

33

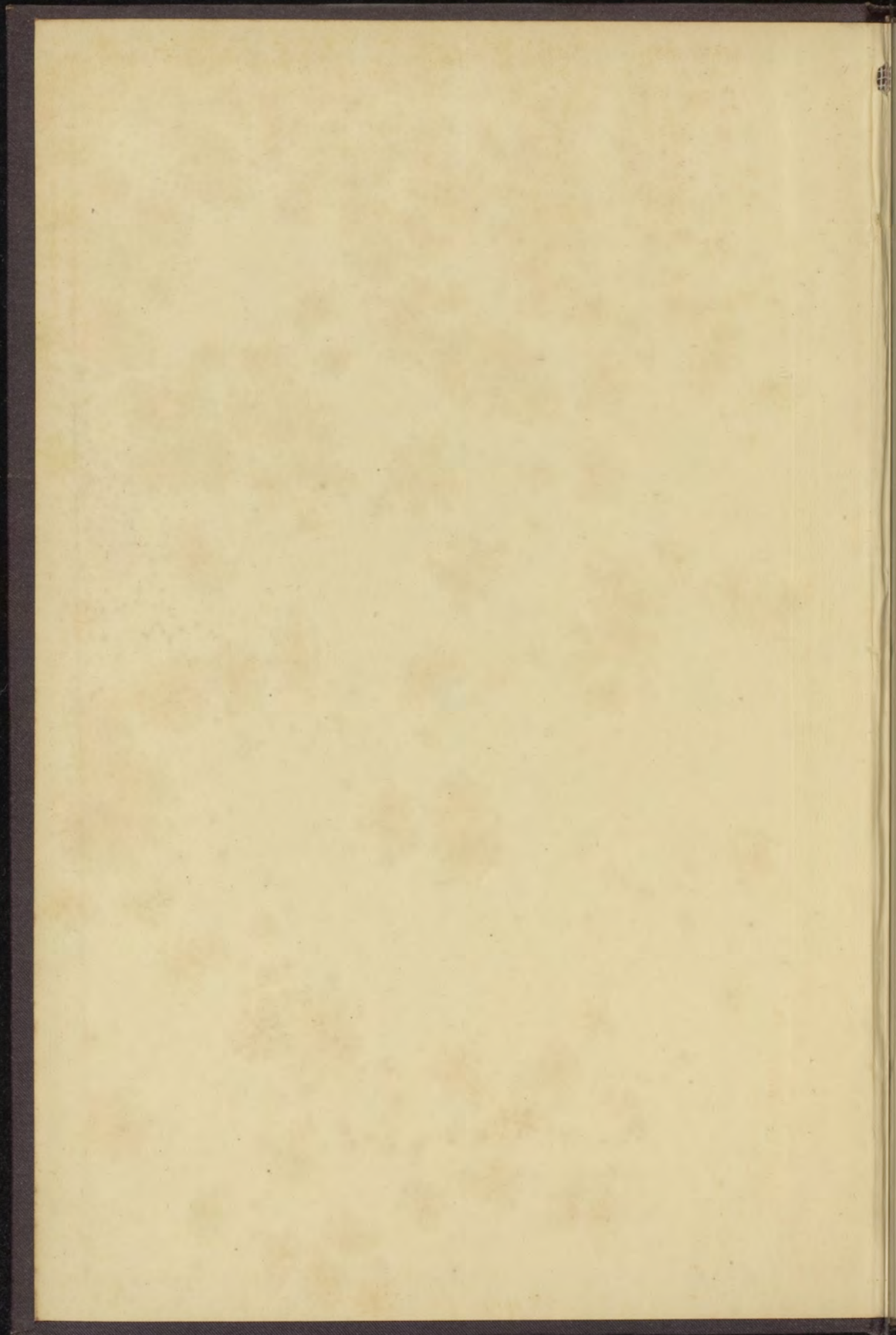
J. C. VAN DEN BERG

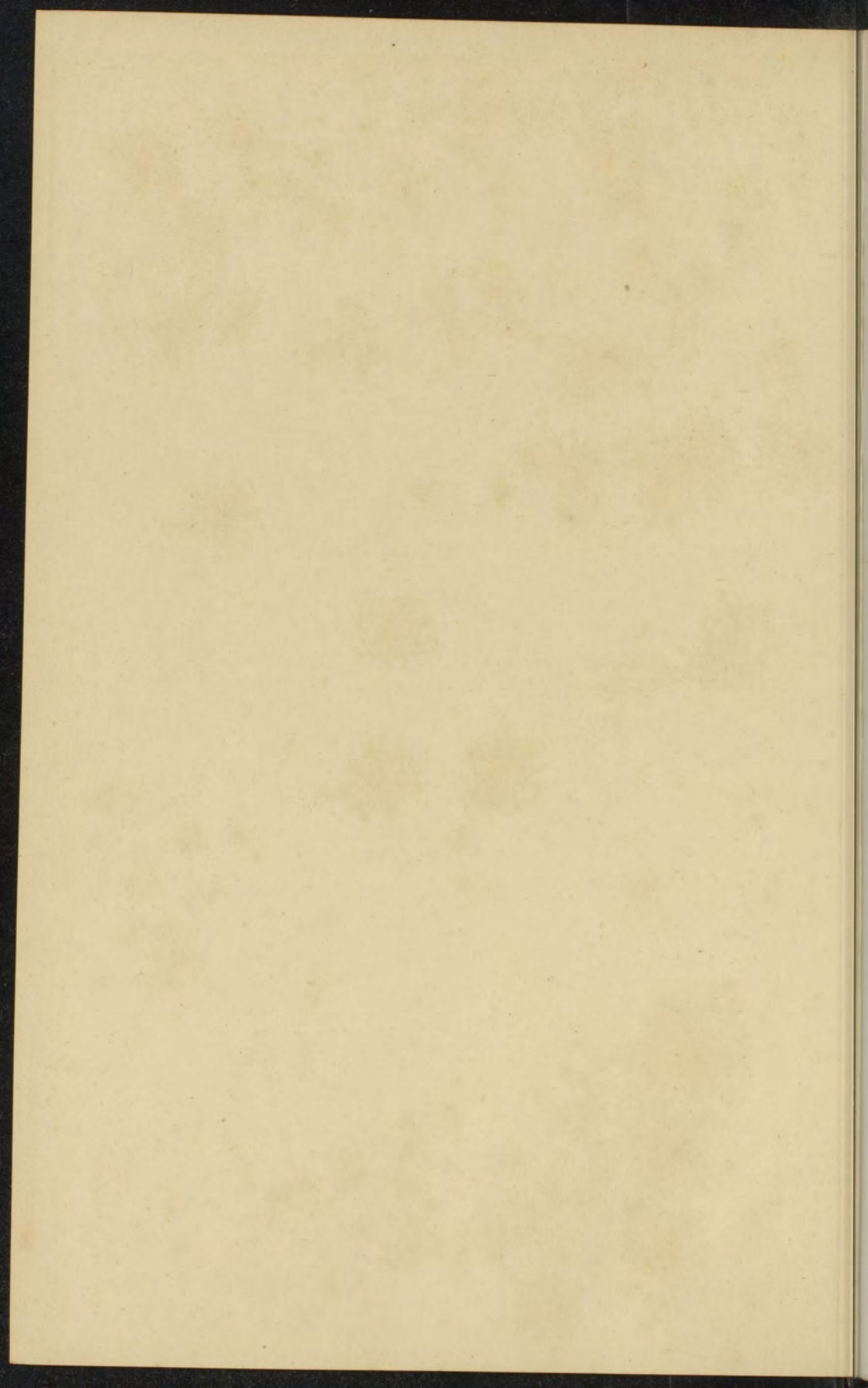
DE

WERVELBEWEGING

Diss Leiden

1888 nr 33





DE WERVELBEWEGING.

DE
WERVELBEWEGING.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. S. S. ROSENSTEIN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

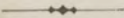
VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN,

OP ZATERDAG 7 JULI 1888, DES NAMIDDAGS TEN 1 URE,

DOOR

Jan Cornelis van den Berg,

GEBOREN TE ROTTERDAM.



HAARLEM,

De Haarlemsche Boek- en Muziekhandel.

1888.



Bij de voltooiing van mijn proefschrift voel ik mij gedrongen mijnen hartelijken dank te betuigen aan U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde; vooral U, Hooggeachte Promotor, Prof. VAN GEER, dank ik voor de welwillendheid, die Gij mij vroeger en ook nu weder bij de bewerking van dit proefschrift betoond hebt.

The following is a list of the names of the persons who have been admitted to the office of the Secretary of the Board of Education since the last meeting of the Board.

1. Mr. J. H. [Name]

2. Mr. J. H. [Name]

3. Mr. J. H. [Name]

4. Mr. J. H. [Name]

5. Mr. J. H. [Name]

6. Mr. J. H. [Name]

7. Mr. J. H. [Name]

8. Mr. J. H. [Name]

9. Mr. J. H. [Name]

10. Mr. J. H. [Name]

11. Mr. J. H. [Name]

12. Mr. J. H. [Name]

13. Mr. J. H. [Name]

14. Mr. J. H. [Name]

15. Mr. J. H. [Name]

16. Mr. J. H. [Name]

17. Mr. J. H. [Name]

18. Mr. J. H. [Name]

19. Mr. J. H. [Name]

20. Mr. J. H. [Name]

21. Mr. J. H. [Name]

22. Mr. J. H. [Name]

23. Mr. J. H. [Name]

24. Mr. J. H. [Name]

25. Mr. J. H. [Name]

26. Mr. J. H. [Name]

27. Mr. J. H. [Name]

28. Mr. J. H. [Name]

29. Mr. J. H. [Name]

30. Mr. J. H. [Name]

31. Mr. J. H. [Name]

32. Mr. J. H. [Name]

33. Mr. J. H. [Name]

34. Mr. J. H. [Name]

35. Mr. J. H. [Name]

36. Mr. J. H. [Name]

37. Mr. J. H. [Name]

38. Mr. J. H. [Name]

39. Mr. J. H. [Name]

40. Mr. J. H. [Name]

41. Mr. J. H. [Name]

42. Mr. J. H. [Name]

43. Mr. J. H. [Name]

44. Mr. J. H. [Name]

45. Mr. J. H. [Name]

46. Mr. J. H. [Name]

47. Mr. J. H. [Name]

48. Mr. J. H. [Name]

49. Mr. J. H. [Name]

50. Mr. J. H. [Name]

51. Mr. J. H. [Name]

52. Mr. J. H. [Name]

53. Mr. J. H. [Name]

54. Mr. J. H. [Name]

55. Mr. J. H. [Name]

56. Mr. J. H. [Name]

57. Mr. J. H. [Name]

58. Mr. J. H. [Name]

59. Mr. J. H. [Name]

60. Mr. J. H. [Name]

61. Mr. J. H. [Name]

62. Mr. J. H. [Name]

63. Mr. J. H. [Name]

64. Mr. J. H. [Name]

65. Mr. J. H. [Name]

66. Mr. J. H. [Name]

67. Mr. J. H. [Name]

68. Mr. J. H. [Name]

69. Mr. J. H. [Name]

70. Mr. J. H. [Name]

71. Mr. J. H. [Name]

72. Mr. J. H. [Name]

73. Mr. J. H. [Name]

74. Mr. J. H. [Name]

75. Mr. J. H. [Name]

76. Mr. J. H. [Name]

77. Mr. J. H. [Name]

78. Mr. J. H. [Name]

79. Mr. J. H. [Name]

80. Mr. J. H. [Name]

81. Mr. J. H. [Name]

82. Mr. J. H. [Name]

83. Mr. J. H. [Name]

84. Mr. J. H. [Name]

85. Mr. J. H. [Name]

86. Mr. J. H. [Name]

87. Mr. J. H. [Name]

88. Mr. J. H. [Name]

89. Mr. J. H. [Name]

90. Mr. J. H. [Name]

91. Mr. J. H. [Name]

92. Mr. J. H. [Name]

93. Mr. J. H. [Name]

94. Mr. J. H. [Name]

95. Mr. J. H. [Name]

96. Mr. J. H. [Name]

97. Mr. J. H. [Name]

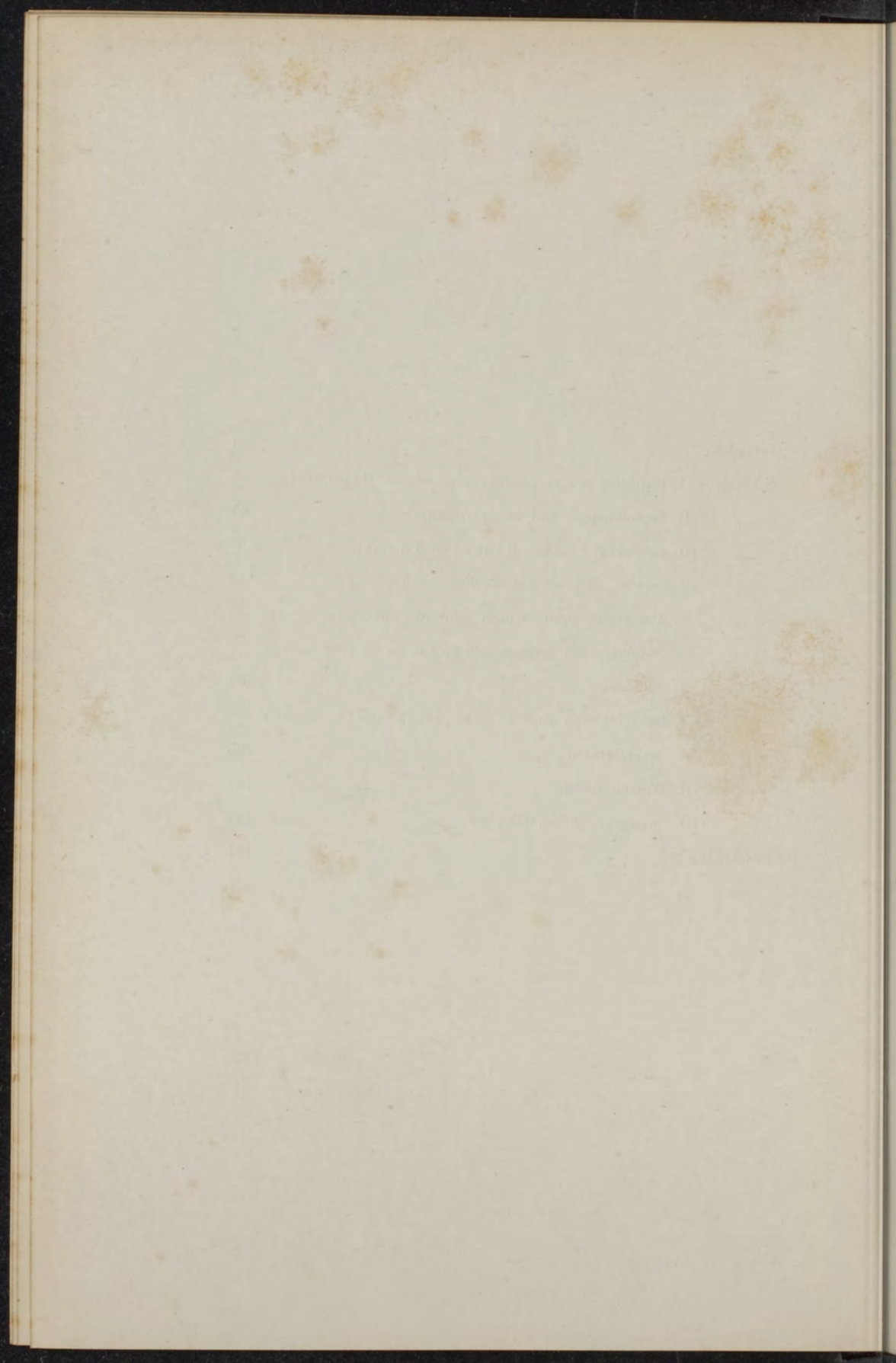
98. Mr. J. H. [Name]

99. Mr. J. H. [Name]

100. Mr. J. H. [Name]

I N H O U D.

	Bladz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I. Ontleding der vloeistofbeweging volgens Helmholtz	9
" II. Eigenschappen van de wervelbeweging	17
" III. Beschouwingen van Hankel en Thomson.	28
" IV. Bepaling der snelheid uit de rotatiebeweging	43
" V. Algemeene eigenschappen van evenwijdige, rechte lijnige werveldraden, toepassingen op één en op twee wervel- draden.	67
" VI. Beweging van drie en meer evenwijdige, rechte lijnige werveldraden	95
" VII. Wervelcylinder.	121
" VIII. Cirkelvormige werveldraden	129
STELLINGEN.	157



I N L E I D I N G.

