

A. C. VAN RIJN VAN ALKEMADE

---

DE

ELLIPTISCHE POLARISATIE

BIJ DE

TERUGKAATSING VAN HET LICHT


DOOR

DOORSCHIJNENDE MIDDENSTOFFEN



Diss Leiden

1882 nr 37



RIJKSUNIVERSITEIT LEIDEN



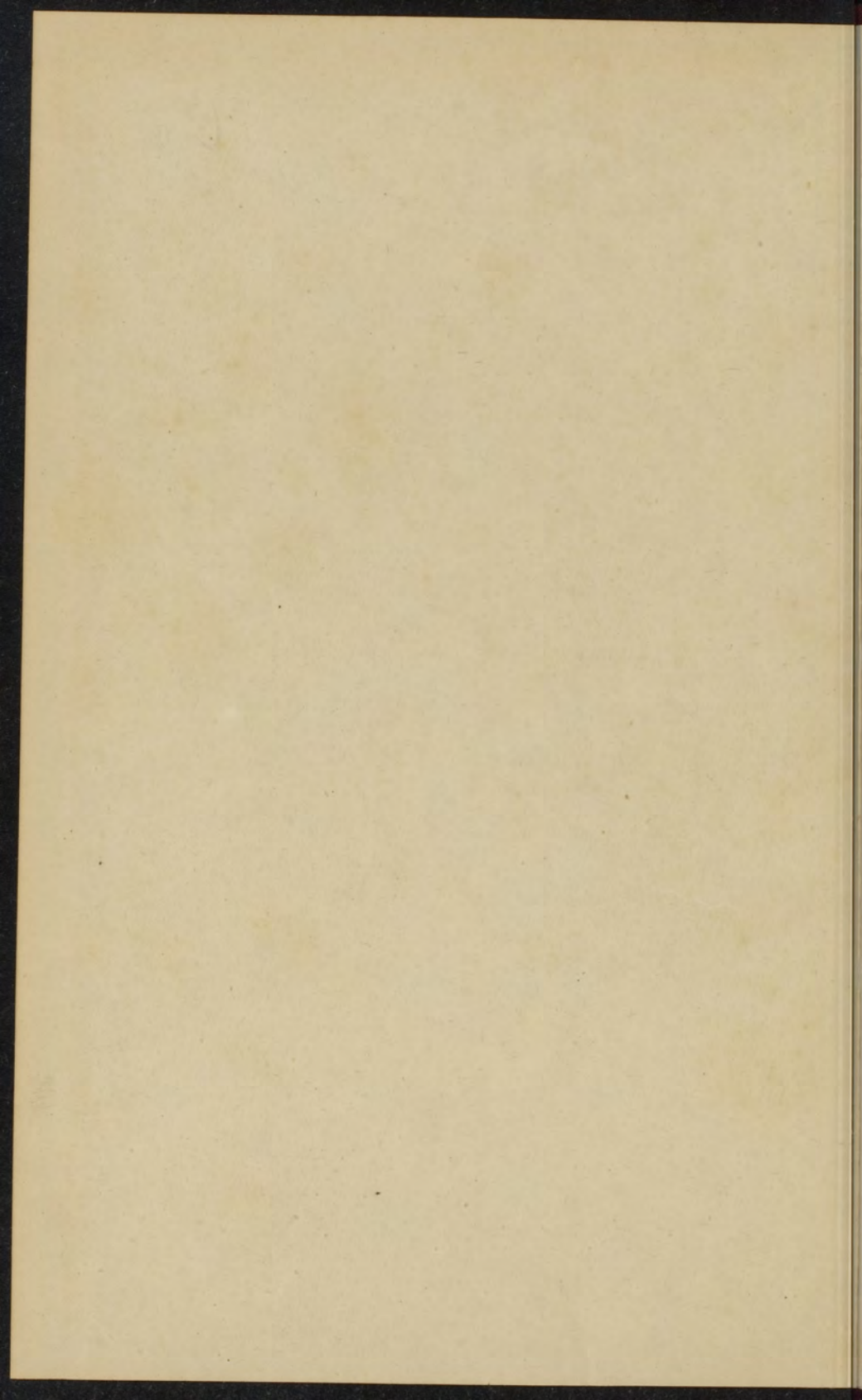
0617 8474

11 J

Diss. Leiden

1882:37.

C 11



OVER

DE ELLIPTISCHE POLARISATIE, BIJ DE  
TERUGKAATSING VAN HET LICHT, DOOR  
DOORSCHIJNENDE MIDDENSTOFFEN.

OVER DE RIJKSRECHTSPALATSE  
BIL DE TRINGAASING VAN DE LICHT  
JAAR DOORBIJZENDE WIDENSTOFFE

DE WET VAN DE 17 DE APRIL 1875

DE WET VAN DE 17 DE APRIL 1875

DE WET VAN DE 17 DE APRIL 1875  
DE WET VAN DE 17 DE APRIL 1875

OVER DE ELLIPTISCHE POLARISATIE,  
BIJ DE TERUGKAATSING VAN HET LICHT,  
DOOR DOORSCHIJNENDE MIDDENSTOFFEN.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTORMAGNIFICUS

D<sup>r</sup>. M. J. DE GOEJE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE.

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Donderdag den 6<sup>en</sup> Juli 1882, des namiddags te 3 uren

DOOR

Abraham Cornelis van Rijn van Alkemade,

GEBOREN TE UTRECHT.

---

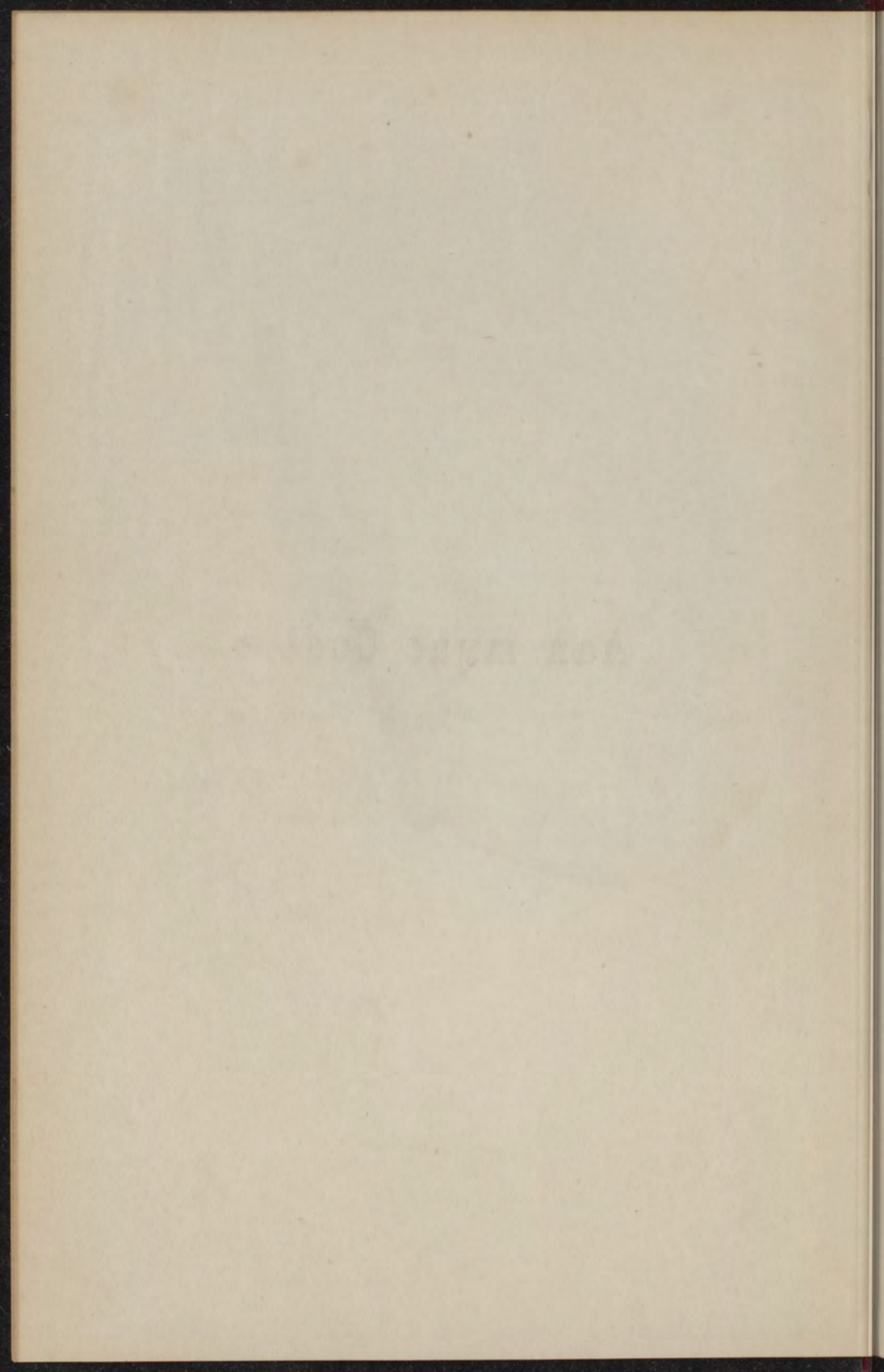
'S GRAVENHAGE,  
DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1882.





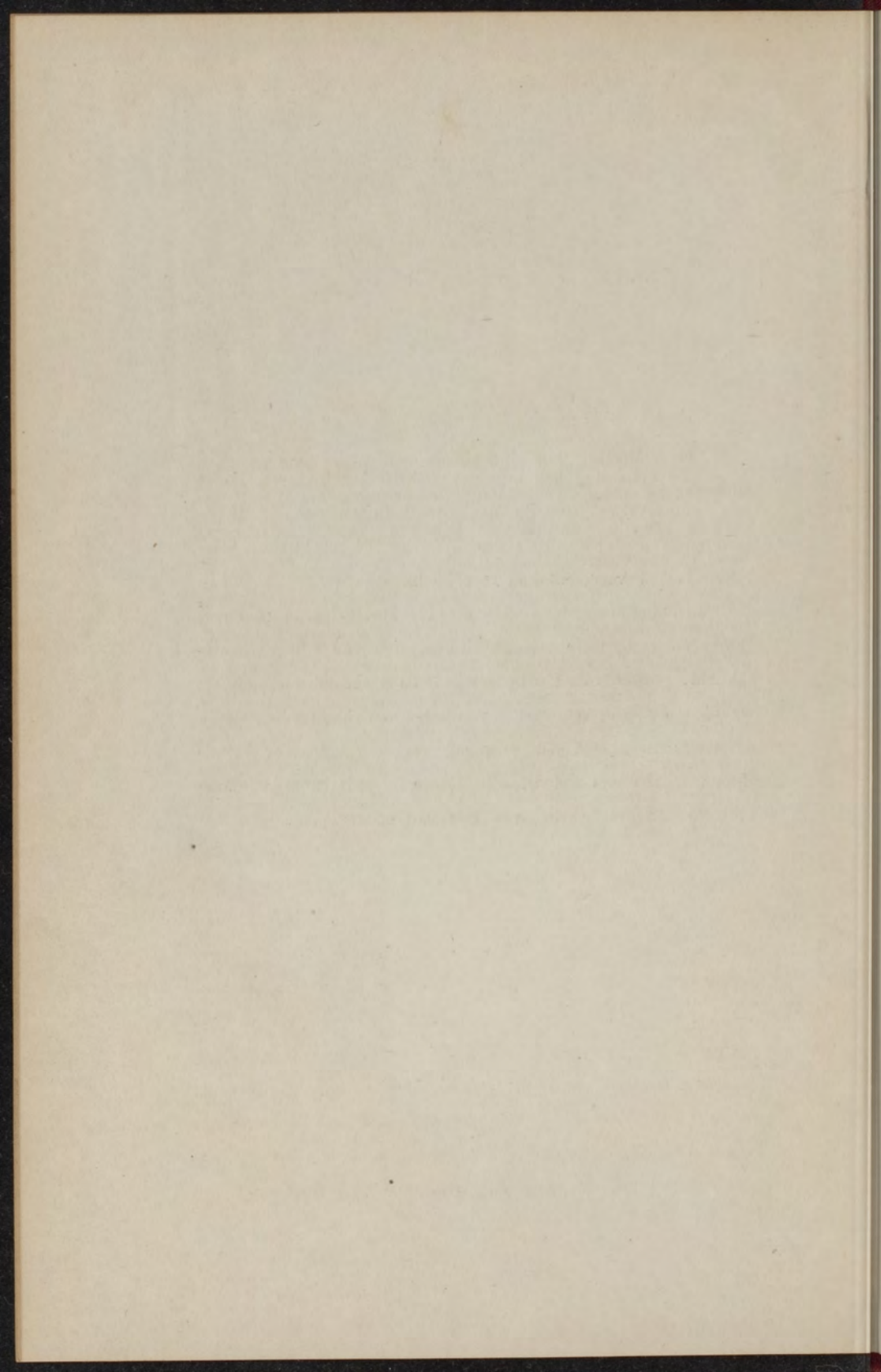
**Aan mijne Ouders.**



De voltooiing van mijn proefschrift is mij eene welkome gelegenheid, openlijk mijn dank te betuigen aan de Hoogleeraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier lessen ik het voorrecht had te volgen.

In het bijzonder geldt dit U, Hooggeleerde LORENTZ, Hooggeachte Promotor! Houd U overtuigd van mijne erkentelijkheid, zoowel voor Uw onderwijs in de mathematische physica, waardoor dit, aan verrassende resultaten zoo rijke gebied, steeds grooter aantrekkelijkheid voor mij verkreeg, als voor de talrijke bewijzen van welwillendheid, die ik gedurende de bewerking van dit proefschrift, van U mocht ondervinden.

---



## INLEIDING.

---

Zelden worden de natuurverschijnselen door eenvoudige wetten beheerscht en waar men aanvankelijk meende, dat dit wel het geval was, blijkt het meestal later, dat die eenvoudige wetten slechts bij eerste benadering de verschijnselen weêrgeven. Een voorbeeld hiervan is het onderwerp van dit proefschrift: de elliptische polarisatie van het licht bij de terugkaatsing aan het oppervlak van doorschijnende middenstoffen. De theorie der terugkaatsing van het licht is in hare eenvoudigste gedaante het eerst opgesteld door FRESNEL en deze verkreeg daarbij voor de intensiteit van het teruggekaatste licht uitkomsten, die de schoonste overeenstemming met de toen bekende waarnemingen vertoonden. Daaronder was de voornaamste deze, dat natuurlijk licht door terugkaatsing onder een bepaalden hoek, den polarisatiehoek, lineair gepolariseerd licht oplevert. Deze polarisatiehoek werd door de wet van BREWSTER zoodanig bepaald, dat zijn tangens gelijk is aan den brekingsindex. Intusschen bleek het al spoedig en wel het eerst aan BREWSTER zelf, dat zijne wet slechts bij benadering geldig was en dat er strikt genomen voor geen enkelen invalshoek zuiver

lineair gepolariseerd licht verkregen werd. Hetzelfde verschijnsel werd waargenomen door SEEBECK vooral bij sterk brekende middenstoffen. Door AIRY, die dergelijke waarnemingen deed bij diamant, werd het verschijnsel in verband gebracht met een phaseverandering, die bij de terugkaatsing optreedt, zoodat, als lineair gepolariseerd licht invalt, het teruggekaatste licht in den regel niet lineair maar elliptisch gepolariseerd is. Tevens sprak hij het vermoeden uit, dat het niet eene eigenschap was die slechts aan enkele lichamen toekwam, maar dat men hier met een algemeen verschijnsel te doen had. Dit vermoeden werd bevestigd door een uitgebreide reeks van waarnemingen, die JAMIN volbracht heeft en die later nog door QUINCKE werden aangevuld.

Uit dit alles blijkt dat in de theorie van FRESNEL enkele omstandigheden, die op de terugkaatsing van invloed zijn, buiten rekening zijn gelaten en er zijn dan ook reeds verschillende pogingen aangewend om deze leemte aan te vullen.

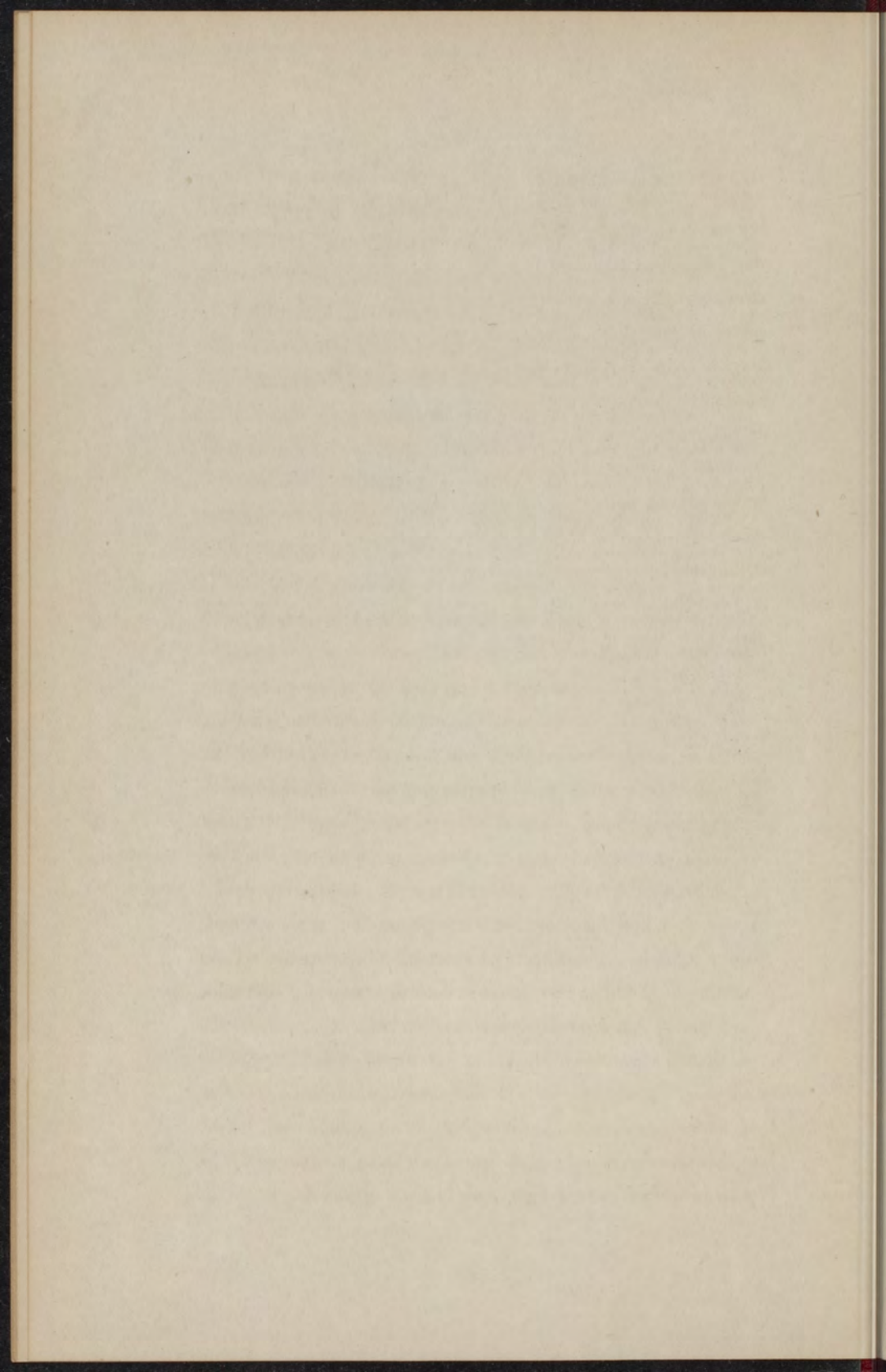
Vooreerst heeft CAUCHY getracht de verschijnselen te verklaren door de invoering van longitudinale trillingen en werkelijk gelukte het hem formules te verkrijgen, die met de proeven van JAMIN zeer goed overeenstemden. Deze poging is vooral van belang, omdat men overal elders in de theorie van het licht slechts transversale trillingen heeft te beschouwen; bleek dus de theorie van CAUCHY juist te zijn dan zou dit de eerste gelegenheid zijn, waarbij men, door de feiten genoodzaakt, het optreden van longitudinale trillingen moest aannemen.

De theorie van CAUCHY moet echter verworpen worden, niet om het denkbeeld van de invoering der longitudinale trillingen, maar om de voorstelling, die CAUCHY zich maakt van den aard der lichtverschijnselen als bewegingen in eene veerkrachtige middenstof, waardoor alle bezwaren, die aan deze opvatting eigen zijn, ook zijne theorie blijven aankleven. De electromag-

netische theorie van het licht is vrij van deze bezwaren en het lag dus voor de hand te onderzoeken, in hoever de invoering van longitudinale trillingen volgens deze theorie eene meer bevredigende verklaring kon opleveren. Hierbij doet zich echter de moeielijkheid voor, dat de voortplantingsnelheid der longitudinale trillingen volgens deze theorie afhangt van eene constante, die door HELMHOLTZ is ingevoerd in de formule voor de inductiewerking van twee stroomelementen en waarvan men de waarde nog niet heeft kunnen bepalen, zoodat daarmede het bestaan van longitudinale trillingen twijfelachtig wordt. Intuschen meen ik te hebben aangetoond dat zoo er al longitudinale trillingen mogelijk zijn, haar invloed toch in elk geval klein is, vergeleken met dien eener andere omstandigheid, die tot verklaring van het verschijnsel ongetwijfeld in rekening moet worden gebracht.

Ik bedoel de reeds door LORENZ te Kopenhagen gemaakte onderstelling, dat de beide middenstoffen, aan welker grensvlak het licht wordt teruggekaatst, niet scherp van elkander gescheiden zijn, maar dat er aan het grensvlak een geleidelijke overgang plaats heeft.

Eindelijk meende ik nog te moeten nagaan in hoeverre eene, zij het dan ook zwakke absorptie van het licht, tot de waargenomen elliptische polarisatie kon bijdragen, vooreerst omdat de elliptische polarisatie bij metalen, uit hunne ondoorschijnendheid verklaard wordt en verder omdat o. a. blijkens de proeven van E. WIEDEMANN ook andere sterk absorbeerende middenstoffen eene sterke elliptische polarisatie vertoonen.





## EERSTE HOOFDSTUK.

---

### DE THEORIE VAN CAUCHY.

§ 1. CAUCHY is de eerste geweest, die eene formule heeft opgesteld, waardoor de proeven van JAMIN over de elliptische polarisatie van teruggekaatst licht werden weergegeven. Hij werd daartoe geleid toen hij trachtte eene leemte aan te vullen, die in de terugkaatsingstheorie van FRESNEL was blijven bestaan, bij de berekening van de intensiteit van het teruggekaatste en het gebroken licht. Voor deze berekening wordt de kennis vereischt van de voorwaarden, die aan het grensvlak van twee middenstoffen vervuld moeten worden, en ofschoon nu de bekende formules, waartoe FRESNEL geraakte, door de ervaring bevestigd werden, was toch zijne afleiding onbevredigend, omdat hij een deel der grensvoorwaarden achterwege liet. Hetzelfde gold van de theorie van NEUMANN, die in sommige opzichten van die van FRESNEL afweek.

CAUCHY daarentegen bracht alle grensvoorwaarden in rekening en kwam daardoor tot formules, die kleine afwijkingen van die van FRESNEL vertoonden, uit welke afwijkingen eene elliptische polarisatie van het teruggekaatste licht voortvloeide.

In dit hoofdstuk zal zijne theorie in 't kort besproken worden met gebruikmaking van eenige vereenvoudigingen, die door EISENLOHR zijn aangebracht; daarbij zal dan tevens blijken, in hoever zij van het verschijnsel eene bevredigende verklaring kan geven.

§ 2. De bewegingsvergelijkingen voor een stelsel moleculen, die aantrekkende en afstootende krachten op elkaar uitoefenen, heeft CAUCHY in verschillende verhandelingen 1) opgesteld, door rechtstreeks de kracht te berekenen, die op zulk een molecuul werkt, wanneer in het stelsel verplaatsingen bestaan, die functiën zijn van de coördinaten en den tijd. Voor een homogeen isotroop medium krijgen dan de bewegingsvergelijkingen den volgenden vorm:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A \Delta \xi + B \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A \Delta \eta + B \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A \Delta \zeta + B \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Hierin zijn  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  de componenten der verplaatsing; verder is

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2},$$

$$P = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

terwijl  $m$  de massa van een deeltje voorstelt en  $A$  en  $B$  constanten zijn, die afhangen van de groepeeringswijze der moleculen en van de wijze waarop deze op elkander werken.

---

1) O. a. in de Exercices d'analyse et de physique mathématique. T. I.

Eene bijzondere oplossing dezer vergelijkingen, die eene voortplanting van transversale trillingen voorstelt is:

$$\xi = a l \cos \psi, \quad \eta = a m \cos \psi, \quad \zeta = a n \cos \psi$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} + p \right), \quad \alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad v^2 = \frac{A}{m};$$

hierin wordt de voortplantingsrichting bepaald door  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ , de trillingsrichting door  $l$ ,  $m$  en  $n$ .

Evenzoo voldoet aan de bewegingsvergelijkingen eene voortplanting van longitudinale trillingen, die men aldus kan voorstellen:

$$\xi = a \alpha \cos \psi, \quad \eta = a \beta \cos \psi, \quad \zeta = a \gamma \cos \psi$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} + p \right), \quad V^2 = \frac{A + B}{m}.$$

In navolging van CAUCHY zullen wij echter eene andere oplossing gebruiken, die verkregen wordt, door  $\cos \psi$  te vervangen door  $e^{\pm i\psi}$ . Wanneer wij dan met deze zoogenaamde symbolische oplossingen bewerkingen uitvoeren, zullen wij van de uitkomsten dier bewerkingen telkens het reële gedeelte moeten nemen, om ze op de lichtverschijnselen te kunnen toepassen. Van de beide teekens in deze symbolische oplossing zullen wij het onderste kiezen. Daarbij moeten wij opmerken, dat, indien  $\psi$  reëel is, het bestaanbare deel der uitdrukkingen onafhankelijk van het bedoelde teeken is. Worden echter, zooals later zal voorkomen,  $\alpha$ ,  $\beta$  of  $\gamma$  onbestaanbaar, dan moeten wij de teekens daarin zoo kiezen, dat de bestaanbare exponentieele factor, die dan in  $e^{-i\psi}$  optreedt, in de voortplantingsrichting steeds kleiner en niet grooter wordt, want dit laatste is klaarblijkelijk onmogelijk.

