

50.

W. VAN LOGHEM.

THEORIE DER TERUGKAATSING

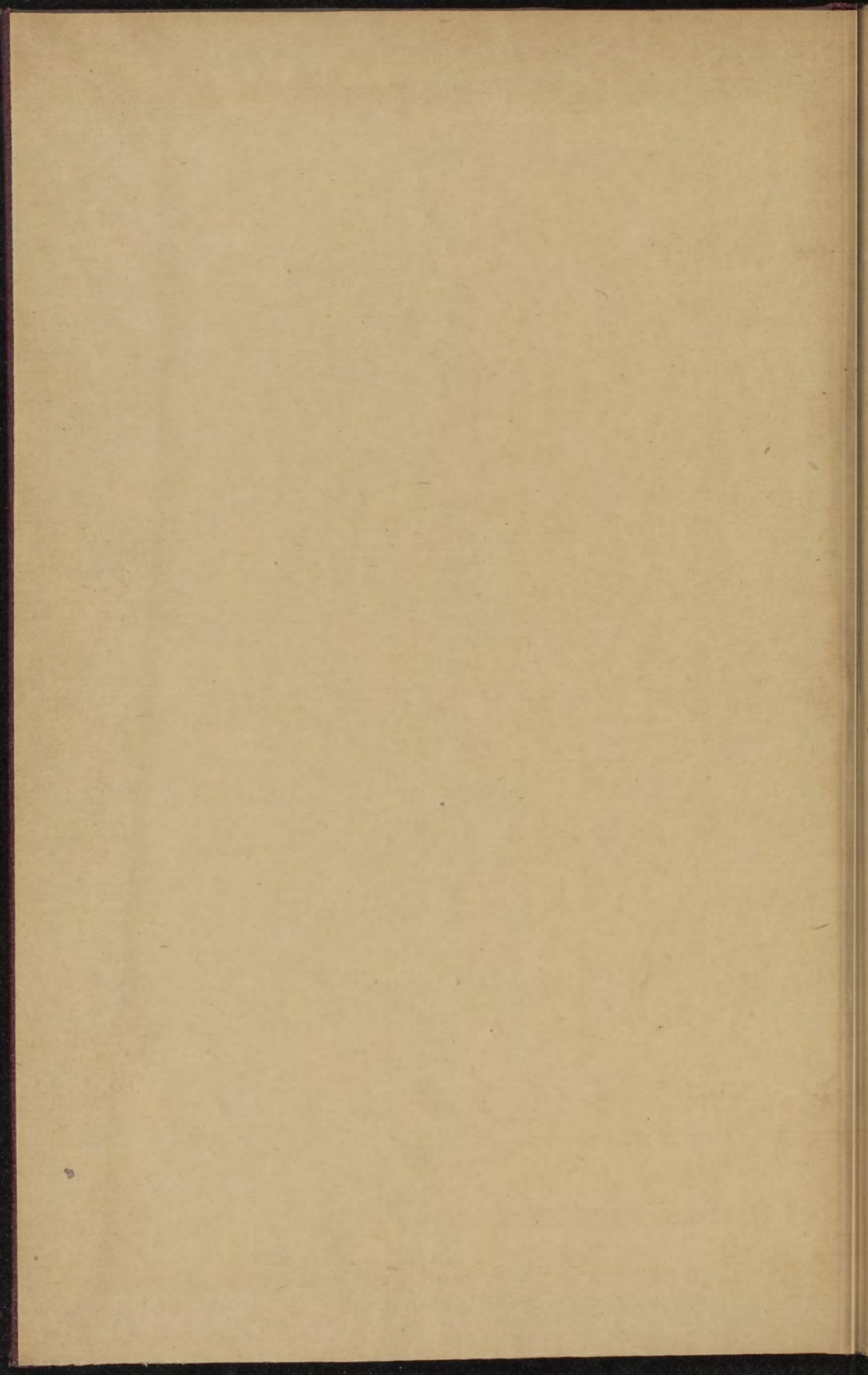
VAN HET

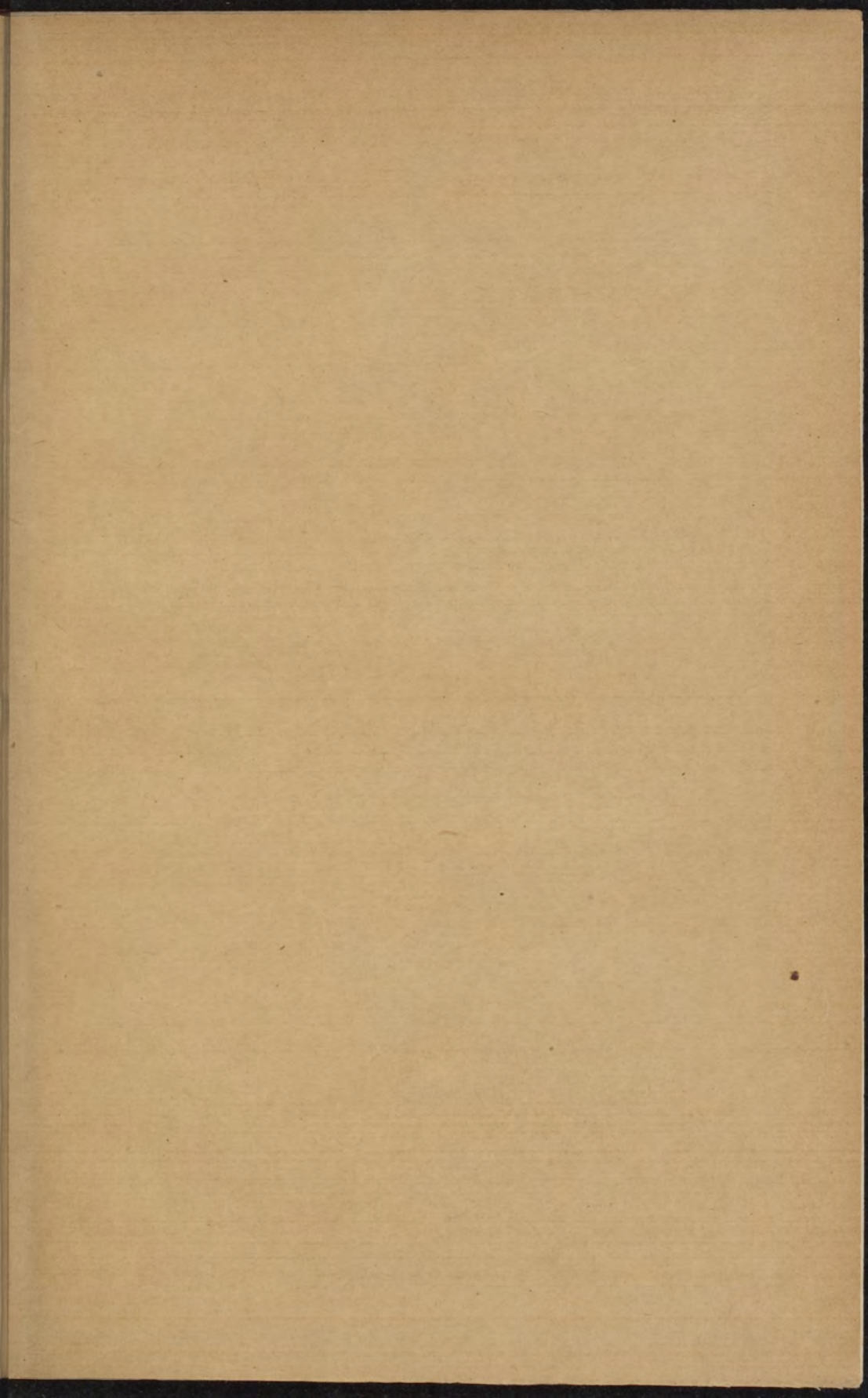
LICHT DOOR MAGNETEN.

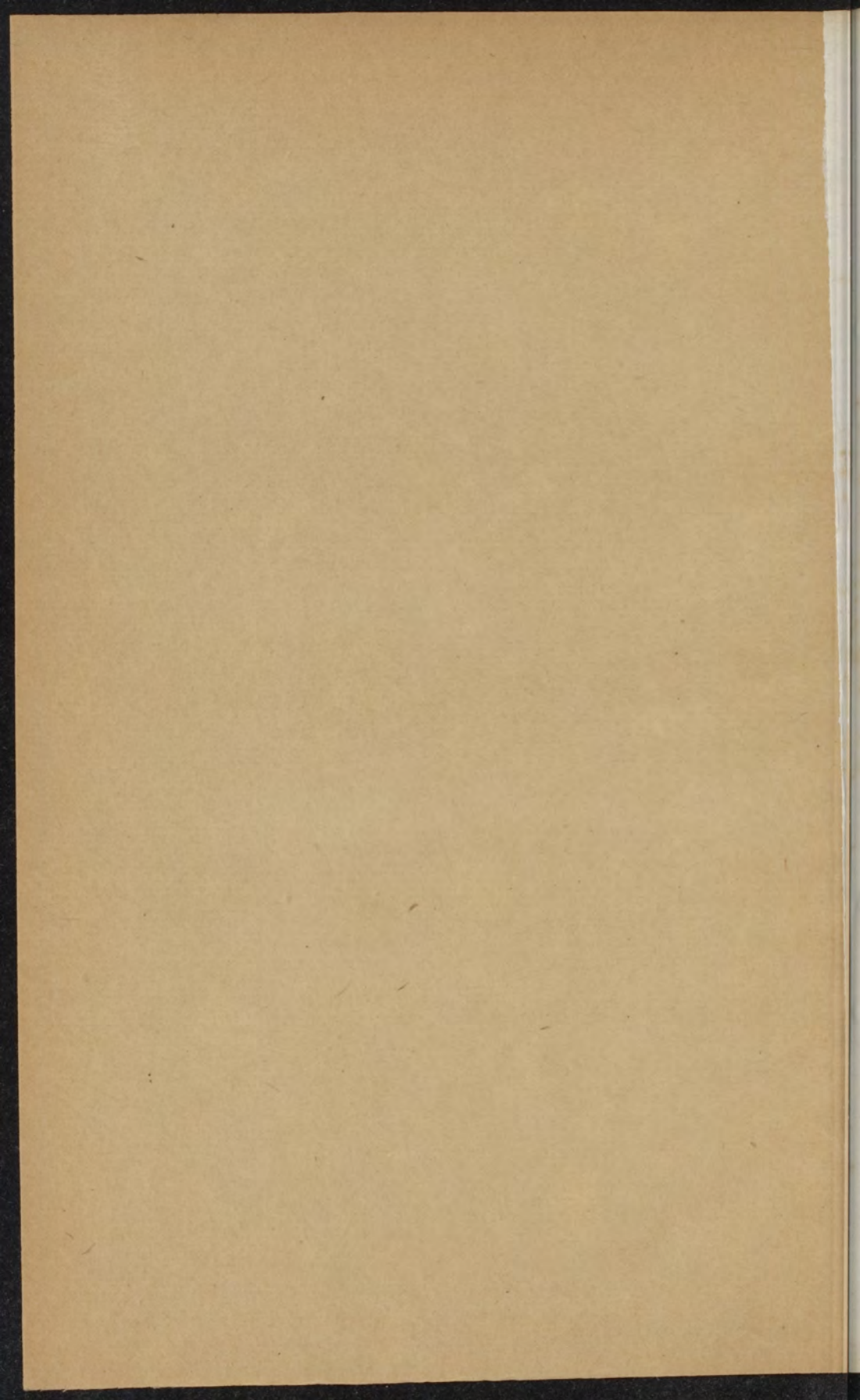


Diss Leiden

1883 nr 50







THEORIE DER TERUGKAATSING

VAN HET

LICHT DOOR MAGNETEN.



226
D. 5
30

THEORIE DER TERUGKAATSING

VAN HET

LICHT DOOR MAGNETEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^R. D. DOIJER,

Hoogleeraar in de Faculteit der Geneeskunde,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

op **Maandag den 12^{den} November 1883,**

des namiddags te 3 uren,

DOOR

WILLEM VAN LOGHEM,

GEBOREN TE DEVENTER.

LEIDEN. — E. J. BRILL.

1883.

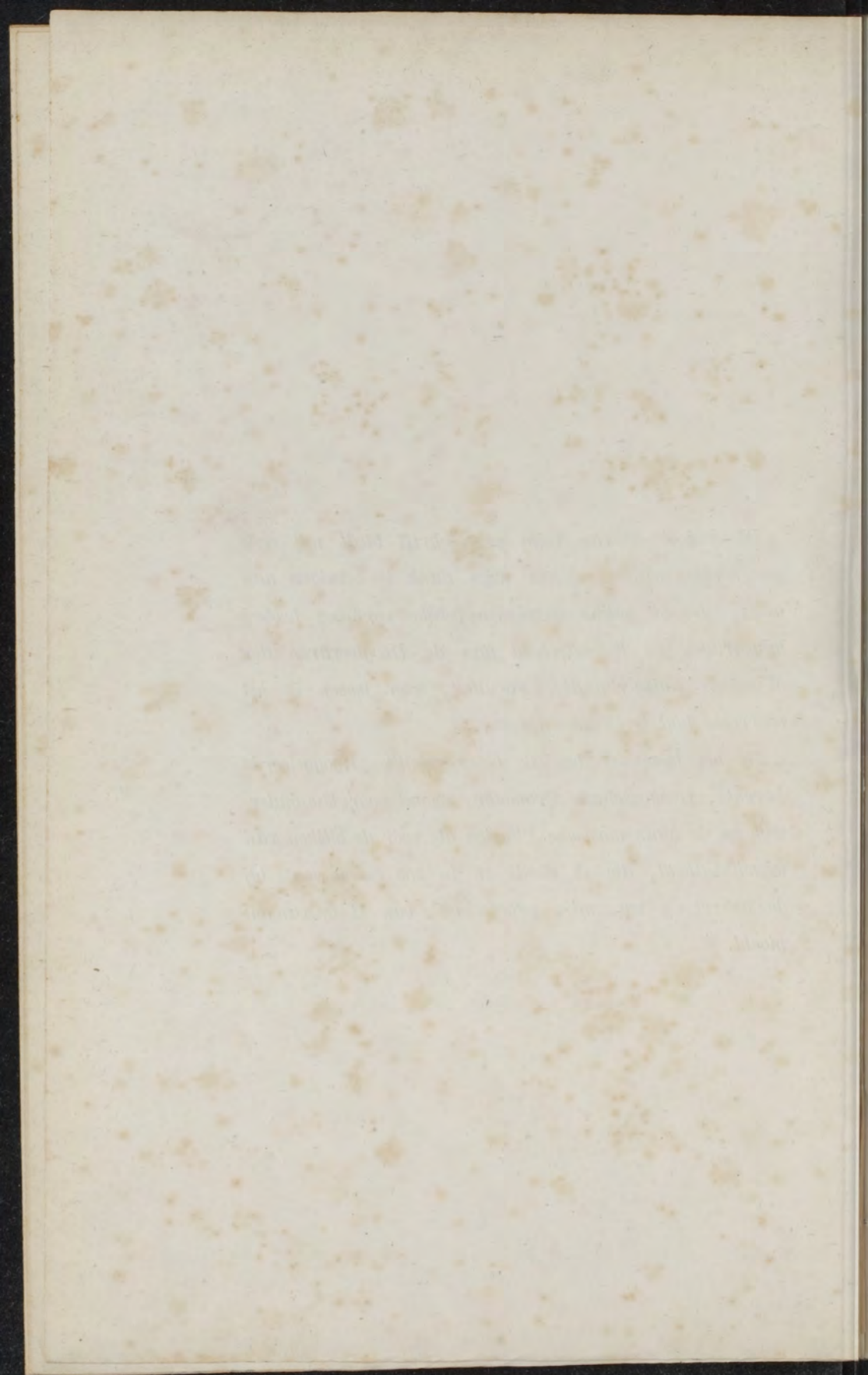


AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER MOEDER.

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY

De voltooiing van mijn proefschrift biedt mij eene gewenschte gelegenheid om mijn dank te betuigen aan allen, die tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen en inzonderheid aan de Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, wier lessen ik het voorrecht had te kunnen volgen.

In het bijzonder ben ik U erkentelijk, Hooggeleerde Lorentz, Hooggeschatte Promotor, zoowel voor Uw onderwijs in de Mathematische Physica als voor de blijken van welwillendheid, die ik steeds en in zoo ruime mate bij de bewerking van mijn proefschrift van U ontvingen mocht.



INLEIDING.

De verschijnselen door Kerr en Hall waargenomen.

§ 1. De physica tracht de verschijnselen, die zij tot het onderwerp harer studie kiest, saam te vatten tot een zoo klein mogelijk aantal groepen van onderling samenhangende feiten. Elk nieuw verschijnsel is voor haar belangrijk, in de hoogste mate echter dat, hetwelk op een verband wijst tusschen twee afzonderlijke groepen.

Tusschen de groep der electriche en die der optische verschijnselen werd het eerst een verband ontdekt door Faraday, toen hij in 1845 aantoonde, dat verschillende doorschijnende stoffen, in een magnetisch veld geplaatst, de eigenschap verkrijgen, het polarisatievlak van een bundel lineair gepolariseerd licht, die er doorheen gaat, over een zekeren hoek te draaien. Latere onderzoekingen hebben niet alleen de lijst der stoffen, die deze werking vertoonen, steeds uitgebreid, maar ook de wetten doen kennen, waaraan het verschijnsel gehoorzaamt; het bleek, dat de zoo even genoemde hoek evenredig is met den weg, dien het licht in het medium aflegt en met de

component der magnetische kracht volgens de voortplantingsrichting van den lichtbundel. Bovendien heeft men gevonden, dat het verschijnsel afhankelijk is van den aard der middenstof en zelfs niet in alle lichamen dezelfde richting bezit. Neemt men de proef op de bekende wijze met een electromagneet van Ruhmkorff met doorboorde kernen, dan stemt bij de meeste stoffen de richting, waarin het polarisatievlak gedraaid wordt, overeen met die, waarin de positieve stroom de windingen doorloopt. Verdet echter ontdekte, dat in zekere ferromagnetische middenstoffen, zooals eene sterke oplossing van ijzerchloride in aether of methylalcohol het polarisatievlak in tegengestelden zin gedraaid wordt.

§ 2. Nadat langen tijd het door Faraday waargenomen verschijnsel op zich zelf was blijven staan, kwam in 1876 Kerr op het denkbeeld, het optisch effect van magnetische krachten na te gaan bij eene *weinig doorschijnende* en sterk magnetische middenstof, nl. bij het ijzer (of staal). Wel is waar was hierbij een rechtstreeksch onderzoek van het doorgelaten licht niet doenlijk; maar evenals bij de gewone terugkaatsing van lineair gepolariseerd licht door metaaloppervlakken uit de constitutie van den gereflecteerden bundel afgeleid kan worden, hoe het gebroken licht geconstitueerd moet zijn, kon men verwachten, dat het door een magnetisch metaal *teruggekaatste* licht de bijzonderheden van de lichtvoortplanting in het metaal aan den dag zou brengen.

Inderdaad ontdekte Kerr bij het onderzoek van een door een magneet teruggekaatsen lichtbundel een aantal merkwaardige verschijnselen, die als gevolgen van den magnetischen toestand optreden. Deze verschijnselen zijn

het, die ik in dit proefschrift nader wensch te bespreken.

Kerr heeft twee reeksen van onderzoekingen omtrent de terugkaatsing van licht door magneten ingesteld. Bij de eerste reeks ¹⁾ was de richting der magnetische kracht loodrecht op het platte grensvlak van het metaal [Polaire Reflexie], bij de tweede reeks ²⁾ was zij evenwijdig aan het grensvlak van het metaal gericht [Aequatoriale Reflexie]. Zijne onderzoekingen omtrent de aequatoriale reflexie zijn vollediger en nauwkeuriger uitgevoerd dan die omtrent de polaire reflexie [l. c. pag. 177, art. 26].

§ 3. Polaire Reflexie.

Bij deze proeven gebruikte Kerr als spiegeland oppervlak het gepolijste platte grensvlak van een ijzeren cilinder. Om dien cilinder was een geleiddraad gewonden, welks uiteinden verbonden waren met de polen eener batterij, bestaande uit zes elementen van Grove. Door het sluiten van den stroom kon hij alzoo het metaal in magnetischen toestand brengen. Ten einde de sterkte van het magnetisch veld in de nabijheid van het spiegeland oppervlak te vergrooten, plaatste hij een wigvormig stuk ijzer (submagneet) met den scherpen kant zoo dicht mogelijk vóór den spiegel. Die submagneet bleek hem onontbeerlijk, zonder dien toch kon hij geen enkel optisch effect van den magnetischen toestand van het veld verkrijgen; door zijnen vorm en zijne plaatsing was hij echter een beletsel om proeven te doen met licht, dat onder invalshoeken, tusschen 0° en 50° gelegen, het

1) Philosophical Magazine, 5th Series, Vol. 3. On Rotation of the Plane of Polarisation by Reflection from the Pole of a Magnet by John Kerr, pag. 321 sqq.

2) Phil. Mag. 5th Series, Vol. 5. On Reflection of Polarized Light from the Equatorial Surface of a Magnet by John Kerr, pag. 161 sqq.

spiegelend metaal treft. Kerr heeft zijne proeven bij de polaire terugkaatsing genomen bij invalshoeken, weinig verschillende van 75° ; eene afzonderlijke reeks experimenten heeft hij ingesteld met normaal invallend licht [l. c. art. 26]. De submagneet, dien hij in het laatste geval aanwendde, bestond in een ijzeren afgeknotten kegel, in de axiale richting doorboord. Deze werd met het spits toeloopende uiteinde zeer dicht voor den metalen spiegel geplaatst, terwijl voor het andere uiteinde een doorschijnende spiegel gezet werd, die een hoek van 45° met de as van den submagneet maakte. De loop der lichtstralen was nu de volgende: het licht uit den polarisator tredende werd door den spiegel zoo teruggekaatst dat het zijn weg nam door het kanaal van den submagneet; het trof daarop de pool van den electromagneet, werd teruggekaatst langs hetzelfde kanaal en trad door den doorschijnenden spiegel in den analysator, met welken het werd onderzocht.

