52

SPECIMEN MECHANICUM INAUGURALE,

CONTINENS

OBSERVATIONES NONNULLAS

DE

ROTIS DENTATIS HYPERBOLOÏDICIS ET DE ROTARUM DENTIBUS HELICOÏDALIBUS,

QUOD,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

JOANNIS DE WAL,

JUR. ROM. ET HOD. DOCT. ET PROF. ORD.

NEC NON

NOBILISSIMAE FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORATUS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA,

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS,

DEFENDET

ISAAC JOANNES VAN LIMBURG BROUWER,

HORNA-BATAVUS.

AD DIEM XIV JANUARII MDCCCLI, HORA II.

AMSTELODAMI.

TYPIS METZLER & BASTING.

MDCCCLI.

PARENTIBUS OPTIMIS

CARISSIMIS.

PRAEFATIO.

Academiae valedicens in luminem emitto specimen studiorum meorum, de cujus argumento et forma ut pauca praemoneam res mea postulat.

Dulcedine et sublimitate disciplinarum mathematicarum et physicarum a studiorum fere primordiis captus, in iis vitae habitaculum ponere facile apud me constitui. Excitabant ardorem discendi et proficiendi nomina et exempla illustrorum virorum, quorum meritis et fama in hoc scientiarum genere Patria et olim gavisa fuit et etiamnum gaudet. Horum vestigia premere, horum saltem placita et inventa servare et promovere, summum fuit quod petendum mihi proposui. Accrescebat deinceps et accrescit in dies diesque ardor, quoties animadverto, quantum haec studia, maxime se ad humanam industriam et diversi generis opera accomodantur, conferunt ad salutem publicam et communem civium utilitatem.

Quum igitur argumentum, de quo Magistri et Doctoris jura consecuturus disputarem, sumendum erat ex ingenti rerum copia, ultro se obtulit ac statim mihi placuit insignis ille *Mechanicae Practicae* locus, qui est *de Rotis Dentatis Hyperboloïdicis et de Rotarum Dentibus Helicoidalibus.*

Ecce vero manum operi admoturo, statim gravis mihi ex sermone quo uterer occurrebat difficultas. Lingua enim Latina, quamvis ad accurate et eleganter in omni doctrinarum genere scribendum vim et auxilium afferat, in hac nostra disciplina mera inopia imo paupertate laborat. Nec mirum: in hisce enim nostris scholis non tantum de antiquis sed et de recentioris aevi placitis et inventis agendum est, nec mortua illa lingua vocubula nobis suppeditat consona vocibus technicis, quas operarii nostri et e plebe homines aut invenerunt aut quotidie augent. Quid igitur.... Profecto egregie mecum actum esse existimaturus fuissem, si quam a summa auctoritate petivi, venia mihi data esset et opportunitas, hac stiam solemni occasione, de nostro argumento lingua patria scribendi et disserendi.

Hoc vero quoniam non e voto successit, consilio capto, idoneum duximus rem quam suscepimus duplici modo, seu potius duabus partibus absolvere. *Priorem* partem haec ipsa scriptio exhibet continens observationes nonnullas de rotis dentatis hyperboloïdicis et de rotarum dentibus helecoïdalibus, adjunctis thesibus ad publicam disceptationem aptis. *Alteram*, qua Neerlandico idiomate totum hoc argumentum fusius et copiosius explicare studebimus, in posterum differimus tempus.

Ad haec ut lectores et imprimis viri harum rerum periti animum benevole vertunt, etiam atque etiam rogo.

Jam dulce mihi superest officium et grata opportunitas, viros Clarissimos, ordinis Disciplinarum Mathematicarum et Physicarum Professores, Praeceptores Carissimos, compellandi. — Accipite viri Celeberrimi gratias, quas ex sincro pectore vobis ago pro benevolentia et institutione vestra, quibus, tum in Athenaeo Illustri Amstelaedemensi, tum in Academia Lugduno-Batava, uti mihi licuit.

Tu praesertim, Clarissime VERDAM, quem Promotorem habere gaudeo, pro humanitate tua, et optimis quibus me instruxisti consiliis, gratae mentis meae aperta testimonia accipias.

Vos denique, Commilitones carissimi! valete. Studiorum vestrorum uberrimos fructus vitamque felicem ore et corde amico vobis precor.

I.

LITERARIA ARGUMENTI HISTORIA.

1. Instrumenta, quae disquisitioni subjicere mihi proposui, prout plurima instrumenta simplicis naturae non sunt recentioris temporis. Illa quum quotidie applicarentur et mechanicae practicae tanti essent progressus, eorum natura compositio ac proprietates mathematicorum saeculi autecedentis ingenio aufugere non poterant.

Finis, quem fabri in rotis dentatis construendis sibi proposuerunt, est, duorum corporum conjunctio, adeo ut unius motus circa axem fixum alii communicetur, et hac conditione quidem, quod ex hac motus communicatione itidem volvetur circum axem fixum, dum velocitates absolutae duorum corporum definita ac constanti ratione maneant. Si duo cylindri aut coni, mobiles circum axes, juxtaponuntur latere vel linea generatrici communi (beschrijvende lijn), rei ipsius natura docet, rotationem unius eo usque alii communicaturam iri, quo usque secundum hanc generatricem existat attritus (wrijving). Sed quia haec translatio motus (overbrenging van beweging) tantum viribus parvis inservire potest, et corporum tritu contactus cito desineret, corpora dentibus exsilientibus et excavationibus muniri debent, quibus motus regulariter progrediretur. Definitio formae horum dentium in universo, et praesertim in singulari axium dispositione, mearum observationum argumentum est.

2. Constructio mechanica rotarum dentatarum dentium formae disquisitioni mathematicae antecessit; initio igitur tantum constructae sunt rotae dentatae casibus simplicioribus, et praesertim rotae affixae axibus parallellis et quoque ita dicti *tandstaven* (cremaillères), (quae singulares sunt formae rotarum dentatarum) in eodem plano siti ac rotae quibus moventur.

LAHIRE in *Memoires et Actes de l'Académie des Sciences à Paris* primus exposuit *epicycloïdum planarum* proprietates, easque applicavit ad constructionem rotarum dentatarum. CAMUS scripsit *Traité des Engrenages théoriques* et conatus est *epicycloïdibus sphaericis* construere rotas dentatas affixas axibus se invicem secantibus, sed tantum postquam Geometria descriptiva a MONGE et HACHETTE esset constituta, mathematica theoria harum rotarum dentatarum definiri poterat.

Disquisitione mathematica tamen rotarum dentatarum argumentum a priori et proprio modo contemplanti opus erat ad haec instrumenta generali casu construenda, scilicet si axes corporum arbitrarie in spatio positi sunt, non in eodem plano siti. Hae rotae, quamquam constructae sint et magnopere utiles, tamen non adeo pervulgatae sunt, ut particulari commendatione egere posse dicerentur.

3. Quod ad attritum (wrijving) rotarum dentatarum attinet, EULER memoria sua *De aptissima forma rotarum dentibus tribuenda. Nov. Comm. Petrop. Tom.* V *et* XI demonstravit attritum curvarum sectionum orthogonalium superficierum cylindricarum superficiem dentium formantium esse attritum repentem (slepende wrijving, frottement de glissement), dum velocitates absolutae corporum rotantium ratione essent constanti.

WHITE, mechanicus Parisiensis, anno 1812 opusculum edidit *Nouveau sistème de roues dentée*s, *dont l'action est nécessairement constante*, in quo rotas dentatas descripsit, quarum attritus volvens erat (rollende wrijving, frottement de roulement). De hisce rotis etiam egit OLIVIER *Théorie Géométrique des Engrenages*, *Paris* 1842, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées de* J. LIOUVILLE, *Tom.* IV *et* V, et nostras Clar. DELPRAT in *Tijdschrift voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen van het K. N. Instituut*, 2 *deel* 1849.

Computatio quantitatis frictionis apud rotas dentatas recentioris temporis est. Ejus theoriam ac formulam primus dedit PONCELET in *Leçons lithographiées de l'École de l'Application de Metz.*

4. Dentes *rotarum hyperboloïdicarum*, nomen quod OLIVIER dedit rotis affixis axibus non in eodem plano sitis, ita ac rotarum attritu volventi (rollende wrijving) sunt helicoïdales.

II.

ROTAE DENTATAE IN UNIVERSO. NOVUS MODUS DETERMINANDI FORMAM DENTIUM.

1. Cum duo corpora axibus affixa secantur planis axibus perpendicularibus (vlakken loodregt op de assen), puncta singula in illis planis sita, quibus corpora se invicem tangunt, axium motu circulos describere debent, quorum centra ea puncta sunt, quibus axes planis secantur, et quorum radii sunt horum punctorum distantiae ab axibus. Anguli, quos singula puncta ejusdem corporis percurrunt idem sunt. Arcus circulorum, quos describunt, et igitur eorum velocitates absolutae eadem ratione sunt ac radii illorum circulorum. Si sunt $v.\ v'.\ v''.$ velocitates absolutae; $r.\ r'.\ r''.$ radii circulorum; tunc est

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = w$$

et es w quod dicitur velocitas angularis (hoeksnelheid).

Si corpora axibus affixa sunt cylindri se invicem tangentes secundum genitricem, si attritus motui sufficit, si distantia inter axes puncto x divisa est in duas partes ratione inversa axium velocitatum, si duo circuli describuntur axibus perpendiculares et per punctum x transeuntes, et si circuli illi ita se movent ut eorum velocitates absolutae sint eaedem, omnia puncta uni axi affixa ita circum axem volvi debent, ut eorum velocitas angularis sese habet ad velocitatem punctorum alteri axi affixorum, ut eorum ratio constans sit; et sic conditioni, a qua dentium forma dependet, satisfactum est. Ut nunc revera velocitates absolutae horum circulorum primitivorum (steek-cirkels) eaedem sint, arcus a punctis, quibus se invicem tangunt, percursi longitudine absoluta idem esse debent. Facile nunc intelligitur duplicem illum motum systematis horum circulorum referri posse ad motum simplicem, quo circulorum unius sit planum immobile, et in eo fiat mathematica constructio dentium, quod idem est ac si circulus unus super alterum rotando, absque rependo, volvitur (zonder te glijden over den omtrek des anderen rolt).

2. Ut tamen motus unius rotae facile et revera in alteram rotam transferatur, ambae munitae sunt dentibus propria superficie definitis. Natura et forma harum superficierum non est arbitraria, certo modo una ab altera dependet. Si forma profili (vleugel, profil) dentium unius rotae est determinata, alterius rotae dentium profilum constantem ac definitam debet habere figuram. Solutio problematis de forma dentium, quae plerique datur, talis est.

Superficies, φ, dentes unius rotae efficiens immobilis affixa sit circulo primitivo, C. Dum axis, O, hujus circuli primitivi, C, circa se ipsum volvitur velocitate, v, pnnctum quoddam hujus circuli stadio, t, arcum describat, cujus mensura sit angulus, α; dum alter axis, O_1, volvitur celeritate, v_1, punctum quoddam circuli, C_1, describat arcum, cujus mensura sit angulus, β, eodem stadio, t; si nunc secundum § 1 axis, O, volvitur circa axem, O_1, corpus revolutionis (omwentelings-ligchaam) describitur; si hoc corpus secatur plano, p, distantiam minimam axium continenti, punctum, o, in quo axis, O, secatur plano p, describere debet circulum, C_2, circa punctum, o_1 in quo axis, O_1, secatur plano p. Si nunc punctum, o, circuli, C_2, arcum percurrit, cujus mensura est angulus, β, superficies, φ, transfertur in positionem φ^1, et si in hac positione superficies, φ^1, per angulum α volvitur circa lineam, O', (nova positio axis, O_1), haec superficies erit in positione, $\varphi' o$. Si nunc, $\varphi' o$, transfertur in, φ'', novo percurso angulo, β, circa axem, O_1, et φ'' de novo volvitur per angulum, α, circum axem, O'', superficies, $\varphi' o$, pervenerit in positione $\varphi'' o$ et sic porro. Superficies involvens (surface enveloppe, omwikkelend oppervlak) spatium a superficie, φ, diversis positionibus $\varphi' o$ $\varphi'' o$.... decursum, erit superficis, φ_1, dentes axi, O_1, affixas formans, et haec superficies, φ_1, tangere debet varias positiones superficiei, φ.