Door het beschouwen van vloeistofbewegingen zonder snelheidspotential heeft de hydrodynamica in de laatste 40 jaren eene groote uitbreiding verkregen. Hierin ligt de aanleiding, dat ik getracht heb in dit proefschrift een overzicht te geven, van hetgeen tot nu toe op dit gebied bekend is.

Wel zag eenige maanden geleden reeds het proefschrift van den Heer QUINT over dit onderwerp het licht ¹⁾, en vreesde ik, dat mijn arbeid daardoor geheel overbodig zou zijn; na kennismaking echter met bovengenoemd werk, besloot ik mijn proefschrift, waaraan ik reeds langen tijd bezig was, af te maken, daar het in verschillende opzichten van dat van Dr. QUINT afweek.

In de eerste plaats toch is getracht de wervelbeweging af te leiden zoowel uit de formules van EULER als uit die van LAGRANGE, om daarna het verband aan te toonen, dat er tusschen die uitkomsten bestaat. Beperkt Dr. QUINT zich

1) N. QUINT, De wervelbeweging. Amsterdam, van Heteren, 1888.

vervolgens tot het geval, dat de vloeistof zich oneindig ver uitstrekt, naar aanleiding van het werk van BELTRAMI vond ik het belangrijk ook na te gaan, welken vorm de formules voor de snelheid zouden verkrijgen, wanneer de werveldraden aan het oppervlak niet eindigen, en wat dan zou zijn de beteekenis der grootheden, die in de formules voorkomen.

Ook het hoofdstuk over de beweging van rechtlijnige werveldraden wijkt voor een groot deel van dat van Dr. QUINT af, omdat hij m. i. zeer ten onrechte de methode der beelden van wervels in sommige gevallen afkeurt. Zijn opmerking, dat in het algemeen de baan van een werveldraad niet verkregen mag worden door de stroomfunctie constant te nemen, is, geloof ik, volkomen juist; maar wat doet men bij de theorie der beelden om de snelheid van een werveldraad te verkrijgen? Men bepaalt ter plaatse, waar zich de wervel bevindt, de waarde van de stroomfunctie, geleverd door *al* de beelden en door *al* de werveldraden, behalve die, waarvan men de baan zoekt, omdat de werveldraad zich zelf geen voortgaande snelheid mededeelt. Dientengevolge is het alleen dan mogelijk zoo de stroomfunctie op te stellen, als men werkelijk van beelden kan spreken, zoodat deze methode ook niet mag gebruikt worden, wanneer zich bijv. een wervel bevindt in een ruimte begrensd door twee platte vlakken, die een hoek van $\frac{\pi}{n}$ maken, waarbij *n* geen geheel getal is; in dit geval toch zijn er geen beelden.

Bij den wervelcylinder is behalve de snelheid binnen den cylinder ook die er buiten gegeven, door gebruik te maken van een geheel andere methode dan men o. a. bij KIRCHHOFF vindt; daardoor verkrijgt men een andere, en

naar ik meen, ook duidelijker voorstelling van de geheele beweging.

Van den werveling met kleine cirkelvormige doorsnede heb ik trachten aan te toonen, dat hij niet stabiel is, zoodat zijn voortgaande beweging slechts bij benadering kan worden aangegeven. Daarom oordeel ik het onnoodig meer dan één term voor die snelheid te geven, zoodat de omslachtige berekeningen van HICKS door middel van de toroïdaal functies, die ook door Dr. QUINT zijn overgenomen, hier zeer goed kunnen gemist worden. Verder meen ik den invloed der wrijving op de wervelbeweging te mogen achterwege laten, daar het belangrijkste, wat daarvan bekend is, in het proefschrift van Dr. QUINT voorkomt.

Bij de door Dr. QUINT opgegeven litteratuur wensch ik nog het volgende te voegen:

BERTRAND, Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide. Comptes Rendus 1868.

Naar aanleiding hiervan zijn nog in diezelfde C. R. eenige opmerkingen van HELMHOLTZ en BERTRAND verschenen.

TROWBRIDGE, On liquid Vortex Rings. Phil. Mag. III.

HICKS, Quaternion investigations on stream and fluid motion. Quart. Journ. of Math. 1877.

FERRERS, Solution of certain questions in potentials and motion of liquid. Quart. Journ. of Math. 1878.

HILL, Some properties of the equations of hydrodynamics. Quart. Journ. of Math. 1880.

STEARNS, On some cases of the varying motion of a viscous fluid. Quart. Journ. of Math. 1880.

LAMB, Note on a theorem in the hydrodynamics. Messenger 7.

NANSON, Note on hydrodynamics. Messenger 7.

J. J. THOMSON, Vortex motion in a viscous incompressible fluid. Messenger 8.

LEWIS, Some cases of Vortex Motion. Messenger 9.

ROWLAND, On the motion of a perfect incompressible fluid, when no solid bodies are present. American Journ. of Math. 3.

CRAIG, On some possible cases of steady motion in a viscous fluid. American Journ. of Math. 3.

MARGULES, Ueber discrete Wirbelfäden. Anzeige der Kais. Akad. der Wissensch. zu Wien. 1880.

MARGULES, Notiz über die Rotation einer Flüssigkeit in einem rechtwinkligen vierseitigen Prisma. Anz. der Kais. Akad. der Wissensch. zu Wien. 1880.

Alvorens tot het eigenlijke onderwerp over te gaan, moge nog iets over vloeistof en vloeistofbeweging vermeld worden.

Spreekt men in de mechanica van vloeistof, dan bedoelt men daarmede een doorlopende massa, waarvan de deeltjes zich volkomen vrij van elkander kunnen bewegen. Aan deze bepaling voldoet, zooals uit verschillende verschijnselen bekend is, geen der ons bekende vloeistoffen of gassen, die volgens de bepaling ook tot de vloeistoffen gerekend moeten worden; de continuïteit der massa toch is in strijd met de moleculaire opvatting der stof.

Daar de moleculen niet direct kunnen worden waargenomen, is men geheel onbekend met hare natuur en met de wijze, waarop zij op elkaar werken; evenwel begint men in den laatsten tijd te beproeven om de verschillende verschijnselen, die men kan waarnemen, te verklaren door het een en ander omtrent de moleculen aan te nemen. Voor een der nieuwste theorieën, de vortex-atoomtheorie

van Thomson, is de wervelbeweging de grondslag, daar zij op de onderstelling rust, dat elk atoom een werveling is, terwijl de moleculen uit een vereeniging van wervelingen bestaan.

Daar het noodzakelijk is de grondvergelijkingen der beweging op te stellen onafhankelijk van eenige hypothese, gaat men niet de beweging van afzonderlijke moleculen na, maar beschouwt men liever kleine massa's, die nog verscheidene moleculen bevatten en wier afmetingen zeer groot zijn ten opzichte van de gemiddelde afstanden der moleculen en van den afstand, waarop de afzonderlijke moleculen op elkaar werken. Dit laatste is noodig, omdat wij anders genoodzaakt waren de onderlinge werking van naast elkaar gelegen deeltjes na te gaan. Zulke kleine massa's, waaruit wij dus de vloeistof opgebouwd denken, noemen wij elementen.

Onder de snelheid in een bepaald punt der vloeistof verstaan wij de snelheid van het zwaartepunt van het element, dat zich daar bevindt; onder dichtheid in een bepaald punt de verhouding van de massa en het volume van dat element. De genoemde snelheid is dus iets geheel anders dan de snelheid van het molecuul. Daar de moleculen zich zeer onregelmatig bewegen, is het niet aan te nemen, dat een element steeds uit dezelfde moleculen blijft bestaan, iets wat ook door de diffusie blijkt in werkelijkheid niet het geval te zijn. Men kan echter aannemen, dat de eigenschappen van een element niet veranderen, doordat eenige moleculen het element verlaten en vervangen worden door andere, die een oogenblik vroeger tot een ander element behoorden. Een element kan dus beschouwd worden als een geheel.

Beweegt zich een vloeistof, dan zal die beweging afhan-

gen van de verschillende invloeden, die hun werking op de vloeistof doen gevoelen, en eerst dan zal het bepalen der beweging mogelijk zijn, wanneer die invloeden in formule gebracht kunnen worden; dit kan altijd, wanneer zij direct haar werking uitoefenen op het inwendige, want in dat geval zijn zij niets anders dan wat men gewoonlijk krachten noemt. Doen zij zich alleen aan de grens gevoelen en dientengevolge eerst in het inwendige, dan bepalen zij de voorwaarden, waaraan de grensbeweging moet voldoen, zoodat zij ook in dit geval als krachten kunnen beschouwd worden, die echter alleen op de oppervlakte werken; hierdoor ontstaan de grensvoorwaarden, die in bijna elk bijzonder geval verschillend zijn en voornamelijk de beweging bepalen.

Een kracht, die bij vloeistofbeweging optreedt, behalve als de geheele vloeistof zich gedraagt als een vast lichaam, is de druk. Ook bij een in rust zijnde vloeistof zal er druk bestaan, echter alleen dan, wanneer op de vloeistof uitwendige krachten werken; in dit geval zal het juist de druk zijn, die de werking der uitwendige krachten opheft en zodoende de vloeistof in rust houdt.

De eigenschap, waarop de geheele hydrostatica steunt, is dat een vloeistof niet in evenwicht kan zijn, wanneer de druk van twee naast elkander gelegen elementen schuin staat op hun grensvlak. Ook bij een in beweging zijnde ideale vloeistof neemt men aan dat er tusschen de deeltjes onderling geen tangentiële kracht werkt; deze bestaat wel bij de werkelijke vloeistof en openbaart zich als inwendige wrijving. Wij zullen van deze evenwel afzien en ons tot de beschouwing van ideale vloeistoffen bepalen. Uit het normaal zijn van den druk volgt, dat hij in alle richtingen dezelfde is.

Om de beweging in 't inwendige op te maken kan men twee wegen inslaan, die beide aan EULER te danken zijn. De eerste methode, de Eulersche genoemd, gaat na wat er op een bepaalde plaats geschiedt en bepaalt de snelheid in elk punt der vloeistof als functie van plaats en tijd.

De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Zie o. a. KIRCHHOFF, Vorlesungen über Math. Physik.

Hierbij behoort de continuïteitsvergelijking

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\theta = 0, \dots\dots\dots (2)$$

die voor onsamendrukbare vloeistoffen wordt

$$\theta = 0. \dots\dots\dots (2a)$$

In deze vergelijkingen stellen u, v, w de snelheidscomponenten voor, uitgedrukt als functies van x, y, z en t ; X, Y, Z zijn de componenten der uitwendige krachten, p is de druk, ρ de dichtheid, terwijl $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ de volumevermeerdering per eenheid van volume aangeeft.

Verder bestaat er nog een betrekking tusschen p en ρ afhangelende van den aard der vloeistof; deze kan alleen door proefneming worden bepaald.

Wegens haar beteekenis moeten u, v, w zijn éénwaardig

en eindig, p bovendien continu en positief; ρ moet zijn eenwaardig, eindig en positief.

De tweede methode, om de beweging in 't inwendige te bepalen, ten onrechte naar LAGRANGE genoemd ¹⁾, volgt een vloeistofdeeltje op zijn weg en bepaalt zijn plaats als functie van den tijd en van de plaats, die het oorspronkelijk innam.

De snelheidscomponenten hier beschouwd als functies van den tijd en van de coördinaten a, b, c , die het deeltje op een tijd $t=0$ bezat, zullen wij nu voorstellen door $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, de snelheid zelve door \bar{V} .

De vergelijkingen worden dan:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - X \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{da} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - X \right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{db} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - X \right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dc} &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

Verg. KIRCHHOFF, l. c.

1) Deze methode komt het eerst voor bij EULER: De principiis motus fluidorum (Novi comm. acad. sc. imp. Petropolitanae. Bd. XIV, deel I, pro anno 1759) in het 6^{de} hoofdstuk: De motu fluidorum ex statu initiali definiendo, pag 358. Men vindt haar 29 jaar later, echter in eenigszins fraaiere vorm zonder aangifte van herkomst bij LAGRANGE in zijn Mécanique analytique, éd III, par BERTRAND, T. II, pag. 250—251. (De eerste uitgave is van 1788).

Deze historische opmerking is men verschuldigd aan RIEMANN. Verg. HANKEL, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Göttingen, 1861, pag. 3.

EERSTE HOOFDSTUK.

Ontleding der vloeistofbeweging volgens HELMHOLTZ.

Zooals uit de elasticiteitsleer bekend is, kan de verplaatsing van de deeltjes van vaste elastische lichamen veroorzaakt zijn door een translatie of een verschuiving van het zwaartepunt, drie dilataties of contracties volgens drie onderling loodrecht staande richtingen en een rotatie om een as.

Evenzoo kan men de verplaatsing van een deel van een vloeistofelement denken te bestaan uit die deelen, als men het element als volkomen elastisch beschouwt. Noemen wij daartoe in het punt (x', y', z') de snelheidscomponenten, dat zijn de verplaatsingen in de eenheid van tijd, volgens drie loodrecht op elkaar staande assen, u', v', w' , dan zijn die van een ander punt van het element (x, y, z) , dat dus oneindig dicht bij het eerste gelegen is:

$$\left. \begin{aligned} u &= u' + \frac{\partial u'}{\partial x'}(x-x') + \frac{\partial u'}{\partial y'}(y-y') + \frac{\partial u'}{\partial z'}(z-z'), \\ v &= v' + \frac{\partial v'}{\partial x'}(x-x') + \frac{\partial v'}{\partial y'}(y-y') + \frac{\partial v'}{\partial z'}(z-z'), \\ w &= w' + \frac{\partial w'}{\partial x'}(x-x') + \frac{\partial w'}{\partial y'}(y-y') + \frac{\partial w'}{\partial z'}(z-z'). \end{aligned} \right\} (4)$$

De differentiaalquotienten zijn voor het beschouwde element constanten; noemen wij deze a_{11} , a_{12} , enz., dan worden bovenstaande vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= u' + a_{11}(x-x') + a_{12}(y-y') + a_{13}(z-z'), \\ v &= v' + a_{21}(x-x') + a_{22}(y-y') + a_{23}(z-z'), \\ w &= w' + a_{31}(x-x') + a_{32}(y-y') + a_{33}(z-z'). \end{aligned} \right\} (4a)$$

De grootheden u , v , w kunnen beschouwd worden als de verplaatsingen in de eenheid van tijd. Wanneer er geen rotatie plaats heeft, dan zijn, volgens de elasticiteitsleer, de coëfficiënten $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Voor dit geval ter onderscheiding van het algemeene schrijven wij a'_{12} enz.

De verplaatsing van het punt (x, y, z) blijkt nu te bestaan uit twee deelen: 1^o. de verplaatsing, waarvan de componenten volgens de aangenomen coördinaatassen zijn u' , v' , w' en die voor alle punten dezelfde is, en 2^o. de verplaatsing, die het gevolg is van de overige termen; deze heeft plaats in de richting van den normaal tot het oppervlak

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} a_{11}(x-x')^2 + \frac{1}{2} a_{22}(y-y')^2 + \frac{1}{2} a_{33}(z-z')^2 + \\ &\quad + a'_{23}(y-y')(z-z') + a'_{13}(x-x')(z-z') + \\ &\quad + a'_{12}(x-x')(y-y') = 0, \end{aligned}$$

terwijl hare componenten zijn $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Door verplaatsing van den oorsprong naar het punt x', y', z' , en draaiing der coördinaatassen (de nieuwe coördinaten weder x, y, z noemende), kan men de vergelijking van dat oppervlak terug brengen tot

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{11} x^2 + \frac{1}{2} a_{22} y^2 + \frac{1}{2} a_{33} z^2 = 0,$$

terwijl de verplaatsingen (snelheden) volgens de nieuwe assen dan worden $a_{11} x, a_{22} y, a_{33} z$.

Dientengevolge wordt

$$u = u' + a_{11} x, \quad v = v' + a_{22} y, \quad w = w' + a_{33} z,$$

waarin u, v, w, u', v', w' de snelheidscomponenten volgens de nieuwe coördinaatassen voorstellen.