Het verdient opmerking, dat Kerr [l. c. pag. 341 al. 1] bij normaal invallend licht geringere uitwerkingen verkreeg dan bij scheeve invalshoeken, schoon in het eerste geval het effect duidelijk en regelmatig bleek te zijn. De analogie met Faraday's verschijnsel doet vermoeden dat bij een invalshoek van 0° het effect krachtiger moet zijn dan bij andere invalshoeken; de hierachter op te stellen theorie geeft hetzelfde resultaat. Het gaat dan ook niet aan de twee effecten, welke Kerr met geheel verschillend ingerichte toestellen verkreeg, met elkaar te vergelijken.

Alvorens een overzicht van de resultaten van Kerr's proeven te geven, zal ik eerst eenige uitdrukkingen na-

der omschrijven, van welke ik mij in 't vervolg herhaaldelijk bedienen zal. Onder eene R (rechtsche) strooming of R (rechtsche) draaiing zal ik verstaan eene strooming (draaiing) in den zin, waarin zich de wijzers van een uurwerk bewegen, wanneer de wijzerplaat naar den beschouwer is gekeerd; onder eene L (linksche) strooming of eene L (linksche) draaiing de tegenovergestelde. Bij de beoordeeling van den zin der stroomingen en draaiingen worde de electromagneet steeds zoo beschouwd, dat het niet reflecteerend uiteinde naar den beschouwer gekeerd is, het polariseerende nicol van uit het punt, waarin de invallende lichtstraal het spiegelend uiteinde van den electromagneet treft en de analysator van het standpunt des waarnemers. Volgens deze definities maakt dus eene R-strooming in de windingen van den electromagneet van het spiegelend uiteinde eene zuidpool, eene L-strooming maakt daarvan eene noordpool ¹⁾. Bij normalen inval zal, wanneer de stroom geopend is en de analysator en de polarisator gekruist staan, eene R-draaiing van het polariseerend nicol een teruggekaatsten lichtstraal veroorzaken, welke door eene even groote L-draaiing van den analysator uitgedoofd kan worden. Bij een invalshoek van 90° zouden eene R-draaiing van den polarisator en eene R-draaiing van den analysator bewegingen geven om dezelfde as en in denzelfden zin.

§ 4. I. Bij de *eerste* proef van Kerr over de polaire reflexie werden, terwijl de stroom nog geopend was, de beide nicols zoo geplaatst, dat het tweede geen licht doorliet; het was daartoe noodig, dat het invallende licht

1) Onder de noordpool van een magneet wordt in overeenstemming met Kerr's nomenclatuur dat uiteinde verstaan, hetwelk van het Noorden af gericht is en op noordelijke breedten naar boven wijst.

gepolariseerd was in of loodrecht op het invalsvlak. Bij sluiting van den stroom treedt dan weer licht door den analysator uit met eene intensiteit, die onafhankelijk blijkt te zijn van den zin, waarin de stroom de windingen van den electromagneet doorloopt.

Voordat het ijzer magnetisch is, ontstaat volgens de gewone wetten der terugkaatsing uit een lichtbundel met trillingen in (of loodrecht op) het invalsvlak slechts gereflecteerd licht met trillingen, die eveneens evenwijdig aan (of loodrecht op) dat vlak gericht zijn. De eerste proef van Kerr leert nu, dat bij de terugkaatsing door eene magneetpool deze eerste component van het teruggekaatste licht nog van eene tweede (en veel zwakkere) vergezeld gaat, waarvan de trillingen loodrecht staan op die van de eerste, dus loodrecht op (of in) het invalsvlak gericht zijn.

Hadden de beide zoo even genoemde componenten dezelfde phase, dan zou, ook wanneer de stroom doorgaat, het teruggekaatste licht nog lineair gepolariseerd zijn. De uitwerking van de magnetische krachten zou dan als eene draaiing van het polarisatievlak in het teruggekaatste licht kunnen opgevat worden en door eene draaiing van den analysator zou het licht, dat bij het sluiten van den stroom te voorschijn kwam, uitgedoofd kunnen worden.

Dit laatste bleek Kerr onmogelijk te zijn, een bewijs, dat het teruggekaatste licht niet lineair, maar elliptisch gepolariseerd is, wanneer de stroom doorgaat.

Om nu de verschijnselen geheel te karakteriseeren, zou het noodig zijn vooreerst de verhouding van de amplitudines der beide bovengenoemde componenten (die trou-

wens van de stroomintensiteit zal afhangen), en ten tweede haar phaseverschil te meten (dat onafhankelijk van die intensiteit zal zijn). De hulpmiddelen, die Kerr ten dienste stonden en die niet meer dan juist voldoende waren om de verschijnselen goed waar te nemen, lieten hem niet toe zulk eene meting te verrichten. Toch heeft Kerr na zijne eerste proef een aantal andere verricht, die alle in verband staan met de vraag, welke de phase is van de zwakke door hem ontdekte component.

Men kan namelijk omtrent deze phase een oordeel vellen, wanneer men behalve die component nog eene tweede met dezelfde trillingsrichting en van bekende phase in het oog laat treden, en het effect onderzoekt van de samenwerking der beide lichtbundels.

Een eerste hulpmiddel daartoe is eene kleine draaiing van het eerste nicol uit den stand, daaraan bij de eerste proef gegeven. Immers dan treedt reeds, terwijl de stroom geopend is, eene zwakke component met trillingen loodrecht op (of in) het invalsvlak op, en met deze wordt vervolgens de nieuwe lichtbundel samengesteld, die bij het magnetiseeren van den spiegel ontstaat.

In de tweede plaats kan men den polarisator den stand laten behouden, dien hij bij de eerste proef had, en aan den analysator eene kleine draaiing geven. Zoolang de spiegel niet magnetisch is, blijven dan de teruggekaatste trillingen in (of loodrecht op) het invalsvlak gericht; maar thans wordt eene kleine component van die trillingen door het tweede nicol doorgelaten en daarmede wordt dan op nieuw de component, die tengevolge van het magnetisme optreedt, samengesteld.

Het verdient hierbij opmerking, dat de beide aange-

geven handelwijzen werkelijk tot verschillende proeven voeren, daar de bundels, waarmede de door Kerr ontdekte in het eene of het andere geval wordt samengesteld, niet dezelfde phase hebben. Staan b. v. aanvankelijk — bij de eerste proef — de trillingen van het invallende licht evenwijdig aan het invalsvlak, dan geeft eene draaiing van den polarisator een component met trillingen, loodrecht op dat vlak, en deze component ondergaat bij de terugkaatsing de phaseverandering, die aan trillingen van die richting eigen is. Laat men daarentegen den polarisator zijn oorspronkelijken toestand behouden, dan heeft men, zoolang de stroom open is, slechts te doen met trillingen in het invalsvlak en met de phaseverandering, die deze ondergaan. De component, waarmee de door den stroom opgewekte wordt samengesteld, moet dus bij de eene en bij de andere handelwijze verschillende phase hebben, omdat, zooals men weet, de phaseverandering bij de terugkaatsing door metalen voor trillingen in en loodrecht op het invalsvlak niet dezelfde is.

Kerr heeft overigens de beide methoden van onderzoek gevolgd en wel met het resultaat, dat hieronder is medegedeeld.

II. Bij den aanvang der proef is de stroom open, het invallend licht is gepolariseerd in of loodrecht op het vlak van inval, de analysator staat op totale uitdooving. Aan het polariseerend nicol wordt eene zeer kleine R-draaiing gegeven; door den analysator is nu een zwak lichteffect waarneembaar. Sluit men thans den stroom, dan blijkt een R-stroom (Zuidpool) het lichteffect te verzwakken, terwijl een L-stroom (Noordpool) het lichteffect versterkt. Geeft men den polarisator eene kleine L-draaiing, dan is

de toedracht juist andersom: een R-stroom versterkt, een L-stroom verzwakt het door den analysator doorgelaten licht.

Mocht men aannemen (wat bij de zwakke werkingen, waarvan hier sprake is, moeilijk te beslissen valt), dat bij deze proef door een stroom volkomen uitdooving kan veroorzaakt worden van het licht, dat door eene kleine draaiing van den polarisator was te voorschijn geroepen, dan zou de kwestie der phase uitgemaakt zijn. Want de lichtbundel, die door den stroom ontstaat, zou dan juist tegengestelde phase moeten hebben als de bundel, dien hij vernietigen kan, en dus zou het met de phase van dien eersten bundel zoo gesteld zijn alsof hij reeds vóór de terugkaatsing was opgetreden, natuurlijk met de trillingsrichting loodrecht op die van het invallende licht en met dezelfde of de tegengestelde phase als dit laatste (dit hangt van de keus der teekens af) en alsof hij daarna volgens de gewone wetten teruggekaatst was. Men zou dan ook kunnen zeggen, dat het teruggekaatste licht door het magnetisme juist zoo wordt gewijzigd, alsof vóór de terugkaatsing eene draaiing van het polarisatievlak plaats had en dan verder niets bijzonders gebeurde. In *dezen* zin besluit Kerr uit de beschreven proef, dat bij de reflexie door eene magneetpool het polarisatievlak in eene richting, tegengesteld aan die van den positieven stroom in de windingen, gedraaid wordt (dus in dezelfde richting als bij de voortplanting door eene oplossing van ijzerchloride).

III. De stroom is open, het invallend licht is gepolariseerd in of loodrecht op het invalsvlak, de analysator is zoo geplaatst, dat geen licht wordt doorgelaten. Men

geeft nu aan het analyseerend nicol eene zeer kleine R-draaiing, tengevolge waarvan eene geringe hoeveelheid licht kan uittreden. Men sluit nu den stroom. Een L-stroom (Noordpool) blijkt het lichteffect te versterken, een R-stroom (Zuidpool) dat, schoon minder duidelijk, te verzwakken. Men geeft daarop den analysator eene kleine L-draaiing en nu verwisselen, evenals in II, de R- en L-stroomen van rol; een R-stroom versterkt, een L-stroom verzwakt het licht.

Deze uitkomsten verkreeg Kerr bij alle invalshoeken, onder welke hij het licht op den metaalspiegel liet vallen ¹⁾.

§ 5. Aequatoriale Reflexie.

Als spiegelend oppervlak gebruikte Kerr het platte zijvlak van een stuk week ijzer van prismatischen vorm, dat op de polen van een hoefvormigen electromagneet gelegd werd. Door den stroom van den electromagneet te sluiten verkreeg hij een magnetisch veld van dien aard, dat de krachtlijnen in de nabijheid van den spiegel evenwijdig liepen aan de zijvlakken van het prisma. Datzelfde magnetische veld kan men zich ontstaan denken door een fictieven stroom, welke windingen doorloopt, die gelegen zijn in vlakken loodrecht op de zijvlakken van het prisma. Wanneer we in 't vervolg spreken van den stroomloop, zullen we dien van den fictieven stroom bedoelen. Voor zoover betreft de richting van dien stroom zullen we ons bij hare beoordeeling steeds geplaatst denken in de nabijheid van dat uiteinde, dat het dichtst

1) Het sub II verkregen resultaat wordt door Kerr [l. c. pag. 341, Ninth Experiment] bij normalen inval in andere bewoordingen uitgedrukt, omdat hij daar het polariseerend nicol beschouwt van uit het punt, waarin het invallend licht den doorschijnenden spiegel treft.

bij den analysator gelegen is. Den zin van de draaiingen der nicols bepalen we op dezelfde wijze als boven bij de polaire terugkaatsing.

Bij deze proeven, waarbij steeds het licht inviel in een vlak, dat door de richting der krachtlijnen ging, gelukte het minder goed dan bij de polaire terugkaatsing om, nadat eerst de beide nicols op uitdooving gesteld waren, het wederoptreden van het licht door het sluiten van den stroom waar te nemen. Daarentegen werden vele proeven genomen, die op hetzelfde denkbeeld berustten als de in de vorige § sub II en III vermelde.

I. Wanneer het invallend licht gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval, dan wordt het effect eener geringe R-draaiing van den analysator versterkt door een R-stroom, terwijl het door een L-stroom verzwakt wordt. Bij eene L-draaiing van den analysator heeft het omgekeerde plaats. Deze resultaten treden bij elken hoek van inval op, maar het sterkst bij 60° — 65° .

II. Wanneer het invallend licht gepolariseerd is loodrecht op het vlak van inval, en de invalshoek is grooter dan de hoofdinvalshoek, dan is het verband tusschen de draaiingen van den analysator en de stroomen om den magneet, zooals dat onder I is aangegeven. Bij invalshoeken daarentegen, kleiner dan de hoofdinvalshoek, bleek een R-stroom de uitwerking van eene R-draaiing van den analysator te verzwakken, die van eene L-draaiing te versterken. Een L-stroom had de tegengestelde uitwerking.

III. Wanneer het invallend licht gepolariseerd is loodrecht op het vlak van inval, bleek bij alle invalshoeken het effect eener kleine R-draaiing van den polarisator door een R-stroom verzwakt, door een L-stroom ver-

sterkt te worden. Bij eene L-draaiing van den polarisator had het omgekeerde plaats.

IV. Wanneer het licht gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval, dan is bij invalshoeken, grooter dan de hoofdinvalshoek, het verband tusschen de draaiingen van den polarisator en de stroomen om den magneet hetzelfde, als onder III is aangegeven. Daarentegen wordt bij invalshoeken, kleiner dan de hoofdinvalshoek, het effect eener kleine R-draaiing van den polarisator door een R-stroom versterkt, door een L-stroom verzwakt; dat van eene L-draaiing wordt door een R-stroom verzwakt, door een L-stroom versterkt.

Bij proeven, genomen met het invalsvlak loodrecht op de krachtlijnen, bleek het magnetisme geen optisch effect teweeg te brengen.

§ 6. Kerr heeft behalve de boven besproken methoden nog eene andere gebezigd om de geaardheid van het teruggekaatste licht — wat betreft het phaseverschil tusschen de componenten daarvan — te onderzoeken. Gelijk men weet, kan men zich elken bundel elliptisch gepolariseerd licht voorstellen als te bestaan uit twee lineair gepolariseerde lichtbundels met onderling loodrechte trillingsrichtingen (die niet met de hoofdrichtingen van het elliptisch gepolariseerde licht behoeven samen te vallen). Geeft men nu aan een dier bundels, met betrekking tot den anderen, eenige phaseverandering, dan kan het effect daarvan op de intensiteit van het licht, dat vervolgens door een nicol wordt doorgelaten, ons iets leeren omtrent het phaseverschil, dat eerst tusschen die componenten bestond, dus omtrent den aard van den te onderzoeken bundel.

Kerr plaatste nu tusschen het spiegelend metaaloppervlak en den analysator eene glasplaat (compensator), loodrecht op de richting van den teruggekaatsen lichtstraal en rekte die eenigszins uit in eene richting, welke een hoek van 45° met het vlak van terugkaatsing maakte, of wel hij drukte haar samen in die richting. Uitgerekt glas nu heeft op het licht, dat het doorlaat, dezelfde uitwerking als een positief eenassig kristal, welks as evenwijdig is aan de richting, volgens welke men het glas uitrekt. Gemakkelijk kan men hieruit afleiden, dat men (bij den niet-magnetischen spiegel), na eerst de beide nicols op uitdooving gesteld te hebben, het door eene kleine draaiing van den polarisator te voorschijn geroepen licht weer kan doen verdwijnen door eene uitrekking of samendrukking van den compensator van behoorlijke grootte, ten minste wanneer het licht onder den hoofdvalshoek invalt. Kerr vond dit bevestigd en nam bovendien waar, dat bij de polaire reflexie en onder hoeken, die weinig van den hoofdvalshoek afwijken, ook het licht, dat *door den stroom* weer te voorschijn werd gebracht (§ 4, sub I), door den compensator kan worden weggenomen. Dit komt overeen met de vroegere conclusie, dat de uitwerking van den stroom aequivalent is aan eene draaiing van het polarisatievlak vóór de terugkaatsing.

Ook bij het onderzoek over de aequatoriale reflexie heeft Kerr van den compensator gebruik gemaakt en ook thans weder (verg. § 5) werden verschillende uitkomsten verkregen, al naarmate het invallende licht in of loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd was. In het eerste geval bleef — terwijl de nicols hun gekruisten stand behielden — het licht, dat door eene kleine samendrukking

van den compensator was verschenen, onveranderd bij het sluiten van den stroom. In het tweede geval daarentegen had de stroom naar gelang van zijne richting eene versterking of verzwakking van dat licht ten gevolge. Dit effect bleek bij alle invalshoeken in dezelfde richting te bestaan en was het sterkst bij een hoek van ongeveer 60° .

§ 7. Van de proeven van Kerr is eene wiskundige theorie gegeven door Fitzgerald ¹⁾, welke uitgaat van formules, door Maxwell in zijn „Electricity and Magnetism,” Vol. II, Chapter 21 opgesteld. De uitkomsten dier theorie stemmen, wat betreft de intensiteit van het magneto-optisch effect, overeen met de proeven van Kerr. Daarentegen geven de formules van Fitzgerald niets aan van hetgeen op het phaseverschil betrekking heeft, een noodzakelijk gevolg hiervan, dat zij verkregen zijn uit bewegingsvergelijkingen en grensvoorwaarden, die slechts voor een doorschijnend lichaam gelden, terwijl het welbekend is, dat juist de absorptie met de phase van het teruggekaatste licht in nauw verband staat.

Daar, zooals reeds werd medegedeeld, door Kerr een aantal proeven verricht zijn, die juist op de phase der door hem in 't teruggekaatste licht ontdekte component betrekking hebben, heb ik getracht eene theorie op te stellen, waarbij ook met de absorptie rekening wordt gehouden. Evenals Fitzgerald ben ik daarbij uitgegaan van Maxwell's theorie, volgens welke de lichttrillingen electriche bewegingen zijn. De wijzigingen echter, die, als er magnetische krachten werken, aan de gewone

1) Phil. Transactions, Vol. 171, p. 691.

formules voor de lichtbeweging bij metalen moeten worden aangebracht, heb ik afgeleid uit de door Hall ¹⁾ ontdekte werking van een magneet op een electricischen stroom. Zooals reeds Rowland deed opmerken, openbaart zich die werking bij de lichtbeweging in de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak en zij moet dus eveneens met de proeven van Kerr samenhangen.

Een kort overzicht van de proeven van Hall moge aan de opstelling der bewegingsvergelijkingen voorafgaan.

§ 8. De aanleiding, welke Hall er toe bracht onderzoeken in te stellen omtrent de werking van een magneet op electricische stroomen, bestond in het verschil van inzicht, dat tusschen Maxwell en Edlund aangaande dit punt heerschte. Maxwell ontkent die werking, Edlund neemt haar aan.

De eerste schrijft in zijn „Electricity and Magnetism,” Vol. II pag. 144, 1st ed. pag. 146, 2nd ed. dat „eene constante magnetische kracht, werkende op een stelsel geleiders, waarin electricische stroomen circuleeren, geene blijvende verandering teweegbrengt in den stroomloop van de electriciteit door die geleiders.” De magnetische krachten, die wel werken op de geleiders, de dragers van den stroom, zouden niet werken in vaststaande geleiders op de electriciteit, daar doorheenstroomende. Edlund daarentegen neemt in eene verhandeling over „Unipolaire Inductie” ²⁾ aan, dat een magneet op een stroom in een vasten geleider eene werking van denzelf-

1) American Journal of Science a. Arts, Vol. 19, p. 200 en Vol. 20, p. 161; ook in Phil. Mag. 5th Series, Vol. 9, p. 225 en Vol. 10, p. 301.

2) Phil. Mag. Oct. 1878.

Ann. de Chim. et de Phys. Janv. 1879.

den aard uitoefent als die, welke wordt waargenomen, wanneer een bewegelijke geleider in de nabijheid van den magneet geplaatst is.

Is Hall niet de eerste, bij wien het denkbeeld opgekomen is, het al of niet bestaan van de werking van magnetische krachten op stroomende electriciteit proefondervindelijk aan te toonen — Feilitzsch, Mach, Gore, e. a. hebben vóór hem toch proeven in die richting genomen — hij is wel de eerste, wiens proeven resultaten opleverden, met welke hij aantoonde, dat die werking wel degelijk bestaat.

In overleg met Rowland bezigde hij de volgende inrichting. Tusschen de polen van een electromagneet plaatste hij, loodrecht op de magnetische krachtlijnen, een zeer dun goudblad van rechthoekigen vorm. Op twee tegenover elkaar gelegen plaatsen van de korte zijden van den rechthoek hechtte hij de twee uiteinden van metaaldraden, die verbonden waren met de polen eener batterij. Door het goudblad ging derhalve een stroom van de eene korte zijde naar de andere; we zullen dien stroom den *hoofdstroom* noemen. Op twee tegenover elkaar gelegen punten, op de lange zijden gelegen en aequipotentiaal, wanneer de electromagneet niet werkt, hechtte hij de uiteinden van twee metaaldraden, die verbonden waren met een galvanometer; den stroom, gaande door den galvanometer, zullen we noemen den *bijstroom*.

Wanneer de stroom van den electromagneet open is, bestaat er geen bijstroom. Wordt die stroom gesloten, dan treedt een permanente bijstroom op. Een onderzoek leerde aan Hall, dat de intensiteit van den bijstroom:

1°. evenredig is aan de sterkte van het magnetisch veld,

2^o. evenredig is aan de intensiteit van den hoofdstroom.