3. Exempli gratia si axes sunt paralelli et, φ, est superficies cylindrica, cujus directrix est curva, cy, fig. 1. In diversis positionibus, O' O'' O'''...., circuli mobilis sunt arcus, $C_1\, c_1 = C_1\, C$; $C_2\, c_2 = C_2\, C$; $C_3\, c_3 = C_3\, C$ etc., quo conditione motus volventis (rollende beweging) satisfactum est; punctum, c, motu axis, O, describere debet *epicycloidem* $c\ c_1\ c_2\ c_3$; porro curvae, $c_1\ y_1$, $c_2\ y_2$, $c_3\ y_3$, identicae sunt cum curva, cy; illae curvae se invicem secant in punctis sitis in circumferentia polygoni curvilinei, cujus limes est curva $C\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ B, quae simul curvas, $c\ y$, $c_1\ y_1$, $c_2\ y_2$, involvit. Curva involvens, $C\ f_4$ B, profilum est pertinens ad dentes rotae, O_1; si enim circa centrum, O_1, volvitur circulorum, O_1 et O'''', systema inter se immobilium, ut linea, $O_1\, C_4\, O''''$, veniat in positione verticali,

O C O_1, idem est ac si circuli, O et O_1, simpliciter rotassent circa eorum centra immobilia, circulorum velocitate absoluta eadem. Puncta, C et c_4, quae in linea centrorum se tangébant, descripserunt arcus, C_4 C et $C_4 c_4$, longitudine idem, et igitur constat apud has rotas satisfactum esse conditionibus, si profilum, C f_4 B, construitur conjunctum cum profilo, *cy*. Superficies, φ_1, est igitur cylindrus, cujus directrix est curva C f_4 B.

4. Eodem modo problema solvi potest, quum axes se invicem secant. Punctum contactus circulorum primitivorum debet positum esse in linea, quae angulum axium dividit in duos angulos, quorum sinus ratione inversa sunt axium velocitatum. Si axis, O, volvitur circum axem, O_1, superficies revolutionis fit et conus quidem; invenitur superficies, φ_1, involvens spatium a superficie, φ, decursum, eodem modo. Quod ad casum generalem quo axes se invicem non secant nec paralelli sunt, prima construatur distantia minima inter axes, deinde si, O, circa, O_1, volvitur fit hyperboloïs revolutionis, cujus faux (keel-cirkel, cercle de gorge) est circulus, cujus radius est minima distantia.

Hisce constructionibus pro dentibus rotatis, 1° si axes sunt paralelli, 2° si axes se invicem secant, 3° si non in eodem plano sunt, tres fiunt species diversae rotarum dentatarum. Duas primas vocant rotas cylindricas (spoor-raderen) et conicas (kam-raderen); tertiae speciei rotas cum OLIVIER dicimus *Rotas Hyperboloïdicas*, quamvis apud eas non hyperboloïde, uti cylindro et cono apud rotas cylindricas et conicas, immediate forma dentium definitur.

5. Sed exstat alius modus problematis solvendi de

forma dentium. Haec solutio est illa quae OLIVIER descripsit in *Théorie des Engrenages*, et imprimis inservit ad definiendam formam dentium rotarum hyperboloïdicarum, simpliciori modo quam hoc fit solutione, quam supra dedimus.

Si substantia, e qua rotae construuntur, est mollis, vitium aliquid formae cito motu ipso et in se invicem actione rotarum amovetur, et si unius rotae dens instrumentum acutum est, quo excavationes effici possunt in substantia alteri rotae affixa, hae excavationes motu regulari definitae erunt per superficiem involventem spatium a superficie instrumenti acuti percursum. Affixae nunc sint duobus circulis primitivis massae informes, et alii circulo auxiliari arbitrario sed immobili affixum sit instrumentum acutum; motu regulari, rotantibus circulis, hoc instrumentum excavationes faciet in massis circulorum primitivorum, definitas per superficies involventes spatium ab instrumento percursum; superficies igitur dentium ita formatarum se invicem tangent in quavis positione et una superficies involvet spatium ab altera percursum; ergo dentes, instrumento auxiliari quoque ablato, se invicem inducent. Formatio dentium singulorum circulorum primitivorum nunc quoque separatim fieri potest, dummodo positio instrumenti auxiliaris immutata sit.

Quia circulus auxiliaris positione et magnitudine indefinitus est, sed tantum conditione, quod punctum commune debet habere cum duobus circulis primitivis, radius illius circuli auxiliaris infinitus esse potest et circulus transire in lineam rectam. Itidem superficies instrumenti acuti potest esse planum; superficies, φ et φ, dentes rotarum formantes, tunc sunt superficies evolubiles (ontwikkelbare oppervlakken, surfaces développables), quae instrumentum acutum secundum caracteristicam (caracteristique) tangunt. Hae caracteristicae, in universo, unico puncto se invicem secabunt, sed possunt quoque coïncidere; itaque rotae dentatae possunt construi se tangentes vel uno puncto vel per lineam rectam. Practica constructio harum rotarum ab OLIVIER hoc modo quoque datur. Novam dedit rotarum dentatarum speciem quarum dentes tornantur (op de draaibank vervaardigd kunnen worden) ope cochleae ejusque feminae (de schroef en hare moer, la vis et son écrou). Non funditus hanc materiem inire disquisitionis limites sinunt, sed facile patet, constructionem, qua usi sumus si instrumentum acutum planum est, reïterari posse pro tot planis instrumentum acutum helicoidale tangentibus, quot nobis placebit. Puncta quibus singulae caracteristicae horum planorum systematum se invicem secant, superficiem similem formant. Denique si haec constructio applicatur in rotas usitatas, notae proveniunt inde formae, quod plane demonstrat hanc problematis solutionem non tantum elegantem sed etiam rectam esse.

6. Naturam et formam dentium, proprietates nonnullarum, artificia quibus quam maxime utiles redduntur, et limites ad quos eorum forma appropinquare potest in pluribus de hac re tractantibus operibus inveniuntur; e. g. HACHETTE, *Traité des Machines.* EYTELWEIN, *Statik fester Körper*, alii. Descriptio rotarum dentatarum usitatarum, earumque definitio per problematis solutionem ab OLIVIER datam hic brevissimis verbis sequatur.

I. Rotae cylindricae exteriores et interiores.

Superficies, φ et φ_1, cylindri sunt, quorum generatrices axibus paralellae sunt.

a. Sectiones orthogonales superficierum, φ et φ_1, sunt epicycloïdes planae.

Instrumentum acutum ex. §. 5 indicatur per, S; est planum, V, axibus paralellum; circulus auxiliaris situs est in plano circulorum primitivorum; φ et φ_1 sunt cylindri, eorumque sectiones orthogonales sunt curvae involventes spatium a sectione plani, V, et plani circulorum primitivorum percursum. Circulus auxiliaris intra unum extra alterum circulorum primitivorum volvitur. Hae curvae sunt eaedem epicycloïdes quae describuntur eo puncto, in quo planum, V, circulum auxiliarem secat. Unicum exemplum hic allatum sufficiet ad demonstranda ea quae §. 5 dicta sunt: scilicet unam superficierum φ et φ_1 involvere spatium ab altera percursum. Quum circulus, D, primus intra circulum, C_1, volvitur (rolt) et porro extra circulum, C, punctum quoddam hujus circuli describit duas epicycloïdes, *ab* et AB, et erit AB curva involvens omnes positiones curvae, *ab*, si haec motum rotatorium cum circulo, C_1, participatur. Nam tangant, fig. 2, circuli, C et C_1, se invicem in puncto, α, et eos ambo tangat circulus, D, in eodem puncto; secabit circulus, D, epicycloïdem, *ab*, in aliquo puncto, *m*, adeo ut sit Arcus $\alpha\ a$ = Arcus $\alpha\ m$; sed propter proprium motum circuli *c*, est Arcus $\alpha\ a$ = Arcus α A; igitur Arcus $\alpha\ m$ = Arcus α A; igitur punctum *m* pertinet ad epicycloïdem AB. Duae illae epicycloïdes se invicem tangunt in puncto *m*, quia, ob generalem epicycloïdum proprietatem, linea u m earum communis est normalis.

b. Sectio orthogonalis superficiei, φ_1, est epicycloïs plana, et superficiei, φ, radius circuli, C; circulus auxiliaris situs est in plano circulorum primitivorum, ejusque radius aequalis est dimidio radii circuli, C. Instrumentum secans est planum, V, axibus paralellum, continens axem, A, et igitur coincidit cum superficie φ. Tales rotae dentatae dicuntur *spoorraderen met flanken.*

c. Superficiei, φ, sectio orthogonalis est circulus, δ, cujus centrum, d, situm est in circulo primitivo, C; sectio superficiei, φ_1, est curva paralella epicycloïdi a puncto, d, descriptae. Tali modo construuntur rotae dentatae cum laternis (tandraderen met schijfloopen, roues à lanternes). S, hic est superficies circulo-cylindrica et circulus auxiliaris identicus est cum circulo, C.

d. Sectiones superficierum, φ et φ_1, sunt circuli evolutiones perfectae (volkomene ontwindingen des cirkels, développantes de cercles parfaites). S, est planum axibus paralellum; circuli auxiliaris radius est infinitus, transit ille igitur in lineam rectam, L, sitam in plano circulorum primitivorum.

II. Rotae conicae exteriores et interiores.

Superficies, φ et φ_1, sunt coni quorum apex (top) est in puncto, in quo axes se invicem secant.

a. Directrix coni, φ, est epicycloïs sphaerica; coni, φ_1, autem epicycloïs plana in plano circuli, C_1. Circulus auxiliaris in eodem plano est; S, est planum continens punctum, in quo axes se invicem secant.

b. Directrix coni, φ, est epicycloïs sphaerica; coni, φ_1, radius circuli, C_1, Dicuntur hae rotae *kamraderen met flanken*. S coïncidit cum φ; circulus auxiliaris est in plano circuli, C_1, ejusque radius aequalis est dimidio radii circuli, C_1.

c. Superficies directrix coni, φ_1, est sphaera, B, cujus centrum est in circulo primitivo, C_1; coni φ est superficies canalis (kanaal-oppervlak, surface canal) descripta a sphaera, B, dum ejus centrum epicycloïdem sphaericam describit. Hae rotae, *kamraderen met schijfloop* (engrenages coniques a lanterne) dictae, facile ex I. *c.* deduci possunt.

d. Directrix duorum conorum, φ et φ_1, sunt evolutiones circuli. Circuli auxiliaris centrum est in puncto, in quo axes se invicem secant, ejusque planum continet lineam angulum axium dividentem in duos angulos, quorum sinus sunt ratione inversa axium celeri tatum. S est planum.

