraal ε' symmetrisch wordt in de snelheden der moleculen en van het uitwendige stelsel, zoodat men alleen over de moleculen mag integreeren en a daarbij nemen als beantwoordende aan het uitwendig veld, als men maar met 2 vermenigvuldigd; dan krijgt men juist ε .

Voor quasi-stationaire stelsels mag voor a worden geschreven:

$$a = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\rho' v'}{r} dS$$

te integreeren over het systeem, dat a levert, waarin $\rho' v'$ gelijktijdige waarden zijn, zoodat ε symmetrisch wordt in de snelheden der moleculen en van het uitwendig stelsel. (De kracht op het laatste uitgeoefend, moet dus even goed uit ε te berekenen zijn). Nu is voor

¹⁾ We zullen de afleiding alleen voor den bedoelden term geven.

de stroomdragende moleculen de dichtheid ρ overal nul, alleen de stroomsnelheid ρv niet, de integralen:

$$\begin{aligned} & \int \rho dS, \\ \int \rho x dS, & \quad \int \rho x^2 dS, & \quad \int \rho yz dS, \\ \int \rho y dS, & \quad \int \rho y^2 dS, & \quad \int \rho zx dS, \\ \int \rho z dS, & \quad \int \rho z^2 dS, & \quad \int \rho xy dS \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

zijn dus alle nul (x , y en z zijn daarbij coördinaten t. o. van een willekeurigen oorsprong in één molecuul). De integralen over elk molecuul zijn nul. Bij ontwikkelen van a_x , a_y , a_z naar x , y en z over elk molecuul (waarbij alleen 1^o machten van x , y en z worden behouden) krijgt men daardoor alleen:

$$\begin{aligned} \int_{(1 \text{ mol.})} (\rho v \cdot a) dS &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)_0 \right] \int (\rho v_z y - \rho v_y z) dS + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)_0 \right] \int (\rho v_x z - \rho v_z x) dS + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)_0 \right] \int (\rho v_y x - \rho v_x y) dS, \quad 1) \end{aligned}$$

als de waarden in den oorsprong met 0 worden aangeduid.

Maar als:

$$m_x^{(*)} = \frac{1}{2c} \int_{(*) \text{ mol.}} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \rho dS, \quad m_y^{(*)} = \frac{1}{2c} \int_{(*) \text{ mol.}} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \rho dS,$$

$$m_z^{(*)} = \frac{1}{2c} \int_{(*) \text{ mol.}} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \rho dS,$$

1) Want omdat de uitdrukkingen (III) ten allen tijde nul zijn, zijn ook hun differentiaalquotienten naar den tijd nul, dus b. v.:

$$\int \rho v_x dS = 0, \quad \int \rho x v_x dS = 0, \quad \int \rho (y v_x + z v_y) dS = 0,$$

enz.

dan is $m^{(x)}$ het magnetisch moment van het x^{de} molecuul. Nu is

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_0 = \mathfrak{H}, \quad \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

als \mathfrak{H} de richting der X -as heeft, dus voor zoover de wisselwerking betreft tusschen uitwendig en moleculair stelsel krijgen we voor ε :

$$\varepsilon = \mathfrak{H} \sum m_x^{(x)} = \mathfrak{H} \sum \delta \dot{q}_l \cos q_1 = \sum \mu' \dot{q}_l \mathfrak{H} \cos q_1,$$

omdat $m_x^{(x)} = \delta \dot{q}_l \cos q_1$. Door vergelijking van de nu afgeleide tweede uitdrukking voor ε met de vroeger gebruikte derde, hebben we tevens bewezen, dat $\mu' = \delta$ is.

6 (bij blz. 17). We krijgen voor de momenten, indien we een volledige transformatie uitvoeren:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{q}_x, & p_y &= m\dot{q}_y, & p_z &= m\dot{q}_z, \\ p_1 &= \beta \dot{q}_1, & p_2 &= \alpha(\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) \cos q_1 + \beta \dot{q}_2 \sin^2 q_1, \\ p_3 &= \alpha(\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3), & p_l &= \lambda \dot{q}_l + \mu \dot{q}_0 \cos q_1, \\ p_0 &= \nu \dot{q}_0 + \sum_x \mu \dot{q}_l^{(x)} \cos q_1^{(x)}, \end{aligned}$$

en voor de energie:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{v,x} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v^{(x)}} \dot{q}_v^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 - L = \sum_{v,x} p_v^{(x)} \dot{q}_v^{(x)} + p_0 \dot{q}_0 - L = \\ &= L^1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{v,x} p_v^{(x)} \dot{q}_v^{(x)} + p_0 \dot{q}_0 \right] = \\ &= \sum_x \left[\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} \right] + \sum_x p_l^x \dot{q}_l^x + p_0 \dot{q}_0. \quad ^2) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_l^x = \frac{p_l^x - \mu \dot{q}_0 \cos q_1^x}{\lambda}, \quad \dot{q}_0 = \frac{p_0 - \sum_x \mu \dot{q}_l^x \cos q_1^x}{\nu},$$

1) $E = L$ volgt ook direct daaruit, dat er geen potentiële energie is.

2) De haakjes om den index x zijn in dit nummer van het aanhangsel van hier af weggelaten.

$$\dot{q}_0 = \frac{p_0}{\nu} - \sum_x \frac{\mu}{\nu} \cos q_1^x \frac{p_i^x - \mu \dot{q}_0 \cos q_1^x}{\lambda}, \quad \dot{q}_0 = \frac{\frac{p_0}{\nu} - \sum_x \frac{\mu}{\nu\lambda} p_i^x \cos q_1^x}{1 - \sum_x \frac{\mu^2}{\nu\lambda} \cos^2 q_1^x}$$

$$\dot{q}_1^x = \frac{p_i^x}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \cos q_1^x \frac{\frac{p_0}{\nu} - \sum_x \frac{\mu}{\nu\lambda} p_i^x \cos q_1^x}{1 - \sum_x \frac{\mu^2}{\nu\lambda} \cos^2 q_1^x}.$$

$$E = \sum_x \left[\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} \right] +$$

$$+ \sum_x p_i^x \left\{ \frac{p_i^x}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \cos q_1^x \frac{\frac{p_0}{\nu} - \sum_x \frac{\mu}{\nu\lambda} p_i^x \cos q_1^x}{1 - \sum_x \frac{\mu^2}{\nu\lambda} \cos^2 q_1^x} \right\} + p_0 \frac{\frac{p_0}{\nu} - \sum_x \frac{\mu}{\nu\lambda} p_i^x \cos q_1^x}{1 - \sum_x \frac{\mu^2}{\nu\lambda} \cos^2 q_1^x}$$

7 (bij blz. 20). Stel het raakpunt op een der ellipsoïdes zij M , laat de ligging daarvan bepaald worden door den hoek A tusschen het door M gaande meridiaanvlak $\Xi OH'$ en vlak ΞOH , en door den hoek B tusschen den voerstraal OM en de doorsnede OH' van vlak $\Xi OH'$ met vlak HOZ . De coördinaten van M zijn dan:

$$\xi = a \sin B, \quad \eta = b \cos B \cos A, \quad \zeta = b \cos B \sin A.$$

De componenten van den stoot Q langs de assen OX, OY, OZ zijn:

$$Q_x = p'_x - p_x, \quad Q_y = p'_y - p_y, \quad Q_z = p'_z - p_z.$$

Leiden we hieruit de componenten volgens $O\xi, OH$ en OZ af, en drukken we uit, dat die evenredig zijn met de richtingscosinussen van den normaal ten opzichte van die assen, dan vinden wij, als q een constante is en we voor den cosinus van den hoek tusschen OX en $O\xi$ schrijven: $(X\xi)$ enz.:

$$Q_\xi = (p'_x - p_x)(X\xi) + (p'_y - p_y)(Y\xi) + (p'_z - p_z)(Z\xi) = qb \sin B,$$

$$Q_\eta = (p'_x - p_x)(XH) + (p'_y - p_y)(YH) + (p'_z - p_z)(ZH) = qa \cos B \cos A,$$

$$Q_\zeta = (p'_x - p_x)(XZ) + (p'_y - p_y)(YZ) + (p'_z - p_z)(ZZ) = qa \cos B \sin A,$$

waaruit we vinden:

$$\sin B = - \frac{a Q_{\xi}}{\sqrt{a^2 Q_{\xi}^2 + b^2 (Q_{\eta}^2 + Q_{\zeta}^2)}} \dots \dots \dots (IV)$$

Voor het moment van hoeveelheid van beweging om OΞ, OH, OZ vinden we:

$$p_3, \quad p_1 \sin q_3 - \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \cos q_3, \quad p_1 \cos q_3 + \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \sin q_3.$$

De verandering daarvan moet gelijk zijn aan de momenten van Q om OΞ, OH, OZ, dus:

$$\begin{aligned} \eta Q_{\zeta} - \zeta Q_{\eta} &= p'_3 - p_3 = b \cos B \cos A q a \cos B \sin A - b \cos B \sin A q a \cos B \cos A = 0, \\ \zeta Q_{\xi} - \xi Q_{\zeta} &= b \cos B \sin A q b \sin B - a \sin B q a \cos B \sin A = q(b^2 - a^2) \sin A \sin B \cos B \\ \xi Q_{\eta} - \eta Q_{\xi} &= a \sin B q a \cos B \cos A - b \cos B \cos A q b \sin B = q(a^2 - b^2) \cos A \sin B \cos B \end{aligned} \quad (V)$$

$$\begin{aligned} \zeta Q_{\xi} - \xi Q_{\zeta} &= \left(p'_1 \sin q_3 - \cos q_3 \frac{p'_2 - p'_3 \cos q_1}{\sin q_1} \right) - \left(p_1 \sin q_3 - \cos q_3 \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \right) \\ \xi Q_{\eta} - \eta Q_{\xi} &= \left(p'_1 \cos q_3 + \frac{p'_2 - p'_3 \cos q_1}{\sin q_1} \sin q_3 \right) - \left(p_1 \cos q_3 + \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \sin q_3 \right) \end{aligned} \quad (VI)$$

Voor (V) is ook te schrijven:

$$\begin{aligned} \zeta Q_{\xi} - \xi Q_{\zeta} &= \frac{b^2 - a^2}{a} Q_{\zeta} \sin B = (a^2 - b^2) \frac{Q_{\xi} Q_{\zeta}}{\sqrt{a^2 Q_{\xi}^2 + b^2 (Q_{\eta}^2 + Q_{\zeta}^2)}}, \\ \xi Q_{\eta} - \eta Q_{\xi} &= \frac{a^2 - b^2}{a} Q_{\eta} \sin B = - (a^2 - b^2) \frac{Q_{\xi} Q_{\eta}}{\sqrt{a^2 Q_{\xi}^2 + b^2 (Q_{\eta}^2 + Q_{\zeta}^2)}}, \end{aligned} \quad (VII)$$

wegens (II).