§ 9. Neemt men aan, dat de magnetische toestand van het veld tengevolge heeft, dat naast de electromotorische kracht, die in het goudblad bestaat, eene tweede electromotorische kracht optreedt, loodrecht op de richting van den hoofdstroom en op die der magnetische kracht, dan kan men het verschijnsel op wiskundige wijze volledig beschrijven ¹⁾. Omtrent de richting van die nieuwe electromotorische kracht bleek Hall het volgende: Plaatst men zich aan die zijde van het metaalblad, waarheen de magnetische kracht ²⁾ wijst, met het gelaat naar het metaal gekeerd en laat men de richting van den hoofdstroom wentelen over een rechten hoek in een zin, tegengesteld aan dien, waarin zich de wijzers van een uurwerk bewegen, dan krijgt men de richting der nieuwe electromotorische kracht bij goud, zilver, nickel, platina; bij ijzer is de richting juist de tegenovergestelde.

Laten in de eene of andere middenstof, waarin eene elektrische strooming plaats heeft, X , Y , Z de componenten zijn van de electromotorische kracht, in eenig punt werkende en ontbonden volgens drie onderling loodrechte richtingen. Die X , Y , Z spruiten voort uit electrostatische werking en inductie. Plaatst men die middenstof in een homogeen magnetisch veld, waarin in de richting der Z -as de magnetische kracht N bestaat, dan treedt het effect van Hall op, bestaande in eene nieuwe electromotorische kracht

1) Verg. Hopkinson, Phil. Mag. Vol. 10, p. 430.

2) Onder de magnetische kracht in eenig punt van een magnetisch veld verstaan we de kracht, die een magnetisch deeltje, dat de eenheid van Zuidmagnetisme [zie de noot van § 3, pag. 5] bezit, in dat punt geplaatst, ondergaan zou.

met componenten $-h N v, +h N u, 0$, wanneer u, v, w de stroomcomponenten zijn. De grootheid h hangt af van den aard der middenstof, maar is voor elke stof eene constante. De geheele electromotorische kracht heeft nu tot componenten:

$$X - h N v, Y + h N u, Z \dots\dots\dots 1)$$

Kiest men de coördinaatassen zoodanig, dat de X-as gezien van den kant der positieve Z-as, over een rechten hoek in den zin van de wijzers van een uurwerk moet wentelen om saam te vallen met de positieve Y-as, dan is h positief bij ijzer, negatief bij alle andere door Hall onderzochte metalen.

Voor de later te ontwikkelen theorie is het noodig, dat we weten, dat het effect van Hall uiterst gering is, vergeleken met de electromotorische kracht X, Y, Z van den hoofdstroom. We kunnen dit uit de door Hall verrichte metingen afleiden.

§ 10. Bij Hall's proeven was het dunne metaalblad loodrecht op de magnetische krachtlijnen geplaatst; de Z-as staat dus ook loodrecht op het metaal. We kiezen den oorsprong van ons assenstelsel in het metaal, laten de X-as saamvallen met de lange zijde, de Y-as met de korte zijde van den rechthoek.

Steeds zijn dus $Z = 0, w = 0$, terwijl u den hoofdstroom voorstelt.

Wanneer de galvanometerketen open is, zal de invloed van het magnetische veld op den stroomloop door het metaalblad bestaan in het opeenhoopen van ongelijknamige electriciteit aan de twee lange randen van den rechthoek. Die opeenhooping duurt zoo lang voort, totdat de electromotorische kracht, die daarvan het gevolg is, evenwicht

maakt met de electromotorische kracht, voortspruitende uit den magnetischen toestand van het veld. Wanneer dat evenwicht is ingetreden, zal de strooming door het metaalblad stationair en $v = 0$ zijn.

Noemen we de potentiaalfunctie van de aan de randen opgehoopte electriciteit ϕ , dan is $Y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$. Op de uitdrukkingen 1) lettende, verkrijgen wij thans, wanneer κ den weerstand voorstelt,

$$X = \kappa u, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} + h N u = 0 \quad \dots \dots \dots 2)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{h N}{\kappa} X,$$

dat ons bij integratie geeft:

$$\phi = \frac{h N}{\kappa} X y + \text{Constante.}$$

Zij de breedte van het metaalblad b , dan is het potentiaalverschil tusschen de randen:

$$\phi_b - \phi_0 = \frac{h N}{\kappa} X b.$$

Dit potentiaalverschil veroorzaakt in den galvanometerketen, wanneer deze gesloten is, een stroom, den *bijstroom*, welks intensiteit i , wanneer r voorstelt den weerstand van den galvanometerketen, gevonden wordt uit:

$$i = \frac{h N}{\kappa} \cdot \frac{b X}{r} \quad \dots \dots \dots 3)$$

Noemen we de intensiteit van den hoofdstroom I , dan bestaat tusschen I en u de betrekking:

$$u b \delta = I,$$

waarin δ de dikte van het metaalblad voorstelt. Hieruit volgt:

$$X = \frac{\kappa I}{b \delta} \quad \dots \dots \dots 4)$$

en dus:

$$i = \frac{h N}{\delta r} \cdot I \dots \dots \dots 5)$$

Wanneer de overige in deze formule voorkomende groot-heden gemeten zijn, kan men daaruit $h N$ afleiden. Hall vindt aldus voor de breuk $\frac{h N}{\alpha}$ 1) waarden, tusschen $\frac{1}{3000}$ en $\frac{1}{6500}$ gelegen. Von Ettingshausen 2), die de proe-ven van Hall herhaald heeft, vond bij de metaalplaten, die hij gebruikte, waarden varieerende van $\frac{1}{2500}$ tot $\frac{1}{7700}$. Uit deze resultaten volgt, dat het geoorloofd is, zooals wij in het vervolg steeds zullen doen, de tweede en hoogere machten der verhouding $\frac{h N}{\alpha}$ te verwaarloozen.

1) Deze grootheid stelt de verhouding voor van het potentiaalverval, dat in de richting der breedte van de plaat door de magnetische krachten ontstaat (als geene verbinding met den galvanometer bestaat) en het potentiaalverval, dat in de richting der lengte den hoofdstroom onderhoudt. Dus komt $\frac{h N}{\alpha}$ overeen met de breuk $\frac{E'}{E}$ van Hall.

2) Wiener Sitzungsberichte, 2^e Abth. Bd. 81, pag. 441.

HOOFDSTUK I.

De bewegingsvergelijkingen der electriciteit in een lichaam, dat aan magnetische krachten onderworpen is. — Voorwaarden aan de grens van zulk een lichaam.

§ 1. Wanneer eene middenstof, waarin electriche stroomingen bestaan, in een magnetisch veld geplaatst is, dan treedt behalve de electromotorische krachten, die deels van electrostatischen oorsprong zijn, deels uit inductiewerking voortspuiten, eene derde electromotorische kracht op, die het gevolg is van den magnetischen toestand van het veld en waarvan wij grootte en richting in de Inleiding bespraken.

Wij zullen thans den invloed nagaan, dien dit verschijnsel op de electriche bewegingen, in 't bijzonder op de lichtrillingen heeft, welke zich in de middenstof kunnen voortplanten. Aan het medium zal daarbij, om het meest algemeene geval te behandelen, niet slechts een zeker geleidingsvermogen, maar ook de vatbaarheid voor diëlectrische polarisatie worden toegeschreven en wij zullen van de onderstelling uitgaan, dat, op dezelfde wijze als de geleidingsstroom, ook de electriciteitsbeweging, die

bij verandering der diëlectrische polarisatie bestaat (de „*displacement-current*” van Maxwell) in het magnetisch veld eene electromotorische kracht ten gevolge heeft, zoodat het effect van Hall in elk punt afhankelijk is van den totalen electrischen stroom in dat punt (samengesteld uit geleidingsstroom en „*displacement-current*”) 1).

Wij onderstellen verder, dat het magnetisch veld homogeen is; de grootte der magnetische kracht zij N .

§ 2. Wij brengen in onze middenstof een rechthoekig coördinatenstelsel aan, waarvan wij de Z-as met de richting der magnetische kracht doen samenvallen, terwijl overigens het coördinatenstelsel op de op p. 18 bepaalde wijze wordt gekozen.

Laten in eenig punt met de coördinaten x, y, z op het tijdstip t de componenten van de electromotorische kracht, die onafhankelijk van het effect van Hall bestaat, zijn X, Y, Z en laten u, v, w de componenten van den totalen electrischen stroom voorstellen. Deze grootheden zijn alle functiën van de coördinaten en den tijd. De componenten van de electromotorische kracht, die aan 't effect van Hall te wijten is, zijn dan, zooals wij zagen:

$$-h N v, +h N u, 0$$

en de componenten van de totale electromotorische kracht in het magnetisch veld werkzaam, die we met X, Y, Z aangeven, worden dientengevolge:

$$X = X - h N v, \quad Y = Y + h N u, \quad Z = Z. \quad 1)$$

Laat ϕ voorstellen de potentiaalfunctie van de vrije electriciteit en α de magnetische potentiaalfunctie, behoo-

1) Verg. Lorentz, Versl. en Meded. d. Akad. v. Wet., 2e Reeks, XIX, p. 233.

rende bij de electriche stroomingen, dus met uitsluiting van de permanente magnetische kracht, terwijl L, M, N de componenten mogen voorstellen van de eveneens bij die electriche stroomingen behoorende magnetische krachten. De permanente magnetische kracht N heeft geen invloed op het verband tusschen de stroomcomponenten, de electromotorische kracht X, Y, Z , afkomstig van electrostatische werking en van inductiewerking, de verdeling van vrije electriciteit en de magnetische momenten, door de electriche stroomingen ontstaan. Het verband tusschen $X, Y, Z, \phi, L, M, N, \chi$ wordt dus nog gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen, welke voor het eerst door Helmholtz ¹⁾ zijn opgesteld:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= (1 + 4\pi\theta) A \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= (1 + 4\pi\theta) A \frac{\partial M}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= (1 + 4\pi\theta) A \frac{\partial N}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{I}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Delta\phi + A^2 k \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \dots \dots \dots \text{II}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - 4\pi u \right] \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} - 4\pi v \right] \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - 4\pi w \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{III}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta\chi \dots \dots \dots \text{IV}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\phi \dots \dots \dots \text{V}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\theta} \Delta\chi \dots \dots \dots \text{VI}$$

1) Borchardt's Journal, Bd. 72. Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper. — Ook te vinden in Helmholtz' Abhandlungen Th. I, pag. 545 sqq. en in de „Theorie der Terugkaatsing en Breking van het Licht” van Dr. H. A. Lorentz, Hoofdstuk II.

Hierin stelt k voor eene onbepaalde grootheid, die door Helmholtz in de inductiewet is ingevoerd, terwijl θ de constante is der magnetische polarisatie ¹⁾.

§ 3. Aan deze stelsels van vergelijkingen moet nu nog dat worden toegevoegd, hetwelk het verband geeft tusschen de stroomcomponenten en de componenten van de totale electromotorische kracht (X, Y, Z).

De beweging der electriciteit in lichamen, hetzij goede, hetzij slechte geleiders, is vooralsnog te weinig in al hare bijzonderheden bekend om het verband tusschen de electromotorische kracht en de stroomcomponenten met nauwkeurigheid te kunnen aangeven. Bij slechte geleiders voeren de betrekkingen:

$$u = \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}, \quad v = \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad w = \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t},$$

waarin ε de constante der diëlectrische polarisatie voorstelt, tot goede resultaten. Bij goede geleiders geven de betrekkingen:

$$X = \kappa u, \quad Y = \kappa v, \quad Z = \kappa w,$$

zijnde niets anders dan de wet van Ohm, waarin κ den weerstandscoefficient voorstelt, de electriche stroomingen aan, wanneer die stationair zijn. Neemt men bij goede geleiders nog eene diëlectrische polarisatie aan, dan krijgt men de relaties:

1) De vorm, waarin wij de bewegingsvergelijkingen geschreven hebben, wijkt eenigszins af van dien, waarin zij in Helmholtz' verhandeling voorkomen. Zoo als ze voorkomen in den tekst zijn zij algemeener. Drukt men de krachtcomponenten en de componenten van den geleidingsstroom uit in functie van de componenten der diëlectrische polarisatie en de componenten der magnetische krachten in functie van die der magnetische polarisatie door middel van de betrekkingen, die men gewoonlijk aanneemt om het verband tusschen die grootheden weer te geven, dan nemen de boven neergeschreven vergelijkingen den vorm aan, welken Helmholtz er aan gaf. Helmholtz' Abh. Th. I, pag. 621 en 622. Lorentz, Theorie d. terugk. en breking, pag. 65.

$$u = \frac{1}{\kappa} X + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}, \quad v = \frac{1}{\kappa} Y + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad w = \frac{1}{\kappa} Z + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

Vat men de electriche stroomingen op als bewegingen van eene zekere stof, waaraan men eene, zij 't dan ook geringe, massa toe te kennen heeft, dan moet men aan de wet van Ohm een correctieterm toevoegen, waarin $\frac{\partial u}{\partial t}$, enz. voorkomt ¹⁾.

Ofschoon we nu het verband tusschen de electromotische krachten en de stroomcomponenten niet nauwkeurig kunnen aangeven, zoo kunnen we in isotrope middenstoffen daaromtrent toch dit vaststellen, dat u uitsluitend van X moet afhangen, v uitsluitend van Y en w uitsluitend van Z ; terwijl de wijze, waarop u afhangt van X , dezelfde is als die, waarop v van Y en w van Z afhangen. Nemen we tot betrekking aan:

$$A X + B \frac{\partial X}{\partial t} + C \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \dots = A' u + B' \frac{\partial u}{\partial t} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots$$

waarin $A, B, C, \dots, A', B', C', \dots$ constante coëfficiënten zijn, afhangende van den aard van het medium, dan zijn de boven meegedeelde wetten alle bijzondere gevallen van deze algemeene ²⁾.

Bevatten alle grootheden, in de laatste vergelijkingen voorkomende, den tijd slechts in den factor $e^{\delta t}$, dan volgt uit die vergelijkingen:

$$u = p X, \quad v = p Y, \quad w = p Z. \quad \dots \dots \dots 2)$$

De grootheid p is afhankelijk van δ , dus, wanneer wij later $\delta = -i \frac{2\pi}{T}$ stellen, afhankelijk van de grootheid T , die blijken zal den trillingstijd voor te stellen.

1) Lorentz, Theorie der terugkaatsing en breking, pag. 42.

2) Ik ontleen deze beschouwingen aan Lorentz, Versl. en Meded., XIX, p. 235.

Ofschoon we weten, dat p van T afhangt, we kunnen uithoofde van de onbekendheid der grootheden $A, B, \dots A', B', \dots$ niet aangeven op welke wijze p van T afhangt. Die afhankelijkheid zou bekend moeten zijn, zoo men problemen, die op de *dispersie* van het licht betrekking hebben, wenschte te onderzoeken. Daartoe zou noodig zijn, dat men de grootheden $A, B, \dots A', B', \dots$ kende, d. i. dat men het mechanisme van het verband tusschen X en u konde aangeven. Bij problemen echter, zooals wij zullen behandelen, die alleen op de terugkaatsing en breking van homogeen licht betrekking hebben, is het niet noodig, dat we p in functie van T kunnen uitdrukken.

Daar δ eene imaginaire grootheid is, zal de waarde van p in 't algemeen complex zijn. Wij zullen later die waarde voorstellen met behulp van de twee constanten, die de optische eigenschappen van het medium karakteriseeren kunnen en afhankelijk zijn van T .

§ 4. We trachten van onze vergelijkingen eene oplossing te vinden, waaruit een bewegingstoestand te verkrijgen is, waarbij zich elektrische trillingen volgens eene bepaalde richting voortplanten en welke zich aan een plat grensvlak kan aansluiten aan een bewegingstoestand in een ander medium, waarin het effect van Hall niet bestaat en waarin zich elektrische trillingen in platte golven voortplanten. Zonder aan de algemeenheid te kort te doen — zooals later blijken zal uit de plaatsing van het coördinatenstelsel in de te behandelen bijzondere gevallen van polaire en aequatoriale reflexie — kunnen we aannemen, dat de voortplantingsrichting ligt in het XZ -vlak. In alle uitdrukkingen, die in onze vergelijkingen voorko-

men, zal dan naast constante factoren optreden de factor

$$P = e^{\delta t - \delta R (x \cos \alpha + z \sin \alpha)},$$

waarin α den hoek voorstelt, dien de voortplantingsrichting met de X-as maakt.

De grootheid δ , welke in P voorkomt, zal imaginair gesteld worden; dientengevolge zijn P zelve en de uitdrukkingen, waarin P als factor voorkomt, complex. We zullen later van de te zoeken complexe oplossingen onzer differentiaalvergelijkingen de reële gedeelten nemen en die als oplossingen gebruiken. Dat ook de reële stukken van complexe oplossingen aan de differentiaalvergelijkingen voldoen, volgt uit de omstandigheid, dat deze lineair en homogeen zijn. De reële oplossingen worden goniometrische functiën van den tijd.

We kunnen ons den totalen electrischen stroom in elk punt ontbonden denken in eene component volgens de voortplantingsrichting en in eene andere loodrecht daarop. De laatste kunnen we weer ontbinden volgens de Y-as, en volgens eene richting in het X Z-vlak, loodrecht op de voortplantingsrichting. Stellen wij deze drie componenten resp. voor door cP , bP en aP , waarbij c , b en a voorloopig onbekende constanten zijn (amplitudines), dan worden de componenten volgens de assen:

$$u = (a \sin \alpha + c \cos \alpha) P,$$

$$v = b P,$$

$$w = (-a \cos \alpha + c \sin \alpha) P.$$

Uit de betrekkingen 2) volgt dan:

$$X = \frac{a \sin \alpha + c \cos \alpha}{p} P,$$

$$Y = \frac{b}{p} P,$$

$$Z = \frac{-a \cos \alpha + c \sin \alpha}{p} P.$$

De betrekkingen 1) geven ons nu:

$$\begin{aligned}
 X &= \left[\frac{a \sin \alpha + c \cos \alpha}{p} + h N b \right] P, \\
 Y &= \left[\frac{b}{p} - h N (a \sin \alpha + c \cos \alpha) \right] P, \\
 Z &= \frac{-a \cos \alpha + c \sin \alpha}{p} P.
 \end{aligned}$$

§ 5. Met behulp van het stelsel vergelijkingen I...VI berekenen we nu de andere grootheden. De daartoe noodige differentiaties en integraties kan men het gemakkelijkst verrichten door in het oog te houden dat

de operatie	$\frac{\partial}{\partial t}$	dezelfde beteekenis heeft als de factor	δ	en omgekeerd	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$	als	$\frac{1}{\delta}$
" "	$\frac{\partial}{\partial x}$	" "	" " " "	$-\delta R \cos \alpha$	" "	$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}$	" $\frac{-1}{\delta R \cos \alpha}$
" "	$\frac{\partial}{\partial y}$	" "	" " " "	0	" "		
" "	$\frac{\partial}{\partial z}$	" "	" " " "	$-\delta R \sin \alpha$	" "	$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{-1}$	" $\frac{-1}{\delta R \sin \alpha}$
" "	Δ	" "	" " " "	$\delta^2 R^2$	" "	Δ^{-1}	" $\frac{1}{\delta^2 R^2}$

De vergelijkingen I geven ons:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{R \sin \alpha}{A (1 + 4 \pi \theta)} Y, \\
 M &= \frac{R}{A (1 + 4 \pi \theta)} [-X \sin \alpha + Z \cos \alpha] = \frac{-R}{A (1 + 4 \pi \theta)} \left[\frac{a}{p} + h N b \sin \alpha \right] P, \\
 N &= \frac{-R \cos \alpha}{A (1 + 4 \pi \theta)} Y.
 \end{aligned}$$

De vergelijkingen IV en VI geven:

$$\alpha = 0.$$

De vergelijking V zal ons dienen ter berekening van ϕ . We vinden:

$$\Delta \phi = -4 \pi c R P,$$

dat bij integratie geeft:

$$\phi = \frac{-4 \pi c}{\delta^2 R} P.$$

§ 6. Tot dusverre zijn van de bewegingsvergelijkingen

de verg. II en de drie vergelijkingen III ongebruikt gebleven. Bij substitutie van de reeds gevonden uitkomsten in die vier vergelijkingen zal het blijken, dat daaraan identiek voldaan wordt, of wel, zij zullen ons de betrekkingen geven, die noodwendig tusschen onze aangenomen grootheden R, a, b, c en de andere bestaan moeten om eene mogelijke electriciteitsbeweging op te leveren.

De vergelijking II geeft ons de betrekking:

$$h N b \cos \alpha + c \left[\frac{1}{p} + \frac{4\pi}{\delta} \left(1 - \frac{A^2 k}{R^2} \right) \right] = 0 \dots \dots \dots A)$$

Dit is onze eerste voorwaarde.

De drie verg. III geven, wanneer we $4\pi A^2(1 + 4\pi\theta) = B$ stellen:

$$B a - R^2 \delta \left[\frac{a}{p} + h N b \sin \alpha \right] = 0 \dots \dots \dots B)$$

$$B b - R^2 \delta \left[\frac{b}{p} - h N (a \sin \alpha + c \cos \alpha) \right] = 0 \dots \dots \dots C)$$

$$B a - R^2 \delta \left[\frac{a}{p} + h N b \sin \alpha \right] = 0 \dots \dots \dots D)$$

De conditie D) is dezelfde betrekking als B). Dat de drie verg. III niet drie onafhankelijke betrekkingen opleveren kunnen, was ook *à priori* in te zien. Immers door de drie verg. III respectievelijk naar x, y, z te differentieeren en de resultaten op te tellen, verkrijgen we de vergelijking V, aan welke we de potentiaalfunctie ϕ reeds hebben laten voldoen.

In 't geheel hebben we dus *drie* voorwaarden A) B) en C).