III. Rotae dentatae conjunctae cum paxillis dentatis (*Tandstaven*, Engrenages à cremaillère droite).

Quod ad has rotas attinet tantum descriptae sunt in casu, quo directio asseris (staaf) perpendicularis est axi rotae, quamquam rei ipsius natura docet, quoque hic posse applicari conjunctionem duorum axium non in eodem plano sitorum.

a. Dentium rotae superficies est cylindrica, ejusque sectio est evolutio circuli primitivi. Asseris dentium superficies planum est directioni asseris perpendiculare. Circuli, C_1, radius est infinitus; circulus auxiliaris est linea recta circulum, C, tangens.

b. Asseris dentium superficies est cylindrica, ejusque sectio est epicycloïs; rotae dentium superficies est planum axem rotae continens. Radius circuli, C, est infinitus; circulus auxiliaris situs est in plano circuli, C_1; diameter circuli, C_1, aequalis est radio circuli auxiliaris. S planum est axem rotae continens.

Apud speciem *a* rota asserem ducit; apud speciem *b* rotam ducit asser. Apta conjunctione horum systematum novum formatur rotarum reciprocarum (wederkeerig tandraderwerk, engrenage reciproque), apud quas vicissim asser et rota ducere aut duci possunt.

c. Superficies dentium rotae, C, est cylindrus revolutionis, cujus generatrices paralellae sunt axi rotae aut laternae (schijfloop); sectio orthogonalis est circulus, B, cujus centrum est in circulo primitivo, C. Superficies φ, est cylinder, cujus sectio est curva paralella cycloïdi a puncto, *b*, percursae dum C secundum lineam primitivam motu rotatorio movetur. Circulus auxiliaris coïncidit cum, C_1. S est cylindrus cujus sectio est B.

d. Superficies, φ_1, dentium asseris est cylindrus revolutionis, cujus generatrices perpendiculares sunt asseris directioni, et cujus sectio est circulus B, cujus centrum est in circulo primitivo, C_1. φ est cylinder, cujus sectio est curva paralella evolutioni circuli primitivi, C; circulus auxiliaris convenit cum, C, et, S, cum, φ.

IV. Paxilli dentati circulares cum rotis dentatis conjuncti. (Engrenages à cremaillère circulaire).

Si apud rotas conicas primitivi circuli, C et C_1, transeunt in conos, apicem habentes in puncto, in quo axes se invicem secant, unusque horum conorum fit planum, haec quarta nascitur rotarum dentatarum species.

a. Directrix coni, φ, est epicycloïs sphaerica; directrix coni, φ, est epicycloïs plana in plano circuli C sita. Circulus auxiliaris est in plano circuli, C; S est planum continens apicem conorum primitivorum.

b. Directrix coni, φ_1, est epicycloïs sphaerica; coni, φ, superficies directrix est planum continens axem rotae.

c. φ_1, est planum continens axem; coni, φ, directrix est evolutio circuli, C. Hae rotae sunt cum flancis.

d. φ_1, est conus, cujus apex est in puncto, in quo axes se invicem secant, et qui tangit sphaeram B, cujus centrum, *b*, situm est in circulo primitivo, C_1; φ, est conus tangens superficiem canalem, descriptam a sphaera B, dum ejus centrum evolutionem circuli, C, describit.

e. φ, est conus tangens sphaeram B, cujus centrum est in circulo primitivo C; φ_1 est conus cujus superficies directrix est superficies canalis descripta a sphaera B, dum ejus centrum describit epicycloïdem sphaericam.

V. Rota dentata conjuncta cum cochlea infinita. Hic tantum axes non in eodem plano supponuntur.

7. Duodeviginti hae rotarum species facile ex generali methodo deducuntur; observationes sequentes docebunt rotas dentatas quoque construi posse, si axes non in eodem plano siti sunt.

III.

ROTAE DENTATAE QUARUM AXES NON IN EODEM PLANO SUNT.

1. Si rotarum dentatarum descriptores et constructores ex theoria superficierum involventium et involutarum (omwikkelende en omwikkelde oppervlakken, surfaces enveloppes et enveloppées) exiissent, non per longum tale temporis spatium rotae hyperboloïdicae ignotae mansissent. Solutio universalis problematis de determinanda forma dentium hic quoque complures dat solutiones.

Sint axes arbitrarie in spatio dispositi, A et A_1. In distantia minima axium sit iterum punctum, x, dividens distantiam illam in duas partes ratione inversa celeritatum axium; circulus auxiliaris iterum arbitrarius per hoc punctum transeat; elementa constructionis theoreticae parata sunt. Sit.

a. S planum continens punctum, x, concidens cum circulo, C, si nunc circulus auxiliaris volvitur per peripheriam circuli, C, superficies involvens spatium a plano S percursum erit cylindrica, et ejus sectio est epicycloïs a puncto, x, descripta; φ, erit in universo superficies devolubilis, quia nascitur motu plani, sed quia hoc planum axem, A_1, non secat sub angulum constantem, in universo non erit helicoïdalis.

b. Sit diameter circuli auxiliaris aequalis radio circuli, C, nascitur rota dentata cum flancis.

c. Transeat radius circuli auxiliaris in lineam rectam, L, sitque S planum, quod primae directioni paralellum movetur, in universo nascuntur rotae, quarum dentes formantur superficiebus helicoïdalibus devolubilibus (ontwikkelbare schroefvlakken, surfaces helicoïdales développables); sit porro S cochlea triangularis, dentium superficies erunt similes superficies.

d. Sit linea, L, in plano circuli primitivi, C, fit φ cylindrica superficies, cujus generatrices paralellae sunt axi A, cujusque directrix est evolutio circuli, C; φ, est superficies helicoïdalis devolubilis, cujus linea reversionis (keerlijn, arête de rebroussement) est helix descripta in cylindro cujus axis est A_1, cujusque sectio est circulus, C. Harum rotarum species tantum singularis forma est casus generalis sub *c*.

e. Si ob certas causas rotae conjungi debent laterna, sit S cylindrus, cujus generatrices axi, A, paralellae sunt tangentes sphaeram B, cujus centrum situm est in circulo primitivo, C; φ_1 tunc fit superficies devolubilis descripta planis tangentibus superficiem canalem, quam sphaera B describit, in illis punctis, in quibus caracteristicae (circuli) hujus superficiei canalis secantur a circulis, secundum quos superficies cylindrica, S, tangit sphaeram B.

2. Methodus generalis quo forma dentium determinaretur, sine dubio esset illa quae ex theoria superficierum involventium et involutarum exiret. Sit aequatio superficiei involutae, hic instrumenti acuti, plani scilicet

$$z = Ax + By + D;$$

coëfficientes tres erunt functiones cujusdam parametri arbitrarii. Sit horum coëfficientum unus $= a$, aequatio plani hac forma potest reddi

$$z = a + x.\ \varphi\ (a) + y.\ \psi\ (a)$$

et proveniet aequatio generatricis ex aequationibus

$$z = a + x.\ \varphi\ (a) + y.\ \psi\ (a)$$
$$o = 1 + x.\ \varphi^1 (a) + y.\ \psi^1 (a)$$

et eliminatione parametri a ex aequationibus

$$z = a + x.\ \varphi\ (a) + y.\ \psi\ (a)$$
$$o = 1 + x.\ \varphi'\ (a) + y.\ \psi^1\ (a)$$
$$o = \quad x.\ \varphi''\ (a) + y.\ \psi''\ (a)$$

proveniet aequatio linea reversionis.

Relatio inter coëfficientes plani inveniri debet ex conditionibus motus, et igitur deduci possunt e curvae figura, quam describit aliquod punctum plani secundum lineam rectam primae directioni paralelli moti, dum haec linea rotat circa axem fixum.

Aequatio hujus superficiei veresimile simplicia daret eventa in disquistione naturae et quantitatis attritus. Hanc aequationem tamen illa sub forma reddere, quae aptissima videretur, mihi non contigit. Olivier constructionem geometricam dedit, quae ad huc sufficit.

3. Attamen operae pretium est accuratius paulisper agere de curva, quam quoddam punctum plani instrumenti, S, percurret duplici motu, tum instrumenti tum axis.

Si planum, V, secat axem, A, in puncto, a; ex hoc puncto cum radio R descriptus sit circulus in hoc plano. Sit linea, L, arbitraria in spatio sed commune punctum habeat cum circulo illo, non in eodem plano sita, angulum φ cum hoc plano faciens. Moveatur superficies S paralella suae primae directioni secundum lineam L, dum illa immutata quod attinet ad radium circuli rotatur circum axem, A; velocitas superficiei secundum, L, sit v, et velocitas rotationis lineae, L, sit v_1. Omnia puncta hujus superficiei hoc duplici motu curvas in spatio describent.

Si velocitates v et v_1 eaedem sunt et linea L sita est in plano V, haec curva jam longe nota est; facile enim intelligitur punctum, in quo, S, secat lineam L, descripturum esse evolutionem perfectam circuli, et evolutionem prolongatum circuli cum linea perpendiculari ex a in directionem lineae L uti radio descripti, si linea, L, in plano circuli sita hunc circulum secat. Si linea L tsansit per punctum aliquod circuli et punctum fixum axis A, haec linea ipsa describit superficiem conicam, et punctum, in quo S lineam secat, describit spiralem, cujus projectio in plano circuli erit spiralis Archimedis.

Si linea L paralella est axi A superficiem circulocylindricam describit, et punctum, in quo L ab instrumento secatur, helicem describere debet. Si linea L non in eodem plano est ac axis, describit hyperboloïdem revolutionis, et punctum aliquid instrumenti curvam percurrit in hac hyperboloïde sitam, quam ex analogia et secundum OLIVIER dicimus *Evolutionem hyperboloïdicam circuli*, si curvae suppositionibus antecedentibus natae dicuntur *Evolutiones circuli planae- conicae- cylindricae.*

4. Si radius circuli ex puncto a descripti est minima distantia inter axem et lineam L, et igitur hic circulus est faux hyperboloïdis revolutionis, haec curva projicitur in planum circuli secundum evolutionem correptam (verkorte ontwinding, développante raccourcie) hujus circuli. Pars enim I lineae L quodam temporis spatio percursa, aequalis arcui, quem L motu rotatorio

percursit, projicitur in tangentem circuli secundum lineam, cujus longitudo est $= \mathrm{I}.\ sin\ \varphi$, quum φ est angulus quem facit linea L cum axi A, et est $\mathrm{I}.\ sin\ \varphi < \mathrm{I}$. Igitur projectio curvae est evolutio correpta, quae in perfectam transit si angulus φ fit rectus.

Si circulus de quo loquimur, C, non est faux hyperboloïdis, fig. 3, et planum V semper est planum projectionis, tunc sit K circulus-faux projectus in hunc planum secundum circulum K'. Circumferentiae hujus circuli arcus sit ab, et in positione linae generatricis hyperboloïdis per punctum b transeuntis distantia $bx = ab$, tunc a et x ambo sunt puncta curvae δ, quae in planum V projicitur secundum aliam curvam δ'. Linea aL projecta est secundum aL', puncta x et d in x' et d'; nunc est

$$x'd' = x'a + ad'$$

$$ad' = \sqrt{aa^2 - ad'^2} = \sqrt{\varrho^2 - r^2}$$

$$x'a = xa.\ sin\ \varphi = \text{Arcus } ba.\ sin\ \varphi$$

igitur $$x'd' = \text{Arcus } ab.\ sin\ \varphi + \sqrt{\varrho^2 - r^2}$$

si ϱ est distantia inter L et A.