§ 3. Bij de behandeling van het vraagstuk der terugkaatsing kiezen wij het grensvlak der beide middenstoffen tot  $yz$ -vlak en rekenen de  $x$ -as positief naar den kant van het tweede medium.

Ligt nu de voortplantingsrichting in het  $xz$ -vlak, dan wordt de symbolische uitdrukking voor het invallende licht:

$$[q] = e^{-i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha + z \sin \alpha}{v} + p \right)},$$

waarin  $\alpha$  de hoek van inval is.

Uit eene beschouwing van den onderlingen stand der golf-fronten in het invallende, het teruggekaatste en het gebroken licht, leidt men nu gemakkelijk af, dat de coëfficiënt van  $z$ , dus  $\frac{\sin \alpha}{v}$  voor deze drie bundels dezelfde moet zijn. Daar dit ook het geval moet zijn met den trillingstijd, heeft eveneens de coëfficiënt van  $t$  voor de drie bundels dezelfde waarde. Dit zijn de wetten, die, onafhankelijk van de grensvoorwaarden, opgeleverd worden door iedere theorie, waarbij de lichtbeweging wordt opgevat als de eene of andere verstoring, die periodiek verandert met tijd en plaats. Voor de bepaling der intensiteit echter, is het noodig de grensvoorwaarden te kennen en deze hangen geheel af van de theorie omtrent de lichtverschijnselen, die men aanneemt. Volgens de theorie van CAUCHY wordt de aether opgevat als eene veerkrachtige middenstof en men zou dus verwachten dat hij dezelfde grensvoorwaarden gebruikt, die in de theorie der elasticiteit voor vaste lichamen gelden. Deze voorwaarden zijn, zooals bekend is, de doorlopendheid der verplaatsingen aan het grensvlak en verder de gelijkheid der spanningen, die op een stuk van het grensvlak van de zijde van het eene medium en van die van het andere worden uitgeoefend. CAUCHY echter gebruikt andere grensvoorwaarden, hij neemt n. l. aan 1) dat de verplaatsingen doorlopend zijn, benevens die differentiaalquotienten naar  $x$ , welke niet door de

---

1) Comptes Rendus 1840. p. 347.

bewegingsvergelijkingen worden bepaald; dus alleen de eerste. Ofschoon CAUCHY hiervoor eigenlijk geen genoegzamen grond aanvoert, zullen wij in 't vervolg toch zijne grensvoorwaarden toepassen, omdat men, gebruik makende van de eerstgenoemde voorwaarden, hetgeen o. a. door GREEN 1) gedaan is, toch later genoodzaakt wordt eenige onderstellingen te maken over de constanten van den aether in de beide media, ten einde overeenstemming te verkrijgen met de formules van FRESNEL, die door de ervaring zijn bevestigd. Maakt men nu die onderstellingen, dan komen de condities van CAUCHY weêr te voorschijn, n. l.

$$(\xi)_1 = (\xi)_2, (\eta)_1 = (\eta)_2, (\zeta)_1 = (\zeta)_2,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_2, \quad (1)$$

waarin de indices 1 en 2 op het eerste en het tweede medium betrekking hebben.

§ 4. In de eerste plaats zullen wij het geval behandelen, dat de trillingen loodrecht staan op het vlak van inval en dus de richting der  $y$ -as hebben. De symbolische uitdrukking voor het invallende licht wordt nu:

$$\eta_1 = e - i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

voor het teruggekaatste licht:

$$\eta_1' = a_1 e - i \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

voor het gebroken licht:

$$\eta_2 = a_2 e - i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right).$$

---

1) Transact. of the Cambridge Philosoph. Society. 1819. p. 13.

Hierin is de phase  $p$  voor de drie bundels gelijk gesteld, want mocht er eene phaseverandering plaats hebben, dan zou dit zich van zelf openbaren in de waarden van  $a_1$  en  $a_2$ , die dan eene complexe waarde zouden verkrijgen.

De eerste grensvoorwaarde zegt nu dat voor  $x=0$ :

$$\eta_1 + \eta'_1 = \eta_2$$

moet zijn, en met het oog op de gelijkheid van  $\frac{\sin \alpha}{v}$  voor de drie bundels wordt dit:

$$1 + a_1 = a_2 \dots \dots \dots (2)$$

Volgens de tweede voorwaarde moet voor  $x=0$ :

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta'_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

zijn, of na uitvoering der differentiatie en vereenvoudiging:

$$(1 - a_1) \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = a_2 \frac{\cos \alpha_2}{v_2} \dots \dots \dots (3)$$

Uit (2) en (3) kan men na eliminatie van  $a_2$ ,  $a_1$  oplossen, en vindt dan:

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (4)$$

d. i. de formule van FRESNEL.

§ 5. Ligt de trillingsrichting in het invalsvlak, dan kan men de transversale trillingen der drie bundels ontbinden in twee componenten evenwijdig aan de  $x$ -as en de  $z$ -as. Het invallende licht wordt derhalve voorgesteld door:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ \zeta_1 &= \cos \alpha_1 e^{-i\psi_1} \end{aligned} \right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

het teruggekaatste licht door:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= -a_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi'_1} \\ \zeta'_1 &= -a_1 \cos \alpha_1 e^{-i\psi'_1} \end{aligned} \right\} \psi'_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

het gebroken licht door:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -a_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ \zeta_2 &= a_2 \cos \alpha_2 e^{-i\psi_2} \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right).$$

De grensvoorwaarden zijn in dit geval:

$$\begin{aligned} (\xi)_1 &= (\xi)_2, & (\zeta)_1 &= (\zeta)_2, \\ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_1 &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_2, & \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_1 &= \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_2, \end{aligned}$$

en men krijgt dus nu vier vergelijkingen ter bepaling der onbekenden, die slechts twee in getal zijn, nl.  $a_1$  en  $a_2$ .

Men kan dus de onbekenden uit deze vergelijkingen niet bepalen, tenzij men twee vergelijkingen achterwege laat, hetgeen door FRESNEL en NEUMANN ook werkelijk gedaan werd. CAUCHY daarentegen merkte op dat in dit geval ook longitudinale trillingen kunnen ontstaan en wel een teruggekaatst en een gebroken stelsel, waarvan de amplitudines twee nieuwe onbekenden leveren, zoodat het vraagstuk dan bepaald wordt. Deze longitudinale golfstelsels worden nu voorgesteld:

in het teruggekaatste licht door:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= -b_1 \cos \beta_1 e^{-i\psi'_1} \\ \zeta'_1 &= b_1 \sin \beta_1 e^{-i\psi'_1} \end{aligned} \right\} \psi'_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \beta_1 - z \sin \beta_1}{V_1} + p \right),$$

in het gebroken licht door:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_2 &= b_2 \cos \beta_2 e^{-i\psi'_2} \\ \zeta'_2 &= b_2 \sin \beta_2 e^{-i\psi'_2} \end{aligned} \right\} \psi'_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \beta_2 + z \sin \beta_2}{V_2} + p \right),$$

waarin de hoeken  $\beta$  evenals vroeger  $\alpha$ , scherp gerekend zijn.

De wet der breking geeft nu de betrekking:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_1}{V_1} = \frac{\sin \beta_2}{V_2}.$$

De vier grensvoorwaarden geven, als men al de bundels in rekening brengt, de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (1 + a_1) \sin \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 &= a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \beta_2, \\ (1 - a_1) \cos \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 &= a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2, \end{aligned}$$

$$(1 - a_1) \cos \alpha_1 - b_1 \frac{\cos^2 \beta_1}{\sin \beta_1} = a_2 \cos \alpha_2 - b_2 \frac{\cos^2 \beta_2}{\sin \beta_2},$$

$$(1 + a_1) \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} - b_1 \cos \beta_1 = a_2 \frac{\cos^2 \alpha_2}{\sin \alpha_2} + b_2 \cos \beta_2,$$

waaruit men de amplitudo  $a_1$  kan oplossen, die dan wordt:

$$a_1 = \frac{\cot(\alpha_1 + \alpha_2) - \operatorname{tg}(\beta_1 - \beta_2)}{\cot(\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{tg}(\beta_1 - \beta_2)} \cdot \dots \cdot \dots \quad (5)$$

§ 6. Proefondervindelijk heeft men van het bestaan van longitudinale golfstelsels nooit iets bemerkt; CAUCHY neemt daarom aan dat de longitudinale trillingen zich op eene andere wijze voortplanten dan de transversale en wel zoodanig dat hare amplitudo op eenigszins merkbaren afstand van het grensvlak, zeer gering wordt.

Dit kan op tweërlei wijze worden bereikt; vooreerst door aan te nemen dat de voortplantingssnelheden der longitudinale trillingen zeer groot zijn, vergeleken met die der transversale. Men heeft toch:

$$\sin \beta_1 = \frac{V_1}{v_1} \sin \alpha_1 \quad \sin \beta_2 = \frac{V_2}{v_2} \sin \alpha_2;$$

door de genoemde onderstelling worden dus, als  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  niet zeer klein zijn,  $\sin \beta_1$  en  $\sin \beta_2$  grooter dan de eenheid en  $\beta_1$  en  $\beta_2$  onbestaanbaar. Verder vindt men:

$$\cos \beta_1 = i \sqrt{\frac{V_1^2}{v_1^2} \sin^2 \alpha_1 - 1}, \quad \cos \beta_2 = i \sqrt{\frac{V_2^2}{v_2^2} \sin^2 \alpha_2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = i \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{V_1^2 \sin^2 \alpha_1}}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = i \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{V_2^2 \sin^2 \alpha_2}}.$$

Dergelijke uitdrukkingen verkrijgt men ten tweede door aan te nemen dat  $V_1$  en  $V_2$  onbestaanbaar zijn, en dus ook  $\sin \beta_1$  en  $\sin \beta_2$ .

Dat werkelijk deze hypothese kan gemaakt worden, blijkt wanneer men uit de bewegingsvergelijkingen eene oplossing



tracht af te leiden, die eene voortplanting van longitudinale trillingen, b. v. langs de  $x$ -as voorstelt. Men moet dan voldoen aan de vergelijking:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (A + B) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

en stelt daartoe:

$$\xi = C e^{nt + ax}.$$

Dan moet voldaan zijn aan de voorwaarde:

$$n^2 = V^2 a^2,$$

$$a = \pm \frac{n}{V},$$

indien

$$V^2 = \frac{A + B}{m}$$

is. Opdat  $\xi$  eene periodieke functie van den tijd worde, neemt men:

$$n = i \frac{2\pi}{T},$$

waardoor:

$$a = \pm i \frac{2\pi}{TV}.$$

Zoolang  $V$  hierin bestaanbaar is, stelt die grootheid klaarblijkelijk de voortplantingssnelheid voor. Men kan nu echter aannemen, dat  $A + B$  negatief is en dan wordt  $V$  onbestaanbaar. Voortplantingssnelheid in den eigenlijken zin van het woord kan  $V$  dan niet meer heeten; beter zou men, als:

$$V T = i s$$

is,  $s$  den extinctiecoëfficient kunnen noemen. Want het bestaanbare gedeelte van:

$$\xi = C e^{\pm \frac{2\pi}{s} x} e^{i \frac{2\pi}{T} t}$$

is:

$$\xi = C e^{\pm \frac{2\pi}{s} x} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

en hierin hangt het van  $s$  af, hoe snel de amplitudo der trillingen bij het kleiner of grooter worden van  $x$  afneemt.

Is nu zoowel in het eerste als in het tweede medium  $V$  imaginair, nl. in het eerste  $V_1 T = i s_1$ , in het tweede  $V_2 T = i s_2$ , dan wordt, als  $\lambda$  de golflengte der transversale trillingen voorstelt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} = i \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha_1}}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} = i \sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2}{s_2^2 \sin^2 \alpha_2}}.$$

Hieruit blijkt, dat men, zoodra eene der bovengenoemde hypothesen gemaakt wordt, kan stellen:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} = i m_1, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2} = i m_2,$$

waarbij  $m_1$  en  $m_2$  in de twee gevallen verschillende beteekenis hebben; daardoor wordt dan:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \beta_2) = i \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 - 1} = i p.$$

§ 7. Substitueert men deze waarde in de formule (5), dan wordt:

$$a_1 = \frac{\cot(\alpha_1 + \alpha_2) - i p}{\cot(\alpha_1 - \alpha_2) + i p} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{1 - i p \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + i p \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Om dit verder te herleiden, stelle men:

$$p \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg} \varphi, \quad p \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tg} \psi; \quad (6)$$

dan wordt:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} e^{-(\varphi + \psi) i}.$$

De teruggekaatste transversale trillingen worden dus nu bepaald door de componenten:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1' &= -a_1' \sin \alpha_1 e^{-\chi i} \\ \zeta_1' &= -a_1' \cos \alpha_1 e^{-\chi i} \end{aligned} \right\}, \quad \chi = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1 + \delta}{v_1} + p \right).$$

Hierin heeft men voor de amplitudo:

$$a_1'^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos^2 \psi} = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{1 + p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 - p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (7)$$

terwijl er eene faseverandering ontstaat is, waarvan de grootte bepaald wordt door :

$$2\pi \frac{\delta}{Tv_1} = \varphi + \psi . . . . . (8)$$

De amplitudo  $a_1'$  wordt voor  $p = 0$  dezelfde als volgens de formule van FRESNEL; de ervaring heeft echter geleerd, dat deze laatste op zeer weinig na juist is, derhalve moet  $p$  in ieder geval een zeer kleine grootte zijn.

Het optreden van de faseverandering staat nu in onmiddellijk verband met het onderwerp, dat ons bezig houdt. Valt op het grensvlak van twee middenstoffen een bundel lineair gepolariseerd licht, waarvan het polarisatievlak een willekeurigen hoek met het vlak van inval maakt, dan kan men dezen altijd ontbinden in twee componenten, waarvan de eene uit trillingen loodrecht op het invalsvlak, de andere uit trillingen in het invalsvlak bestaat. De eerste wordt zonder faseverandering teruggekaatst, de tweede echter ondergaat eene faseverandering, die door (6) en (8) wordt bepaald; de beide componenten van het teruggekaatste licht hebben dus een zeker faseverschil of m. a. w. het teruggekaatste licht is elliptisch gepolariseerd.

§ 8. Het blijkt dus nu dat de invoering der longitudinale trillingen niet alleen kan dienen om aan de grensvoorwaarden in haar geheel te voldoen, maar dat zij tevens eene verklaring geven van het waargenomen verschijnsel der elliptische polarisatie. In beide opzichten echter laat de theorie nog te wenschen over; wij zagen toch reeds vroeger dat de grensvoorwaarden, die tot hertoe gebruikt zijn, niet op overtuigende gronden berusten en bovendien zal het nu blijken, dat de gegeven verklaring van de elliptische polarisatie geene zeer natuurlijke is. De volledige bepaling van dit verschijnsel hangt geheel af van

de waarde, die  $p$  verkrijgt; volgens de eerste der boven gemaakte hypothesen wordt:

$$p = \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 - 1}, \quad m_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{V_1^2 \sin^2 \alpha_1}}, \quad m_2 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{V_2^2 \sin^2 \alpha_1}}$$

en bij benadering met het oog op de groote waarde van  $V_1$  en  $V_2$  vindt men hieruit:

$$p = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1^2 + V_2^2} \dots \dots \dots (9)$$

Volgens de tweede hypothese wordt:

$$m_1 = \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha_1}}, \quad m_2 = \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2}{s_2^2 \sin^2 \alpha_1}}$$

Daar nu  $p$  in elk geval zeer klein is, moeten  $m_1$  en  $m_2$ , en dus ook  $s_1$  en  $s_2$  weinig van elkaar verschillen. Daarom stelt EISENLOHR:

$$\frac{\lambda_1}{s_1} = t + u, \quad \frac{\lambda_1}{s_2} = t - u,$$

waarin  $u$  zeer klein is. Met verwaarloozing der hoogere machten van  $u$  vindt men dan:

$$p = \frac{2u \sin \alpha}{tV \sin^2 \alpha + t^2} \dots \dots \dots (10)$$

Eindelijk heeft CAUCHY 1) nog een andere waarde voor  $p$  gevonden, n.l.:

$$p = \varepsilon \sin \alpha_1, \quad \dots \dots \dots (11)$$

waarin  $\varepsilon$  eene zeer kleine constante, de zoogenaamde elliptici-teits-coëfficiënt is.

De eerste hypothese brengt mee dat  $V$  groot is vergeleken met  $v$ , daartoe moet dus  $B$  groot zijn vergeleken met  $A$ ; verder moet  $p$  zeer klein zijn en dus volgens (15)  $V_1$  weinig verschillen van  $V_2$ , hetgeen men bereikt door  $B$  voor alle stoffen nagenoeg gelijk te nemen.

1) Compt. Rend. T. 9. 1839.

Volgens de tweede hypothese moet  $V$  imaginair, dus  $A+B$  negatief zijn. Bij de volslagen onbekendheid met de beide constanten  $A$  en  $B$ , waarin wij verkeeren, klinkt de eene hypothese al even willekeurig als de andere.

De vergelijking der formules (9), (10) en (11) met de ervaring kan ons evenmin tot eene beslissing leiden. Eene vergelijking met de proeven van JAMIN is volbracht door EISENLOHR 1). Daarbij bleek nu dat zoowel eene constante waarde van  $p$ , die door (9) wordt opgeleverd, als de formules van CAUCHY en EISENLOHR aan de waarnemingen voldoen. Alleen meent EISENLOHR, dat zijne formule beter overeenstemt met de waarnemingen van HOLTZMANN over de draaiing van het polarisatievlak bij de diffractie, doch de theoretische beschouwingen, die hij daarbij over dit onderwerp voegt, komen mij voor onbevredigend te zijn.

Uit dit alles blijkt genoegzaam, dat de theorie van CAUCHY van het verschijnsel der elliptische polarisatie geen bevredigende verklaring kan geven. In het volgende hoofdstuk zal nu worden nagegaan in hoever men tot eene verklaring kan komen door invoering der longitudinale trillingen volgens de electro-magnetische theorie van het licht, die in zoovele opzichten de voorkeur verdient boven de oude theorie, vooral wat betreft de grensvoorwaarden.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 104.

Kurz. Pogg. Ann. Bd. 108.

## TWEEDE HOOFDSTUK.

### INVLOED DER LONGITUDINALE TRILLINGEN VOLGENS DE ELECTROMAGNETISCHE THEORIE VAN HET LICHT.

§ 1. De bewegingsvergelijkingen der electriciteit, die het verband uitdrukken tusschen eene electromotorische kracht en de uitwerking, die door haar wordt teweeggebracht, zijn in haar meest algemeene gedaante door HELMHOLTZ opgesteld. 1).

Werkt eene electromotorische kracht op een geleider der electriciteit, dan veroorzaakt zij daarin een electrischen stroom, waarvan de componenten volgens de wet van OHM evenredig zijn met die der electromotorische kracht. Noemt men dus de componenten van den geleidingsstroom  $u$ ,  $v$  en  $w$ , die der electromotorische kracht  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ , en den weêrstand van den geleider  $z$ , dan heeft men de drie vergelijkingen:

$$u = \frac{X}{z}, \quad v = \frac{Y}{z}, \quad w = \frac{Z}{z} \quad . . . . (1)$$

Geheel anders werkt eene electromotorische kracht op een

---

1) Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern. Crelle's Journal, 72. (1870).

isolator; volgens de theorie van FARADAY brengt zij daarin eene scheiding der beide electriciteiten tot op zeer kleine afstanden te weeg, waardoor in den isolator electriche momenten ontstaan; een verschijnsel, dat den naam draagt van diëlectrische polarisatie. Dit gedrag der isolatoren heeft de grootste overeenkomst met dat der magnetiseerbare lichamen onder den invloed van magnetische krachten; men kan ook hier het moment per ruimteenheid aangeven, waarvan de componenten nu evenredig zullen zijn met die der electromotorische kracht. Noemt men dus de componenten der diëlectrische polarisatie  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$ , dan is:

$$\xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z, \quad . . . . (2)$$

waarin  $\varepsilon$  eene constante voorstelt, die den naam draagt van constante der diëlectrische polarisatie.

In een willekeurig electricch veld bestaat de electromotorische kracht uit drie deelen. Het eerste deel zou men kunnen noemen de electrostatische kracht; de componenten hiervan zijn de differentiaalquotienten der potentiaalfunctie  $\varphi$ , met het omgekeerde teeken genomen.

Het tweede deel is de electromotorische kracht der inductie en met het oog op de toepassingen, die van de bewegingsvergelijkingen gemaakt zullen worden, komt hier alleen ter sprake de inductie, die het gevolg is van intensiteitsveranderingen. De electromotorische kracht in een bepaald punt, in eene richting  $h$ , voortvloeiende uit de verandering der intensiteit  $i$  van een gesloten stroom  $s$ , is:

$$F_h = - A^2 \frac{\partial Q}{\partial t},$$

wanneer:

$$Q = i \int \frac{\cos(h, ds)}{r} ds. . . . . (3)$$

Hierbij is ondersteld, dat de stroomsterkte in electrostatische

maat is uitgedrukt, terwijl  $A$  eene constante is: de verhouding der electrostatische en electromagnetische eenheden van stroomsterkte. Wil men hieruit besluiten tot de electromotorische kracht  $f_h$ , afkomstig van intensiteitsveranderingen in een stroomelement  $ds$ , dan is het niet voldoende, het integraalteeken weg te laten, want men kan nog termen toevoegen, die bij de integratie over een gesloten stroom wegvallen. De meest algemeene vorm, dien de inductiewet daardoor kan aannemen, is:

$$f_h = - A^2 \frac{\partial q}{\partial t},$$

$$q = i ds \left\{ \frac{\cos(h, ds)}{r} + \frac{\partial^2 F(r)}{\partial h \partial s} \right\} \dots (4)$$

HELMHOLTZ stelt nu:

$$F(r) = - \frac{1-k}{2} r. \dots (5)$$

en bereikt daarmede, dat de toegevoegde correctieterm eene inductiewerking voorstelt, die omgekeerd evenredig is met den afstand, evenals de eerste term. Substitueert men toch de waarde van  $F(r)$  uit (5) in (4), dan wordt:

$$q = \frac{i ds}{r} \left\{ \frac{1+k}{2} \cos(h, ds) - \frac{1-k}{2} \cos(r, h) \cos(r, ds) \right\} (6)$$

Door dezen vorm der inductiewet onderscheiden zich de bewegingsvergelijkingen van HELMHOLTZ van die, welke door KIRCHHOFF en MAXWELL zijn opgesteld. Vergelijkt men de drie theoriën met elkander, dan blijkt dat die van HELMHOLTZ de meest algemeene is, want KIRCHHOFF maakt gebruik van de electro-dynamische grondwet van WEBER en de inductiewet, die hieruit volgt, kan uit (6) worden afgeleid door daarin  $k = -1$  te stellen. De theorie van MAXWELL berust op beschouwingen van geheel anderen aard; men komt echter tot zijne bewe-



gingsvergelijkingen door in die van HELMHOLTZ  $k = 0$  te stellen.

Het derde gedeelte der electromotorische kracht is afkomstig van eene veranderlijke magnetisatie, die in sommige lichamen in het electromagnetische veld kan heerschen. De berekening hiervan wordt tot die van het vorige gedeelte teruggebracht door gebruik te maken van de eigenschap, dat een magneet te vervangen is door een stelsel gesloten stroomen.

Behalve eene electromotorische kracht bestaat ook in ieder punt van het electromagnetische veld eene magnetische kracht, die deels door de magnetische lichamen, deels door de stroomverdeeling wordt teweeggebracht. Deze kracht heeft ten gevolge, dat eene magnetische polarisatie wordt opgewekt in lichamen, die daarvoor vatbaar zijn. De componenten dezer magnetische polarisatie  $(\lambda, \mu, \nu)$  zijn nu weêr evenredig met die der magnetische kracht  $(L, M, N)$ , zoodat men heeft

$$\lambda = \vartheta L, \mu = \vartheta M, \nu = \vartheta N. \dots (7)$$

waarin  $\vartheta$  de constante der magnetische polarisatie voorstelt; dit zijn de magnetische bewegingsvergelijkingen.

§ 2. Na de berekening der verschillende deelen, waaruit de electriche en de magnetische krachten bestaan, heeft HELMHOLTZ aangetoond, dat de bewegingsvergelijkingen den volgenden vorm aannemen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) &= A(1 + 4\pi\vartheta) \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) &= A(1 + 4\pi\vartheta) \frac{\partial M}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) &= A(1 + 4\pi\vartheta) \frac{\partial N}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) = -\Delta q + A^2 k \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \text{ II}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[ \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{4\pi}{z \varepsilon} \xi \right] \\
 \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[ \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{4\pi}{z \varepsilon} \eta \right] \\
 \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[ \frac{\partial^2 q}{\partial z \partial t} - 4\pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{4\pi}{z \varepsilon} \zeta \right]
 \end{aligned} \right\} \text{III} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad \dots \text{IV}$$

Deze vergelijkingen bepalen echter het vraagstuk slechts, wanneer zij gecombineerd worden met de volgende voorwaarden, die aan het grensvlak van twee middenstoffen vervuld moeten zijn:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\xi_1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_1 &= \frac{\xi_2}{\varepsilon_2} + \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_2 \\
 \frac{\eta_1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)_1 &= \frac{\eta_2}{\varepsilon_2} + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)_2 \\
 \frac{\zeta_1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)_1 &= \frac{\zeta_2}{\varepsilon_2} + \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)_2
 \end{aligned} \right\} \text{A} \quad \left. \begin{aligned}
 L_1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_1 &= L_2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_2 \\
 M_1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_1 &= M_2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_2 \\
 N_1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_1 &= N_2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_2
 \end{aligned} \right\} \text{B} \quad (9)$$

waarin de indices 1 en 2 op de beide middenstoffen betrekking hebben en  $z$  de magnetische potentiaalfunctie voorstelt; dit zijn de grensvoorwaarden, waarvan wij gebruik zullen moeten maken bij de berekening der intensiteit van het teruggekaatste licht.

