DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA
INAUGURALIS

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE VIRIUM.

DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA INAUGURALIS,

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE VIRIUM.

QUAM,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI,

NICOLAI SMALLENBURG,

J. U. DOCT. ET JUR. PROF. ORD.

ET

AMPLISSIMI SENATUS ACADEMICI CONSENSU,

NEC NON

NOBILISSIMAE FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORATUS ET MAGISTERII,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS ET PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA,

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO AC SOLENNI EXAMINI SUBMITTIT

LION SALOMON VAN PRAAG,

LUGDUNO-BATAVUS,

Ad diem 14 *Decembris* MDCCCXX. *Horâ* X — XI.

IN AUDITORIO MAJORI.

LUGDUNI BATAVORUM,

APUD HAAK ET SOCIOS,

MDCCCXX.

PARENTIBUS

OPTIMIS, CARISSIMIS

AETERNO AMORE ATQUE
OBSERVANTIA COLENDIS.

SACRUM.

Quamquam igitur multa sint, ad ipsas artes proprie non pertinentia, tamen eas adjuvant, excitando artificis ingenium. Itaque ista quoque naturae rerum contemplatio, quamvis non faciat medicum, aptiorem tamen medicinae reddit.

CELSUS.

PROOËMIUM.

Quodsi quis a summo omnium rerum Opifice e meliore luto formatus, atque ingenio praeditus est humaniore, huic mapnopere arrideat oportet *Naturalis*, quam, post PLINIUM, vocant *Historia*, quippe quae suis amatoribus cuncta pandit miracula, quorum plena sunt hujus Terrarum Orbis intestina et superficies. At quum is praecipue sit

Felix, qui rerum poterit cognoscere causas,

nobilioris animi hominem magis adhuc delectabit *Physica.* Haec enim rationes exponit, quibus quam plurima nascantur, ac sese moveant, agantque; eademque Disciplina plura adhuc complectitur, quam *Naturalis* illla *Historia*, supra Terrarum Orbem sese haud efferens; dum *Physica* vel in caelos adscendit, atque per infinitam Astrorum seriem vagatur.

Accedit, quod haecce plurium rerum causas explicans, illa adhuc est jucundior, et felicitate, quae tantopere arrisit Poëtae, suos mactat cultores. Artibus praeterea quam plurimis, illique nominatim, in quam maxime incumbo, arti Medicae est utilissima.

Hoc jam vidit summus ARISTOTELES, qui utriusque et *Physices* et *Historiae-Naturalis* commoda tantopere promovit, et in fine *Physices* suae, libro *de sanitate et morbis* lectoribus egregio praeluxit effato: *ubi desinit Physicus, ibi incipit Medicus*, cujus effati salutarem observantiam, quinquaginta fere abhinc annis diserte commendavit celebris Medicus Rotterodamensis HENRICUS VINKIUS in Dissertatione, quae Medicinae alumnis lectu est dignissima, ibique pag. 25. seq. « Ut omnia simul in unum colligam; hic veri Medici character mihi est, qui praeter experientiam ex observationibus et historiis morborum eorumque curatione petitam, etiam ex Physicis et Mechanicis fontibus scientiam suam cum rationis auxilio locupletavit." Praeive-

rat

rat Cl. SENNERTUS (*opp.* tom. I. *Libr. de methodo discendi Medicinam* pag. 244.) « Vix « aliquid tam subtile traditur in Physicis, quod « cognitum aliquando Medico usui esse non « possit." Quin omnino summus BOERHAVIUS (in Oratione *de usu ratiocinii Mechanici in Medicina*) Medicis Mechanices Studium commendavit, ut ipse ait. « Mechanices in Medi« cina usum esse summum, necessitatem ma« ximam." Idemque BOERHAVIUS in alia Oratione *de comparando certo in Physicis* methodum commendavit mathematicam, quam ad comparandam certitudinem in Medicis jam tantopere commendaverat *Angliae* decus BACO VERULAMIUS (*de augmento Scientiarum* p. 111.) Ut et HIPPOCRATES ipse in Epistola ad Filium Thessalum, in qua sequentia inveniuntur: « ad « cognoscendam Geometriam et numerorum « scientiam, mi Fili, multum studii adhibeto; « non solum enim vitam tuam illustrem et ad « multa commodam in humanarum rerum sta« tu efficient, sed etiam animam acutiorem et « clariorem reddent ad omnium, quorum usus

« in Medicinâ expetitur, utilitatem conse-
« quendam; etenim Geometriae cognitio quae
« multiformis ac varia est, et omnia cum de-
« monstratione transigit, utilis erit, quapropter
« ad hujusmodi experientiae facultatem perve-
« nire sedulo stude." Immo qua nobis nihil magis conducere videtur ad clara ab obscuris et vera a falsis dignoscenda.

Quibus omnibus ob oculos habitis, mihi, Medicinam licet integrum fere hominem poscere, minime ignoro, manus tamen haud abstinenda visa fuit a Physicis, immo Mechanicis et Mathematicis; imprimis quum ad illorum virorum auctoritatem accederet summa mihi auctoritas clarissimorum in Mathematicis et Physicis Professorum EYKII, Promotoris aestumatissimi, et EKAMAE, nec non ejus, quem cum omni Academia et Orbe erudito adhucdum lugeo, BRUGMANSII, quumque Cl. DU PUI in Scholis praecipue Obstetriciis Mechanicem haud proletariè tractandam esse magnopere urgeret. Horum virorum monitis semper grata mente colendis obtemperans, id egi pro viribus, ut in

Phy-

Physices cognitione in dies magis magisque proficerem, laureamque tandem petere possem doctoralem, cujus petendae solemnitas cum posceret Dissertationem Inauguralem, mihique inter studia in manus incidissent opera, ubi *virium compositio* et *resolutio* explicari videretur egregie, hanc mihi in illam dissertationem elegi materiem, non quidem ut mihi multam a cognitione Mathematices commendationem acquirerem; sed quo me eius, quantum Medico opus, haud imperitum probarem; nedum ut quidpiam novi et profundam doctrinam spirantis in lucem efferrem, quod fere supra juvenem viginti annorum positum. Sola necessitate aliquid scribendi me ad hanc materiem ductum profiteor, quia Medico quam sit utilis cuivis in oculos incurrit; eamque mihi sola Matheseos elementaris ope explicandam duxi, hîc posthabitâ Mathesi sublimiore, quantumvis haec etiam mihi in deliciis. Hujus itaque *de compositione et resolutione virium* doctrinam alibi quaerant, qui desiderent. Quibus abunde undique suppetit copia scriptorum hanc in rem eruditione plenissimorum. Id mihi cum maxime in votis erat, ut quod scriberem a quamplurimis posset intelligi, cujus voti si me damnatum videro, operae pretium fecisse mihi videbor. Quo ut perveniam, rem omnem sic potissimum tractabo:

Caput I. Continebit *definitiones et generalia quaedam ad Compositionem et Resolutionem virium pertinentia.*

Caput II. aget *de Compositione virium.*

Quod iterum continebit tres sectiones, quarum

1ª Sectio erit *de Compositione virium concurrentium ope parallelogrammi.*

2ª Sectio *de compositione virium concurrentium trigonometrica.*

3ª Sectio *de Compositione virium Parallelarum.*

Caput III. exponet *Resolutionem virium.*

DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE VIRIUM.

CAPUT PRIMUM.

CONTINENS DEFINITIONES ET GENERALIA QUAEDAM AD COMPOSITIONEM ET RESOLUTIONEM VIRIUM PERTINENTIA.

§. 1.