Alle deeltjes met dezelfde x hebben gedurende den tijd dt dezelfde snelheid volgens de X-as, zoodat een plat vlak loodrecht op de X-as zich gedurende dien tijd dt in zijn geheel verplaatst. Hetzelfde heeft plaats met vlakken loodrecht op de beide andere assen, en daar vlakken loodrecht op een der coördinaatassen zich meer verplaatsen, naarmate zij verder van den oorsprong verwijderd zijn, zal een parallelopipeidum met oneindig dicht bij elkaar gelegen zijvlakken, die loodrecht staan op de assen, gedurende dien tijd dt behalve de translatie nog een uitzetting of inkrimping in drie richtingen volgens de coördinaatassen (hier hoofdrichtingen genoemd) ondergaan. Hieruit blijkt, dat, bij afwezigheid van rotatie, de meest algemeene beweging van een vloeistofelement is een translatie, gepaard met dilatatie of contractie, terwijl de snelheidscomponenten zijn:

$$u = u' + a_{11}(x - x') + a'_{12}(y - y') + a'_{13}(z - z'),$$

$$v = v' + a'_{12}(x - x') + a_{22}(y - y') + a'_{23}(z - z'),$$

$$w = w' + a'_{13}(x - x') + a'_{23}(y - y') + a_{33}(z - z').$$

Had het punt x, y, z bovendien nog een rotatie om het punt x', y', z' , met rotatiecomponenten ξ, η, ζ , dan zouden de snelheidscomponenten volgens de assen achter-eenvolgens zijn:

$$\begin{array}{l} \text{tengevolge van } \xi : \quad 0, \quad -(z-z')\xi, \quad (y-y')\xi, \\ \quad \quad \quad \quad \eta : \quad (z-z')\eta, \quad 0 \quad -(x-x')\eta, \\ \quad \quad \quad \quad \zeta : \quad -(y-y')\zeta, \quad (x-x')\zeta, \quad 0, \quad 1) \end{array}$$

zoodat de totale snelheidscomponenten dan worden:

$$\left. \begin{array}{l} u = u' + a_{11}(x-x') + (a'_{12} - \zeta)(y-y') + (a'_{13} + \eta)(z-z'), \\ v = v' + (a'_{12} + \zeta)(x-x') + a_{22}(y-y') + (a'_{23} - \xi)(z-z'), \\ w = w' + (a'_{13} - \eta)(x-x') + (a'_{23} + \xi)(y-y') + a_{33}(z-z'). \end{array} \right\} (4b)$$

Toen wij de rotatiebeweging van het element ter zijde lieten, bleek het dat de snelheden de gedeeltelijke differentiaalquotienten waren van een zelfde functie ϕ . (Had men namelijk bij ϕ nog gevoegd

$$u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z'),$$

dan zou men door differentiatie van ϕ naar x, y, z niet alleen de laatste termen van u, v, w , maar ook de eerste verkregen hebben). Die grootheid ϕ , die in het algemeen naar de een of andere richting gedifferentieerd de snelheid in die richting aangeeft, noemt men in overeenstemming met een dergelijke functie bij de theorie der krachten, de **snelheidspotentiaal**.

1) De stand der coördinaatassen is hier aangenomen als volgt: de positieve X-as valt door een wenteling van 90° in de richting van beweging van een rechts draaiende schroef samen met de positieve Y-as, terwijl de positieve Z-as dan de richting van de voortgaande beweging der schroef aangeeft. Deze stand van coördinaatassen wordt ook in 't vervolg aangenomen.

Bestond deze, dan was overal

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad \dots \quad (5)$$

(Dat dit waar was voor het punt x', y', z' , volgde dadelijk uit $a_{12} = a_{21}$ of $\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}$ enz.)

Heeft echter het vloeistofelement de meest algemeene beweging, zoodat het ook in zijn geheel om een as draait, dan volgt uit (4) en (4b), in aanmerking nemende dat de tweede leden dier vergelijkingen identiek zijn,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} = 2 \zeta, \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} = 2 \xi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} = 2 \eta. \end{aligned} \right\} \dots (6)^1$$

Dat de rotatie in de punten x, y, z en x', y', z' dezelfde is, kan ons niet verwonderen, als wij slechts bedenken, dat wij het vloeistofelement als een geheel beschouwd hebben.

Wij zien uit het bovenstaande dat, zoodra er in een punt van de vloeistof een rotatiebeweging is, de vergelijkingen (5) daar niet meer gelden, terwijl ook tevens daar geen snelheidspotentiaal bestaat. Zulk een beweging noemen wij met HELMHOLTZ wervelbeweging²⁾.

1) Oorspronkelijk zijn deze formules van CAUCHY, voorkomende in eene verhandeling „Mémoire sur la théorie de la propagation des Ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur infinie.” (Mem. sav. Etrang. T. I.)

2) Hoofdzakelijk is het bovenstaande te vinden in de beroemde verhandeling van HELMHOLTZ „Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.” Borchardt's Journal, Bd. 55.

Het woord rotatie heeft bij vloeistoffen meermalen tot verwarring aanleiding gegeven ¹⁾, zoodat het niet ondienstig zal zijn daarbij nog even stil te staan.

Het begrip rotatie is synoniem met het begrip draaiing, evenwel wordt bij de vloeistofbeweging tevens het woord rotatie voornamelijk gebruikt om meer bepaaldelijk de grootte der draaiing of de grootte der hoeksnelheid aan te geven; zooals wij hierboven zagen, stelden dan ξ , η , ζ niets anders voor dan de componenten der hoeksnelheid volgens drie onderling loodrechte assen, waarmede een vloeistofelement draaide om een as, die door het element zelf ging.

De snelheid evenwel, waarmede een element zich beweegt, kan geacht worden te bestaan uit twee deelen V_1 en V_2 , waarvan het eene V_1 samenhangt met de rotatie; maar de grootte van V_1 , en dientengevolge ook die van V_2 , omdat zij samen de totale snelheid moeten vormen, hangt af van de plaats van de rotatie-as, zoodat de verdeling van de beweging in deze beide deelen geheel onbepaald is, daar men een deel van V_1 bij V_2 kan voegen door het verplaatsen der rotatie-as. Hieruit volgt echter niet, zooals VELTMANN meent ²⁾, dat bovenstaande ontleding der vloeistofbeweging volgens HELMHOLTZ onjuist is, daar deze alleen aantoonde dat de beweging in genoemde deelen gesplitst kan worden en de grootte der deelen aangeeft als de rotatie-as door het beschouwde element gaat. De grootte der rotatie zelf is echter volkomen bepaald door de formules (6) en onafhankelijk van de plaats der rotatie-as.

Uit de beteekenis, die wij aan ξ , η , ζ gehecht hebben,

1) Zie o. a. de stukken van BERTRAND in de Comptes Rendus, 1868.

2) W. VELTMANN, Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. SCHLÖMILCH, Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 15, pag. 451.

volgt dat men haar waarden ook kan verkrijgen op de volgende wijze, die wij verschuldigd zijn aan STOKES ¹⁾ en die door THOMSON is overgenomen in zijn verhandeling ²⁾ „On Vortex Motion”.

Denkt men zich om een willekeurig punt van de vloeistof een bol beschreven met oneindig kleinen straal, en zijn u_0, v_0, w_0 de snelheidscomponenten van het middelpunt van den bol volgens drie loodrecht op elkander staande assen.

Zijn van een ander punt van den bol de snelheidscomponenten u, v, w , dan moet men dat punt een hoeveelheid van beweging mededeelen, waarvan de componenten volgens de drie assen zijn $u dV, v dV, w dV$, als dV een volume-element voorstelt en de densiteit 1 is, om het de genoemde beweging te geven. De componenten van het moment van de hoeveelheid van beweging volgens de drie assen zijn $(wy - vz) dV, (uz - wx) dV, (vx - uy) dV$. Doet men dit voor alle punten van den bol en integreert men dan over de ruimte, die de bol inneemt, dan vindt men voor de componenten van het moment der hoeveelheid van beweging, dat de bol om zijn middelpunt doet draaien:

$$L = \int (wy - vz) dV, \quad M = \int (uz - wx) dV, \quad N = \int (vx - uy) dV. \quad (7)$$

Substitueert men hierin

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 z \text{ enz.}, \quad (8)$$

waarbij de index 0 aangeeft, dat men de waarde van de grootheden, waarbij zij behoort, in het middelpunt van den bol moet nemen, dan verkrijgt men:

1) Camb. Phil. Transact. Vol. VIII, 1845.

2) Edinb. Transact. Vol. XXV, 1869.

$$L = \int \left\{ w_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 x y + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 z y - v_0 z - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 x z - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 y z \right\} dV \\ + \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 y^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 z^2 \right\} dV.$$

De eerste integraal is 0 als zijnde een oneven functie ten opzichte van een der coördinaten.

Verder is $\int y^2 dV = \int z^2 dV = \frac{1}{2} I$, waarbij I voorstelt het traagheidsmoment van den bol ten opzichte van een as die door het middelpunt gaat. Wij verkrijgen dus

$$L = \frac{1}{2} I \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \right] \dots \quad (9)$$

en daar, zooals men weet, $\frac{L}{I}$ de rotatiesnelheid voorstelt, waarmede de bol door het moment der hoeveelheid van beweging L om de x -as draait, verkrijgt men

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \right\}.$$

Daar men elk willekeurig punt als middelpunt van den bol kan gebruiken, heeft men in 't algemeen

$$2 \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Hetzelfde geldt voor η en ζ .

Zijn L, M en N en dus de hoeksnelheden nul, dan zijn u , v , w de differentiaalquotienten naar x , y , z , van eenzelfde functie ϕ (de snelheidspotential) of $u dx + v dy + w dz$ is een volledige differentiaal.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Eigenschappen van de wervelbeweging.

Een van de voornaamste eigenschappen bij de vloeistofbeweging is, dat een vloeistofdeeltje, dat op een zeker oogenblik geene rotatie-beweging heeft, ook nooit eene rotatie-beweging zal verkrijgen onder de werking van dezelfde krachten; m. a. w. bestaat er eens eene snelheidspotential, dan is zij er altijd.

Deze stelling is het eerst door LAGRANGE gegeven, hoewel onder een minder volnaakten vorm. Verscheidene bewijzen bestaan er voor, waarvan de voornaamste zijn die van STOKES en HELMHOLTZ.

STOKES bewijst, dat, wanneer de grootheden (7) eens nul zijn, zij op een volgend oogenblik nog nul zijn.

Die grootheden kunnen door twee oorzaken veranderen: 1^o. door de drukking, die er door de omringende vloeistof op wordt uitgeoefend, en 2^o. doordat deeltjes den bol verlaten en andere er in stroomen; door de reeds bestaande beweging zal het koppel niet veranderen.

De drukking geeft geen verandering, daar zij normaal op het oppervlak en dus naar het middelpunt van den bol gericht is. Wij hebben dus slechts het moment van de hoeveelheid van beweging te zoeken, dat den bol wordt medegedeeld door de in- en uitstroomende deeltjes.

De projectie van de snelheid in het punt (xyz) van het bolvlak op den straal naar dat punt is:

$$-\frac{ux + vy + wz}{r},$$

dus is het volume van de hoeveelheid vloeistof, die in den tijd dt door het element dS in dat punt naar binnen stroomt:

$$-\frac{wx + vy + wz}{r} dS dt.$$

Het moment van de hoeveelheid van beweging is:

$$\frac{1}{r} (vz - wy) (ux + vy + wz) dS dt.$$

Wij vinden dus:

$$\frac{dL}{dt} dt = \frac{dt}{r} \int (vz - wy) (ux + vy + wz) dS,$$

welke integraal over den bol uitgestrekt, nul moet zijn, wanneer er oorspronkelijk eene snelheidspotentiaal bestaat.

Voor bovenstaande integraal verkrijgen wij:

$$\int (v^2 - w^2) yz dS + \int (z^2 - y^2) vw dS + \int (vz - wy) ux dS.$$

Substitueert men hierin de waarden van u, v, w uit (8), dan verkrijgt men, in aanmerking nemende dat alle integralen, waarin een oneven macht van een der coördinaten voorkomt, nul zijn:

$$\begin{aligned}
& 2 \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 \right\} y^2 z^2 dS + \\
& + \int \left\{ v_0 w_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 z^2 \right\} (z^2 - y^2) dS + \\
& + \int \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \right\} x^2 z^2 - \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} x^2 y^2 \right] dS.
\end{aligned}$$

Neemt men verder nog in aanmerking:

$$\begin{aligned}
\int x^2 dS &= \int y^2 dS = \int z^2 dS, & \int x^2 y^2 dS &= \int x^2 z^2 dS = \int y^2 z^2 dS, \\
\int x^4 dS &= \int y^4 dS = \int z^4 dS,
\end{aligned}$$

terwijl tevens op het beschouwde oogenblik:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0$$

dan worden bovenstaande integralen herleid tot:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 \int y^2 (3z^2 - y^2) dS + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 \int z^2 (z^2 - 3y^2) dS.$$

Volgens bovenstaande opmerking zijn beide integralen gelijk.

Zoo hebben wij dus nog slechts aan te toonen dat

$$\int x^2 (z^2 - 3y^2) dS = 0.$$

Door overgang op poolcoördinaten door middel van de substituties:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \delta \sin \psi, & y &= r \sin \delta \sin \psi, & z &= r \cos \psi, \\
\text{dus} & & dS &= r^2 \sin \psi d\delta d\psi,
\end{aligned}$$

wordt laatstgenoemde integraal

$$\begin{aligned}
& \int \int r^6 (\cos^4 \psi \sin \psi - 3 \cos^2 \psi \sin^3 \psi \sin^2 \delta) d\psi d\delta \\
& = r^6 \int \int (\cos^4 \psi \sin \psi - 3 \cos^2 \psi \sin^3 \psi \sin^2 \delta + 3 \cos^4 \psi \sin \psi \sin^2 \delta) d\psi d\delta \\
& = r^6 \int_0^\pi \sin^2 \delta d\delta \int_0^{2\pi} (3 \cos^4 \psi \sin \psi - 3 \cos^2 \psi \sin \psi) d\psi + \\
& \quad + 2\pi r^6 \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi \sin \psi d\psi.
\end{aligned}$$

En daar

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 \psi \sin \psi - \cos^2 \psi \sin \psi) d\psi = \left(-\frac{1}{5} \cos^5 \psi + \frac{1}{3} \cos^3 \psi \right)_0^{2\pi} = 0,$$

heeft men dus bewezen dat het moment der hoeveelheid van beweging L, als het eens nul is, met den tijd niet verandert; hetzelfde geldt van de grootheden M en N.

HELMHOLTZ vindt de stelling van LAGRANGE bij het zoeken van de veranderingen der rotatiesnelheid ten opzichte van den tijd.

Uit de vergelijkingen (6) volgt terstond:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} u + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} w - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} u - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} v - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} w. \quad \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Door in de vergelijkingen (1) voor de uitwendige krachten eene potentiaal aan te nemen, vinden wij, als wij de tweede dier vergelijkingen naar z en de derde naar y differentiëeren en de uitkomsten van elkaar aftrekken:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Door voor het tweede lid van (10) in de plaats te stellen, wat uit deze laatste vergelijking volgt, verkrijgen wij:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

en door gebruikmaking van (2a):

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= 2\xi \frac{\partial u}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial y} + 2\zeta \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Iets dergelijks vinden wij voor $2 \frac{d\eta}{dt}$ en $2 \frac{d\zeta}{dt}$. Wij hebben dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

of:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial v}{\partial z} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots (11a)$$

zooals blijkt uit de transformatie van de waarde van $\frac{d\xi}{dt}$ door in plaats van $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$ er bij te voegen $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$.

Hieruit volgt direct de stelling van LAGRANGE, want is voor een vloeistofdeeltje op een zeker oogenblik $\xi = \eta = \zeta = 0$,

dan is dit ook het geval op het volgend oogenblik, daar dan $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$ is.

Daar ξ, η, ζ de hoeksnelheden om de coördinaatassen voorstellen, is $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \omega$ de hoeksnelheid om de oogenblikkelijke as van wenteling, en zijn $\frac{\xi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}, \frac{\zeta}{\omega}$ de cosinussen van de hoeken, welke die oogenblikkelijke as van wenteling met de coördinaatassen maakt.

Geven wij met HELMHOLTZ aan de lijnen, wier richting in elk punt met de oogenblikkelijke as van wenteling van het zich in dat punt bevindende deeltje samenvalt, den naam van wervellijnen, dan zullen wij nu in de eerste plaats aantoonen, dat elke wervellijn voortdurend uit dezelfde deeltjes blijft bestaan, zoodat zij zich met de deeltjes als 't ware voortbeweegt.