De vergelijkingen (8) worden veel vereenvoudigd, wanneer men ze toepast op een volkomen isolator, die homogeen is, want dan wordt  $z = \infty$ , terwijl  $\varepsilon$  overal buiten de differentiaal-teekens treedt. Elimineert men daarna  $L$ ,  $M$ ,  $N$  en  $q$ , dan vindt men:

$$\begin{aligned}
 \Delta \xi &= R^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \Delta \eta &= R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (10) \\
 \Delta \zeta &= R^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial z},
 \end{aligned}$$

waarin:

$$P = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, R^2 = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2, S = 1 - \frac{(1+4\pi\varepsilon)(1+4\pi\vartheta)}{k}$$

is.

Uit deze vergelijkingen, die dezelfde gedaante hebben als de bewegingsvergelijkingen voor oneindig kleine verplaatsingen in een veerkrachtig lichaam, volgt, dat in een isolator eene veranderlijke diëlectrische polarisatie kan heerschen, waarvan de componenten periodieke functiën zijn van de coördinaten en den tijd. Men kan dit verschijnsel bij analogie den naam geven van elektrische trillingen, die men dan evenals de trillingen in een veerkrachtig lichaam kan onderscheiden in transversale en longitudinale. De voortplantingssnelheid der transversale trillingen wordt nu:

$$v = \frac{1}{R} = \frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}},$$

die der longitudinale:

(11)

$$V = \frac{\sqrt{1-S}}{R} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon k}}.$$

Het is hierbij van belang op te merken, dat er een eenvoudig verband bestaat tusschen de richting der diëlectrische polarisatie en die der magnetiseerende kracht. Men verkrijgt dat het gemakkelijkst, door te onderzoeken op welke wijze zich in den isolator transversale trillingen kunnen voortplanten, b. v. volgens de  $x$ -as, terwijl de trillingsrichting overal evenwijdig aan de  $y$ -as is; dan heeft men:

$$\xi = 0, \quad \eta = a \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} + p \right), \quad \zeta = 0.$$

Substitueert men deze waarden in de vergelijkingen (8), toegepast op een homogenen isolator, dan geven de vergelijkingen I:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = -4\pi A v \eta,$$

de vergelijking II geeft  $\varphi = 0$ , terwijl aan de overigen van zelf voldaan is. De magnetiseerende kracht staat dus overal loodrecht op de richting der dielectrische polarisatie en wel zoodanig, dat wanneer men zich geplaatst denkt aan die zijde van het golffront, vanwaar de trillende beweging komt, eene draaiing van de dielectrische polarisatie naar de magnetiseerende kracht de richting heeft van de beweging der wijzers van een uurwerk.

Evenzoo kan men te werk gaan met eene voortplanting van longitudinale trillingen volgens de  $x$ -as; daartoe heeft men aan te nemen:

$$\xi = b \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{V} + p \right), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

en vindt dan:

$$L = M = N = 0, \quad \varphi = -2TVb \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{V} + p \right).$$

Bij de voortplanting van longitudinale trillingen treedt dus geen magnetiseerende kracht op, daarentegen heeft nu de potentiaalfunctie eene veranderlijke waarde. De reden hiervan is gemakkelijk in te zien, bij transversale trillingen treedt nergens vrije electriciteit op, de beweging komt hier overeen met een stelsel gesloten stroomen; bij longitudinale daarentegen wel.

De voortplantingssnelheid der longitudinale trillingen blijkt af te hangen van de constante  $k$ , zoodat men omtrent dezen bewegingstoestand geheel in het onzekere verkeert. Volgens de theorie van MAXWELL, die  $k = 0$  stelt, wordt  $V = \infty$ , hetgeen beteekent dat er geen longitudinale trillingen mogelijk zijn. Stelde men met WEBER  $k = -1$ , dan werd  $V$  imaginair en de longitudinale trillingen zouden den bewegingstoestand vormen, die op blz. 13 van het vorige hoofdstuk besproken werd.

§ 3. Omtrent de constante  $A$ , die in de beide voortplantingssnelheden voorkomt en waarvan de beteekenis vroeger reeds

werd aangegeven, moet nog worden opgemerkt, dat electro-magnetische metingen, die daarover in de lucht verricht worden, niet de juiste waarde zullen opleveren, ten gevolge van de vatbaarheid der lucht voor dielectrische en magnetische polarisatie. Noemt men de beide constanten voor de lucht  $\epsilon_0$  en  $\theta_0$ , dan is door HELMHOLTZ aangetoond, dat tusschen de werkelijke waarde  $A$  en de waargenomen waarde  $A'$  het volgende verband bestaat:

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1 + 4\pi\epsilon_0)(1 + 4\pi\theta_0)}}.$$

De voortplantingssnelheid van transversale elektrische trillingen in de lucht wordt nu:

$$v_0 = \frac{1}{A'} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \dots \dots \dots (12)$$

Reeds lang was het bekend, dat  $\frac{1}{A'}$  niet alleen wat de afmetingen betreft een snelheid voorstelt, maar ook in numerieke waarde met de voortplantingssnelheid van het licht op weinig na overeenstemt. Deze overeenstemming, gevoegd bij de gelijkheid in vorm der bewegingsvergelijkingen, gaf MAXWELL aanleiding tot zijne theorie, dat de lichtverschijnselen worden teweeggebracht door eene periodieke verstoring van het electrisch evenwicht; maar zooals uit (12) blijkt is het daarbij een vereischte  $\epsilon_0$  zeer groot aan te nemen, zoodat men  $\frac{1}{\epsilon_0}$  tegen de eenheid kan verwaarloozen. Deze onderstelling kan men werkelijk maken, daar het nooit mogelijk is  $\epsilon$  zelf experimenteel te bepalen, maar wel de uitdrukking:

$$K = \frac{1 + 4\pi\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon_0},$$

het specifiek induceerend vermogen, dat o. a. voorstelt

de verhouding tusschen de capaciteiten van een condensator, wanneer tusschen de bekleedsels in 't eene geval een stof met de constante  $\varepsilon$ , in 't andere geval lucht voorkomt. Deze grootheid is voor vaste lichamen en voor vloeistoffen bepaald; neemt men nu in aanmerking, dat daarbij voor  $K$  steeds waarden gevonden zijn 1) grooter dan 1, dan blijkt dat voor die stoffen  $\varepsilon$  nog aanmerkelijk grooter moet zijn dan voor de lucht. Voor gassen neemt men de verhouding bij het specifiek induceerend vermogen met betrekking tot het luchtledige; daar men nu voor de lucht eene waarde van  $K$  gevonden heeft, die weinig van 1 verschilt, moet men aan het luchtledige ook eene vatbaarheid voor dielectrische polarisatie toekennen, waarbij  $\varepsilon$  weinig verschilt van  $\varepsilon_0$ . Hiermede is tevens de voortplanting der lichtbeweging in het luchtledige verklaard.

Bij de overige gassen wijkt  $K$  ook weinig van de eenheid af 2), derhalve verschilt hierbij de waarde van  $\varepsilon$  niet veel van die in 't luchtledige en in de lucht; door een en ander zijn wij dus gerechtigd, de onderstelling omtrent de groote waarde van  $\varepsilon$  tot alle stoffen uit te strekken. Deze onderstelling vindt nog een grooten steun in het verband, dat volgens de theorie van MAXWELL tusschen den brekingsindex eener stof en haar specifiek induceerend vermogen bestaan moet. Men heeft toch:

$$n = \frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi\theta)}{4\pi\varepsilon_0(1+4\pi\theta_0)'}}$$

waarbij  $v_0$ ,  $\varepsilon_0$  en  $\theta_0$  voor lucht gelden; nu heeft men vooreerst opgemerkt, dat bij alle onderzochte dielectrische stoffen de verhouding  $\frac{1+4\pi\theta}{1+4\pi\theta_0}$  zeer weinig van de eenheid verschilt,

1) Boltzmann. Pogg. Ann. 151. 153.

2) Boltzmann. Pogg. Ann. 155.

en daardoor kan men stellen:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}},$$

een vorm, dien wij in 't vervolg steeds zullen gebruiken, terwijl wij dan tevens moeten aannemen dat  $\vartheta$  voor alle stoffen dezelfde waarde heeft en voor de formules is het 't eenvoudigst  $\vartheta = 0$  te stellen, dus geheel van de magnetische eigenschappen af te zien. Maar verder kan men ook, wanneer  $\varepsilon$  werkelijk voor alle stoffen zeer groot is, stellen:

$$n = \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon_0}} = \sqrt{K}$$

en het is deze betrekking, die door talrijke proefnemingen van BOLTZMANN en anderen 1) bewezen is, bij benadering juist te zijn, al blijven dan ook nog vele onverklaarde afwijkingen bestaan.

§ 4. De theorie van MAXWELL komt in zoover overeen met de oude theorie, dat zij het licht beschouwt als eene verstoring, die periodiek verandert met tijd en plaats; zij is dus ook eene undulatietheorie. Het verschil bestaat in den aard der verstoring, die door MAXWELL wordt opgevat als eene veranderlijke dielectrische polarisatie. Voor deze opvatting pleiten reeds de beschouwingen der vorige §; bovendien vond zij eene bevestiging in de wijze, waarop de formules van FRESNEL uit haar kunnen worden afgeleid 2). Deze afleiding zal hier in 't kort worden weergegeven met inachtneming van den invloed der longitudinale trillingen. Daartoe beschouwen wij weér twee midden-

1) Boltzmann, Pogg. Ann. 151, 152, 153; Schiller, *ibid.* 152; Silow, *ibid.* 156; Gordon, Proc. Royal Soc. Lond. 28.

2) H. A. Lorentz. De theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Arnhem 1875.

stoffen, welker grensvlak wij tot  $yz$ -vlak kiezen, met de  $x$ -as naar de zijde van het tweede medium. De grensvoorwaarden A van (9) worden dan:

$$\frac{\xi_1}{\varepsilon_1} - \frac{\xi_2}{\varepsilon_2} = - \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right\}, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2,$$

want  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  en  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  zijn van zelf doorlopend; de voorwaarden B geven hier:

$$L_1 - L_2 = - \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_2 \right\}, \quad M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2.$$

Bovendien moet de potentiaalfunctie aan het grensvlak doorlopend zijn, terwijl haar differentiaalquotient naar de normaal een sprong maakt, die op de volgende wijze samenhangt met de vlaktedichtheid  $\sigma$  der electriciteit:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 = -4\pi\sigma. \quad \dots \quad (13)$$

In een isolator kan men de diëlectrische polarisatie vervangen door een zekere ruimtelading en door eene vlaktelading, waarvan de dichtheid is: de component der diëlectrische polarisatie langs de normaal. Past men dit toe op (13), dan wordt deze vergelijking:

$$\xi_1 - \xi_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right\}.$$

Evenzoo vindt men voor de magnetische polarisatie de grensvoorwaarde:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_2 \right\},$$

of:

$$\vartheta_1 L_1 - \vartheta_2 L_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_2 \right\}.$$

Door eliminatie van  $\varphi$  en  $Z$  kan men de gezamenlijke grensvoorwaarden nu in dezen vorm schrijven:



$$\frac{1 + 4\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \xi_1 = \frac{1 + 4\pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \xi_2, \quad \frac{\eta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\eta_2}{\varepsilon_2}, \quad \frac{\zeta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\zeta_2}{\varepsilon_2},$$

$$(1 + 4\pi \theta_1) L_1 = (1 + 4\pi \theta_2) L_2, \quad M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2,$$

waarbij nog komt de doorlopendheid van  $\varphi$ .

§ 5. In de eerste plaats behandelen wij het geval, dat de trillingen loodrecht op het invalsvlak staan; dan worden de symbolische uitdrukkingen voor het invallende licht:

$$\left. \begin{aligned} [\eta_1] &= e^{-i\psi_1} \\ [L_1] &= 4\pi A v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [N_1] &= -4\pi A v_1 \cos \alpha_1 e^{-i\psi_1} \end{aligned} \right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

voor het teruggekaatste licht:

$$\left. \begin{aligned} [\eta_1'] &= a_1 e^{-i\psi_1'} \\ [L_1'] &= 4\pi A v_1 a_1 \sin \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [N_1'] &= 4\pi A v_1 a_1 \cos \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1' - z \sin \alpha_1'}{v_1} + p \right),$$

voor het gebroken licht:

$$\left. \begin{aligned} [\eta_2] &= a_2 e^{-i\psi_2} \\ [L_2] &= 4\pi A v_2 a_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [N_2] &= -4\pi A v_2 a_2 \cos \alpha_2 e^{-i\psi_2} \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right).$$

Hierin zijn de waarden van  $p$  voor de drie lichtbundels gelijkgesteld, omdat eene phaseverandering van zelf uit de vormen voor  $a_1$  en  $a_2$ , die wij zullen vinden, zal voortvloeien. De toepassing der grensvoorwaarden op bovenstaande uitdrukkingen wordt zeer vereenvoudigd, wanneer wij opmerken dat volgens hetgeen in het begin der vorige § over de nieuwe theorie gezegd is de gewone wetten der terugkaatsing en breking hier op dezelfde wijze kunnen worden afgeleid als in het vorige hoofdstuk. Dit geeft ons:

$$\sin \alpha_1' = \sin \alpha_1, \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

waaruit volgt, dat voor  $x = 0$  de waarde van  $\psi$  voor de drie lichtbundels dezelfde is.

Nu is vooreerst overal

$$\xi = \zeta = M = \eta = 0,$$

dus aan alle grensvoorwaarden is voldaan, behalve aan die, welke op  $\eta$ ,  $L$  en  $N$  betrekking hebben. De doorloopenheid van  $\frac{\eta}{x}$  geeft nu verder voor  $x = 0$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} e^{-i\psi_1} + \frac{a_1}{\varepsilon_1} e^{-i\psi_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{-i\psi_2},$$

dus:

$$\frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2} \dots \dots \dots (14)$$

De doorloopenheid van  $L$  levert de vergelijking:

$$v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} + a_1 v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1'} = a_2 v_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2},$$

of:

$$(1 + a_1) v_1 \sin \alpha_1 = a_2 v_2 \sin \alpha_2 \dots \dots (15)$$

Eindelijk geeft de doorloopenheid van  $N$ :

$$(1 - a_1) v_1 \cos \alpha_1 = a_2 v_2 \cos \alpha_2 \dots \dots (16)$$

Gemakkelijk toont men aan, dat (15) hetzelfde uitdrukt (14); men heeft toch:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

en dus met het oog op de wet der breking:

$$\frac{v_1 \sin \alpha_1}{v_2 \sin \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Uit (15) en (16) kan  $a_1$  worden bepaald; men vindt daarvoor:

$$a_1 = - \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (17)$$

§ 6. Is de trillingsrichting in het invalsvlak gelegen, dan wordt het invallende licht bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_1] &= -\sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [\zeta_1] &= \cos \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [M_1] &= 4\pi A v_1 e^{-i\psi_1} \end{aligned} \right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right).$$

De teruggekaatste beweging kan nu behalve transversale trillingen ook longitudinale bevatten; de transversale worden bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_1'] &= -a_1 \sin \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [\zeta_1'] &= -a_1 \cos \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [M_1'] &= 4\pi A v_1 a_1 e^{-i\psi_1'} \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1' - z \sin \alpha_1'}{v_1} + p \right),$$

de longitudinale trillingen door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_1''] &= -b_1 \cos \beta_1 e^{-i\psi_1''} \\ [\zeta_1''] &= -b_1 \sin \beta_1 e^{-i\psi_1''} \\ [\varphi_1''] &= -2iT V_1 b_1 e^{-i\psi_1''} \\ [M_1''] &= 0 \end{aligned} \right\} \psi_2'' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \beta_1 - z \sin \beta_1}{V_1} + p \right),$$

waarin  $\alpha_1'$  en  $\beta$  beiden scherp genomen zijn.

In het tweede medium kunnen ook transversale en longitudinale trillingen voorkomen; de eersten worden bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_2] &= -a_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [\zeta_2] &= a_2 \cos \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [M_2] &= 4\pi A v_2 a_2 e^{-i\psi_2} \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right),$$

de longitudinale door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_2'] &= b_2 \cos \beta_2 e^{-i\psi_2'} \\ [\zeta_2'] &= b_2 \sin \beta_2 e^{-i\psi_2'} \\ [\varphi_2'] &= -2iT V_2 b_2 e^{-i\psi_2'} \\ [M_2'] &= 0 \end{aligned} \right\} \psi_2' = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \beta_2 + z \sin \beta_2}{V_2} + p \right).$$

Evenals in het vorige geval kan men aantoonen, dat aan het grensvlak de waarde van  $\psi$  voor de verschillende lichtbundels overal dezelfde moet zijn. Vooreerst moet nu de potentiaalfunctie doorlopend zijn; dit geeft:

$$b_1 V_1 = b_2 V_2. \quad \dots \quad (18)$$

Ten tweede moet doorlopend zijn:  $\frac{1+4\pi\varepsilon}{\varepsilon} \xi$ , waaruit de vergelijking:

$$\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \left[ -(1+a_1) \sin \alpha_1 - b_1 \cos \beta_1 \right] = \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left[ -a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2 \right] \quad (19)$$

ontstaat. Ten derde moet  $\frac{\xi}{\varepsilon}$  doorlopend zijn; dit geeft

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \left[ (1-a_1) \cos \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 \right] = \frac{1}{\varepsilon_2} \left[ a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2 \right]. \quad (20)$$

En eindelijk volgt uit de doorlopendheid van  $M$ :

$$(1+a_1) v_1 = a_2 v_2,$$

of:

$$(1+a_1) \sin \alpha_1 = a_2 \sin \alpha_2, \quad \dots \quad (21)$$

want de wet der breking brengt hier mede, dat:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_1}{V_1} = \frac{\sin \beta_2}{V_2} \quad \dots \quad (22)$$

is.

Vergelijkt men (18) met (22), dan blijkt dat:

$$b_1 \sin \beta_1 = b_2 \sin' \beta_2 \quad \dots \quad (23)$$

is, en nu kan men met behulp van (21) en (23),  $b_2$  en  $a_2$  elimineeren uit (19) en (20). Men vindt dan uit (19):

$$\left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) (1+a_1) \sin \alpha_1 = -b_1 \sin \beta_1 \left[ \frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cot \beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cot \beta_2 \right].$$

Uit (20) volgt op dezelfde wijze:

$$\frac{1-a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 - \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \sin \alpha_1 = b_1 \sin \beta_1 \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Elimineert men nu  $b_1 \sin \beta_1$  uit de beide laatste vergelijkingen, dan wordt:

$$= \left[ \frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cot \beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cot \beta_2 \right] \left( \frac{1-a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 - \frac{1+a_1}{\varepsilon_2} \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \sin \alpha_1 \right)$$

Hieruit kan eindelijk  $a_1$  worden opgelost; men vindt daarvoor:

$$a_1 = \frac{1 - q \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + q \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \cdot \cdot \quad (24)$$

waarin:

$$q = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cot \beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cot \beta_2}$$

is, en het is nu slechts de vraag, welke waarde  $q$  verkrijgt.

Vooreerst is:

$$\frac{\sin \beta_1}{V_1} = \frac{\sin \beta_2}{V_2} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1},$$

dus:

$$\sin \beta_1 = \frac{V_1}{v_1} \sin \alpha_1, \quad \sin \beta_2 = \frac{V_2}{v_1} \sin \alpha_1.$$

De voortplantingssnelheden, die in (11) zijn aangegeven, leveren, als men van de magnetische eigenschappen der middestoffen afziet:

$$\frac{V_1}{v_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{k}}, \quad \frac{V_2}{v_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_2}{k} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

en voor de tweede van deze uitdrukkingen mag men op dezelfde wijze als bij de bepaling van den brekingsindex is aangetoond, schrijven:

$$\frac{V_2}{v_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{k}}.$$

Hiermede wordt nu:

$$\sin \beta_1 = \sin \beta_2 = \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{k}}$$

en

$$q = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{\frac{1}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} - 1}$$

Het blijkt, dat deze uitdrukking afhangt van de waarde der constante  $k$ . Door HELMHOLTZ is in zijne vroeger genoemde verhandeling aangetoond, dat men genoodzaakt is  $k$  positief aan te nemen, omdat anders het evenwicht der electriciteit labiel zou zijn. Doen wij dit, en maken wij dan tegelijk de onderstelling, dat de waarde van  $k$  niet al te groot is, dan zal met het oog op hetgeen vroeger omtrent  $\varepsilon_1$  gezegd is, de wortelvorm  $i$  imaginair worden, zoodat:

$$q = -i \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1}}$$

wordt; tevens kunnen wij dan den wortelvorm ontwikkelen, waardoor wij verkrijgen:

$$q = -i \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} - \text{enz.} \right).$$

Niettegenstaande de bewijsvoering van HELMHOLTZ meenen sommigen, dat de waarde van  $k$  toch wel negatief kan zijn en zoodra men dit aanneemt, wordt de wortelvorm in ieder geval imaginair. Om echter den wortelvorm op de boven aangegeven wijze te kunnen ontwikkelen, moet men weêr aannemen, dat de absolute waarde van  $k$  klein is in vergelijking van  $\varepsilon_1$ .

Den coëfficiënt, die in den voor  $q$  gevonden vorm optreedt, kan men aldus transformeeren:

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1 + 8\pi\varepsilon_2};$$

maar wegens de groote waarde van  $\varepsilon_2$  mag men ongetwijfeld  $n^2 + 1$  tegen  $8\pi\varepsilon_2$  weglaten en verkrijgt dan:

$$\frac{n^2 - 1}{8\pi\varepsilon_2} = p. \dots \dots \dots (25)$$

Verwaarloost men nu in  $q$  de termen, die van de tweede of hogere orde van  $\frac{k}{\varepsilon}$  zijn, dan verkrijgt men:

$$q = -ip$$

en

$$a_1 = \frac{1 + ip \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 - ip \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Om dit nog verder te vereenvoudigen, stelle men:

$$p \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tg} l, \quad p \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg} m; \quad (26)$$

dan wordt na eenige herleiding:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\cos m}{\cos l} e^{i(l+m)}.$$

De symbolische uitdrukking voor de diëlectrische polarisatie in het teruggekaatste licht wordt dus voor trillingen in het invalsvlak:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\cos m}{\cos l} e^{-i(\psi_1' - l - m)}.$$

Nemen wij hiervan het reële gedeelte en noemen wij daarbij de amplitudo  $a_s$ , dan verkrijgen wij:

$$a_s \cos(\psi_1' - l - m).$$

Hieruit blijkt, dat de trillingen in het invalsvlak eene phasevertraging  $l + m$  ondergaan hebben, terwijl de amplitudo bepaald wordt door:

$$a_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{1 + p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

## DERDE HOOFDSTUK.

---

### INVLOED VAN EEN GELEIDELIJKEN OVERGANG AAN HET GRENSVLAK.

§ 1. De waargenomen afwijkingen van de formules van FRESNEL kunnen ook verklaard worden uit den invloed van dichtheidsveranderingen aan het grensvlak, waarop het eerst de aandacht werd gevestigd door LORENZ 1). Tot hiertoe werd stilzwijgend aangenomen, dat de beide middenstoffen, aan welker grensvlak het licht wordt teruggekaatst, geheel homogeen waren en dat bij het grensvlak de eigenschappen van de eene middenstof plotseling in die van de andere overgingen. Dit is echter onjuist, want waar twee middenstoffen elkander aanraken, worden van weërszijden moleculaire krachten uitgeoefend, die ten gevolge moeten hebben, dat in de onmiddellijke nabijheid van het grensvlak de eigenschappen zeer snel veranderen. Men kan de middenstoffen eerst als homogeen beschouwen op een afstand van het grensvlak, die in verband zal staan met den afstand, waarop de moleculaire krachten nog merkbare waarde

---

1) Pogg. Ann. Bd. III.



hebben. Deze laatste afstand is nu zeer gering en dus zal ook de invloed, dien de dishomogeneïteit aan het grensvlak op verschillende verschijnselen, b.v. op de terugkaatsing van het licht, uitoefent, slechts klein zijn. Neemt men echter in aanmerking, dat de afwijkingen van de formules van FRESNEL, die men heeft waargenomen, insgelijks zeer kleine grootheden zijn, zoo zelfs, dat men aanvankelijk meende, die formules als volkomen juist te mogen beschouwen, dan heeft dunkt mij een poging om den bovengenoemden invloed in rekening te brengen, evenveel recht van bestaan als de inachtneming der longitudinale trillingen.

§ 2. Ofschoon wij weten, dat de toestand der beide middenstoffen en met name de dichtheid bij het grensvlak anders is dan op eenigen afstand daarvan, zijn wij met de wijze, waarop die verandering plaats heeft, geheel onbekend. Alleen is het duidelijk, dat in een vlak, op geringen afstand evenwijdig aan het grensvlak gebracht, de toestand overal dezelfde is, zoodat alle physische eigenschappen functiën zijn van den afstand tot het grensvlak.

Verder kan men zich twee verschillende voorstellingen maken van de wijze, waarop de eigenschappen van de eene middenstof in die van de andere overgaan. Ten eerste kan de overgang volkomen geleidelijk zijn; dit zal gebeuren wanneer de dichtheidsveranderingen aan beide zijden van het grensvlak zoo sterk zijn, dat daardoor de eigenschappen als het ware tot elkander gebracht worden en de plotselinge sprong geheel wordt opgeheven. Ten tweede kan het gebeuren, dat wel is waar de eigenschappen aan het grensvlak dichter tot elkander naderen, maar dat aan het grensvlak zelf nog eene discontinuïteit blijft bestaan, al is die dan ook kleiner dan het geval zou geweest zijn als de dichtheidsveranderingen niet bestonden. De tweede

beschouwingwijze klinkt algemeener dan de eerste en bovendien, hoe men zich ook de veranderingen voorstelt aan het grensvlak van een vast lichaam en een vloeistof of een gas, altijd zal er één vlak aan te wijzen zijn, waar de eene middenstof eindigt en de andere begint; bij dit vlak bestaat dan feitelijk eene discontinuïteit. Dit sluit echter de mogelijkheid van een volkomen geleidelijken overgang niet uit en o. a. zou deze zeer goed kunnen voorkomen aan het grensvlak van eene vloeistof en een gas. Ten gevolge toch van de verdamping aan het oppervlak der vloeistof heeft men aan de eene zijde van dit oppervlak zoowel vloeistof- als gasmoleculen. Omgekeerd echter zullen de gasmoleculen bij hunne beweging ook in de vloeistof dringen, m. a. w. de vloeistof zal het gas eenigszins absorbeeren, zoodat ook aan de andere zijde de beide soorten van moleculen aanwezig zijn. Nu komen nog de onderlinge moleculaire krachten in 't spel en daarbij kan het gebeuren, dat alle discontinuïteit verdwijnt. Er bestaat dus eenige grond om aan te nemen, dat aan het grensvlak van vaste lichamen de tweede wijze van overgang plaats heeft; aan dat van een vloeistof en een gas daarentegen de eerste. Intusschen zal het blijken, dat de beschouwingen in dit hoofdstuk onafhankelijk zijn van deze onderstelling.