Uit (VI) en (VII) volgt dan door vergelijken, als men ook de betrekkingen tusschen Q_{ξ} , Q_{η} , Q_{ζ} en Q_x , Q_y , Q_z in aanmerking neemt:

$$p'_1 - p_1 = (b^2 - a^2) Q_{\xi} \frac{(p'_x - p_x)(-\sin q_1) + (p'_y - p_y) \cos q_1 \cos q_2 + (p'_z - p_z) \cos q_1 \sin q_2}{\sqrt{a^2 Q_{\xi}^2 + b^2 (Q_{\eta}^2 + Q_{\zeta}^2)}}$$

en:

$$\frac{p'_2 - p_2}{\sin q_1} = (b^2 - a^2) Q_\xi \frac{(p'_y - p_y)(-\sin q_2) + (p'_z - p_z) \cos q_2}{\sqrt{a^2 Q_\xi^2 + b^2 (Q_y^2 + Q_z^2)}}.$$

8 (bij blz. 22). Wij hebben eerste integralen van de beweging zonder botsingen te bepalen en gaan dus uit van de bewegingsvergelijkingen:

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial R}{\partial q_v}, \quad \dot{q}_v = \frac{\partial R}{\partial p_v}, \quad \text{waarin:}$$

$$R = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} + \frac{1}{2\lambda} (p_l^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1).$$

Daar q_x, q_y, q_z, q_2, q_3 en q_l niet in R voorkomen, hebben we:

$$\dot{p}_x = \dot{p}_y = \dot{p}_z = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = \dot{p}_l = 0,$$

dus: $p_x = p_{x0}, p_y = p_{y0}, p_z = p_{z0}, p_2 = p_{20}, p_3 = p_{30}, p_l = p_{l0}$,

als we met den toegevoegden index 0 constanten aanduiden.

We hadden al (§ 5) $R = R_0$, zoodat we krijgen:

$$\frac{1}{2\beta} p_1^2 + \frac{1}{2\beta \sin^2 q_1} (p_{20} - p_{30} \cos q_1)^2 + \frac{1}{2\lambda} (p_{l0}^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_{l0} \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1) = c_0,$$

$$\text{als} \quad c_0 = R_0 - \frac{1}{2m} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2) - \frac{1}{2\alpha} p_{30}^2.$$

Voeren we hier in: $p_1 = \beta \dot{q}_1$,

dan komt er:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1^2 \sin^2 q_1 &= \frac{2c_0}{\beta} (1 - \cos^2 q_1) - \frac{1}{\beta^2} (p_{20} - p_{30} \cos q_1)^2 - \\ &- \frac{(1 - \cos^2 q_1)}{\lambda \beta} (p_{l0}^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_{l0} \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1) \equiv F(\cos q_1). \end{aligned}$$

Stel $x = \cos q_1$, dan is:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} &= dt, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} &= t - t_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{p_2 - p_3 x}{\beta(1-x^2)}, \quad \text{dus } q_2 = \int \frac{p_2 - p_3 x}{\beta(1-x^2)} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} + q_{20}, \\ \dot{q}_3 &= \frac{p_3}{\alpha} - \frac{p_2 - p_3 x}{\beta(1-x^2)} x, \quad q_3 = \int \left[\frac{p_3}{\alpha} - \frac{p_2 - p_3 x}{\beta(1-x^2)} x \right] \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} + q_{30}, \\ \dot{q}_l &= \frac{p_l}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 x, \quad q_l = \int \left[\frac{p_l}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \dot{q}_0 x \right] \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} + q_{l0}, \\ \dot{q}_x &= \frac{p_x}{m}, \quad q_x = \int \frac{p_x}{m} dt + q_{x0}, \\ \dot{q}_y &= \frac{p_y}{m}, \quad q_y = \int \frac{p_y}{m} dt + q_{y0}, \\ \dot{q}_z &= \frac{p_z}{m}, \quad q_z = \int \frac{p_z}{m} dt + q_{z0}. \end{aligned}$$

Het is duidelijk, dat, omdat $\frac{df}{dt} = 0$ en dus $\frac{d\phi}{dt} = 0$ moet zijn, f en bijgevolg ϕ alleen functies mogen zijn van de integratieconstanten:

$$p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}, p_{20}, p_{30}, p_{l0}, R_0, t_0, q_{20}, q_{30}, q_{l0}, q_{x0}, q_{y0}, q_{z0}.$$

Daar echter het oogenblik, vanwaar af we t rekenen en de stand, vanwaar af we $q_2, q_3, q_l, q_x, q_y, q_z$ tellen, voor den aard van de beweging zonder beteekenis zijn, zal ϕ alleen functie van $p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}, p_{20}, p_{30}, p_{l0}, R_0$ wezen, dus van $p_x, p_y, p_z, p_2, p_3, p_l, R$.

9 (bij blz 33). Wij kunnen beginnen met ϕ aan de voorwaarde te onderwerpen, dat bij de beweging (afgezien van botsingen) $\frac{d\phi}{dt} = 0$ moet zijn. Dit geeft ons, zooals in aanhangsel 8 bewezen is, dat ϕ functie is van $p_x, p_y, p_z, p_2, p_3, p_l$ en R ; wordt ϕ daarin uitgedrukt, dan schrijven we er duidelijkheidshalve Φ voor. We leiden weer juist als in § 6 vergelijking (16) af, waarbij nu steeds sprake is van botsingen met de eenatomige moleculen (of van deze laatste onderling), en passen die vergelijking het eerst toe voor p_2 en p_3 :

$$\frac{\partial R}{\partial p_2} = \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1), \quad \frac{\partial R}{\partial p_3} = \frac{-\cos q_1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1) + \frac{p_3}{\alpha},$$

dus:

$$\Delta \frac{\partial R}{\partial p_2} = 0 \quad \text{en} \quad \Delta \frac{\partial R}{\partial p_3} = 0,$$

bijgevolg:

$$\Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p_2} \right) = 0 \quad \text{en} \quad \Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p_3} \right) = 0.$$

Dit passen we op een reeks achtereenvolgende botsingen toe, waarbij q_1 een en dezelfde waarde heeft, p_1 , p_2 en p_3 niet veranderen, maar R , p_x , p_y , p_z , p_l van willekeurige begin- in willekeurige eindwaarden overgaan. Hetzelfde doen we dan bij een tweede reeks botsingen, waarbij dezelfde begin- en eindwaarden der p 's en van R als bij de eerste voorkomen, maar waarbij q_1 een andere waarde heeft. Dat leert ons, dat $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial p_3}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ slechts van p_2 en p_3 kunnen afhangen, dus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = F(p_2, p_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = G(p_2, p_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = H(p_2, p_3)$$

(F , G en H zijn onbepaalde functies).

Uit de eerste twee van deze vergelijkingen volgt: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial R} = 0$ en $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_3 \partial R} = 0$, dus moet $\frac{\partial H}{\partial p_2} = 0$ en $\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0$ zijn, dus $H(p_2, p_3)$ is constant:

$$H = c,$$

zoodat:

$$\Phi = cR + I(p_2, p_3) + K(p_l, p_x, p_y, p_z), \quad (\text{VIII})$$

waarin I en K onbepaalde functies zijn.

Om de functie K nader te bepalen, gaan we na, welke aangroeiingen de momenten p_l , p_x , p_y , p_z bij een willekeurige botsing krijgen. Zij s de afstand van het punt, waar de tong getroffen wordt tot de as $O\xi$ en α , β en γ de richtingsconstanten van de normaal ten opzichte van de assen OX , OY en OZ (α , β en γ zijn functies van q_1 , q_2 , q_3 en q_l). Werkt volgens de normaal een plotselinge stoot S , dan zijn de genoemde aangroeiingen:

$$\Delta p_l = sS, \quad \Delta p_x = \alpha S, \quad \Delta p_y = \beta S, \quad \Delta p_z = \gamma S,$$

zoodat men vindt:

$$\alpha \Delta p_l - s \Delta p_x = 0, \quad \beta \Delta p_l = + s \Delta p_y, \quad \gamma \Delta p_l = + s \Delta p_z.$$

Uit (16) volgt nu:

$$\Delta \frac{\partial K}{\partial p_x} = -\frac{c + \varepsilon}{m} \Delta p_x, \quad \Delta \frac{\partial K}{\partial p_l} = -\frac{c + \varepsilon}{\lambda} \Delta p_l,$$

zoodat:

$$-\alpha\lambda \Delta \frac{\partial K}{\partial p_l} + sm \frac{\partial K}{\partial p_x} = 0$$

moet zijn. Deze vergelijkingen moeten voor elke botsing gelden, dus voor alle waarden van α , β en γ , die voldoen aan:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

en voor elke (door S bepaalde) intensiteit der botsing. Daarbij moet men bedenken, dat K niet van α , β en γ afhangt.