Neem op de oogenblikkelijke as van wenteling een stuk $\varepsilon\omega$ (ε stelt een coëfficiënt voor), dan is de projectie daarvan op de drie coördinaatassen $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, \varepsilon\zeta$. Terwijl de snelheidscomponenten in het punt (x, y, z) zijn u, v, w , zijn zij in het punt, dat op een afstand $\varepsilon\omega$ van dat eerste punt verwijderd is:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \varepsilon\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v_1 &= v + \varepsilon\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w_1 &= w + \varepsilon\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

waaruit in verband met de vergelijkingen (11) volgt:

$$u - u_1 = \varepsilon \frac{d\xi}{dt}, \quad v - v_1 = \varepsilon \frac{d\eta}{dt}, \quad w - w_1 = \varepsilon \frac{d\zeta}{dt}.$$

De punten, wier afstand oorspronkelijk was $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$, hebben dus na een tijd dt een afstand

$$\varepsilon \left(\xi + \frac{d\xi}{dt} dt \right), \quad \varepsilon \left(\eta + \frac{d\eta}{dt} dt \right), \quad \varepsilon \left(\zeta + \frac{d\zeta}{dt} dt \right);$$

hierin stellen $\xi + \frac{d\xi}{dt} dt$, $\eta + \frac{d\eta}{dt} dt$, $\zeta + \frac{d\zeta}{dt} dt$ de nieuwe hoeksnelheden voor van het verplaatste punt (x, y, z) .

De richting, waarin de beide punten na een tijd dt ten opzichte van elkander geplaatst zijn, valt dus evenals aan 't begin van den tijd dt weder samen met de richting van de nieuwe oogenblikkelijke as van wenteling. Volgens de bepaling van wervellijn liggen dus beide punten zoowel aan het begin als aan het eind van den tijd dt op eene wervellijn, waaruit volgt: Elke wervellijn blijft voortdurend uit dezelfde deeltjes bestaan.

Verder volgt uit deze beschouwing: de grootte der resulterende hoeksnelheid van een bepaald deeltje verandert in dezelfde verhouding, als de afstand van dat deeltje tot het volgende op de wervellijn gelegen.

Uit de bepaling van wervellijnen volgt dadelijk hare differentiaalvergelijking:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \dots (12)$$

Door integratie hiervan verkrijgt men:

$$x = C_1, \quad \psi = C_2,$$

waar x en ψ als functies van x, y, z , en ook van t kunnen beschouwd worden, terwijl C_1 en C_2 willekeurige constanten zijn.

Nu is

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

waaruit in verband met de vergelijkingen (12) volgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \xi + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \eta + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \zeta &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

In aanmerking nemende dat $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ identiek 0 moet zijn, zooals gemakkelijk uit de vergelijkingen (6) volgt, blijkt dat aan (14) voldaan wordt door

$$2\xi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad 2\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad 2\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

zoodat men heeft:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ of } \frac{\partial}{\partial y} \left(w - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(v - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ of } \frac{\partial}{\partial z} \left(u - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(w - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ of } \frac{\partial}{\partial x} \left(v - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Hieruit vindt men, daar het blijkt dat

$$u - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

de differentiaalquotienten naar x , y en z zijn van eenzelfde functie F :

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \dots (15)$$

waarbij F is eene functie van x, y, z en t . Daar de wervellijnen met de vloeistof mede bewegen, is

$$\frac{d\chi}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

of

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} + w \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

waarin men de waarde van u, v, w uit de verg. (15) kan substitueeren.

Deze vergelijkingen zijn door CLEBSCH ¹⁾ gevonden bij eene transformatie van de hydrodynamische vergelijkingen, waarbij echter de beteekenis van χ en ψ niet blijkt. Zij zijn van veel belang, omdat zij op de natuurlijkste wijze tot de theorie der wervelbeweging voeren, daar het slechts van χ afhangt of er eene snelheidspotentiaal bestaat of niet; is namelijk χ eene functie van x, y, z dan is er geen snelheidspotentiaal, terwijl deze wel bestaat, wanneer χ onafhankelijk van x, y, z is; zij is dan $\varphi = F + \chi\psi$.

Brengen wij wervellijnen door de verschillende punten van een gesloten kromme lijn, door BELTRAMI ²⁾ *directrix* genoemd, dan noemen wij de ruimte daardoor ingesloten eene wervelbuis; is de doorsnede van eene wervelbuis oneindig klein, dan spreken wij van eene elementaire wervelbuis of liever van een werveldraad. Daar eene wervellijn, zooals wij zagen, steeds uit dezelfde deeltjes bestaat, zal de werveldraad tusschen twee bepaalde doorsneden ook steeds door dezelfde deeltjes opgevuld blijven; zijne lengte moet dus in omgekeerde reden met de doorsnede veranderen. Men kan dientengevolge de laatste eigenschap

1) Crelle's Journal, Bd. 56.

2) Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. III, T. 2, pag. 382.

ook aldus formuleeren: Het product van de rotatiesnelheid en de doorsnede van een werveldraad blijft bij de beweging standvastig.

Daar, zooals wij reeds opgemerkt hebben,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

in elk punt identiek nul is, zal ook

$$\iiint \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx dy dz = 0$$

zijn, waarbij de integratie over een willekeurig deel van de ruimte kan worden uitgestrekt. Hieruit leiden wij af

$$\iint \xi dy dz + \iint \eta dx dz + \iint \zeta dx dy = 0.$$

Beschouwen wij als vlakke-element dS , waarvan de naar buiten gerichte normaal de hoeken α, β, γ maakt met de coördinaatassen, dan wordt bovenstaande som

$$\int (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) dS = \int \omega \cos \delta dS,$$

waarbij ω de totale hoeksnelheid en δ den hoek, dien de rotatieas met den normaal maakt, voorstellen, terwijl de integratie moet plaats hebben over het gesloten oppervlak van het genoemde willekeurige deel der ruimte. Had de oorspronkelijke ruimte-integraal betrekking op een deel van een werveldraad begrepen tusschen twee doorsneden, die loodrecht op de as van den draad staan, dan is $\cos \delta$ overal aan het oppervlak nul, behalve in die beide doorsneden, waar zij $+1$ en -1 is; is de grootte van die beide doorsneden S_1 en S_2 , zijn de rotatiesnelheden respectievelijk ω_1 en ω_2 , dan wordt

$$\int \omega \cos \delta dS = \omega_1 S_1 - \omega_2 S_2 = 0$$

of

$$\omega_1 S_1 = \omega_2 S_2.$$

Het product van de rotatie-snelheid en de loodrechte doorsnede van een werveldraad is overal in den draad hetzelfde. Dit geldt niet alleen voor loodrechte maar voor alle evenwijdige doorsneden.

Een werveldraad moet dus òf gesloten zijn, òf aan de grens der vloeistof eindigen; evenwel kan hij nooit binnen de vloeistof ophouden.

Dat product van rotatie-snelheid en loodrechte doorsnede zullen wij met de Engelschen noemen de sterkte van den werveldraad; de Duitschers noemen het rotatie-intensiteit.

DERDE HOOFDSTUK.

Beschouwingen van HANKEL en THOMSON.

Terwijl het voorgaande volgens de methode van HELMHOLTZ afgeleid is uit de vergelijkingen van EULER, heeft HANKEL in zijn bekroond antwoord ¹⁾ op eene prijsvraag, die door de philosophische Faculteit te Göttingen in 1860 was uitgeschreven, de formules voor de wervelbeweging verkregen uit de vergelijkingen van LAGRANGE. Hij is daartoe uitgegaan van de vergelijkingen (3) en onderstelt dat de uitwendige krachten eene potentiaal F hebben. Deze worden, als wij bovendien nog nemen

$$\rho = \Phi(p) \text{ en } f(p) = \int \frac{dp}{\Phi(p)},$$

terwijl wij verder voor $F - f(p)$ de grootheid Ω invoeren,

1) HANKEL, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d\bar{w}}{dt} \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d\bar{w}}{dt} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d\bar{w}}{dt} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial \Omega}{\partial c} = 0.$$

Uit deze vergelijkingen kunnen wij gemakkelijk Ω elimineeren; bijv. door de 1^{ste} naar b en de 2^{de} naar c te differentiëeren en de uitkomsten van elkander af te trekken. Zoodoende kan men het volgende stel vergelijkingen verkrijgen:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt\partial b\partial c} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{d^2\bar{u}}{dt\partial c\partial b} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial b\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial c\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial b\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial c\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt\partial c\partial a} \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{d^2\bar{u}}{dt\partial a\partial c} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial c\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial a\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial c\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial a\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} = 0,$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt\partial a\partial b} \frac{\partial x}{\partial b} - \frac{d^2\bar{u}}{dt\partial b\partial a} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial a\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{d^2\bar{v}}{dt\partial b\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial a\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{d^2\bar{w}}{dt\partial b\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} = 0.$$

Daar elk van de 3 verschillen, die in deze vergelijkingen voorkomen, eene volledige differentiaal naar t is, kan men ze naar t integreeren.

$$\int \left(\frac{d^2\bar{u}}{dt\partial b\partial c} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{d^2\bar{u}}{dt\partial c\partial b} \frac{\partial x}{\partial b} \right) dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial b} + \text{Const.}$$

Men verkrijgt dan, als men de integratie-constanten (d. w. z. constant ten opzichte van den tijd) voorstelt door 2 A, 2 B en 2 C:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b} &= 2 A \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} &= 2 B \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial a} &= 2 C \end{aligned} \right\} (16).$$

De eerste leden dezer vergelijkingen kunnen als het verschil van twee differentiaalquotienten worden opgevat, zoodat men heeft:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial c} = 2 A, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial a} = 2 B, \quad \frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} = 2 C, \quad (17)$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \bar{u} \frac{\partial x}{\partial a} + \bar{v} \frac{\partial y}{\partial a} + \bar{w} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \beta &= \bar{u} \frac{\partial x}{\partial b} + \bar{v} \frac{\partial y}{\partial b} + \bar{w} \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \gamma &= \bar{u} \frac{\partial x}{\partial c} + \bar{v} \frac{\partial y}{\partial c} + \bar{w} \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \dots (18).$$

De vergelijkingen (17) komen niet alleen in vorm met de vergelijkingen (6) overeen, maar ook, zooals wij zullen aantoonen, in beteekenis, daar A, B en C voorstellen de componenten der rotatiesnelheid op een tijd $t = 0$ van een deeltje a, b, c ten opzichte van assen, die door het punt a, b, c gaan en evenwijdig met de coördinaatassen loopen.

Hiertoe maakt HANKEL gebruik van de volgende vergelijking, die hij eerst bewijst.

$$\int (x_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz) = \int \left\{ \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) \cos \nu \right\} dS \dots (19)^1.$$

1) Volgens BELTRAMI (Mem. di Bologna) is deze formule afkomstig van

In deze vergelijking moet de integratie in het tweede lid worden uitgestrekt over het oppervlak ingesloten door de lijn, waarlangs in het eerste lid moet geïntegreerd worden; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ stellen willekeurige functies van x, y, z voor, terwijl λ, μ, ν de hoeken zijn, die de normaal aan het oppervlak met de coördinaatassen maakt.

Wegens het groote belang van deze vergelijking is het niet ondienstig haar ook hier te bewijzen ¹⁾.

Bepalen wij eerst $\int \alpha dx$, wanneer de integratie zich uitstrekt over den omtrek van een elementair driehoekje. Zijn de coördinaten der hoekpunten

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ x + dx_1, & y + dy_1, & z + dz_1, \\ x + dx_2, & y + dy_2, & z + dz_2, \end{array}$$

en is de waarde van α daar achtereenvolgens $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, dan is

$$\begin{aligned} \int \alpha dx &= \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} dx_1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} (dx_2 - dx_1) + \frac{\alpha + \alpha_2}{2} (-dx_2), \\ &\text{of} \\ \int \alpha dx &= \frac{1}{2} \left\{ -(\alpha_2 - \alpha) dx_1 + (\alpha_1 - \alpha) dx_2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dy_2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) dz_2 \right\} dx_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dy_1 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) dz_1 \right\} dx_2 \\ &= \frac{dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) - \frac{dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

HANKEL, en niet, zooals THOMSON beweert in zijne verhandeling „On Vortex Motion” (l. c., § 60, q), van THOMSON en TAIT, daar hun Natural Philosophy eerst in 1862 verscheen, terwijl het hiervoor genoemde werk van HANKEL reeds een jaar vroeger uitkwam. Ook LIPSCHITZ (Annali di Brioschi e Cremona, T. IV) schrijft haar aan HANKEL toe.

1) Dit bewijs, dat m. i. niets aan duidelijkheid te wenschen overlaat, ben ik verschuldigd aan Dr. NIEUWENHUIZEN KRUSEMAN.

Hierin hebben de partiële differentiaalquotienten betrekking op het punt (x, y, z) . Verder stelt $\frac{1}{2}(dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1)$ den inhoud van de projectie van den driehoek op het XZ-vlak voor; dus is

$$\int \alpha dx = m dS \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) - n dS \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right);$$

m en n zijn de richtingscosinussen van dien normaal op het driehoekje, die de as der draaiingsrichting

$x, y, z, x + dx_1, y + dy_1, z + dz_1, x + dx_2, y + dy_2, z + dz_2$, vertegenwoordigt.

Hetzelfde geldt voor $\int \beta dy$ en $\int \gamma dz$, zoodat men verkrijgt:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = dS \left[l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right].$$

Denken wij ons een oppervlak door een gesloten kromme lijn begrensd, verdeelen wij dat vlak in elementaire driehoekjes, en tellen wij al de voor die driehoekjes overeenkomstige betrekkingen bij elkander op, dan vinden wij:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int dS \left[l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right],$$

waarbij de eerste integratie zich alleen over de begrenzing uitstrekt, daar de tusschengelegen lijnintegralen paarsgewijze met tegengesteld teekken voorkomen, terwijl de tweede integratie zich over het oppervlak uitstrekt.

Neemt men eene richting, makende met de coördinaatassen de hoeken λ_1, μ_1, ν_1 , zoodanig dat

$$\cos \lambda_1 : \cos \mu_1 : \cos \nu_1 =$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right) : \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right) : \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right),$$

terwijl men bovendien

$$\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 = 4 \Delta^2$$

stelt, dan wordt vergelijking (19)

$$\int (\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz) = 2 \int \Delta \cos \theta dS, \quad (20)$$

waarbij θ de hoek is, dien de richtingen λ, μ, ν en λ_1, μ_1, ν_1 met elkaar maken.

Wij kunnen bovenstaande formule nog eene andere gedaante geven. Zijn ρ, σ, τ de hoeken, die de raaklijn aan de kromme lijn in het punt (x, y, z) maakt met de coördinaatassen, dan is

$$dx = \cos \rho ds, \quad dy = \cos \sigma ds, \quad dz = \cos \tau ds.$$

Neemt men weder eene richting aan, die de hoeken ρ', σ', τ' met de assen maakt en bepaald is door

$$\cos \rho' : \cos \sigma' : \cos \tau' = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1,$$

dan wordt

$$\int (\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz) = \int U \cos \theta' ds, \quad (21)$$

waarin θ' den hoek, dien de richtingen ρ, σ, τ en ρ', σ', τ' met elkaar maken, voorstelt, terwijl

$$U^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \quad \text{is.}$$

Passen wij dit toe op de waarden, die α, β, γ in de verg. (18) hebben, dan vinden wij:

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$A = \Delta \cos \lambda_1, \quad B = \Delta \cos \mu_1, \quad C = \Delta \cos \nu_1,$$

$$\int (\alpha da + \beta db + \gamma dc) = \int \Delta \cos \theta dS. \quad (22)$$

Het tweede lid van deze vergelijking hangt blijkbaar niet af van den tijd, want zoowel Δ als θ zijn ten opzichte van dezen constant, zoodat men ook in het eerste lid t willekeurig mag nemen. Voor $t=0$ gaan α , β , γ over in de aanvangswaarden van \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , die wij door \bar{u}_0 , \bar{v}_0 , \bar{w}_0 zullen aanduiden.