§ 7. Wanneer het medium niet in een magnetisch veld is geplaatst ($N=0$) voeren deze voorwaarden tot de bekende wetten der voortplanting van elektrische trillingen, die dan *òf* zuiver transversaal, *òf* zuiver longi-

tudinaal kunnen zijn. In het eerste geval wordt de grootheid R , die de voortplantingssnelheid en de absorptie bepaalt, gegeven door:

$$R^2 = \frac{Bp}{\delta} = \frac{4\pi A^2 (1 + 4\pi \delta)}{\delta} p,$$

in het laatste geval door:

$$\frac{1}{p} + \frac{4\pi}{\delta} \left(1 - \frac{A^2 k}{R^2}\right) = 0.$$

Is de middenstof wèl aan magnetische krachten onderworpen, dan wordt de zaak ingewikkelder, maar ook dan nog zijn de vergelijkingen (A), (B) en (C) voldoende, om de drie onbekenden, nl. de verhoudingen van a , b en c en de grootheid R te doen kennen. Zoo blijkt het, dat slechts bepaalde trillingsvormen (afhankelijk van de genoemde verhoudingen) zich met bepaalde snelheid en absorptie kunnen voortbewegen.

De verdere behandeling van het vraagstuk wordt zeer vereenvoudigd door de omstandigheid, dat het effect van Hall zeer zwak is, d. w. z. dat hN zeer klein is ten opzichte van κ (p. 20). Wij stelden nl. $u = pX$, enz., daarbij het mechanisme der electriciteitsbeweging in het midden latende (p. 25). Een deel van den totalen stroom (u , v , w) zal nu echter altijd de geleidingsstroom, met de componenten $\frac{X}{\kappa}$, $\frac{Y}{\kappa}$, $\frac{Z}{\kappa}$, zijn, en wij zullen mogen aannemen, dat de totale stroom in elk geval van dezelfde orde van grootte is als die geleidingsstroom. Is dat echter het geval, dan moet p van dezelfde orde zijn als $\frac{1}{\kappa}$, en dus hN zeer klein zijn ten opzichte van $\frac{1}{p}$. De termen in (A), (B) en (C), die den factor hN bevatten, zullen dan alle zeer klein zijn, vergeleken met de overige

termen, waarin $\frac{1}{p}$ voorkomt en wij mogen hieruit besluiten, dat de electriciteitsbewegingen, die in het magnetisch veld mogelijk zijn, kunnen worden opgevat als door eene kleine storing ontstaan te zijn uit die bewegingen, welke buiten zulk een veld bestaan kunnen. Met name zullen de waarden van R voor de gestoorde en voor de ongestoorde beweging slechts weinig van elkander verschillen.

Voor ons doel is slechts de beschouwing der gestoorde transversale beweging noodig. Uit (A), waarvoor men kan schrijven :

$$\frac{c}{b} = \frac{h N p \cos \alpha}{\left[\frac{A^2 k}{R^2} - 1 \right] \frac{4 \pi p}{\delta} - 1}, \quad \dots \dots \dots 3)$$

blijkt dat c niet $= 0$ is en dat dus bij dien trillingstoestand eene longitudinale component optreedt. Dit was trouwens onmiddellijk in te zien, daar het effect van Hall, dat door eene transversale electriciteitsbeweging wordt teweeggebracht, in het algemeen eene component in de voortplantingsrichting hebben zal.

Tevens blijkt echter de amplitudo c der longitudinale trillingen zeer klein te zijn, vergeleken met de amplitudo b van eene der transversale componenten (§ 4), daar $h N p$ eene zeer kleine grootheid is, terwijl — aangezien wij gestoorde *transversale* trillingen beschouwen — de waarde van R^2 niet in de nabijheid van diegene gelegen is, welke den noemer van (3) doet verdwijnen (gelijk de waarde van R^2 , die bij longitudinale trillingen buiten het magnetisch veld behoort, zou doen).

Wij zullen thans bewijzen, dat men c ten opzichte van b mag verwaarloozen en dus van de longitudinale trillingen geheel mag afzien. Daartoe is het niet voldoende,

dat $\frac{c}{b}$ van dezelfde orde is als $h N p$, want alle verschijnselen, die wij wenschen te bespreken, zijn van diezelfde orde. Het bedoelde bewijs zal echter klaarblijkelijk zijn geleverd, wanneer men heeft aangetoond, dat de noemer in (3) een zeer groot getal is en dit is werkelijk het geval, wanneer men de in de electromagnetische lichttheorie noodzakelijke onderstelling invoert, dat de constante ϵ_0 der diëlectrische polarisatie in den vrijen aether zeer groot is.

Wanneer wij nl. vooreerst in de plaats van R^2 de weinig daarvan afwijkende waarde stellen, die buiten het magnetisch veld voor transversale trillingen geldt, wordt de bedoelde noemer

$$\frac{k}{1 + 4\pi\delta} - 1 - \frac{4\pi p}{\delta} \dots \dots \dots 4)$$

Van de hierin voorkomende grootheden stelt p de verhouding voor, die er voor de beschouwde middenstof tusschen de stroomcomponenten en de electromotorische kracht bestaat en is dus eene grootheid van geheel denzelfden aard als de omgekeerde waarde van den weerstand κ . Helmholtz ¹⁾ toonde echter aan, dat, wanneer in de lucht (of den vrijen aether) eene diëlectrische polarisatie bestaan kan, de werkelijke waarde van κ van de waargenomen waarde κ' moet afwijken, en dat tusschen beide de betrekking:

$$\kappa = \frac{\kappa'}{1 + 4\pi\epsilon_0}$$

bestaan moet. Geheel op dezelfde wijze zou ook, wan-

1) Borchardt's Journal, Bnd 72, pag. 128.
Helmholtz' Abh. Th. I, pag. 627.

neer men door rechtstreeksche proeven over electriche trillingen p kon bepalen, niet de werkelijke waarde worden verkregen. Was de waargenomen waarde p' , dan zou

$$p = p' (1 + 4 \pi \epsilon_0)$$

zijn, en hierdoor gaat (4) over in

$$\frac{k}{1 + 4 \pi \epsilon} - 1 - \frac{4 \pi p'}{\delta} (1 + 4 \pi \epsilon_0).$$

Welke waarden dan ook k , δ , p' en δ mogen hebben, steeds zal, indien ϵ_0 slechts groot genoeg is, de breuk in (3) zeer klein zijn. In overeenstemming met de omstandigheid, dat bij geen enkel verschijnsel van eene merkbare waarde van $\frac{1}{\epsilon_0}$, met welke grootheid ook verzeleken, gebleken is, zullen wij mogen besluiten, dat werkelijk ook de breuk in (3) kan verwaarloosd worden, en dat wij dus bij de beschouwing van de transversale trillingen (amplitudo b) van de longitudinale (amplitudo c) geheel kunnen afzien.

§ 8. Stellen we in de derde voorwaarde $c = 0$, dan gaat zij over in:

$$[Bp - R^2 \delta] b = - R^2 \delta p h N a \sin \alpha \dots \dots \dots C')$$

terwijl we de tweede voorwaarde kunnen schrijven in den vorm:

$$[Bp - R^2 \delta] a = R^2 \delta p h N b \sin \alpha \dots \dots \dots B')$$

Door de overeenkomstige leden dezer betrekkingen in elkaar te deelen krijgen we:

$$\frac{b}{a} = -\frac{a}{b},$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$b = \pm i a.$$

Substitueeren we deze waarde van b in B') of C'), dan gaan deze voorwaarden over in:

$$R^2 \delta [1 \pm i p h N \sin \alpha] = B p.$$

Zij R_0 de waarde, welke R aanneemt, wanneer het veld niet magnetisch is, dan is:

$$R_0^2 \delta = B p \dots \dots \dots 5)$$

Voeren we dit in, dan krijgen we:

$$R^2 = R_0^2 [1 \mp i p h N \sin \alpha],$$

wanneer we in 't oog houden dat $p h N$ eene kleine waarde heeft, welker tweede en hoogere machten verwaarloosd mogen worden.

Voorts wordt:

$$R = R_0 \left[1 \mp i \frac{p h N}{2} \sin \alpha \right].$$

Gemakshalve stellen we:

$$p h N = 2 \mu \dots \dots \dots 6)$$

De waarde van μ is weer zeer klein. De laatste formules gaan over in de meer eenvoudige:

$$R^2 = R_0^2 [1 \mp 2 i \mu \sin \alpha] \dots \dots \dots 7)$$

$$R = R_0 [1 \mp i \mu \sin \alpha] \dots \dots \dots 8)$$

De uitdrukking $\mu \sin \alpha$ is evenredig met de component van de magnetische kracht volgens de voortplantingsrichting. De invloed van den magnetischen toestand van het veld is derhalve een *maximum*, wanneer de voortplantingsrichting van het licht met de richting der magnetische kracht saamvalt; die invloed is *nul*, wanneer het licht zich voortplant in eene richting loodrecht op die der magnetische kracht. Bij doorschijnende lichamen werd, gelijk men weet, experimenteel aangetoond, dat slechts de component der magnetische kracht in de voortplantingsrichting van invloed is op de lichtbeweging.

§ 9. Voordat we onze formules gaan toepassen, zullen we onderzoeken, welke soort van lichtbeweging zij geven

kunnen. Wanneer we de gevonden waarden in de uitdrukkingen voor u, v, w , in § 4 opgesteld, substitueeren, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} u &= a \sin \alpha P, & P &= e^{\delta t - \delta R (x \cos \alpha + z \sin \alpha)}, \\ v &= \pm i a P, & R &= R_0 [1 \mp i \mu \sin \alpha]. \\ w &= -a \cos \alpha P, \end{aligned}$$

Nemen wij eerst den bewegingstoestand, beantwoordende aan de bovenste teekens. Wij stellen:

$$\delta = -i \frac{2\pi}{T}$$

en, daar R in het algemeen complex zal zijn:

$$R = S_1 + i S_2,$$

waarbij wij in elk geval S_1 positief kunnen kiezen (door de verg. der vorige § wordt slechts R^2 bepaald). Ook P is eene complexe grootheid. Nemen we de reële deelen als oplossingen, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} u &= a \sin \alpha \cdot e^{-\frac{2\pi}{T} S_2 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)} \cos \frac{2\pi}{T} [t - S_1 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)], \\ v &= a e^{-\frac{2\pi}{T} S_2 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)} \sin \frac{2\pi}{T} [t - S_1 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)], \\ w &= -a \cos \alpha \cdot e^{-\frac{2\pi}{T} S_2 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)} \cos \frac{2\pi}{T} [t - S_1 (x \cos \alpha + z \sin \alpha)]. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen stellen een *rechts circulair* gepolariseerden lichtbundel voor, zich voortplantende met eene snelheid $\frac{1}{S_1}$. Naarmate het licht verder in de middenstof doordringt, verandert de amplitudo; al naarmate S_2 negatief of positief is, zal zij toe- of afnemen. In werkelijkheid kan natuurlijk slechts het laatste geval zich voordoen,

zoodat bij elk lichaam S_2 positief moet zijn; van de waarde dier grootheid is dan de absorptie afhankelijk.

Bij den bewegingstoestand, beantwoordende aan de onderste teekens, is R eveneens complex; de waarden van S_1 en S_2 zijn echter anders dan boven. De vergelijkingen, welke we nu krijgen, stellen een *links circulair* gepolariseerden lichtbundel voor, die bij 't verder doordringen in het medium insgelijks absorptie ondergaat.

Opgemerkt zij nog, dat men ook

$$\delta = +i \frac{2\pi}{T}$$

zou kunnen stellen; dan echter zou voor elk lichaam S_2 negatief moeten uitvallen, om dezelfde reden, waarom die grootheid zoeven positief zijn moest. Wij zullen intuschen in het vervolg $\delta = -i \frac{2\pi}{T}$ en S_2 positief stellen.

§ 10. Tot gemak voor latere bewerkingen zullen we de gevonden betrekkingen in onze vorige grootheden invoeren; we stellen tevens $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
 P &= e^{\delta t - \delta R(x \cos \alpha + z \sin \alpha)}, \\
 u &= \sin \alpha P, & X &= \frac{1}{p} [\sin \alpha \pm 2i\mu] P, & L &= \frac{R \sin \alpha}{A(1 + 4\pi\theta)} Y, \\
 v &= \pm i P, & Y &= \frac{1}{p} [\pm i - 2\mu \sin \alpha] P, & M &= \frac{\pm i R}{A(1 + 4\pi\theta)} Y, \\
 w &= -\cos \alpha P, & Z &= \frac{-\cos \alpha}{p} P, & N &= \frac{-R \cos \alpha}{A(1 + 4\pi\theta)} Y.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0, & \phi &= 0, \\
 R &= R_0 [1 \mp i\mu \sin \alpha], \\
 \delta &= -i \frac{2\pi}{T}, & \mu &= \frac{1}{2} p h N.
 \end{aligned}$$

$$R_0^2 = \frac{Bp}{\delta}.$$

§ 11. Grensvoorwaarden. Nu we weten, welke electriciteitsbewegingen bestaanbaar zijn, wanneer mag-

netische krachten werken, gaan we onderzoeken, welke de grensvoorwaarden zijn, waaraan die bewegingen gebonden zijn bij den overgang uit eene middenstof, gekarakteriseerd door de constanten p_1, θ_1 , in eene andere, gekarakteriseerd door p_2, θ_2 . De grootheden, die op het eerste medium betrekking hebben, zullen we voorzien van den index 1 ter onderscheiding van die, welke op het tweede medium betrekking hebben en welke we den index 2 zullen geven.

De grensvoorwaarden, die betrekking hebben op de electromotorische en de magnetische krachten, welke onafhankelijk van het effect van Hall bestaan, gelden ook thans nog onveranderd, omdat die grensvoorwaarden een gevolg zijn van de wijze, waarop die krachten van de electriciteitsbeweging en de magnetische polarisatie afhangen.

De componenten van de electromotorische kracht, voor zoover die afkomstig is van electrostatische werking en inductiewerking, zijn:

$$x, \quad y, \quad z;$$

het electrostatisch aandeel heeft tot componenten:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

De componenten van de electromotorische kracht, welke uitsluitend aan inductie te wijten is, verkrijgen we hieruit door aftrekking. Die componenten zijn:

$$x + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad y + \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad z + \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

De wijze nu, waarop de componenten der inductiewerking van de stroomcomponenten afhangen, voert tot integralen, welke, zooals de potentiaaltheorie leert, con-

tinu zijn aan de grensvlakken, waar p en θ discontinu kunnen wezen. We krijgen dus aan ons grensvlak:

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 &= X_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_2 \\ Y_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_1 &= Y_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_2 \\ Z_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_1 &= Z_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_2 \end{aligned} \right\} \text{(E).}$$

De magnetische krachtcomponenten, welke uit de electricische stroomingen ontstaan, worden gegeven door:

$$L + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}, \quad M + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}, \quad N + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}.$$

Ook deze zijn aan het grensooppervlak continu; derhalve:

$$\left. \begin{aligned} L_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}\right)_1 &= L_2 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}\right)_2 \\ M_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}\right)_1 &= M_2 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}\right)_2 \\ N_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}\right)_1 &= N_2 + \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}\right)_2 \end{aligned} \right\} \text{(F).}$$

We beschouwen voorts de met den tijd veranderlijke hoeveelheid electriciteit, aan de grenslaag opgehoopt. Laten de cosinussen van de hoeken, welke de normaal n (getrokken in een punt der grenslaag van het eerste medium naar het tweede) met de coördinatenassen maakt, zijn a, b, c . De toename van de dichtheid der electriciteit in de grenslaag zal dan per tijdseenheid bedragen:

$$a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2).$$

Noemen we die dichtheid σ , dan is dus:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2).$$

De potentiaaltheorie leert, dat het verband tusschen de vlaktedichtheid der electriciteit en de potentiaal functie uitgedrukt wordt door:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_2 \right]$$

Daar echter:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

kunnen we ook schrijven:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{4\pi} \left\{ a \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_2 \right] + b \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_2 \right] + \right. \\ \left. + c \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Aan het grensooppervlak bestaat dus tusschen de stroomcomponenten en de potentiaalfunctie de betrekking:

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ a \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_2 \right] + \right. \\ \left. + b \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_2 \right] + c \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_2 \right] \right\}. \quad (G) \end{aligned}$$

Met invoering der betrekkingen (E) gaat dit over in de voorwaarde:

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ a(X_1 - X_2) + \right. \\ \left. + b(Y_1 - Y_2) + c(Z_1 - Z_2) \right\} \dots \dots \dots (H) \end{aligned}$$

Men kan thans (G), (H) en twee der vergelijkingen (E) als de vier grensvoorwaarden nemen.

De betrekking (H) laat zich vereenvoudigen, wanneer wij weder de onderstelling invoeren, dat ϵ_0 een zeer groot getal is. De krachtcomponenten X, Y, Z hebben nl. den vorm [zie § 10]:

$$\frac{G}{p} P,$$

waarin G een eindig getal voorstelt, b.v. $\sin \alpha + 2i\mu$, of eene soortgelijke grootheid.

Naar den tijd differentieerende krijgen we in het tweede lid van (H) uitdrukkingen van den vorm:

$$\frac{\delta}{p} \text{ G P.}$$

Daar nu (§ 7) p van de orde ε_0 is en de termen in het eerste lid van (H) den vorm G P hebben, zijn die termen zeer groot, vergeleken met die in het tweede lid; we mogen daarom zonder merkbare fout in de verhoudingen van u_1 , u_2 , enz. stellen:

$$a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = 0. \quad \dots \quad (\text{H}')$$

Dit drukt uit, dat de normale component van den totalen stroom aan het grensvlak doorlopend is.

Zijn λ , μ , ν de componenten van de magnetische polarisatie, dan is de dichtheid van de magnetische vloeistof laag aan het grensooppervlak:

$$a(\lambda_1 - \lambda_2) + b(\mu_1 - \mu_2) + c(\nu_1 - \nu_2).$$

Die dichtheid is ook te verkrijgen uit de magnetische potentiaalfunctie op dezelfde wijze, als we boven de dichtheid der electricische laag verkregen uit de electricische potentiaalfunctie. Stellen we die twee verschillende uitdrukkingen voor de dichtheid aan elkaar gelijk, dan bekoemen we:

$$a(\lambda_1 - \lambda_2) + b(\mu_1 - \mu_2) + c(\nu_1 - \nu_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ a \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2 \right] + b \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_2 \right] + c \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_2 \right] \right\} \quad (\text{J})$$

Nu zijn de componenten der magnetische polarisatie evenredig met die der magnetische kracht. We stellen:

$$\lambda = \theta L, \quad \mu = \theta M, \quad \nu = \theta N.$$

Elimineeren we uit onze laatste grensvoorwaarde met behulp der drie laatste betrekkingen λ , μ , ν en met behulp van (F) de differentiaalquotienten van χ , dan krijgen we:

$$(1 + 4\pi\theta_1)(aL_1 + bM_1 + cN_1) = (1 + 4\pi\theta_2)(aL_2 + bM_2 + cN_2).$$

Omtrent de absolute waarde van de constanten θ kan men evenmin iets te weten komen als omtrent die van de constanten der diëlectrische polarisatie; proefnemingen leeren alleen de verhouding van de uitdrukking $1 + 4\pi\theta$ bij verschillende middenstoffen kennen. Die verhouding wijkt bij niet sterk magnetische middenstoffen weinig van de eenheid af, zoodat men bij dergelijke media de θ 's gelijk kan nemen. We zullen ook in ons geval — schoon we dat later toepassen op den overgang eener lichtbeweging uit lucht in ijzer of staal — aannemen, dat we $\theta_1 = \theta_2$ kunnen stellen zonder eene groote fout te begaan ¹⁾. Onze voorwaarde reduceert zich daarmee tot:

$$aL_1 + bM_1 + cN_1 = aL_2 + bM_2 + cN_2 \dots (J')$$

We passen de gevonden grensconditiën toe op het bijzondere geval, dat het grensvlak plat is. We nemen den oorsprong in het grensvlak en laten eene der coördinatenassen, b.v. de Z-as, saamvallen met de normaal. Daaruit volgt:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_2, \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_2.$$

Uit de beide eerste der vergelijkingen (E) volgen dan de betrekkingen:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = X_2, \\ Y_1 = Y_2, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

uit (H') volgt:

$$w_1 = w_2, \dots \dots \dots (10)$$

terwijl de vierde voorwaarde (G), die op de electriciteitsbeweging betrekking heeft, leert, dat $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_2$

¹⁾ Verg. Fitzgerald, t. a. p. pag. 709 en 710 en Lorentz, Versl. en Meded. d. Akad. v. Wet. 2e Reeks, XIX, p. 245.

eene kleine grootheid (met den factor $\frac{1}{\epsilon_0}$) moet zijn. Eigenlijk is nl., zooals wij zagen (blijkens (H)) $w_1 - w_2$ niet 0, maar eene dergelijke kleine grootheid. Om ook aan die vierde voorwaarde te voldoen zou men in het vraagstuk der terugkaatsing van het licht ook de longitudinale trillingen in rekening moeten brengen, die uit eene invallende transversale beweging ontstaan kunnen. Het zal ons intusschen blijken, dat men aan de vergelijkingen (9) en (10) voldoen kan, wanneer men uitsluitend transversale trillingen invoert en het recht daartoe ontleenen wij juist hieraan, dat $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_2$ zeer klein moet zijn; daar nl. de longitudinale trillingen de waarde van $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_2$ moeten opleveren (alleen bij deze trillingen is ϕ van 0 verschillend) zullen dan ook die trillingen zeer zwak zijn en verwaarloosd mogen worden.

De voorwaarden, die op de magnetische momenten en krachten betrekking hebben, worden zeer eenvoudig. Uit (F) volgt nl.:

$$\left. \begin{array}{l} L_1 = L_2 \\ M_1 = M_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

en uit (J'):

$$N_1 = N_2, \dots \dots \dots (12)$$

terwijl dan uit (F) nog als vierde voorwaarde:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_2$$

volgt. Daaraan wordt echter door transversale trillingen van zelf voldaan, aangezien bij deze steeds $\chi = 0$ is.