Omnes omnium fere aevorum scriptores de definitione motus varias sententias variis argumentis proposuerunt. Omnes quidem in eo conveniunt, ut motus translatio sit corporis de uno loco in alterum locum, sed de eo quid intelligi debeat per hanc translationem, mag-

magna inter doctos et philosophos est controversia, ad quam tollendam vel deridendam alii alia posuerunt principia, ex quibus definitionem motus deducunt. CARTESIUS aliique (Cf. MALEBRANCH. in *inquisitione veritatis* Lib. 6. cap. 9. et LE CLERC. *Phys.* Lib. 5. cap. 5.) sententiam defendunt, *omnia, quae requiescunt, nisum certum sive vim habere, secundum quem in hoc statu maneant, atque omnibus resistant, quae hunc statum mutare conentur.* Quia autem quodvis corpus hunc nisum in omnibus directionibus exercet, hinc deducitur conclusio: *ut quaevis particula habeat, atque excerceat tales perpetuo nisus in omni directione.*

§. 2.

Hinc porro sequitur; *hunc nisum in diversis corporibus proportionalem esse massae singulorum corporum*, nam vis cujuscunque est aequalis summae omnium particularum singularum virium: undè sponte sequitur; *centrum harum virium, idem esse atque centrum totius massae.*

§. 3.

Ratione harum partium, quas corpus unum quodque comprehendit, hoc corpus, non secus ac singula quaevis particula representat scalam naturalem. Nam si omnes nisus sibi invicem con-

contrarii in aequilibrio sint, id est, si nullus alterum vincat, et totum corpus, et singula quaevis particula quiescat, si autem nisus hi sibi non invicem aequales sint, corpus et singulae cujusvis particulae moventur. Hactenus omnino non falluntur qui hunc nisum *inertiam* vocant. Cf. Dr. CLARKE in *notis ad Rohaulti systema phil. nat.* part. I. cap. 10. not. 1. *in fine*, qui minime a veritate aberrat, docens, hunc statum esse privationem omnium nisuum.

4.

Hinc ultro fluit: corpus mortuum quiescens vel motum, sine externa vi nunquam hunc statum permutaturum esse. Nam, quomodo ipsum hos nisus vel inaequales reddet, vel aequabit? Ad quod praestandum semper aliud corpus vi externa illud producat necesse est. Hinc rursus patet; motum atque quietem posse communicari, secus autem ejus facultatem, quae ipsa essentialiter corpori cuilibet in est.

§. 5.

Motus communicatio varia est: communicatur enim vel *ictu*, sive *impulsu*, *pressione*, *attractione*. Mutatio ab uno in alterum corpus effecta *actio* prioris in secundum vocatur;

mutatio autem ab altero in prius *reactio*; de his constat, *actionem reactioni aequalem esse*, licet vires singulorum corporum inaequales sint.

§. 6.

Si massa corporis A in linea directionis corporis B, motum communicantis, sita sit, nullum dubium est, quin motus corporis A communicatus in eadem linea locum habeat, quo casu *vis vel motus simplex* vocatur; sed si uno eodemque tempore duae vel plures vires, diversa in directione, in illud corpus A egerint, hae directiones vel sibimet invicem sunt contrariae, vel angulum efficiunt, quo casu *vis vel motus compositus* vocatur.

§. 7.

Fig. 1. Si in datum punctum A agant duae vires P et Q secundum directiones AP, AQ, sub quocumque angulo PAQ concurrentes, quem sub nomine *anguli virium* intelligimus; debebit punctum A, media quapiam directione AC, ab iisdem viribus ad motum inchoandum sollicitari, ac si illud una vi C, ea ipsa directione, AC premeretur: idcirco vocatur directio eiusmodi AC *directio media* virium P et Q; et vis C, quae sola agens in punctum A illud directione media AC tanta vi premeret, quanta

ta id a viribus P et Q sua directione premitur, appellatur *vis media*; respectu cujus vires P et Q vocantur *laterales* vel *obliquae.*

§. 8.

Duas vires P et Q secundum directiones AP, AQ in punctum A agentes in unam vim *componere*, tantundem significat, ac mediam directionem AC virium P et Q, aut vim mediam ex illis resultantem invenire: haec vis media, vocatur vis *composita*, et respectu illius sunt P et Q vires *componentes.* Quodsi autem detur una vis V, agens in punctum A, secundum datam directionem AC; vim V in duas vires P et Q, quae, secundum certas directiones AP, AQ cum AC in eodem plano jacentes, in idem punctum A agant, *resolvere* tantundem significabit, ac ejusmodi vires P et Q invenire, ut et media illarum directio coincidat cum directione AC vis datae V, et vis media ex illis resultans aequabitur data Vi *V*.

§. 9.

Principium, secundum quod semper loco duarum pluriumve virium una substitui potest, his duabus, pluribusve aequipollens, vocatur *Principium compositionis virium aut motuum:* illud vero, secundum quod una vis semper in duas aut plures alias pro lubitu resolvi potest, *Principium resolutionis virium vel motuum* dicitur.

§. 10.

Quum omnia quanta ad certas mensuras relata per numeros possunt exprimi; nobis etiam licebit, in nostra disquisitione, vires, utpote quantitates ejusdem generis, per lineas determinatae longitudinis exprimere, modo communis aliqua linearum mensura in antecessum definiatur, vel relatio inter vires determinetur.

1. Sit v communis virium mensura, ut e. g. pondus unius librae communis ponderum mensura est; pro mensura autem linearum sumatur l, e g. pes unus. Quidquid sit vis V, semper cogitari potest aequalis lineae rectae L, cujus ratio ad assumtam mensuram l aequetur ratione Vis V ad ejus mensuram v, quo fit, $L: l = V: v$, hinc $V = v. \frac{L}{l}$, et ideo $V = \frac{L}{l}$ pro $v = 1$, vel etiam $V = L$, pro $l = 1$. Hoc sensu in sequentibus dicetur *rectam L exprimere vim V*: proprie autem aequatio $V = L$ nihil aliud potest denotare, quam exponentem rationis (qui sub V debet intelligi) vis V ad assumtam virium mensuram v ae-

aequari exponenti rationis (quam L in illa aequatione debet significare) lineae rectae L ad assumtam linearum mensuram l, quo fit, ut idem numerus, tali exponenti aequalis, jam vim V, jam rectam L expressurus sit, si is ad mensuram l linearum pro unitate assumtam referatur.

2. Quotquot ergo dentur vires U, X, Z poterunt illae per totidem lineas rectas u, x, z exprimi. Assumta nimirum communi virium mensura v, et communi linearum mensura l, quaeratur recta u exprimens vim U (1.), tum determinentur reliquae rectae, x, z, ita, ut illae ad rectam u in eadem sint ratione, in qua sunt vires X, Z, ad vim U. Nam si sit $u =$ U in sensu (1.) et Z : U $= z : u$, X : U $= x : u$; erit utique etiam X $= x$ et Z $= z$ in eodem significatu.

§. 11.

Hisce adhuc liceat subjungere sequentia quae ad rem quoque faciunt propositam.

1. Punctum quodcumque non plures unâ vias simul sequi potest.

2. In omni systemate virium formae invariabilis, pro lubitu sumi potest punctum quodcumque pro applicatione uniuscujusque vis in ejus directione.

3. Directio compositae vis semper determinatur per angulum, quem vires componentes inter se faciunt, id est, per *angulum virium* (§. 7.).

Fig. 2. Sint v. c. duae vires P et Q cujuscunque directionis et magnitudinis; vis Q nunc si sola potuisset agere, punctum mobile A infra AB detraheret, eodem modo, vis P elevaret punctum A supra AC; cum vero nunc simul agant, punctum A necessario movebitur sub angulo PAQ, id est, sub *angulo virium*.