Sit nunc bg projectio generatricis transeuntis per punctum b, est

$$\angle\ gad' = \angle\ baa;\ \frac{\text{Arcus } gd'}{r} = \frac{\text{Arcus } ba}{\varrho}$$

$$\text{Arcus } ab = \frac{\varrho}{r}.\ \text{Arcus } gd'$$

$$x'd' = \frac{\varrho}{r}.\ sin\ \varphi.\ \text{Arcus } gd' + \sqrt{\varrho^2 - r^2}$$

Haec curva δ planum projectionis secat in puncto b et circulum faucem in puncto quodam y, quod projicitur in y'; est igitur

$$\text{Arcus } gd' = \text{Arcus } y'd' - \text{Arcus } y'g$$

Arcus $y'g$ ex suppositionibus aequalis est parti generatricis inter planum projectionis et circuli faucis $= \dfrac{ad'}{sin\ \varphi} = \dfrac{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}{sin\ \varphi}$; sit hic arcus B, tunc est.

$$\frac{B}{\varrho} = \frac{\text{Arcus } y'g}{r} \text{ aut } \frac{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}{\varrho .\ sin\ \varphi} = \frac{\text{Arcus } y'g}{r}$$

et igitur

$$x'd' = \frac{\varrho}{r}.\ sin\ \varphi.\ \text{Arcus } y'd'$$

et erit δ' evolutio perfecta correpta aut prolongata circuli si $\dfrac{\delta}{r}.\ sin\ \varphi = >$ aut < 1 est.

5. Huc usque velocitates superficiei et lineae L, easdem supposuimus, sed si diversae sunt, et v et v_1 quidem, invenitur aequatio $\varrho = \dfrac{I}{2\pi}$, si est I illa pars lineae L, quam punctum decurrit, dum L totam facit revolutionem secundum circulum cujus radius est ϱ.

6. Hae constructiones geometricae nunc dant primo loco rotas sub a § 1 memoratas: describat axis A_1 hyperboloïdam revolutionis circum A, construantur diversae positiones plani mobilis, ibi S vocati, et secetur totum systema duobus planis paralellis. Haec plana secant S S′ S″.... secundum lineas rectas s s' s''.... et s_1 s_1 s_1''.... Construantur lineae curvae l et l_1, quae has lineas rectas tangunt, et lineis rectis conjungantur puncta contactus curvae l et linearum s s' s''.... cum illis curvae l, et linearum s_1 s_1' s_1''.... Hae lineae sunt superficiei generatrices.

7. In casu c §. 1 in universo sit A axis circa se

ipsum rotans velocitate v, et linea recta L cum A faciens, angulum φ, cujus minima distantia ab axi A est r; S superficies sibi ipsi paralella et velocitate v mota secundum lineam L. Punctum s, in quo L a superficie S secatur, percurrit lineae L longitudinem I, dum A totam revolutionem facit; igitur $2\pi\varrho = \mathrm{I}$. Per singula puncta s' s'' s'''.... superficiei S construantur lineae rectae L′ L″ L‴.... paralellae lineae L; sint r' r'' r''' harum linearum minimae distantiae ab axi. Puncta s s' s''... describent evolutiones hyperboloïdicas circuli δ δ' δ''.... projectas in plana V V′ V″ axi perpendicularia, et minimas distantias r r' r''.... continentia, secundum evolutiones circuli perfectas, prolongatas aut correptas circulorum K K′ K″.... in his planis radiis r r' r''... descriptorum, si

$$\varrho .\ \sin\varphi = > \text{aut} < r\ r'\ r'' \ldots.$$

Si superficies S secatur plano Z paralello lineis A et L, secundum lineam aut curvam ξ, et distantia hujus plani ab axi vocetur r, singula puncta hujus lineae describent evolutiones hyperboloïdicas projectas secundum evolutiones perfectas, prolongatas aut correptas, quum est

$$\varrho .\ \sin\varphi = > \text{aut} < 1.$$

Unicum tantum est planum Z, cujus omnia puncta cum superficie S communia describent evolutiones hyperboloïdicas perfectas. Sit nunc P cylinder, cujus axis est A, et sectio orthogonalis circulus radio $\varrho = \dfrac{\mathrm{I}}{2\pi}$ descriptus. P lineas L′ L″ L‴...., in quibus sita sunt puncta s' s'' s'''.... lineae ξ, secabit in punctis p' p'' p'''.... Per haec puncta transeant plana V′ V″ V‴.... perpendicularia axi; in his planis circuli contruantur C′ C″ C‴.... radio ϱ. Lineae L′ L″ L‴... rotatione describunt hyperboloïdes; puncta s' s'' s'''... hyperboloïdicas evolutiones circuli. Superficies φ involvens spatium a superfiicie S percursum est superficies involvens has curvas. Puncta, in quibus hae curvae superficiem S tangunt, ea sunt quae simul ad S et φ pertinent. Ut igitur inveniatur punctum lineae ξ simul pertinens ad S et φ, quaerendum est punctum, in quo planum T tangens superficiem S transit per unam tangentium θ' θ'' θ'''.... curvarum δ' δ'' δ'''....

Si planum T volvitur secundum lineam ξ circum S, et aliud planum formatur tangentibus diversis curvarum δ' δ'' δ'''.... duo haec plana se invicem secant secundum, curvam ε, quia habent tangentem communem ξ. Punctum, in quo ξ et ε se secant est punctum quaesitum. Si superficies S secatur planis Z′ Z″ Z‴..... paralellibus plano Z, plurima talia puncta inveniuntur, quorum locus geometricus, curva λ, est caracteristica superficiei. Si S venerit in positione S′ haec constructio reiterari potest et sic porro, usque ad numerum definitum caracteristicarum superficiem φ definientum. Idem fieri potest pro superficie φ_1, hac conditione quidem

$$\frac{2\pi.\,\varrho}{2\pi.\,\varrho_1} = \frac{v}{v_1}$$

si sunt v et v_1 axium velocitates.

In positionibus singularibus superficiei S, duae caracteristicae superficierum φ et φ_1 se invicem secabunt in puncto y; curva quae haec puncta conjungit est linea contactuum sequentium.

8. Omnia quae supra diximus quoque valet si S

est planum, uti supponitur sub d § 1. Igitur problematis de forma dentium hanc solutionem habemus ab OLIVIER datam et eleganter sic expositam.

Sit A axis rotans circum se ipsum velocitate v; P planum cum A faciens angulum α'; L linea recta conjuncta cum A, cum hac linea faciens angulum α, et angulum γ cum plano P; definiatur superficies involvens spatium a plano P sibi ipsi paralello moto secundum L, dum L rotat circum axem, percursum. Facile intelligitur hanc superficiem φ esse superficiem devolubilem helicoïdalem et plane definitam, si helix E hujus superficiei linea reversionis nota est.

Si punctum l, in quo linea L secatur a plano P per L facit viam I, dum axis facit totam revolutionem, erit

$$2\pi\varrho = \mathrm{I}.$$

Projectio lineae L in planum circuli sit L′; H′ linea secundum quam planum P secat planum circuli. Lineae L′ et H′ se invicem sub angulo λ secabunt in quodam puncto y.

Dum axis facit revolutionem l secundum L percurrit distantiam I, y igitur secundum L′ distantiam I $\sin\alpha$; et H′ primae directioni paralella movebitur et discribet partem I. $\sin\alpha.\ \sin\lambda$ lineae e centro circuli C perpendicularis in lineam H′. Helix E igitur descripta est in cylindro revolutionis cujus axis est A, et sectio est circulus, cujus radius R est

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{I}.\ \sin\alpha.\sin\lambda}{2\pi} = \varrho.\ \sin\alpha.\ \sin\lambda.$$

Altitudo (hoogte van schroefgang, pas de la vis) helicis E dependet ab angulo α', quia est

$$h.\ \mathrm{tang}\,\alpha' = \mathrm{I}.\ \sin\alpha.\ \sin\lambda$$

Construatur nunc cylindrus J, cujus axis est A, cujusque radius est R, et construatur planum K cylindrum tangens et in planum P perpendiculare; linea recta D, secundum quam plana K et P se invicem secant, est caracteristica superficiei φ involventis spatium a P percursum. φ et P se invicem tangent secundum lineam D. Transeat nunc P in P′ obtinetur secunda caracteristica D′.

Si igitur sunt A et A_1 duo axes non in eodem plano siti, construuntur duae superficies helicoïdales, se curvicem ducentes, axibus A et A_1 velocitates tribuentes quae sunt ratione constanti, hoc modo.

Sit v velocitas angularis axis A, et v_1 axis A_1. Construatur distantia minima horum axium, et sit in ea punctum m hanc distantiam dividens in duas partes ratione inversa velocitatum axium. Sint circuli C et C_1 axibus perpendiculares; L linea perpendicularis in distantiam minimam l, faciens angulum α cum A, et igitur angulum $\alpha-\beta$ cum A_1; sit P planum secans planum circuli C secundum lineam H′, et circuli C_1 secundum lineam H'_1; λ' et λ'_1 sint anguli quos H′ et H'_1 faciunt cum l. Punctum, in quo P ab L secatur percurrit viam I, dum axis facit totam revolutionem. Planum P describit duas superficies helicoïdales devolubiles φ et φ_1 axibus A et A_1 affixas. Superficierum φ et φ_1 lineae reversionis sunt helices E et E_1 sitae in cylindris, quorum radii sunt R et R_1

$$R = \varrho .\ \sin\alpha .\ \cos\lambda'$$

$$R_1 = \varrho_1 .\ \sin(\alpha - \beta)\ \cos\lambda'_1 ;$$

plana K et K_1 perpendicularia in planum P, cylindros J et J_1 tangentia, P secabunt secundum lineas D et D_1.

Hae lineae communes sunt superficiebus φ et φ_1 et plano P. Punctum z, in quo hae lineae se invicem secant, est punctum, in quo φ et φ_1 se invicem tangunt. Velocitate axium nunc perveniet planum P in positionibus P′ P″....; plana K et K_1 non mutantur. Varia obtinebuntur puncta z' z''.... in quibus successive se invicem superficies φ et φ_1 tangent. Haec puncta z z' z'' sunt sita in linea recta communis sectio planorum K et K_1, perpendicularis in planum P, et cylindros J et J_1 tangens.

Infinitus est numerus problematis solutionum, quia R et R_1 mutantur cum angulis λ' et λ'_1, et altitudines helicum cum angulis, quos planum P facit cum axibus.

9. Inter omnes solutiones una est, quae dat superficies φ et φ_1 se invicem secundum lineam rectam tangentes. Hic caracteristicae D et D_1 coïncidunt, sicut plana L et L_1; cylindri J et J_1 ergo debent habere planum tangentiale commune perpendiculare in P. P igitur debet esse perpendiculare in planum duobus axibus A et A_1 paralellum; lineae H′ et H'_1 sunt invicem paralellae ac distantiae mimimae l. Anguli λ' et λ'_1 sunt nulli, ergo

$$\cos\lambda' = \cos\lambda'_1 = 1$$
$$R_1 = \varrho.\ \sin(\alpha - \beta)$$
$$R = \varrho.\ \sin\alpha$$

Ita construuntur rotae dentatae, quae constituunt genus singulare rotarum helicoïdalium.

10. Ut ambae superficies φ et φ_1 transeant in superficies cylindricas, lineae D et D_1 paralellae debent esse axibus A et A_1. Faciat nunc linea N, communis sectio planorum K et K_1, angulum rectum cum duobus

axibus A et A_1, fiunt φ et φ_1 superficies cylindricae, quarum sectiones sunt evolutiones circulorum radiis R et R_1 descriptorum, et quia est

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \text{ erit } \frac{\sin \alpha . \cos \lambda'}{\sin (\alpha - \beta) \cos \lambda'_1} = 1.$$

Sunt igitur hae rotae cylindricae, quarum axis A per arbitrarium angulum volvitur circa lineam Y, secundum quam dentes rotarum cylindricarum se tangunt, quae rotae quoque descripta sunt in *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale. Paris an.* 1829 *et* 1830, ubi vocantur rotae oscillantes (Engrenage oscillant).