Laten we nu een botsing beschouwen, die oneindig zwak is, zoodat alle veranderingen oneindig klein zijn; we vervangen daarom Δ door δ en schrijven bovendien ter bekorting M_l , M_x , M_y en M_z in plaats van $\frac{\partial K}{\partial p_l}$, $\frac{\partial K}{\partial p_x}$, $\frac{\partial K}{\partial p_y}$ en $\frac{\partial K}{\partial p_z}$. We krijgen dan:

$$\delta p_x = \frac{\alpha}{s} \delta p_l, \quad \delta p_y = \frac{\beta}{s} \delta p_l, \quad \delta p_z = \frac{\gamma}{s} \delta p_l,$$

en $-\alpha\lambda \delta M_l + sm \delta M_x = 0$. De variatie δp_l en de richting, bepaald door α , β en γ , kunnen we nu nog willekeurig kiezen. Voeren we de variatie uit, dan vinden we:

$$-\alpha\lambda \left(\frac{\partial M_l}{\partial p_l} + \frac{\alpha}{s} \frac{\partial M_l}{\partial p_x} + \frac{\beta}{s} \frac{\partial M_l}{\partial p_y} + \frac{\gamma}{s} \frac{\partial M_l}{\partial p_z} \right) + sm \left(\frac{\partial M_x}{\partial p_l} + \frac{\alpha}{s} \frac{\partial M_x}{\partial p_x} + \frac{\beta}{s} \frac{\partial M_x}{\partial p_y} + \frac{\gamma}{s} \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \right) = 0.$$

Zal dit voor alle richtingen van de normaal gelden, dan moet men hebben:

$$\lambda \frac{\partial M_l}{\partial p_l} = m \frac{\partial M_x}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial M_l}{\partial p_x} = 0, \quad \frac{\partial M_l}{\partial p_y} = 0, \quad \frac{\partial M_l}{\partial p_z} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial p_l} = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial p_y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial M_x}{\partial p_z} = 0.$$

Dus moet M_l alleen van p_l en M_x alleen van p_x afhangen; evenzoo bewijst men, dat M_y alleen van p_y en M_z alleen van p_z afhangt.

Uit de eerste van de zeven gevonden vergelijkingen volgt bovendien, dat $\frac{\partial M_l}{\partial p_l}$ en $\frac{\partial M_x}{\partial p_x}$ constanten zijn. Stelt men $\frac{\partial M_l}{\partial p_l} = C$, dan wordt $\frac{\partial M_x}{\partial p_x} = \frac{\lambda}{m} C$ en diezelfde waarde vindt men ook voor $\frac{\partial M_y}{\partial p_y}$ en $\frac{\partial M_z}{\partial p_z}$. We krijgen nu: $\Delta \frac{\partial K}{\partial p_x} = \Delta M_x = \frac{\lambda}{m} C \Delta p_x$, $\Delta \frac{\partial K}{\partial p_l} = \Delta M_l = C \Delta p_l$ en bijgevolg: $C = -\frac{c + \varepsilon}{\lambda}$.

Hiermede is aangetoond, dat ε een constante ε_0 is.

Uit het bovenstaande besluiten wij, dat:

$$K = \frac{1}{2} C p_l^2 + \frac{1}{2} \frac{C \lambda}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + C' p_l + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z + C''$$

is, waarin C' , C'' , m_x , m_y en m_z nieuwe constanten zijn. Dus, als men C'' in I opneemt:

$$\begin{aligned} \phi = cR + I(p_2, p_3) - \frac{c + \varepsilon_0}{2\lambda} p_l^2 - \frac{c + \varepsilon_0}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \\ + C' p_l + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z. \end{aligned}$$

Ter bekorting van de redeneering stellen we, dat de eenatomige moleculen ook onderling kunnen botsen, dan wordt de verdeelingsfunctie voor hen bepaald door de vergelijking:

$$\log f_1 = \phi_1 = c_1 \frac{p_{x1}^2 + p_{y1}^2 + p_{z1}^2}{2m} + m_{x1} p_x + m_{y1} p_y + m_{z1} p_z + C_1.$$

Bovendien weten we, dat ook voor een eenatomig molecuul, dat tegen de tong botst, een vergelijking als (16) geldt met dezelfde waarde van ε , n.l. ε_0 , als voor het stroomdragende molecuul.

Substitueeren we hierin de waarde voor ϕ_1 , dan vinden we $c_1 = -\varepsilon_0$.

Daar we voor ϕ , wegens $\lambda C = -c - \varepsilon_0$, ook kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} \phi = -\varepsilon_0 R - \frac{C}{2} \left[\lambda \left\{ \frac{1}{\beta} p_l^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} - \right. \\ \left. - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1 \right] + I(p_2, p_3) + C' p_l + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z, \end{aligned}$$

levert vergelijking (11) ons nog de voorwaarde:

$$C' \Delta p_l + m_x \Delta p_x + m_y \Delta p_y + m_z \Delta p_z + m_{x1} \Delta p_{x1} + m_{y1} \Delta p_{y1} + m_{z1} \Delta p_{z1} = 0,$$

waarin men kan substitueeren $\Delta p_{x_1} = -\Delta p_x$, $\Delta p_{y_1} = -\Delta p_y$, $\Delta p_{z_1} = -\Delta p_z$ en waarin men Δp_x , Δp_y en Δp_z in Δp_i kan uitdrukken; men vindt dan:

$$C' + (m_x - m_{x_1}) \frac{\alpha}{s} + (m_y - m_{y_1}) \frac{\beta}{s} + (m_z - m_{z_1}) \frac{\gamma}{s} = 0.$$

Daar dit voor elke richting (α, β, γ) moet doorgaan, moet men hebben: $C' = 0$, $m_x = m_{x_1}$, $m_y = m_{y_1}$, $m_z = m_{z_1}$, zoodat:

$$\begin{aligned} \Phi = & -\varepsilon_0 R - \frac{C}{2} \left[\lambda \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} - \right. \\ & \left. - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1 \right] + I(p_2, p_3) + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z. \end{aligned}$$

Daaruit volgt voor F de waarde:

$$\begin{aligned} F = & -\frac{C}{2} \left[\lambda \left\{ \frac{1}{\beta} p_1^2 + \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 + \frac{1}{\alpha} p_3^2 \right\} - \right. \\ & \left. - 2\mu \dot{q}_0 p_l \cos q_1 + \mu^2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1 \right] + I(p_2, p_3) + m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z. \end{aligned}$$

10 (bij blz. 35). Voor de berekening van de krachtcomponenten Q , op de coördinaten q_1, q_2, q_3 van een molecuul wegens het constante magneetveld werkende, maken we er van gebruik, dat de kracht K_ε op de lading ε met de snelheid v werkende in een magneetveld \mathfrak{H} is:

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c} [v \cdot \mathfrak{H}].$$

Wanneer de componenten van de hoeksnelheid van het molecuul langs OX , OY en OZ ω_x , ω_y en ω_z zijn, zijn de snelheidscomponenten langs die assen v_x , v_y en v_z :

$$\begin{aligned} v_x = & z\omega_y - y\omega_z = z[-\dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \cos q_2] - y[\dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2], \\ v_y = & x\omega_z - z\omega_x = x[\dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2] - z[\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1], \\ v_z = & y\omega_x - x\omega_y = y[\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1] - x[-\dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \cos q_2]. \end{aligned}$$

De krachtcomponenten per eenheid van lading: K_x , K_y , K_z zijn dus, omdat de componenten van de magneetkracht zijn:

$$H_x = \mathfrak{H}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0,$$

$$c K_x = v_y H_z - v_z H_y = 0,$$

$$c K_y = v_z H_x - v_x H_z = \mathfrak{H} [y (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1) - x (-\dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \cos q_2)],$$

$$c K_z = v_x H_y - v_y H_x = \mathfrak{H} [-x (\dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2) + z (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1)],$$

dus langs de assen OΞ, OH, OZ:

$$\begin{aligned} c K_\xi &= \mathfrak{H} [(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1) \xi - x (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3)] = \\ &= \mathfrak{H} [\xi \dot{q}_2 \sin^2 q_1 + \eta \sin q_1 \cos q_3 (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) + \zeta \sin q_1 \sin q_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c K_\eta &= \mathfrak{H} [(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1) \eta - x (\dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_3)] = \\ &= \mathfrak{H} [(\xi \cos q_1 + \zeta \sin q_1 \sin q_3) (-\dot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_3) + \\ &\quad + \eta \{\dot{q}_1 \sin q_1 \sin q_3 \cos q_3 + \dot{q}_2 (1 - \sin^2 q_1 \cos^2 q_3) + \dot{q}_3 \cos q_1\}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c K_\zeta &= \mathfrak{H} [\zeta (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \cos q_1) - x (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3)] = \\ &= \mathfrak{H} [(-\xi \cos q_1 + \eta \sin q_1 \cos q_3) (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3) + \\ &\quad + \zeta \{-\dot{q}_1 \sin q_1 \sin q_3 \cos q_3 + \dot{q}_2 (1 - \sin^2 q_3) + \dot{q}_3 \cos q_1\}]. \end{aligned}$$

Nu moeten we opmaken de koppels om de Ξ-, H- en Z-as, die tengevolge van deze krachten werken. De dichtheid der lading is over het molecuul constant en gelijk e . We maken er gebruik van, dat, als $d\omega$ een volumenelement van het molecuul is en we over het geheele molecuul integreeren:

$$\begin{aligned} \int \xi \eta d\omega &= 0, & \int \eta \zeta d\omega &= 0, & \int \zeta \xi d\omega &= 0, \\ \int \xi^2 d\omega &= \frac{2\beta - \alpha}{2\rho}, & \int \eta^2 d\omega &= \int \zeta^2 d\omega = \frac{\alpha}{2\rho}, \end{aligned}$$

als ρ de dichtheid der massa is.