4. Quando vires componentes sunt aequales, composita angulum virium bissecat.

5. Quando una virium componentium major sit, alterâ eadem manente, vis composita hacce vi aucta minorem angulum facit.

6. Composita duarum virium semper collocata est in plano componentium.

Fig. 1. 7. Quemcumque situm habeat vis composita AC datarum virium P et Q, et quantacunque sit vis media C ex illis resultans, si haec innotesceret, directionique oppositae AM applicaretur vis M ei aequalis; deberet vis M in aequilibrio esse cum viribus P et Q. Et vicissim, inventa vi M, quae directioni AM, opposita directioni mediae AC vi-

virium P et Q agens in punctum A cum viribus P et Q sit in aequilibrio; erit eadem vis M aequalis vi mediae resultanti ex viribus lateralibus P et Q (§. 7.).

8. Sequitur nunc (ex §. 11. 7. et §. 2.) quoties tres vires M, P, Q, directionibus AM, AP, AQ, in datum punctum A agentes fuerint inter se in aequilibrio; directionem mediam quarumvis harum binarum virum necessario coincidere cum producta directione vis tertiae.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE COMPOSITIONE VIRIUM.

SECTIO PRIMA.

DE COMPOSITIONE VIRIUM CONCURRENTIUM OPE PARALLELOGRAMMI.

§. 12. THEOREMA I.

Fig. 3. *Corpus duabus viribus, oblique agentibus, agitatum percurrit diagonalem parallelogrammi, supra lineis harum virium directiones indicantibus, confecti.*

Ad hoc theorema probandum, ponamus directionem compositae vis nobis esse incognitam, et quaeramus compositam vim duarum virium componentium datarum P et Q: Ad hanc inveniendam consideremus vim Q, ut com-

compositam duarum virium q et q', ita ut $Q = q + q'$. Componamus nunc P et q', et sit AR directio incognitae compositae R. Sumamus in linea AP punctum quodcunque D; formemus parallelogrammum CD, et ponamus puncta A, B, C inter se virgis AB, AC, BC ligata, et viribus q et R acta esse, quarum virium unam in C secundum directionem CH, alteram in B secundum directionem BR agentem, supponere possumus. (§. 11. 2.). Resolvamus vim R in duas alias vires secundum BG et BF agentes; hoc facto, acquirimus iterum vires componentes, quas supra composuimus, scilicet unam vim q', secundum BK, alteram P, secundum BF: haec nunc vis P applicari potest in C et componi cum q., quae agit secundum directionem CQ; si ponamus CG esse directionem compositae vis S virium P et q, composita virium S et q', eadem erit ac P et Q; atque ita punctum G ubi directio compositae S (id est CS) cum directione q' (id est BK) concurrit positum est in directione compositae virium P et Q.

Cum nunc HG || AG sit, patet AG esse diagonalem parallelogrammi AHGD, sive aliis verbis, directionem compositae esse secundum diagonalem parallelogrammi AHGD, cujus

 unum

unum latus AD, pro lubitu sumi potest; dummodo alterum latus AH inveniatur.

Idem locum habebit si $Q = 2P$, $q' = q = P$, AR, et CS bissecabunt angulos CAD, HCB (§. 11. 4.) sic CD et HB sunt Rhombi, quorum latera $AC = AD = CB = HC$, et $AH = 2AD$ sive $AD = \frac{AH.}{2}$

Eodem modo si ponamus $Q = 3P$, et $q' = 2P$, $q = P$, in parallelogrammo CD, AC erit $= 2AD$ et cum HB sit Rhombus, AH erit $= 3AD$, sive $AD = \frac{AH.}{3}$.

Eodem redit; supponamus $Q = 4P$, et $q' = 3P$, $q = P$, adeoque $AC = 3AD$; et igitur $AH = 4AD$, vel generali modo $Q = nP$, habebimus $AH = nAD$ sive $AD = \frac{AH.}{n}$

Sed si $P = na$ et $Q = 2a$, $q = q' = a$ ponemus; in parallelogrammo CD, AD erit $= nAC$; HC erit $= AC$: ita $AH = 2AC$, et sic $\frac{AH}{AD} = \frac{2}{n} = \frac{Q}{P}$. Si $P = na$ et $Q = 3a$, $q' = 2a$, et $q = a$; longitudo AC convenire debet cum conditione superiore $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{n}$; erit etiam $\frac{CH}{AD} = \frac{1}{n}$; et combinando $\frac{AH}{AD} = \frac{3}{n} = \frac{Q}{P}$.

Si

Si denique $P = na$, et $Q = 4a$, poneremus, $q' = 3a$ et $q = a$ et sic porro, vel si generaliori modo ponamus $P = na$, $Q = ma$ erit

$$\frac{AH}{AD} = \frac{m}{n} = \frac{Q}{P}; \text{ sive } \frac{AD}{AH} = \frac{n}{m} = \frac{P}{Q}.$$

Igitur in genere in directionibus virium P et Q possunt assumi partes AD et AH iis proportionales et complendo parallelogrammum HD; diagonalis AG erit directio compositae quaesitae.

§. 13. THEOREMA II.

Si duae lineae suis longitudinibus exprimant virium simul in corpus agentium magnitudines, sua vero inclinatione virium directiones; exprimet diagonalis parallelogrammi, supra his lineis confecti, magnitudinem vis, quae e componentibus oritur, iisque simul sumtis aequipollet.

Ut demonstremus magnitudinem vis compositae revera sese ita habere, ut in theoremate nostro dicitur, scilicet magnitudinem compositae R aequalem esse summae virium P et Q, ad lineam prolongatam AK diagonalis AG applicemus vim S = compositae R: vires R, Q, S, erunt in aequilibrio. Sed hunc sta Fig. 4.

tum (sc. aequilibrii) possumus considerare ut effectum vis Q inter vires P et S; et ita AH necessario debet esse prolongatio diagonalis parallelogrammi supra lineis AK et AD eandem rationem inter se servantibus ac vires P, S, constructi: cum nunc DI = AG = AK; erunt AD, AH, et AG proportionales viribus P, Q, et R.

$$\text{vel } \frac{P}{AD} = \frac{Q}{AH} = \frac{R}{AG}.$$

$$\text{et ita } R : Q = AG : AH$$

$$R = \frac{Q \times AG}{AH}$$

cum vero vis Q exprimitur linea AH, erit

$$R = AG.$$

Quod erat demonstrandum.

Intensitas ergo duarum virium P et Q sive S et P diagonali parallelogrammi in viribus P et Q sive S et P formati, exprimitur.

§. 14. COROLLARIUM I.

Tres vires, quae in aequilibrio sunt, sunt inter se ut sinus angulorum, qui formantur a directionibus potentiarum oppositarum, vel quaevis potentia est ut sinus anguli a duabus reliquis formati.

Po-

Ponamus Proportionem $\frac{P}{AD} = \frac{Q}{AH} = \frac{R}{AG}$ Fig. 5.
supra inventam sub alia forma. Scilicet sumendo tantum loco laterum in Δ° ADG, sinus angulorum lateribus oppositorum $\angle$DGA, $\angle$DAG, $\angle$ADG vel $\angle$RAQ. $\angle$RAP, et $\angle$PAQ, exprimamus nunc angulos a viribus R, P, Q formatos per litteras ε, θ, α et erit

$$\frac{P}{\text{Sin. } \varepsilon} = \frac{Q}{\text{Sin. } \theta} = \frac{R}{\text{Sin. } \alpha.}$$

Sive quaevis potentia ut sinus anguli a duabus reliquis formati.

Scholion. Magnitudines virium sibi aequipollentium pulchre etiam possunt exprimi: si supra earum directionibus (AB, AC, AD) in puncto quocumque (K, L, M) erigantur perpendiculares (EF, FG, GE); hae suis intersectionibus triangulum EFG formabunt. Erunt autem singulae potentiae (AB, AC, AD) uti perpendiculares (EF, FG, EG) ipsarum directionibus insistentes. Fig. 6.