11. Ex dictis in § 8 facile intelligitur superficiem S posse arbitrariae formae esse. Nam superficies S potest reduci ad varia plana, S secundum elementum planum tangentia. Ex his sequitur facilis ac in artibus quam maxime utilis modus dentes rotarum hyperboloïdicarum formandi, scilicet, ut jam monuimus, tornando alterius rotae dentes cochlea mari, alterius cochlea femina conjucta (de vaar en de daarbij behoorende moer van de schroef) cujus operandi modi descriptio tamen non intra horum observationum limites cadere quisquis facile intelliget.

12. Helicoïdalis haec superficies, quae, ut ex dictis de hyperboloïdica evolutione circuli patet, est singularis forma superficiei cylindricae, cujus basis est evolutio circuli, simul inservit ad determinandam formam tribuendam dentibus asseris (tandstaaf), cujus directio non perpendicularis est in axem rotae.

13. Non tantum ex methodo generali circulo auxiliari determinari potest forma dentium rotarum, quarum

axes non in eodem plano sunt, sed etiam si superficies φ_1, habetur involvens spatium ab altera superficie φ percursum certis suppositionibus ratiocinatio ducit ad rotas dentatas qua jam sub § 9 memoraximus.

Sint enim, fig. 4, axes A et A_1 non in eodem plano siti, ac faciant inter se angulum φ; sit A verticalis. Dividatur iterum puncto x minima distantia horum axium ratione inversa axium velocitatum et describantur circa axes A et A_1 duo cylindri S et S_1 quorum radii r et r_1 hae partes distantiae minimae sunt. Generatrices B et B_1 cylindrorum S et S_1 per punctum x transeuntes sitae sunt in plano R duos cylindros tangenti. Planum horizontale hoc planum R secat secundum lineam rectam L, tangentem circulum et ellipsin, secundum quos cylindri plano horizontali secantur, et pertinent puncta, in quibus haec linea tangit circulum et ellipsin, ad generatrices B et B_1 se invicem in puncto x secantes. Si in plano horizontali describitur, δ, evolutio circuli, secundum quam S secatur plano horizontali, initium habens in g et secans L in puncto m, erit $bm = bg$. Per punctum m transeat linea verticalis V in plano R sita, tangens igitur cylindrum S_1 in quodam puncto v sito in linea generatrici B_1. Rotet curva δ circum axem A, ducet illa lineam V, eamque sibi ipsi paralellam in plano R movebit. In nova quadam poistione curvae et lineae V est $mm' = vv_1 . \sin \varphi$. Igitur generatrices superficiei φ_1 motae a cylindro, cujus directrix est δ, et cujus generatrices sunt paralellae axi, tales debent esse, quod paralellae axi A motu veniant in planum R. Si volvitur linea V circum cylindrum S, nascitur helix; tangentes hujus helicis formant superficiem devolubilem, et proprietatem requisitam habent. Haec superficies igitur est φ_1. Quia V axi A paralella est, generatrix superficiei helicoïdalis axem A_1 secat sub angulo φ; invenitur ergo altitudo helicis, superficiei lineae reversionis, aequatione

$$h = \frac{2\pi r_1}{tang\, \varphi}.$$

Igitur si φ est superficies cylindrica, cujus generatrices paralellae sunt axi A, et cujus directrix est curva δ, erit φ_1 superficies devolubilis, cujus linea reversionis est helix ξ. Ex hoc rotarum genere facile deduci potest systema rotae dentatae ac asseris dentati non perpendicularis in axem rotae.

IV.

ROTAE DENTATAE QUARUM ATTRITUS EST VOLVENS (ROLLENDE WRIJVING).

1. Hae rotae in universo habent dentes helicoïdales. Per longum temporis spatium insolutum remansit problema constructionis rotarum, quarum attritus est volvens, dum velocitates axium essent constantes, postquam EULER has duas conditiones conjugari posse negabat. Haec opinio adeo pervulgata est, quia mathematici nesciebant rotas dentatas posse construi, quarum punctum contactus arbitrarie in spatiam se movet, et talium rotarum attritum volventem esse posse.

2. Mechanicus J. WHITE tamen judicio Institutae Francicae subjecit novas rotas dentatas, his proprietatibus gaudentes, quod diversis temporis stadiis tum ab una, tum altera rota descripti anguli idem essent, et quod curvae, secundum quas dentes se invicem tangebant, sicut duo circuli in eodem plano rotarent. Hae rotae quoque definiuntur et describuntur in memoria, quam dedit OLIVIER in *Journal de Mathematiques de* J. LIOUVILLE *Tome* IV. Quisquis rei aliquantum conscius ac peritus hanc memoriam inspiciet, facile videbit rotas dentatas, quas OLIVIER descripsit, et quarum attritum revera volventem esse putamus, non convenire cum rotis dentatis WHITIANIS, a Clar. J. P. DELPRAT descriptis in *Tijdschrift voor het Instituut*, ubi ingeniosae disquisitioni subjiciuntur. Descriptio, quam dedit DELPRAT sumta est ex opusculo ipso a WHITE edito, et porro convenit cum descriptione data a DELAUNAY et ab ipsissimo THEOD. OLIVIER in duabus aliis memoriis in eodem *Journal de Mathematiques de* LIOUVILLE *Tome* V, unde rectam hanc descriptionem suspicamur, quamvis opusculum WHITE nobis inspicere non contigit.

3. DELPRAT porro demonstrat contactum rotarum dentatarum a WHITE constructarum non esse in uno puncto, et igitur attritum non posse volventem esse. OLIVIER contra demonstravit proprietates quae vulgo et ab illo quoque rotis WHITIANIS tribuuntur. Hujus opinionis differentiae causa fortasse quaerenda est e modis diversis, quibus duo illi mathematici has rotas comtemplati sunt. Rotae dentatae enim ita a DELPRAT describuntur, ut ex hoc, uti invenitur in

memoria laudata, sequatur has rotas se invicem non in uno puncto tangere et attritum non esse volventem, scilicet superficies, quae dentium formam definiunt sunt helicoïdales, et ita constructae, ut superficierum una φ e. g. formetur successione epicycloïdum planarum, quae lineas rectas conjunctas, aut in eadem altitudine sitas, alterius superficiei φ_1 ducant. Itaque si systematis rotarum dentatarum singulae rotae, planis in axes perpendicularibus secantur et dividentur in zonas tenuissimas, et singulae illae zonae volvuntur per angulum parvum circum axem, nascitur superficies helicoïdalis dentes rotarum definiens. Haec constructio quoque applicari potest apud alias rotarum cylindricarum species et pro his etiam dat rotas dentibus helicoïdalibus.

Hujus memoriae elementa hic ex pervulgato diario transcibere plane inutile videtur, sed couclusionem addere liceat, scilicet harum rotarum dentes se invicem non in uno puncto tangere, sed lineam contactus majorem esse linea secundum quam dentes rotarum cylindricarum se invicem tangunt, et quantitatem attritus apud has rotas vulgo majorem esse quam apud rotas usitatas.

4. Descriptio, quam OLIVIER dedit aliquantum a descriptione nuper relata differt. Invenitur enim in *Journal de* LIOUVILLE sic:

In plano axes A et A_1 continenti, fig. 5, construatur linea L axibus paralella, distantias habens ab axibus, p et q, inversa ratione axium velocitate. Construantur triangula dua abc et $a'b'c'$, basi subnixa lineis generatricibus duorum cylindrorum, circa axes A et A_1 descriptorum. Apex trianguli $a'b'c'$ situs est in puncto ubi latus trianguli *abc* secat lineam L. Haac triangula circa axes A et A_1 ita moveantur ut lateris *ab* puncta et punctum a' describant helices. Altitudines helicum a punctis lateris *ab* et a puncto a' formatarum sunt ratione inversa lineae L distantiarum ab axibus. Dentes se invicem successive tangunt secundum duas helices S et *s*. Si axes A et A_1 se invicem secant linea L ibit per punctum, in quo axes se secant, et dividit angulum quem inter se faciunt in duos angulos, quorum sinus sunt ratione inversa velocitatum axium; curvae S et *s* tunc transeunt in spirales Archimedis. Talium rotarum revera attritus potest esse volvens. Nam transeat per lineam L planum, fig. 6, perpendiculare in planum in quo axes A et A_1 siti sunt; sit *g* in hoc plano linea recta arbitraria transeuns per punctum a', in quo triangula *abc* et $a'b'c'$ figurae 5 se invicem tangunt. Haec linea *g* transit in helicem S, si plano, in quo sita est, circumvolvitur cylindrus idealis, cujus axis A, et cujus radius *p* est. Altitudo helicis dependet a longitudine circuli rectificati, quem punctum a' describit, et invenitur catheta trianguli rectangularis $a'xy$, in quo $a'x$ aequalis est circuli rectificationi. Itidem *g* transit in helicem *s* in cylindro circum axem A_1, cum radio *q*, descripto, cujus helicis altitudo est linea $y'x'$ et eodem modo invenitur. Helicum altitudinum igitur eadem est ratio ac distantiarum *p* et *q*, et igitur eadem relatio est longitudinum helicum. Volvantur nunc cylindri A et A_1 circum axes, aut motum rotantem habent super planum tangens in quo *g* sita est, illae helices se devolvent secundum lineam *g*, et si velocitates revolutionis cylindrorum sunt ratione inversa distantiarum lineae L ab axibus, illae helices iisdem temporis spatiis se devolvent secundum eamdem partem lineae g. Cylindri igitur motu rotatorio se invicem ducunt. Si in plano axium construitur linea recta per punctum a' transiens, et in eodem plano duae curvae Φ et Φ' construuntur, quarum tangens communis est linea G, et datur plano motus rotatorius primo circum axem A, deinde quoque circum axem A_1, ita ut curvae constructae sese moveant secundum helices S et s, obtinentur duae superficies helicoïdales φ et φ_1 se invicem tangentes in puncto a'. Apud rotas a WHITE constructas et ab OLIVIER descriptas illae curvae transeunt in lineam rectam ab et punctum a'. Superficies φ igitur est superficies illa, qua utitur ad cochleam triangularem construendam et φ_1 est helix.

5. Rotae illae tamen maxima accuratione construi debent, ut finem, ad quem destinantur, persequi pergerent. Hoc enim evidenter dependet a cura, qua altitudo est definita helicum, quas puncta lineae ab et punctum a' describunt. Quum altitudines helicum per punctum a' transeuntium, ad cylindrum A aut A_1 pertinentium, non sunt eadem ratione ac p et q, postulatis non satisfaciunt rotae; sed quia tangentes helicum a diversis punctis lineae ab descriptis, minores faciunt angulos cum axi, quum haec puncta axi appropin quant, et helicum altitudines ab hoc angulo dependent, punctum a' cum alio puncto lineae $a'b'$ convenire cogere possumus, quod describit helicem, cujus altitudo est ad altitudinem helicis a puncto a' descripti, ita ac p ad q; sed hoc tantum fieri potest si motus ab uno ad alium transfertur axem uno denti, sed motus regularis

semper in duobus cilindris majorem dentium numerum postulat. Hocce incommodum quoque his rotis proprium est, quod minima axium dispositionis perturbatio attritus mutat naturam. Nam si secundum OLIVIER et HACHETTE dicitur *attritus directus* (frottement direct), qui exstat inter duas curvas lineam tangentem communem habentes, et *attritus angularis* (frottement angulaire) qui est inter curvas, quarum tangentes in puncto contactus se invicem secant, et distinguuntur duo at-attritus iterum in attritum volventem et repentem (rollende en glijdende wrijving), rotarum in § 4 descriptarum attritum directum volventem esse dicere possumus. Attamen si una rota aliquantum locum suum mutat, si e. g. axis A_1 aliquantum volvitur circum lineam L, ceteris paribus, distantia inter axes sola mutabitur. Helices S et *s* nunc se invicem non directe tangunt in aliquo puncto in linea L sito. Hae lineae equidem se devolvent in lineam L, sed attritus est angularis volvens. Attritus porro tantum erit volvens dum satisfactum erit aequationi

$$\frac{p}{q} = \frac{v}{V}$$

si v et V sunt velocitates axium A et A_1. Sint H et h altitudines helicum S et s, erit

$$H = 2\pi.\ p.\ cot\ \alpha$$
$$h = 2\pi.\ q.\ cot\ \alpha;$$

si α est angulus, quem linea g facit cum cylindrorum axibus. Igitur si non satixfactum est aequationi $\frac{p}{q} = \frac{v}{V}$, etiam conditioni $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$ non erit satisfactum. Aliam quidem helicem nunc invenire possumus cylindro A_1 affixum, talem ut si ejus altitudo est h', sit

$$\frac{H}{h'} = \frac{v}{V} \text{ et } \frac{p.\ cot\ \alpha}{q.\ cot\ \alpha'} = \frac{v}{V};$$

ita ut motus non interrumpitur, et velocitatum ratio sit eadem, sed helicum partes inter dua plana parallella non sunt eaedem, et igitur est attritus angularis repens.