In dit geval wordt verg. (22):

$$\int (\bar{u}_0 da + \bar{v}_0 db + \bar{w}_0 dc) = 2 \int \Delta \cos \theta dS,$$

en in verband met (21):

$$\int \bar{U}_0 \cos \theta'_0 ds_0 = 2 \int \Delta \cos \theta dS,$$

waarbij $\bar{U}_0 = \sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2 + \bar{w}_0^2}$ de aanvangssnelheid, θ'_0 de hoek tusschen deze en het element ds_0 van de gesloten kromme lijn is.

Nemen wij nu voor die gesloten kromme lijn een cirkel met een oneindig kleinen straal r , dan verschilt $\Delta \cos \theta$ voor de verschillende punten van het cirkelvlak slechts eene oneindig kleine grootte, zoodat

$$\int \Delta \cos \theta dS = \pi r^2 \Delta \cos \theta \text{ is.}$$

Verder stelt $\bar{U}_0 \cos \theta'_0$ voor de component van de aanvangssnelheid volgens de raaklijn aan den cirkel, eene waarde, die voor de verschillende punten van den cirkel verschillend is, maar die men kan beschouwen als de som van drie snelheden T_0 , T_0' en T_0'' , waarbij voorstelt: T_0' de op de raaklijn geprojecteerde translatiebeweging, T_0'' de component volgens de raaklijn van de beweging, die het gevolg is van de dilatatie, T_0 de snelheid volgens de raaklijn, die het gevolg is van de rotatie van den cirkel om zijn middelpunt. Het is duidelijk dat $\int T_0' ds_0$ nul is, omdat er altijd 2 punten zijn, waarvoor T_0' tegengestelde waarden heeft, terwijl iets der-

gelijks voor $\int T_0'' d s_0$ geldt. De waarde van T_0 zal langs den cirkelomtrek voor de verschillende punten oneindig weinig verschillen (als ten minste de snelheden doorlopende functies van de plaats zijn), zoodat

$$\int T_0 d s_0 = 2 \pi r T_0 \text{ is.}$$

Wij vinden dus:

$$2 \pi r T_0 = 2 \pi r^2 \Delta \cos \theta \quad \text{of} \quad \Delta \cos \theta = \frac{T_0}{r}.$$

$\frac{T_0}{r}$ stelt de hoeksnelheid van den cirkel voor om zijn middelpunt of om den normaal van het cirkelvlak in het middelpunt als as; hieruit volgt, dat Δ in een bepaald punt de hoeksnelheid is om een as, die door dat punt gaat en de hoeken λ_1, μ_1, ν_1 met de coördinaatassen maakt. Dientengevolge zijn A, B, C de hoeksnelheden van een deeltje a, b, c om assen evenwijdig met de coördinaatassen en door het punt (a, b, c) gaande.

Verder volgt uit de waarden van α, β, γ , wanneer men na de transformatie de snelheid weder beschouwt als functie van x, y, z en t , zoodat men $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ vervangen kan door u, v, w :

$$\int (\alpha d a + \beta d b + \gamma d c) = \int (u d x + v d y + w d z),$$

en in verband met (19):

$$\int (u d x + v d y + w d z) = \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos \nu \right] d S.$$

Door eene analoge redeneering als hiervoor, vinden wij, dat $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ voorstellen de dubbele hoeksnelheden van het punt (x, y, z) om

assen gaande door dat punt evenwijdig met de coördinaatassen. Noemen wij deze weder ξ , η , ζ , de totale hoeksnelheid $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \omega$, terwijl verder δ den hoek voorstelt, dien de rotatie-as maakt met den normaal aan het oppervlakte-element dS , dan is:

$$\int (u dx + v dy + w dz) = 2 \int \omega \cos \delta dS. \quad (23)$$

Deze lijn-integraal zullen wij in het vervolg met THOMSON noemen den stroom langs die lijn en, wanneer de lijn gesloten is, de circulatie¹⁾.

Daar de leden der verg. (22) en dientengevolge ook die der verg. (23) onafhankelijk van den tijd zijn, zal $\int \omega \cos \delta dS$ voor een oppervlak, dat uit dezelfde deeltjes blijft bestaan, niet met den tijd veranderen; daar dit ook geldt voor het oppervlak van een enkel vloeistofdeeltje en dit zich niet tot in het oneindige kan uitbreiden, kan ook de rotatiesnelheid niet tot in het oneindige afnemen, zoodat een deeltje, dat eenmaal eene rotatiebeweging heeft, nooit met roteeren kan ophouden; evenmin kan een deeltje, dat op een willekeurig oogenblik geene rotatiebeweging heeft, deze ooit verkrijgen.

Het constant zijn der circulatie is ook door THOMSON in zijne reeds meer genoemde verhandeling bewezen, evenwel op andere wijze dan hierboven is geschied; hij maakt hiervan gebruik om de vloeistofbeweging in meervoudig samenhangende ruimten na te gaan, en de eigenschappen van de wervelbeweging op te sporen.

1) THOMSON l. c. § 60 (a) spreekt van flow en circulation. In de Deutsche vertaling van THOMSON and TAIT, Natural Philosophy (§ 491 k), vindt men in plaats van stroom „Verschiebungsfuction”; nergens anders evenwel heb ik dezen naam ontmoet.

Bestaat er eene snelheidspotentiaal ϕ , dan wordt de stroom

$$\int (u dx + v dy + w dz) = \int d\phi,$$

zoodat hij tusschen twee punten langs alle lijnen, die in elkander kunnen overgaan (Eng. mutually reconcilable lines), dezelfde is, terwijl de circulatie nul is in elke gesloten lijn, die tot één punt kan worden saamgetrokken, zonder door vloeistofdeeltjes te gaan, die eene rotatiesnelheid bezitten; in dit geval toch is de snelheidspotentiaal eenwaardig en dus het verschil in waarde van deze bij het begin en het einde van de gesloten lijn nul.

Is de ruimte meervoudig samenhangend, dan is ook, zooals bekend is, de snelheidspotentiaal meerwaardig, zoodat dan de circulatie eene bepaalde waarde kan hebben, wat het geval zal zijn, als de lijn niet tot één punt kan worden saamgetrokken. In dit geval zullen lijnen, die in elkaar kunnen overgaan, dezelfde circulatie bezitten.

Verdeelt men een oppervlak in deelen, dan is de circulatie langs de grenslijn van het geheele oppervlak gelijk aan de som der circulaties langs de grenzen der afzonderlijke deelen, alle genomen in dezelfde richting. Tot deze som leveren de aan elkander grenzende deelen bijdragen, die elkander opheffen, voor zoover zij betrekking hebben op de gemeenschappelijke grens.

Uit verg. (23) volgt, dat voor een bepaalde plaats van een oppervlak de circulatie langs de grens van een vlakkelement met de grootte van het element evenredig is.

Laat men een deel der vloeistof als een vast lichaam wentelen, dan is de grootte der circulatie langs de grens van een daarmede bewegend plat vlak S gelijk aan het dubbele product van de component der hoeksnelheid in dat vlak en de grootte van het platte vlak. Zij de snel-

heid langs die grens V_s en de genoemde component der hoeksnelheid ω_s , dan is in poolcoördinaten (r, θ) :

$$V_s = r \omega_s + \frac{r d\theta}{ds},$$

dus
$$\Sigma V_s ds = \omega_s \Sigma r^2 \frac{d\theta}{ds} ds = 2 \omega_s S.$$

De circulatie, gedeeld door het dubbele oppervlak van het ingesloten platte vlak, geeft dus bij vaste lichamen de hoeksnelheid.

Naar analogie hiervan noemt THOMSON ¹⁾ de grootheid, die men op dezelfde wijze bij vloeistoffen verkrijgt, als men een oneindig klein plat vlak beschouwt, de daar aanwezige rotatie van de vloeistof of liever de component van de rotatie in dat vlak of om een as loodrecht op dat vlak.

De samenstelling van rotaties in eene vloeistof volgt geheel dezelfde wet als die bij vaste lichamen. Ook hier is $\omega = l\xi + m\eta + n\zeta$, als ξ, η, ζ weder zijn de componenten van de rotatie ω volgens drie loodrechte assen in een punt P, terwijl l, m, n voorstellen de cosinussen der hoeken, die de rotatie-as maakt met die drie assen; want snijdt een vlak de drie assen in de punten A, B, C, dan is de circulatie in dat vlak langs driehoek ABC gelijk aan de som der circulaties langs de driehoeken PAB, PBC en PCA, omdat het deel der circulatie langs BP van driehoek PAB wordt opgeheven door het deel PB van driehoek PBC enz. Zijn de grootte der driehoeken ABC, PAB, PBC en PCA achtereenvolgens $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$, dan is:

$$\omega \Delta = \xi \Delta_x + \eta \Delta_y + \zeta \Delta_z \quad \text{of} \quad \omega = \xi l + \eta m + \zeta n.$$

1) l. c. § 60 (e).

De grootte der rotatie is:

$$\begin{aligned} & \frac{\int (u dx + v dy + w dz)}{2 dS} = \\ & = \frac{\left\{ l \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dS}{2 dS} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ l \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned}$$

waaruit in verband met het bovenstaande volgt:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Hoewel schijnbaar de bepaling van rotatie volgens THOMSON een andere is dan die van HELMHOLTZ, verkrijgen wij toch voor de rotatiecomponenten dezelfde formules; in werkelijkheid evenwel verschillen hunne bepalingen dan ook niet, zooals ten duidelijkste blijkt uit de beschouwingen van pag. 35, die tot resultaat hadden dat A, B, C waren de rotatiecomponenten.

Gaan wij de circulatie voor enkele lijnen op de wervelbuis na. Beschouwen wij in de eerste plaats een gesloten lijn op de wervelbuis, die een willekeurig deel van het oppervlak der wervelbuis insluit; daar de rotatie-as overal in dat vlak ligt, zoo is het duidelijk dat de circulatie $F = \int (u dx + v dy + w dz)$ of $= 2 \int (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) dS$ in dit geval nul is; wegens het niet veranderen van de circulatie ten opzichte van den tijd, blijft zij nul, zoodat dat vlak steeds de rotatie-as zal blijven bevatten. Ten duidelijkste blijkt hieruit, dat eene wervellijn, die eenmaal in een vlak ligt, er in blijft liggen bij de beweging van dat vlakje, zoodat met andere woorden de wervellijnen zich met de vloeistof bewegen.

Beschouwen wij vervolgens op eene wervelbuis twee gesloten lijnen $ABCA$ en $A'B'C'A'$ (fig. 1), die alle wervellijnen snijden, dus als het ware transversale doorsneden, en de verbindingslijn AA' , dan is $AA'B'C'A'ACBA$ een gesloten lijn, die een deel van het oppervlak der buis omvat, zoodat de circulatie daarlangs nul is. Daar echter het deel der circulatie langs de verbindingslijn in beide richtingen hierin voorkomt, is dit deel nul, zoodat de circulatie langs $A'B'C'A'$ en $ACBA$ te zamen nul is of die langs $A'B'C'A'$ gelijk aan die langs $ABCA$. De circulatie langs elke transversale doorsnede van eene wervelbuis is dezelfde. Deze noemt BELTRAMI¹⁾ de transversale circulatie van de wervelbuis; zij is bij werveldraden het dubbele van wat wij vroeger de sterkte van den werveldraad genoemd hebben. Ook deze blijft met den tijd constant, maar hare waarde is voor verschillende wervelbuisen verschillend. Hetzelfde geldt voor de longitudinale circulatie van de wervelbuis, waaronder wij naar analogie van het bovenstaande verstaan de circulatie langs een gesloten wervellijn of eene andere lijn, die op het vlak van de wervelbuis gelegen, daarin kan overgaan.

Bij werveldraden is de waarde der transversale circulatie $2S\omega \cos \delta$ gemakkelijk te vinden; daarbij stelt voor: S de oneindig kleine vlakke transversale doorsnede, ω de resulterende rotatie, δ den hoek van deze met den normaal op het vlak; de grootte van de normale doorsnede is $S \cos \delta$. Uit het constant zijn van $2S \cos \delta \times \omega$ ten opzichte den tijd, volgt, dat de rotatie omgekeerd evenredig is met de grootte van de normale doorsnede, en bij eene onsam-

1) l. c. T. II. pag. 391. THOMSON, l. c. § 60 (m) noemt haar de rotatie van de wervelbuis; verg. pag. 27.

drukbare vloeistof dus evenredig met de lengte van een bepaald oneindig klein deel van de wervellijn.

Wij zien uit het bovenstaande, dat de eigenschappen der wervelbeweging, die HELMHOLTZ uit de vergelijkingen (11) verkreeg, door THOMSON afgeleid worden uit het feit, dat de circulatie constant is ten opzichte van den tijd. Hieruit blijkt, dat er verband moet bestaan tusschen de vergelijkingen (11) en de vergelijking

$$\frac{d}{dt} \int (u dx + v dy + w dz) = 0.$$

LAMB¹⁾ heeft ook bewezen, dat in werkelijkheid de vergelijkingen (11) uit de laatste vergelijking kunnen worden afgeleid en wel op de volgende wijze:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int (u dx + v dy + w dz) = \frac{d}{dt} \int (\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu) dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int \int (\xi dy dz + \eta dx dz + \zeta dx dy) = \\ &= \int \int \left[\left(\frac{d\xi}{dt} dy dz + \frac{d\eta}{dt} dx dz + \frac{d\zeta}{dt} dx dy \right) + \xi \frac{d(dy dz)}{dt} + \eta \frac{d(dx dz)}{dt} + \zeta \frac{d(dx dy)}{dt} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Nu is} \quad \int \int \frac{d(dy dz)}{dt} = \int (v dz - w dy).$$

Stellen wij in formule (19)

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -w, \quad \gamma_1 = v,$$

dan wordt

$$\begin{aligned} \int (v dz - w dy) &= \int \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos \lambda - \frac{\partial v}{\partial x} \cos \mu - \frac{\partial w}{\partial x} \cos \nu \right\} dS = \\ &= \int \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy dz - \frac{\partial v}{\partial x} dx dz - \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \right\} \\ &= \int \int \left\{ \theta dy dz - \frac{\partial u}{\partial x} dy dz - \frac{\partial v}{\partial x} dx dz - \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \right\}. \end{aligned}$$

1) LAMB, Note on a theorem in Hydrodynamics. Messenger 7.

Evenzoo vinden wij:

$$\int \int \frac{d(dx dz)}{dt} = \int (w dx - u dz) = \int \int \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dy dz + \theta dx dz - \frac{\partial v}{\partial y} dx dz - \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \right\},$$

$$\int \int \frac{d(dx dy)}{dt} = \int (u dy - v dx) = \int \int \left\{ -\frac{\partial u}{\partial z} dy dz - \frac{\partial v}{\partial z} dx dz + \theta dx dy - \frac{\partial w}{\partial z} dx dy \right\}.$$

Wij verkrijgen dus ten slotte:

$$\int \int \left\{ \left(\frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{d\eta}{dt} - \xi \frac{\partial v}{\partial x} - \eta \frac{\partial v}{\partial y} - \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{d\zeta}{dt} - \xi \frac{\partial w}{\partial x} - \eta \frac{\partial w}{\partial y} - \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy + \theta (\xi dy dz + \eta dz dx + \zeta dx dy) \right\} = 0.$$

Daar deze vergelijking voor elk oppervlak geldt, kunnen wij de coëfficiënten van $dy dz$, $dz dx$, $dx dy$, elk afzonderlijk gelijk aan nul stellen; nemen wij bovendien nog $\theta = 0$, d. w. z. beschouwen wij onsamendrukbare vloeistoffen, dan verkrijgen wij de hierboven genoemde formules (11) van HELMHOLTZ.

VIERDE HOOFDSTUK.

Bepaling der snelheid uit de rotatiebeweging.

Hiervoor zagen wij, dat de rotatiebeweging volkomen bepaald is, als wij in elk punt de snelheid kennen; nu zullen wij trachten aan te toonen, dat in een enkelvoudig samenhangende ruimte de vloeistofbeweging volkomen bepaald is, wanneer de componenten der hoeksnelheid ξ, η, ζ en de ruimtedilatatie θ overal gegeven zijn, als bovendien nog bekend is de normale snelheid van de verschillende vloeistofdeeltjes, die de grens vormen.