§ 3. Evenals vroeger kiezen wij de  $x$ -as loodrecht op het grensvlak en gericht naar de zijde van de tweede middenstof. Tot grensvlak nemen wij in het eene geval het vlak, waarbij de discontinuïteit bestaat, in het andere geval kan het willekeurig worden aangenomen. Zooals reeds werd opgemerkt, kunnen de middenstoffen op een bepaalden afstand van het grensvlak als homogeen beschouwd worden. Voor de eene middenstof, die wij met den index 1 zullen aanduiden, zij deze afstand  $\delta_1$ ; voor de andere  $\delta_2$ . Nu is het duidelijk, dat men vier deelen te

beschouwen heeft, n.l. een homogeen gedeelte tusschen de vlakken  $x = \infty$  en  $x = \delta_2$  en een tusschen  $x = -\infty$  en  $x = -\delta_1$ ; verder de grenslagen tusschen  $x = 0$  en  $x = -\delta_1$  en tusschen  $x = 0$  en  $x = \delta_2$ , die niet homogeen zijn.

Bij alle berekeningen der vorige § werd stilzwijgend ondersteld, dat de lichtbeweging b.v. in het eerste medium onveranderd mocht worden voortgezet tot aan het grensvlak, zoodat men bij de substitutie in de grensvoorwaarden slechts in de uitdrukkingen voor de verschillende lichtbundels  $x = 0$  had te stellen.

Uit het voorgaande blijkt echter, dat de lichtbeweging, in de grenslagen aangekomen, andere wetten zal volgen; wij moeten nu eerst deze wetten trachten op te sporen en daarna in de gevonden uitdrukkingen  $x = 0$  stellen. Maken wij daarbij gebruik van de bewegingsvergelijkingen, dan is het duidelijk, dat deze in de grenslagen anders zullen zijn dan in de homogene deelen. Voor de homogene deelen werden zij verkregen door in het stelsel (8) van het tweede hoofdstuk  $\varepsilon$  buiten de differentiaaltekens te brengen; daardoor ontstaat een stelsel gelijktijdige differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. In de grenslagen daarentegen is  $\varepsilon$  niet meer constant, waardoor de oplossing veel moeilijker wordt. Het zal echter blijken, dat men eene benaderde oplossing kan verkrijgen door gebruik te maken van de omstandigheid, dat de afstand, waarop de moleculaire krachten nog merkbare waarde hebben, klein is, vergeleken met de golf-lengte van het licht.

§ 4. In de eerste plaats behandelen wij het geval, dat de trillingsrichting loodrecht op het invalsvlak staat. De differentiaalvergelijkingen, die voor dit geval gelden, leiden wij af uit het stel (8) van het tweede hoofdstuk, waarin wij bovendien  $\phi = 0$  stellen en dus van de magnetische eigenschappen afzien;

daardoor worden de formules iets eenvoudiger, terwijl vroeger reeds is aangetoond, dat die vereenvoudiging werkelijk geoorloofd is. Men vindt dan:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial N}{\partial t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4\pi A \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

De laatste vergelijking kan uit de beide eersten worden afgeleid en een dezer drie vergelijkingen mag men dus weglaten; daartoe kiezen wij de eerste, die geen differentiaalquotient naar  $x$  bevat. Bovendien zullen wij in 't vervolg niet  $\eta$ , maar  $\frac{\eta}{\varepsilon}$  als onbekende beschouwen en daarvoor stellen  $\eta'$ , zoodat de vergelijkingen worden:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} = A \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z} + 4\pi A \varepsilon \frac{\partial \eta'}{\partial t}. \quad (1)$$

Is het medium, waarvoor deze vergelijkingen gelden, homogeen, dan zijn alle coëfficiënten constant en dan zal er dus eene bijzondere oplossing zijn, waarbij alle onbekenden een exponentiële factor van de gedaante:

$$e^{ux + wz + st + r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hebben; deze oplossing komt overeen met de reeds vroeger door ons gebruikte symbolische oplossing

$$e^{-i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha + z \sin \alpha}{v} + p \right)}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Is daarentegen het medium niet meer homogeen, dan wordt  $\varepsilon$  veranderlijk, dus geldt de oplossing (2) niet meer. Daar de grenslagen echter alleen dishomogeen zijn in de richting der  $x$ -as, zullen de grootheden, die de lichtbeweging bepalen nog op dezelfde wijze van  $y$  en  $z$  blijven afhangen, er zal dus eene oplossing zijn van de gedaante:

$$f(x) e^{wz + st + r}$$

en nu moet slechts  $f(x)$  uit de differentiaal-vergelijkingen worden bepaald. Met het oog op deze laatste oplossing kan men voor de vergelijkingen (1) schrijven:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} = A s N, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -w N, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = w L + 4\pi A s \varepsilon \eta', \quad (4)$$

waaruit dan  $\eta'$ ,  $L$  en  $N$  als functiën van  $x$  bepaald moeten worden, terwijl later deze oplossingen nog vermenigvuldigd moeten worden met den factor:

$$e^{wz + st + r}$$

Dezen factor zullen wij echter in 't vervolg weglaten, omdat  $w$ ,  $s$  en  $r$  krachtens de gewone wetten der breking toch voor het eerste en het tweede medium dezelfde waarden hebben; bij de substitutie in de grensvoorwaarden zou de factor dus toch wegvallen.

Voor wij de vergelijkingen (4) toepassen op de grenslagen, zullen wij ze eerst oplossen voor het eerste medium; dan zullen wij natuurlijk voor  $f(x)$  vinden  $e^{ux}$ , maar tevens zal daarbij blijken, hoe men moet handelen voor de grenslagen. Wij vermenigvuldigen de vergelijkingen (4), na daarin  $\varepsilon = \varepsilon_1$  gesteld te hebben, met onbepaalde factoren  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  en stellen:

$$4\pi A s \varepsilon_1 \nu = k \lambda, \quad w \nu = k \mu, \quad A s \lambda - w \mu = k \nu.$$

Door eliminatie van  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  volgen hieruit drie waarden voor  $k$ , n.l.

$$k_1 = \sqrt{4\pi A^2 s^2 \varepsilon_1 - w^2}, \quad k_2 = -\sqrt{4\pi A^2 s^2 \varepsilon_1 - w^2}, \quad k_3 = 0.$$

Overeenkomstig hiermede vindt men voor de verhoudingen der onbepaalde factoren:

$$\frac{\lambda_1}{4\pi A s \varepsilon_1} = \frac{\mu_1}{w} = \frac{\nu_1}{k_1}, \quad \frac{\lambda_2}{4\pi A s \varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{w} = \frac{\nu_2}{k_2}, \quad \frac{\lambda_3}{w} = \frac{\mu_3}{A s}, \quad \nu_3 = 0.$$

Telt men na de vermenigvuldiging met  $\lambda, \mu$  en  $\nu$  de vergelijkingen (4) op, dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \eta' + \mu L + \nu N) = k (\lambda \eta' + \mu L + \nu N)$$

en hieruit volgen drie integralen n.l.:

$$\begin{aligned} 4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_1 N &= C_1 e^{k_1 x}, \\ 4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_2 N &= C_2 e^{k_2 x}, \\ w \eta' + A s L &= C_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Lossen wij uit deze vergelijkingen  $\eta', N$  en  $L$  op dan vinden wij daarvoor:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{k_1 - k_2} (C_1 e^{k_1 x} - C_2 e^{k_2 x}), \\ \eta' &= \frac{1}{2} \frac{A s}{k_1^2} (C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}) - \frac{w}{k_1^2} C_3, \\ L &= \frac{4\pi A s \varepsilon_1}{k_1^2} C_3 - \frac{1}{2} \frac{w}{k_1^2} (C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}). \end{aligned} \quad (6)$$

Om nu den bewegingstoestand in de grenslaag van het eerste medium te leeren kennen, schrijven wij de vergelijkingen, die voor deze laag gelden, in dezen vorm:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} = A s N, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -w N, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = w L + 4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + 4\pi A s (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' \quad (7)$$

en vermenigvuldigen ze met dezelfde factoren  $\lambda, \mu$  en  $\nu$  als in het vorige geval; na optelling verkrijgen wij dan:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \eta' + \mu L + \nu N) = k (\lambda \eta' + \mu L + \nu N) + 4\pi A s \nu (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta'.$$

Het zou groote moeielijkheden opleveren, van deze vergelijking de integraal te vinden; in ieder geval echter kunnen wij er het volgende voor schrijven:

$$e^{-kx} (\lambda \eta' + \mu L + \nu N) = C + 4\pi A s \nu \int (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-kx} dx. \quad (8)$$

Vergelijkt men dit met de integralen (5), dan blijkt dat het enige verschil gelegen is in het optreden van een term naast

de constante. Deze term heeft het bezwaar, dat een der onbekenden onder het integraalteeken voorkomt; het zal echter blijken, dat bij het oplossen van  $\eta'$ ,  $L$  en  $N$  de invloed van dien term zóó gering wordt, dat wij voor  $\eta'$  onder het integraalteeken de waarde uit (6) mogen schrijven. De waarden van  $\eta'$ ,  $L$  en  $N$  in de grenslaag zullen zich dus daarin onderscheiden van de waarden (6), die voor het eerste medium gelden, dat bij de constanten in (6) nog functiën van  $x$  moeten gevoegd worden, die door dergelijke integralen als in (8) worden voorgesteld. 1)

Uit (8) vloeien nu 3 integralen voort, die men verkrijgt door de waarden van  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  te substitueeren n.l.:

$$\begin{aligned} (4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_1 N) e^{-k_1 x} &= C_1' + 4\pi A s k_1 \int (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_1 x} dx \\ (4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_2 N) e^{-k_2 x} &= C_2' + 4\pi A s k_2 \int (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_2 x} dx \quad (9) \\ w \eta' + A s L &= C_3'. \end{aligned}$$

De hierin voorkomende constanten zijn niet dezelfde als die in (5), maar men kan gemakkelijk een verband daartusschen vinden door op te merken dat de lichtbeweging in de grenslaag eene voortzetting is van die in het eerste medium, zoodat voor  $x = -\delta_1$  de integralen (5) en (9) in elkander moeten overgaan. Hieruit leidt men af:

$$\begin{aligned} (4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_1 N) e^{-k_1 x} &= C_1 + 4\pi A s k_1 \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_1 x} dx, \\ (4\pi A s \varepsilon_1 \eta' + w L + k_2 N) e^{-k_2 x} &= C_2 + 4\pi A s k_2 \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_2 x} dx \quad (10) \\ w \eta' + A s L &= C_3. \end{aligned}$$

1) Men zou de hier gevolgde methode dus kunnen noemen variatie van de constante. Eene dergelijke redeneering om de oplossing van vergelijkingen met veranderlijke coëfficiënten bij benadering terug te brengen tot die van vergelijkingen met constante coëfficiënten vindt men bij CAUCHY: Compt. Rend. T VIII p. 374.

Wij zouden nu de lichtbeweging in de grenslaag kunnen bepalen door naast de constanten in (6) de correctie-integralen uit (10) te stellen. Vooraf echter is het noodig op te merken dat in (6)  $C_1$  betrekking heeft op het invallende en  $C_2$  op het teruggekaatste licht, terwijl  $C_3$  zou wijzen op een golfstelsel, dat zich rakelings langs het grensvlak voortplant. Men kan echter aantonen, dat  $C_3 = 0$  gesteld moet worden; o. a. blijkt dit, wanneer men de waarden (6) en de overeenkomstige uitdrukkingen voor het tweede medium in de grensvoorwaarden substitueert. Verder zullen wij de vergelijkingen (6) in denzelfden vorm schrijven als in § 5 van het vorige hoofdstuk, waardoor wij voor de waarden van  $\eta'$ ,  $L$  en  $N$  in de grenslaag vinden:

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{\varepsilon_1} (e^{k_1 x} + a_1 e^{k_2 x}) + \frac{2\pi A^2 s^2}{k_1^2} \times \\ &\times \left[ k_1 e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_1 x} dx + k_2 e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_2 x} dx \right], \\ L &= 4\pi A v_1 \sin \alpha_1 (e^{k_1 x} + a_1 e^{k_2 x}) - \frac{2\pi A s w}{k_1^2} \times \\ &\times \left[ k_1 e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_1 x} dx + k_2 e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_2 x} dx \right], \\ N &= -4\pi A v_1 \cos \alpha_1 (e^{k_1 x} - a_1 e^{k_2 x}) + \frac{4\pi A s}{k_1 - k_2} \times \\ &\times \left[ k_1 e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_1 x} dx - k_2 e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' e^{-k_2 x} dx \right]. \end{aligned}$$

Voor  $s$ ,  $w$  en  $k$  voeren wij nu de oorspronkelijke waarden in, n.l.:

$$s = -i \frac{2\pi}{T}, \quad w = i \frac{2\pi \sin \alpha_1}{T v_1}, \quad k_1 = i \frac{2\pi \cos \alpha_1}{T v_1}, \quad k_2 = -i \frac{2\pi \cos \alpha_1}{T v_1},$$

zoodat:

$$k_1 x = i \frac{2\pi \cos \alpha_1}{\lambda_1} x$$

wordt.



Daar  $x$  onder het integraalteeken waarden verkrijgt tusschen 0 en  $\delta_1$ , is  $k_1 x$  op zijn hoogst:

$$i. 2\pi \cos \alpha_1 \frac{\delta_1}{\lambda_1}.$$

Maar  $\delta_1$  staat in verband met den afstand, waarop de moleculaire krachten nog eene merkbare waarde hebben, dus daar deze afstand zeer klein is vergeleken met de golflengte van het licht, wordt  $\frac{\delta_1}{\lambda_1}$  een kleine breuk. In het vervolg zullen wij van deze verhouding de tweede en hoogere machten weglaten; wij kunnen dus beginnen met onder de integraalteekens  $e^{k_1 x}$  tot de eerste macht van  $k_1 x$  te ontwikkelen. Stellen wij daarna  $x = 0$  met het oog op de grensvoorwaarden, dan vinden wij:

$$\eta_0' = \frac{1}{\varepsilon_1} \left[ (1 + a_1) + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' x dx \right],$$

$$L_0 = 4\pi A v_1 \sin \alpha_1 \left[ (1 + a_1) + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' x dx \right],$$

$$N_0 = -4\pi A v_1 \left[ (1 - a_1) \cos \alpha_1 + i \frac{2\pi}{\lambda_1} \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon - \varepsilon_1) \eta' dx \right].$$

Beschouwen wij vooreerst de correctietermen, die in  $\eta_0'$  en  $L_0$  voorkomen;  $(\varepsilon - \varepsilon_1) \eta'$  is daarin een eindige grootheid want  $\eta' = \frac{\eta}{\varepsilon}$ ; men kan dus eene middenwaarde van die grootheid buiten het integraalteeken brengen en het blijkt dan duidelijk, dat deze correctietermen van de orde  $\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1}\right)^2$  zijn en dus volgens het voorgaande weggelaten moeten worden. Evenzoo blijkt het, dat de correctieterm in  $N_0$  van de orde  $\frac{\delta_1}{\lambda_1}$  is, waaruit volgt, dat wij voor  $\eta'$  mogen schrijven:



waarin :

$$A_2 = \int_{\delta_2}^0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} dx \quad \text{is.}$$

De grensvoorwaarden, hier de doorloopendheid van  $\eta'$ ,  $L$  en  $N$ , geven nu :

$$\frac{1+a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2},$$

$$v_1 \sin \alpha_1 (1+a_1) = v_2 \sin \alpha_2 a_2,$$

$$v_1 \left[ (1-a_1) \cos \alpha_1 + i 2\pi (1+a_1) \frac{A_1}{\lambda_1} \right] = v_2 a_2 \left( \cos \alpha_2 + i 2\pi \frac{A_2}{\lambda_2} \right).$$

De eerste twee vergelijkingen komen op hetzelfde neer en uit de tweede en de derde vindt men na eliminatie van  $a_2$  :

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + ip}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + ip} \quad \dots \quad (12)$$

waarin :

$$p = 2\pi \left( \frac{A_2}{\lambda_2} \sin \alpha_1 - \frac{A_1}{\lambda_1} \sin \alpha_2 \right)$$

is.

Gemakkelijk overtuigt men zich, dat  $p$  van de orde  $\frac{\delta}{\lambda}$  is, zoodat men voor (12) kan schrijven :

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[ 1 + ip \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right],$$

of :

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{e^{i\varphi_p}}{\cos \varphi_p},$$

wanneer :

$$p \cdot \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \text{tg } \varphi_p \quad \dots \quad (13)$$

gesteld wordt.

Het teruggekaatste licht wordt nu volgens § 5 van het vorige hoofdstuk voorgesteld door :

$$[\eta_1'] = a_1 e^{-i\psi_1'}$$

en het bestaanbare gedeelte hiervan is thans :

$$\eta_1' = a_p \cdot \cos(\psi_1' - \varphi_p) \dots \dots \dots (14)$$

Hieruit blijkt, dat de trillingen, loodrecht op het invalsvlak eene phasevertraging  $\varphi_p$  ondergaan, terwijl de amplitudo bepaald wordt door:

$$a_p^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \text{tg}^2 \varphi_p) \dots \dots \dots (15)$$

Na eenige berekening vindt men dat de waarde van  $\text{tg} \varphi_p$  uit (13) aldus geschreven kan worden.

$$\text{tg} \varphi_p = \frac{4\pi}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1}{\lambda_1} (n^2 A_2 - A_1) \dots \dots \dots (16)$$

§ 5. Wij moeten nu het geval bespreken van de terugkaatsing van trillingen in het invalsvlak; vooraf echter zullen wij aan de vergelijkingen (8) van het tweede hoofdstuk eene vereenvoudiging aanbrengeu. Bij het nagaan van den invloed der dichtheidsveranderingen aan het grensvlak zullen wij n.l. de longitudinale trillingen buiten rekening laten en om nu de bewerking niet te samengesteld te maken, is het noodig de vergelijkingen dadelijk zoo in te richten, dat er geen longitudinale trillingen optreden. Dit bereiken wij door  $\frac{1}{\varepsilon}$  tegen de eenheid te verwaarloozen, waarna wij tevens  $q = 0$  mogen stellen. De vergelijkingen worden nu, daar  $\eta$ ,  $L$  en  $N$  in dit geval verdwijnen:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 4\pi A \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

De laatste vergelijking kan uit de beide voorgaanden worden afgeleid; men mag dus een dezer drie vergelijkingen weglaten; daartoe kiezen wij de eerste, die geen differentiaalquotient naar  $x$  bevat. Nemen wij verder als onbekenden aan  $\xi$ ,  $M$  en  $\frac{\zeta}{\varepsilon} = \zeta'$ , dan houden wij over:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial z} - A \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = -4\pi A \varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \zeta'}{\partial z}.$$

Zooals reeds in de vorige § werd aangetoond, kunnen wij hiervoor schrijven:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{w}{\varepsilon} \xi - A s M, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A s \varepsilon \zeta', \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -w \varepsilon \zeta'. \quad (17)$$

Op deze vergelijkingen moeten nu dezelfde bewerkingen worden toegepast als in de vorige §; wij kunnen dus volstaan, met in 't kort de uitkomsten aan te geven.

Vooreerst lossen wij de vergelijkingen (17) op voor het eerste medium dus na  $\varepsilon = \varepsilon_1$  gesteld te hebben; daartoe vermenigvuldigen wij met onbepaalde factoren en wel, de laatste met  $\lambda$ , de eerste met  $\mu$ , de tweede met  $\nu$  en stellen vervolgens:

$$\frac{w}{\varepsilon_1} \mu = k \lambda, \quad w \varepsilon_1 \lambda + 4\pi A s \varepsilon_1 \nu = -k \mu, \quad A s \mu = -k \nu.$$

Na eliminatie van  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  volgen hieruit drie waarden voor  $k$ , n.l.:

$$k_1 = \sqrt{4\pi A^2 s^2 \varepsilon_1 - w^2}, \quad k_2 = -\sqrt{4\pi A^2 s^2 \varepsilon_1 - w^2}, \quad k_3 = 0.$$

Overeenkomstig daarmede vindt men drie waarden voor de verhoudingen tusschen  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  n.l.:

$$\frac{\lambda_1}{\frac{w}{\varepsilon_1}} = \frac{\mu_1}{k_1} = \frac{\nu_1}{-A s}, \quad \frac{\lambda_2}{\frac{w}{\varepsilon_1}} = \frac{\mu_2}{k_2} = \frac{\nu_2}{-A s}, \quad \frac{\lambda_3}{-4\pi A s} = \frac{\nu_3}{w}, \quad \mu_3 = 0. \quad (18)$$

Na de vermenigvuldiging tellen wij de vergelijkingen op; dit geeft:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \xi + \mu \zeta' + \nu M) = k (\lambda \xi + \mu \zeta' + \nu M),$$

waarvoor men drie integralen vindt, n.l.:

$$\begin{aligned} \frac{w}{\varepsilon_1} \xi + k_1 \zeta' - A s M &= C_1 e^{k_1 x}, \\ \frac{w}{\varepsilon_1} \xi + k_2 \zeta' - A s M &= C_2 e^{k_2 x}, \quad \dots \quad (19) \\ -4\pi A s \xi + w M &= C_3. \end{aligned}$$

Lossen wij hieruit  $\xi$ ,  $\zeta'$  en  $M$  op, dan worden deze grootheden:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{\varepsilon_1}{k_1^2} \left[ \frac{1}{2} w \left( C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \right) + A s C_3 \right], \\ \zeta' &= \frac{1}{k_1 - k_2} \left( C_1 e^{k_1 x} - C_2 e^{k_2 x} \right), \quad \dots \dots \dots (20) \\ M &= -\frac{1}{k_1^2} \left[ w C_3 + 2\pi A s \varepsilon_1 \left( C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \right) \right].\end{aligned}$$

In de grenslaag tusschen  $x = 0$  en  $x = -\delta_1$ , wordt  $\varepsilon$  eene functie van  $x$ . Wij kunnen nu echter de vergelijkingen (17) in den volgenden vorm schrijven:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta'}{\partial x} &= \frac{w}{\varepsilon_1} \xi - A s M + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon \varepsilon_1} w \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -w \varepsilon_1 \zeta' + w (\varepsilon_1 - \varepsilon) \zeta' \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= -4\pi A s \varepsilon_1 \zeta' + 4\pi A s (\varepsilon_1 - \varepsilon) \zeta'.\end{aligned}$$

Deze vermenigvuldigen wij met dezelfde factoren  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$ , en tellen ze daarna op. Dan vinden wij:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \xi + \mu \zeta' + \nu M) = k (\lambda \xi + \mu \zeta' + \nu M) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left[ (\lambda w + 4\pi A s \nu) \zeta' + \frac{w}{\varepsilon \varepsilon_1} \mu \xi \right],$$

waaruit, na substitutie der waarden uit (18) devolgende integralen volgen:

$$\left. \begin{aligned}\left( \frac{w}{\varepsilon_1} \xi + k_1 \zeta' - A s M \right) e^{-k_1 x} &= C_1 + \frac{k_1}{\varepsilon_1 - \delta_1} \int_{\varepsilon_1 - \delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_1 \zeta' \right) e^{-k_1 x} dx, \\ \left( \frac{w}{\varepsilon_1} \xi + k_2 \zeta' - A s M \right) e^{-k_2 x} &= C_2 + \frac{k_2}{\varepsilon_1 - \delta_1} \int_{\varepsilon_1 - \delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_2 \zeta' \right) e^{-k_2 x} dx, \\ -4\pi A s \varepsilon_1 \zeta' + w M &= C_3.\end{aligned}\right\} (21)$$

Evenals in het vorige geval verkrijgt men thans de waarden van  $\xi$ ,  $\zeta'$  en  $M$  in de grenslaag, door de waarden te nemen, die zij buiten de grenslaag hebben en daar bij te tellen de vormen uit (20) na daarin de constanten vervangen te hebben door de integralen uit (21). Schrijven wij bovendien voor  $\xi$ ,  $\zeta'$  en  $M$  buiten de grenslaag de vormen, die daarvoor in § 6 van het vorige hoofdstuk werden aangegeven, dan vinden wij voor de lichtbeweging in de grenslaag de volgende uitdrukkingen:

$$\xi = -\sin \alpha_1 \left( e^{k_1 x} + a_1 e^{k_2 x} \right) - \frac{w}{2k_1} \times$$

$$\times \left[ e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_1 \zeta' \right) e^{-k_1 x} dx - e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_2 \zeta' \right) e^{-k_2 x} dx \right],$$

$$\zeta' = \frac{\cos \alpha_1}{\varepsilon_1} \left( e^{k_1 x} - a_1 e^{k_2 x} \right) + \frac{1}{2\varepsilon_1} \times$$

$$\times \left[ e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_1 \zeta' \right) e^{-k_1 x} dx + e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_2 \zeta' \right) e^{-k_2 x} dx \right],$$

$$M = 4\pi A v_1 \left( e^{k_1 x} + a_1 e^{k_2 x} \right) - \frac{2\pi A s}{k_1} \times$$

$$\times \left[ e^{k_1 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_1 \zeta' \right) e^{-k_1 x} dx - e^{k_2 x} \int_{-\delta_1}^x (\varepsilon_1 - \varepsilon) \left( \frac{w}{\varepsilon} \xi - k_2 \zeta' \right) e^{-k_2 x} dx \right].$$