Rotae conicae a WHITE inventae facile e cylindricis deduci possunt.

6. OLIVIER quoque construxit rotas dentatas attritu volventi affixas axibus non in eodem plano sitis, easque descripsit in *Journal de* LIOUVILLE *Tome* IV.

Projectum sit axium systema in duo plana in se invicem perpendicularia, quorum planum verticale duobus axibus paralellum est, fig. 7; projectio verticalis unius axis est oV perpendicularis in communem sectionem planorum projectionis (grondlijn), ejusque projectio horizontalis est o, scilicet si axis situs est in plano verticali. Projectiones axis A_1 sunt oH et nH'; igitur est *on* projectio horizontalis distantiae minimae axium. In hac distantia minima sit punctum p dividens distantiam in duas partes, *op* et *pn*, ratione inversa velocitatum axium. Si nunc e punctis o et n describuntur circuli radiis *op* et *pn*, in planis perpendicularibus in axes A et A_1, plana horum circulorum, C et C_1, se invicem secant secundum *on*, et circuli se invicem tangunt in p, adeo ut motu rotatorio axium A et A_1 illorum attritus est volvens angularis (hoeksgewijze rollend).

In universo si duae superficies, φ et φ_1, axibus A et A_1 affixae, se invicem ducunt motu rotatorio axium, puncta, in quibus hae superficies successive se invicem tangunt, in spatio sita sunt in linea quadam curva vel recta. Haec linea contactuum insequentium superficies φ et φ_1 motu secabit in diversis punctis, in universo sitis in curvis Φ et Φ_1. Si hae curvae in spatio moventur, motu rotatorio axium A et A_1 attritus erit volvens, si e singulis punctis lineae contactuum insequentium lineis perpendicularibus in axes demissis, illae lineae sunt inversa ratione velocitatum axium, aliis verbis, si linea contactuum insequentium sita est in hyperboloïde revolutionis, cujus puncta omnia distantias habent ab axibus A et A_1 inversa ratione axium velocitatum.

Si nunc linea L construitur per punctum p transeuns, ita ut ejus distantiae ab axibus sint ratione inversa axium velocitatum, et rotat haec linea circum axes A et A_1, nascentur duae hyperboloïdes revolutionis, P et Q, se invicem secundum lineam L secantes.

Quodcunque punctum lineae L describit circa axes circulos se invicem, ad instar circulorum C et C_1, tangentes et quorum attritus est angularis volvens. Si igitur curva ξ descripta in P, affixa erat axi A, haec curva motu vestigium aliquid ξ_1 relinqueret in alia superficie Q; duarum illarum curvarum axibus A et A_1 affixarum una super alium rotando vehitur.

Linea, L, geometrice sic construitur: est recta, cujus projectio horizontalis est paralella lineae terrae (grondlijn), et cujus projectio verticalis est linea oG, angulum α dividens in duos angulos, quorum sinus sunt inversa ratione axium velocitatum. Si ex quodam puncto m hujus lineae construuntur lineae, mh et mq, perpendiculares in projectiones verticales axium, sunt illae projectiones verticales distantiarum hujus puncti ab axibus. Distantia hujus puncti ab axi A est om', hypothenusa trianguli rectangularis, cujus basis et catheta sunt $m'o' \equiv op$ et mh; distantia ab axi A_1 est $m'r'$, hypothenusa trianguli rectangularis, cujus basis et catheta sunt $m'n' = pn$ et $n'r' = mr$.

Est

$$om' : mr' = m'o' : m'n' = op : pn = v : V;$$

et igitur linea, oG, pg, est linea quaesita.

Sic ut apud rotas cylindricas et conicas, loco curvis ξ et ξ_1 uti possumus superficiebus sese tangentibus in harum curvarum punctis. Simplicissima erit dentium forma si superficies una redit ad curvam ξ_1 et si altera nascitur motu lineae rectae, et igitur est cochlea hyperboloïdalis.

His rotis dentatis non in haeret incommodum, quod in conicis et cilindricis rotis a WHITE constructis videmus, scilicet rotas posse habere contactus positiones arbitrarias et hoc modo perturbari et mutari naturam attritus, quia plana tangentia superficies dentium in illis punctis, in quibus dentium superficies se invicem tangunt, non sunt paralella.

V.

JACTURA QUANTITATIS ACTIONIS (VERLIES AAN ARBEID) ROTARUM HELICOÏDALIUM.

1. Rotae dentatae attritu volventi, quamquam theoretica disquisitione perdignae, tamen propter difficultatem earum constructionis practicae minus videntur mereri computationem quantitatis attritus. Si quidem plane constaret rotas posse confici, quarum attritus volvens est, tamen haec computatio inutilis esset, nisi coëfficiens attritus volventis accurationibus experementis subjecta, et quaestio prorsus soluta erit de mutatione, quam quantitas attritus subiit differentia attritus angularis et directi. Rotae dentatae a WHITE constructae et descriptae memoratae sunt a Clar. DELPRAT, in *Tijdschrift voor het K. N. Instituut.* Eventa hujus examinationis docent, in rotis helicoïdalibus WHITIANIS attritum esse majorem quam in rotis pervulgatis conicis et cylindricis, decrescere enim cum angulo, quem spirae helicis faciunt cum axi rotae, et igitur semper majorem esse quam si ille angulus sit 90^{0}, in quo casu dentes helicoïdales in cylindricos mutantur.

2. Rotarum dentatarum constructarum ab OLIVIER tamen accuratior attritus computatio non omni utilitate carere videtur. Quamquam non necessarium est, harum rotarum attritum minorem esse attritu rotarum cilindricarum aut conicarum, ad earum usum legitimandum, formula attritus deducta e conditionibus, sub quibus, et e modo, quo rotae constructae sunt, utilis esse po-

test ad nonnulla definienda de plano, quo harum rotarum dentes formantur.

Ad solvendam quaestionem de natura harum rotarum attritus determinetur linea contactuum insequentium superficierum φ et φ_1 dentes formantium, et investigetur utrum haec linea sita sit in hyperboloïde revolutionis, cujus puncta distantiam habent ab axibus ratione inversa axium velocitatum.

Aequatio hujus lineae ex dictis III § 8 secundum OLIVIER sic deducitur.

Axes A et A_1 inter se faciant angulum ψ. Distantia minima axium, l, sit axis Y, et axis A sit axis X et punctum, in quo distantia minima secat axem A, sit origo coordinatarum. Aequationes axis A_1 sunt

$$z = x.\ cot\ \psi$$
$$y = l$$

sit P planum, cujus aequatio est

$$y = mx + nz + p.$$

Sectio communis hujus plani et plani xy est

$$y = mx + p$$
$$z = o.$$

Plani C_1 perpendiculare in axem A_1 aequatio est

$$z = x.\ tang\ \psi$$

et igitur communis sectio plani P et plani C_1 est

$$z = x.\ tang\ \psi$$
$$y = x\ (m + n.\ tang\ \psi) + p;$$

igitur angulorum λ' et λ'_1 sunt

$$cos.\ \lambda' = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$cos.\ \lambda'_1 = \frac{m + n.\ tang\ \psi}{\sqrt{1 + tang^2\ \psi + (m + n.\ tang\ \psi)^2}}$$

igitur

$$R = \varrho.\ sin\ \alpha.\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$R_1 = \varrho_1.\ sin\ (\alpha - \psi).\ \frac{m + n.\ tang\ \psi}{\sqrt{1 + tang^2\ \psi + (m + n.\ tang\ \psi)^2}}$$

Projectiones lineae N, perpendicularis in planum P, in plana C et C_1 cum axi Y angulos faciunt complementarios angulorum λ' et λ'_1. Sit nunc in universo aequatio plani P aut superficiei S

$$z = f\ (x,\ y)$$

aequationes normalis in quodam puncto (x' y' z') sunt

$$x - x' + \frac{df}{dx'}\ (z - z') = o$$

$$y - y' + \frac{df}{dy'}\ (z - z') = o\ ;$$

ejusque projectio in planum xy est

$$\frac{df}{dy'}\ (x - x') = \frac{df}{dx'}\ (y - y')$$

linea perpendicularis ex origine coordinatarum in hanc lineam demissa est $= R$; igitur

$$R = x'\ \frac{df}{dy'} - y'\ \frac{df}{dx'},$$

haec projectio facit cum axi Y angulum λ;

$$sin\ \lambda = \frac{\frac{df}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{df}{dx'}\right)^2}}$$

et

$$x'\ \frac{df}{dy'} - y'\ \frac{df}{dx'} = \varrho.\ sin\ \alpha\ \frac{\frac{df}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy'}\right)^2}}$$

Ex hac aequatione conjuncta cum $z' = f(x', y')$ invenitur caracteristica superficiei φ.

Transeat nunc S in S′ motu superficiei secundum lineam L, cujus aequationes sunt

$$y = \varrho$$
$$z = x \ cot \ \alpha,$$

erit aequatio superficiei S′

$$z - a. \ cot \ \alpha = f([x - a], y) = f_a(x, y);$$

transit igitur

$$R = \varrho. \ sin. \ \alpha. \ sin. \ \lambda$$

in

$$x' \frac{df_a}{dy'} - y' \frac{df_a}{dx'} = \varrho. \ sin \ \alpha. \ \frac{\frac{df_a}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{df_a}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{df_a}{dx'}\right)^2}}$$

et haec aequatio conjuncta cum $z' - a. \ cot \ \alpha = f_a(x', y')$ novam dat caracteristicam cuperficiei φ.