Onderstellen wij, dat er twee stel waarden voor u, v, w bestonden, die aan al de voorwaarden, waaraan zij moeten voldoen, in werkelijkheid voldeden, en noemen wij deze beide stellen

$$u_1, v_1, w_1 \quad \text{en} \quad u_2, v_2, w_2;$$

zij verder

$$u_1 - u_2 = u', \quad v_1 - v_2 = v', \quad w_1 - w_2 = w'.$$

Uit de vergelijkingen (6) volgt nu zoowel

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = 2\xi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = 2\eta, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2\zeta,$$

als

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 2\xi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 2\eta, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 2\zeta,$$

terwijl uit de beteekenis van θ volgt:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}.$$

$$\text{Dientengevolge is nu } \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

zoodat de grootheden u' , v' , w' kunnen beschouwd worden als de snelheidscomponenten in eene onsamendrukbare vloeistof, terwijl er eene snelheidspotentiaal bestaat. Is verder overal aan de grenzen der vloeistof de normale snelheid V_n , dan is $V_n = l u_1 + m v_1 + n w_1 = l u_2 + m v_2 + n w_2$ (l, m, n zijn de cosinussen der hoeken, die de normaal met de coördinaatassen maakt), en dientengevolge

$$l u' + m v' + n w' = 0.$$

De vloeistof met de snelheidscomponenten u' , v' , w' kan dus beschouwd worden als te zijn ingesloten door vaste wanden. In dit geval weten wij, is er geene beweging in de vloeistof mogelijk, want is n de naar buiten gerichte normaal op het oppervlak, dan moet de snelheidscomponent loodrecht op den vasten wand $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ overal 0 zijn (Φ snelheidspotentiaal). Volgens het theorema van GREEN is

$$\int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS.$$

Is $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ dan moet

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

zijn, zoodat in dit geval de geheele vloeistof in rust is. Wij vinden dus $u' = v' = w' = 0$, zoodat de beide onderstelde bewegingen blijken slechts één beweging te zijn. Hetzelfde geldt, wanneer de vloeistof zich oneindig ver uitstrekt, terwijl zij aan de grenzen in rust is.

Het is nu de vraag de waarden van u , v , w te bepalen als functies van ξ , η , ζ , θ , terwijl ook de snelheden V_n volgens den normaal aan het oppervlak gegeven zijn. De grootheden ξ , η , ζ behoeven slechts te voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad \dots \quad (24).$$

De waarden van u , v , w moeten voldoen aan de vergelijkingen (6) en aan de betrekking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta. \quad \dots \quad (25).$$

Zooals wij hierboven zagen, is het slechts noodig één stel waarden van u , v , w te vinden, die aan de gegeven voorwaarden voldoen; dit zijn dan de eenig mogelijke. Zulke waarden van u , v , w zijn de volgende:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (26).$$

Willen deze vergelijkingen aan (25) voldoen, dan moet $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$ zijn.

Uit de vergelijkingen (6) volgt:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} = 2\xi$$

of

$$2\xi = -\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right).$$

Dergelijke formules vindt men voor 2η en 2ζ .

Voert men de bekende notatie in voor de som der tweede differentiaalquotienten van een zelfde functie, dan wordt

$$\Delta^2 P = 0, \dots \dots \dots (27)$$

$$\Delta^2 L = -2\xi, \quad \Delta^2 M = -2\eta, \quad \Delta^2 N = -2\zeta, \quad (28)$$

mits

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \text{ is. } \dots \dots (29)$$

Uit (27) en (28) volgt nu:

$$P = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta'}{d} dV', \dots \dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi'}{d} dV', & M &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta'}{d} dV', \\ N &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta'}{d} dV', \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

waarbij dV' is een ruimte-element in het punt (x', y', z') met de volume-dilatatie θ' , de rotatiecomponenten ξ', η', ζ' , en dat gelegen is op eenen afstand d van het punt (x, y, z) , waarvan wij de snelheden bepalen.

Gebruik makende van $\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x'}$ enz., kan het

eerste lid van (29) als volgt herleid worden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi} \int \left(\xi' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x} + \eta' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial y} + \zeta' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial z} \right) dV' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \left(\xi' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial z'} \right) dV' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi' l' + \eta' m' + \zeta' n'}{d} dS' + \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{d} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'} \right) dV' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega'_n}{d} dS', \end{aligned}$$

waarbij voorstellen l' , m' , n' de richtingscosinussen van den naar buiten gerichten normaal aan het oppervlak dS' , ω'_n de component van de rotatiesnelheid volgens den normaal aan het oppervlak. Dat de laatste ruimte-integraal verdwijnt, blijkt uit (24).

Wij zien dus, dat aan vergelijking (29) voldaan wordt, wanneer $\int \frac{\omega'_n}{d} dS' = 0$ is, wat zal plaats hebben, wanneer

de vloeistof zich tot in 't oneindige uitstrekt, en wanneer de wervelbuizen niet in het oppervlak S' eindigen; dit laatste geval kan men altijd denken te bestaan, als men dat oppervlak niet met het oppervlak van de vloeistof laat samenvallen en men zich de wervelbuizen buiten de vloeistof voortgezet denkt, zoodanig dat zij gesloten worden. Alle bovenstaande integraties moeten dientengevolge over die grootere ruimte worden uitgestrekt. De voorwaarden,

waaraan de ξ', η', ζ' buiten de vloeistof moeten voldoen, vindt men in (24), terwijl hare waarden aan de grens van de vloeistof moeten aansluiten aan de daar aanwezige.

Splitsen wij de ruimte, waarover geïntegreerd moet worden, in twee deelen, de vloeistofruimte en de daarbuiten gelegene ruimte, terwijl wij de grootheden, welke op die verschillende ruimten betrekking hebben, onderscheiden door de indices 1 en 2. De vergelijkingen (30) en (31) worden dan:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta'_1}{d_1} dV'_1 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta'_2}{d_2} dV'_2, \\ L &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi'_1}{d_1} dV'_1 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi'_2}{d_2} dV'_2, \\ M &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta'_1}{d_1} dV'_1 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta'_2}{d_2} dV'_2, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta'_1}{d_1} dV'_1 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta'_2}{d_2} dV'_2. \end{aligned}$$

Herleiden wij de integralen, die betrekking hebben op de ruimte buiten de vloeistof, dan wordt:

$$\begin{aligned} \int \frac{\theta'_2}{d_2} dV'_2 &= \int \left(\frac{\partial w'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_2}{\partial y'_2} + \frac{\partial w'_2}{\partial z'_2} \right) \frac{dV'_2}{d_2} = \\ &= \int (w'_2 v'_2 + v'_2 m'_2 + w'_2 n'_2) \frac{dS'_2}{d_2} - \\ &\quad - \int \left(w'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} \frac{1}{d_2} + v'_2 \frac{\partial}{\partial y'_2} \frac{1}{d_2} + w'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} \frac{1}{d_2} \right) dV'_2; \\ \int \frac{\xi'_2}{d_2} dV'_2 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial w'_2}{\partial y'_2} - \frac{\partial v'_2}{\partial z'_2} \right) \frac{dV'_2}{d_2} = \\ &= \frac{1}{2} \int (w'_2 m'_2 - v'_2 n'_2) \frac{dS'_2}{d_2} - \frac{1}{2} \int \left(w'_2 \frac{\partial}{\partial y'_2} \frac{1}{d_2} - v'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} \frac{1}{d_2} \right) dV'_2. \end{aligned}$$

Evenzoo vindt men:

$$\int \frac{\eta'_2}{d_2} dV_2 = \frac{1}{2} \int (u'_2 n'_2 - w'_2 l'_2) \frac{dS'_2}{d_2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \left(u'_2 \frac{\partial \frac{1}{d_2}}{\partial z'_2} - w'_2 \frac{\partial \frac{1}{d_2}}{\partial x'_2} \right) dV_2,$$

$$\int \frac{\xi'_2}{d_2} dV_2 = \frac{1}{2} \int (v'_2 l'_2 - u'_2 m'_2) \frac{dS'_2}{d_2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \left(v'_2 \frac{\partial \frac{1}{d_2}}{\partial x'_2} - u'_2 \frac{\partial \frac{1}{d_2}}{\partial y'_2} \right) dV_2.$$

Hierin stellen l'_2 , m'_2 , n'_2 voor de richtingscoëfficiënten van den naar buiten gericht normaal aan het oppervlak der bijgevoegde ruimte.

Noemen wij het deel van P, L, M en N, dat betrekking heeft op de vloeistofruimte zelf, P_1 , L_1 , M_1 en N_1 , de integralen, die betrekking hebben op het oppervlak der bijgevoegde ruimte, P_2 , L_2 , M_2 en N_2 , en eindelijk de integralen betrekking hebbende op de bijgevoegde ruimte zelf, P_2' , L_2' , M_2' en N_2' . Voeren wij deze laatste in de formules (26) in, dan blijkt het, dat zij elkaar opheffen; want:

$$\frac{\partial P'_2}{\partial x} + \frac{\partial N'_2}{\partial y} - \frac{\partial M'_2}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \int \left(u'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial x'_2 \partial x} + \right.$$

$$+ v'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial y'_2 \partial x} + w'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial z'_2 \partial x} - v'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial x'_2 \partial y} + u'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial y'_2 \partial y} +$$

$$+ u'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial z'_2 \partial z} - w'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial x'_2 \partial z} \left. \right) dV_2 =$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int u'_2 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{d_2}}{\partial z^2} \right) dV_2 = 0.$$

Hetzelfde geldt bij invoering van P'_2 , L'_2 , M'_2 en N'_2 in v en w .

Zooals wij reeds opmerkten, moet de integratie bij P_2 , L_2 , M_2 en N_2 uitgestrekt worden over het oppervlak der bijgevoegde ruimte; aan de grenzen daarvan kunnen wij evenwel de snelheden nul nemen, behalve aan dat deel van het oppervlak, dat met het oppervlak der vloeistof samenvalt, en waar de snelheden aan de daar aanwezige moeten aansluiten; de u_2 , v_2 , w_2 komen daar dus overeen met de u'_1 , v'_1 , w'_1 , terwijl $l'_2 = -l'_1$, $m'_2 = -m'_1$, $n'_2 = -n'_1$, daar l'_2 , m'_2 , n'_2 de cosinussen waren, die de naar buiten gerichte normaal aan het oppervlak der bijgevoegde ruimte, dus die de naar binnen gerichte normaal aan het oppervlak der vloeistof met de coördinaatassen maakt.

Wij hebben dus de indices 1 en 2 niet meer noodig om de grootheden van de vloeistof en der bijgevoegde ruimte te onderscheiden, en laten hen daarom vervallen, terwijl wij P_1 , L_1 , M_1 , N_1 en P_2 , L_2 , M_2 , N_2 behouden om achtereenvolgens de integraties over de ruimte en het oppervlak aan te geven. Wij vinden dus:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial (P_1 + P_2)}{\partial x} + \frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial y} - \frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial (P_1 + P_2)}{\partial y} + \frac{\partial (L_1 + L_2)}{\partial z} - \frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial (P_1 + P_2)}{\partial z} + \frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial x} - \frac{\partial (L_1 + L_2)}{\partial y}, \end{aligned} \right\} (32)$$

$$P_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta'}{d} dV', \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$P_2 = \frac{1}{4\pi} \int (u' l' + v' m' + w' n') \frac{dS'}{d}. \quad \dots \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi'}{d} dV', \\ M_1 &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta'}{d} dV', \\ N_1 &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta'}{d} dV', \end{aligned} \right\} (35) \quad \left. \begin{aligned} L_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int (w'm' - v'n') \frac{dS'}{d}, \\ M_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int (u'n' - w'l') \frac{dS'}{d}, \\ N_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int (v'l' - u'm') \frac{dS'}{d}. \end{aligned} \right\} (36)$$

Het blijkt dus dat de grootheden $P_1, L_1, M_1, N_1, P_2, L_2, M_2, N_2$ volkomen bepaald zijn.

Deze bepaling van u, v, w is voornamelijk ontleend aan de reeds genoemde verhandeling van HELMHOLTZ, echter met dit verschil, dat daarin niet voorkomen de grootheden P_2, L_2, M_2, N_2 , daar hij slechts het geval beschouwt, dat de wervelbuizen gesloten zijn, of dat de vloeistof zich oneindig ver uitstrekt, terwijl dan aan hare grenzen de snelheid nul is.

De waarden der verschillende grootheden $P_1, P_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ zijn, zooals uit het bovenstaande blijkt, volkomen bepaald, en de onbepaaldheid, die het gevolg was van het voortgezet zijn der wervelbuizen buiten de vloeistof, is van zelf weder verdwenen. Natuurlijk hadden ook buiten de vloeistof willekeurige gesloten wervelbuizen kunnen bijgevoegd worden.

Tot dezelfde waarden van u, v, w komt ook BELTRAMI ¹⁾ door middel van het theorema van GREEN. Hij gaat uit van

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta^2 u'}{d} dV' - \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{d} \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial n} \right) dS',$$

waarin de verschillende grootheden dezelfde beteekenis hebben als hierboven; alleen is u de naar binnen gerichte

1) Mem. di Bologna. Ser. III. T. 2, p. 394 e. v.

normaal. Is het punt, waarop u betrekking heeft, buiten de vloeistof gelegen, dan is $u = 0$.

Na verschillende partiële integraties en herleidingen, komt hij ten slotte tot de formules (32) tot (36).

De componenten der snelheid bestaan uit twee zeer verschillende deelen; het eerste daarvan, afhingende van $P_1 + P_2$, heeft eene snelheidspotential. De snelheid, die hiervan het gevolg is, is gelijk aan de kracht, die, volgens de wet van NEWTON, op een deeltje met eene eenheid van massa wordt uitgeoefend: a . door de massa, die zich in de ruimte V met een dichtheid $\frac{\theta}{4\pi}$ bevindt (θ veranderlijk van punt tot punt) en b . door eene hoeveelheid stof, die op het oppervlak dier ruimte met een dichtheid $\frac{1}{4\pi} (u l + v m + w n)$ is uitgespreid. De cubieke dilatatie (of condensatie), die in een punt ontstaat, veroorzaakt dus in elk ander punt van de vloeistof eene snelheid volgens hunne verbindingslijn, die evenredig met de dilatatie (of condensatie) en omgekeerd evenredig met het vierkant van hun afstand is. Denkt men zich verder om een punt in de vloeistof een oppervlak, dan heeft de hoeveelheid vloeistof, die in de eenheid van tijd door een oppervlakte-element stroomt, in elk punt eene snelheid ten gevolge evenredig met die hoeveelheid vloeistof en omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand; de snelheid is gericht volgens de verbindingslijn tegengesteld aan die van de vloeistof, die door het vlakte-element gaat.

Is de vloeistof onsamendrukbaar (dus $\theta = 0$) en het grensoppervlak de meetkundige plaats van een serie bewegingslijnen (lijnen, waarvan de richting in elk punt

wordt aangegeven door de richting der snelheid in dat punt) of op oneindigen afstand gelegen, terwijl dan tevens de snelheid daar nul is, dan is zoowel P_1 als P_2 gelijk 0, zoodat een deel der snelheid, dat eene snelheidspotential bezit, verdwijnt.

Gaan wij nu het andere deel der snelheidscomponenten na, en beschouwen wij daarvan in de eerste plaats de snelheid, die afhangt van L_1 , M_1 , N_1 :

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial y} \zeta' - \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial z} \eta' \right) dV',$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial z} \xi' - \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x} \zeta' \right) dV',$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial x} \eta' - \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial y} \xi' \right) dV'.$$

Noemen wij de componenten van dit deel der snelheid voor het punt (x, y, z) uitgeoefend door het deeltje x', y', z' , u_1, v_1, w_1 , dan is:

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{(y - y') \zeta' - (z - z') \eta'}{d^3} dV',$$

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \xi' - (x - x') \zeta'}{d^3} dV',$$

$$w_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - x') \eta' - (y - y') \xi'}{d^3} dV'.$$

Hieruit volgt:

$$u_1 (x - x') + v_1 (y - y') + w_1 (z - z') = 0,$$

wat aanduidt, dat de resulterende snelheid door het deeltje, dat zich in x', y', z' bevindt, in het punt (x, y, z) teweeg-

gebracht, loodrecht staat op de verbindingslijn dier punten.

Eveneens is :

$$u_1 \xi' + v_1 \eta' + w_1 \zeta' = 0;$$

die resulterende snelheid maakt dus ook met de resulterende rotatie-as in x' , y' , z' eenen rechten hoek.