Hierin moet nu  $x = 0$  gesteld worden, met het oog op de grensvoorwaarden; bovendien zullen wij  $e^{k_1 x}$  onder de integraalteekens ontwikkelen tot de eerste macht van  $k_1 x$  en eindelijk  $s$ ,  $w$  en  $k$  vervangen door:

$$s = -i \frac{2\pi}{T}, \quad w = i \frac{2\pi \sin \alpha_1}{T v_1}, \quad k_1 = i \frac{2\pi \cos \alpha_1}{T v_1}, \quad k_2 = -i \frac{2\pi \cos \alpha_1}{T v_1}.$$

Dan vinden wij na eenige herleiding:

$$\xi_0 = -\sin \alpha_1 \left[ (1 + a_1) + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \sin \alpha_1 \int_{-\delta_1}^0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon} \xi dx - i \frac{2\pi}{\lambda_1} \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon_1 - \varepsilon) \zeta' dx \right],$$

$$\zeta'_0 = \frac{1}{\varepsilon_1} \left[ (1 - a_1) \cos \alpha_1 + i \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \alpha_1 \int_{-\delta_1}^0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon} \xi dx - \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \cos^2 \alpha_1 \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon_1 - \varepsilon) \zeta' dx \right],$$

$$M_0 = 4\pi A v_1 \left[ (1 + a_1) + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} \sin \alpha_1 \int_{-\delta_1}^0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon} \xi dx - i \frac{2\pi}{\lambda_1} \int_{-\delta_1}^0 (\varepsilon_1 - \varepsilon) \zeta' dx \right].$$

De eerste integralen in  $\xi_0$  en  $M_0$  en de tweede in  $\zeta'_0$  zijn van de orde  $\left( \frac{\delta}{\lambda} \right)^2$ , en mogen dus weggelaten worden; de overigen

van de orde  $\frac{\delta}{\lambda}$ , en daarin mag men met genoegzame nauwkeurigheid stellen:

$$\xi = -\sin \alpha_1 (1 + a_1), \quad \zeta' = \frac{\cos \alpha_1}{\varepsilon_1} (1 - a_1).$$

Ten slotte wordt dan:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\sin \alpha_1 \left[ (1 + a_1) + i \frac{2\pi}{\lambda_1} (1 - a_1) \cos \alpha_1 A_1 \right], \\ \zeta_0' &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left[ (1 - a_1) \cos \alpha_1 - i \frac{2\pi}{\lambda_1} (1 + a_1) \sin^2 \alpha_1 B_1 \right], \\ M_0 &= 4\pi A v_1 \left[ (1 + a_1) + i \frac{2\pi}{\lambda_1} (1 - a_1) \cos \alpha_1 A_1 \right]. \end{aligned}$$

Hierin heeft  $A_1$  dezelfde beteekenis als vroeger, terwijl  $B_1$  bepaald wordt door:

$$B_1 = \int_{-\delta_1}^0 \frac{\varepsilon_1^{-\varepsilon}}{\varepsilon} dx.$$

Nu moet de lichtbeweging in de grenslaag tusschen  $x = 0$  en  $x = \delta_2$  bepaald worden; doet men dit en stelt daarna  $x = 0$ , dan zal men vinden:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\sin \alpha_2 a_2 \left( 1 + i \frac{2\pi}{\lambda_2} \cos \alpha_2 A_2 \right), \\ \zeta_0' &= \frac{a_2}{\varepsilon_2} \left( \cos \alpha_2 - i \frac{2\pi}{\lambda_2} \sin^2 \alpha_2 B_2 \right), \\ M_0 &= 4\pi A v_2 a_2 \left( 1 + i \frac{2\pi}{\lambda_2} \cos \alpha_2 A_2 \right), \end{aligned}$$

waarin:

$$B_2 = \int_{\delta_2}^0 \frac{\varepsilon_2^{-\varepsilon}}{\varepsilon} dx \quad \text{is.}$$

De grensvoorwaarden zijn in dit geval de doorlopendheid van  $\xi$ ,  $\zeta'$  en  $M$  voor  $x = 0$ ; zij geven ons de beide volgende vergelijkingen:



$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \left[ (1+a_1) + i 2 \pi (1-a_1) \cos \alpha_1 \frac{A_1}{\lambda_1} \right] = \\ = \sin \alpha_2 \left[ 1 + i 2 \pi \cos \alpha_2 \frac{A_2}{\lambda_2} \right] a_2 \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1} \left[ (1-a_1) \cos \alpha_1 - i 2 \pi \sin^2 \alpha_1 (1+a_1) \frac{B_1}{\lambda_1} \right] = \\ = \frac{1}{\varepsilon_2} \left[ \cos \alpha_2 - i 2 \pi \sin^2 \alpha_2 \frac{B_2}{\lambda_2} \right] a_2. \end{aligned}$$

Na eliminatie van  $a_2$  kan hieruit  $a_1$  worden opgelost. Men zal daarvoor vinden:

$$a_1 = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i(p - q)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i(p + q)}, \quad (22)$$

waarin:

$$p = 2 \pi \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \left( \sin \alpha_1 \frac{A_2}{\lambda_2} - \sin \alpha_2 \frac{A_1}{\lambda_1} \right)$$

en

$$q = 2 \pi \left( \sin^3 \alpha_1 \frac{B_1}{\lambda_1} - \sin^3 \alpha_2 \frac{B_2}{\lambda_2} \right)$$

gesteld zijn.

Daar  $p$  en  $q$  van de orde  $\frac{\delta}{\lambda}$  zijn, kan men voor  $a_1$  ook schrijven:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[ 1 + i \frac{p \sin 2 \alpha_2 - q \sin 2 \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \right],$$

of:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{e^{i \varphi_s}}{\cos \varphi_s}, \quad (23)$$

wanneer:

$$\frac{p \sin 2 \alpha_2 - q \sin 2 \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = \operatorname{tg} \varphi_s \quad (24)$$

gesteld wordt.

Het teruggekaatste licht kan volgens § 6 van het vorige hoofdstuk worden voorgesteld door:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_1'] &= -\sin \alpha_1 a_1 e^{-i \psi_1'} \\ [\zeta_1'] &= -\cos \alpha_1 a_1 e^{-i \psi_1'} \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2 \pi}{T} \left( \ell + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right).$$

De totale diëlectrische polarisatie is dus:

$$[Q_1'] = a_1 e^{-i\psi_1'}$$

en het bestaansbare gedeelte hiervan wordt volgens (23):

$$Q_1' = a_s \cos(\psi_1' - \varphi_s).$$

Hieruit blijkt, dat de trillingen in het invalsvlak eene phasevertraging  $\varphi_s$  ondergaan, terwijl de amplitudo bepaald wordt door:

$$a_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s).$$

Na eenige herleiding vindt men voor  $\operatorname{tg} \varphi_s$  uit (24) nog de volgende waarde:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{4\pi \cos \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 (n^2 A_2 - A_1) - \sin^2 \alpha_1 (n^2 B_1 - B_2)}{n^2 - 1 \quad \lambda_1 \quad \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (25)$$

§ 6. Wij kunnen er eindelijk toe overgaan, het phaseverschil en de verhouding der amplitudines voor de beide soorten van trillingen op te maken. Het phaseverschil wordt bepaald door  $\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p)$ . Nu is echter steeds  $\varphi_p$  zeer klein en van  $\varphi_s$  geldt hetzelfde, wanneer niet  $\alpha_1 + \alpha_2$  in de nabijheid van  $90^\circ$  ligt. Laat men dit laatste geval buiten beschouwing, dan mag men derhalve voor  $\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p)$  schrijven  $\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p$  en voor dit verschil volgt uit (16) en (25):

$$\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p = \frac{4\pi \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{\sin^2 \alpha_1}{\lambda_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} (n^2 A_2 - A_1 - n^2 B_1 + B_2),$$

of na eenige herleiding:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p &= \frac{2\pi \sin \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \left[ \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \times \\ &\times \left[ \int_0^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx + \int_{-\delta_1}^0 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

De beide hier voorkomende integralen kunnen nog tot eene enkele, n.l.:

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx$$

vereenigd worden, waarbij men alleen moet opmerken, dat, zoodra er nog eene scherpe grens tusschen de beide middenstoffen is, de functie onder het integraalteeken voor  $x=0$  doorlopend wordt, eene discontinuïteit trouwens, die aan de bepaalde beteekenis der som geene schade doet.

Is  $v$  de voortplantingssnelheid, aan eenige waarde van  $\varepsilon$  beantwoordende, dan kan voor de integraal ook geschreven worden:

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} \left(1 - \frac{v^2}{v_2^2}\right) \left(1 - \frac{v_1^2}{v^2}\right) dx.$$

Overigens vertoont het phaseverschil in (26) nog de bijzonderheid, dat het denzelfden vorm heeft als de uitdrukking waartoe CAUCHY door geheel andere beschouwingen kwam en die in het eerste hoofdstuk vermeld is.

De verhouding der amplitudines wordt bepaald door:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 q_s}{1 + \operatorname{tg}^2 q_p},$$

waarvoor men, indien  $\alpha_1 + \alpha_2$  niet in de nabijheid van  $90^\circ$  ligt, schrijven kan:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 q_s - \operatorname{tg}^2 q_p)$$

en dit wordt na eenige herleiding:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \times \\ \times \left[ 1 + \left\{ \frac{2\pi}{(n^2 - 1) \lambda_1} \frac{\sin 2\alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \right\}^2 2P \cos^2 \alpha_2 - (P + Q) \sin^2 \alpha_1 \right] (P - Q),$$

waarin:

$$P = n^2 A_2 - A_1, \quad Q = n^2 B_1 - B_2$$

is gesteld.

## VIERDE HOOFDSTUK.

---

### RECHTSTREEKSCHER BEREKENING VAN DEN INVLOED VAN EEN GELEIDELIJKEN OVERGANG TUSSEN DE BEIDE MIDDENSTOFFEN.

§ 1. Tegenover de afleiding uit de differentiaal-vergelijkingen, is het mogelijk niet van belang ontbloomt, nog langs meer rechtstreekschen weg den invloed der dichtheidsveranderingen te berekenen. Zooals blijken zal, wordt hierdoor het verkregen resultaat nog nader bevestigd. Het denkbeeld ligt voor de hand, om dat gedeelte der beide middenstoffen, waar eene veranderlijke dichtheid bestaat, door vlakken, evenwijdig aan het grensvlak, in zeer dunne lagen te verdeelen. Dan kan iedere laag als homogeen beschouwd worden, terwijl de dichtheid van laag tot laag verandert. Een lichtbundel, die uit het eerste medium in deze lagen treedt, zal bij ieder deelvlak eene terugkaatsing en eene breking ondergaan en de verandering der intensiteit, die daarbij plaats heeft, kan worden bepaald met behulp van de formules van FRESNEL. Tengevolge dier herhaalde terugkaatsingen en brekingen treden in het eerste medium een groot aantal lichtbundels uit, en de totale verstoring in het teruggekaatste

licht, bestaat uit de som der verstoringen, door al die bundels veroorzaakt.

Om die som te berekenen, stellen wij ons eerst voor, dat eene enkele laag met de dikte  $d$  zich bevindt tusschen twee van elkander verschillende middenstoffen. Op het voorvlak der laag, dat wij als  $yz$ -vlak aannemen, valt een lichtbundel, in het invalsvlak gepolariseerd, waarvan de verstoring wordt voorgesteld door het reëele gedeelte van de uitdrukking:

$$[q_1] = e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p)}.$$

Het direct teruggekaatste licht is:

$$[r_1] = a_1 e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p)},$$

en het doorgelaten licht:

$$[q_2] = m_1 e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p)}.$$

Dit laatste wordt aan het achtervlak gedeeltelijk teruggekaast, gedeeltelijk doorgelaten. Neemt men de grensvoorwaarden in aanmerking, die aan het achtervlak vervuld moeten worden, dan blijkt dat het teruggekaatste licht is:

$$[s_2] = m_1 a_2 e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_2 - z \sin \alpha_2}{v_2} + p - \frac{2d}{v_2} \cos \alpha_2)}.$$

Deze bundel geeft, aan het voorvlak gekomen, aanleiding tot een bundel, die in het eerste medium uittreedt:

$$[r_1'] = m_1 a_2 m_1' e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p - \frac{2d}{v_2} \cos \alpha_2)},$$

en een bundel, die weër in de laag wordt teruggekaast:

$$[q_2'] = -m_1 a_2 a_1' e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p - \frac{2d}{v_2} \cos \alpha_2)}.$$

Deze laatste bundel kan men aldus voorstellen:

$$[q_2'] = -a_1 a_2 e^{i \frac{4\pi d \cos \alpha_2}{T v_2}} [q_2].$$

Met  $[g_2']$  gebeurt nu weër hetzelfde als met  $[g_2]$  en daaruit blijkt dat al de bundels  $[g]$ , die men in de laag krijgt door deze bewerking voort te zetten, eene meetkundige reeks vormen, waarvan de reden is:

$$- a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}.$$

De som van de verstoringen in al die bundels is dus:

$$[g_2] + [g_2'] + [g_2''] + \dots = \frac{g_2}{1 + a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}}.$$

Ook de bundels  $[r]$ , die in het eerste medium uittreden, vormen eene meetkundige reeks met dezelfde reden, men heeft dus:

$$\begin{aligned} [r_1'] + [r_1''] + [r_2'''] + \dots &= \frac{[r_1']}{1 + a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}} = \\ &= \frac{a_2 m_1 m_1' e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}} e^{-i \frac{2 \pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p)}}{1 + a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}}. \end{aligned}$$

Het totale gereflecteerde licht wordt voorgesteld door de som van deze uitdrukking en  $[r_1]$ , dus, daar  $m_1 m_1' = 1 - a_1^2$  is, door:

$$\left[ a_1 + \frac{a_2 (1 - a_1^2) e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}}{1 + a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}} \right] e^{-i \frac{2 \pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1}{v_1} + p)}.$$

Het is nu alsof de terugkaatsing geheel aan het voorvlak plaats had, maar daarbij de amplitudo van het gereflecteerde licht was:

$$\frac{a_1 + a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}}{1 + a_1 a_2 e^{i \frac{4 \pi d \cos \alpha_2}{T v_2}}}. \dots \dots (1)$$

§ 2. Wij stellen ons nu voor, dat een aantal dunne lagen op elkaar volgen. Voor elk der verschillende grensvlakken stellen wij de getallen, waarmede de amplitudo van het invallende licht

vermenigvuldigd moet worden, om die van het teruggekaatste te verkrijgen, voor door:

$$a_0, a_1, a_2 \dots \dots \dots a_n.$$

De hoek van inval in het eerste medium zij  $\alpha_0$ , de overeenkomstige hoeken in de verschillende lagen:

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \dots \dots \alpha_n,$$

in het tweede medium zij de hoek van breking  $\alpha_{n+1}$ .

Op dit vraagstuk kan nu de formule (1) worden toegepast, waarbij wij ter vereenvoudiging:

$$\frac{4\pi d_p \cos \alpha_p}{e T v_p} = k_p$$

stellen.

Was het medium achter het eerste grensvlak homogeen, dan zou de amplitudo van het teruggekaatste licht zijn  $a_0$ .

Is de middenstof eerst achter het tweede grensvlak homogeen, dan wordt de amplitudo, volgens het bovenstaande:

$$\frac{a_0 + a_1 k_1}{1 + a_1 k_1} \dots \dots \dots (2)$$

Begint daarentegen de homogeniteit eerst achter het derde grensvlak, dan moet in (2)  $a_1$  vervangen worden door:

$$\frac{a_1 + a_2 k_2}{1 + a_1 a_2 k_2} \dots \dots \dots (3)$$

Voor wij dit doen, zullen wij (2) aldus schrijven:

$$a_0 + \frac{(1 - a_0^2) k_1}{a_0 k_1 + \frac{1}{a_1}} \dots \dots \dots (4)$$

en hierin  $a_1$  door (3) vervangen, na voor (3) geschreven te hebben:

$$a_1 + \frac{(1 - a_1^2) k_2}{a_1 k_2 + \frac{1}{a_2}}$$

Substitueert men dit voor  $a_1$  in (4), dan komt er:

$$a_0 + \frac{(1 - a_0^2) k_1}{a_0 k_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{(1 - a_1^2) k_2}{a_1 k_2 + \frac{1}{a_2}}}} \dots \quad (5)$$

en dit is de amplitudo van het licht, dat teruggekaatst is door drie lagen.

Neemt men een vierde laag er bij dan moet in (5),  $a_2$  vervangen worden door:

$$a_2 + \frac{(1 - a_2^2) k_3}{a_2 k_3 + \frac{1}{a_3}}$$

doch, ook zonder dit te doen, kan men uit (5) reeds genoegzaam de wet opmaken, die door de verschillende uitdrukkingen voor de amplitudines gevolgd wordt.

Wanneer dan eindelijk  $n$  lagen worden aangenomen kan de amplitudo van het teruggekaatste licht worden voorgesteld door de volgende kettingbreuk:

$$a_0 + \frac{(1 - a_0^2) k_1}{a_0 k_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{(1 - a_1^2) k_2}{a_1 k_2 + \frac{1}{a_2 + \text{enz.}} + \frac{(1 - a_{n-1})^2 k_n}{a_{n-1} k_n + \frac{1}{a_n}}}} \dots \quad (6)$$

§ 3. Terwijl tot hertoe de dikte der verschillende lagen in 't midden werd gelaten, zal die thans oneindig klein worden aangenomen, dus het aantal  $n$  der lagen oneindig groot. Als onafhankelijk veranderlijke zal worden aangenomen de hoek  $\alpha$ ; de grootheden  $a$  toch zijn functiën van  $\alpha$  en ditzelfde geldt van de grootheden  $k$ . Men kan nl. in dit geval voor  $d_p$  schrijven  $d\alpha_p$  en dan wordt:



$$k_p = e^{i \frac{4\pi \cos \alpha_p}{T v_p} \left( \frac{dx}{d\alpha} \right)_p} d\alpha_p.$$

Daar nu  $\alpha$  eene zekere functie van  $x$  is, zijn omgekeerd  $x$  en  $\frac{dx}{d\alpha}$  functiën van  $\alpha$ , wat nu ook voor  $k_p$  geldt.

De kettingbreuk loopt nu in het oneindige voort en wel zoodanig, dat als men twee termen er van gehad heeft, hetzelfde weêr terugkeert, behalve, dat  $\alpha$  daarin door  $\alpha + d\alpha$  vervangen is 1).

Uit dit alles volgt nu dat, wanneer men eene functie aldus bepaalt:

$$f(\alpha_p) = a_p + \frac{(1 - a_p^2) k_{p+1}}{a_p k_{p+1} + \frac{1}{f(\alpha_p + d\alpha_p)}}, \dots \quad (7)$$

hieruit eene differentiaal vergelijking vormt, en na de integratie  $\alpha_p$  vervangt door  $\alpha_0$ , de amplitudo van het teruggekaatste licht gelijk is aan  $f(\alpha_0)$ .

De functie  $f(\alpha_p)$  stelt hierin voor de amplitudo, die het teruggekaatste licht zou hebben, wanneer vóór de  $p^{\text{de}}$  laag overal dezelfde toestand bestond als in die laag.

Uit (7) volgt:

$$f(\alpha_p) = \frac{a_p + k_{p+1} f(\alpha_p + d\alpha_p)}{1 + a_p k_{p+1} f(\alpha_p + d\alpha_p)}$$

en wanneer men  $f(\alpha_p + d\alpha_p)$  vervangt door  $f(\alpha_p) + f'(\alpha_p) d\alpha_p$  en daarna de oneindig kleinen van de tweede orde weglaat, (ook  $a_p$  is oneindig klein) wordt de differentiaal-vergelijking:

$$f'(\alpha_p) d\alpha_p + a_p [1 - f(\alpha_p)^2] + i \frac{4\pi \cos \alpha_p + 1}{T v_{p+1}} d\alpha_{p+1} f(\alpha_p) = 0.$$

1) Wij nemen hierbij dus aan, dat  $\alpha$  met oneindig kleine verschillen toeneemt; hieruit blijkt dat deze berekening alleen geldt voor het geval van een geleidelijken overgang en niet wanneer er aan het grensvlak nog eene discontinuïteit bestaat.

Hiervoor kan men schrijven :

$$f'(\alpha_p) d\alpha_p + a_p [1 - f(\alpha_p)^2] + i \frac{4\pi \sin \alpha_0}{T v_0} \cotg \alpha_p f(\alpha_p) d x_{p+1} = 0,$$

waarbij in den derden term nog eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde weggelaten is.

Daar wij de grenslaag tusschen twee middenstoffen op geheel willekeurige wijze in oneindig dunne lagen mogen verdeelen, kunnen wij thans aannemen, dat deze allen even dik zijn, zoodat  $d x_{p+1} = d x_p$  wordt; na deeling door  $d \alpha_p$  en weglating van den index  $p$  vindt men dan:

$$f'(\alpha) + \frac{a}{d\alpha} [1 - f(\alpha)^2] + i \frac{4\pi \sin \alpha_0}{T v_0} \cotg \alpha \frac{d x}{d \alpha} f(\alpha) = 0. \quad (8)$$

Deze vergelijking neemt eene verschillende gedaante aan voor de beide hoofdgevallen; is het invallende licht in het invalsvlak gepolariseerd, dan wordt:

$$a_p = - \frac{\sin(\alpha_p - \alpha_{p+1})}{\sin(\alpha_p + \alpha_{p+1})},$$

dus:

$$a = \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha};$$

in het andere geval daarentegen is:

$$a_p = \frac{\text{tg}(\alpha_p - \alpha_{p+1})}{\text{tg}(\alpha_p + \alpha_{p+1})},$$

dus:

$$a = - \frac{d\alpha}{\text{tg} 2\alpha}.$$

De vergelijking (8) wordt dus voor de beide hoofdgevallen:

$$f'(\alpha) + \frac{1}{\sin 2\alpha} [1 - f(\alpha)^2] + i \frac{4\pi \sin \alpha_0}{T v_0} \cotg \alpha \frac{d x}{d \alpha} f(\alpha) = 0, \quad (9a)$$

$$f'(\alpha) - \frac{1}{\text{tg} 2\alpha} [1 - f(\alpha)^2] + i \frac{4\pi \sin \alpha_0}{T v_0} \cotg \alpha \frac{d x}{d \alpha} f(\alpha) = 0, \quad (9b).$$

Gaan wij eerst na, van welke orde de laatste term in beide vergelijkingen is. De factor  $\frac{d x}{d \alpha}$  zal niet veel verschillen van

$\frac{d}{\alpha_n - \alpha_0}$ , waarin  $d$  de dikte van de geheele overgangslaag is; de laatste term is dus van de orde  $\frac{d}{Tv_0}$  en deze grootte is zeer klein. Laten wij dien term voor een oogenblik weg, dan wordt (9a):

$$f'(\alpha) + \frac{1}{\sin 2\alpha} [1 - f(\alpha)^2] = 0,$$

of na integratie:

$$\frac{1 + f(\alpha)}{1 - f(\alpha)} = C \cotg \alpha.$$

Ter bepaling van  $C$  stellen wij voor  $\alpha$ ,  $\alpha_{n+1}$ ; volgens de beteekenis van  $f(\alpha)$  is dan:

$$f(\alpha_{n+1}) = \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_{n+1}},$$

wat gelijk aan nul gesteld kan worden en:

$$1 = C \cotg \alpha_{n+1}.$$

Nu vinden wij voor  $f(\alpha)$ :

$$f(\alpha) = -\frac{\cotg \alpha_{n+1} - \cotg \alpha}{\cotg \alpha_{n+1} + \cotg \alpha} = -\frac{\sin(\alpha - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha + \alpha_{n+1})},$$

en:

$$f(\alpha_0) = -\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}.$$

Integreert men evenzoo de vergelijking (9b) zonder laatsten term, dan vindt men:

$$\begin{aligned} \frac{1 + f(\alpha)}{1 - f(\alpha)} &= C \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_{n+1}}, \\ f(\alpha) &= \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_{n+1}}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha_{n+1}} = \frac{\text{tg}(\alpha - \alpha_{n+1})}{\text{tg}(\alpha + \alpha_{n+1})}, \\ f(\alpha_0) &= \frac{\text{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\text{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}. \end{aligned}$$

Wij krijgen dus de vroeger gevonden formules terug, waaruit blijkt, dat de invloed der overgangslaag geheel in den laatsten term van (9a) en (9b) is gelegen.

Om nu de vergelijkingen met den laatsten term te integreeren, stelle men ter verkorting:

$$\frac{4\pi \sin \alpha_0}{T v_0} = p.$$

Dan kan men voor (9a) schrijven:

$$\frac{f'(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + ip \cotg \alpha \frac{f(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} \frac{d\alpha}{d\alpha} = 0$$

en dit geeft bij integratie:

$$\log \left( \frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} \right) + \log \operatorname{tg} \alpha + 2ip \int \cotg \alpha \frac{f(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} \frac{d\alpha}{d\alpha} = \log C.$$

Stellen wij voorloopig:

$$\int \cotg \alpha \frac{f(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} \frac{d\alpha}{d\alpha} = \int \varphi(\alpha) d\alpha,$$

dan wordt:

$$\frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} = C \cotg \alpha e^{-2ip \int \varphi(\alpha) d\alpha}.$$

Om  $C$  te bepalen vervangen wij  $\alpha$  door  $\alpha_{n+1}$ ; dan wordt:

$$1 = C \cotg \alpha_{n+1} e^{-2ip \int \varphi(\alpha) d\alpha}$$

en daarmee:

$$\frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} = \frac{\cotg \alpha}{\cotg \alpha_{n+1}} e^{2ip \int \varphi(\alpha) d\alpha}.$$

De exponent van  $e$  is van de orde  $\frac{d}{Tv_0}$ . Laat men de termen, die van hoogere orde zijn, weg, dan wordt

$$\frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} = \frac{\cotg \alpha}{\cotg \alpha_{n+1}} \left[ 1 + 2ip \int \varphi(\alpha) d\alpha \right]$$

en

$$f(\alpha) = - \frac{\sin(\alpha - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha + \alpha_{n+1})} \left[ 1 - ip \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha_{n+1}}{\sin(\alpha - \alpha_{n+1}) \sin(\alpha + \alpha_{n+1})} \int \varphi(\alpha) d\alpha \right]$$

Hierin moet nu de integraal nog berekend worden en daar de geheele correctie-term van de orde  $\frac{d}{Tv_0}$  is, mag men voor  $f(\alpha)$  onder het integraalteeken schrijven:

$$-\frac{\sin(\alpha - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha + \alpha_{n+1})},$$

waardoor men een fout maakt van de orde  $\left(\frac{d}{Tv_0}\right)^2$ .