De koppels noemen we: H_ξ , H_η en H_ζ :

$$H_\xi = e \int (\eta K_\zeta - \zeta K_\eta) d\omega = \left[\frac{e}{c} \dot{q}_1 \sin q_1 \int \eta^2 d\omega \right] \mathfrak{H},$$

$$\begin{aligned} H_\eta &= e \int (\zeta K_\xi - \xi K_\zeta) d\omega = \left[\frac{e}{c} \int \zeta^2 d\omega (-\dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_3 - \right. \\ &\quad \left. - \dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_3) + \frac{e}{c} \int \xi^2 d\omega (\dot{q}_1 \cos q_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_3) \right] \mathfrak{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\zeta &= e \int (\xi K_\eta - \eta K_\xi) d\omega = \left[\frac{e}{c} \int \xi^2 d\omega (-\dot{q}_1 \cos q_1 \sin q_3 + \right. \\ &\quad \left. + \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos q_3) + \frac{e}{c} \int \eta^2 d\omega (-\dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 \cos q_3 - \dot{q}_3 \sin q_1 \cos q_3) \right] \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

De arbeid van deze koppels bij een oneindig kleine wenteling moet identiek gelijk zijn aan :

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + Q_3 dq_3.$$

De componenten van zoo'n wenteling ten opzichte van Ξ , H en Z-as zijn :

$\cos q_1 dq_2 + dq_3$, $\sin q_3 dq_1 - \sin q_1 \cos q_3 dq_2$, $\cos q_3 dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 dq_2$,
dus:

$$\begin{aligned} Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + Q_3 dq_3 &= H_\xi (\cos q_1 dq_2 + dq_3) + \\ &+ H_\eta (\sin q_3 dq_1 - \sin q_1 \cos q_3 dq_2) + \\ &+ H_\zeta (\cos q_3 dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 dq_2). \end{aligned}$$

Daaruit vinden we, gebruik makende van :

$$p_1 = \beta \dot{q}_1, p_2 = \alpha (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) \cos q_1 + \beta \dot{q}_2 \sin^2 q_1, p_3 = \alpha (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3):$$

$$Q_1 = \frac{e h}{\rho c} \left[-\frac{1}{2} p_3 \sin q_1 + \frac{-\alpha + 2\beta p_2 - p_3 \cos q_1}{2\beta} \frac{\cos q_1}{\sin q_1} \right],$$

$$Q_2 = \frac{e h}{\rho c} \left[\frac{\alpha - \beta}{\beta} p_1 \sin q_1 \cos q_1 \right],$$

$$Q_3 = \frac{e h}{\rho c} \left[\frac{\alpha}{2\beta} p_1 \sin q_1 \right].$$

11 (bij blz. 36). We hebben al bewezen (verg. § 12), dat $R = R_0$.
Voor de beweging gelden de vergelijkingen :

$$\dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q} + Q, \quad \dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p},$$

dus:

$$\dot{p}_2 = 2h(\alpha - \beta)\dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_1, \quad \dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_z = 0,$$

$$p_2 + (\alpha - \beta)h \cos^2 q_1 = p_{20}, \quad p_x = p_{x0}, \quad p_z = p_{z0},$$

$$\dot{p}_3 = \alpha h \dot{q}_1 \sin q_1, \quad \dot{p}_y = 0,$$

$$p_3 + \alpha h \cos q_1 = p_{30}, \quad p_y = p_{y0},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta} p_1^2 &= R_0 - \frac{1}{2m} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2) - \frac{1}{2\beta \sin^2 q_1} \{ p_{20} - p_{30} \cos q_1 + \\ &+ \beta h \cos^2 q_1 \}^2 - \frac{1}{2\alpha} (p_{30} - \alpha h \cos q_1)^2, \end{aligned}$$

$$\dot{q}_1^2 \sin^2 q_1 = \frac{2R_0}{\beta} (1 - \cos^2 q_1) - \frac{(1 - \cos^2 q_1)}{\beta m} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2) -$$

$$- \frac{1}{\beta^2} \{ p_{20} - p_{30} \cos q_1 + \beta h \cos^2 q_1 \}^2 - \frac{1}{\alpha \beta} (1 - \cos^2 q_1) (p_{30} - \alpha h \cos q_1)^2 \equiv F(\cos q_1).$$

Stellen we $\cos q_1 = x$, dan is:

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = dt, \text{ dus: } \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = t - t_0.$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1) = \frac{1}{\beta (1-x^2)} \{p_{20} - p_{30}x + \beta h x^2\},$$

$$q_2 = \int \frac{p_{20} - p_{30}x + \beta h x^2}{\beta (1-x^2)} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} + q_{20},$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= -\frac{\cos q_1}{\beta \sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1) + \frac{p_3}{\alpha} = \\ &= -\frac{x}{\beta (1-x^2)} \{p_{20} - p_{30}x + \beta h x^2\} + \frac{p_{30} - \alpha h x}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$q_3 = \int \left[-\frac{x}{\beta (1-x^2)} \{p_{20} - p_{30}x + \beta h x^2\} + \frac{p_{30} - \alpha h x}{\alpha} \right] \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} + q_{30},$$

$$\dot{q}_x = \frac{p_x}{m}, \quad q_x = \int \frac{p_{x0}}{m} dt + q_{x0},$$

$$\dot{q}_y = \frac{p_y}{m}, \quad q_y = \int \frac{p_{y0}}{m} dt + q_{y0},$$

$$\dot{q}_z = \frac{p_z}{m}, \quad q_z = \int \frac{p_{z0}}{m} dt + q_{z0}.$$

$R_0, p_{20}, p_{30}, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}, t_0, q_{20}, q_{30}, q_{x0}, q_{y0}$ en q_{z0} zijn de integratieconstanten, waarvan alleen de eerste zes van beteekenis zijn voor den aard van de beweging, f en dus ϕ zullen bijgevolg functie zijn van $R_0, p_{20}, p_{30}, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}$.

12 (bij blz. 37). De hulpvergelijkingen voor de partieele differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{30}} + \frac{p_{30}}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = F(p_{30})$$

zijn:

$$\frac{dp_{30}}{1} = \frac{dR}{\frac{1}{\alpha} p_{30}} = \frac{dp_x}{0} = \frac{dp_y}{0} = \frac{dp_z}{0} = \frac{d\Phi}{F(p_{30})} = \frac{dp_2}{0}.$$

Integralen daarvan zijn:

$$R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} = \text{const. en } \Phi - \int F(p_{30}) dp_{30} = \Phi - H(p_{30}) = \text{const.},$$

$$p_x = \text{const.}, \quad p_y = \text{const.}, \quad p_z = \text{const.}, \quad p_2 = \text{const.},$$

en de integraal van de partieele differentiaalvergelijking is dus:

$$\Phi - H(p_{30}) = K \left\{ R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha}, p_{20}, p_x, p_y, p_z \right\}.$$

Substitutie in de tweede vergelijking geeft:

$$\frac{\partial K}{\partial p_{20}} - \mathfrak{h} \frac{\partial K}{\partial \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} \right)} = G(p_{30}),$$

waarvoor de hulpvergelijkingen zijn:

$$\frac{dp_{20}}{1} = \frac{d \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} \right)}{-\mathfrak{h}} = \frac{dp_x}{0} = \frac{dp_y}{0} = \frac{dp_z}{0} = \frac{dK}{G(p_{30})},$$

met integralen:

$$R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \mathfrak{h} p_{20} = \text{const.}, \quad K - G(p_{30}) p_{20} = \text{const.}, \\ p_x = \text{const.}, \quad p_y = \text{const.}, \quad p_z = \text{const.}$$

Van de partieele differentiaalvergelijking is de integraal dus:

$$K - G(p_{30}) p_{20} = L \left(R - \frac{p_{30}^2}{2\alpha} + \mathfrak{h} p_{20}, p_x, p_y, p_z \right).$$

13 (bij blz. 39). We berekenen het moment van hoeveelheid van beweging ten opzichte van de X -as uit de hoeksnelheden ω_x, ω_y en ω_z om $O\xi, OH$ en OZ op de volgende manier:

$$\alpha \omega_x (\xi X) + \beta \omega_y (HX) + \beta \omega_z (ZX) = \alpha (\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) \cos q_1 + \\ + \beta (\dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_3) (-\sin q_1 \cos q_3) + \beta (\dot{q}_1 \cos q_3 + \\ + \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3) (\sin q_1 \sin q_3) = \alpha (\dot{q}_2 \cos^2 q_1 + \dot{q}_3 \cos q_1) + \beta \dot{q}_2 \sin^2 q_1 = p_2.$$

14 (bij blz. 44). In plaats van x_α, x_β , enz. kunnen we voor elk molecuul invoeren de coördinaten van het zwaartepunt en de coördinatenverschillen der twee deeltjes:

$$x = \frac{m_\alpha x_\alpha + m_\beta x_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad y = \frac{m_\alpha y_\alpha + m_\beta y_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad z = \frac{m_\alpha z_\alpha + m_\beta z_\beta}{m_\alpha + m_\beta},$$

$$X = x_\beta - x_\alpha, \quad Y = y_\beta - y_\alpha, \quad Z = z_\beta - z_\alpha.$$

$$dx_\alpha dx_\beta dy_\alpha dy_\beta dz_\alpha dz_\beta = dx dX dy dY dz dZ.$$

Juist als in de vorige gevallen voeren we nu alvast in, dat de verdeling der zwaartepunten over de ruimte gelijkmatig is en dus de verdeelingsfunctie onafhankelijk van x , y en z .

Om nu de oplossing van (11) met de bijkomstige voorwaarden (α), (β), (γ) en (δ) te geven ¹⁾, differentieëren we al deze vergelijkingen weer en tellen de met onbepaalde vermenigvuldigers α , $-\beta$, $-\gamma$ en $-\delta$ vermenigvuldigde vergelijkingen, die uit de bijkomstige voorwaarden zijn afgeleid bij die uit de hoofdvergelijking op. De coëfficiënt van elken differentiaal moet dan weer nul zijn, dus b. v.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{x}_{\lambda_1}} + \alpha m_{\lambda} \dot{x}_{\lambda_1} - \beta m_{\lambda} &= 0 \quad (\text{IX}), & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{x}_{\mu_2}} + \alpha m_{\mu} \dot{x}_{\mu_2} - \beta m_{\mu} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{y}_{\lambda_1}} + \alpha m_{\lambda} \dot{y}_{\lambda_1} - \gamma m_{\lambda} &= 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{y}_{\mu_2}} + \alpha m_{\mu} \dot{y}_{\mu_2} - \gamma m_{\mu} &= 0, \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\left(\frac{1}{m_{\lambda}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{x}_{\lambda_1}} - \frac{1}{m_{\mu}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{x}_{\mu_2}} \right) (\dot{y}_{\lambda_1} - \dot{y}_{\mu_2}) = \left(\frac{1}{m_{\lambda}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{y}_{\lambda_1}} - \frac{1}{m_{\mu}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{y}_{\mu_2}} \right) (\dot{x}_{\lambda_1} - \dot{x}_{\mu_2}). \quad (\text{X}).$$

Differentieëren we nu achtereenvolgens naar \dot{z}_{λ_1} en naar \dot{x}_{μ_2} , dan vinden we:

$$0 = - \frac{1}{m_{\lambda}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \dot{z}_{\lambda_1} \partial \dot{y}_{\lambda_1}}.$$

Evenzoo vindt men:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \dot{y}_{\lambda_1} \partial \dot{x}_{\lambda_1}} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \dot{z}_{\lambda_1} \partial \dot{x}_{\lambda_1}} = 0.$$

Maar dan geeft achtereenvolgende differentiatie van (X) naar \dot{x}_{λ_1} en \dot{y}_{μ_2} :

$$- \frac{1}{m_{\lambda}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \dot{x}_{\lambda_1}^2} = - \frac{1}{m_{\mu}} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \dot{y}_{\mu_2}^2} = + h \quad (\text{een constante}),$$

zoodat

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{x}_{\lambda_1}} = - h m_{\lambda} \dot{x}_{\lambda_1} + g_{x1},$$

¹⁾ We kunnen daarbij te werk gaan, alsof er twee groepen moleculen waren, een groep, bestaande uit de moleculen 1, waarvan de deeltjes λ botsen en een groep, bestaande uit de moleculen 2, waarvan de deeltjes μ botsen. Voor die groepen hebben we dan respectievelijk een verdeelingsfunctie ϕ_1 en ϕ_2 .

waarin g_x alleen nog functie van de coördinaten en van \dot{x}_{μ_1} , \dot{y}_{μ_1} en \dot{z}_{μ_1} kan zijn.