In het geheel hebben wij dus de zes grensvoorwaarden (9) — (12): de continuïteit

- 1°. van de drie componenten der (bij de electriciteitsbeweging behoorende) magnetische kracht,
- 2°. van de twee tangentiale componenten der electromotorische kracht (voor zoover deze uit electrostatische werkingen en inductie voortspuit),
- 3°. van de totale stroomcomponent in de richting der normaal.

HOOFDSTUK II.

Theorie der polaire terugkaatsing.

§ 12. Nu we weten, welke lichtbewegingen bestaanbaar zijn in eene middenstof, waarin magnetische krachten werken en voorts de grensvoorwaarden kennen, waaraan de lichtbewegingen aan het grensoppervlak van twee verschillende media te voldoen hebben, zijn we in staat te onderzoeken, wat er gebeurt bij de terugkaatsing en breking van invallend gepolariseerd licht door een metaaloppervlak. We onderstellen, dat in het eerste medium (lucht) het effect van Hall niet bestaat, in het tweede (het metaal van een electromagneet) wel. We zullen daarbij eerst het bijzonder geval nemen, waarbij de magnetische kracht loodrecht op het grensvlak gericht is [Polaire Reflexie] en daarna dat, waarbij de richting der magnetische kracht evenwijdig aan het grensvlak loopt [Aequatoriale Reflexie]. Beide terugkaatsingen hebben we te onderzoeken voor het geval, dat de trillingen in den invallenden lichtbundel geschieden loodrecht op het vlak van inval en voor het geval, dat zij in het invalsvlak geschieden.

We zouden daarbij een invallenden lichtbundel en een teruggekaatsten in het eerste medium kunnen aannemen en twee circulair gepolariseerde lichtbundels in het tweede, om daarna met behulp van de grensvoorwaarden de amplitudines en phases van het teruggekaatste en het gebroken licht uit te drukken in functie van die van het invallend licht. Eene andere methode, waarop mij Prof. Lorentz opmerkzaam maakte, heeft het voordeel, dat zij de berekeningen nagenoeg tot op de helft bekort. Ik zal die laatste volgen.

We nemen daarbij aan een der circulair gepolariseerde lichtbundels b.v. dien, beantwoordende aan de bovenste teekens van § 10 en met de amplitudo 1, en laten dien zich voortplanten in het tweede medium in eene richting, welke den hoek α_2 met de X-as vormt. We onderzoeken daarna, hoe het invallende en het teruggekaatste licht in het eerste medium geconstitueerd moeten zijn om eene dergelijke lichtbeweging in het tweede te voorschijn te kunnen roepen. We zullen vinden, dat door louter transversale trillingen aan de grensvoorwaarden voldaan kan worden. We ontbinden de trillingen van het invallende licht in eene component s') loodrecht op het vlak van inval en in eene andere σ in het invalsvlak. Zoo ook het teruggekaatste licht; de overeenkomstige grootheden duiden we aan met s' en σ' . De voortplantingsrichting van den lichtbundel, die invalt, maakt een hoek α_1 met de X-as, welke hoek afhangt van α_2 .

In de uitkomst beschouwen we α_1 als gegeven, α_2 als daaruit volgende.

1) Wij duiden korthedshalve de verschillende lichtbundels door hunne amplitudines aan.

We kennen nu eene invallende beweging (s, σ), die een bundel in het metaal geeft, circulair gepolariseerd, met eene amplitudo 1; we weten ook, hoe die bundel wordt teruggekaatst (s', σ'). Wanneer we al deze bewegingen vermenigvuldigen met een onbepaalden factor l , dan krijgen we eene nieuwe lichtbeweging, die nog aan alle differentiaal-vergelijkingen voldoet.

$$\begin{array}{ll} \text{Invallende lichtbeweging} & l s, l \sigma. \\ \text{Teruggekaatste "} & l s', l \sigma'. \end{array} \quad \dots \dots 1)$$

We nemen vervolgens de andere circulair gepolariseerde lichtbeweging in het tweede medium aan, die, welke beantwoordt aan de onderste teekens, en zoeken op geheel dezelfde wijze als boven de invallende en de teruggekaatste bewegingen, die daarbij behooren. Weer staat α_1 vast; α_2 wordt iets anders dan vroeger. We duiden de grootheden, die op dezen tweeden bewegingstoestand betrekking hebben, aan met den index 1 en met m een onbepaalden vermenigvuldiger. We krijgen dan:

$$\begin{array}{ll} \text{Invallende lichtbeweging} & m s_1, m \sigma_1. \\ \text{Teruggekaatste "} & m s_1', m \sigma_1'. \end{array} \quad \dots \dots 2)$$

We laten thans de lichtbewegingen 1) en 2) tegelijkertijd bestaan. De nieuwe lichtbeweging voldoet nog aan de differentiaalvergelijkingen, aangezien deze lineair en homogeen zijn. We krijgen:

$$\begin{array}{ll} \text{Invallende lichtbeweging} & l s + m s_1, l \sigma + m \sigma_1. \\ \text{Teruggekaatste "} & l s' + m s_1', l \sigma' + m \sigma_1'. \end{array}$$

We kunnen nu over de onbepaalde vermenigvuldigers l en m zoodanig beschikken, dat de amplitudo van het invallende licht zij 1 en voorts dat:

1^o. in het invallende licht de trillingen geschieden loodrecht op het vlak van inval.

We stellen daartoe: $l s + m s_1 = 1$, $l \sigma + m \sigma_1 = 0$,

waaruit volgt:
$$l = \frac{\sigma_1}{s \sigma_1 - s_1 \sigma}, \quad m = \frac{-\sigma}{s \sigma_1 - s_1 \sigma}.$$

De componenten in het gereflecteerde licht hebben tot amplitudines:

die, loodrecht op het invalsvlak: $l s' + m s_1' = \frac{s' \sigma_1 - s_1' \sigma}{s \sigma_1 - s_1 \sigma} = a_s,$

" in " " " $l \sigma' + m \sigma_1' = \frac{\sigma' \sigma_1 - \sigma_1' \sigma}{s \sigma_1 - s_1 \sigma} = b_p.$

2°. in het invallende licht de trillingen geschieden *evenwijdig aan* het vlak van inval.

We stellen daartoe: $l s + m s_1 = 0$, $l \sigma + m \sigma_1 = 1$,

waaruit volgt:
$$l = \frac{-s_1}{s \sigma_1 - s_1 \sigma}, \quad m = \frac{s}{s \sigma_1 - s_1 \sigma}.$$

De componenten in het gereflecteerde licht hebben nu tot amplitudines:

die, loodrecht op het invalsvlak: $l s' + m s_1' = \frac{s s_1' - s_1 s'}{s \sigma_1 - s_1 \sigma} = b_s,$

" in " " " $l \sigma' + m \sigma_1' = \frac{s \sigma_1' - s_1 \sigma'}{s \sigma_1 - s_1 \sigma} = a_p.$

De grootheden l en m hebben eene physische beteekenis; zij treden op als amplitudines in het gebroken licht.

§ 13. Wij passen thans de aangegeven methode toe op het onderzoek der polaire reflexie.

Het grensvlak, dat we plat onderstellen, staat loodrecht op de richting der magnetische kracht. Daar we die laatste richting hebben aangenomen tot Z-as, zal, wanneer we den oorsprong van het coördinatenstelsel in het grensvlak aannemen, het X O Y-vlak met het grensvlak samenvallen.

We nemen in het metaal een circulair gepolariseerden lichtbundel aan nl. dien, welke behoort bij de bovenste teekens. In plaats van den hoek α_2 , dien de voortplan-

tingsrichting maakt met de X-as, voeren we liever zijn complement, den hoek van breking, β_2 in. De amplitudo zij 1.

De lichtbeweging, welke we aannemen, wordt voorgesteld door:

$$\begin{aligned} u_2 &= \cos \beta_2 P_2, & P_2 &= e^{\delta t - \delta R_2 (x \sin \beta_2 + z \cos \beta_2)}, \\ v_2 &= +i P_2, & R_2 &= R_0 (1 - i\mu \cos \beta_2), \\ w_2 &= -\sin \beta_2 P_2, & R_0 &= \frac{B}{\delta} p_2. \end{aligned}$$

De uitdrukkingen, die we noodig hebben voor de grensvoorwaarden en die we uit de bovenstaande afleiden, zijn de volgende:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\cos \beta_2 + 2i\mu}{p_2} P_2, & L_2 &= \frac{R_2 \cos \beta_2}{A(1 + 4\pi\theta_2)} Y_2, \\ Y_2 &= \frac{i - 2\mu \cos \beta_2}{p_2} P_2, & M_2 &= \frac{i R_2}{A(1 + 4\pi\theta_2)} Y_2, \\ & & N_2 &= \frac{-R_2 \sin \beta_2}{A(1 + 4\pi\theta_2)} Y_2. \end{aligned}$$

§ 14. Het invallende licht moge door uitdrukkingen worden voorgesteld, welke alle den factor

$$P_1 = e^{\delta t - \delta R_1 (x \sin \beta_1 + z \cos \beta_1)}$$

bevatten, terwijl het teruggekaatste licht voorgesteld moge worden door uitdrukkingen, die alle den factor

$$P_1' = e^{\delta t - \delta R_1 (x \sin \beta_1' + z \cos \beta_1')}$$

bevatten. De behoorlijke aansluiting in het grensvlak ($z=0$) van de twee lichtbewegingen in het eerste medium aan die in het tweede eischt:

$$R_2 \sin \beta_2 = R_1 \sin \beta_1 = R_1 \sin \beta_1',$$

waaruit dan volgt:

$$\beta_1' = \pi - \beta_1.$$

We elimineeren uit P_1' den hoek β_1' en krijgen:

$$P_1' = e^{\delta t - \delta R_1 (x \sin \beta_1 - z \cos \beta_1)}.$$

§ 15. Wij ontbinden de transversale trillingen van het invallende licht in eene component s loodrecht op het vlak van inval en voorts in eene andere σ in het vlak van inval. Daar we aannemen, dat in het eerste medium het effect van Hall niet bestaat, zijn de beide componenten onafhankelijk van elkander. We nemen tot vergelijkingen aan:

$$u_1 = \sigma \cos \beta_1 P_1, \quad P_1 = e^{\delta t} - \delta R_1 (x \sin \beta_1 + z \cos \beta_1),$$

$$v_1 = s P_1, \quad R_1^2 = \frac{B}{\delta} p_1.$$

$$w_1 = -\sigma \sin \beta_1 P_1.$$

Daar we in onze twee media de θ 's gelijk genomen hebben, is de grootheid B ook voor beide gelijk en behoeven we haar niet van indices te voorzien.

We leiden uit de gegeven uitdrukkingen af:

$$X_1 = \frac{\sigma \cos \beta_1}{p_1} P_1, \quad L_1 = \frac{R_1 \cos \beta_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} \cdot Y_1,$$

$$Y_1 = \frac{s}{p_1} P_1, \quad M_1 = \frac{-R_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} \cdot \frac{\sigma}{p_1} P_1,$$

$$N_1 = \frac{-R_1 \sin \beta_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} \cdot Y_1.$$

§ 16. We vatten het teruggekaatste licht op dezelfde wijze op als het invallende licht nl. als bestaande uit eene component s' loodrecht op het vlak van inval en eene andere σ' in het invalsvlak. Evenals hierbij gebruiken wij ook bij andere grootheden accenten om hunne waarden in het teruggekaatste licht te onderscheiden van die, welke zij in het invallende licht hebben. We krijgen:

$$u_1' = -\sigma' \cos \beta_1 P_1', \quad P_1' = e^{\delta t} - \delta R_1 (x \sin \beta_1 - z \cos \beta_1).$$

$$v_1' = s' P_1',$$

$$w_1' = -\sigma' \sin \beta_1 P_1'.$$

Hieruit leiden we weer af:

$$\begin{aligned} X_1' &= \frac{-\sigma' \cos \beta_1}{p_1} P_1', & L_1' &= \frac{-R_1 \cos \beta_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} Y_1', \\ Y_1' &= \frac{s'}{p_1} P_1', & M_1' &= \frac{-R_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} \cdot \frac{\sigma'}{p_1} P_1', \\ & & N_1' &= \frac{-R_1 \sin \beta_1}{A(1 + 4\pi \theta_1)} Y_1'. \end{aligned}$$

§ 17. Passen we de zes grensvoorwaarden op deze grootheden toe, dan krijgen we de volgende betrekkingen.

De continuïteit van	X	geeft:	$\frac{(\sigma - \sigma') \cos \beta_1}{p_1} = \frac{\cos \beta_2 + 2i\mu}{p_2}$	1)
" " "	Y	" :	$\frac{s + s'}{p_1} = \frac{i - 2\mu \cos \beta_2}{p_2}$	2)
" " "	" de norm. str.comp. "	" :	$(\sigma + \sigma') \sin \beta_1 = \sin \beta_2$	3)
" " "	L	" :	$(Y_1 - Y_1') R_1 \cos \beta_1 = Y_2 R_2 \cos \beta_2$	4)
" " "	M	" :	$\frac{(\sigma + \sigma') R_1}{p_1} = \frac{(1 + 2i\mu \cos \beta_2) R_2}{p_2}$	5)
" " "	N	" :	$Y_1 + Y_1' = Y_2$	6)

We hebben vier onbekenden s , σ , s' , σ' , terwijl we zes vergelijkingen hebben. We hebben derhalve te veel vergelijkingen, tenzij het mocht blijken, dat twee dier vergelijkingen afhankelijk zijn van de andere. Werkelijk is dat het geval.

De vergelijking 6) is dezelfde als de vergelijking 2).

Onder opmerking dat:

$$R_0^2 = R_2^2 [1 + 2i\mu \cos \beta_2], \quad \frac{R_0^2}{R_1^2} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

laat zich de vergelijking 5) als volgt transformeeren:

$$\frac{(\sigma + \sigma') R_1}{p_1} = \frac{(1 + 2i\mu \cos \beta_2) R_2}{p_2},$$

$$\frac{(\sigma + \sigma') R_2}{R_1^2} = \frac{R_0^2}{R_0^2 \cdot R_2},$$

$$\frac{\sigma + \sigma'}{R_1} = \frac{1}{R_2},$$

d. i. $(\sigma + \sigma') \sin \beta_1 = \sin \beta_2$

en dit is de vergelijking 3).

Onze zes vergelijkingen blijken dus slechts vier onafhankelijke betrekkingen te geven, juist voldoende om de vier onbekenden te bepalen.

§ 18. Ten einde de berekening gemakkelijker te maken, voeren we den hoek β_0 in, gedefinieerd door de betrekking:

$$R_0 \sin \beta_0 = R_2 \sin \beta_2 = R_1 \sin \beta_1.$$

De physische beteekenis van β_0 is deze: het is de hoek, waarin β_2 overgaat, wanneer R_2 wordt R_0 d. i. wanneer het metaal ophoudt een electromagneet te zijn. Aangezien R_2 zeer weinig van R_0 verschilt, zal ook β_2 weinig van β_0 verschillen. We stellen:

$$\beta_2 = \beta_0 + \theta, \quad \text{dus} \quad \sin \beta_2 = \sin \beta_0 + \theta \cos \beta_0.$$

Om θ te bepalen hebben wij dan:

$$R_0 \sin \beta_0 = R_2 \sin \beta_2 = R_0 (1 - i\mu \cos \beta_2) (\sin \beta_0 + \theta \cos \beta_0).$$

We mogen in $1 - i\mu \cos \beta_2$ den hoek β_2 door β_0 vervangen; we verwaarloozen zoodoende een term van de tweede orde ten aanzien van μ , iets wat we van den beginne af steeds gedaan hebben. We krijgen:

$$\sin \beta_0 = (1 - i\mu \cos \beta_0) (\sin \beta_0 + \theta \cos \beta_0),$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \theta &= i\mu \sin \beta_0 \\ \therefore \sin \beta_2 &= \sin \beta_0 + i\mu \sin \beta_0 \cos \beta_0 \\ \therefore \cos \beta_2 &= \cos \beta_0 - i\mu \sin^2 \beta_0 \\ R_2 &= R_0 (1 - i\mu \cos \beta_0). \end{aligned}$$

We zullen nu uit onze vier vergelijkingen 1), 2), 3), 4) de van den index 2 voorziene grootheden verdrijven en bekomen met verwaarloozing van de tweede en hoogere machten van μ het volgende stel vergelijkingen:

$$\sigma - \sigma' = \frac{\sin^2 \beta_0}{\sin^2 \beta_1 \cos \beta_1} [\cos \beta_0 + i \mu (1 + \cos^2 \beta_0)]. \quad 1')$$

$$\sigma + \sigma' = \frac{\sin \beta_0}{\sin \beta_1} [1 + i \mu \cos \beta_0], \quad 3')$$

$$s + s' = \frac{\sin^2 \beta_0}{\sin^2 \beta_1} [i - 2 \mu \cos \beta_0], \quad 2')$$

$$s - s' = \frac{\sin \beta_0}{\sin \beta_1 \cos \beta_1} [i \cos \beta_0 - \mu \cos 2 \beta_0]. \quad 4')$$

§ 19. Uit deze vergelijkingen kunnen door eenvoudige optelling en aftrekking s , s' , σ en σ' worden berekend. In de waarden, die men voor de beide eerste grootheden verkrijgt, zullen termen met i en termen met μ , in de waarden van σ en σ' termen met $i \mu$ en termen zonder i of μ optreden. Stellen wij dus:

$$\begin{aligned} s &= i s_0 + \mu c, \\ s' &= i s_0' + \mu c', \\ \sigma &= \sigma_0 + i \mu d, \\ \sigma' &= \sigma_0' + i \mu d', \end{aligned}$$

dan voldoen s_0 , s_0' , σ_0 , σ_0' aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} s_0 + s_0' &= \frac{\sin^2 \beta_0}{\sin^2 \beta_1}, \\ s_0 - s_0' &= \frac{\sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sin \beta_1 \cos \beta_1}, \\ \sigma_0 + \sigma_0' &= \frac{\sin \beta_0}{\sin \beta_1}, \\ \sigma_0 - \sigma_0' &= \frac{\sin^2 \beta_0 \cos \beta_0}{\sin^2 \beta_1 \cos \beta_1}, \end{aligned}$$

en c , c' , d , d' aan de voorwaarden:

$$\begin{aligned} c + c' &= -2 \frac{\sin^2 \beta_0 \cos \beta_0}{\sin^2 \beta_1}, \\ c - c' &= - \frac{\sin \beta_0 \cos 2 \beta_0}{\sin \beta_1 \cos \beta_1}, \\ d + d' &= \frac{\sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sin \beta_1}, \\ -d &= \frac{\sin^2 \beta_0 (1 + \cos^2 \beta_0)}{\sin^2 \beta_1 \cos \beta_1}. \end{aligned}$$

Wanneer de magnetische kracht niet werkt, is $\mu = 0$ en gaan s, s', σ, σ' over in $is_0, is_0', \sigma_0, \sigma_0'$, waardoor de beteekenis der ingevoerde grootheden aan het licht komt.

§ 20. We nemen nu in het tweede medium den tweeden circulair gepolariseerden lichtbundel aan, dien, welke behoort bij de onderste teekens. In het eerste medium nemen we op gelijke wijze als vroeger eene invallende lichtbeweging (s_1, σ_1) en eene teruggekaatste (s_1', σ_1') aan. De vergelijkingen, die we bekomen, zijn dezelfde als vroeger met verandering alleen van i in $-i$. Die verandering begint in R_2 om daarvan te maken R_2' , voorts in β_2 om die om te zetten in β_2' enz. Het voordeel van de invoering der grootheden R_0, β_0 wordt hierdoor duidelijk.

De waarden van $s_0, s_0', \sigma_0, \sigma_0', c, c', d, d'$ zijn dezelfde als vroeger en ten slotte zullen we tot uitkomsten bekomen:

$$\begin{aligned} s_1 &= -is_0 + \mu c, \\ s_1' &= -is_0' + \mu c', \\ \sigma_1 &= \sigma_0 - i\mu d, \\ \sigma_1' &= \sigma_0' - i\mu d'. \end{aligned}$$

§ 21. We berekenen nu de tellers en den noemer van de uitdrukkingen a_s, b_p, a_p, b_s , die we in § 12 invoerden.