Si a eliminatur ex hic aequationibus obtinetur aequatio $\psi(x' \ y' \ z') = o$ locus geometricus caracteristicarum, secundum quas φ et S se invicem tangunt. Eodem modo obtinetur

$$cos \ \lambda'_1 = \frac{tang \ \psi - \frac{df}{dx'}}{\sqrt{\left((1 + tang^2 \psi) \left(\frac{df}{dy'}\right)^2 + \left(tang \ \psi - \frac{df}{dx'}\right)^2\right.}}$$

et

$$R_1 = \frac{z' \frac{df}{dy'} - x'. \ cot \ \psi \frac{df}{dy'} + (y' - l) \left(1 + cot \ \psi \frac{df}{dx'}\right)^2}{\sqrt{(1 + cot^2 \ \psi) \left(\frac{df}{dy'}\right)^2 + \left(1 + cot \ \psi \frac{df}{dx'}\right)^2}}$$

ex aequatione

$$\frac{(z' - x'. \ cot \ \psi) \frac{df}{dy'} + (y' - l) \left(1 + cot \ \psi \frac{df}{dx'}\right)}{\sqrt{1 + cot^2 \ \psi) \left(\frac{df}{dy'}\right)^2 + \left(1 + cot \ \psi \frac{df}{dx'}\right)^2}} =$$

$$= \varrho_1 . \sin(\alpha - \psi) . \frac{\tan\psi - \frac{df}{dx'}}{\sqrt{(1+\tan^2\psi)\left(\frac{df}{dy'}\right)^2 + \left(\tan\psi - \frac{df}{dx'}\right)^2}}$$

Conjuncta cum $z' = f(x', y')$ caracteristica invenitur superficiei φ_1; et ex aequatione

$$\frac{(z' - x' . \cot\psi)\frac{df_a}{dy'} + (y' - l)\left(1 + \cot\psi \frac{df_a}{dx'}\right)}{\sqrt{1 + \cot^2\psi)\left(\frac{df_a}{dy'}\right)^2 + \left(1 + \cot\psi \frac{df_a}{dx'}\right)^2}} =$$

$$= \varrho_1 \sin(\alpha - \psi) . \frac{\tan\psi - \frac{df_a}{dx'}}{\sqrt{(1+\tan^2\psi)\left(\frac{df_a}{dy'}\right)^2 + \left(\tan\psi - \frac{df_a}{dx'}\right)^2}}$$

Conjuncta cum $z' - a \cot\alpha = f_a(x', y')$ invenitur alia caracteristica superficiei φ_1. Eliminatione d ex hisce aequationibus obtinetur $\psi_1 (x'\ y'\ z') = o$ aequatio loci geometrici caracteristicarum, secundum quas φ_1 et S se invicem tangunt. Aequationum conjunctione

$$\psi\ (x'\ y'\ z') = o$$
$$\psi_1 (x'\ y'\ z') = o$$

invenitur aequatio lineae ξ, loci geometrici punctorum, in quibus successive se tangunt superficies φ et φ_1.

Sit S planum, cujus aequatio est

$$z = Ax + By + C$$

erit

$$\frac{df}{dx'} = \frac{df_a}{dx'} = A ; \frac{df}{dy'} = \frac{df_a}{dy'} = B.$$

Superficies φ et S se tangunt secundum lineas rectas sitas in plano

$$Bx' - Ay' = \varrho . \sin \alpha \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = M \ldots\ldots (a)$$

Superficies φ_1 et S itidem se tangunt secundum lineas rectas sitas in plano, cujus aequatio est

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(z' - x' \cot \psi) B + (y' - l)(1 + \cot \psi . A)}{\sqrt{(1 + \cot^2 \psi) B^2 + (1 + \cot \psi . A)^2}} = \\ &= \varrho_1 \sin(\alpha - \psi) . \frac{\tan \psi - A}{\sqrt{(1 + \tan^2 \psi) B^2 + (\tan \psi - A^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

ξ est igitur linea recta communis sectio planorum (a) et (b). Aequatio (a) est projectio hujus lineae in planum xy;

$$Bx - Ay = M$$

est linea perpendicularis in communem sectionem planorum P et xy. Projectio lineae ξ in planum zy est

$$Bz - (M + Ay) \cot \psi + (y - l)(1 + \cot \psi . A) = N,$$

si est

$$N = \varrho_1 \sin(\alpha - \psi)(\tan \psi - A) . \frac{\sqrt{(1 + \cot^2 \psi) B^2 + (1 + \cot \psi . A)^2}}{\sqrt{(1 + \tan^2 \psi) B^2 + (\tan \psi - A)^2}},$$

aut

$$Bz + y = N_1$$

si est

$$N_1 = N + M \cot \psi + l (1 + \cot \psi . A),$$

quae auquatio indicat projectionem lineae ξ in planum yz esse perpendicularem in hujus plani et plani P communem sectionem; est igitur linea ξ perpendicularis in planum P.

Si haec linea sita poterat esse in hyperboloïde revolutionis IV § 6 memoratae, quo attritus volvens fieret, obtineretur, eliminatione quantitatum x et y ex aequationibus hyperboloïdis et lineae, aequatio in z, cui quacunque valore z satisfieret. Illa aequatio erit secundae ordinis et formam habebit

$$K_2\, z^2 + K_1\, z + K_0 = o\,;$$

K_2 K_1 K_0 functiones sunt quantitatum A et B. Ex aequationibus conditionalibus (voorwaardensvergelijkingen)

$$K_2 = o\,;\; K_1 = o\,;\; K_0 = o$$

coëfficientes A et B determinarentur, et possunt igitur tantum habere valores singulares. Plani P positiones igitur paucae determinatae dant lineas ξ in hyperboloïde sitas. Rotarum ope cochleae feminae et maris ab OLIVIER constructarum in universo igitur non erit attritus volvens, sed tantum in illis punctis, quorum plana tangentia cum definitis plani P positionibus conveniunt. Lineam contactuum insequentium paralellam esse debere plano xz vidimus si attritus erit volvens; sed etiam in III §. 9 vidimus dentes se non amplius tunc tangere in uno puncto sed secundum lineam rectam, et igitur talem attritum non esse, qualem sub nomine attritus volventis mathematici designaverunt.

3. Formula ad computandam effecti diminutionem hoc modo inveniri potest.

Sit p pressio (drukking) quam dentes in puncto contactus efficiunt; et anguli, quos facit normalis in hoc puncto cum axibus X Y Z sint a b c. Haec linea normalis eadem est ac linea contactuum insequentium, linea enim perpendicularis in planum P et transeuns per punctum contactus normalis est superficiei involventis spatium ab hoc plano P percursum. Sint coördinatae puncti contactus x y z. Relatio inter has coördinatas invenitur ex aequatione lineae ξ paragraphi praecedentis, et simplificari potest observatione singularis positimis lineae ξ, semper transeuntis per punctum contactus situm in axi Y dividens distantiam axium A et A_1 inversa ratione axium velocitatum; est igitur

$$y = \varrho \frac{\cos a}{\cos a + \cos b \tan g\ \delta}$$

$$x = \frac{\cos a}{\cos b} \left\{ \varrho \frac{\cos a}{\cos a + \cos b . \tan g\ \delta} + \varrho \right\}$$

$$z = \frac{\cos b}{\cos c} \left\{ \varrho \frac{\cos a}{\cos a + \cos b . \tan g\ \delta} - \varrho \right\}$$

si δ est angulus variabilis, quem cum plano yz facit planum, in quo sita est linea punctum $(x\ y\ z)$ conjungens cum origine coördinatarum.

Pressio p in quodam puncto, si hujus puncti coördinatae et directio pressionis notae sunt, dissolvi potest in tria paria (koppels) in axes perpendicularia et tres vires. Par in axem Z perpendiculare tantum observationis argumentum est, vires et paria cetera punctis fixis aequilibrantur. Si haec dissolutio primum fit in systema axium quorum axis Z est axis A, distantia minima axium est axis Y, et deinde in systema coördinatorum axium, quorum axis Z est axis A_1 et axis Y iterum distantia minima axium, paria perpendicularia in hos axes excipi possunt paribus natis e viribus in distantiis definitis applicatis ad axem X.

In systemate e. g. axium coördinatarum, in quo axis A est axis Z invenitur par, N_1 perpendiculare in axem Z, natum e pressione p

$$N = [x \cos b - y \cos a]\ p$$

Applicetur nunc onus (de last) Q in plano xy in distantia R, perpendiculare in axem X; translatione hujus viris in axem Y nascitur par R Q, quod aequare debet par N. In superficie dentium alterius rotae itidem fit pressio p, quae, si dissolvitur secundum axium systema, in quo axis A_1 est axis Z, in quo coördinatae puncti contactus x_1 y_1 z_1 inveniuntur ex

$$x_1 = x \cos\psi - z \sin\psi;$$
$$z_1 = x \sin\psi + z \cos\psi;$$
$$y_1 = l - y,$$

et in quo cosinus angulorum a_1 b_1 c_1, quos facit normalis cum novos axes, sunt

$$\cos a_1 = \cos a \cos\psi + \cos c \sin\psi;$$
$$\cos b_1 = \cos b,$$

dabit par

$$N' = [x_1 \cos b_1 - y_1 \cos a_1]\, p$$
$$= [\{x \cos\psi - z \sin\psi\} \cos b + (y-l)\{\cos a \cos\psi + \cos c \sin\psi\}]p$$

Supponatur hoc par aequale pari R_1 K, natum si vis K perpendicularis in axem X applicatur in distantia R_1. Aequatio aequilibrii (evenwigts-vergelijking) nunc erit

$$R\, Q = R_1\, K$$

$$K = \frac{(x \cos\psi - z \sin\psi)\cos b + (y-l)(\cos a \cos\psi + \cos c \sin\psi)}{x \cos b - y \cos a} \cdot \frac{R}{R_1} Q$$

Si nunc ratio habetur attritus, directio pressionis mutari debet; non amplius est normalis in planum P, sed cum normali facit angulum μ, situm in plano normalem simul et lineam tangentem horizontalem puncti contactus continenti; igitur facit angulos a' b' c' cum axibus:

$$\cos a' = \cos\mu \cos a - \frac{\sin\mu \cos b}{\sin c}$$

$$\cos b' = \frac{\sin\mu \cos a}{\sin c} + \cos\mu \cos b.$$

Igitur N perpendiculare in axem A transit in

$$N_1 = \left\{ x\left(\frac{\sin\mu \cos a}{\sin c} + \cos\mu \cos b\right) - y\left(\cos\mu \cos a - \frac{\sin\mu \cos b}{\sin c}\right)\right\} p$$

et par perpendiculare in axem A_1 in

$$N'_1 = \left\{ (x\cos\psi - z\sin\psi)\left(\frac{\sin\mu\cos a}{\sin c} + \cos\mu\cos b\right) + (y-l)\left(\left[\cos\mu\cos a - \frac{\sin\mu\cos b}{\sin c}\right]\cos\psi + \cos\mu\cos c\sin\psi\right)\right\} p.$$

Est igitur

$$K = \frac{R}{R_1} Q \frac{(x\cos\psi - z\sin\psi)\left(\frac{\sin\mu\cos a}{\sin c} + \cos\mu\cos b\right) + (y-l)\left(\left[\cos\mu\cos a - \frac{\sin\mu\cos b}{\sin c}\right]\cos\ + \cos\mu\cos c\sin\psi\right)}{x\left(\frac{\sin\mu\cos a}{\sin c} + \cos\mu\cos b\right) - y\left(\cos\mu\cos a - \frac{\sin\mu\cos b}{\sin c}\right)}$$

diminutio effecti igitur est

$$V = K' - K$$

$$= \frac{(x\cos\psi - z\sin\psi)\left(\frac{\sin\mu\cos a}{\sin c} + \cos\mu\cos b\right) + (y-l)\left(\left[\cos\mu\cos a - \frac{\sin\mu\cos b}{\sin c}\right]\cos\psi + \cos\mu\cos c\sin\psi\right)}{x\left(\frac{\sin\mu\cos a}{\sin c} + \cos\mu\cos b\right) - y\left(\cos\mu\cos a - \frac{\sin\mu\cos b}{\sin c}\right)} . \frac{R}{R_1} Q -$$

$$- \frac{(x\cos\psi - z\sin\psi)\cos b + (y-l)(\cos a\cos\psi + \cos c\sin\psi)}{x\cos b - y\cos a} . \frac{R}{R_1} Q$$

In rotis dentatis III. § 9 est

$$\cos b = \cos c = o\,;\ \cos a = 1$$

$$y = \varrho\,;\ x = \varrho \tang \delta$$

igitur

$$V = \left\{ \frac{\varrho \tang \delta \cos \psi \sin \mu - \varrho_1 \cos \mu \cos \psi}{\varrho \tang \delta \sin \mu - \varrho \cos \mu} - \frac{\varrho_1 \cos \psi}{\varrho} \right\} \frac{R}{R_1} . Q$$

quae formula, quantitatibus ϱ et ϱ_1 diversis signis affectis, et substitutione valoris n ex aequatione

$$n = \frac{\varrho \sin \delta \sin \mu}{\cos (\delta + \mu)},$$

transit in

$$V = \frac{nR\,(\varrho + \varrho_1) \cos \psi}{R_1\, \varrho^2} . Q.$$

Si angulus ψ fit nullus $\cos \psi = 1$ et rotarum transit systema in systema rotarum cylindricarum, quarum dentium cylindricae superficies secantur plano horizontali secundum evolutiones circuli, quarum rotarum attritus dabit diminutionem effecti expressam formula

$$\frac{nR\,(\varrho + \varrho_1)}{R_1\, \varrho^2} . Q$$

quae invenitur DELPRAT, *Statica* 2^de^ Druk § 357, et in qua n habet eamdem valorem.