Nam vis AD est uti sinus anguli BAC; sed in quadrilatero AIGK omnes anguli efficiunt quatuor rectos; horum illi, qui sunt apud I et K, proferunt duos rectos, per construct. Supersunt ergo anguli apud A et G reliqui, et pariter aequales duobus rectis; sed anguli, simul sumti constituunt duos rectos, habent eundem sinum, ergo Sin. A = Sin. G; cum igitur vis AD sit uti sinus BAC; erit eadem quoque uti sinus G. Hoc est uti latus oppositum EF, quod eandem vim AD secat. Pari ratione demonstratur etiam, esse potentiam AB uti latus ipsam secans EG; et vim AC pariter, uti est latus ipsam secans GF.

§. 15. COROLLARIUM II.

Quia diagonalis parallelogrammi semper jacet in plano parallelogrammi, corpus a duabus potentiis simul actum semper movebitur in plano quod transit per ambarum directiones.

§. 16. COROLLARIUM III.

Fig. 3. Pressio quam punctum A, secundum directionem AG a datis viribus componentibus P, Q persentiscit, aequatur pressione quam vis composita T in punctum A produceret, si illa, remotis viribus P, et Q, sola in punctum A, secundum mediam directionem AG, ageret, hoc sensu aequivalebit vis composita T viribus componentibus P et Q simul sumtis, licet vis composita T semper sit minor viribus componentibus P + Q.

§. 17.

§. 17. COROLLARIUM IV.

Directio vis compositae duarum virium tantum dependet a ratione quam hae vires inter se servant, ita, ut si vires in eadem proportione mutaverimus, directio compositae vis nihilominus eadem semper manserit.

§. 18. COROLLARIUM V.

Problema compositionis duarum virium vel resolutionis unius vis compositae in duas alias vires componentes (de quo in Cap. III. plenius), totum quantum eo reduci potest, ut construatur parallelogrammum; quo facto diagonalis erit directio media, exprimetque, sua longitudine vim mediam.

§. 19. COROLLARIUM VI.

Si vires P et Q inter se sunt aequales, parallelogrammum fit Rhombus HADG et diagonalis AG perpendiculariter insistit diagonali HD; si nunc supponamus $\angle$HAP, id est, angulum virium $= 2\alpha$, adeoque $\frac{\angle HAP}{2} = \angle HAG = \angle DAC = \alpha$ erit Fig. 9.

$$AD : AE = 1 : \text{Cos. } \alpha$$

igitur $AE = AD \text{ Cos. } \alpha$, et $AG = 2AD \text{ Cos. } \alpha$; sed cum AG et AD exprimant vires R et P

$$\text{erit } R = 2P \text{ Cos. } \alpha.$$

§. 20.

§. 20. COROLLARIUM VII.

Fig. 10. Quando directiones virium P et Q agunt sub angulo recto formatur parallelogrammum rectangulum, adeoque erit in triangulo rectangulo ADG, $AG^2 = AD^2 + GD^2$ et $AD = AG \text{ Cos. } \theta$, $DG = AG \text{ Sin. } \theta$ (Sin. θ exprimat angulum virium). Ponamus nunc loco linearum AG, AD, et DG vires exprimentium, vires ipsas P, Q et R iis proportionales, et habebimus sequentes formulas.

$$R^2 = P^2 + Q^2$$
$$P = R \text{ Cos. } \theta$$
$$Q = R \text{ Sin. } \theta.$$

Hae nunc formulae inserviunt determinandae ac exprimendae nostro in casu magnitudini et directioni vis compositae (id est, R et θ).

Si porro in formula $Q = R \text{ Sin. } \theta$ loco R ponamus $\frac{P}{\text{Cos. } \theta}$ acquirimus adhuc aliam formulam

$$Q = P \text{ Tang. } \theta.$$

§. 21. THEOREMA III.

Quicumque sit numerus, quaecumque sint directiones virium, semper inveniri potest directio et magnitudo unius vis, memoratis omnibus ae-

aequipollentis; scilicet binae sunt combinandae, ut parallelogramma fiant, quorum diagonales iterum combinabuntur.

Supponamus corpus A quatuor viribus P, Q, R, R' actum; si nunc componamus hasce vires, invenimus quod in nostro casu directio et magnitudo vis compositae sit = AL = R''. Quod ut demonstremus, nihil aliud opus est, nisi ut inquiramus in vim compositam corporis duabus ex quatuor datis agitati, quo facto loco harum duarum virium ponere possumus earum diagonalem, quam diagonalem, si consideremus ut vim componentem, eamque componemus cum tertia vi data, acquirimus secundam diagonalem, quae ut vim compositam trium virium datarum considerari potest et debet, quamque denique cum quarta vi data componendo, acquirimus vim et directionem mediam quaesitam. Fig. 12.

Consideremus ergo corpus mobile A tantum duabus viribus P et R' actum, quarum una si sola potuisset agere, corpus dirigeret secundum AB ad punctum B, altera secundum AM ad punctum M, ex praecedentibus nunc patet, quod corpus, tali modo actum, necessario percurrere debet diagonalem parallelogrammi

AG: haecce diagonalis, cum perfecte exprimat magnitudinem et directionem virium componentium P, R', loco harum virium potest substitui. Consideremus ideo secundo effectum, quem edunt tres vires P, R', R, quarum duae dirigunt corpus ad punctum G, tertia ad punctum H, ita ut idem locum habeat, ac si corpus ageretur tantum duabus viribus AG et AH, hinc corpus percurrere debet diagonalem parallelogrammi AI, et haec diagonalis exprimit effectum harum trium virium P, R', R simul agentium in corpus A, attendamus denique ad vim quartam Q, quae si sola ageret, corpus dirigeret ad punctum K, tres vires P, R', R, cum exprimi possunt per diagonalem AI, corpus mobile considerari potest, ut actum tantum duabus viribus, quarum una si sola ageret corpus dirigeret versus I, altera versus K. Quatuor vero simul agentibus corpus describit diagonalem parallelogrammi AIKL, ac si tantum duabus viribus AI et AK ageretur: producitque vim mediam R'' virium R, R', P, Q.

Quod nunc demonstravimus de quatuor viribus eodem quoque modo demonstrari potest pro centum viribus, et quotquot velles, verum esse: sed quod per pauca fieri potest, non debet fieri per plura.

§. 22.

§. 22. COROLLARIUM.

Determinari potest quoque directio et magnitudo vis corporis A acti a viribus P, Q, et R non jacentibus in eodem plano, sed in diversis. Fig. II.

Duae vires P, Q, pellant corpus A, directionibus et velocitatibus AF, AE. Hae duae directiones concipi possunt in uno plano, quod est AEGF, diagonalis hujus parallelogrammi est AG, corpus A pellatur a vi R, directione et velocitate AH; tum duae AG, AH jacent in uno eodemque plano: jam diversum a priori fiat parallelogrammum AGHK, ducaturque diagonalis AK, quae exprimit vim mediam R', erit AK directio et velocitas, qua corpus A actum ab his tribus viribus movetur. Quod si super tribus directionibus AE, AF, AH, formetur parallelopipedum, in quo ducatur diagonalis, exprimet haec directionem et velocitatem corporis a tribus viribus acti.

Vis R' expressa linea AK, quae exprimit magnitudinem et directionem vis compositae ex tribus viribus P, Q, R generali modo exprimi potest. Scilicet, si vires P et Q agant sub angulo recto, et vis R perpendiculariter iis insistit, erit

$$AK^2 = AG^2 + GK^2$$
$$AK^2 = AE^2 + GE^2 + GK^2$$
$$AK^2 = AE^2 + AF^2 + AI^2$$
$$\text{vel } R'^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

eodem modo et invenire possumus valorem vis mediae R′, si vires P, Q, R non sub angulo recto sed sub angulo quocunque agant.

Tali ratione semper plures vires concurrentes, diversis in planis jacentes, reduci possunt, pro lubito, ad unam vel duas vires.