Nu wordt

$$\int \varphi(\alpha) d\alpha = - \int \cot g \alpha \frac{\frac{\sin(\alpha - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha + \alpha_{n+1})} dx}{1 - \frac{\sin^2(\alpha - \alpha_{n+1})}{\sin^2(\alpha + \alpha_{n+1})}} d\alpha = - \int \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_{n+1}}{2 \sin^2 \alpha \sin 2 \alpha_{n+1}} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha.$$

Wanneer eindelijk voor  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  gesteld wordt, verkrijgt men:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \varphi(\alpha) d\alpha &= - \frac{1}{2 \sin 2 \alpha_{n+1}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_{n+1}}{\sin^2 \alpha}\right) \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \\ &= - \frac{1}{2 \sin 2 \alpha_{n+1}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \left(1 - \frac{v_{n+1}^2}{v^2}\right) \frac{dx}{d\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Deze laatste integraal is eene constante, die afhangt van de wijze, waarop de toestand aan het grensvlak verandert; wij zullen haar  $P$  noemen. Dan wordt:

$$f(\alpha_0) = - \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[1 + \frac{1}{2} ip \frac{\sin 2 \alpha_0 P}{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) \sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}\right]. \quad (10)$$

Hieruit blijkt, dat de trillingen loodrecht op het invalsvlak eene phaseverandering  $\varphi_p$  ondergaan hebben, bepaald door:

$$\operatorname{tg} \varphi_p = \frac{4 \pi \cos \alpha_0}{T} \frac{n^2}{v_0} \frac{n^2}{n^2 - 1} P, \dots \dots (11)$$

terwijl de intensiteit gelijk is aan:

$$r_p^2 = \frac{\sin^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p). \dots (12)$$

Evenzoo kan men te werk gaan met de trillingen in het invalsvlak; hiervoor is de differentiaalvergelijking:

$$\frac{f'(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} + ip \operatorname{cotg} \alpha \frac{f(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} \frac{d\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Deze geeft bij integratie:

$$\frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} = C \sin 2\alpha e^{-2ip \int \psi(\alpha) d\alpha}.$$

Bepalen wij  $C$  weër op dezelfde wijze, als in het vorige geval, dan wordt bij benadering:

$$\frac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_{n+1}} \left[ 1 + 2ip \int_{\alpha}^{\alpha_{n+1}} \psi(\alpha) d\alpha \right],$$

$$f(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + ip \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha_{n+1} \int_{\alpha}^{\alpha_{n+1}} \psi(\alpha) d\alpha}{\sin(\alpha - \alpha_{n+1}) \sin(\alpha + \alpha_{n+1}) \cos(\alpha - \alpha_{n+1}) \cos(\alpha + \alpha_{n+1})} \right].$$

Hierin is:

$$\int \psi(\alpha) d\alpha = \int \operatorname{cotg} \alpha \frac{f(\alpha)}{1-f(\alpha)^2} \frac{d\alpha}{d\alpha},$$

en vervangt men hierin  $f(\alpha)$  door:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{n+1})},$$

dan vindt men:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \psi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2 \sin 2\alpha_{n+1}} \left[ P + Q \sin^2 \alpha_{n+1} \right],$$

waarin  $Q$  eene constante is:

$$Q = \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \left( \frac{v^2_{n+1}}{v^2} - \frac{v^2}{v^2_{n+1}} \right) \frac{d\alpha}{d\alpha} d\alpha.$$

Hiermede wordt dan

$$f(\alpha_0) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \times \left[ 1 + \frac{1}{2} ip \frac{\sin 2\alpha_0 (P + Q \sin^2 \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1}) \sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) \cos(\alpha_0 + \alpha_{n+1}) \cos(\alpha_0 - \alpha_{n+1})} \right], \quad (13)$$

waaruit blijkt, dat de trillingen in het invalsvlak eene phase-verandering  $\varphi_s$  hebben ondergaan, die bepaald wordt door:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{4 \pi \cos \alpha_0}{T} \frac{n^2}{v_0} \frac{P + Q \sin^2 \alpha_{n+1}}{n^2 - 1} \frac{1}{\cos(\alpha_0 + \alpha_{n+1}) \cos(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}. \quad (14)$$

De intensiteit van het teruggekaatste licht wordt in dit geval:

$$r_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s). \quad (15)$$

§ 4. Het phaseverschil tusschen de beide soorten van trillingen wordt bepaald door  $\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p)$ , en wanneer wij het geval, dat  $\alpha_0 + \alpha_{n+1}$  in de nabijheid van  $90^\circ$  ligt, buiten beschouwing laten, kan hiervoor geschreven worden:

$$\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p = \frac{2 \pi \sin \alpha_0}{T} \frac{(n^2 + 1) P + Q}{v_0} \frac{1}{n^2 - 1} [\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1}) + \operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})]. \quad (16)$$

Voert men de waarden van  $P$  en  $Q$  in, dan wordt:

$$(n^2 + 1) P + Q = \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} \frac{(v^2 - v_{n+1}^2)(v_0^2 - v^2)}{v^2 v_{n+1}^2} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha. \quad (17)$$

De verhouding der intensiteiten:

$$\frac{r_s^2}{r_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}{\cos^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p}$$

kan, wanneer  $\alpha_0 + \alpha_{n+1}$  niet in de nabijheid van  $90^\circ$  ligt, aldus geschreven worden:

$$\frac{r_s^2}{r_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}{\cos^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})} [1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s - \operatorname{tg}^2 \varphi_p]. \quad (18)$$

en hiervoor vindt men na herleiding denzelfden vorm, die aan het einde van het vorige hoofdstuk werd afgeleid.

§ 5. Het denkbeeld om de grenslaag tusschen de beide middenstoffen in zeer dunne lagen te verdeelen, die ieder op zich zelf als homogeen beschouwd mogen worden, is het eerst opgevat door LORENZ 1). Hij behandelt, evenals in de vorige berekening geschiedde, het geval dat er nergens tusschen twee dier lagen eene discontinuïteit bestaat, zoodat alle grootheden, die

1) Pogg. Ann. Bd. 111.

op de lichtbeweging in de verschillende lagen betrekking hebben, met oneindig kleine verschillen opklimmen. Wij zullen zijne methode in 't kort bespreken en daarbij de notaties van de vorige berekening behouden. Een lichtbundel, waarvan de verstoring wordt voorgesteld door de symbolische uitdrukking:

$$[q_1] = e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x \cos \alpha_0 + z \sin \alpha_0}{v_0} + p)},$$

valt onder een hoek  $\alpha_0$  op het bovenvlak der eerste laag, dat wij tot  $yz$ -vlak aannemen; de voortplantingsrichtingen in de overige lagen worden dan bepaald door de hoeken:

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \dots \dots \alpha_n,$$

terwijl de hoek van breking  $\alpha_{n+1}$  wordt en:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + d\alpha, \alpha_2 = \alpha_1 + d\alpha_1 \text{ enz.}$$

is. Het teruggekaatste licht is:

$$[r_1] = a_0 e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + \frac{x \cos \alpha_0 - z \sin \alpha_0}{v_0} + p)}, \quad (19)$$

het doorgelaten licht:

$$[q_2] = m_0 e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p)}.$$

De theorie van FRESNEL volgende, stelt LORENZ nu voor trillingen, loodrecht op het invalsvlak:

$$a_0 = - \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_0 + \alpha_1)} = \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_0}, \quad \dots \quad (20)$$

$$m_0 = (1 + a_0) = 1 + \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_0},$$

voor trillingen in het invalsvlak daarentegen:

$$a_0 = - \frac{\text{tg}(\alpha_0 - \alpha_1)}{\text{tg}(\alpha_0 + \alpha_1)} = \frac{d\alpha}{\text{tg} 2\alpha_0}, \quad \dots \quad (21)$$

$$m_0 = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} (1 + a_0) = 1 + \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_0}.$$

De bundel  $[q_2]$  wordt aan het bovenvlak der tweede laag gedeeltelijk teruggekaatst, gedeeltelijk doorgelaten. Voorloopig



laten wij het eerste gedeelte buiten beschouwing, om alleen te letten op het doorgelaten licht, dat, na nog eenige lagen te zijn doorgestaan b.v. in de  $p^{\text{de}}$  laag aankomt. Noemen wij de amplitudo van het doorgelaten licht in de  $p^{\text{de}}$  laag  $z_p$ , dan wordt deze in de  $(p+1)^{\text{ste}}$  laag  $z_p + dz$  en nu is blijkens het voorgaande :

$$z_p + dz = z_p \left( 1 + \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_p} \right),$$

voor de beide hoofdgevallen, dus :

$$\frac{dz}{z_p} = \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_p},$$

en na integratie :

$$z_p = \sqrt{\frac{\text{tg } \alpha_p}{\text{tg } \alpha_0}}, \dots \dots \dots (22)$$

omdat de amplitudo van het invallende licht gelijk aan 1 gesteld is. Hieruit blijkt, dat de amplitudo van een lichtbundel, die na herhaalde brekingen van de  $k^{\text{de}}$  in de  $l^{\text{de}}$  laag treedt, ten gevolge van die brekingen vermenigvuldigd moet worden met :

$$\sqrt{\frac{\text{tg } \alpha_s}{\text{tg } \alpha_k}}.$$

Om nu het geheele teruggekaatste licht in het eerste medium te verkrijgen, worden eerst die bundels bijeengenomen, welke slechts ééne terugkaatsing ondergaan hebben. Daartoe behoort vooreerst (19); bepalen wij verder wat er wordt van den bundel, die eene terugkaatsing in de  $p^{\text{de}}$  laag heeft ondergaan. Ten gevolge van de herhaalde brekingen van de  $0^{\text{de}}$  tot de  $p^{\text{de}}$  laag, heeft de amplitudo een factor:  $\sqrt{\frac{\text{tg } \alpha_p}{\text{tg } \alpha_0}}$  gekregen; tengevolge van de terugkaatsing aan het bovenvlak der  $(p+1)^{\text{ste}}$  laag een factor:

$$\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha_p}, \text{ of } \frac{d\alpha}{\text{tg } 2\alpha_p},$$

waarvoor wij schrijven:

$$d \log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_p} \text{ of } d \log \sqrt{\sin 2 \alpha_p} \dots (23)$$

en in 't algemeen

$$d u_p$$

wanneer wij n.l. later voor het eene hoofdgeval  $u$  vervangen door:

$$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_p}$$

en in het andere hoofdgeval door:

$$\log \sqrt{\sin 2 \alpha_p}$$

De amplitudo is dus geworden:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha_p}{\operatorname{tg} \alpha_0}} d u_p;$$

maar nu doorloopt de bundel weêr alle lagen boven de  $p^{\text{de}}$  om in het eerste medium uit te treden, en daarom moet er een factor

$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_p}}$  bijgevoegd worden, zoodat wij overhouden de amplitudo:

$$d u_p.$$

Hierbij is nu niet gelet op de faseverandering, want deze bundel heeft de  $p$  lagen tweemaal doorloopen en zal dus met den bundel (19) een faseverschil hebben, dat kan worden voorgesteld door:

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_p),$$

wanneer men onder  $\gamma$  verstaat:

$$\frac{2\pi \cos \alpha}{T} \frac{dx}{v} \dots (24)$$

Nu wordt dus de amplitudo:

$$e^{2i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_p)} d u_p.$$

Past men deze redeneering toe op al de  $n$  lagen, dan vindt men voor de som der amplitudines van alle bundels, die na slechts éene terugkaatsing ondergaan te hebben in het eerste medium uittreden:

$$\int_{u_0}^{u_0+1} e^{2i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_p)} du_p \dots \quad (25)$$

Stellen wij:

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_p) = \delta_p,$$

dan gaat (25) over in:

$$\int_{u_0}^{u_0+1} e^{i\delta_p} du_p \dots \quad (26)$$

Nu worden de bundels bijeengenomen, die in het eerste medium uittreden na drie terugkaatsingen. Beschouwen wij daartoe een bundel, waarvan de eerste terugkaatsing in de  $p^{\text{de}}$  laag plaats heeft; dit geeft een factor  $du_p$ ; de tweede terugkaatsing kan nu in een der lagen tusschen de  $p^{\text{de}}$  en de eerste gebeuren b.v. in de  $k^{\text{de}}$  laag, dan komt er een factor  $-du_k$  bij, eindelijk kan de derde terugkaatsing in een der lagen tusschen de  $k^{\text{de}}$  en  $n^{\text{de}}$  plaats hebben b.v. in de  $m^{\text{de}}$  laag en dit geeft een factor  $du_m$ . Bovendien zal een dergelijke bundel, in het eerste medium uittredende, met (19) eene phaseverschil hebben, waarvoor men gemakkelijk vindt:

$$\delta_p - \delta_k + \delta_m,$$

zoodat de amplitudo van dezen bundel wordt:

$$-e^{i(\delta_p - \delta_k + \delta_m)} du_p du_k du_m.$$

De som der amplitudines van alle bundels, die de terugkaatsingen in de  $p^{\text{de}}$  en de  $k^{\text{de}}$  laag gemeen hebben wordt nu:

$$-e^{i(\delta_p - \delta_k)} du_p du_k \int_{u_0}^{u_0+1} e^{i\delta_m} du_m.$$

Op dezelfde wijze vindt men voor alle bundels, die de eerste terugkaatsing in de  $p^{\text{de}}$  laag gemeen hebben:

$$-e^{i\delta_p} du_p \int_{u_0}^{u_p} e^{-i\delta_k} du_k \int_{u_k}^{u_0+1} e^{i\delta_m} du_m,$$

en ten slotte wordt de som der amplitudines van alle bundels, die driemaal zijn teruggekaatst:

$$-\int_{u_0}^{u_{n+1}} e^{i\delta_p} d u_p \int_{u_0}^{u_p} e^{-i\delta_k} d u_k \int_{u_k}^{u_{n+1}} e^{i\delta_m} d u_m \dots \quad (27)$$

Zoo voortgaande kan men nu de som bepalen der amplitudines van alle bundels, die na vijf terugkaatsingen in het eerste medium nittreden; deze zal worden:

$$\int_{u_0}^{u_{n+1}} e^{i\delta_p} d u_p \int_{u_0}^{u_p} e^{-i\delta_k} d u_k \int_{u_k}^{u_{n+1}} e^{i\delta_m} d u_m \int_{u_0}^{u_m} e^{-i\delta_q} d u_q \int_{u_q}^{u_{n+1}} e^{i\delta_e} d u_e \quad (28)$$

Voegt men (26), (27) en (28) bijeen, dan komt er:

$$\int_{u_0}^{u_{n+1}} e^{i\delta_p} d u_p \left[ 1 - \int_{u_0}^{u_p} e^{-i\delta_k} d u_k \int_{u_k}^{u_{n+1}} e^{i\delta_m} d u_m \right] \left[ 1 - \int_{u_0}^{u_m} e^{-i\delta_q} d u_q \int_{u_q}^{u_{n+1}} e^{i\delta_e} d u_e \right] \quad (29)$$

en hierbij moeten nog worden opgeteld de bundels, die 7 en meer terugkaatsingen, tot in het oneindige hebben ondergaan. Het is echter gemakkelijk in te zien, dat men voor de som der amplitudines van al die bundels, kan schrijven:

$$\int_{u_0}^{u_{n+1}} e^{i\delta_p} d u_p f(u_p) \dots \dots \dots \quad (30)$$

waarin  $f(u_p)$  eene functie is, die op de volgende wijze bepaald wordt:

$$f(u_p) = 1 - \int_{u_0}^{u_p} e^{-i\delta_k} d u_k \int_{u_k}^{u_{n+1}} e^{i\delta_q} d u_q f(u_q) \dots \quad (31)$$

Om eene differentiaal-vergelijking voor  $f(u_p)$  te verkrijgen, wordt (31), tweemaal naar  $u_p$  gedifferentieerd; dit geeft eerst:

$$f'(u_p) = -e^{-i\delta_p} \int_{u_p}^{u_{n+1}} e^{i\delta_q} d u_q f(u_q) \dots \quad (32)$$

en daarna:

$$\frac{d}{du_p} \left[ e^{i\delta_p} f'(u_p) \right] = e^{i\delta_p} f'(u_p), \dots (33)$$

of wanneer men den index  $p$  weglaat:

$$f''(u) + i \frac{d\delta}{du} f'(u) - f(u) = 0. \dots (34)$$

Nadat uit deze differentiaal-vergelijking,  $f(u)$  bepaald is, wordt de amplitudo van het teruggekaatste licht:

$$-f'(u_0), \dots (35)$$

hetgeen men uit (33) afleidt door tusschen de grenzen  $u_0$  en  $u_{n+1}$  te integreeren; terwijl volgens (32)  $f'(u_{n+1}) = 0$  is.

De grootste moeielijkheid is gelegen in de oplossing van de vergelijking (34), waarbij natuurlijk alleen van eene benadering sprake kan zijn en hierin is LORENZ niet gelukkig geweest. Hij stelt n.l.:

$$f(u) = e^{\lambda i} \frac{e^{u-u_{n+1}} - e^{u_{n+1}-u}}{e^{u-u_{n+1}} + e^{u_{n+1}-u}},$$

waarvoor wel eenige aanleiding bestaat, omdat:

$$\frac{e^{u_0-u_{n+1}} - e^{u_{n+1}-u_0}}{e^{u_0-u_{n+1}} + e^{u_{n+1}-u_0}}$$

na substitutie der waarden van  $u$ , die in (23) zijn gegeven, overgaat in:

$$-\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \text{ of } -\frac{\text{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\text{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}.$$

De vergelijking (34) wordt nu:

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} + \frac{e^{u-u_{n+1}} - e^{u_{n+1}-u}}{e^{u-u_{n+1}} + e^{u_{n+1}-u}} \frac{d(2\lambda - \delta)}{du} + i \frac{d\lambda}{du} \frac{d(\lambda - \delta)}{du} = 0.$$

Daarna wordt ondersteld dat  $\frac{d\lambda}{du}$  en  $\frac{d\delta}{du}$  zeer klein zijn, zoodat de laatste term verwaarloosd kan worden en het is dan gemakkelijk de vergelijking te integreeren.

Deze onderstelling echter is niet geoorloofd 1). Men heeft toch:

1) Zie Fortschritte der Physik für 1860.

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{d\delta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{du},$$

waarin :

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{4\pi}{T} \frac{\sin \alpha_0}{v_0} \cotg \alpha \frac{dx}{d\alpha}$$

is.

Verder is in het tweede hoofdgeval :

$$\frac{dx}{du} = tg 2\alpha;$$

dus :

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{4\pi}{T} \frac{\sin \alpha_0}{v_0} \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} \frac{dx}{d\alpha}.$$

Hierin heeft  $\frac{dx}{d\alpha}$  altijd een eindige waarde, want daar  $\alpha$  doorlopend met  $x$  verandert, kan  $\frac{dx}{d\alpha}$  nooit zeer groot, dus evenmin  $\frac{dx}{d\alpha}$  zeer klein worden. Daarentegen verdwijnt  $\cos 2\alpha$  voor  $\alpha = 45^\circ$  dan wordt dus  $\frac{d\delta}{du}$  oneindig groot. En dit zal zich juist voordoen in het belangrijkste geval, wanneer het licht onder den polarisatie-hoek invalt, want daarvoor is :

$$\alpha_0 + \alpha_{i+1} = 90^\circ.$$

Aangezien nu  $\alpha_0$  en  $\alpha_{i+1}$  nooit gelijktijdig  $45^\circ$  kunnen zijn, zal dan altijd de een kleiner, de ander grooter dan  $45^\circ$  en dus in een der lagen stellig  $\alpha = 45^\circ$  zijn. Ook wanneer  $\alpha_0$  in de nabijheid van den polarisatiehoek ligt, wordt  $\frac{d\delta}{du}$  zeer groot.

Hoewel de benadering der vergelijking (34) niet juist blijkt te zijn, valt op de methode zelf niets af te dingen. Waarschijnlijk zou het wel mogelijk zijn, om, lettende op de beteekenis van  $f(\alpha_p)$  in de vorige en van  $f(u_p)$  in deze methode, eene substitutie te vinden, waardoor de vergelijkingen (34) en (8), met elkander in verband gebracht werden.

§ 6. De berekeningen, die tot hertoe gevolgd zijn, waren

slechts benaderingen, waarbij steeds werd aangenomen, dat de dikte der overgangslagen klein was in vergelijking met de golflengte van het licht. Door deze onderstelling onmiddellijk in te voeren kan men nog langs een eenvoudiger weg tot eene oplossing komen 1). Behouden wij n.l. de notaties van § 1, dan zal het, ten gevolge van onze onderstelling, voldoende zijn, slechts de eerste machten der grootheden :

$$\frac{4\pi d_p \cos \alpha_p}{T v_p},$$

te behouden.

Men zou kunnen meenen, dat de opeenhooping der kleine grootheden, die men hierbij verwaarloost, eenigen invloed mocht hebben op de uitkomst; hiervoor bestaat echter geen gevaar, want de gezamenlijke dikte van alle  $n$  lagen, zal nog zeer klein zijn, vergeleken met de golflengte.

Waren al de grootheden  $d=0$ , dan zouden de beide middenstoffen elkander onmiddellijk aanraken en de amplitudo van het teruggekaatste licht zou worden :

$$-\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}, \dots \dots \dots (36)$$

wanneer die van het invallende licht  $= 1$  gesteld wordt. Zijn de grootheden  $d$  niet 0, maar zeer klein, dan zal men bij (36) een aantal correcties moeten voegen, die de eerste machten bevatten van  $d_1, d_2$  enz. Zoeken wij den term met de eerste macht van  $d_p$ . Men zal dien verkrijgen door het geval te behandelen, dat alleen de  $p^{\text{de}}$  laag er was, en dat de beide middenstoffen tot aan de grensvlakken dier laag reikten. Dan was de vroeger voor een enkele laag gevonden formule geldig, waarbij men  $\alpha_1$  door :

1) Deze berekening ben ik aan Prof. Lorentz verschuldigd.

$$-\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_0 + \alpha_p)}$$

en  $a_2$  door:

$$-\frac{\sin(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_p + \alpha_{n+1})}$$

zou hebben te vervangen.

Stelt men bovendien:

$$\frac{4\pi d_p \cos \alpha_p}{T v_p} = \delta_p,$$

welke grootheid dan zeer klein is, dan zou de amplitudo van het teruggekaatste licht worden:

$$-\frac{\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_0 + \alpha_p)} + \frac{\sin(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_p + \alpha_{n+1})} (1 + i\delta_p)}{1 + \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_0 + \alpha_p)} \frac{\sin(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_p + \alpha_{n+1})} (1 + i\delta_p)},$$

of:

$$\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \frac{\sin(\alpha_p + \alpha_{n+1}) \sin(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\sin 2\alpha_p} i\delta_p.$$

De laatste term is hier de correctie, die aan (36) moet worden aangebracht, wegens de aanwezigheid der  $p^{\text{de}}$  laag.

Men kan voor die correctie schrijven:

$$\begin{aligned} & -\frac{2 \sin 2\alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \frac{\sin^2 \alpha_p - \sin^2 \alpha_{n+1}}{\sin \alpha_p} i \frac{\pi d_p}{T v_p} = \\ & = -i 2\pi d_p \left[ 1 - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2} \right] \frac{\sin \alpha_0}{\lambda_0} \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}. \end{aligned}$$

Iedere laag levert eene dergelijke correctie op en de som van al die correcties wordt:

$$-i 2\pi \frac{\sin \alpha_0}{\lambda_0} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \sum d_p \left[ 1 - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2} \right].$$

Stelt men nu:

$$\sum d_p \left[ 1 - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2} \right] = R, \quad \dots \dots \dots (37)$$

dan wordt de amplitudo van het teruggekaatste licht:



$$-\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + i 2 \pi \frac{\sin \alpha_0}{\lambda_0} \frac{\sin 2 \alpha_0}{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) \sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} R \right],$$

of:

$$-\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + i \frac{4 \pi n^2 \cos \alpha_0}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_0} R \right] \dots (38)$$

Hieruit blijkt, dat de phaseverandering  $\varphi_p$  bepaald wordt door:

$$\operatorname{tg} \varphi_p = \frac{4 \pi n^2 \cos \alpha_0}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_0} R, \dots (39)$$

en de amplitudo  $r_p$  door:

$$r_p^2 = \frac{\sin^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\sin^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p) \dots (40)$$

Voor het tweede hoofdgeval, waarbij het licht gepolariseerd is, loodrecht op het invalsvlak, geldt natuurlijk dezelfde redeneering. Waren al de grootheden  $d = 0$ , dan werd de amplitudo van het teruggekaatste licht:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \dots (41)$$

Wanneer alleen  $d_p$  van 0 verschilt, wordt die amplitudo:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_p) + \operatorname{tg}(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_p) + \operatorname{tg}(\alpha_p + \alpha_{n+1})} (1 + i \delta_p)$$

$$1 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_p) \operatorname{tg}(\alpha_p - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_p) \operatorname{tg}(\alpha_p + \alpha_{n+1})} (1 + i \delta_p)$$

of:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + \frac{\sin 2 \alpha_0 \sin^2 2 \alpha_p - \sin^2 2 \alpha_{n+1}}{\sin 2 \alpha_p \sin^2 2 \alpha_0 - \sin^2 2 \alpha_{n+1}} i \delta \right].$$

De correctieterm, die bij (41) gevoegd moet worden, ten gevolge van de aanwezigheid der  $p$ de laag, kan nu aldus geschreven worden:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} i \frac{4 \pi n^2}{n^2 - 1} d_p \frac{\cos \alpha_0}{\lambda_0} \frac{\left(1 - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2}\right) - \sin^2 \alpha_{n+1} \left(\frac{v_p^2}{v_{n+1}^2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2}\right)}{1 - \sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_{n+1}}$$

Iedere laag geeft zulk eene correctie; neemt men van al die correcties de som en telt deze bij (41) op, dan wordt de amplitudo van het teruggekaatste licht:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + i \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_0}{n^2 - 1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_{n+1}}{\lambda_0 (1 - \sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_{n+1})} \right], \quad (42)$$

waarin :

$$S = \sum d_p \left( \frac{v_p^2}{v_{n+1}^2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_p^2} \right) \cdot \cdot \cdot \quad (43)$$

gesteld is.