De gemeenschappelijke noemer van de vier breuken wordt, als wij termen met μ^2 weer weglaten:

$$s\sigma_1 - s_1\sigma = 2is_0\sigma_0,$$

terwijl de tellers achtereenvolgens worden:

$$\begin{aligned} s'\sigma_1 - s_1'\sigma &= 2is_0'\sigma_0, \\ \sigma'\sigma_1 - \sigma_1'\sigma &= 2i(\sigma_0 d' - \sigma_0' d)\mu, \\ ss_1' - s_1 s' &= 2i(s_0 c' - s_0' c)\mu, \\ s\sigma_1' - s_1 \sigma' &= 2is_0\sigma_0'. \end{aligned}$$

Met verwaarloozing der tweede en hoogere machten van μ worden:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{s_0'}{s_0}, \\ b_p &= \frac{\sigma_0 d' - \sigma_0' d}{s_0 \sigma_0} \mu, \\ b_s &= \frac{s_0 c' - s_0' c}{s_0 \sigma_0} \mu, \\ a_p &= \frac{\sigma_0'}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

In deze formules kunnen thans de waarden voor s_0 , s_0' , enz. worden ingevoerd, die uit de vergelijkingen der vorige § volgen. Men vindt b. v. uit deze laatste:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{\sin \beta_0 \sin (\beta_1 + \beta_0)}{2 \sin^2 \beta_1 \cos \beta_1}, \\ \sigma_0 &= \frac{\sin \beta_0 \sin (\beta_1 + \beta_0) \cos (\beta_1 - \beta_0)}{2 \sin^2 \beta_1 \cos \beta_1}, \end{aligned}$$

terwijl overigens bij de substitutie van betrekkingen als:

$$\sigma_0 d' - \sigma_0' d = \frac{1}{2} [(\sigma_0 + \sigma_0')(d' - d) + (\sigma_0 - \sigma_0')(d' + d)]$$

gebruik gemaakt kan worden. Ten slotte verkrijgt men:

$$\begin{aligned} a_s &= -\frac{\sin (\beta_1 - \beta_0)}{\sin (\beta_1 + \beta_0)}, \\ b_p &= -\frac{\sin 2 \beta_1 \sin \beta_0}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_0) \cos (\beta_1 - \beta_0)} \mu, \\ b_s &= -\frac{\sin 2 \beta_1 \sin \beta_0}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_0) \cos (\beta_1 - \beta_0)} \mu, \\ a_p &= \frac{\tan (\beta_1 - \beta_0)}{\tan (\beta_1 + \beta_0)}. \end{aligned}$$

Deze formules leeren ons, dat a_s en a_p onafhankelijk zijn van μ en het er dus niet toe doet, voorzoover deze componenten betreft, of het ijzer al of niet magnetisch is. Naar behooren stemmen deze uitkomsten overeen met die, welke men bij de gewone metaalreflexie verkrijgt. De invloed van den magnetischen toestand van het ijzer is alleen deze, dat bij de polaire reflexie, die

we beschouwden, eene component b toegevoegd wordt in het teruggekaatste licht loodrecht gepolariseerd op die, welke men ook zonder den magnetischen toestand van het ijzer verkrijgt. Voorts blijkt $b_p = b_s$ te zijn d. i. de toegevoegde normale component is dezelfde of het invallend licht evenwijdig aan het invalsvlak, dan wel loodrecht daarop gepolariseerd is.

§ 22. Om de verkregen uitkomst te vergelijken met die, welke Lorentz voor loodrecht invallend licht heeft afgeleid (Versl. en Meded. XIX, p. 245) merke men vooreerst op, dat wanneer β_1 en β_0 tot 0 naderen $\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{R_1}{R_0}$ mag gesteld worden, terwijl men dan verder verkrijgt:

$$b_p = -\frac{2\beta_1\beta_0}{(\beta_1 + \beta_0)^2}\mu = -\frac{2R_1R_0}{(R_1 + R_0)^2}\mu,$$

of, wanneer men op de formules (5) en (6) van § 8 let,

$$b_p = -\frac{hN\delta}{B} \frac{R_1R_0^2}{(R_1 + R_0)^2}.$$

Lorentz vindt voor de component, die in het teruggekaatste licht tengevolge van het magnetisme optreedt (t. a. p., p. 244):

$$v_1' = i\delta P_1',$$

waarin:

$$\delta = i\frac{h\gamma}{B} \frac{R_1R_2^2(o)}{[R_1 + R_2(o)]^2}$$

is, zoodat bij hem:

$$b_p = i\delta = -\frac{h\gamma}{B} \cdot \frac{R_1R_2^2(o)}{[R_1 + R_2(o)]^2}$$

wordt. Daar nu wat Lorentz h , γ en $R_2(o)$ noemt, bij mij door hN , δ en R_0 is voorgesteld, blijken de uitkomsten overeen te stemmen.

HOOFDSTUK III.

Theorie der aequatoriale terugkaatsing.

§ 23. Het grensooppervlak is plat, de richting der magnetische kracht is evenwijdig aan het grensvlak en tevens aan het invalsvlak. Nemen we een punt in het grensvlak tot oorsprong van ons coördinatenstelsel aan, dan ligt de Z-as in het grensvlak. De richting loodrecht op het grensvlak wordt onze X-as; de Y-as ligt dus ook in het grensvlak.

We nemen in het metaal den circulair gepolariseerden lichtbundel aan, die behoort bij de bovenste teekens. De hoek α_2 wordt nu de hoek van breking. De amplitudo zij 1.

De lichtbeweging in het metaal wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} u_2 &= \sin \alpha_2 P_2, & P_2 &= e^{\delta t} - \delta R_2 (x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2), \\ v_2 &= i P_2, & R_2 &= R_0 (1 - i \mu \sin \alpha_2), \\ w_2 &= -\cos \alpha_2 P_2, & R_0^2 &= B \frac{\rho_2}{\delta}. \end{aligned}$$

We leiden hieruit af de volgende uitdrukkingen, die we voor de grensvoorwaarden noodig hebben:

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{i - 2\mu \sin \alpha_2}{\rho_2} P_2, & L_2 &= \frac{R_2 \sin \alpha_2}{A(1 + 4\pi \theta_2)} Y_2, \\ Z_2 &= -\frac{\cos \alpha_2}{\rho_2} P_2, & M_2 &= \frac{i R_2}{A(1 + 4\pi \theta_2)} Y_2, \\ & & N_2 &= \frac{-R_2 \cos \alpha_2}{A(1 + 4\pi \theta_2)} Y_2. \end{aligned}$$

§ 24. Op dezelfde wijze als in § 14 onderstellen we dat in de vergelijkingen, die het invallend licht zullen voorstellen, optreedt de factor:

$$P_1 = e^{\delta t - \delta R_1 (x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)},$$

en in de uitdrukkingen, die het teruggekaatste licht voorstellen, de factor:

$$P_1' = e^{\delta t - \delta R_1 (-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)}.$$

De aanpassing van de lichtbewegingen in de twee middestoffen in het grensvlak ($x=0$) eischt:

$$R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2.$$

§ 25. Het invallend licht ontbinden we even als vroeger in een component s loodrecht op het vlak van inval en in eene andere σ in het vlak van inval. De vergelijkingen worden:

$$u_1 = \sigma \sin \alpha_1 P_1, \quad P_1 = e^{\delta t - \delta R_1 (x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)},$$

$$v_1 = s P_1, \quad R_1^2 = B \frac{p_1}{\delta}.$$

$$w_1 = -\sigma \cos \alpha_1 P_1.$$

De uitdrukkingen, die we voor de grensvoorwaarden noodig hebben en uit bovenstaande afleiden, zijn:

$$Y_1 = \frac{s}{p_1} P_1, \quad L_1 = \frac{R_1 \sin \alpha_1}{A(1 + 4\pi\theta_1)} Y_1,$$

$$Z_1 = \frac{-\sigma \cos \alpha_1}{p_1} P_1, \quad M_1 = \frac{-R_1}{A(1 + 4\pi\theta_1)} \cdot \frac{\sigma}{p_1} P_1,$$

$$N_1 = \frac{-R_1 \cos \alpha_1}{A(1 + 4\pi\theta_1)} Y_1.$$

§ 26. De uitdrukkingen, die het teruggekaatste licht voorstellen, zijn:

$$u_1' = \sigma' \sin \alpha_1 P_1', \quad P_1' = e^{\delta t - \delta R_1 (-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)},$$

$$v_1' = s' P_1',$$

$$w_1' = \sigma' \cos \alpha_1 P_1'.$$

waarbij behooren:

$$\begin{aligned}
 Y_1' &= \frac{s'}{p_1} P_1', & L_1' &= \frac{R_1 \sin \alpha_1}{\Lambda(1 + 4\pi\theta_1)} Y_1', \\
 Z_1' &= \frac{\sigma' \cos \alpha_1}{p_1} P_1', & M_1' &= \frac{-R_1}{\Lambda(1 + 4\pi\theta_1)} \cdot \frac{\sigma'}{p_1} P_1', \\
 & & N_1' &= \frac{R_1 \cos \alpha_1}{\Lambda(1 + 4\pi\theta_1)} \cdot Y_1'.
 \end{aligned}$$

§ 27. De grensvoorwaarden, toegepast op de opgestelde uitdrukkingen, voeren tot de volgende relaties:

De continuïteit van	Y	geeft:	$\frac{s+s'}{p_1} = \frac{i-2\mu \sin \alpha_2}{p_2}$ 1)
" " "	Z	" :	$(\sigma - \sigma') \cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha_2}{p_2}$ 2)
" " "	de norm. stroomcomp.	" :	$(\sigma + \sigma') \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ 3)
" " "	L	" :	$\frac{(s+s') R_1 \sin \alpha_1}{p_1} = \frac{i-2\mu \sin \alpha_2}{p_2} R_2 \sin \alpha_2$ 4)
" " "	M	" :	$\frac{(\sigma + \sigma') R_1}{p_1} = \frac{1 + 2i\mu \sin \alpha_2}{p_2} R_2$ 5)
" " "	N	" :	$\frac{(s-s') R_1 \cos \alpha_1}{p_1} = \frac{(i-2\mu \sin \alpha_2) R_2 \cos \alpha_2}{p_2}$ 6)

De vergelijking 4) is dezelfde als 1).

De vergelijking 5) transformeeren we als volgt:

$$\sigma + \sigma' = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} (1 + 2i\mu \sin \alpha_2) = \frac{R_1^2}{R_0^2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_0^2}{R_2^2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1},$$

waaruit blijkt, dat zij hetzelfde geeft als 3).

De zes grensvoorwaarden geven ons derhalve vier onafhankelijke vergelijkingen 1), 2), 3) en 6) ter berekening van de vier onbekende grootheden s , σ , s' , σ' .

§ 28. Om uit die vier vergelijkingen de onbekenden in een geschikt vorm te kunnen verkrijgen, voeren we den hoek α_0 in, gedefinieerd door de betrekking:

$$R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 = R_0 \sin \alpha_0.$$

Evenals vroeger in § 18 stellen we: $\alpha_2 = \alpha_0 + \theta'$.

$$\sin \alpha_2 = \sin(\alpha_0 + \theta') = \sin \alpha_0 + \theta' \cos \alpha_0.$$

Voeren we dit in de verg.:

$$R_2 \sin \alpha_2 = R_0 \sin \alpha_0$$

in, dan krijgen we:

$$(1 - i \mu \sin \alpha_0) (\sin \alpha_0 + \theta' \cos \alpha_0) = \sin \alpha_0,$$

waaruit volgt:

$$\theta' = i \mu \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0},$$

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_0 + i \mu \sin^2 \alpha_0,$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_0 - i \mu \sin^2 \alpha_0 \tan \alpha_0,$$

$$R_2 = R_0 (1 - i \mu \sin \alpha_0).$$

Verdrijven we nu uit de vier verg. 1), 2), 3), 6) de van den index 2 voorziene grootheden, dan krijgen we:

$$s + s' = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha_1} (i - 2 \mu \sin \alpha_0), \dots \dots \dots 1')$$

$$s - s' = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} [i \cos \alpha_0 - \mu \tan \alpha_0 \cos 2 \alpha_0], \dots \dots 6')$$

$$\sigma + \sigma' = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} [1 + i \mu \sin \alpha_0], \dots \dots \dots 3')$$

$$\sigma - \sigma' = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1} [\cos \alpha_0 - i \mu \tan \alpha_0 \sin^2 \alpha_0]. \dots \dots 2')$$

Deze vergelijkingen onderscheiden zich van de overeenkomstige vergelijkingen 1'), 3'), 2'), 4) bij de polaire reflexie (§ 18) ten eerste daardoor dat in de verg. waarmee we nu te maken hebben, overal optreedt $\mu \tan \alpha_0$, waar vroeger alleen μ optrad (dit onderscheid wordt teweeggebracht door $\theta' = \theta \tan \alpha_0$) en in de tweede plaats, doordien in de verg. 1') van § 18 $1 + \cos^2 \beta_0$ voorkomt, terwijl in de verg. 2') van deze § voorkomt $-\sin^2 \alpha_0$.

§ 29. We kunnen nu verder handelen zooals we deden in § 19 en volg. Stellen we $\mu' = \mu \tan \alpha_0$ en verder:

$$s = i s_0 + \mu' c,$$

$$s' = i s_0' + \mu' c',$$

$$\sigma = \sigma_0 + i \mu' d,$$

$$\sigma' = \sigma_0' + i \mu' d'.$$

dan hebben — met verandering van β in α — s_0, s_0' ,

σ_0, σ_0', c en c' dezelfde waarde als vroeger in § 19. De waarden van d en d' zijn echter nu iets anders.

Evenals vroeger in § 21 wordt:

$$a_s = \frac{s_0'}{s_0},$$

$$b_p = \frac{\sigma_0 d' - \sigma_0' d}{s_0 \sigma_0} \mu',$$

$$b_s = \frac{s_0 c' - s_0' c}{s_0 \sigma_0} \mu',$$

$$a_p = \frac{\sigma_0'}{\sigma_0}.$$

Na substitutie der verschillende waarden gaan deze uitdrukkingen over in:

$$a_s = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)},$$

$$b_p = + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \tan \alpha_0 \mu,$$

$$b_s = - \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \tan \alpha_0 \mu,$$

$$a_p = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_0)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_0)}.$$

De uitkomsten, gevonden voor a_s en a_p , doen ons zien, dat ook bij de aequatoriale reflexie de amplitudo en de phase van die trillingscomponent in het gereflecteerde licht, welke in hetzelfde vlak plaats heeft, waarin de trillingsrichting in het invallende licht gelegen is — hetzij het invallende licht gepolariseerd is in het vlak van inval, hetzij loodrecht daarop — onafhankelijk zijn van het effect van Hall. Dat effect heeft alleen ten gevolge dat in het teruggekaatste licht eene nieuwe component b_p of b_s optreedt, loodrecht op de trillingsrichting van a_s of a_p ; de waarden dier twee b 's zijn gelijk, als we

afzien van de teekens. Voorts blijkt dat, afgezien van de teekens, de component b bij de aequatoriale reflexie te verkrijgen is uit de b der polaire reflexie door die laatste met den tangens van den hoek van breking te vermenigvuldigen.

HOOFDSTUK IV.

Vergelijking der theorie met de proeven van Kerr.

§ 30. Voordat we onze uitkomsten met de ervaring vergelijken voeren wij voor de beide gevallen, die wij onderzochten, eene zelfde notatie in. Wij zullen nl. ook bij de polaire reflexie den invalshoek met α_1 aanwijzen, en met α_0 den hoek van breking, die daarbij behoort, wanneer geene magnetische krachten werken. Door α_1 en α_0 worden dus thans de hoeken voorgesteld, die in Hoofdst. II β_1 en β_0 genoemd werden en wij verkrijgen bij de polaire reflexie

$$P_1 = e^{\delta t - \delta R_1} (x \sin \alpha_1 + z \cos \alpha_1),$$

$$P_1' = e^{\delta t - \delta R_1} (x \sin \alpha_1 - z \cos \alpha_1),$$

terwijl bij de aequatoriale reflexie

$$P_1 = e^{\delta t - \delta R_1} (x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1),$$

$$P_1' = e^{\delta t - \delta R_1} (-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)$$

blijft. Het verschil tusschen deze vormen is een gevolg van de omstandigheid, dat bij de polaire reflexie de Z-as, bij de aequatoriale de X-as met de normaal op het grensvlak samenvalt.

Voorts is steeds

$$\delta = -i \frac{2\pi}{T}, R_1^2 = \frac{B}{\delta} p_1,$$

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{R_1}{R_0} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \text{ en } \mu = \frac{1}{2} p_2 h N.$$

Wij verkrijgen nu in het teruggekaatste licht vibratiën, welke voorgesteld worden door de reële gedeelten der volgende uitdrukkingen.

Bij de *Polaire Reflexie*:

- 1^o. als de trillingen in het invallend licht geschieden *loodrecht op* het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \perp \text{ vlak van inval: } - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)} P_1',$$

$$\text{" } \parallel \text{ " " " " : } - \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \mu P_1'.$$

- 2^o. als de trillingen in het invallend licht plaats hebben *evenwijdig aan* het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \parallel \text{ vlak van inval: } + \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_0)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_0)} P_1',$$

$$\text{" } \perp \text{ " " " " : } - \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \mu P_1'.$$

Bij de *Aequatoriale Reflexie*:

- 1^o. als de trillingen in het invallend licht geschieden *loodrecht op* het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \perp \text{ vlak van inval: } - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)} P_1',$$

$$\text{" } \parallel \text{ " " " " : } + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \tan \alpha_0 \mu P_1'.$$

- 2^o. als de trillingen in het invallend licht geschieden *evenwijdig aan* het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \parallel \text{ vlak van inval: } + \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_0)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_0)} P_1',$$

$$\text{" } \perp \text{ " " " " : } - \frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \tan \alpha_0 \mu P_1'.$$

Hierbij is als positieve richting voor de trillingen lood-

recht op het invalsvlak die der positieve Y-as gekozen; als positieve richting voor de trillingen in het invalsvlak die, welke uit de zoeven genoemde richting ontstaat door eene L draaiing van 90° , wanneer men de draaiing beziet van die zijde, naar welke zich het licht voortplant. (Men vergelijkte § 9 der Inleiding en de keus der teekens op p. 27).

§ 31. Om uit de bovenstaande uitdrukkingen de werkelijke lichtbeweging te verkrijgen, moeten wij van al de complexe vormen alleen het reële gedeelte nemen; wij zullen daartoe de verschillende functiën tot hare normale vormen reduceeren. Noodig is daartoe vooreerst, dat we α_0 uitdrukken in functie van α_1 .

Volgens de gevonden brekingswet is:

$$R_1 \sin \alpha_1 = R_0 \sin \alpha_0,$$

waaruit volgt:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha_1 \frac{R_1}{R_0}.$$

Hierin is R_1 , de omgekeerde voortplantingssnelheid in de lucht, reëel; R_0 daarentegen is complex (verg. § 9). Wij stellen dus:

$$\frac{R_0}{R_1} = \sigma e^{i\tau}, \dots \dots \dots 1)$$

waarin σ en τ twee grootheden zijn, afhankelijk van p_1 en p_2 , dus van den aard van de twee middenstoffen en van den trillingstijd T.

Nu wordt:

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau}, \dots \dots \dots 2)$$

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma^2} e^{-2i\tau}}.$$

Deze laatste uitdrukking is weer complex. We stellen:

$$\cos \alpha_0 = \rho e^{i\omega} \dots \dots \dots 3)$$

waaruit dan volgt:

$$\rho^2 \cos 2\omega = 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1 \cos 2\tau}{\sigma^2}, \dots \dots \dots 4)$$

$$\rho^2 \sin 2\omega = \frac{\sin^2 \alpha_1 \sin 2\tau}{\sigma^2}, \dots \dots \dots 5)$$

$$\cotan 2\omega = \frac{\sigma^2}{\sin^2 \alpha_1 \sin 2\tau} - \cotan 2\tau. \dots \dots \dots 6)$$

ρ en ω zijn grootheden, die behalve van σ en τ afhangen van den hoek van inval.

We vinden met behulp der ingevoerde grootheden 1):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \alpha_0) &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} \left[1 + \frac{\sigma \rho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)} \right] = \\ &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} p_1 e^{i\delta_1}, \dots \dots \dots 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \alpha_0) &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} \left[-1 + \frac{\sigma \rho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)} \right] = \\ &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} p_2 e^{i\delta_2}, \dots \dots \dots 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \alpha_0) &= \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} \left[-\tan^2 \alpha_1 + \frac{\sigma \rho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)} \right] = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} p_3 e^{i\delta_3}, \dots \dots \dots 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 - \alpha_0) &= \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} \left[\tan^2 \alpha_1 + \frac{\sigma \rho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)} \right] = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sigma} e^{-i\tau} p_4 e^{i\delta_4}, \dots \dots \dots 10) \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_0 = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma \rho} e^{-i(\tau + \omega)}, \dots \dots \dots 11)$$

waarin, als we nog $\frac{\sigma \rho}{\cos \alpha_1} = m$ stellen:

1) Met het oog op de later te berekenen grootheden wijk ik hier eenigszins af van de door Eisenlohr opgestelde formules.

$$\tan \delta_1 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{1 + m \cos(\tau + \omega)}, \quad p_1^2 = 1 + m^2 + 2m \cos(\tau + \omega) \quad . . . \quad 12)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{-1 + m \cos(\tau + \omega)}, \quad p_2^2 = 1 + m^2 - 2m \cos(\tau + \omega) \quad . . . \quad 13)$$

$$\tan \delta_3 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{-\tan^2 \alpha_1 + m \cos(\tau + \omega)}, \quad p_3^2 = \tan^4 \alpha_1 + m^2 - 2 \tan^2 \alpha_1 m \cos(\tau + \omega) \quad 14)$$

$$\tan \delta_4 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{\tan^2 \alpha_1 + m \cos(\tau + \omega)}, \quad p_4^2 = \tan^4 \alpha_1 + m^2 + 2 \tan^2 \alpha_1 m \cos(\tau + \omega) \quad 15)$$

We hebben nu alleen de grootheid

$$\mu = \frac{1}{2} p_2 h N,$$

nog tot haren normalen vorm te reduceeren.

We weten dat:

$$R_0^2 = B \frac{p_2}{\delta}, \quad R_1^2 = B \frac{p_1}{\delta}.$$

Aangezien het eerste medium een slechte geleider (lucht) is, zoo is volgens § 3, daar $\frac{\partial X}{\partial t} = \delta X$ is (§ 5),

$$p_1 = \delta \varepsilon_1,$$

en dus:

$$R_1^2 = B \varepsilon_1.$$

Wij stelden nu in deze paragraaf:

$$\frac{R_0}{R_1} = \sigma e^{i\tau}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \sigma^2 e^{2i\tau},$$

$$\text{of} \quad p_2 = \delta \varepsilon_1 \sigma^2 e^{2i\tau},$$

ten gevolge waarvan we krijgen:

$$\mu = -i \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N \sigma^2 e^{2i\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N \sigma^2 e^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)}. \quad 16)$$

waarmee ook μ tot den normalen vorm herleid is.