Substitutie in (X) geeft echter $g_{x_1} = g_{x_2}$, dus g is een constante en substitutie in (IX) leert, dat $\frac{1}{m_\lambda} g_{x_1} = \frac{1}{m_\mu} g_{x_2} = \beta$ en dat $h = \alpha$ is.

Een analoge redeneering betreffende de afhankelijkheid van \dot{y}_{λ_1} , \dot{z}_{λ_1} , \dot{y}_{μ_2} , \dot{z}_{μ_2} geeft:

$$\Phi_1 = -\frac{hm_\lambda}{2} (\dot{x}_{\lambda_1}^2 + \dot{y}_{\lambda_1}^2 + \dot{z}_{\lambda_1}^2) + m_\lambda (\beta \dot{x}_{\lambda_1} + \gamma \dot{y}_{\lambda_1} + \delta \dot{z}_{\lambda_1}) + \psi_1(X, Y, Z, \dot{x}_{\mu_1}, \dot{y}_{\mu_1}, \dot{z}_{\mu_1}),$$

waarin: $X = x_{\lambda_1} - x_{\mu_2}$ enz.

Hieruit volgen de conclusies van blz. 44 omtrent de vorm, waarin de snelheidscomponenten van de deeltjes α en β in Φ moeten voorkomen.

15 (bij blz. 45). In plaats van de voorwaarde, dat de gemiddelde snelheidscomponenten van het zwaartepunt in de Y - en Z -richting nul zijn, kan men ook die stellen, dat elk assenstelsel loodrecht op de X -as gelijkwaardig is en dat de verdeelingsfunctie er dus ten opzichte van die assenstelsels steeds op dezelfde manier uitziet. Dit geeft, als we uit voorwaarde (2) hebben afgeleid, dat:

$$f = Ae^{-hR + \beta X + \gamma Y + \delta Z}$$

de betrekking:

$$[\gamma(m_\alpha \dot{z}_\alpha + m_\beta \dot{z}_\beta) - \delta(m_\alpha \dot{y}_\alpha + m_\beta \dot{y}_\beta) + \gamma \frac{e}{c} \mathfrak{H} (y_\alpha - y_\beta) + \delta \frac{e}{c} \mathfrak{H} (z_\alpha - z_\beta)] d\omega = 0.$$

In het eerste lid staat hier n.l. het verschil der waarden van $\log f$ ten opzichte van twee assenstelsels, waarvan de overeenkomstige assen een hoek $d\omega$ maken. Daaruit volgt: $\gamma = 0$, $\delta = 0$ (verg. § 17).

16 (bij blz. 46).

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2} m_{\beta} \dot{x}_{\beta}^2 + \beta m_{\beta} \dot{x}_{\beta}} d\dot{x}_{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^2 + \beta m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}} (m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + m_{\beta} \dot{x}_{\beta}) d\dot{x}_{\alpha} = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2} m_{\beta} (\dot{x}_{\beta} - \frac{\beta}{h})^2 + \frac{h}{2} m_{\beta} \frac{\beta^2}{h^2}} d\dot{x}_{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2} m_{\alpha} (\dot{x}_{\alpha} - \frac{\beta}{h})^2 + \frac{h}{2} m_{\alpha} \frac{\beta^2}{h^2}} d\dot{x}_{\alpha} \left[m_{\alpha} \left(\dot{x}_{\alpha} - \frac{\beta}{h} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + m_{\alpha} \frac{\beta}{h} + m_{\beta} \dot{x}_{\beta} \right] = \\
 & = e^{\frac{h}{2} (m_{\alpha} + m_{\beta}) \frac{\beta^2}{h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{2} m_{\beta} (\dot{x}_{\beta} - \frac{\beta}{h})^2} d\dot{x}_{\beta} \left[m_{\alpha} \frac{\beta}{h} + m_{\beta} \left(\dot{x}_{\beta} - \frac{\beta}{h} \right) + m_{\beta} \frac{\beta}{h} \right] \sqrt{\frac{2\pi}{hm_{\alpha}}} = \\
 & = e^{\frac{h}{2} (m_{\alpha} + m_{\beta}) \frac{\beta^2}{h^2}} (m_{\alpha} + m_{\beta}) \frac{\beta}{h} \cdot \frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{1}{m_{\alpha} m_{\beta}}}.
 \end{aligned}$$

Deze uitdrukking wordt voor reële waarden van β alleen nul als $\beta = 0$. Evenzoo bewijst men $\gamma = \delta = 0$.

17 (bij blz 47). Stel:

$$\begin{aligned}
 y_{\beta} - y_{\alpha} &= x_1, & z_{\beta} - z_{\alpha} &= x_2, & \dot{y}_{\beta} &= x_3, & \dot{z}_{\beta} &= x_4, \\
 \frac{\partial \psi}{\partial (y_{\beta} - y_{\alpha})} &= p_1, & \frac{\partial \psi}{\partial (z_{\beta} - z_{\alpha})} &= p_2, & \frac{\partial \psi}{\partial \dot{y}_{\beta}} &= p_3, & \frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}_{\beta}} &= p_4.
 \end{aligned}$$

De partieele differentiaalvergelijking luidt dan:

$$p_1 x_2 - x_1 p_2 + p_3 x_4 - x_3 p_4 = 0.$$

Daarbij behooren als hulpvergelijkingen:

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} = \frac{dx_3}{x_4} = \frac{dx_4}{-x_3} = \frac{d\psi}{0}.$$

Van deze laatste vergelijkingen moeten we vier onafhankelijke integralen kennen, om daaruit een integraal van de partieele differentiaalvergelijking te kunnen opbouwen.

$$\begin{aligned}
 x_1 dx_1 + x_2 dx_2 &= 0, & x_3 dx_3 + x_4 dx_4 &= 0, & d\psi &= 0. \\
 x_1^2 + x_2^2 &= a, & x_3^2 + x_4^2 &= b, & \psi &= c.
 \end{aligned}$$

Voor de vierde gaan we als volgt te werk:

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} = \frac{dx_3}{x_4} = \frac{dx_4}{-x_3} = \frac{adx_1 + bdx_2 + cdx_3 + ddx_4}{-bx_1 + ax_2 - dx_3 + cx_4}.$$

Stel $\lambda a = -b$, $\lambda b = a$, $\lambda c = -d$, $\lambda d = c$.

Opdat deze vergelijkingen in a , b , c en d oplosbaar zijn, moet λ voldoen aan:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ of } (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \text{ of } \lambda = \pm i.$$

$$\lambda = -i \text{ geeft: } a = -bi, \quad c = -di,$$

$$\lambda = +i \text{ geeft: } a = bi, \quad c = di,$$

$$\frac{adx_1 + aidx_2 + cdx_3 + cidx_4}{-i(ax_1 + aix_2 + cx_3 + cix_4)} = \frac{adx_1 - aidx_2 + cdx_3 - cidx_4}{i(ax_1 - aix_2 + cx_3 - cix_4)},$$

$$-\log(ax_1 + aix_2 + cx_3 + cix_4) = \log(ax_1 - aix_2 + cx_3 - cix_4) - \log C.$$

$$(ax_1 + aix_2 + cx_3 + cix_4)(ax_1 - aix_2 + cx_3 - cix_4) = C.$$

$$a^2(x_1^2 + x_2^2) + c^2(x_3^2 + x_4^2) + 2ac(x_1x_3 + x_2x_4) = C.$$

Daar $x_1^2 + x_2^2 = \text{const.}$ en $x_3^2 + x_4^2 = \text{const.}$ integralen zijn, is:

$$x_1x_3 + x_2x_4 = C'$$

er ook een, of omdat:

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) - (x_1x_3 + x_2x_4)^2 = (x_1x_4 - x_2x_3)^2$$

ook:

$$x_1x_4 - x_2x_3 = d.$$

Als algemeene integraal van de differentiaalvergelijking vinden we dus:

$$\psi = \psi[(x_1^2 + x_2^2), (x_3^2 + x_4^2), (x_1x_4 - x_2x_3)].$$

$$18 \text{ (bij blz. 50). } \quad \Phi = \Phi[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, x, y, z],$$

dus $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ geeft:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} 0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \dot{z} = 0.$$

Alleen de term $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x}$ is oneven functie van \dot{x} , de andere zijn in \dot{x}

even, dus moet $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ zijn. Evenzoo $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$.

19 (bij blz. 51). Voorwaarde (2) moet worden toegepast op:

$$f = ae^{-h[(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2]},$$

waarbij a , h , u , v en w van y en z zouden kunnen afhangen, daarentegen niet expliciet van t .