Verder is die resulterende snelheid :

$$\begin{aligned} V &= \pm \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} = \\ &= \pm \frac{d V'}{2 \pi d^3} \sqrt{\xi'^2 \{ (y-y')^2 + (z-z')^2 \} + \eta'^2 \{ (z-z')^2 + (x-x')^2 \} + \\ &\quad + \zeta'^2 \{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \} - 2 \eta' \zeta' (y-y') (z-z') - \\ &\quad - 2 \zeta' \xi' (z-z') (x-x') - 2 \xi' \eta' (x-x') (y-y')} = \\ &= \pm \frac{d V'}{2 \pi d^3} \sqrt{\xi'^2 d^2 + \eta'^2 d^2 + \zeta'^2 d^2 - \xi'^2 (x-x')^2 - \eta'^2 (y-y')^2 - \\ &\quad - \zeta'^2 (z-z')^2 - 2 \eta' \zeta' (y-y') (z-z') - 2 \zeta' \xi' (z-z') (x-x') - \\ &\quad - 2 \xi' \eta' (x-x') (y-y')} = \\ &= \pm \frac{d V'}{2 \pi d^3} \sqrt{(\omega' d)^2 - [\xi' (x-x') + \eta' (y-y') + \zeta' (z-z')]^2} = \\ &= \pm \frac{d V'}{2 \pi d^3} \sqrt{(\omega' d)^2 - (\omega' d \cos \nu)^2} = \pm \frac{d V'}{2 \pi d^2} \omega' \sin \nu. \end{aligned}$$

Hierin stelt ν voor den hoek tusschen de hoeksnelheid ω' en de verbindingslijn der punten (x, y, z) en (x', y', z') .

Vatten wij deze resultaten te samen, dan verkrijgen wij :

Elk roteerend vloeistofdeeltje q brengt in een ander deeltje p dierzelfde vloeistofmassa eene snelheid tewegg, die loodrecht staat op het vlak gaande door de rotatie-as van q en de verbindingslijn pq . De grootte dier snelheid is recht evenredig met het volume van q , de hoeksnelheid van q en de sinus van den hoek

tusschen de lijn pq en de rotatie-as, en omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand der beide deeltjes.

De richting van beweging is, zooals uit het teeken van u_1, v_1, w_1 blijkt door het beschouwen van bijzondere gevallen, volkomen dezelfde, alsof de deeltjes p en q vast met elkander waren verbonden.

Deze werking herinnert ons aan de electro-magnetische kracht.

Noemt men dS' de normale doorsnede van eenen werveldraad, k' zijne sterkte, ds' den afstand van twee deeltjes, die op de as naast elkaar gelegen zijn, dan is $dV' = dS' \cdot ds'$, dus

$$\omega' dV' = k' ds,$$

en $\xi' dV' = k' dx', \eta' dV' = k' dy', \zeta' dV' = k' dz'.$

Hieruit volgt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{d} \zeta' - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{d} \eta' \right) dV' = k' \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{d} dz' - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{d} dy' \right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{d} \xi' - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{d} \zeta' \right) dV' = k' \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{d} dx' - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{d} dz' \right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{d} \eta' - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{d} \xi' \right) dV' = k' \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{d} dy' - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{d} dx' \right).$$

Integreert men de tweede leden dezer vergelijking langs een gesloten lijn, dan stellen zij voor de componenten van de kracht, die een electriche stroom met eene intensiteit k' , gaande langs die lijn, uitoefent op eene eenheid positieve magnetische vloeistof in het punt (x, y, z) . Onderstelt men, dat een stroomelement volgens dezelfde wet werkt als een gesloten stroom, dan heeft men: Elk deel van

een werveldraad met een sterkte k' veroorzaakt in elk punt er buiten eene snelheid, die in grootte en richting gelijk is aan de electro-magnetische kracht, welke door een electrischen stroom van eene intensiteit $\frac{k'}{2\pi}$ op dat punt zou worden uitgeoefend.

De componenten der rotatie, veroorzaakt door het deel der snelheid, dat afhangt van L_1 , M_1 , N_1 , zijn, zooals gemakkelijk blijkt,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} - \Delta^2 L_1\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \Delta^2 M_1\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \Delta^2 N_1\right),$$

waarbij A gebruikt wordt in de plaats van

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial M_1}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial z}.$$

Is de ruimte, die wij beschouwen en waarover dus alle noodige integraties zich moeten uitstrekken, eene wervelbuis, zoodat de wervellijnen niet aan het grensvlak eindigen, dan is in elk punt van het grensvlak de rotatiesnelheid volgens den normaal nul en dientengevolge ook $A = 0$ (zie pag. 47). De grootheden $\Delta^2 L_1$, $\Delta^2 M_1$, $\Delta^2 N_1$ zijn dan achtereenvolgens -2ξ , -2η , -2ζ , of nul, naarmate het punt (x, y, z) binnen of buiten de beschouwde ruimte ligt. Wij zien dus, dat in dit geval de gedeeltelijke beweging in het punt (x, y, z) teweeggebracht door de rotatiebeweging van alle deeltjes, die eene wervelbuis vormen, is eene beweging zonder rotatie, dus met eene snelheidspotentiaal, als het punt ligt buiten de wervelbuis; ligt het punt daarentegen binnen de wervelbuis, dan is het eene beweging zonder snelheidspotentiaal en de rotatiesnelheid is de totale rotatie, die het deeltje heeft.

Is de beschouwde ruimte geen wervelbuis, dan zijn de componenten der rotatie voor een punt der wervelbuis:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} + \xi, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial y} + \eta, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} + \zeta,$$

voor een punt buiten de wervelbuis :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z}.$$

De componenten der rotatie voortvloeiende uit L_2 , M_2 , N_2 zijn :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial y}, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z},$$

iets wat gemakkelijk is af te leiden uit de snelheidscomponenten

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{\partial N_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial L_2}{\partial y},$$

zoodat, wanneer aan het beschouwde oppervlak weder geene wervelbuizen eindigen, ook dit deel der snelheid eene snelheidspotentiaal bezit. Ligt het oppervlak op oneindigen afstand van het beschouwde punt en zijn de snelheden daar nul, dan is ook het deel der snelheid, dat van L_2 , M_2 , N_2 afhangt, nul, omdat dan L_2 , M_2 , N_2 zelf nul zijn.

In dit laatste geval worden dus de componenten der totale snelheid in een punt (x, y, z) , als wij ons bovendien de vloeistof onsamendrukbaar denken :

$$u = \frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial N_1}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}, \quad (37)$$

welke formules ook gelden voor het geval, dat de wervelbuizen binnen de vloeistof gesloten zijn, zooals uit pag. 46 en 47 volgt. Van deze formules maakt HELMHOLTZ voortdurend gebruik.

Zooals wij hierboven zagen, heeft het deel der snelheid afhankelijk van de rotatie der deeltjes in punten der vloeistof

stofmassa buiten de wervelbuizen eene snelheidspotential Φ_1 . Denken wij ons de wervelbuizen gesloten, dan is de ruimte, waarin die snelheidspotential bestaat, eene meer-
voudig samenhangende; in dit geval is Φ_1 meerwaardig, want daar de snelheden gelijk zijn aan de differentiaal-
quotienten van Φ_1 , moet men, als men de vloeistofbeweging volgt, tot steeds grootere waarden van Φ_1 geraken; men
vindt dus bij het volgen der vloeistofbeweging, als men op eene zelfde plaats terug komt, daar eene grootere waarde
van Φ_1 dan toen men daar voor het eerst kwam. Gaat men zoo door, dan vindt men voor Φ_1 op diezelfde plaats
terugkomende, telkens grootere waarden. Tot ditzelfde resultaat komen wij, door in punten buiten de wervelbui-
zen de snelheden uit de rotatie der deeltjes te bepalen, welke snelheden zullen blijken de differentiaalquotienten
van eene meerwaardige functie te zijn.

Beschouwen wij hiertoe korthedshalve een enkelen ge-
sloten werveldraad. Stellen wij voor het vloeistofelement dV in de plaats $\sigma' ds'$, waarbij σ' de doorsnede en ds'
een lengte-element van den werveldraad voorstelt, dan is:

$$\xi' = \frac{\omega' dx'}{ds'}, \quad \eta' = \frac{\omega' dy'}{ds'}, \quad \zeta' = \frac{\omega' dz'}{ds'},$$

en volgens (37):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\zeta'}{d} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta'}{d} \right) \right\} \sigma' ds' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \omega' \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{d} \right) - \omega' \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{d} \right) \right\} \sigma' ds' \\ &= \frac{\omega' \sigma'}{2\pi} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{d} \right) dy' - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{d} \right) dz' \right\}, \end{aligned}$$

want $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{d} \right) = - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{d} \right)$ en $\omega' \sigma'$, de sterkte van

den werveldraad, is voor alle deelen van den werveldraad dezelfde.

Herleiden wij volgens (19) deze lijn-integraal tot eene oppervlakte-integraal. Neem daartoe $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{d} \right)$, $\gamma_1 = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{d} \right)$, dan verkrijgen wij als de richtingscosinussen zijn l , m , n :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\omega' \sigma'}{2 \pi} \int \left\{ -l \left[\frac{\partial^2}{\partial y'^2} \left(\frac{1}{d} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left(\frac{1}{d} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'} \left(\frac{1}{d} \right) + n \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \left(\frac{1}{d} \right) \right\} dS' \\ &= \frac{\omega' \sigma'}{2 \pi} \int \left\{ l \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{d} \right) + m \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \left(\frac{1}{d} \right) + n \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \left(\frac{1}{d} \right) \right\} dS' \\ &= -\frac{\omega' \sigma'}{2 \pi} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{d} dS'. \end{aligned}$$

Men vindt dus $u = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, als

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{\omega' \sigma'}{2 \pi} \int \left(l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{d} dS' \\ &= -\frac{\omega' \sigma'}{2 \pi} \int \frac{\cos \theta}{d^2} dS', \end{aligned}$$

waarin θ den hoek tusschen d en den normaal l , m , n voorstelt. Daar $\frac{\cos \theta}{d^2} dS'$ den lichaamshoek van dS' in het punt (x, y, z) voorstelt, zoo blijkt, dat de snelheidspotentiaal in eenig punt ten opzichte van een gesloten werveldraad gelijk is aan het product van $\frac{\omega' \sigma'}{2 \pi}$ en den lichaamshoek van eenig oppervlak door den werveldraad begrensd. Daar die hoek met 4π toeneemt, telkens als het punt (x, y, z) een

gesloten kromme lijn rond den werveldraad beschreven heeft, is ook φ_1 eene cyclische functie met eene periode gelijk aan het dubbele van de sterkte van den werveldraad.

Wij vinden dus, dat de totale snelheid van een vloeistofdeeltje gesplitst kan worden in twee deelen; een deel, dat afhankelijk is van de dilatatie en altijd eene snelheidspotentiaal bezit, terwijl het andere deel, dat afhankelijk is van de rotatie der verschillende deeltjes, voor sommige punten eene snelheidspotentiaal heeft en voor andere niet, al naarmate het punt ligt buiten of binnen eene wervelbuis. Heeft het punt dus eene rotatiebeweging, dan is deze begrepen in het tweede deel der snelheid, evenwel is dat deel der snelheid niet alleen het gevolg der rotatie. Deze verdeling der snelheid is dus, zooals VELTMANN¹⁾ terecht opmerkt eene andere dan die van hoofdstuk I, maar desnietteenstaande volkomen bepaald.

De vergelijkingen (32) blijven doorgaan, wanneer θ, ξ, η, ζ ondoorlopend zijn, mits u, v, w slechts doorlopend zijn; de ondoorlopendheid van θ geeft geene verandering in ons betoog. Eene ondoorlopendheid van ξ, η, ζ zal echter eene verandering geven in het bewijs, dat aan de voorwaarde $\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$ voldaan wordt, daar in dit geval

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \xi' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{d} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{d} \right) + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{d} \right) \right\} dV = \\ & - \int \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'} \right) \frac{dV}{d} + \int \frac{l \xi' + m \eta' + n \zeta'}{d} dS + \\ & + \int \left\{ l (\xi_1 - \xi_2) + m (\eta_1 - \eta_2) + n (\zeta_1 - \zeta_2) \right\} \frac{d\Sigma}{d}; \end{aligned}$$

1) l. c.

hierin stelt dS' weder een element van het grensvlak van de vloeistof voor, $d\Sigma$ een element van het oppervlak, waar de waarden van ξ , η , ζ plotseling veranderen, terwijl ξ_1 , η_1 , ζ_1 en ξ_2 , η_2 , ζ_2 de componenten van de rotatie aan beide zijden van dat vlak voorstellen. Daar $(l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1)d\Sigma$ de sterkte van den werveldraad aangeeft en deze overal in den draad dezelfde is, zal

$$(l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1)d\Sigma = (l\xi_2 + m\eta_2 + n\zeta_2)d\Sigma$$

zijn, als ten minste ξ_1 , η_1 , ζ_1 en ξ_2 , η_2 , ζ_2 de hoeksnelheden van een zelfden werveldraad zijn, m. a. w. als de werveldraad door het vlak Σ gaat. Hierdoor verdwijnt de laatste oppervlakte-integraal en verkrijgen wij hetzelfde resultaat als vroeger. Hetzelfde is het geval, als de werveldraden het vlak Σ niet snijden, maar er aan beide zijden rakend langs loopen; want dan is

$$l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1 = l\xi_2 + m\eta_2 + n\zeta_2 = 0.$$

Terwijl wij nu nog aangenomen hebben, dat u , v , w doorlopend waren, zullen wij ten slotte ook nagaan, in hoeverre eene discontinuïteit dezer grootheden binnen het bereik onzer theorema's valt.

Onderstel dat wij hebben eene dunne laag, geheel bestaande uit werveldraden, en zij in een punt daarvan de hoeksnelheid ω en de dikte ε ; wanneer nu ω toeneemt en tegelijkertijd ε afneemt zonder grens, terwijl $\omega\varepsilon$ eindig blijft, dan verkrijgen wij een wervelvlak (Eng. Vortex-sheet). Uit de potentiaaltheorie weten wij, dat de grootheden L, M, N bij het gaan door dat vlak doorlopend blijven, terwijl daarentegen het differentiaalquotient volgens den normaal aan beide zijden verschilt. Nemen wij in een punt van het wervelvlak den normaal tot Z-as en de rotatie-as tot

X-as, dan is daar $\eta = \zeta = 0$; tegelijkertijd zijn dan M en N en hare differentiaalquotienten doorlopend; hetzelfde is het geval met L, $\frac{\partial L}{\partial x}$ en $\frac{\partial L}{\partial y}$, maar $\frac{\partial L}{\partial z}$ is daarentegen ondoorlopend. Hierbij is $L = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\xi' \varepsilon}{d} dx' dy'$ en de sprong van $\frac{\partial L}{\partial z}$ is volgens de potentiaaltheorie

$$\frac{\xi' \varepsilon}{2\pi} \times 4\pi = 2\xi' \varepsilon, \text{ zoodat in dat punt de snelheid, loodrecht op de wervellijnen en in het wervelvlak gelegen, ondoorlopend is. De snelheid, die loodrecht op de wervellijnen staat en het wervelvlak aanraakt, heeft aan beide zijden van dat vlak dus verschillende waarden. In het wervelvlak moet men zich die snelheid denken gelijkmatig over te gaan van de waarde, die zij aan de eene zijde heeft, tot die, welke zij aan de andere zijde bezit.}$$

Zulk een wervelvlak zal bijv. ontstaan als twee bewegende vloeistofmassa's, die oorspronkelijk gescheiden waren, met elkander in aanraking komen. Bij het aanrakingsvlak moeten noodzakelijk de daarop loodrecht staande snelheden gelijk zijn; echter zullen in het algemeen de snelheden *in* het aanrakingsvlak ongelijk zijn. Dat vlak zal dus de eigenschappen van een wervelvlak hebben.

Onderstellen wij, dat in eene oneindig dunne laag $\theta \varepsilon$ eene eindige waarde heeft, dan maakt ook de normale snelheid een sprong, die nu $\theta \varepsilon$ is.

De in dit hoofdstuk gevonden waarden van u, v, w kunnen wij gebruiken om de energie uit te drukken als functie van ξ, η, ζ .