§ 32. Alle complexe uitdrukkingen, waartoe de theorie ons gevoerd heeft, zijn met behulp van de bovenstaande

formulen tot hare normale vormen te herleiden. We krijgen:

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)} = -\frac{p_2}{p_1} e^{i(\delta_2 - \delta_1)} = -B_s e^{i\Delta_1},$$

$$\frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_0)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_0)} = \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4} e^{i(\delta_2 + \delta_3 - \delta_1 - \delta_4)} = B_p e^{i\Delta_2},$$

$$\frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \mu = \frac{\sigma^4}{p_1^2 p_4 \cos^3 \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N e^{i\left(4\tau - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4\right)} = C_p e^{i\Delta_3},$$

$$\frac{\sin 2\alpha_1 \sin \alpha_0 \tan \alpha_0}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_0) \cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \mu = \frac{\sigma^3 \sin \alpha_1}{\rho p_1^2 p_4 \cos^3 \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N e^{i\left(3\tau - \omega - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4\right)} = C_a e^{i\Delta_4},$$

waarin:

$$\begin{aligned} B_s &= \frac{p_2}{p_1}, & \Delta_1 &= \delta_2 - \delta_1, \\ B_p &= \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4}, & \Delta_2 &= \delta_2 - \delta_1 + \delta_3 - \delta_4, \\ C_p &= \frac{\sigma^4}{p_1^2 p_4 \cos^3 \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N, & \Delta_3 &= 4\tau - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4, \\ C_a &= \frac{\sigma^3 \sin \alpha_1}{\rho p_1^2 p_4 \cos^3 \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 h N, & \Delta_4 &= 3\tau - \omega - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4. \end{aligned}$$

Met behulp van de aldus ingevoerde grootheden nemen de uitdrukkingen van § 30 eene eenvoudiger gedaante aan.

We krijgen tot vibratiën in het teruggekaatste licht bij de *Polaire Reflexie*:

1^o als de trillingen in het invallend licht geschieden loodrecht op het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \perp \text{ vlak van inval: } -B_s e^{i\Delta_1} p'_1,$$

$$\text{" } \parallel \text{ " " " " } -C_p e^{i\Delta_2} p'_1;$$

2^o als de trillingen in het invallend licht geschieden evenwijdig aan het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \parallel \text{ vlak van inval: } +B_p e^{i\Delta_2} p'_1,$$

$$\text{" } \perp \text{ " " " " } -C_p e^{i\Delta_3} p'_1;$$

bij de *Aequatoriale Reflexie*:

1^o als de trillingen in het invallend licht geschieden loodrecht op het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \perp \text{ vlak van inval: } -B_s e^{i\Delta_1} P'_1,$$

$$\text{ " } \parallel \text{ " " " " } + C_a e^{i\Delta_1} P'_1.$$

2^o als de trillingen in het invallend licht geschieden evenwijdig aan het vlak van inval:

$$\text{Trilling } \parallel \text{ vlak van inval: } +B_p e^{i\Delta_2} P'_1,$$

$$\text{ " } \perp \text{ " " " " } -C_a e^{i\Delta_2} P'_1.$$

§ 33. De grootheden σ en τ zijn af te leiden uit metingen, die men verricht heeft bij het onderzoek van het licht, dat door metalen wordt teruggekaatst. Wanneer het metaal niet magnetisch is, wordt het teruggekaatste licht, als de trillingen in het invallende licht loodrecht op het vlak van inval geschieden, voorgesteld door het reële gedeelte van:

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_0)} e^{-i\frac{2\pi}{T}[t - R_1(-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)]},$$

en wanneer de trillingen in het invallend licht evenwijdig aan het invalsvlak plaats hebben door het reële deel van:

$$\frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_0)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_0)} e^{-i\frac{2\pi}{T}[t - R_1(-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)]},$$

Deze uitdrukkingen gaan over in:

$$-\frac{p_2}{p_1} e^{-i\frac{2\pi}{T}[t - R_1(-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)] + i(\delta_2 - \delta_1)},$$

$$+\frac{p_2 p_3}{p_1 p_4} e^{-i\frac{2\pi}{T}[t - R_1(-x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1)] + i(\delta_2 - \delta_1 + \delta_3 - \delta_4)}.$$

Er bestaat tusschen deze twee luchtbundels een phasesverschil Δ_0 , te vinden uit:

$$\Delta_0 = \delta_2 - \delta_4,$$

De verhouding der amplitudines stelt men gewoonlijk gelijk aan $\tan h$, zoodat

$$\tan h = \frac{p_3}{p_4}$$

Wanneer nu het invallend licht gepolariseerd is onder een zeker azimuth, dan verkrijgen in het teruggekaatste licht de 2 trillingscomponenten, waarvan de eene ligt in het vlak van inval, terwijl de andere loodrecht daarop staat, het phaseverschil Δ_0 ; het teruggekaatste licht is dus *elliptisch gepolariseerd*.

Eén invalshoek treedt in het bijzonder op den voorgrond, die namelijk waarbij het phaseverschil Δ_0 gelijk wordt aan $\frac{\pi}{2}$. Noemen we de waarde van α_1 , waarbij dat plaats heeft, A en de waarden van h , ρ , ω respectievelijk H, ρ_a , ω_a . Men is gewoon A te noemen den *hoofdinvashoek* en H het *hoofdazimuth*.

§ 34. Jamin heeft bij onderscheidene metalen den hoofdinvashoek en het hoofdazimuth voor verschillende kleuren bepaald ¹⁾. We zullen onze formules berekenen met behulp van waarden van A en H, ontleend aan zijne uitkomsten. Noodig is daartoe, dat we nagaan op welke wijze σ en τ samenhangen met A en H.

Voor $\alpha_1 = A$ wordt:

$$\tan \Delta_0 = \tan (\delta_3 - \delta_4) = \infty.$$

Berekenen we $\tan (\delta_3 - \delta_4)$ met behulp der uitdrukkingen in § 31 opgesteld, dan krijgen we tot conditie:

$$1 + \frac{m \sin (\tau + \omega_a)}{\tan^2 A + m \cos (\tau + \omega_a)} \cdot \frac{m \sin (\tau + \omega_a)}{-\tan^2 A + m \cos (\tau + \omega_a)} = 0,$$

waaruit onmiddellijk voortvloeit:

1) Ann. de Chim. et de Phys. 3e Série. t. XXII.

$$\begin{aligned} \tan^2 A &= m, \\ \text{of: } \tan A \sin A &= \sigma \rho_a \dots \dots \dots 17) \end{aligned}$$

Voorts wordt:

$$\begin{aligned} \tan H = \frac{p_s}{p_a} &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\tau + \omega_a)}{1 + \cos(\tau + \omega_a)}} = \tan \frac{\tau + \omega_a}{2}, \\ \therefore \tau + \omega_a &= 2H. \dots \dots \dots 18) \end{aligned}$$

Uit 5) en 17) volgt:

$$\frac{\sin 2\tau}{\sin 2\omega_a} = \tan^2 A \dots \dots \dots 19)$$

Aangezien in 't algemeen:

$$\frac{\tan(\tau - \omega)}{\tan(\tau + \omega)} = \frac{\sin 2\tau - 2\omega}{\sin 2\tau + 2\omega},$$

krijgen we hier:

$$\frac{\tan(\tau - \omega_a)}{\tan(\tau + \omega_a)} = \frac{\sin 2\tau - \sin 2\omega_a}{\sin 2\tau + \sin 2\omega_a} = -\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = -\cos 2A,$$

waaruit volgt:

$$\tan(\tau - \omega_a) = -\cos 2A \tan 2H \dots \dots \dots 20)$$

Uit 6) vloeit voort:

$$\sigma = \tan A \sqrt{\frac{\cos 2H}{\cos(\tau - \omega_a)}} \dots \dots \dots 21)$$

Zijn nu A en H gegeven, dan kunnen we uit 18) en 20) $\tau + \omega_a$ en $\tau - \omega_a$ en dus ook τ en ω_a berekenen. De formule 21) geeft ons daarna σ .

Nemen we de waarden van A en H, die Jamin opgeeft voor geel licht bij terugkaatsing tegen staal:

$$A = 76^\circ 26',$$

$$H = 16^\circ 50',$$

dan geven onze formules de waarden:

$$\tau = 32^\circ 10',$$

$$\log \sigma = 0,61025,$$

$$\sigma = 4,076.$$

Het verdient hierbij opmerking, dat de voor τ verkre-

gen uitkomst in overeenstemming is met hetgeen in § 9 omtrent het teeken van S_2 gezegd is. Immers uit $\frac{R_0}{R_1} = \sigma e^{i\tau}$ volgt, wanneer $R_0 = S_1 + iS_2$ is, $S_1 = R_1 \sigma \cos \tau$ en $S_2 = R_1 \sigma \sin \tau$.

Berekenen we met de gevonden waarden van σ en τ de phaseverschillen en amplitudines, dan krijgen we de volgende tabel.

(Zie de tabel aan het einde).

§ 35. Vóór wij tot de nadere bespreking der proeven overgaan, is het nog noodzakelijk te onderzoeken, welke teekens de grootheden C_p en C_a hebben in het geval van een R- en van een L-stroom, zooals wij die in §§ 3 en 5 der Inleiding definieerden. Daar C_p en C_a hetzelfde teeken hebben als N , is het slechts de vraag, welk teeken de laatste grootheid bij een R- en een L-stroom heeft. Nu is N oorspronkelijk in de formules positief, wanneer de richting der magnetische kracht met die der positieve Z-as samenvalt (§ 2). Deze is bij de polaire reflexie naar het metaal gericht en hier zal dus N positief zijn, wanneer de magnetische kracht naar het metaal is gekeerd, dus volgens § 3 der Inleiding bij een L-stroom. Bij een R-stroom daarentegen wordt N negatief.

Bij de aequatoriale reflexie ligt de Z-as in het spiegelende oppervlak. Daar nu in § 23 ondersteld is, dat de richting, in welke zich het invallende licht voortplant, een scherpen hoek met de Z-as vormt (anders had niet $x \cos \alpha + z \sin \alpha$, maar $x \cos \alpha - z \sin \alpha$ in de formules moeten optreden) komt de definitie van § 5 der Inleiding hierop neer, dat wij de richting van den daar ge-

noemden fictieven stroom moeten beoordeelen door hem van de zijde der positieve Z-as te beschouwen. Eene positieve magnetische kracht N is dus weer naar den beschouwer gekeerd en beantwoordt aan een L-stroom; is N negatief, dan hebben wij met een R-stroom te doen.

Wij kunnen dus besluiten, dat C_p en C_a bij een L-stroom positief, bij een R-stroom negatief zullen zijn.

VERGELIJKING MET DE WAARNEMINGEN VAN KERR.

§ 36. Intensiteit. De intensiteit van het magneto optisch effect wordt door de waarden van C_p en C_a opgeleverd, aangezien zij met de tweede machten dier grootheden evenredig is. De in de tabel voor C_p opgegeven waarden leeren, dat in het geval van de polaire reflexie de intensiteit bij kleine invalshoeken het grootst is. Ofschoon Kerr dit bij zijne proeven niet heeft kunnen waarnemen, daar hij bij de normale terugkaatsing een anderen toestel gebruikte dan bij schief invallend licht, zoo is dit resultaat toch in overeenstemming met hetgeen omtrent de intensiteit van het magneto-optisch effect bij doorschijnende media werd waargenomen [Inleiding § 3]. Bij groote invalshoeken is de intensiteit geringer; nadert de hoek van inval tot 90° , dan neemt de intensiteit af tot nul.

Bij de aequatoriale reflexie is de intensiteit C_a^2 bij normalen inval nul. Zij neemt toe, naarmate de hoek van inval grooter wordt, om eene maximum waarde te bereiken voor een hoek van inval tusschen 60° en 70° gelegen. Bij grooteren invalshoek neemt de intensiteit af om tot nul te naderen, wanneer α_1 tot 90° nadert. Deze uitkomsten zijn in overeenstemming met Kerr's waarnemingen.

§ 37. Phase. Daar de theorie ons in de grootheden $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ de fasen der verschillende lichtbundels doet kennen, zijn we ook in staat haar te vergelijken met die proeven van Kerr, die omtrent de phaseverschillen iets leeren [Inleiding §§ 4 en 5].

Bij die proeven werd, nadat eerst de beide nicols op uitdooving geplaatst waren, hetzij aan den polarisator, hetzij aan den analysator eene kleine draaiing ϕ gegeven; we noemen eene R-draaiing positief.

Wanneer de trillingen eerst loodrecht op het invalsvlak geschieden, geeft eene R-draaiing van den polarisator, als we letten op hetgeen in § 30 omtrent de positieve richtingen gezegd is, eene component in het invallende licht evenwijdig aan het invalsvlak met de amplitudo:

$$- \sin \phi,$$

dus in het teruggekaatste licht een bundel, voorgesteld door het reële deel van

$$- B_p \sin \phi e^{i \Delta_2} P_1'.$$

Wegens de kleine waarde van ϕ mogen we hiervoor schrijven:

$$- B_p \phi e^{i \Delta_2} P_1' \dots \dots \dots \alpha_1)$$

Na de draaiing ϕ is de amplitudo der trillingen loodrecht op het invalsvlak $\cos \phi$ geworden; daar echter ϕ zeer klein is, kunnen we zeggen, dat zij 1 gebleven is. Wordt thans de stroom (stel een L-stroom) gesloten, dan geeft de zoeven bedoelde bundel een magneto-optisch effect met dezelfde trillingsrichting als α_1) nl. een bundel in het teruggekaatste licht, voorgesteld door het reële deel van:

$$-C_p e^{i\Delta_3 P_1'} \text{ of } +C_a e^{i\Delta_3 P_1'} \dots b_1)$$

al naarmate we met de polaire of de aequatoriale reflexie te doen hebben. De totale lichtbeweging, die door het tweede nicol wordt doorgelaten, wordt door de som van $a_1)$ en $b_1)$ bepaald.

Is de richting der trillingen in het invallende licht evenwijdig aan het vlak van inval, dan geeft eene R-draaiing van den polarisator in het invallende licht eene component, loodrecht op het invalsvlak, met de amplitudo:

$$+ \phi,$$

dus in het teruggekaatste licht eene component, voorgesteld door het reële gedeelte van:

$$-B_s \phi e^{i\Delta_1 P_1'} \dots a_2)$$

Na het sluiten van den stroom wordt hiermede saamgesteld een bundel, beantwoordende aan het reële deel van:

$$-C_p e^{i\Delta_3 P_1'} \text{ of } -C_a e^{i\Delta_3 P_1'} \dots b_2)$$

Dergelijke beschouwingen gelden, wanneer de analysator gedraaid wordt.

Staan bv. eerst de trillingen in het invallende licht loodrecht op het vlak van inval en laat de analysator van het teruggekaatste licht ($-B_s e^{i\Delta_1 P_1'}$) niets door, dan zal na eene R-draaiing van den analysator over een hoek ϕ doorgelaten worden eene component:

$$-B_s e^{i\Delta_1 P_1'} + \sin \phi = -B_s \phi e^{i\Delta_1 P_1'} \dots a_3)$$

Het teeken is hierbij bepaald door de overweging, dat bij het door den analysator doorgelaten licht die richting voor de trillingen als positief beschouwd moet worden, die

vóór de draaiing met de positieve richting in het invalsvlak overeenstemt.

Na het sluiten van den stroom treedt het magneto-optisch effect op; de daardoor veroorzaakte lichtbundel wordt (daar $\cos \phi = 1$ mag gesteld worden) nog geheel door den analysator doorgelaten. Bij a_3) komt dus b_1).

Wanneer eindelijk de trillingen in het invallende licht in het vlak van inval zijn gelegen, wordt het licht, dat na eene kleine R-draaiing van den analysator door dezen wordt doorgelaten, gegeven door:

$$-B_p \phi e^{i\Delta_2} P_1' \dots \dots \dots a_1)$$

en dit wordt met b_2) samengesteld.

§ 38. Wanneer we van de complexe uitdrukkingen de reële gedeelten nemen, kunnen we gemakkelijk uit het bovenstaande de vermeerdering der waargenomen lichtintensiteit afleiden, die na eene draaiing van het polariseerende of het analyseerende nicol door een stroom wordt teweeggebracht. Staan bv. de trillingen eerst loodrecht op het invalsvlak, dan wordt na eene kleine R-draaiing van den polarisator eene lichtbeweging waargenomen, voorgesteld door het reële deel van a_1), dus met de intensiteit:

$$B_p^2 \phi^2.$$

Na het sluiten van den stroom treedt bij de polaire reflexie eene lichtbeweging uit, gegeven door de som van a_1) en van de eerste der uitdrukkingen b_1), dus door:

$$\left(-B_p \phi e^{i\Delta_2} - C_p e^{i\Delta_3}\right) P_1'.$$

De intensiteit is thans:

$$B_p^2 \phi^2 + 2 B_p C_p \phi \cos(\Delta_2 - \Delta_3) + C_p^2.$$

zoodat de intensiteitsvermeerdering bedraagt:

$$2 B_p C_p \phi \cos (\Delta_2 - \Delta_3) + C_p^2.$$

Ofschoon uit de waarnemingen van Hall gebleken is, dat hN en dus de beide C 's (welke met hN evenredig zijn) zeer klein zijn, mogen we van de twee termen, die in de gevonden intensiteitstoename voorkomen, den tweeden niet tegen den eersten verwaarloozen. Immers, bij het nemen der proeven omtrent het magneto-optisch effect, is de hoek ϕ zoo klein genomen, dat $B\phi$ vergelijkbaar werd met C ; de termen $2BC\phi \cos \Delta$ en C^2 zijn derhalve grootheden van dezelfde orde.

Berekenen we de intensiteitsvermeerdering in de acht gevallen, die zich voordoen, dan komen we tot de volgende uitkomsten.

INTENSITEITSTOENAME BIJ HET SLUITEN VAN DEN STROOM.

Aanvankelijke trillingsrichting	bij polaire reflexie	bij aequatoriale reflexie
A. na eene kleine draaiing van den <i>polarisator</i> .		
\perp vlak van inval	$\left. \begin{array}{l} 2 B_p C_p \phi \cos (\Delta_2 - \Delta_3) + \\ \quad + C_p^2 \dots (I) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} - 2 B_p C_a \phi \cos (\Delta_2 - \Delta_4) + \\ \quad + C_a^2 \dots (II) \end{array} \right\}$
\parallel " " "	$\left. \begin{array}{l} 2 B_s C_p \phi \cos (\Delta_1 - \Delta_3) + \\ \quad + C_p^2 \dots (III) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 2 B_s C_a \phi \cos (\Delta_1 - \Delta_4) + \\ \quad + C_a^2 \dots (IV) \end{array} \right\}$
B. na eene kleine draaiing van den <i>analyzer</i> .		
\perp " " "	$\left. \begin{array}{l} 2 B_s C_p \phi \cos (\Delta_1 - \Delta_3) + \\ \quad + C_p^2 \dots (III) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} - 2 B_s C_a \phi \cos (\Delta_1 - \Delta_4) + \\ \quad + C_a^2 \dots (IV') \end{array} \right\}$
\parallel " " "	$\left. \begin{array}{l} 2 B_p C_p \phi \cos (\Delta_2 - \Delta_3) + \\ \quad + C_p^2 \dots (I) \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 2 B_p C_a \phi \cos (\Delta_2 - \Delta_4) + \\ \quad + C_a^2 \dots (II') \end{array} \right\}$

Bij het gebruik dezer uitdrukkingen hebben we in 't oog te houden, dat C_p en C_a positief zijn bij een L-stroom (§ 35), terwijl ϕ positief is bij eene R-draaiing (§ 37). Is in eenige uitdrukking:

$$C = B\phi$$

— waarbij C en B nu deze, dan gene indices hebben —

dan wil dat zeggen, dat het door eene draaiing van den polarisator of den analysator weer te voorschijn geroepen licht dezelfde intensiteit heeft als het door den stroom teweeggebrachte. Kerr heeft bij de polaire terugkaatsing dit geval trachten te bereiken.

Met uitzondering van (II) en (IV') hebben alle uitdrukkingen de gedaante:

$$\Delta I = 2 B C \phi \cos \varepsilon + C^2, \dots \dots \dots 22)$$

wanneer men onder ε het phaseverschil verstaat en zelfs (II) en (IV') hebben dezen vorm, wanneer men respectievelijk:

$$\varepsilon = \pi - (\Delta_2 - \Delta_1) \quad \text{en} \quad \varepsilon = \pi - (\Delta_1 - \Delta_2)$$

stelt.

§ 39. De discussie neemt bij alle uitdrukkingen voor de intensiteitstoename denzelfden gang aan.

Is in 22) $\varepsilon < \frac{1}{2} \pi$, dan wordt voor eene R-draaiing en een L-stroom ΔI altijd positief; er heeft dus eene intensiteitsvermeerdering plaats. Bij een L-draaiing en een R-stroom geschiedt hetzelfde.

Bij eene L-draaiing en een L-stroom kan nu eens vermeerdering, dan weer vermindering van intensiteit worden waargenomen. Stellen we:

$$\phi = -\phi',$$

dan is bij eene L-draaiing ϕ' positief en de intensiteitstoename wordt:

$$\Delta I = -2 B C \phi' \cos \varepsilon + C^2.$$

Een zwakke L-stroom (C klein) geeft dan altijd eene intensiteitsvermindering, welke vermindering met den stroom toeneemt, totdat

$$C = B \phi' \cos \varepsilon$$

geworden is, in welk geval de vermindering een maximum is. Dan is:

$$\Delta I = -B^2 \phi'^2 \cos \varepsilon,$$

en de intensiteit, die eerst $B^2 \phi'^2$ was, wordt:

$$B^2 \phi'^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Voor sterkere stroomen ($C > B \phi' \cos \varepsilon$) wordt de intensiteitsvermindering geringer, totdat C aangegroeid is tot: $2 B \phi' \cos \varepsilon$, in welk geval $\Delta I = 0$ is. Voor $C > 2 B \phi' \cos \varepsilon$ wordt de intensiteit grooter.