SECTIO SECUNDA.

DE COMPOSITIONE VIRIUM CONCURRENTIUM TRIGONOMETRICA.

§. 23. PROBLEMA I.

Fig. 1. *Datis duabus viribus P et Q in unum punctum A secundum directiones AP, AQ, agentibus, datoque earum angulo PAQ = φ; invenire directionem mediam AC.*

So-

Solutio.

Directio media virium P, Q determinabitur, si definiantur anguli PAC $= p$, QAC $= q$, quos directio media AC cum directionibus AP, AQ illarum virium debet intercipere, (§. 11. 3.) hi vero anguli sequenti modo possunt inveniri. Debet esse.

$$p = \phi - q; \quad q = \phi - q$$

$$\text{et } P \,\text{Sin}. p = Q \,\text{Sin}. q$$

$$\text{erit ergo } P \,\text{Sin}. p = Q \,\text{Sin}. Q \,\text{Cos}. p - Q \,\text{Cos}. \phi \,\text{Sin}. p;$$

$$Q \,\text{Sin}. q = P \,\text{Sin}. \phi \,\text{Cos}. q - P \,\text{Cos}. \phi \,\text{Sin}. q.$$

Quare si prior aequatio per Cos. p, et posterior per Cos. q dividatur, fiet

$$P \,\text{Tang}. p = Q \,\text{Sin}. \phi - Q \,\text{Cos}. \phi \,\text{Tang}. p.$$

$$Q \,\text{Tang}. q = P \,\text{Sin}. \phi - P \,\text{Cos}. \phi \,\text{Tang}. q.$$

habebimus itaque:

$$\text{Tang}. p = \frac{Q \,\text{Sin}. \phi}{P + Q \,\text{Cos}. \phi}$$

$$\text{Tang}. q = \frac{P \,\text{Sin}. \phi}{Q + P \,\text{Cos}. \phi}.$$

Q, E, I.

§. 24. PROBLEMA II.

Inventa directione media AC duarum virium P, Q in punctum A secundum directiones AP, AQ agentium; invenire vim mediam M.

Solutio.

Cum nota sit directio media AC, noti debent esse etiam anguli p = CAP, q = CAQ. Jam vero vis media aequabitur vi M, quae secundum mediam directionem CA; seu potius, secundum illius productam AM in punctum A agens cum viribus P, Q, esset in aequilibrio: pro illa, si AP versus S et AQ versus R producatur, erit AS directio media virium M, Q, et AR directio media virium M, P.

habebimus itaque $M \text{ Sin. } MAS = Q \text{ Sin. } QAS$;

$M \text{ Sin. } MAR = P \text{ Sin. } PAR$

sed $PAC = MAS = p$;

$QAC = MAR = q$;

et $QAS = PAR = 180° - \phi$; ergo erit

$M \text{ Sin.} p = Q \text{ Sin} \phi$; $M \text{ Sin.} q = P \text{ Sin.} \phi$

$$M = \frac{Q \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } p};\ M = \frac{P \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin.} q}.$$

Q, E, I.

§. 25. COROLLARIUM I.

Datis duabus viribus P, Q agentibus in datum punctum A, datoque virium angulo ϕ = PAQ, licebit tam illarum directionem mediam AC (per Problema I.), quam ipsam vim mediam M (per Problema II.) determinare.

Po-

Potest vero vis media M, inveniri, etiam independenter a directione media AC, hoc modo;

$$\frac{Q \text{ Sin.}\phi \text{ Cos.}p}{\text{Sin.}p} = P + Q \text{ Cos.}\phi \text{ (Problem. I.)}$$

igitur elevando ad quadratum,

$$\frac{Q^2 \text{ Sin.}\phi^2 \text{ Cos.}p^2}{\text{Sin.}p^2} = P^2 + 2PQ \text{ Cos.}\phi + Q^2 \text{ Cos.}\phi^2$$

$$= P^2 + 2PQ \text{Cos.}\phi + Q^2 - Q^2 \text{ Sin.}\phi^2$$

Hinc porro facta translatione et reductione, ob $\text{Sin.}p^2 + \text{Cos.}p^2 = 1$, obtinebimus:

$$\frac{Q^2 \text{ Sin.}\phi^2}{\text{Sin.}p^2} = P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ Cos.}\phi,$$

et ideo (per Problema II.) fiet

$$M = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ Cos.}\phi)}.$$

§. 26. COROLLARIUM II.

Si vires P et Q agentes in punctum A sunt aequales, nimirum $P = Q$; erit vis media ex illis resultans $M = \sqrt{(2P^2 + 2P^2 \text{ Cos.}\phi)} = P\sqrt{2(1 \times \text{Cos}\ \phi)}$ (Cor I.): directio autem media AC ita determinabitur, ut sit $\text{Tang.}p = \text{Tang.}q$, proinde angulus $p = PAC = q = QAC$ (Probl. I.); id est, dum aequales vires P, Q sub quocumque directionum angulo PAQ datum punctum A ad motum sollicitant, directio media AC debet angulum PAQ bissecare.

§. 27.

§. 27. COROLLARIUM III.

Eo determinato casu, quo angulus virium $\phi = PAQ$ rectus fuerit, erit Sin. $\phi = 1$, et Cos. $\phi = 0$: igitur erit vis media $M = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ (per Cor. I.); et, pro directione AC, debebit fieri Tang. $p = \frac{Q}{P}$, Tang. $q = \frac{P}{Q}$ (per Problem. I.). Quodsi porro in eadem Hypotesi; vires P et Q sint aequales; fiet vis media $M = P\sqrt{2}$: directione media AC bissecante angulum virium PAQ (Cor. II.).

§. 28. COROLLARIUM IV.

Si P et Q eadem agant in directione erit Sin. $\phi = 0$ et Cos. $\phi = 1$: igitur erit vis media $M = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}$ vel $M = P + Q$ (Cor. I.), quod demonstrat vim mediam M esse aequalem summae virium $P + Q$.

§. 29. COROLLARIUM V.

Si P et Q agant opposita in directione erit Sin. ϕ = Sin. $180° = 0$, Cos. ϕ = Cos $180°$ $= -1$: erit itaque $M = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$ vel

vel $M = P - Q$; adeoque vis media M erit aequalis differentiae potentiarum $P - Q$.

§. 29. COROLLARIUM VI.

Pro quolibet angulo virium $\phi = PAQ$ est Cos. ϕ fractio genuina radii $= 1$, adeoque minor unitate, et quidem valoris negativi, dum angulum Q est obtusus: semper est ergo $2PQ \text{ Cos. } \phi < 2PQ$, hinc etiam $P^2 + Q^2 + 2PQ \times \text{Cos. } \phi < P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2$, et ideo $M < P + Q$. Nimirum omni in casu erit vis media minor quam summa virium lateralium.

§. 30. COROLLARIUM VII.

Cum porro cujuslibet anguli ϕ obtusi cosinus sit negativus, cujusvis vero anguli acuti positivus; patet vim mediam M respondentem duabus lateralibus P, Q majorem futuram pro quolibet angulo $\phi = PAC$ acuto, minorem autem pro obtuso (Cor. I. et IV.).

§. 31. COROLLARIUM VIII.

Ex §. 11. 7. et §. 24. elucet, semper, dum tres vires M, P, Q in datum punctum agentes sunt in aequilibrio, binas quasque vires esse inter se in ratione directa sinuum anguлоrum, quos illarum directiones cum directione vis tertiae faciunt; est enim

$$M : Q = \text{Sin. } \phi : \text{Sin. } p;$$
$$M : P = \text{Sin. } \phi : \text{Sin. } q;$$
$$P : Q = \text{Sin. } q : \text{Sin. } p;$$

§. 32. PROBLEMA III.