De faseverandering  $\varphi_s$  van het licht, dat loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd is, wordt nu bepaald door :

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_0}{n^2 - 1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_{n+1}}{\lambda_0 (1 - \sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_{n+1})}, \quad (44)$$

de intensiteit  $r_s^2$  door :

$$r_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})}{\operatorname{tg}^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})} \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s \right] \cdot \cdot \cdot \quad (45)$$

Het faseverschil der beide componenten wordt bepaald door  $\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p)$  waarvoor men, met dezelfde beperking als in de vorige berekening kan schrijven :

$$\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p = 4\pi \frac{n^2}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_0}{\lambda_0} \frac{R \sin^2 \alpha_0 + (R - S) \sin^2 \alpha_{n+1}}{1 - \sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_{n+1}};$$

na eenige herleiding wordt dit :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p &= \frac{2\pi}{n^2 - 1} \frac{\sin \alpha_0}{\lambda_0} \left[ \operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_{n+1}) + \operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) \right] \times \\ &\times \sum d_p \frac{(v_0^2 - v_p^2)(v_p^2 - v_{n+1}^2)}{v_p^2 v_{n+1}^2} \cdot \cdot \cdot \quad (46) \end{aligned}$$

Deze laatste som is eene constante, die afhangt van de structuur der overgangslaag en dus niet berekend kan worden, tenzij men omtrent die structuur eene onderstelling aanneemt.

Wanneer de dikte der lagen oneindig klein wordt genomen, gaat deze som over in de integraal :

$$\int \frac{(v_0^2 - v^2)(v^2 - v_{n+1}^2)}{v^2 v_{n+1}^2} dx \cdot \cdot \cdot \quad (47)$$

Deze uitkomst omtrent het faseverschil komt weer geheel

overeen met die van de berekening in het vorige hoofdstuk.

De verhouding der intensiteiten wordt:

$$\frac{r_s^2}{r_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}{\cos^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p}.$$

Laat men weêr het geval buiten beschouwing, dat  $\alpha_0 + \alpha_{n+1}$  dicht bij  $90^\circ$  ligt, dan kan men bij benadering stellen:

$$\frac{r_s^2}{r_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \alpha_{n+1})}{\cos^2(\alpha_0 - \alpha_{n+1})} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p)$$

en ook dit geeft na herleiding dezelfde uitkomst, die aan het einde van het vorige hoofdstuk verkregen werd.

## VIJFDE HOOFDSTUK.

---

### HET VERBAND TUSSCHEN ABSORPTIE EN ELLIPTISCHE POLARISATIE

§ 1. Eene elliptische polarisatie van het teruggekaatste licht is het eerst waargenomen bij de metalen, en spoedig daarop verklaard uit de absorptie, die het gebroken licht in deze lichamen ondergaat. De theorie van MAXWELL geeft van beide verschijnselen rekenschap; zij brengt de ondoorschijnendheid in verband met het geleidingsvermogen voor de electriciteit en uit de voorwaarden, die zij aan de grens van een geleider en een isolator oplevert, kunnen de eigenschappen van het gereflecteerde licht worden afgeleid.

Behalve de metalen zijn er een aantal andere stoffen, die nevens eene sterke absorptie ook eene elliptische polarisatie van het gereflecteerde licht vertoonen. Het zijn de stoffen met oppervlaktekleuren, met meer of minder uitgebreide donkere deelen in het absorptie-spectrum en met de daarmede samenhangende anomale dispersie. Door proeven van E. WIEDEMANN 1), o. a. met fuchsine en anilineviolet is bewezen, dat juist de stralen,

---

1) E. Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. 151.

die het meest geabsorbeerd worden, zich in het teruggekaatste licht door de sterkste elliptische polarisatie onderscheiden.

Ofschoon dus bij deze lichamen de theorie der verschijnselen niet zoo volledig ontwikkeld kan worden als bij de metalen, daar toch de oorzaak der absorptie hier niet in een geleidingsvermogen (maar waarschijnlijk in eenigen weerstand, die zich binnen de moleculen tegen de electriciteitsbeweging verzet) moet gezocht worden, blijkt toch ook hier hetzelfde verband als bij de metalen te bestaan tusschen de wijze, waarop het licht zich in het lichaam voortplant en de wetten, volgens welke het gereflecteerd wordt.

Wanneer echter elke absorptie, van welken oorsprong ook, op deze wijze op het teruggekaatste licht van invloed is, zou men kunnen meenen, dat ook de zwakke elliptische polarisatie, die door JAMIN en QUINCKE bestudeerd werd, aan eene, zij het dan ook geringe, absorptie te wijten was. Eene numerieke berekening doet echter zien, dat men, om hunne proeven te verklaren, een absorptievermogen zou moeten aannemen, zooals de onderzochte lichamen dat stellig niet bezitten.

§ 2. Bij de berekening van het verband tusschen absorptie en elliptische polarisatie, zullen wij de beschouwingen van EISENLOHR 1) over dit onderwerp volgen. Vooreerst kan men aantoonen, dat van een lichtbundel, die zich voortplant in eene absorbeerende middenstof, de intensiteit zal afnemen in meetkundige reden, wanneer de afstand tot een bepaald vlak toeneemt in rekenkundige reden. Hieruit volgt dat de verstoring  $q$  van een bundel lineair gepolariseerd licht, die zich in eene dergelijke middenstof voortplant volgens de richting der  $x$  as aldus kan worden voorgesteld:

1) Eisenlohr, Pogg. Ann., Bd. 104.

$$q = a e^{-\rho x} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} + p \right), \dots (1)$$

waarin men  $\rho$  den absorptie-coëfficiënt zou kunnen noemen. De symbolische uitdrukking, waarvan (1) het bestaansbare gedeelte uitmaakt, is:

$$[q] = a e^{-\rho x} e^{-i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} + p \right)},$$

of:

$$[q] = a e^{-i \frac{2\pi}{T} \left[ t - x \left( \frac{1}{v} + i \frac{T\rho}{2\pi} \right) + p \right]} \dots (2)$$

Deze laatste uitdrukking komt geheel overeen met den gewonen vorm voor de verstoring van een bundel lineair gepolariseerd licht in een medium zonder absorptie; met dit onderscheid, dat het omgekeerde der voortplantingssnelheid vervangen is door:

$$\frac{1}{v} + i \frac{T\rho}{2\pi} \dots (3)$$

Uit de grensvoorwaarden bij de metalen blijkt nu, dat men met een lichtbundel, die zich daarin voortplant, evenzoo kan handelen, als bij doorschijnende lichamen, wanneer men slechts het omgekeerde der voortplantingssnelheid vervangt door (3). Werkt men met de symbolische uitdrukkingen voor de verschillende lichtbundels, bepaalt men daarbij den complexen hoek  $\alpha_2$  door de formule:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} + i \frac{\lambda_1 \rho}{2\pi}, \dots (4)$$

en neemt men voor de amplitudo in de symbolische uitdrukking voor het gereflecteerde licht in de beide hoofdgevallen:

$$- \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ en } \frac{\text{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)}{\text{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)},$$

dan stelt ten slotte het reële deel der bedoelde uitdrukking het werkelijk teruggekaatste licht voor.

Wij zullen nu dezelfde beschouwingswijze in het algemeen

voor absorbeerende stoffen toepassen, waarbij wij kortheidshalve:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = r e^{\vartheta i},$$

dus:

$$r \cos \vartheta = \frac{v_1}{v_2}, \quad r \sin \vartheta = \frac{\lambda_1 \rho}{2\pi} \dots \dots \dots (5)$$

stellen.

§ 3. Voor trillingen, loodrecht op het invalsvlak, wordt de amplitudo van het teruggekaatste licht:

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (6)$$

Hierin moet nu  $\sin \alpha_2$  vervangen worden door  $\frac{\sin \alpha_1}{r} e^{-\vartheta i}$ .

Verder wordt:

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{r^2} e^{-2\vartheta i}},$$

en stellen wij dit gelijk aan  $u e^{\sigma i}$ , dan is:

$$u^2 \cos 2\sigma = 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{r^2} \cos 2\vartheta, \quad u^2 \sin 2\sigma = \frac{\sin^2 \alpha_1}{r^2} \sin 2\vartheta. \dots (7)$$

Substitueeren wij deze waarden van  $\sin \alpha_2$  en  $\cos \alpha_2$  in (6), dan wordt die uitdrukking complex; wij kunnen haar dus in dezen vorm schrijven:

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\varphi_p i} \dots (8)$$

Hieruit blijkt, dat de intensiteit der teruggekaatste trillingen, loodrecht op het invalsvlak, gelijk is aan  $a^2 + b^2$ , terwijl zij eene phasevertraging  $\varphi_p$  ondergaan, die bepaald wordt door:

$$\text{tg } \varphi_p = \frac{b}{a}.$$

§ 4. Bij de behandeling der trillingen in het invalsvlak zullen wij de longitudinale trillingen buiten rekening laten; de amplitudo van het teruggekaatste licht wordt dan bepaald door de formule van FRESNEL:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Ook deze formule kan in den complexen vorm worden geschreven door invoering der waarden voor  $\sin \alpha_1$  en  $\sin \alpha_2$ ; men zal dan vinden:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} = c + di = \sqrt{c^2 + d^2} e^{\varphi_s i} \dots (9)$$

De intensiteit van het teruggekaatste licht is dus  $c^2 + d^2$ ; de phasevertraging  $\varphi_s$  wordt bepaald door:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{d}{c}.$$

§ 5. De uitdrukkingen (8) en (9) behoeven niet verder te worden uitgewerkt, daar wij alleen noodig hebben het phaseverschil en de verhouding der amplitudines, beide grootheden, die men proefondervindelijk heeft bepaald.

Men verkrijgt deze het gemakkelijkst wanneer men (9) deelt door (8), want dan wordt:

$$-\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{(\varphi_s - \varphi_i) i} \dots (10)$$

Stelt men in het eerste lid dezer vergelijking de waarden van  $\sin \alpha_2$  en  $\cos \alpha_2$  in de plaats, dan wordt het complex en kan aldus worden voorgesteld:

$$-\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = f + g i \dots (11)$$

Vergelijkt men (10) en (11) met elkander, dan blijkt dat:

$$\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_i) = \frac{g}{f} \text{ en } \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{f^2 + g^2} \dots (12)$$

Gewoonlijk stelt men de verhouding der amplitudines gelijk aan den tangens van een zekeren hoek, die den naam draagt van azimuth der herstelde polarisatie. De beteekenis van dien hoek is duidelijk; wanneer men toch het elliptisch gepolari-



seerde licht in lineair gepolariseerd licht verandert, b.v. door middel van een plaat eener dubbel brekende zelfstandigheid, dan is de verhouding der amplitudines juist gelijk aan den tangens van het azimuth van den lineair gepolariseerden bundel. Noemen wij dit azimuth  $h$ , dan wordt:

$$\operatorname{tg} h = \sqrt{f^2 + g^2} \dots \dots \dots (13)$$

Het komt er nu slechts op aan,  $f$  en  $g$  te bepalen; daartoe heeft men:

$$-\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{m e^{-(\vartheta + \sigma)i} - 1}{m e^{-(\vartheta + \sigma)i} + 1}, \dots \dots (14)$$

waarin:

$$m = \frac{\sin^2 \alpha_1}{u r \cos \alpha_1}$$

gesteld is. Herleidt men nu (14) tot den complexen vorm, dan vindt men:

$$f = \frac{m^2 - 1}{1 + 2m \cos(\vartheta + \sigma) + m^2}, \quad g = -\frac{2m \sin(\vartheta + \sigma)}{1 + 2m \cos(\vartheta + \sigma) + m^2}$$

en dus:

$$\operatorname{tg}(q_s - q_p) = \frac{2m}{1 - m^2} \sin(\vartheta + \sigma) = \sin(\vartheta + \sigma) \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{\sin^2 \alpha_1}{u r \cos \alpha_1}\right). \quad (15)$$

De hoek  $h$  wordt het eenvoudigst bepaald door  $\cos 2h$ , waarvoor men na eenige herleiding vindt:

$$\cos 2h = \cos(\vartheta + \sigma) \sin\left(2 \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{\sin^2 \alpha_1}{u r \cos \alpha_1}\right). \quad (16)$$

§ 6. Wanneer het phaseverschil juist een kwart golfengete bedraagt, noemt men den invalshoek: hoofdinvalshoek ( $A$ ) en het daarbij behoorende azimuth: hoofdazimuth ( $H$ ). Deze beide grootheden zijn door QUINCKE 1) voor eenige doorschijnende middenstoffen bepaald; wanneer wij dus berekenen, hoe zij met den absorptie-coëfficiënt samenhangen, dan hebben wij daarin een

1) Pogg. Ann. Bd. 128.

middel om te beslissen of de elliptische polarisatie bij doorschijnende middenstoffen door absorptie kan worden teweeggebracht. Vooreerst volgt uit (15) en (16) dat voor  $q_s - q_p = \frac{1}{2} \pi$ :

$$\sin A \operatorname{tg} A = nr \text{ en } 2H = \vartheta + \sigma \quad \dots \quad (17)$$

is, daarna kan  $\vartheta - \sigma$  berekend worden, met behulp van de betrekking:

$$\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \sigma)}{\operatorname{tg}(\vartheta + \sigma)} = -\cos 2A \quad \dots \quad (18)$$

Eindelijk vindt men  $r$  uit de formule:

$$r = \operatorname{tg} A \sqrt{\frac{\cos(\vartheta + \sigma)}{\cos(\vartheta - \sigma)}}, \quad \dots \quad (19)$$

die uit (7) kan worden afgeleid. Nadat uit (17), (18) en (19) de waarden van  $r$  en  $\vartheta$  bepaald zijn, kan de absorptiecoëfficiënt berekend worden; men heeft toch volgens (5):

$$q \lambda_1 = 2 \pi r \sin \vartheta.$$

Op deze wijze heb ik de waarde van  $q \lambda_1$  berekend voor Flintglas, Crownglas en water, bij de terugkaatsing in lucht; de waarden voor  $A$  en  $H$  zijn ontleend aan de tabel XXVI van QUINCKE:

	A	H	$2 \pi r \sin \vartheta$
Flintglas . . . .	58°8'	1°16'	0,3200
Crownglas . . . .	56°29'	0°23'	0,0882
Water . . . . .	53°7'	0°16'	0,0599

Voor Flintglas wordt dus de amplitudo:  $ae^{-0,32 \frac{x}{\lambda_1}}$ ; hieruit volgt dat een plaat, ter dikte van vier golflengten, reeds meer dan de helft van het licht zou absorbeeren. Nog duidelijker wordt deze sterke absorptie, wanneer men nagaat hoeveel een plaat,

ter dikte van 1 m.M. absorbeert; stelt men toch  $\lambda = 0,0006$  m.M. dan blijkt dat de amplitudo, na den doorgang door zulk eene plaat, ruim  $2^{500}$  maal kleiner geworden zou zijn. Voor Crown-glas zou de amplitudo, na den doorgang door eene plaat van 1 m.M. dikte, ruim  $2^{147}$  maal kleiner geworden zijn; voor water ruim  $2^{100}$  maal. De absorptie, die wij aldus voor deze drie doorschijnende middenstoffen vinden, is zoo groot, dat de waargenomen elliptische polarisatie bij deze middenstoffen zeker niet door eene absorptie wordt teweeggebracht, maar een op zich zelf staand verschijnsel is, dat met de bij metalen en bij lichamen met oppervlaktekleuren waargenomen verschijnselen niets gemeen heeft.

---

## ZESDE HOOFDSTUK.

---

### DE ELLIPTICITEITS-COËFFICIËNT.

§ 1. Na het onderzoek der verschillende omstandigheden, die op de terugkaatsing aan het oppervlak van doorschijnende lichamen van invloed kunnen zijn, moeten wij nu de verkregen resultaten in verband beschouwen met de proefnemingen, die over dit onderwerp verricht zijn.

Reeds lang was het bekend, dat men door terugkaatsing onder den polarisatiehoek eigenlijk nooit zuiver lineair gepolariseerd licht verkrijgt; nauwkeurige waarnemingen van het teruggekaatste licht werden echter het eerst verricht door JAMIN 1). Deze proefnemingen hadden uitsluitend betrekking op de terugkaatsing in lucht; het teruggekaatste licht bleek elliptisch gepolariseerd te zijn, zooals reeds door AIRY was vermoed, terwijl het phaseverschil tusschen de beide componenten nu eens positief, dan weêr negatief werd bevonden en bij enkele stoffen geheel aan de waarneming ontsnapte. Het phaseverschil werd hierbij positief gerekend, wanneer de phase der trillingen in het invalsvlak vertraagd was ten opzichte van

---

1) Ann. de Chimie et de Physique. T 29—30 en T 31—32.

die der trillingen loodrecht op het invalsvlak; zoodat deze laatsten de eerstgenoemde trillingen vooruit waren. JAMIN meende nu de middenstoffen te moeten onderscheiden in stoffen met positieve en met negatieve terugkaatsing; die, welke geen phaseverschil vertoonden, noemde hij neutraal. De gang van het phaseverschil bij toenemenden invalshoek was zoodanig, dat, wanneer men het bij loodrechten inval gelijk aan nul stelt 1), de aangroeiing in het begin zeer klein was; eerst in de nabijheid van den polarisatiehoek verkreeg het eene merkbare waarde en steeg dan zeer snel tot het gelijk aan een kwart golflengte werd, wanneer het licht onder den polarisatiehoek inviel. JAMIN verandert daarom den naam polarisatiehoek in hoofdinvalshoek.

Voor grootere invalshoeken bleef het phaseverschil zeer snel toenemen, tot het bijna een halve golflengte bedroeg; daarna volgde weér een langzame stijging, totdat bij rakingsschen inval de laatstgenoemde waarde bereikt werd.

Latere waarnemingen van QUINCKE 2) hebben deze uitkomsten bevestigd; alleen is hierbij gebleken dat de verdeeling der middenstoffen in drie groepen slechts geldig is bij terugkaatsing in lucht en dat bij terugkaatsing in andere middenstoffen het phaseverschil van teeken kan veranderen. Hetgeen echter de proeven van QUINCKE vooral belangrijk maakt, is, dat hij telkens ook de terugkaatsing bij omgekeerde volgorde der beide middenstoffen onderzocht en tot het besluit kwam, dat dan

---

1) Bij loodrechten inval vervalt het onderscheid tusschen trillingen in en loodrecht op het invalsvlak dus kan er ook geen verschil in phase bestaan. Dit werd het eerst door Quincke opgemerkt; Jamin en Cauchy stelden voor dit geval het phaseverschil op een halve golflengte.

2) Pogg. Ann. Bd. 128.

voor corresponderende invalshoeken (d. i. voor hoeken, waarbij de verhouding der sinus gelijk is aan den brekingsindex) het phaseverschil van teeken veranderde, maar in numerieke waarde hetzelfde bleef.

§ 2. Beide waarnemers maakten ter bepaling van het phaseverschil gebruik van den compensator van BABINET, die aan den kijker van een goniometer bevestigd werd. Daarmede kan men aan de componenten van het teruggekaatste licht een phaseverschil geven, waardoor het reeds bestaande wordt opgeheven of tot een zeker aantal geheele of halve golflengten wordt aangevuld; het uittredende licht is dan lineair gepolariseerd. Tevens bepaalden zij nu het azimuth, waarin het uittredende licht gepolariseerd was, door middel van het analyseerend nicol, uit welke bepaling de verhouding der amplitudines in den elliptisch gepolariseerden bundel kon worden afgeleid.

Noemen wij toch het azimuth van het invallende, lineair gepolariseerde licht  $\alpha$ , de amplitudo 1, dan is de amplitudo der trillingen loodrecht op het invalsvlak  $\cos \alpha$ , die der trillingen in het invalsvlak  $\sin \alpha$ . Door de terugkaatsing veranderen deze amplitudines; de eerste wordt  $a_p \cos \alpha$ , de tweede  $a_s \sin \alpha$ ; daar nu blijktens de inrichting van den compensator de verhouding dezer amplitudines bij den doorgang door dit werktuig niet verandert, is die verhouding tevens gelijk aan den tangens van het azimuth  $\beta$ , waarin de bundel, die uit den compensator treedt, gepolariseerd is. Men heeft dus:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_s \sin \alpha}{a_p \cos \alpha} = \frac{a_s}{a_p} \operatorname{tg} \alpha,$$

of, wanneer men  $\frac{a_s}{a_p} = k$  stelt:

$$k = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Voor de beide waargenomen grootheden, phaseverschil en verhouding der amplitudines, waren reeds theoretische vormen opgesteld door CAUCHY n. 1.

$$\operatorname{tg} 2 \pi \frac{d}{\lambda} = \frac{\varepsilon \sin \alpha_1 \{ \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) \}}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$k^2 = \frac{\cos^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2 (\alpha_1 - \alpha_2) + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)},$$

waarin  $\varepsilon$  een zeer kleine grootheid, de zoogenaamde ellipticiteits-coëfficiënt is. Deze formules werden nu door JAMIN en QUINCKE toegepast op hunne waarnemingen, terwijl zij met het oog op de kleine waarde van  $\varepsilon$  en de nauwkeurigheid hunner instrumenten de volgende vereenvoudigingen aanbrachten:

$$\operatorname{tg} 2 \pi \frac{d}{\lambda} = \varepsilon \sin \alpha_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$k^2 = \frac{\cos^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \{ 1 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_1 \operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \alpha_2) \}.$$

Het bleek, dat deze beide formules vrij goed aan de waarnemingen voldeden; wat de eerste betreft, volgt uit het optreden van den factor  $\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)$  reeds dadelijk, dat het phaseverschil, door die formule uitgedrukt, hetzelfde verloop zal hebben als in § 1 werd beschreven.

§ 3. Van de waarden, die wij achtereenvolgens voor de waargenomen grootheden berekend hebben, zullen wij ons het eerst bezig houden met het phaseverschil.

In het tweede hoofdstuk vonden wij dat de longitudinale trillingen eene phasevertraging  $l + m$  der trillingen in het invalsvlak veroorzaken, die door de volgende uitdrukkingen bepaald wordt:

$$\operatorname{tg} l = p \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \operatorname{tg} m = p \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$p = \frac{n^2 - 1}{8 \pi \varepsilon_2}.$$

Deze waarde van  $p$  geldt in ieder geval, wanneer de constante  $k$  positief is, want dan is men tevens genoodzaakt, haar als klein tegenover  $\varepsilon$  te beschouwen; is daarentegen  $k$  negatief, dan moet men om dezelfde uitdrukking voor  $p$  te verkrijgen, de nieuwe onderstelling maken dat  $\frac{k}{\varepsilon}$  ook dan zeer gering is.

De trillingen, loodrecht op het invalsvlak, ondergaan geen phasevertraging,  $l + m$  stelt dus tevens het phaseverschil voor en daar  $p$  in ieder geval positief is, kunnen de longitudinale trillingen ook slechts een positief phaseverschil opleveren.

De geleidelijke overgang aan het grensvlak heeft ten gevolge, dat de trillingen loodrecht op het invalsvlak eene phasevertraging  $q_p$  ondergaan, waarvoor wij in (16) van het derde hoofdstuk vonden:

$$\operatorname{tg} q_p = \frac{4 \pi}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1}{\lambda_1} (n^2 A_2 - A_1);$$

de trillingen in het invalsvlak ondergaan eene phasevertraging  $q_s$ , die volgens (25) van het derde hoofdstuk bepaald wordt door:

$$\operatorname{tg} q_s = \frac{4 \pi}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 (n^2 A_2 - A_1) - \sin^2 \alpha_1 (n^2 B_1 - B_2)}{\lambda_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \cos (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Het phaseverschil wordt dus bepaald door  $\operatorname{tg} (q_s - q_p)$  en volgens hetgeen in § 1 omtrent het teeken van dit phaseverschil werd opgemerkt is het duidelijk dat wanneer  $\operatorname{tg} (q_s - q_p)$  positief is, ook het phaseverschil positief zal zijn en omgekeerd. Meestal nu zijn  $\operatorname{tg} q_p$  en  $\operatorname{tg} q_s$  zeer kleine grootheden van de orde  $\frac{\delta}{\lambda}$ , als  $\delta$  den straal der werkingssfeer voorstelt, van daar dat wij dan met genoegzame nauwkeurigheid voor  $\operatorname{tg} (q_s - q_p)$  kunnen schrijven:  $\operatorname{tg} q_s - \operatorname{tg} q_p$ , voor welk verschil wij in (26) van het derde hoofdstuk vonden:

$$\operatorname{tg} q_s - \operatorname{tg} q_p = \frac{2 \pi}{n^2 - 1} \frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} \left[ \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx.$$



Zooals echter toen reeds werd opgemerkt gaat deze benadering niet meer door wanneer  $\alpha_1 + \alpha_2$  dicht bij  $90^\circ$  en dus  $\alpha_1$  dicht bij den polarisatiehoek ligt en daar dit volgens het verloop van het phaseverschil, dat wij in § 1 beschreven, juist het belangrijkste interval is, moet dit geval vooraf nog nader worden onderzocht. Strikt genomen, zou men hebben:

$$\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p}{1 + \operatorname{tg} \varphi_s \operatorname{tg} \varphi_p}$$

Nu is, wanneer  $\alpha_1 + \alpha_2$  dicht bij  $90^\circ$  ligt,  $\operatorname{tg} \varphi_p$  altijd nog zeer klein, maar met  $\operatorname{tg} \varphi_s$  is dit dan niet meer het geval, zoodat  $\operatorname{tg} \varphi_s \operatorname{tg} \varphi_p$  niet meer onmiddellijk tegen de eenheid verwaarloosd mag worden. Om gemakkelijk te kunnen inzien, welken invloed dit zal hebben, zullen wij de waarde, die wij voor  $\operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_p$  hebben opgesteld, door eene enkele letter *E* voorstellen. Dan wordt:

$$\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p) = \frac{E}{1 + (E + \operatorname{tg} \varphi_p) \operatorname{tg} \varphi_p},$$

of daar  $\operatorname{tg}^2 \varphi_p$  in ieder geval tegen de eenheid verwaarloosd kan worden:

$$\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p) = \frac{E}{1 + E \operatorname{tg} \varphi_p}.$$

Wordt nu  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  dan is  $E = \infty$  en men heeft:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p) &= \cot \varphi_p, \\ \varphi_s - \varphi_p &= 90^\circ - \varphi_p. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat, wanneer het licht onder den polarisatiehoek invalt, het phaseverschil niet juist  $90^\circ$  maar iets minder zal zijn, maar deze afwijking is zeer gering daar  $\varphi_p$  altijd een kleine grootheid blijft. Voor invalshoeken, die ver van den polarisatiehoek liggen is *E* niet zeer groot dus dan kan  $E \operatorname{tg} \varphi_p$  zonder twijfel worden weggelaten; er blijft dan nog slechts over te onderzoeken welken invloed deze verwaarloozing zal hebben, voor hoeken, dicht bij den polarisatiehoek. Zooals men gemak-

kelijk zal inzien, stelt  $E \operatorname{tg} \varphi_p$  juist de betrekkelijke fout voor, die men maakt, door  $E$  in plaats van  $\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p)$  te stellen. Daar nu de constanten, die in  $E$  en  $\operatorname{tg} \varphi_p$  voorkomen, van de orde  $\delta$  zijn, wordt  $E \operatorname{tg} \varphi_p$  van dezelfde orde als:

$$\frac{8 \pi^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{(n^2 - 1)^2} \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$$

Uit de opgaven van JAMIN en QUINCKE blijkt nu, dat de nauwkeurigheid, die zij bij het meten der phaseverschillen bereikten, gesteld kan worden op 0,01, want de verschillen tusschen de waargenomen en de berekende waarden beliepen gewoonlijk eenige honderdste deelen. Stellen wij ons nu de vraag, voor welken invalshoek de fout  $E \operatorname{tg} \varphi_p$  van de orde 0,01 zal zijn, dan zal deze hoek ons aangeven tot hoever de benadering geoorloofd is.