Bepaalt men altijd de draaiing zoo, dat voldaan wordt aan de conditie $C = B \phi'$, dan wordt:

$$\Delta I = B^2 \phi'^2 (1 - 2 \cos \varepsilon),$$

en dan zal voor $\varepsilon = \frac{1}{2} \pi$ na eene L-draaiing een L-stroom geene verandering in de intensiteit teweeg brengen.

Daar blijkt 1) ΔI niet verandert, wanneer ϕ en C gelijktijdig van teeken verwisselen, zal een R-stroom bij eenige draaiing steeds hetzelfde effect teweegbrengen als een L-stroom na de tegengestelde draaiing.

Geheele uitdooving van het licht kan alleen verkregen worden als $\varepsilon = 0$ en $C = B \phi'$ is of $\varepsilon = \pi$ en $C = B \phi$.

Is $\varepsilon > \frac{1}{2} \pi$, dus $\cos \varepsilon$ negatief, dan zal, daar alles na eene bepaalde draaiing slechts van het teeken van $C \cos \varepsilon$ afhangt, een R-stroom teweeg brengen, wat bij $\varepsilon < \frac{1}{2} \pi$ door een L-stroom werd teweeggebracht, en omgekeerd. Bij $\varepsilon = \frac{2}{3} \pi$ hebben we iets dergelijks als bij $\varepsilon = \frac{1}{3} \pi$.

Voor $\varepsilon = \frac{1}{2} \pi$ geeft de formule 1):

$$\Delta I = C^2,$$

zoodat dan een L- en een R-stroom gelijke intensiteitsvermeerdering veroorzaken.

Onderscheiding van twee gevallen:

1°. C zeer klein (kleiner dan $B \phi$).

Na eene R-draaiing geeft:

- voor $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ een L-stroom vermeerdering, een R-stroom vermindering,
 " $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ geen der beide stroomen eene merkbare verandering,
 " $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$ een L-stroom vermindering, een R-stroom vermeerdering.

2°. C grooter (stel $= \pm B\phi$) [+ voor een L-, - voor een R-stroom]:

$$\Delta I = B^2 \phi^2 (\pm 2 \cos \varepsilon + 1).$$

Na eene R-draaiing geeft thans:

- voor $\varepsilon < \frac{1}{3}\pi$ een L-stroom versterking, een R-stroom verzwakking,
 " $\varepsilon = \frac{1}{3}\pi$ een L-stroom versterking, een R-stroom geen effect,
 " $\frac{1}{3}\pi < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ een L-stroom sterke, een R-stroom zwakke vermeerdering,
 " $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ een L-stroom en een R-stroom gelijke vermeerdering,
 " $\frac{1}{2}\pi < \varepsilon < \frac{2}{3}\pi$ een L-stroom zwakke, een R-stroom sterke vermeerdering,
 " $\varepsilon = \frac{2}{3}\pi$ een L-stroom geen effect, een R-stroom versterking,
 " $\varepsilon > \frac{2}{3}\pi$ een L-stroom verzwakking, een R-stroom versterking.

Beschouwing der door Kerr behandelde gevallen.

De proef van pag. 8, II. Zal een L-stroom het licht-effect van eene R-draaiing van den polarisator versterken, dan moet $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ zijn. Zal tevens een R-stroom dit duidelijk verzwakken, dan moet zelfs $\varepsilon < \frac{1}{3}\pi$ zijn. Wanneer die verzwakking tot uitdooving kon voortgaan zou $\varepsilon = 0$ moeten zijn. Nu is ε in dit geval [§ 38, (I) of (III)] $\Delta_2 - \Delta_3$ of $\Delta_1 - \Delta_3$. Zijn de trillingen evenwijdig aan het invalsvlak, dan is blijkens de tabel werkelijk $\varepsilon < \frac{1}{3}\pi$ in de nabijheid van de hoeken, waaronder Kerr heeft gewerkt (bv. bij 70° is $\varepsilon = 49^\circ 26'$) en laat zich de proef verklaren, al is volgens de theorie geene totale uitdooving mogelijk. Bij trillingen loodrecht op het invalsvlak, bestaat de overeenstemming niet, daar hier juist ε in de nabijheid van $\frac{1}{2}\pi$ ligt.

De proef van pag. 9, III. Zal een L-stroom het licht-effect versterken, een R-stroom verzwakken, dan moet

weer $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ zijn. Ook thans is $\varepsilon = \Delta_2 - \Delta_3$ of $\Delta_1 - \Delta_3$, zoodat wederom in één geval de theorie bevestigd wordt en wel juist in dat geval, waarin zij zooeven van de proeven afweek.

De proef van pag. 11, I. De grootheid ε moet hier stomp zijn. Daar echter thans de uitdrukking (IV') geldt, waarin $\varepsilon = \pi - (\Delta_1 - \Delta_4)$ gesteld is, vereischt dit eene scherpe waarde van $\Delta_1 - \Delta_4$. De tabel levert die ook voor groote invalshoeken.

Is $\Delta_1 - \Delta_4$ scherp dan zal in het geval, waarop (IV) betrekking heeft een L-stroom steeds het effect van eene R-draaiing moeten versterken. Dit is in overeenstemming met de proef van pag. 11, III.

De proef van pag. 11, II vereischt, dat beneden den hoofdinvalshoek ε scherp, daarboven stomp is. Hier geldt de uitdrukking (II'), dus is $\varepsilon = \Delta_2 - \Delta_4$. De stompe waarden boven den hoofdinvalshoek worden door de tabel geleverd, de scherpe daar beneden niet.

De proef van pag. 12, IV vereischt, dat beneden den hoofdinvalshoek $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$, daarboven $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ is. Hier geldt de waarde (II) van § 38, en dus moet $\Delta_2 - \Delta_4$ voor groote invalshoeken stomp, voor kleine scherp zijn. Zie boven.

Uit het bovenstaande blijken de phaseverschillen onzer tabel niet in alle opzichten aan de proeven van Kerr te voldoen. Ik heb nog beproefd, of men wellicht eene betere overeenstemming verkrijgt door bij de berekening van den hoofdinvalshoek en het hoofdzimuth van ijzer uit te gaan. Inderdaad wijken die grootheden van die bij staal af. Voor natriumlicht heeft men bij ijzer:

$$\Lambda = 76^{\circ} 43' \quad 1)$$

$$H = 30^{\circ} 10'$$

α_1	40°	60°	80°
$\Delta_1 - \Delta_3$	28° 37'	20° 6'	0° 20'
$\Delta_2 - \Delta_3$	41° 38'	46° 13'	109° 9'
$\Delta_1 - \Delta_4$	88° 10'	80° 9'	60° 41'
$\Delta_2 - \Delta_4$	101° 11'	116° 16'	170° 11'

De hierin voorkomende waarden van $\Delta_1 - \Delta_3$ en $\Delta_2 - \Delta_3$ voldoen beter aan de proeven dan de vroegere. De waarden van $\Delta_1 - \Delta_4$ zijn ook gunstiger, terwijl de afwijkingen in $\Delta_2 - \Delta_4$ bij kleine invalshoeken niet veel grooter geworden zijn.

Uit hoofde van onze onbekendheid met de optische constanten van het door Kerr gebruikte ijzer, is het niet mogelijk de tabel te ontwerpen, welke voor zijne proeven zou moeten passen. Het verschil tusschen de boven gebruikte waarden van de optische constanten voor staal en ijzer wettigt het vermoeden, dat ook elke ijzersoort hare eigene optische constanten zal hebben. Op dien grond gaat het niet aan om aan de phaseverschillen, zooals we die boven berekenden, den eisch te stellen, dat zij sluiten op alle door Kerr waargenomen verschijnselen.

§ 40. Ten slotte gaan we de normale polaire reflexie na. We nemen aan dat de trillingen in het invallende licht geschieden loodrecht op het invalsvlak; het geval, waarin de trillingen in het invalsvlak liggen, voert hier natuurlijk tot dezelfde uitkomsten.

Vóór het openen van den stroom staan de nicols ge-

1) Ik heb deze gegevens te danken aan den heer R. Sissingh, phil. nat. doct. te Leiden, die ze met behulp van een weck ijzeren spiegel van Steinheil op het physisch laboratorium aldaar bepaalde.

kruist. De lichtbeweging in het teruggekaatste licht wordt voorgesteld door het reële deel van:

$$-B_s e^{i\Delta_1} P_1'$$

Wordt de stroom gesloten, dan treedt het magneto-optisch effect op, dat voorgesteld wordt door het reële deel van:

$$-C_p e^{i\Delta_3} P_1'$$

Het is deze laatste lichtbeweging, welke door den analysator wordt doorgelaten. Wordt echter het tweede nicol gedraaid over een hoek ϕ , dan kan uit den analysator eene lichtbeweging treden, voorgesteld door het reële deel van:

$$-B_s \phi e^{i\Delta_1} P_1' - C_p e^{i\Delta_3} P_1' \dots \dots \dots 23)$$

De intensiteit van het uittredende licht zal bedragen:

$$B_s^2 \phi^2 + 2 B_s C_p \phi \cos(\Delta_1 - \Delta_3) + C_p^2.$$

Deze intensiteit zal een minimum zijn, wanneer:

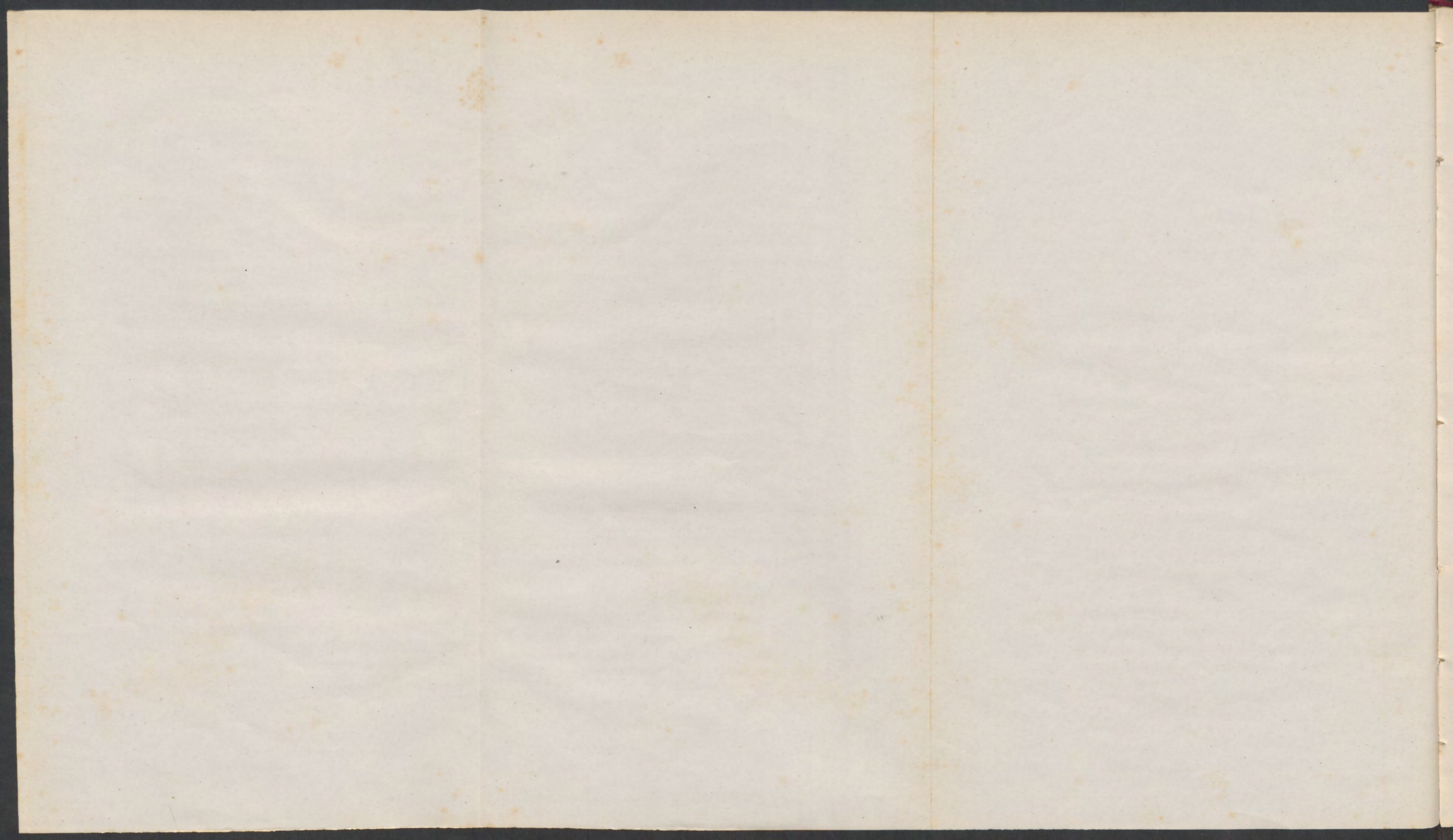
$$\phi = -\frac{C_p}{B_s} \cos(\Delta_1 - \Delta_3) \dots \dots \dots 24)$$

Daar voor $\alpha_1 = 0$ (bij staal) $\Delta_1 - \Delta_3 = 61^\circ 2'$ is, zal ϕ negatief zijn. Het teruggekaatste licht is elliptisch gepolariseerd en wanneer we ϕ de waarde geven, uitgedrukt door 24), valt die trillingsrichting, welke door den analysator wordt doorgelaten, saam met de kleine as van de ellips. Om derhalve na het sluiten van den stroom nog een minimum van lichtsterkte te verkrijgen, moet de analysator gedraaid worden in een zin, tegengesteld aan dien, waarin de stroom de windingen van den electromagneet doorloopt. Tot deze uitkomst voerden ook Kerr's proeven.

$$\tau = 32^{\circ} 10'$$

$$\log \sigma = 0,61025$$

α_1	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	76° 26'	80°	90°
Δ_0	0°	0° 27'	1° 52'	4° 24'	8° 21'	14° 33'	25° 21'	50° 12'	90°	120° 57'	180°
$\Delta_1 - \Delta_3$	61° 2'	61° 50'	60° 18'	59° 21'	57° 28'	56° 2'	53° 30'	49° 26'	45° 42'	42° 54'	28° 52'
$\Delta_2 - \Delta_3$	61° 2'	61° 18'	62° 10'	63° 45'	65° 49'	70° 35'	78° 42'	99° 38'	135° 42'	163° 52'	208° 52'
$\Delta_1 - \Delta_4$	93° 11'	93° 3'	92° 38'	91° 54'	90° 16'	89° 8'	86° 42'	83°	79° 22'	77° 37'	61° 37'
$\Delta_2 - \Delta_4$	93° 11'	93° 30'	94° 31'	96° 18'	98° 37'	103° 41'	112° 3'	133° 12'	169° 22'	197° 34'	241° 37'
B_s	0,661	0,665	0,678	0,699	0,728	0,767	0,813	0,868	0,907	0,931	1
B_p	0,661	0,657	0,644	0,620	0,583	0,526	0,441	0,323	0,275	0,311	1
$C_p \infty$	0,333	0,333	0,333	0,333	0,334	0,325	0,311	0,281	0,241	0,185	0
$C_a \infty$	0	0,014	0,028	0,041	0,053	0,061	0,067	0,065	0,058	0,045	0



STELLINGEN.

I.

Het effect van Hall kan in verband met de electromagnetische lichttheorie van alle verschijnselen, die zich voordoen bij de terugkaatsing van het licht door magneten, rekenschap geven.

II.

Theoretische beschouwingen leeren, dat Kerr de verschijnselen bij het door magneten teruggekaatste licht, verkeerdelijk als eene draaiing van het polarisatievlak opvat.

III.

De geringe intensiteit van Hall's verschijnsel verklaart, waarom Feilitsch, Mach en Gore geen resultaat verkregen met hunne proeven, genomen om de werking van magneten op stroomende electriciteit aan te toonen.

IV.

Onjuist is de bewering van Serret, als hij zegt: le

facteur ν , qui rend $P dx + Q dy$ une différentielle exacte, ne donne pas seulement l'intégrale générale de l'équation différentielle :

$$P dx + Q dy = 0,$$

mais il fournit aussi immédiatement la solution particulière, quand elle existe (Cours de Calc. diff. et intégr. Tome II, § 683).

V.

Gewaagd is het om met Quincke uit diens proeven te besluiten (Wied. Ann., Bd. 19) dat in eene isoleerende middenstof, welke aan de werking van electriche krachten onderworpen is, de druk loodrecht op de richting der krachtlijnen in grootte verschilt van de spanning in de richting der krachtlijnen.

VI.

Ten onrechte noemt Laurent (Méc. Rationnelle, Tome II, p. 244) de vergelijking van Poisson uit de potentiaaltheorie :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

eene onnuttige formule.

VII.

Ten onrechte beweert Dühning (Princ. d. Mech. p. 518): Wovor man sich aber wirklich zu scheuen hat, ist die vermeintliche Nachweisung einer Realität im Geometrischen, durch welche das Imaginäre auf reëlle Weise gedeckt werden soll.

VIII.

De theorie van Sir William Siemens: „On the conservation of solar energy” verliest allen steun, wanneer, zooals de proeven van den laatsten tijd leeren, het minimum van temperatuur, dat men aan de zon mag toekennen, aanmerkelijk hoog is.

IX.

Het mechanisme der werking, welke volgens Werner Siemens een electriche zonnepotential veroorzaken zou, is onaannemelijk.

X.

De kinetische gastheorie kan van de voortplanting van het geluid in gassen, wier moleculen eene kleine gemiddelde weglengte hebben, rekenschap geven.

XI.

Ofschoon Langley (Wied. Ann. 1883) bij het afleiden van het normale zonnenspectrum uit bolometerwaarnemingen meer omstandigheden, die van invloed kunnen zijn, in aanmerking had kunnen nemen, zoo heeft toch zijn resultaat een hooger grad van waarschijnlijkheid dan het normale zonnenspectrum, opgesteld met behulp van eene thermozuil.

XII.

Het is à priori in te zien, dat Roiti met de gekruiste

zilverdraden (Repertorium der Physik, Bd. 19, pag. 351)
het effect van Hall niet kon aantoonen.

XIII.

Alle theorieën, welke de oorzaak van de oppervlakte-
spanning bij vloeistoffen in eene bijzondere structuur van
de oppervlaktelaag zoeken, zijn te verwerpen.

XIV.

Aan de beschouwingen van Jamin (Journal de Phy-
sique, Tome II, 1883) omtrent den kritischen toestand
mag na het onderzoek van van der Waals alle waarde
worden ontzegd.

INHOUD.

INLEIDING.

De verschijnselen door Kerr en Hall waargenomen	Bladz. 1.
---	-----------

EERSTE HOOFDSTUK.

De bewegingsvergelijkingen der electriciteit in een lichaam, dat aan magnetische krachten onderworpen is. — Voorwaarden aan de grens van zulk een lichaam.	21.
--	-----

TWEEDE HOOFDSTUK.

Theorie der polaire terugkaatsing	44.
---	-----

DERDE HOOFDSTUK.

Theorie der aequatoriale terugkaatsing	56.
--	-----

VIERDE HOOFDSTUK.

Vergelijking der theorie met de proeven van Kerr	62.
Stellingen	83.

INDEX

1	Introduction
2	Chapter I
3	Chapter II
4	Chapter III
5	Chapter IV
6	Chapter V
7	Chapter VI
8	Chapter VII
9	Chapter VIII
10	Chapter IX
11	Chapter X
12	Chapter XI
13	Chapter XII
14	Chapter XIII
15	Chapter XIV
16	Chapter XV
17	Chapter XVI
18	Chapter XVII
19	Chapter XVIII
20	Chapter XIX
21	Chapter XX
22	Chapter XXI
23	Chapter XXII
24	Chapter XXIII
25	Chapter XXIV
26	Chapter XXV
27	Chapter XXVI
28	Chapter XXVII
29	Chapter XXVIII
30	Chapter XXIX
31	Chapter XXX
32	Chapter XXXI
33	Chapter XXXII
34	Chapter XXXIII
35	Chapter XXXIV
36	Chapter XXXV
37	Chapter XXXVI
38	Chapter XXXVII
39	Chapter XXXVIII
40	Chapter XXXIX
41	Chapter XL
42	Chapter XLI
43	Chapter XLII
44	Chapter XLIII
45	Chapter XLIV
46	Chapter XLV
47	Chapter XLVI
48	Chapter XLVII
49	Chapter XLVIII
50	Chapter XLIX
51	Chapter L
52	Chapter LI
53	Chapter LII
54	Chapter LIII
55	Chapter LIV
56	Chapter LV
57	Chapter LVI
58	Chapter LVII
59	Chapter LVIII
60	Chapter LIX
61	Chapter LX
62	Chapter LXI
63	Chapter LXII
64	Chapter LXIII
65	Chapter LXIV
66	Chapter LXV
67	Chapter LXVI
68	Chapter LXVII
69	Chapter LXVIII
70	Chapter LXIX
71	Chapter LXX
72	Chapter LXXI
73	Chapter LXXII
74	Chapter LXXIII
75	Chapter LXXIV
76	Chapter LXXV
77	Chapter LXXVI
78	Chapter LXXVII
79	Chapter LXXVIII
80	Chapter LXXIX
81	Chapter LXXX
82	Chapter LXXXI
83	Chapter LXXXII
84	Chapter LXXXIII
85	Chapter LXXXIV
86	Chapter LXXXV
87	Chapter LXXXVI
88	Chapter LXXXVII
89	Chapter LXXXVIII
90	Chapter LXXXIX
91	Chapter LXXXX
92	Chapter LXXXXI
93	Chapter LXXXXII
94	Chapter LXXXXIII
95	Chapter LXXXXIV
96	Chapter LXXXXV
97	Chapter LXXXXVI
98	Chapter LXXXXVII
99	Chapter LXXXXVIII
100	Chapter LXXXXIX
101	Chapter LXXXXX