Rotarum dintatarum in observatione tertia § 9 memoratarum per attritum diminutio effecti crescit igitur inversa ratione quam angulus ψ. Sed quia hae rotae excellunt super rotas generales hyperloïdicas, quia est $\cos c = o$, et disquisitione Clar. DELPRAT probatum est, attritum rotarum dentibus helicoïdalibus munitarum eadem crescere ratione ac $\cos c$, quamvis fortasse singulari dispositione plani P attritus rotarum hyperboloïdicarum major potest esse quam qui est inter rotas cylindricas aut conicas, tamen sine dubio, has rotas hyporboloïdicas, ad transferendum motum inter duos axes non in eodem plano sitos inservientes, applicatione necessaria axis auxiliaris carentes, animadversione mathematicorum et practica applicatione ad artes prorsus dignos esse, concludimus.

THESES.

I.

Rotas dentatas axibus affixas non in eodem plano sitis non omni utilitate tum theoretica quum practica carere, contendimus.

II.

Rotae dentatae attritu volventi (*Tandraderen met rollende wrijving*) construi posse constat.

III.

Geometriae contemplationes et investigationes tantas difficultates non habent, quantae in altera Matheseos parte, quae Analysis dicitur, offerri possunt.

IV.

Nostratem SNELLIUM legem refractionis luminis reperisse, itaque CARTESIO hujus inventi honorem non tribuendum, contendimus.

V.

Telluris vera figura dubia.

VI.

Quae posuit Cel. LA PLACE decem principia calculi probabilitatis, revera non omnia ad hujus doctrinae fundamenta pertinent.

VII.

Geometria ex artibus atque e necessitate nata est.

VIII.

Non assentimur Cl. POUILLETO dicenti: Toute hypothèse est bonne, qui fait faire de nouvelles découvertes.

IX.

Theoria ARRAGONIS de aerolithis et sideribus cadentibus confirmatione eget.

X.

Prisma vitreum ad lumen prorsus decomponendum non valet.

XI.

Theoria MOSERI de lumine latenti improbabilis videtur.

XII.

Recte dixit Clar. JOH. MÜLLER: „Der Name *Contactelectricität*, *Berührungselectricität*, ist jedenfalls ein ganz unpassender und mag nicht wenig zur Verwirrung der Streitfrage beigetragen haben."

XIII.

Alchimiam penitus condemnare, uti cum sana ratione inconsentaneam, non possumus.

XIV.

Errant topographi in chartis semper in montium jugis ponentes lineam divisionis aquae fluvialis.

XV.

Ad explicandam existentiam Florae et Faunae tropicae in regionibus borealibus, antiquissimis temporibus, non opus est mutatione plani aequatoris.

Fig.1.

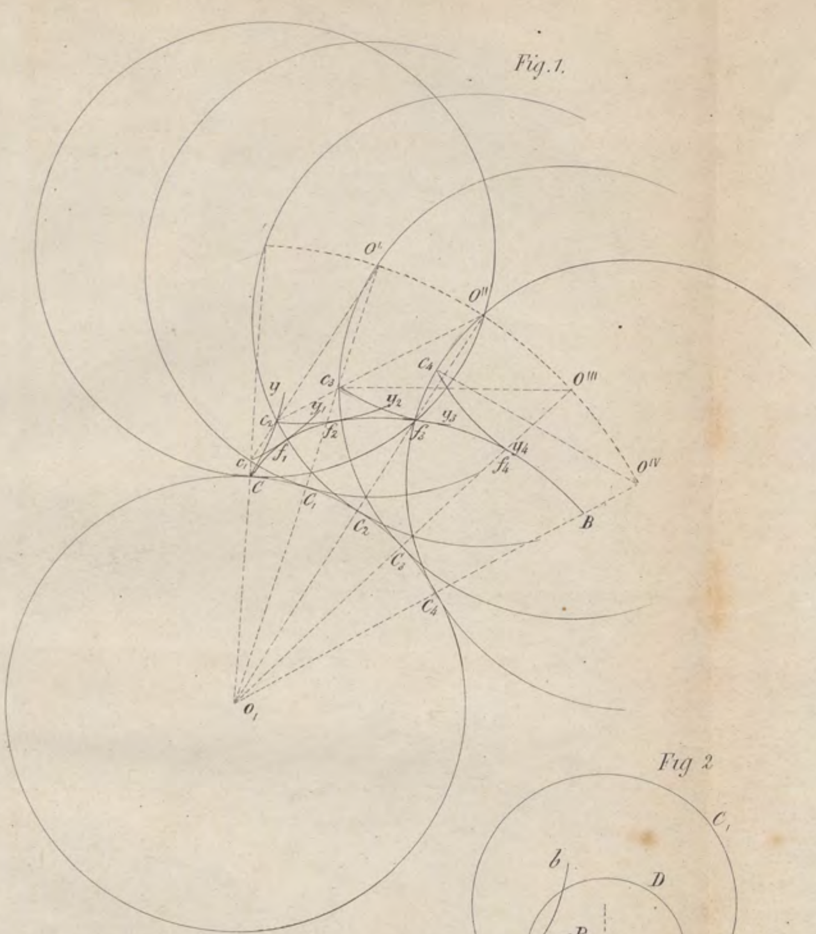

Fig.3.

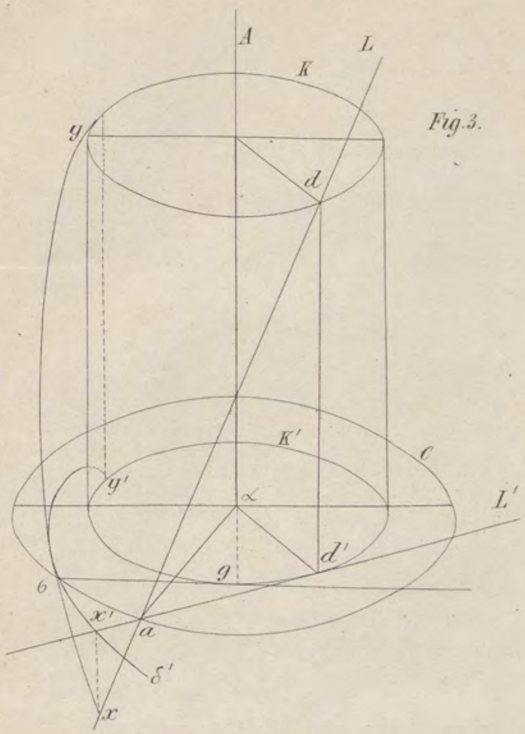

Fig.4.

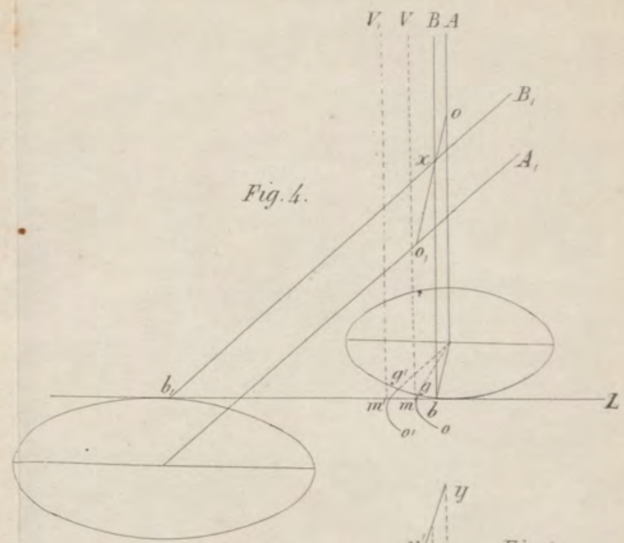

Fig 2

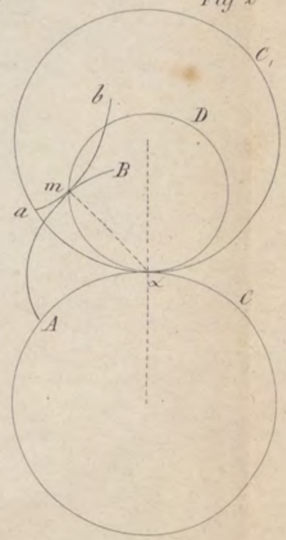

Fig.7.

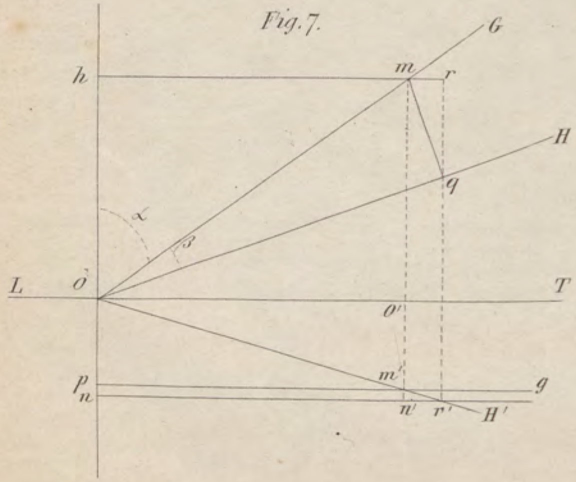

Fig.6.

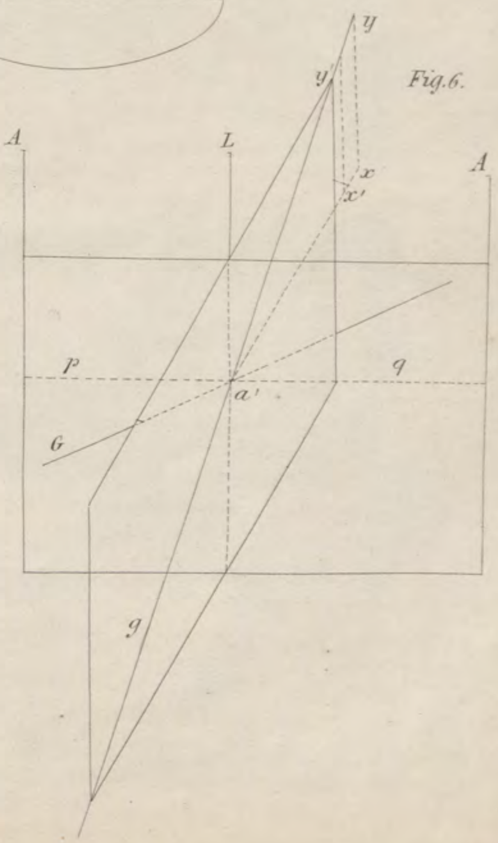

Fig 5