Dat geeft ons:

$$\frac{d}{dt} \left[-h \left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2(xu + yv + zw) + u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\log a}{h} \right\} \right] = 0.$$

Bij dit differentieëren moeten we een deeltje in zijn loop volgen: $x^2 + y^2 + z^2$ is constant. We stellen $u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\log a}{h} = A$, dan moet:

$$\begin{aligned} - \left[(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xu + yv + zw) + A \right] \left(\frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial h}{\partial z} \dot{z} \right) + \\ + 2h(\dot{x}u + \dot{y}v + \dot{z}w) + 2h(x\dot{u} + y\dot{v} + z\dot{w}) - h \frac{dA}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Na substitutie van de waarden $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = \frac{e}{c} z \mathfrak{H}$, $\ddot{z} = -\frac{e}{c} y \mathfrak{H}$ zijn alleen de termen met den factor $x^2 + y^2 + z^2$ van den derden graad in \dot{x} , \dot{y} en \dot{z} ; deze moeten dus afzonderlijk nul zijn, dus: $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, $h = h_0$. Dan hebben we nog over:

$$\begin{aligned} + 2h \left(\frac{e}{c} z \mathfrak{H} v - \frac{e}{c} y \mathfrak{H} w \right) + 2h \left[\dot{x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} \right) + \right. \\ \left. + \dot{y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} \right) + \dot{z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial w}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dot{z} \right) \right] - h \left(\frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \dot{z} \right) = 0. \end{aligned}$$

We voeren nu in, dat de toestand in de richting der X -as d.w.z. langs de magnetische krachtlijnen niet verandert, dus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

Dat geeft ons:

$$\begin{aligned} + 2 \frac{e}{c} h \mathfrak{H} (zv - yw) + 2h \left[\dot{x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} \right) + \dot{y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} \right) + \right. \\ \left. + \dot{z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dot{z} \right) \right] - h \left(\frac{\partial A}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \dot{z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dat de coëfficiënten van $\dot{x}\dot{y}$, $\dot{x}\dot{z}$, \dot{y}^2 , \dot{z}^2 , $\dot{y}\dot{z}$, \dot{z} en \dot{y} alle afzonderlijk nul moeten zijn, geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$+ 2 \frac{e}{c} h \mathfrak{H} v - h \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad - 2 \frac{e}{c} h \mathfrak{H} w - h \frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Daaruit volgt, dat v slechts functie van z en w van y is, en verder, dat $+\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = \omega$ (een constante) is en dus:

$$v = \omega z + v_0, \quad w = -\omega y + w_0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -2 \frac{e}{c} \mathfrak{H} w, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = +2 \frac{e}{c} \mathfrak{H} v,$$

dus $A = \frac{e}{c} \mathfrak{H} \left\{ \omega (y^2 + z^2) - 2w_0 y + 2v_0 z \right\} - \frac{\log a_0}{h}$ (a_0 is constant)
en $u = u_0$, zoodat:

$$f = a_0 e^{-h_0 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2(\dot{x}u_0 + \dot{y}\omega z - \dot{z}w_0 + \dot{y}v_0 + \dot{z}w_0) + \frac{e}{c} \mathfrak{H} \{ \omega (y^2 + z^2) - 2w_0 y + 2v_0 z \}]}.$$

20 (bij blz. 62). Bij HOLM¹⁾ vinden we als formule voor het magnetisch moment van de volumeneenheid voor dipolen:

$$M_z = N \frac{\int \left[\frac{e}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{e^2 \mathfrak{H}}{4m} (x^2 + y^2) \right] e^{-\frac{\left[\frac{l}{2} (x^2 + y^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e \mathfrak{H}}{2} (y\dot{x} - x\dot{y}) \right]}{kT}} dx dy d\dot{x} d\dot{y}}{\int e^{-\frac{\left[\frac{l}{2} (x^2 + y^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e \mathfrak{H}}{2} (y\dot{x} - x\dot{y}) \right]}{kT}} dx dy d\dot{x} d\dot{y}}$$

Voeren we in $\dot{x} + \frac{e \mathfrak{H}}{2m} y = \dot{x}'$, $\dot{y} - \frac{e \mathfrak{H}}{2m} x = \dot{y}'$, dan komt er, als wij termen met \mathfrak{H}^2 als factor verwaarloozen:

1) HOLM meet e in electromagnetische eenheden, vandaar dat de c 's bij hem niet voorkomen.

$$M_x = N \frac{\int \frac{e}{2} (xy' - yx') e^{-\frac{[\frac{l}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)]}{kT}} dx dy dx' dy'}{\int e^{-\frac{[\frac{l}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)]}{kT}} dx dy dx' dy'}$$

d. i. met cyclische verwisseling van x , y en z juist de formule voor het magnetisch moment, die we met de verdeelingsfunctie van § 16 en 17 (de laatste met $\beta = 0$) krijgen.

Voor ladingdragende moleculen vinden we bij HOLM in onze notatie:

$$M_x = N \frac{\int \left[m - \frac{e^2 \hbar}{4 \rho^2} (\beta \sin^2 q_1 + \alpha \cos^2 q_1) \right] e^{-\frac{R - \hbar m}{kT}} d\lambda}{\int e^{-\frac{R - \hbar m}{kT}} d\lambda}$$

als $m = \frac{e}{2\rho} p_2$ ¹⁾ en $d\lambda$ een element in de phasenruimte is.

Om deze uitdrukking voor het resulteerend moment in den vorm te brengen, dien we met de verdeelingsfunctie van § 14 zouden krijgen, is het voldoende in plaats van p_2 en p_3 in te voeren:

$$\mu_2 = \alpha \left[\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3 - \frac{e \hbar}{2\rho} \cos q_1 \right] \cos q_1 + \beta \left(\dot{q}_2 \sin q_1 - \frac{e \hbar}{2\rho} \sin q_1 \right) \sin q_1,$$

$$\mu_3 = \alpha \left[\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3 - \frac{e \hbar}{2\rho} \cos q_1 \right].$$

Stellen we $\dot{q}_2 - \frac{e \hbar}{2\rho} = \dot{q}_2$, dan is deze laatste grootheid de hoeksnelheid om de Z -as in een stelsel, dat zelf met de hoeksnelheid $\frac{e \hbar}{2\rho}$ draait. De grootheden μ_2 en μ_3 hangen dan op dezelfde manier van \dot{q}_2 af, als p_2 en p_3 van \dot{q}_2 . Substitutie van de p 's in M_x geeft:

¹⁾ HOLM meet e in electromagnetische eenheden, vandaar dat de c 's bij hem niet voorkomen.

$$M_z = N \frac{\int \frac{e}{2\beta} p_2 e^{-\frac{1}{kT} \left[\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2\beta} p_1^2 + \frac{p_3^2}{2\alpha} + \frac{(p_2 - p_3 \cos q_1)^2}{2\beta \sin^2 q_1} \right]} d q_1 \dots d p_3}{\int e^{-\frac{1}{kT} \left[\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2\beta} p_1^2 + \frac{p_3^2}{2\alpha} + \dots \right]} d q_1 \dots d p_3}$$

21 (bij blz. 76). Als er geen botsingen zijn, behoeft de verdeelingsfunctie in den stationairen toestand alleen aan vergelijking (2) te voldoen; omdat

$\dot{R} = 0, \dot{p}_x = 0, \dot{p}_y = 0, \dot{p}_z = 0, \dot{p}_2 = 0, \dot{p}_3 = 0, \dot{p}_1 = 0,$
voldoet

$$f = f(R, p_x, p_y, p_z, p_2, p_3, p_1)$$

daaraan zeker.

Uit $R = R_0$ (een constante)

volgt:

$$\frac{\beta dq_1}{dt} = \sqrt{2\beta R_0 - \frac{1}{\sin^2 q_1} (p_2 - p_3 \cos q_1)^2 - \frac{\beta}{\alpha} p_3^2 - \frac{\beta}{\lambda} [p_1^2 - 2\mu \dot{q}_0 p_1 \cos q_1 + \mu_2 \dot{q}_0^2 \cos^2 q_1]} - \frac{\beta}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Daaruit kan de beweging (wat q_1 betreft) in een constant gehouden veld door integratie worden bepaald.

Bij gekozen R_0 en (positieve) p_1 kunnen p_2, p_3, p_x, p_y en p_z zoodanige waarden hebben, dat de vorm onder het wortelteeken nul wordt voor een bepaalde waarde van $q_1 < \frac{\pi}{2}$, dan is $p_1 \cos q_1$ steeds positief. Bij diezelfde waarden van R_0 en p_1 kan men echter ook $p_3 = 0$ hebben en p_2, p_x, p_y en p_z klein genoeg, dat de wortel voor geen waarde van q_1 nul wordt. De wortel is dan voor $q_1 < \frac{\pi}{2}$ grooter dan voor het supplement van dien hoek, het tijdgemiddelde van $p_1 \cos q_1$ is dus zeker negatief. Daar in deze bijzondere gevallen het resultaat al onbepaald is, moet dit zeker in 't algemeen ook zoo zijn.

22 (bij blz. 76). We leggen voorloopig een coördinatenstelsel met zijn oorsprong in het middelpunt van het molecuul en duiden de waarden van grootheden in het middelpunt met een index nul aan. Per volumeneenheid is een lading e aanwezig, de kracht op een

volumenelement $d\xi d\eta d\zeta$ heeft componenten $K'_\xi d\xi d\eta d\zeta$, $K'_\eta d\xi d\eta d\zeta$ en $K'_\zeta d\xi d\eta d\zeta$ ($O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ zijn hoofdtraagheidsassen):

$$\begin{aligned} K'_\xi &= e \left\{ d_{0\xi} + \left(\frac{\partial d_\xi}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial d_\xi}{\partial \eta} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial d_\xi}{\partial \zeta} \right)_0 \zeta \right\}, \\ K'_\eta &= e \left\{ d_{0\eta} + \left(\frac{\partial d_\eta}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial d_\eta}{\partial \eta} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial d_\eta}{\partial \zeta} \right)_0 \zeta \right\}, \\ K'_\zeta &= e \left\{ d_{0\zeta} + \left(\frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial d_\zeta}{\partial \eta} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial d_\zeta}{\partial \zeta} \right)_0 \zeta \right\}. \end{aligned}$$