Fig. 13. *Corpore A tribus viribus P, Q, S, quae exprimuntur lineis AP, AQ, AS, agitato: quaeritur vis media AM et angulus SAM sive directio media.*

Solutio.

Sit $QAS = \theta$, $PAQ = \phi$

$AV = m$, $AM = M$

erit $m = AV = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ Cos. } \phi}$ (§. 25)

sed $AV : \text{Sin. } \phi = QV : \text{Sin. } VAQ$

et ideo $\text{Sin. } VAP = \dfrac{P \text{ Sin. } \phi}{m}$

sit $\angle VAQ = \pi$ erit $VAS = \theta - \pi$

ideoque erit 1°, vis media $AM = M = \sqrt{S^2 + m^2 + 2Sm \text{ Cos. } (\theta - \pi)}$.

et 2°, Sin. anguli directionis mediae

$$\text{Sin. } \angle SAM = \frac{m \text{ Sin. } (\theta - \pi)}{M.}$$

Q, E, I.

Tali modo nunc trigonometrice determinare pos-

possumus vim et directionem mediam numeri cujuscumque virium in idem punctum concurrentium.

SECTIO TERTIA.

DE COMPOSITIONE VIRIUM PARALLELARUM.

§. 33.

Quandoquidem in sectionibus praecedentibus non nisi de viribus concurrentibus locuti fuerimus, hic adhuc paucis exponamus, quomodo compositio perficiatur, si vires non in idem punctum agant.

Quid faciendum sit, si componere vellemus vires, in eodem plano, sed diversis in punctis, oblique agentes; et quidem ita agentes, ut, si lineae illarum directiones et magnitudines indicantes producantur, ad se invicem accedant, sua sponte liquere arbitror: scilicet productione linearum virium directiones indicantium, donec ad se invicem accedunt; facile adeo ex ante dictis compositio perficietur, ut hac de re nihil dicere opus sit. Videamus potius, quomodo inveniatur vis composita duarum pluriumve virium directionum parallelarum; hic enim maxime memorabilis est casus, quia is in corporibus Physicis ad sensum locum habet; gravitas enim sic agit in quodlibet corpus Physicum ut omnia illius puncta, quemcumque situm totum corpus habeat, semper secundum directiones ad sensum parallelas deorsum premantur, atque ad hunc casum etiam vires, oblique ad se invicem diversa in puncta agentes facile reduci possunt per formulas §. 20. memoratas.

§. 34.

Haec compositio nunc virium parallelarum duabus perficitur modis. 1^a. Methodus consistit in eo, ut vires reducantur ad casum jam supra relatum virium diversis in punctis ad se invicem oblique agentium. 2^a. Methodus est, ut primo inveniatur centrum aequilibrii systematis virium, et secundo ex illo centro ducatur vis aequalis summae virium componentium, quae ipsis sit parallela.

Quomodo vero inveniatur centrum aequibrii sy-

systematis cujuscunque hujus loci non est exponere, de hoc consuli merentur auctores Physici varii. Sufficiat nobis indicasse rationem, qua compositio virium parallelarum perfici possit.

CAPUT TERTIUM.

DE RESOLUTIONE VIRIUM.

§. 35.

Ex Capite praecedente satis patuit, ni fallimur, quomodo determinare possumus magnitudinem et directionem vis compositae duarum pluriumve virium. Caput, ad quod nunc accedimus, praecise contrarium est ei, de quo illic actum fuit; scilicet hoc caput agit de inveniendis viribus componentibus alicujus vis datae; Quod Physices caput praestantissimum, ut rite tractemus, nobis iterum eodem tramite erit procedendum ac in praecedenti, atque exponendus modus, quo tam ope parallelologrammi virium, quam trigonometrice vim aliquam resolvere possimus.

§. 36.

Ad decomponendam vim aliquam in duas vires perpendiculariter ad se invicem agentes, nobis tantum erit recurrendum ad formulas §. 20. memoratas: quae formulae etiam ubique adhiberi possunt, si, loco virium ad se invicem oblique agentium, vires ad se invicem perpendiculariter agentes ponere vellemus. Quod vero ad decompositionem vis alicujus in duas pluresve alias vires non sub angulo recto, sed sub angulo quocumque ad se invicem agentes attinet, nihil aliud opus est, quam convertere ratiocinium ad compositionem virium adhibitum; adeoque nobis ostendendum est primo loco, quomodo vis aliqua, ope parallelogrammi virium, in duas alias vires, sub quocumque angulo ad se invicem agentes, resolvatur, dein indicandus est modus, quo hoc trigonometrice peragere debeamus.

§. 37.

Datae vis V in punctum A directione CA agentis resolutio perficietur ope parallelogrammi virium sequenti modo: abscindatur de recta AC pars AD, quae vim V exFig. 1.

pri-

primat, tum ex *d* ducantur parallelae *da*, *db* ad datas directiones AP, AP virium, in quas V debet resolvi. Latera enim A*a*, A*b* debebunt has ipsas vires exprimere. Hocce modo, facili encheiresi, scilicet ope parallelogrammi virium, omnis resolutio perfici potest.

§. 38.

Trigonometrice autem datae vis V agentis in datum punctum A, secundum datam directionem CA, quae in binas vires P, Q, secundum determinatas directiones AP, AQ debeat resolvi, illius vis resolutio, dato angulo PAQ $= \phi$, perfici potest trigonometrice si vires per Problem. II. §. 24. ob §. 31. ita definiantur, ut sit $P = \dfrac{V \text{ Sin. } QAC}{\text{Sin. } \phi}$; $Q = \dfrac{V \text{ Sin. } PAC}{\text{Sin. } \phi}$.

§. 39.

Hae nunc duae methodi iterum propositae ad resolvendam quamcumque vim in duas pluresve (nam vis simplex iterum ut composita considerari potest Cap. I. §. 9.) alias vires, sufficiunt, ita ut huic capiti finem imponere possem. Sed ne L. H. videar hanc rem nimis festinante manu tractavisse, mihi ad-

adhuc quoddam problema proponam, quod etiam ex illis, quae jam disseruimus, tam prono alveo profluit, ut demonstratione fere non indigeat; tamen et hoc demonstremus, ut quam luculentissime in cujusvis oculos incurrat ratio, qua ejus generis problemata quam facillime possint solvi.

§. 40. PROBLEMA.

Cognitis, effectu communi moti corporis et directione et energia alterius; quaeritur quomodo vis et directio media alterius determinatur?

I. Datis $AD = M$, $AB = P$,
$\angle BAD = r$,
invenire $BD = Q$;
Sit $\angle ADB = \phi$, erit $\angle ABE = r + \phi$.

Solutio.

$$AB : AD = \text{Sin.}\ \angle ADB : \frac{\text{Sin.}\ \angle ABD}{\text{Sin.}\ \angle ABE}$$

$$P : M = \text{Sin.}\ \phi : \text{Sin.}\ (r + \phi)$$

$$M \times \text{Sin.}\ \phi = P \times \text{Sin.}\ (r + \phi)$$
$$= P\ \text{Sin.}\ r\ \text{Cos.}\ \phi + P\ \text{Cos.}\ r\ \text{Sin.}\ \phi.$$

$$(M - P\ \text{Cos.}\ r)\ \text{Sin.}\ \phi = P\ \text{Sin.}\ r\ \text{Cos.}\ \phi.$$

F Sin.