Wij moeten ons hierbij met eene schatting vergenoegen en stellen daartoe  $\delta$  op eenige millioenste deelen van een millimeter b.v.  $\delta = 0,000002$ . Zooals later nog blijken zal, heeft deze schatting groote waarschijnlijkheid;  $\lambda$  bedraagt altijd eenige tienduizendste deelen van een millimeter, stellen wij er voor 0,0006, dan wordt  $\frac{\delta}{\lambda}$  van de orde 0,003 en  $\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$  van de orde 0,00001.

Wij kunnen dus stellen:

$$\frac{8 \pi^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{(n^2 - 1)^2} 0,00001 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0,01,$$

en hieruit moet dan  $\alpha_1$  bepaald worden. Daar  $\alpha_1$  toch in de nabijheid ligt van den polarisatiehoek, die b. v.  $60^\circ$  kan bedragen, zullen wij voor  $\cos \alpha_1$  stellen  $\frac{1}{2}$  en voor  $\sin \alpha_1$   $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ , nemen wij bovendien nog  $n = 1,5$  dan kan nu  $\alpha_1 + \alpha_2$  berekend worden.

Met deze gegevens vindt men:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 89^\circ 52';$$

ofschoon nu onze berekening slechts een zeer ruwe schatting is, en daardoor  $\alpha_1 + \alpha_2$  mogelijk iets kleiner had moeten zijn, kan men uit deze uitkomst toch wel afleiden, dat de invalshoeken, waarbij onze benadering fouten oplevert, die hoogstens met de waarnemingsfouten gelijk staan, altijd toch zeer dicht bij den polarisatiehoek gelegen zijn, zoo zelfs dat men dergelijke afwijkingen wel nooit zal kunnen waarnemen, daar de intensiteit der trillingen in het invalsvlak bij zulke hoeken te zwak is, om nauwkeurige waarnemingen toe te laten. Eindelijk doe ik nog opmerken, dat JAMIN en QUINCKE dezelfde onnauwkeurigheid begaan, wanneer zij de algemeene formule van CAUCHY door hunne benaderingsformule vervangen, want daarbij wordt de term:

$$e^2 \sin^2 i \operatorname{tg}(i+r) \operatorname{tg}(i-r)$$

in den noemer tegen de eenheid weggelaten en ook deze term kan voor  $i+r = 90^\circ$  zeer groot worden.

Wij kunnen nu, althans voor die invalshoeken, waarvoor het phaseverschil is waargenomen, deze grootheid door de volgende formule voorstellen:

$$\operatorname{tg}(\varphi_s - \varphi_p) = \frac{2\pi \sin \alpha_1}{(n^2 - 1) \lambda_1} \left\{ \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \right\} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(e - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx; \quad (2)$$

de ellipticiteitscoëfficiënt wordt dan:

$$e = \frac{2\pi}{(n^2 - 1) \lambda_1} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx.$$

De tangens van het totale phaseverschil, dat uit den gelijktijdigen invloed van de longitudinale trillingen en den geleidelijken overgang ontstaat, kan met het oog op de geringe waarde der beide coëfficiënten worden voorgesteld door de som

van (1) en (2), waardoor men verkrijgt:

$$(p + e \sin \alpha_1) \{ \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \} \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

Deze uitdrukking voldoet aan de waarnemingen, daar dit met (1) en (2) afzonderlijk het geval is; bovendien is het gemakkelijk in te zien, dat zij de door QUINCKE waargenomen eigenschap bezit om bij omkeering der beide middenstoffen van teeken te veranderen, maar overigens dezelfde waarde te behouden. Uit den vorm van  $p$ , n.l.:

$$p = \frac{n^2 - 1}{8 \pi \varepsilon_2},$$

volgt onmiddellijk, dat deze uitdrukking, wanneer  $\varepsilon_2$  verandert in  $\varepsilon_1$  en  $n$  in  $\frac{1}{n}$ , negatief wordt maar overigens dezelfde waarde behoudt.

Verder heeft men:

$$e \sin \alpha_1 = \frac{2 \pi \sin \alpha_1}{(n^2 - 1) \lambda_1} \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx;$$

bij de bovengenoemde verwisseling wordt dit:

$$\frac{2 \pi \sin \alpha_2}{(1 - n^2) \lambda_2} n^2 \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_2} dx.$$

Nu is  $\frac{\sin \alpha_2}{\lambda_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1}$  en  $\frac{n^2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1}$ , zoodat ook deze laatste vorm op het teeken na met  $e \sin \alpha_1$  overeenkomt. De geheele uitdrukking (3) zou dus van teeken veranderen; alleen de term met  $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$  maakt hierop eene uitzondering omdat  $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$  zelf ook negatief wordt. Dit is echter geen bezwaar, want, zooals reeds werd opgemerkt lieten JAMIN en QUINCKE den term met  $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$  bij de toepassing op hunne waarnemingen weg, met het oog op de nauwkeurigheid, die bij die waarnemingen bereikt werd.

Men zou nu uit de waargenomen phaseverschillen met behulp van (3) de meest waarschijnlijke waarden van  $p$  en  $e$  kunnen afleiden, hetgeen vooral van belang zou zijn, omdat

men uit  $p$  de constante  $\varepsilon_2$  kan vinden, die men tot dusver nog niet heeft kunnen bepalen; ik geloof echter dat eene dergelijke bepaling vooralsnog weinig waarde zou hebben. Afgezien toch van de onzekerheid, die den coëfficiënt  $p$  nog altijd aankleeft, tengevolge van onze onbekendheid met de constante  $k$ , zijn de proeven van JAMIN en QUINCKE voor dergelijke gevolgtrekkingen niet geschikt. De grootheden, die daarbij werden gemeten, zijn zeer klein, zoodat de waarnemingsfouten grooten invloed hadden; QUINCKE 1) zegt dan ook, dat naar zijne meening de nauwkeurigheid van den compensator van BABINET zeer is overschat, terwijl ook JAMIN sommige zijner uitkomsten niet zonder voorbehoud opgeeft. Bovendien moet het waargenomen phaseverschil gedeeld worden door  $\text{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)$ , om de waarden der coëfficiënten te vinden en nu zal in de nabijheid van den hoofdinvalshoek, waar het phaseverschil eene merkbare waarde heeft,  $\text{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)$  snel veranderen met  $\alpha_1$ , zoodat eene kleine fout in de bepaling van  $\alpha_1$  grooten invloed op de waarden der coëfficiënten zal hebben. Het is dus een vereischte, dat de hoek van inval zeer nauwkeurig bepaald wordt en dit schijnt nu niet het geval geweest te zijn; terwijl toch JAMIN opgeeft, dat de invalshoeken slechts tot  $10'$ , in het gunstigste geval tot  $5'$  nauwkeurig werden bepaald, erkent QUINCKE, dat het hem niet gelukt is, eene even groote nauwkeurigheid als zijne voorgangers te bereiken.

§ 4. Wij zullen dus voorloopig alleen den coëfficiënt in rekening brengen, die den grootsten invloed heeft.

Daartoe beschouwen wij in de eerste plaats  $e$ , waarvoor wij gevonden hebben:

---

1) Pogg Ann. Bd. 127.

$$e = \frac{2\pi}{(n^2 - 1)\lambda_1} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 \varepsilon} d\varepsilon.$$

Om deze integraal te kunnen berekenen, zou men moeten weten, hoe  $\varepsilon$  aan het grensvlak verandert. Hieromtrent nu verkeeren wij geheel in het onzekere; alleen zal het blijken dat bij een volkomen geleidelijken overgang, de orde van grootte der integraal kan worden bepaald. Stellen wij toch:

$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 \varepsilon} = f(x),$$

dan zal, omdat bij een geleidelijken overgang steeds  $\varepsilon_2 > \varepsilon > \varepsilon_1$  is,  $f(x)$  altijd positief zijn. Wij kunnen nu eene middenwaarde van  $f(x)$  buiten het integraalteeken brengen. Daar  $f(x)$  altijd positief is, hebben wij daartoe slechts de grootste en de kleinste waarde te berekenen. De kleinste waarde van  $f(x)$  is 0 en wordt bereikt, wanneer  $\varepsilon = \varepsilon_1$  of  $\varepsilon = \varepsilon_2$  is; de grootste waarde, die bereikt wordt voor  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ , is:

$$\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - 1\right)^2 = (n - 1)^2,$$

waaruit volgt, dat men als middenwaarde van  $f(x)$  kan aannemen:

$$\vartheta(n - 1)^2,$$

waarin  $1 > \vartheta > 0$  is. Brengt men deze waarde buiten het integraalteeken, dan wordt:

$$e = 2\pi \vartheta \frac{n-1}{n+1} \frac{\delta_1 + \delta_2}{\lambda_1}.$$

Hierin is  $(\delta_1 + \delta_2)$  de dikte der geheele overgangslaag, waarvoor wij in 't vervolg  $\delta$  zullen schrijven. Dit geeft:

$$e = 2\pi \frac{n-1}{n+1} \frac{\vartheta \delta}{\lambda_1} \dots \dots \dots (4)$$

en nu is  $\vartheta \delta$  een zeker gedeelte van de dikte der overgangs-

laag. Substitueert men de waarden van  $p$  en  $e$  in (3), dan verkrijgt men, als  $k$  positief wordt aangenomen :

$$\frac{n^2 - 1}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{16\pi^2}{(n+1)^2} \frac{\vartheta \delta}{\lambda_1} \sin \alpha_1 \right) \left\{ \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \right\}.$$

Van  $\varepsilon_2$  weten wij niets anders, dan dat deze constante zeer groot moet worden aangenomen, zoodat  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  zeer klein is; daartegenover staat dat de verhouding  $\frac{\delta}{\lambda}$  insgelijks zeer klein is, zoodat wij reeds vroeger de tweede machten er van tegen de eenheid verwaarloosd hebben. Wij kunnen echter bepalen van welke orde deze verhouding is, daar  $\delta$  in verband staat met den straal der werkingssfeer van de moleculaire krachten. Door de moleculaire werkingen van de eerste middenstof op de tweede zal in een laag ter dikte van dien straal een andere dichtheid ontstaan; deze laag werkt weêr op een volgende en dit gaat zoo door. Op dezelfde wijze werkt de tweede middenstof op de eerste, waaruit volgt dat de afstand waarover zich de dishomogeneiteit, uitstrekt, zeker grooter, mogelijk wel veel grooter zal zijn, dan de straal der werkingssfeer. Bepalingen van dien straal zijn o. a. verricht door QUINCKE 1), bij zijne bekende proeven over de stijghoogte van water tusschen glasplaten, waarop zich wigvormige zilverlagen hadden afgezet; hij vond toen :

$$e = 0,000050 \text{ m.M.},$$

eene waarde, die waarschijnlijk veel te groot is, zooals QUINCKE zelf erkent.

Eene grootheid, die ook in verband staat met den straal der werkingssfeer, is de verhouding der capillariteitsconstanten  $H$  en  $K$ ; zooals echter uit de beteekenis dier constanten volgt, zal deze verhouding slechts een gedeelte van den straal zijn. Van

1) Pogg. Ann. Bd. 137.

der Waals 1) heeft voor eenige vloeistoffen de verhouding berekend en verkreeg daarbij de volgende uitkomsten :

Ether	0,000 000 29	mM.
Alcohol	0,000 000 25	„
Zwavelkoolstof	0,000 000 23	„
Water	0,000 000 31	„
Kwik	0,000 000 49	„

Daar nu  $\vartheta \delta$  een gedeelte van de dikte der overgangslaag is en deze laatste zeker grooter is, dan de straal der werkingssfeer zullen wij met het oog op bovenstaande getallen waarschijnlijk niet ver van de waarheid zijn, wanneer wij  $\vartheta \delta$  stellen op eenige millioenste deelen van een millimeter b. v.  $\vartheta \delta = 0,000002$ . De golflengte van het licht bedraagt altijd eenige tienduizendste deelen van een millimeter, b. v.  $\lambda_1 = 0,0006$ , en dus is de verhouding  $\frac{\vartheta \delta}{\lambda_1} = 0,03$ .

Verder vindt men  $16\pi^2 \frac{\vartheta \delta}{\lambda_1} = 4,74$ ; derhalve wordt de coëfficiënt  $\frac{16\pi^2}{(n+1)^2} \frac{\vartheta \delta}{\lambda_1}$  van dezelfde orde als  $\frac{1}{(n+1)^2}$ .

Er blijft dus nog over  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  en  $\frac{1}{(n+1)^2}$  met elkander te vergelijken; nu is  $\varepsilon_2$  echter zeer groot ten opzichte van  $(n+1)^2$ , derhalve  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  zeer klein vergeleken met  $\frac{1}{(n+1)^2}$ , waarmede tevens is aangetoond dat de coëfficiënt  $p$  weinig invloed zal hebben tegenover  $e$ .

Voor het geval, dat de constante  $k$  negatief wordt aangenomen, krijgt  $p$  een eenigszins anderen vorm, n. l.:

$$p = \frac{\frac{n^2 - 1}{8\pi\varepsilon_2}}{\sqrt{1 + \frac{k'}{(1 + 4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1}}},$$

waarbij  $k = -k'$  is gesteld.

1) De Continuïteit van den gas- en vloeistofoestand, p. 101.



Hierdoor kan  $p$  echter alleen kleiner worden, maar niet grooter, zoodat de bovengemaakte gevolgtrekking ook hier onveranderd doorgaat.

§ 5. In de tweede plaats moeten nu onze berekende waarden voor de verhouding der amplitudines met de waarnemingen worden vergeleken. Laten wij ook hier den invloed der longitudinale trillingen buiten rekening, dan wordt deze verhouding volgens de formules van het derde hoofdstuk:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p}, \quad \dots \quad (5)$$

en hiervoor konden wij bij benadering schrijven:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s - \operatorname{tg}^2 \varphi_p),$$

echter weer onder voorbehoud, dat  $\alpha_1 + \alpha_2$  niet in de nabijheid van  $90^\circ$  gelegen was. Bovendien is het mij niet gelukt de uitdrukking, die bij deze benadering verkregen werd en die vrij samengesteld was tot denzelfden vorm te herleiden als de formule van CAUCHY; deze beide bezwaren komen mij echter voor niet van overwegend belang te zijn. Zoolang toch  $\alpha$  niet in de onmiddellijke nabijheid van den polarisatiehoek ligt, zal de afwijking, die de formule (5) van de eenvoudige formule van FRESNEL vertoont, altijd slechts de tweede machten van zeer kleine coëfficiënten bevatten, zoodat wij niet kunnen verwachten dat deze afwijking proefondervindelijk te bepalen is. Maar in de tweede plaats zal het nu blijken, dat de formule (5) wanneer men daarin  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  stelt, hetzelfde oplevert als de formule van CAUCHY. Men verkrijgt n. l. in dit geval met het oog op (16) en (25) van het derde hoofdstuk:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \left( \frac{4\pi \cos \alpha_1}{n^2 - 1 \lambda_1} \right)^2 \frac{\sin^4 \alpha_1}{\sin^4 2\alpha_1} \frac{(n^2 A_2 - A_1 - n^2 B_1 + B_2)^2}{1 + \left\{ \frac{4\pi \cos \alpha_1}{n^2 - 1 \lambda_1} (n^2 A_2 - A_1) \right\}^2}$$

en nu bestaat er geen bezwaar, den tweeden term in den noemer tegen de eenheid weg te laten. Daarna vindt men dan na eenige herleiding:

$$\frac{a_s}{a_p} = \frac{2\pi}{(n^2-1)\lambda_1} \frac{\sin \alpha_1}{\sin 2\alpha_1} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx,$$

of:

$$\frac{a_s}{a_p} = \frac{e}{2 \cos \alpha_1} \dots \dots \dots (6)$$

Deze uitdrukking kan nu gebruikt worden om den ellipticiteitscoëfficiënt te berekenen. In zijne tabel No. IV 1) geeft JAMIN voor eenige vloeistoffen de verhouding  $\frac{a_s}{a_p} = k$  voor den hoofdinvalshoek aan. Wij zullen deze opgaven gebruiken om, na substitutie van den vorm voor  $e$  uit (4) en (6),  $\vartheta \delta$  te berekenen. Vinden wij dan voor  $\vartheta \delta$  waarden, die overeen te brengen zijn met de getallen, die voor den straal der werkingssfeer zijn opgegeven, dan is dit vooreerst een steun voor onze bewering dat de geleidelijke overgang op zichzelf tot verklaring van de positieve elliptische polarisatie voldoende is, maar verder blijkt dan, dat men ook langs optischen weg den straal der werkingssfeer kan bepalen.

Noemen wij nu den hoofdinvalshoek  $I$ , dan hebben wij vooreerst:

$$e = 2 k \cos I$$

en na substitutie van  $e$ :

$$\vartheta \delta = \frac{(n+1) k \cos I}{(n-1) \pi} \lambda_1.$$

Met behulp van deze formule zijn voor eenige vloeistoffen uit de tabel van JAMIN de waarden van  $\vartheta \delta$  berekend, die men met de door JAMIN waargenomen grootheden in onderstaande tabel vindt samengevat:

1) Ann. de Chim. et de Phys. T 31—33. pag. 179.

	$k$	$J$	$n$	$\vartheta \delta$
Amyleen . . .	0,00233	56°5'	1,487	0,0000014
Alcohol. . . .	0,00208	53°38'	1,36	0,0000017
Benzol . . . .	0,00118	56°55'	1,503	0,0000011
Aceton. . . .	0,00165	53°55'	1,359	0,0000013
Aethylxalaat .	0,00154	55°45'	1,4068	0,0000011
Chloral. . . .	0,00154	55°25'	1,461	0,00000098
Aethylacetaat .	0,00117	53°45'	1,367	0,00000094
Methylacetaat .	0,00101	53°47'	1,359	0,00000082

Voor  $\lambda_1$ , de golflengte in de lucht, is bij deze berekening gebruikt de waarde 0,00066 mM. 1) Vergelijkt men deze getallen voor  $\vartheta \delta$  met de vroeger opgegeven waarden voor  $\frac{H}{K}$ , dan blijkt dat zij wel is waar allen grooter zijn, zooals te verwachten was, maar toch niet zooveel, of men kan de overeenstemming alleszins voldoende achten.

§ 5. De verklaring van de elliptische polarisatie is nu echter nog niet volledig, want bij water en verschillende zoutoplossingen is door JAMIN en QUINCKE een negatief phaseverschil waargenomen, en dit kan door onze formule (2) niet worden verkregen. Hetzij men toch aan het grensvlak eener vloeistof en lucht een volkomen geleidelijken overgang of een overgang met eene discontinuïteit aanneemt, altijd zal de waarde van  $\varepsilon$  onder het integraalteeken, tusschen  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  gelegen zijn, zoodat de integraal steeds positief wordt.

Ook bij vaste lichamen zijn de beide soorten van terugkaatsing waargenomen; nu zou het kunnen gebeuren dat, ten gevolge van de drukking, die bij het polijsten wordt uitge-

oefend, aan het oppervlak de dichtheid grooter werd dan in het binnenste. Dan werd daar  $\varepsilon > \varepsilon_2$  en tevens  $> \varepsilon_1$ , hetgeen tengevolge zou hebben, dat enkele elementen der integraal negatief werden, zoodat deze de beide teekens zou kunnen verkrijgen; met zekerheid echter is hieromtrent niets te zeggen.

In de longitudinale trillingen is de oplossing der moeielijkheid niet te zoeken, daar deze insgelijks slechts een positief phaseverschil kunnen veroorzaken, terwijl zij bovendien, zooals in de vorige § werd aangetoond, slechts weinig invloed op het verschijnsel hebben, in vergelijking met den geleidelijken overgang aan het grensvlak.

---

De uitkomsten van ons onderzoek kunnen nu in het kort aldus worden samengevat. Ter verklaring van de elliptische polarisatie van het teruggekaatste licht, kunnen bij de beschouwde lichamen de longitudinale trillingen en de geleidelijke overgang aan het grensvlak, maar niet de absorptie bijdragen.

De invloed der longitudinale trillingen kan niet worden vastgesteld, zoolang er nog onzekerheid bestaat omtrent de onderlinge werking van ongesloten stroomen; maar in ieder geval is de invloed van den geleidelijken overgang overwegend. Beiden kunnen echter alleen de positieve terugkaatsing, niet de negatieve verklaren.

Neemt men intusschen in aanmerking, dat in de formules van CAUCHY de beteekenis van den ellipticiteitscoëfficiënt nagenoeg geheel in het onzekere bleef, dan geloof ik dat men niet-tegenstaande dit bezwaar toch aan onze beschouwingen de voorkeur zal moeten geven boven de tot dusver gegeven verklaring van de elliptische polarisatie.

De negatieve terugkaatsing zal dan nog verklaard moeten worden door een anderen invloed, die aan het grensvlak werkzaam is en die tevens ten gevolge zal hebben dat onze bepaling van den straal der werkingssfeer door middel van vloeistoffen met positieve terugkaatsing, aan eene revisie moet worden onderworpen.

---

THE HISTORY

## STELLINGEN.

---

### I.

De theorie van Cauchy kan van het verschijnsel der elliptische polarisatie bij doorschijnende middenstoffen geene bevredigende verklaring geven.

### II.

De verklaring moet bij lichamen met eene positieve terugkaatsing hoofdzakelijk in den invloed van een geleidelijken overgang aan het grensvlak worden gezocht.

### III.

Wanneer Edlund (Phil. Mag. March 1882) beweert, dat bij vaste lichamen en vloeistoffen, de weerstand evenredig is met de stroomintensiteit, kent hij daarbij aan het woord „weerstand” eene beteekenis toe, die van de gebruikelijke verschilt. Door zijne beschouwingen over de grootte van den weerstand bij gassen geeft hij van de verschijnselen, bij deze lichamen waargenomen, geene verklaring.

## IV.

Ten onrechte zegt Planck (Wied. Ann. XV): „Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, consequent durchgeführt, ist in Widerspruch mit der Annahme endlicher Atome.”

## V.

Er bestaat geenerlei grond, om, zooals Ketteler (Wied. Ann. XII, p. 379) dit doet, het als eene aanbeveling voor eene theorie der terugkaatsing van het licht te beschouwen, dat zij „unter strengem Ausschluss aller complexen Gröszen” is opgebouwd.

## VI.

Het gewone bewijs voor de wet van Avogadro is onvolledig omdat daarbij stilzwijgend wordt aangenomen, dat de levende kracht der moleculen van twee afzonderlijke gassen, bij gelijke temperatuur, dezelfde is als in een mengsel dier gassen.

## VII.

Bij de behandeling van het geval der gelijke wortels bij lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten verdient de methode van de integreerende vergelijking de voorkeur boven die van Euler.

## VIII.

In alle zilververbindingen komen hoogstwaarschijnlijk twee aaneenverbonden zilveratomen voor.



## IX.

De capillariteitstheorie van Poisson is na de ontwikkeling van de kinetische molecuultheorie onhoudbaar geworden.

## X.

Het gemis aan overeenstemming tusschen de theoretische en de waargenomen waarde van de verhouding der dwarscontractie tot de lengtedilatatie in de theorie der elasticiteit moet waarschijnlijk daaraan worden toegeschreven, dat bij de theorie de warmtebeweging niet in rekening is gebracht.

## XI.

Bij de proeven, die Wüllner (Pogg. Ann. Bd. CIX) genomen heeft om aan te toonen, dat door enkel chemische werking een stroom kan ontstaan, moeten de waargenomen verschijnselen aan andere oorzaken, dan alleen de chemische werking worden toegeschreven.

## XII.

De meening, dat melksap, gom en hars in de planten alleen zouden dienen om door uitvloeijing bij verwondingen de lucht af te sluiten, is niet door voldoende bewijzen gestaafd.

---

THE

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and appears to be a formal document or letter.

## I N H O U D.

---

Inleiding . . . . . 1

EERSTE HOOFDSTUK.

De theorie van Cauchy. . . . . 5

TWEEDE HOOFDSTUK.

Invloed der longitudinale trillingen volgens de Electro-  
magnetische theorie van het licht . . . . . 18

DERDE HOOFDSTUK.

Invloed van een geleidelijken overgang aan het grensvlak. 36

VIERDE HOOFDSTUK.

Rechtstreeksche berekening van den invloed van een gelei-  
delijken overgang. . . . . 56

VIJFDE HOOFDSTUK.

Het verband tusschen absorptie en elliptische polarisatie . 80

ZESDE HOOFDSTUK.

De Ellipticiteits-coëfficiënt. . . . . 88

Stellingen . . . . . 107

---