Het moment van die krachten heeft de componenten:

$$\begin{aligned} H'_\xi &= \int (\eta K'_\zeta - \zeta K'_\eta) d\xi d\eta d\zeta = e \int \left[\eta d_{0\zeta} + \xi \eta \frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial d_\zeta}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \zeta \eta \frac{\partial d_\zeta}{\partial \zeta} - \zeta d_{0\eta} - \zeta \xi \frac{\partial d_\eta}{\partial \xi} - \zeta \eta \frac{\partial d_\eta}{\partial \eta} - \zeta^2 \frac{\partial d_\eta}{\partial \zeta} \right] d\xi d\eta d\zeta = \\ &= e \left(\frac{\partial d_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial d_\eta}{\partial \zeta} \right) \frac{\alpha}{2\rho} \quad (\text{de index nul is hier bij } \frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi} \text{ enz. weggelaten}), \end{aligned}$$

$$H'_\eta = e \left[\frac{\partial d_\xi}{\partial \zeta} \int \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta - \frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi} \int \xi^2 d\xi d\eta d\zeta \right] = e \left(\frac{\partial d_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi} \right) \frac{\alpha}{2\rho} - \frac{e\beta}{\rho} \frac{\partial d_\zeta}{\partial \xi},$$

$$H'_\zeta = e \left[\frac{\partial d_\eta}{\partial \xi} \int \xi^2 d\xi d\eta d\zeta - \frac{\partial d_\xi}{\partial \eta} \int \eta^2 d\xi d\eta d\zeta \right] = -e \left(\frac{\partial d_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial d_\xi}{\partial \eta} \right) \frac{\alpha}{2\rho} + e \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial d_\eta}{\partial \xi}.$$

Daaruit volgt (verg. blz. 98):

$$\begin{aligned} Q'_1 &= 0, \\ Q'_2 &= -\frac{e}{2\rho c} (\beta - \alpha) \mathfrak{H} \sin^2 q_1 - \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H}, \\ Q'_3 &= -\frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} \cos q_1. \end{aligned}$$

We hadden al:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{e \mathfrak{H}}{\rho c} \left[-\frac{p_3}{2} \sin q_1 + \frac{2\beta - \alpha}{2\beta} \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \cos q_1 \right], \\ Q_2 &= \frac{e \mathfrak{H}}{\rho c} \left[\frac{\alpha - \beta}{\beta} p_1 \sin q_1 \cos q_1 \right], \\ Q_3 &= \frac{e \mathfrak{H}}{\rho c} \left[\frac{\alpha}{2\beta} p_1 \sin q_1 \right]. \end{aligned}$$

Wij kunnen nu we deze eenmaal hebben, de functie van LAGRANGE gemakkelijk opstellen, door te bedenken, dat het stuk \bar{L} , dat aan het electromagnetische veld beantwoordt, moet voldoen aan:

$$Q + Q' = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q},$$

zowel voor q_1 , q_2 als q_3 . (Natuurlijk kon \bar{L} ook ineens berekend worden, zonder dat van Q en Q' gebruik werd gemaakt).

Schrijven we eerst de vergelijking voor q_3 op en merken we op, dat \bar{L} niet van q_3 (en ook niet van q_2) zal afhangen.

$$- \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} \cos q_1 + \frac{e\mathfrak{H}\alpha p_1}{2\rho c \beta} \sin q_1 = - \frac{d}{dt} \left(\frac{e\alpha \mathfrak{H}}{2\rho c} \cos q_1 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_3} \right),$$

zoodat \bar{L} bevat een term $\frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} \dot{q}_3 \cos q_1 = \bar{L}_3$.

De vergelijking voor q_2 is:

$$\frac{e\mathfrak{H}}{\rho c} [(\alpha - \beta) \dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_1] - \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} + \frac{e}{2\rho c} (-\beta + \alpha) \mathfrak{H} \sin^2 q_1 = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_2},$$

zoodat: $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{e\mathfrak{H}}{2\rho c} (\beta - \alpha) \sin^2 q_1 + \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H}$.

\bar{L} bevat bijgevolg een term: $\bar{L}_2 = \frac{e\alpha}{2\rho c} \mathfrak{H} \dot{q}_2 + \frac{e\mathfrak{H}}{2\rho c} (\beta - \alpha) \dot{q}_2 \sin^2 q_1$.

Voor q_1 krijgen we nu nog de vergelijking:

$$\frac{e\mathfrak{H}}{\rho c} \left[-\frac{p_3}{2} \sin q_1 + \frac{2\beta - \alpha}{2\beta} \frac{p_2 - p_3 \cos q_1}{\sin q_1} \cos q_1 \right] = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_1}$$

of:

$$\frac{e\mathfrak{H}}{\rho c} \left[(\beta - \alpha) \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1 - \frac{\alpha}{2} \dot{q}_3 \sin q_1 \right] = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_1}.$$

Nu wordt

$$\frac{\partial (\bar{L}_2 + \bar{L}_3)}{\partial q_1} = - \frac{e\alpha}{2\rho c} \dot{q}_3 \mathfrak{H} \sin q_1 + \frac{e\mathfrak{H}}{\rho c} (\beta - \alpha) \dot{q}_2 \sin q_1 \cos q_1,$$

zoodat $\bar{L} = \bar{L}_2 + \bar{L}_3$ de gevraagde aanvulling van de functie van LAGRANGE is in het electromagnetisch veld.

De momenten, die we definiëren als $\pi = \frac{\partial(L + \bar{L})}{\partial \dot{q}}$, verschillen van de vroeger voor dit geval ingevoerde: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. π_2 en π_3 blijven bij de beweging constant, omdat de coördinaten q_2 en q_3 in $L + \bar{L}$ niet voorkomen. We vinden dus voor de eerste dezer grootheden:

$$\pi_2 = p_2 + \frac{e \hbar}{\rho c} \left[\frac{\beta}{2} \sin^2 q_1 + \frac{\alpha}{2} \cos^2 q_1 \right],$$

wat volkomen overeenstemt met formule (41) als we $\pi_2 = P_2$ stellen.

Wij merken nog op, dat we voor π_3 de volgende vergelijking krijgen:

$$\pi_3 = p_3 + \frac{e\alpha}{2\rho c} \hbar \cos q_1 = p_3 + \alpha \hbar \cos q_1.$$

Daar π_3 een constante is, blijft $p_3 + \alpha \hbar \cos q_1$ ook bij het aanzetten van het veld constant, wat we in § 13 gebruikten.

23 (bij blz. 78). De bewegingsvergelijkingen luiden:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{R}{m} y - \frac{e \hbar}{m c} \dot{z} - \frac{e \hbar}{2 m c} (z + Z), \\ \ddot{z} &= -\frac{R}{m} z + \frac{e \hbar}{m c} \dot{y} + \frac{e \hbar}{2 m c} (y + Y). \end{aligned}$$

We tellen t van af het moment, dat het veld begint te ontstaan. We zullen nu de bewegingsvergelijkingen bijzonder eenvoudig krijgen, als we ze opschrijven in een assenstelsel $Y'OZ'$, dat om de X -as roteert met een veranderlijke hoeksnelheid ω . Op het oogenblik t zij de hoek $Y'OY$ $\vartheta = \int \omega dt$. Dan is:

$$\begin{aligned} y &= y' \cos \vartheta - z' \sin \vartheta, \\ \dot{y} &= \dot{y}' \cos \vartheta - \dot{z}' \sin \vartheta - \omega y' \sin \vartheta - \omega z' \cos \vartheta, \\ \ddot{y} &= \ddot{y}' \cos \vartheta - \ddot{z}' \sin \vartheta - 2\omega \dot{y}' \sin \vartheta - 2\omega \dot{z}' \cos \vartheta - \dot{\omega} y' \sin \vartheta - \dot{\omega} z' \cos \vartheta, \end{aligned}$$

als grootheden, die ω^2 als factor bevatten, worden weggelaten.

$$\begin{aligned} z &= y' \sin \vartheta + z' \cos \vartheta, \\ \dot{z} &= \dot{y}' \sin \vartheta + \dot{z}' \cos \vartheta + y' \cos \vartheta \cdot \omega - \omega z' \sin \vartheta, \\ \ddot{z} &= \ddot{y}' \sin \vartheta + \ddot{z}' \cos \vartheta + 2\omega \dot{y}' \cos \vartheta - 2\omega \dot{z}' \sin \vartheta + \dot{\omega} y' \cos \vartheta - \dot{\omega} z' \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Zetten we dit in de bewegingsvergelijkingen en tellen we deze op, eenmaal na ze met $\cos \vartheta$ en $\sin \vartheta$ te hebben vermenigvuldigd, een andermaal met $-\sin \vartheta$ en $\cos \vartheta$, dan krijgen we, als producten van ω en $\dot{\eta}$ weer worden verwaarloosd:

$$\ddot{y}' - 2\omega\dot{z}' - \dot{\omega}z' + \frac{R}{m}y' + \frac{e\dot{\eta}}{mc}z' + \frac{e\dot{\eta}}{2mc}z' = -\frac{e\dot{\eta}}{2mc}Z',$$

$$\ddot{z}' + 2\omega\dot{y}' + \dot{\omega}y' + \frac{R}{m}z' - \frac{e\dot{\eta}}{mc}y' - \frac{e\dot{\eta}}{2mc}y' = \frac{e\dot{\eta}}{2mc}Y'.$$