$$\text{Sin.}\ \phi^2\ (M^2 - 2PM\ \text{Cos.}\ r + P^2\ \text{Cos.}\ r^2) = P^2\ \text{Sin.}\ r^2\ \text{Cos.}\ \phi^2 = P^2\ \text{Sin.}\ r^2 - P^2\ \text{Sin.}\ \phi^2\ \text{Sin.}\ r^2.$$

$$\text{Sin.}\ \phi^2\ (M^2 - 2PM\ \text{Cos.}\ r + P^2\ \text{Cos.}\ r^2 + P^2\ \text{Sin.}\ r^2) = P^2\ \text{Sin}\ r^2.$$

$$\text{Sin.}\ \phi^2\ (M^2 - 2PM\ \text{Cos.}\ r + P^2\ (\text{Cos.}\ r^2 + \text{Sin.}\ r^2) = P^2\ \text{Sin.}\ r^2.$$

$$\text{Sin.}\ \phi^2 = \frac{P^2\ \text{Sin.}\ r^2}{M^2 - 2PM\ \text{Cos.}\ r + P^2};$$

$$\text{Ergo Sin}\ \phi = \frac{P\ \text{Sin.}\ r}{\sqrt{M^2 - 2MP\ \text{Cos.}\ r + P^2}}$$

Q, E, I. 1° loco.

$$BD : AB = \text{Sin.}\ \angle BAD : \text{Sin.}\ \angle ADB$$

$$Q : P = \text{Sin.}\ r : \frac{P\ \text{Sin.}\ r}{\sqrt{M^2 - 2MP\ \text{Cos.}\ r + P^2}}$$

$$\text{Ergo}\ Q = \sqrt{M^2 - 2MP\ \text{Cos.}\ r. + P^2}.$$

Q, E, I, 2°. loco.

II. Datis $AD = M$; $BD = Q$,
$\angle ADB = \phi$,
invenire $AB = P$;
sit $\angle BAD = r$; erit $\angle ABE = r + \phi$.

So-

Solutio.

$$BD : AB = \text{Sin.} \angle BAD : \frac{\text{Sin.} \angle ABD}{\text{Sin.} \angle ABE}$$

$$Q : M = \text{Sin.}\, r : \text{Sin.}\, (r + \phi),$$

unde deducitur;

$$M\ \text{Sin.}\, r = Q\ \text{Sin.}\, (\phi + r) = Q\ \text{Sin.}\, \phi\ \text{Cos.}\, r + Q\ \text{Cos.}\, \phi\ \text{Sin.}\, r$$

$$(M - Q\ \text{Cos.}\, \phi)\ \text{Sin.}\, r = Q\ \text{Sin.}\, \phi\ \text{Cos.}\, r$$

$$\text{Sin.}\, r^2\, (M^2 - 2MQ\ \text{Cos.}\, \phi + Q^2\, (\text{Sin.}\, \phi^2 + \text{Cos.}\, \phi^2)) = Q^2\ \text{Sin.}\, \phi^2$$

$$\text{Sin.}\, r^2 = \frac{Q^2\ \text{Sin.}\, \phi^2}{M^2 - 2MQ\ \text{Cos.}\, \phi + Q^2}$$

$$\text{Ergo Sin.}\, r = \frac{Q\ \text{Sin.}\, \phi}{\sqrt{M^2 - 2MQ\ \text{Cos.}\, \phi + Q^2}}$$

Q, E, I, 1°. loco.

$$AB : BD = \text{Sin.} \angle ADB : \text{Sin.} \angle BAD$$

$$P : Q = \text{Sin.}\, \phi : \frac{Q\ \text{Sin.}\, \phi}{\sqrt{M^2 - 2MQ\ \text{Cos.}\, \phi + Q^2}}$$

$$\text{Ergo } P = \sqrt{M^2 - 2QM\ \text{Cos.}\, \phi + Q^2}$$

Q, E, I, 2°, loco.

Si nunc hoc problema comparemus cum iis, quae §. 28. diximus, sequuntur sequentia Corollaria.

§. 41. COROLLARIA.

Hinc, in triangulo quocunque, si

$$\frac{M}{\text{Sin.}(r+\phi)} = \frac{P}{\text{Sin. } \phi} = \frac{Q}{\text{Sin. } r};$$

erit:

1°. $M = \sqrt{Q^2 + 2QP \text{ Cos. } (r+\phi) + P^2},$

$P = \sqrt{M^2 - 2QM \text{ Cos. } \phi + Q^2},$

$Q = \sqrt{M^2 - 2PM \text{ Cos. } r + P^2}.$

2°. $\text{Cos. } (r+\phi) = \frac{M^2 - P^2 - Q^2}{2PQ},$

$\text{Cos. } \phi = \frac{M^2 + Q^2 - P^2}{2QM},$

$\text{Cos. } r = \frac{M^2 + P^2 - Q^2}{2PM}.$

3°. Si ponamus

$\sqrt{-M^4 + 2Q^2M^2 + 2P^2M^2 - Q^4 + 2Q^2P^2 - P^4} = A,$

erit;

$\text{Sin. } (r+\phi) = \frac{A}{2QP}, \text{ Sin. } \phi = \frac{A}{2QM},$

$\text{Sin. } r = \frac{A}{2PM}.$

4° $\text{Tang. } (r+\phi) = \frac{A}{M^2 - P^2 - Q^2};$

$\text{Tang. } \phi = \frac{A}{M^2 - P^2 + Q^2}, \text{ Tang. } r = \frac{A}{M^2 + P^2 - Q^2}.$

5°,

5°. $\text{Cot.}\ (r+\phi) = \frac{M^2 - P^2 - Q^2}{A}$,

$\text{Cot.}\ \phi = \frac{M^2 - P^2 + Q^2}{A}$, $\text{Cot.}\ r = \frac{M^2 + P^2 - Q^2}{A}$

6°. $\text{Sec.}\ (r+\phi) = \frac{2QP}{M^2 - P^2 - Q^2}$,

$\text{Sec.}\ \phi = \frac{2QM}{M^2 + Q^2 - P^2}$, $\text{Sec.}\ r = \frac{2PM.}{M^2 + P^2 - Q^2.}$

7°. $\text{Cosec.}(r+\phi) = \frac{2QP}{A}$, $\text{Cosec.}\ \phi = \frac{2QM}{A}$,

$\text{Cosec.}\ r = \frac{2PM}{A}$.

8°. $\text{Sin. Vers.}(r+\phi) = 1 - \left(\frac{M^2 - P^2 - Q^2}{2QP}\right)$,

$\text{Sin. Vers.}\ \phi = 1 - \left(\frac{M^2 + Q^2 - P^2}{2QM}\right)$,

$\text{Sin. Vers.}\ r = 1 - \left(\frac{M^2 + P^2 - Q^2}{2PM}\right)$.

Ad finem jam properantes, id intactum praetermittere nolumus: materiae tractatae magnum usum esse in rebus Mechanicis, quod undecumque conquisitis exemplis probare supervacaneum ducimus; nos propius spectat rei utilitas ad cognoscendos motus corporis animalis, imprimis humani, qui fere semper sunt compositi. Pisces antrorsum tendentes oscillatione caudae aguntur, tanquam duabus viribus; adeoque procedunt directione media in quantum eorum processus haud a solo motu pinnarum pendet. Avium alae sic moventur, ut sese in aere sustineant, ac simul autrorsum procedant, quod posterius nihil est nisi effectus virium obliquarum ab utroque latere producti, qui juncti efficiunt directionem compositam. Quodsi ceterorum animalium motus consideres, plerosque itidem compositos esse facile percipies: locum id habet in reptilibus, quadrupedibus, ceterisque. Cum homine res eodem modo comparata est, atque in humano corpore motus fere semper sunt compositi, pendentque a directione musculorum eorumrumque viribus; quibus cognitis, ei, cui virium theoria perspecta est, facillimum erit cujusvis motus humani compositionem et resolutionem instituere, quod impedimentis hic illicve obortis rite tollendis necessarium esse, adeoque ad rem Medicam quam maxime pertinere, nemo inficias ibit.

Ad horum motuum animalium notitiam summi BORELLI et P. J. BARTHEZII opera, de illo argumento, nobis perquam utilia fuisse, grati recordamur.