Stellen we $\omega = \frac{e\dot{\eta}}{2mc}$, dan blijft van deze vergelijkingen slechts over:

$$\ddot{y}' + \frac{R}{m}y' = -\frac{e\dot{\eta}}{2mc}Z',$$

$$\ddot{z}' + \frac{R}{m}z' = \frac{e\dot{\eta}}{2mc}Y',$$

waarvan de oplossing is (daar wij termen met $\dot{\eta}$ en $\ddot{\eta}$ verwaarloozen):

$$y' = A \cos vt + B \sin vt - \frac{e\dot{\eta}Z'}{2mcv^2},$$

$$z' = C \cos vt + D \sin vt + \frac{e\dot{\eta}Y'}{2mcv^2},$$

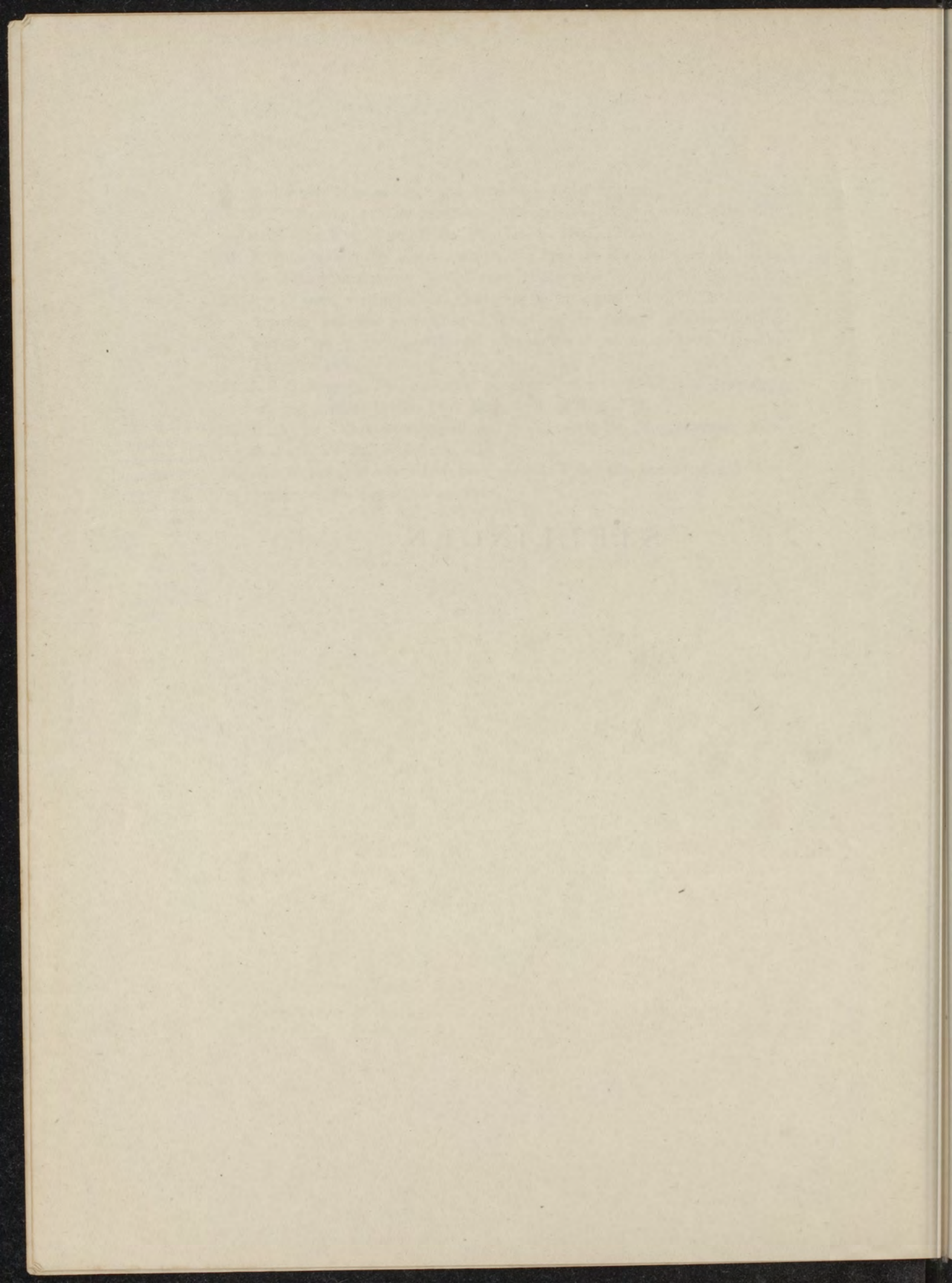
als A , B , C en D integratieconstanten zijn en $v^2 = \frac{R}{m}$, waaruit de formules voor y en z onmiddellijk volgen.

LITERATUURLIJST.

1. A. M. AMPÈRE: Théorie des phénomènes électrodynamiques, 1826.
2. L. BOLTZMANN: Vorlesungen über Gastheorie I, II.
3. P. u. T. EHRENFEST: Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. Encykl. d. mathem. Wissensch. IV, 32.
4. R. GANS: Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus I, Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1910, p. 197.
5. R. GANS: Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus II, Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1911, p. 118.
6. R. GANS: Beweisen die magnetischen Messungen an paramagnetischen Substanzen die Existenz einer Nullpunktsenergie? Ber. d. Deutsch. phys. Ges. 1914, p. 780.
7. R. GANS: Der Paramagnetismus in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichte. Ber. d. Deutsch. phys. Ges. 1914, p. 964.
8. R. GANS: Statistische Theorie des Dia-, Para- und Metamagnetismus. Ann. d. Phys. Bd. 49, 1916, p. 149.
9. R. GANS: Ueber Paramagnetismus. Ann. d. Phys. Bd. 50, 1916, p. 163.
10. E. HOLM: Zur statistischen Elektronentheorie des Magnetismus. Ann. d. Phys. Bd. 44, 1914, p. 241.
11. F. KOHLRAUSCH: Lehrbuch der practischen Physik, X^{te} Aufl. 1905.
12. J. N. KROO: Zur statistischen Elektronentheorie der Diëlektrizität und des Magnetismus. Diss. Göttingen 1913 of: Ann. d. Phys. Bd. 42, 1913, p. 1354.
13. P. LANGEVIN: Magnétisme et théorie des électrons. Ann. d. Chim. et de Phys., 8 sér., V, 1905, p. 70.
14. H. A. LORENTZ: Elektronentheorie. Encykl. d. mathem. Wiss., Bd. V, 2, Heft 1.
15. H. A. LORENTZ: College 1910—1911.
16. H. A. LORENTZ: Sur la polarisation partielle de la lumière émise par une source lumineuse dans un champ magnétique. Arch. Néerl. Sér. II Tome II, 1899, p. 1.
17. H. A. LORENTZ: Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität von M. Planck u. A. p. 188, 1914.

18. E. ROUTH: Elementary rigid dynamics, London 1882.
 19. E. SCHRÖDINGER: Zur kinetischen Theorie des Magnetismus. Sitz. Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, 121, IIa, p. 1305, 1912.
 20. K. SCHWARZSCHILD: Zwei Formen des Princips der kleinsten Action in der Elektronentheorie. Gött. Nachr. Math.-phys. Kl. 1902—1903, p. 125.
 21. J. J. THOMSON: Indications relatives à la constitution de la matière fournies par les recherches récentes sur le passage de l'électricité à travers les gaz. Rapports du congrès de physique de 1900, III—IV, Paris, p. 148.
 22. J. J. THOMSON: The magnetic properties of systems of corpuscles describing circular orbits. Phil. Mag. 6:6, 1903, p. 673.
 23. W. VOIGT: Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. Ann. d. Phys, IV Bd. 9, 1902, p. 115.
 24. W. WEBER: Werke III^{ter} Band p. 264, Ueber die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus, 1848.
-

STELLINGEN.



STELLINGEN.

I.

In een gas, dat zich bevindt in een constant gehouden magneetveld, hangt de verdeelingsfunctie niet af van de energie, maar van een functie van ROUTH (zie § 4, 5 en 19 van dit proefschrift), die met de energie op eenvoudige wijze samenhangt.

II.

Opdat het resulterend magnetisch moment van een gas in een magneetveld niet nul is, is noodig, dat de verdeelingsfunctie nog van andere grootheden afhangt, dan van de onder I genoemde functie van ROUTH (zie § 19 van dit proefschrift).

III.

Diamagnetisch gedrag van metalen kan niet worden verklaard door het rondlopen van de vrije electronen op spiraalbanen (zie § 18 en 22 van dit proefschrift).

IV.

De verklaring, door KROO met behulp van quanta-onderstellingen gegeven van het paramagnetisme van vaste lichamen, is onbevredigend (J. N. KROO, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1915, blz. 452).

V.

EINSTEIN en DE HAAS hadden, alvorens zij hun conclusies konden trekken, in hun verhandeling over de moleculaire stroomen van AMPÈRE, nog het voor eenvoudige gevallen gemakkelijk te leveren bewijs moeten geven, dat bij het magnetiseeren geen koppel op het lichaam wordt uitgeoefend (Ber. d. deutsch. phys. Ges. 1915, blz. 152).

VI.

Aan de beschouwingen van EINSTEIN en DE HAAS over de moleculaire stroomen van AMPÈRE ligt een door hen niet genoemde onderstelling ten grondslag omtrent de krachten, die de positief en negatief geladen deeltjes binnen het lichaam binden (Ber. d. deutsch. phys. Ges. 1915, blz. 152).

VII.

LINDEMANN's voorstelling van radioactieve processen geeft van essentiële eigenschappen van de radioactieve lichamen een onjuist beeld (Phil. Mag. 6:30, 1915, blz. 560).

VIII.

Het getallenmateriaal, door FRENKEL bijeengebracht, laat zijn verklaring van een elektrische dubbellaag aan het oppervlak van vloeibare en vaste stoffen niet toe (Phil. Mag. 6:33, 1917, blz. 297).

IX.

Het vraagstuk, de meest algemeene stationaire toestand van een gas van gegeven (moleculaire) samenstelling en in gegeven velden te bepalen, is terug te brengen tot het zuiver wiskundig-mechanische vraagstuk: er alle additieve bewegingsintegralen voor te bepalen (zie § 19 van dit proefschrift). De algemeene oplossing van het laatste brengt die van het eerste mee en zou dus voor de gastheorie gewenscht zijn.

X.

KRONECKER stelt het berekenen van een grootheid door integratie met het verklaren van het „grootte” uit het „kleine”, zooals dat in de natuurwetenschap voorkomt, op één lijn. Beide zijn echter geheel verschillend van karakter (L. KRONECKER: Vorlesungen über Mathematik I, 1894, blz. 3).

XI.

Als een stelsel een additieve bewegingsintegraal heeft, die lineair en homogeen in de bewegingsmomenten is, kan voor dit stelsel een puntransformatie worden uitgevoerd, waardoor het een cyclische coördinaat krijgt (zie § 19 van dit proefschrift en E. T. WHITTAKER: A treatise on analytical dynamics, 1917, § 150).

XII.

De J-straling, door BARKLA en Miss WHITE waargenomen bij de elementen koolstof, zuurstof en aluminium kan met de theorie van BOHR niet worden verklaard als straling bij den overgang tusschen elliptische banen (al of niet met periheliumbeweging. Phil. Mag. 6:34, 1917, blz. 270).

XIII.

Uit statistisch materiaal, verzameld over het studeeren der vrouwen (zie G. HEIJMANS: Die Psychologie der Frauen, 1910, blz. 105—155) kan althans voorloopig nog geen besluit worden getrokken over de mate van geschiktheid der vrouw voor wetenschappelijk werk.