T A N T U M.

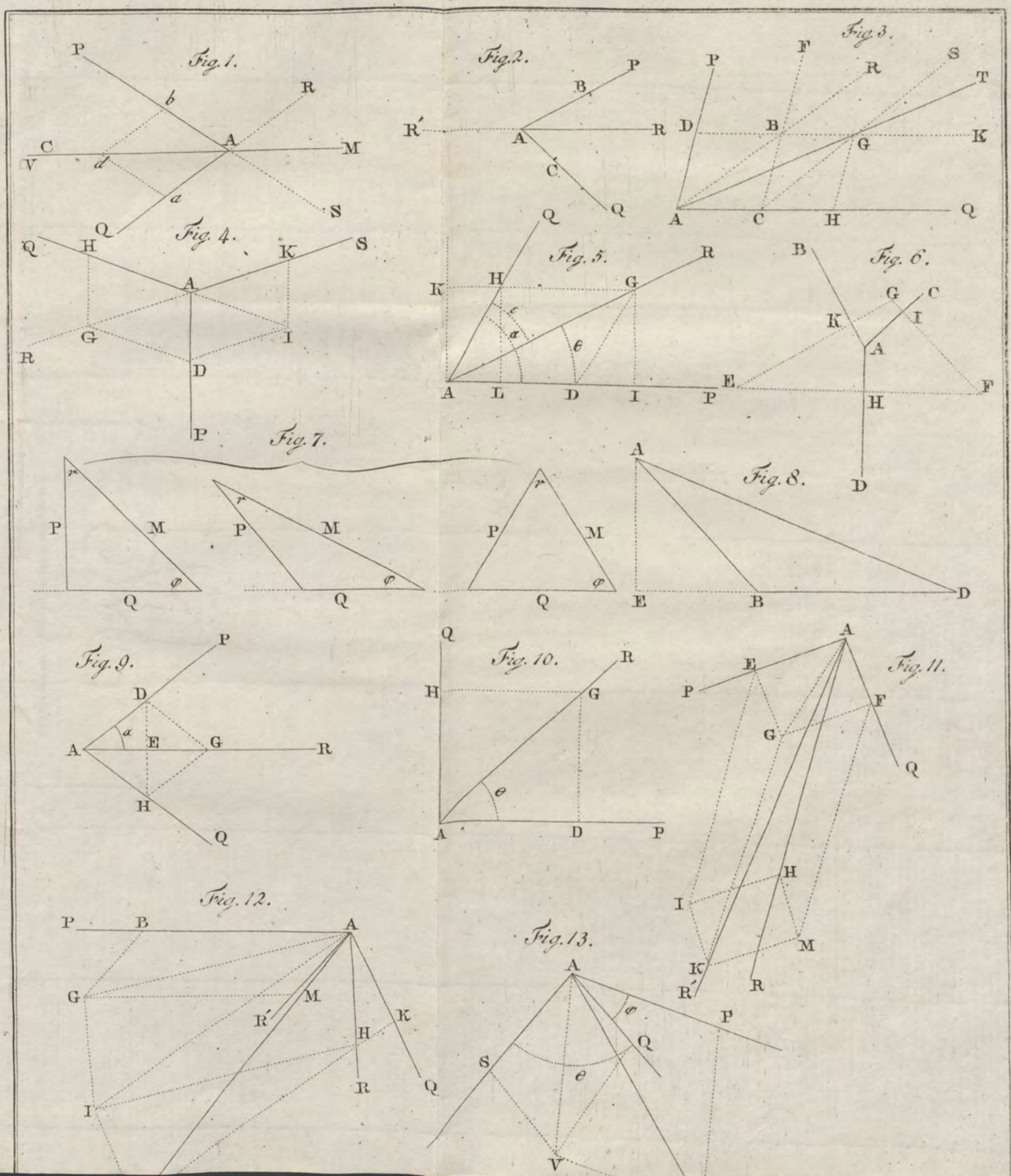
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

THESES.

I.

Theoria Compositionis et Resolutionis virium fundamentum est totius Mechanices.

II.

Calor, attractio, et pressio Atmosphaerae ad aequilibrium, quod in Natura observatur, maxime conducunt.

III.

Attractio et repulsio mutua observatur inter corpora.

IV.

Pressio atmosphaerae quam maxime confert, ad statum corporum liquidum servandum.

V.

Corpora sunt colorata, ut instrumenta musica sonora.

VI.

Quod fulminis avertendi remedium non magis in usu sit, omnino mirandum est.

VII.

Maxima dignum est attentione; quod gas acidum carbonicum homini, plurimisque animalibus lethiferum, sua majore densitate, telluris superficiem petat, et vegetationi plantarum inserviat: et quod gas oxygenium, sine quo neque homo, neque quam plurima animalia vivere possunt, vi vitali plantarum producatur, ita ut plantis quasi excremento sit.

VIII.

Licet Eudiometra ad proportionem gas oxygenii in aëre atmosphaerico determinandam adhibeantur, rarissime tamen ad aëris salubritatem indicandam sufficiunt.

IX.

Solem nunquam vidimus.

X.

Mathesis varias ob caussas dici meretur scientia quam utilissima, uti et verissima.

XI.

Totum systema planetarum nobis nondum innotescere, ex observatione quotidiana, mihi colligi posse videtur.

XII.

Quantitates, quae *imaginariae* a Mathematicis dicuntur, ut ex. gr. $\sqrt{-1}$, licet revera *imaginariae* sint, non ideo rejiciendae.

XIII.

Sine Analysi Sublimiore nulla salus in Physica Mathematica.

XIV.

Ex litteratorum dissensu, doctrinarum perfectio oritur.

XV.

Quamvis leges et proprietates corporum inorganicorum nullo modo sufficere possint ex-explicationi phaemenorum vitae, earum tamen applicatio plane non est negligenda.

XVI.

Varietates generis humani caussis accidentalibus sunt tribuendae.

XVII.

Vox animalibus brutis aeque ac homini propria; huic vero soli concessa est loquela.

XVIII.

Egregie RICHERAND: « *Dans la merveilleuse ordonnance de l'univers, chaque être est parfait en lui-même, chaque être est construit de la manière la plus favorable aut but, qu'il doit remplir; et tout est également admirable dans la nature vivente et animée, depuis la moindre vegetation, jusqu'à la plus sublime pensée.*" Phys. Tom. I. pag. 21 et 22. 1817.

AAN

MYNEN VRIEND

L. S. VAN PRAAG,

BIJ ZIJNE OPENLIJKE BEVORDERING TOT
DOCTOR IN DE WIJSBEGEERTE EN
GENEESKUNDE.

De blijde stond genaakt, welke uwen wensch zal kroonen;
Gij wordt de broeder van Asclepias waardste Zonen;
Thans deelt uw vriend de vreugd', die dit geluk u geeft:
Wat wonder, dat hij die ook uit te drukken streeft?

Ofschoon door de natuur tot dichter niet geboren,
Zoo laat hij echter nu zijn vreugdelied u hooren,
Dat wel gebrekkig is, doch het gevoel u maalt,
Dat, niet gebrekkig, in zijn vrolijk hart nu daalt.

Gij

Gij wist aan de Artsenij Natuurkunde ook te paren;
O mogt dit schoon verband de schoonste vruchten baren!
Gij hebt het nut daarvan in uwe schrift getoond,
Bewijs het door u zelf, dan is uw werk bekroond!

Poog dan, zoo veel gij kunt, der menschheid heil te stichten!
Wil nimmer voor de moeite, of zorg, of arbeid zwichten!
Volbreng met lust de pligt van uwen nutten stand,
Zoo bezigt gij de kunst tot heil van 't vaderland!

'ΕΚ ΤΗΣ ΦΙΛΙ'ΑΣ ΤΕΚΜΗ'ΡΙΟΝ.