Bepalen wij ons tot onsamendrukbare vloeistoffen met eene dichtheid ρ , dan is:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2 + w^2) dV.$$

Vervangen wij hierin gedeeltelijk u , v , w door hare waarden (26), dan verkrijgen wij:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \rho \int \left[u \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + w \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \right] dV, \\ &= \frac{1}{2} \rho \int \left(u P \cos \lambda + u N \cos \mu - u M \cos \nu + v P \cos \mu + v L \cos \nu - \right. \\ &\quad \left. - v N \cos \lambda + w P \cos \nu + w M \cos \lambda - w L \cos \mu \right) dS - \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho \int \left[P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + L \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + M \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + N \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \int \left[P (u \cos \lambda + v \cos \mu + w \cos \nu) + L (v \cos \nu - w \cos \mu) + \right. \\ &\quad \left. + M (w \cos \lambda - u \cos \nu) + N (u \cos \mu - v \cos \lambda) \right] dS + \\ &\quad + \rho \int (L \xi + M \eta + N \zeta) dV^1, \end{aligned}$$

(λ , μ , ν stellen de hoeken voor, die de naar buiten gerichte normaal met het oppervlak maakt).

Strekt de vloeistof zich oneindig ver uit, terwijl aan het oppervlak de normale snelheden nul zijn, en zijn verder de wervelbuizen op eindigen afstand van den oorsprong

1) In deze formule is P niet gelijk aan nul, omdat $\theta = 0$ is. P toch bestaat, zooals wij gezien hebben, uit eene ruimte-integraal en eene oppervlakte-integraal; alleen de eerste is in dit geval nul.

gelegen, dan behoeven van L, M en N de oppervlakte-integralen niet beschouwd te worden. Tevens zijn dan L, M en N in een punt van het zich op oneindigen afstand R bevindend oppervlak hoogstens van de orde $\frac{1}{R}$, en u, v, w , als zijnde de differentiaalquotienten van L, M en N, hoogstens van de orde $\frac{1}{R^2}$. De oppervlakte-integraal in E is dus hoogstens van de orde $\frac{1}{R}$ en verdwijnt diensgevolge ten opzichte van de ruimte-integraal bij de grens $R = \infty$. Men verkrijgt dan

$$E = \rho \int (L \xi + M \eta + N \zeta) dV. \quad (38)$$

Vervangen wij hierin L, M, N door hare waarden (35), dan heeft men

$$E = \frac{\rho}{2\pi} \iint \frac{\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta'}{d} dV dV', \quad (39)$$

waarbij elk der volume-integraties over al de wervelbuizen moet worden uitgestrekt.

Eene andere waarde voor E is

$$E = 2\rho \int \{u(y\zeta - z\eta) + v(z\xi - x\zeta) + w(x\eta - y\xi)\} dV. \quad (40)$$

Dat het tweede lid werkelijk gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2 + w^2) dV,$$

blijkt uit de volgende transformatie:

$$\begin{aligned} 2\rho \int u(y\zeta - z\eta) dV &= \rho \int u \left\{ y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dV \\ &= \rho \int \left(u y \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{1}{2} z \frac{\partial u^2}{\partial z} + z u \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV \\ &= -\rho \int \left(v y \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} u^2 + z w \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV, \end{aligned}$$

(daar de oppervlakte-integraal weder ten opzichte van de ruimte-integraal om dezelfde reden als hierboven verdwijnt).

Voor de laatste integraal kan men schrijven :

$$-\rho \int \left\{ (v y + w z + u x) \frac{\partial u}{\partial x} - u x \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \right\} dV.$$

Evenzoo wordt :

$$\begin{aligned} 2\rho \int v(z\xi - x\zeta) dV &= \\ &= -\rho \int \left\{ (u x + v y + w z) \frac{\partial v}{\partial y} - v y \frac{\partial v}{\partial y} - v^2 \right\} dV; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\rho \int w(x\eta - y\xi) dV &= \\ &= -\rho \int \left\{ (u x + v y + w z) \frac{\partial w}{\partial z} - w z \frac{\partial w}{\partial z} - w^2 \right\} dV. \end{aligned}$$

Het tweede lid van (40) wordt dus :

$$\begin{aligned} &-\rho \int \left\{ (u x + v y + w z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \right. \\ &-\left. \left(u x \frac{\partial u}{\partial x} + v y \frac{\partial v}{\partial y} + w z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (u^2 + v^2 + w^2) \right\} dV \\ &= \rho \int \left\{ (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} x \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{2} z \frac{\partial w^2}{\partial z} \right\} dV. \end{aligned}$$

Door partiële integratie der drie laatste termen verkrijgt men hieruit, in aanmerking nemende, dat de oppervlakte-integraal nul is :

$$\begin{aligned} &\rho \int \left\{ (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} w^2 \right\} dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2 + w^2) dV, \end{aligned}$$

wat, zooals wij weten, de uitdrukking is voor de bewegings-energie.

Voor de toeneming der energie vindt men in het algemeen bij toepassing der formules (1):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \rho \int \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) dV = \\ &= \rho \int \left\{ u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right\} dV = \\ &= \rho \int \left(F - \frac{p}{\rho} \right) (u \cos \lambda + v \cos \mu + w \cos \nu) dS \quad (\theta = 0) \\ &= \int (F \rho - p) V_n dS, \end{aligned}$$

waarbij V_n is de normale snelheid aan het oppervlak, terwijl F de potentiaal der kracht voorstelt.

Is de vloeistof door vaste wanden ingesloten of strekt zij zich oneindig ver uit, terwijl de normale snelheid aan het oppervlak nul is, dan verandert dus de energie niet met den tijd.

VIJFDE HOOFDSTUK.

Algemeene eigenschappen van evenwijdige, rechtlijnige werveldraden; toepassingen op één en op twee werveldraden.

Passen wij nu onze vroeger gevonden formules op eenige eenvoudige gevallen toe. Onderstellen wij daartoe, dat de vloeistofdeeltjes zich bewegen in evenwijdige platte vlakken, terwijl bovendien de beweging in elk dier vlakken dezelfde is. Zij de beweging evenwijdig aan het XY -vlak, dan is: $w = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, dus ook $\xi = 0$, $\eta = 0$; zoo bestaat alleen eene hoeksnelheid om eene as evenwijdig met de Z -as, welke dus onafhankelijk is van z . Alle wervelbuizen loopen nu evenwijdig met de Z -as. Uit de vergelijkingen (11) volgt $\frac{d\xi}{dt} = 0$, zoodat elk vloeistofdeeltje steeds dezelfde hoeksnelheid behoudt, terwijl dientengevolge de doorsnede der wervelbuis ook niet van grootte verandert.

Is de vloeistof onsamendrukbaar en naar alle kanten oneindig ver uitgestrekt, dan behoeven de integraties in (30) en (31) volgens pag. 47 slechts over de vloeistofruimte te worden uitgestrekt, en is

$$P = 0, \quad L = M = 0, \quad N = \frac{1}{2\pi} \int \int \int \frac{\zeta'}{d} dx' dy' dz'.$$

Integreert men dezen vorm langs de Z-as tusschen de grenzen $-a$ en $+a$, terwijl men d^2 vervangt door $z^2 + d^2$, waarbij weder d voorstelt den afstand van het beschouwde punt tot het punt, dat met het eerste in hetzelfde vlak evenwijdig aan het XY-vlak gelegen is en de rotatiesnelheid ζ' heeft. Men verkrijgt dan :

$$N = \frac{1}{2\pi} \int \int \zeta' \log \{ a + \sqrt{(a^2 + d^2)} \}^2 dx' dy' \\ - \frac{1}{\pi} \int \int \zeta' \log d dx' dy'.$$

Wel is de waarde van N voor $a = \infty$ ook zelf oneindig groot, maar daar wij slechts met de differentiaalquotienten van N te maken hebben en het eerste deel daarvan voor a oneindig groot tot de grens nul nadert, zullen wij dat deel van N in het vervolg mogen verwaarloozen, en houden dus over :

$$N = - \frac{1}{\pi} \int \int \zeta' \log d dx' dy'. \quad \dots \quad (41)$$

Verder is dan :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial N}{\partial y} = - \frac{1}{\pi} \int \int \zeta' \frac{y - y'}{d^2} dx' dy', \\ v &= - \frac{\partial N}{\partial x} = + \frac{1}{\pi} \int \int \zeta' \frac{x - x'}{d^2} dx' dy'. \end{aligned} \right\} (42)$$

Uit de differentiaalvergelijking der bewegingslijnen (zie pag. 52) $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$, volgt terstond $N = \text{const.}$ voor de ver-

gelijking dier lijnen. De grootheid N , die men aan eene constante gelijk moet stellen, om de vergelijking der bewegingslijnen te verkrijgen, en die men altijd bij de vloeistofbeweging aantreft, als deze in evenwijdige platte vlakken dezelfde is, noemt men de stroomfunctie¹⁾.

Uit de waarden van u en v volgt, dat de snelheidspotentiaal in de punten der vloeistof buiten de wervelbuizen gelegen, is:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int \int \zeta' b g t g \frac{y - y'}{x - x'} dx' dy'.$$

Een werveldraad met de coördinaten x', y' en eene sterkte m' geeft dus aan het deeltje x, y eene snelheid, waarvan de componenten zijn $-\frac{m'}{\pi} \frac{y - y'}{d^2}$ en $\frac{m'}{\pi} \frac{x - x'}{d^2}$. De resulterende snelheid, die dat deeltje door den werveldraad ontvangt, staat dus loodrecht op de verbindingslijn en is $\frac{m'}{\pi d}$.

1) Onder stroomlijn verstaat men de lijn, die een bepaald deeltje doorloopt; terwijl dus de stroomlijn betrekking heeft op één deeltje gedurende het geheele tijdsverloop der beweging, heeft de bewegingslijn betrekking op verschillende deeltjes gedurende één bepaald oogenblik. Is de beweging stationnair, dan gaan evenwel de bewegingslijnen over in stroomlijnen. In eene verhandeling, getiteld „Vortex Statics”, voorkomende in de Proc. of the R. Soc. of Edinb. Vol. IX, heeft W. THOMSON de bepaling van stationnaire beweging uitgebreid tot een bewegingstoestand, die zich in zijn geheel verplaatst. Laten wij dus in dit geval het coördinatenstelsel in de beweging deelen, dan is in de verschillende punten, die achtereenvolgens ten opzichte van dat stelsel op dezelfde plaats liggen, de snelheid in richting en grootte steeds dezelfde. Ten opzichte van het bewegelijke stelsel zal dus de vergelijking der stroomlijnen dezelfde zijn als die der bewegingslijnen ten opzichte van het vaste stelsel.

Noemen wij het punt, welks coördinaten x_0, y_0 bepaald worden door de vergelijkingen:

$$x_0 \int \int \zeta dx dy = \int \int x \zeta dx dy, \quad y_0 \int \int \zeta dx dy = \int \int y \zeta dx dy, \quad (43)$$

$$\text{of door } x_0 \Sigma m = \Sigma x_i m_i, \quad y_0 \Sigma m = \Sigma y_i m_i, \quad (44)$$

waarbij de sommatie moet worden uitgestrekt over alle wervelbuizen, het zwaartepunt der wervelbuizen naar analogie van de leer van het zwaartepunt der massa.

Zooals wij reeds zagen, blijven ζ en $dx dy$ ten opzichte van den tijd constant, zoodat

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta dS = \int u \zeta dS, \quad \frac{dy_0}{dt} \int \zeta dS = \int v \zeta dS,$$

of bij substitutie der waarden van u en v :

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta dS = -\frac{1}{\pi} \int \int \zeta \zeta' \frac{y - y'}{d^2} dS dS',$$

$$\frac{dy_0}{dt} \int \zeta dS = -\frac{1}{\pi} \int \int \zeta \zeta' \frac{x - x'}{d^2} dS dS'.$$

Elk der beide integraties moet plaats hebben over alle wervelbuizen, zoodat elk paar vlakke-elementen tweemaal voorkomt; de term met dS zal bij integratie over dS' echter het tegengestelde zijn van dien met dS' bij integratie over dS , zooals terstond blijkt bij verwisseling der letters met en zonder accenten, zoodat deze beide termen elkander opheffen. Wij vinden dus:

$$\frac{dx_0}{dt} \int \zeta dS = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} \int \zeta dS = 0,$$

of

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \dots \dots (45)$$

wanneer ten minste niet $\int \zeta dS = 0$ is, in welk geval

het zwaartepunt der wervelbuizen op oneindigen afstand gelegen is.

De wervelbuizen bewegen zich dus zoodanig om elkaar, dat haar gemeenschappelijk zwaartepunt op zijne plaats blijft.

Bestaat er slechts één enkele werveldraad, dan zal zijn zwaartepunt liggen binnen of in elk geval oneindig dicht bij den werveldraad. Wij zullen in het vervolg dan ook spreken van het zwaartepunt van één werveldraad. Dat zwaartepunt zal dus, zooals uit het bovenstaande blijkt, niet van plaats veranderen door de beweging van den werveldraad.

Zijn van de verschillende werveldraden de sterkten m_1, m_2, m_3, \dots , de coördinaten van de zwaartepunten dier verschillende draden op een tijd $t: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$, en hunne afstanden tot een punt $(x, y): d_1, d_2, d_3, \dots$, dan is voor alle punten, die op eindigen afstand van al de werveldraden gelegen zijn:

$$N = -\frac{1}{\pi} \sum m_i \log d_i, \quad u = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial N}{\partial x},$$

waarbij de sommatie over al de werveldraden moet plaats hebben. Daar verder de doorsneden der werveldraden oneindig klein zijn, moeten, als m_1, m_2, m_3, \dots eindig zijn, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ oneindig groot zijn.

De zwaartepunten der verschillende werveldraden bewegen zich; echter zal dat deel der snelheid van het zwaartepunt, dat het gevolg is van de beweging van den draad zelf, nul zijn, zoodat de snelheid u_i, v_i van het zwaartepunt van den werveldraad m_i 1) zal gevonden worden door

$$u_i = \frac{\partial w_i}{\partial y_i}, \quad v_i = -\frac{\partial w_i}{\partial x_i}, \quad \dots \quad (46)$$

1) In het vervolg zullen wij spreken van den werveldraad i in plaats van den werveldraad met de sterkte m_i .

als

$$w_i = -\frac{1}{\pi} \sum m_j \log d_{ij}, \dots \quad (47)$$

mits de afstand van de werveldraden tot den draad i eindig is. De sommatie moet plaats hebben over alle waarden van j , terwijl d_{ij} beteekent den afstand van i tot j .

Nemen wij

$$-\frac{1}{\pi} \sum m_i m_j \log d_{ij} = P, \dots \quad (48)$$

te sommeeren over alle mogelijke ongelijke waarden van i en j , dan is

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y_i} \quad \text{en} \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \dots \quad (49)$$

Zijn er dus in de vloeistof n werveldraden, dan hebben wij in (49) een stel van $2n$ differentiaal-vergelijkingen, die geïntegreerd de plaats der draden aangeven als functies van den tijd. Het is echter niet altijd mogelijk de integralen uit te voeren.

Eenige integralen van (49) zijn evenwel gemakkelijk te bepalen. De waarde van P verandert niet, wanneer al de abscissen of al de ordinaten der werveldraden met eene zelfde grootte toenemen. Daaruit volgt:

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en} \quad \sum \frac{\partial P}{\partial y_i} = 0,$$

$$\text{d. w. z.} \quad \sum m_i y_i = \text{const.} \quad \text{en} \quad \sum m_i x_i = \text{const.},$$

welke integralen niets nieuws opleveren, daar zij slechts te kennen geven, dat het gemeenschappelijk zwaartepunt bij de beweging op zijne plaats blijft.

Eene andere integraal geeft het stel vergelijkingen (49) door de gedeeltelijke differentiaal-quotienten van P naar y_i en x_i^2 achtereenvolgens te vermenigvuldigen met dy_i en dx_i , en de uitkomsten voor de verschillende waarden van i op te tellen; men verkrijgt dan:

$$dP = 0, \text{ dus } P = \text{const.} \dots (50)$$

Een vierde integraal vindt men door het invoeren van poolcoördinaten

$$x_i = \rho_i \cos \theta_i, \quad y_i = \rho_i \sin \theta_i,$$

De differentiaalvergelijkingen worden dan door substitutie:

$$m_i \rho_i \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \theta^i}, \dots (51)$$

$$m_i \rho_i \frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \rho_i} \dots (52)$$

Daar P niet verandert als al de θ 's met eene zelfde waarde toenemen, vindt men:

$$\Sigma \frac{\partial P}{\partial \theta_i} = 0, \text{ dus } \Sigma m_i \rho_i^2 = \text{const.} \dots (53)$$

Worden, terwijl al de θ 's constant blijven, de ρ 's n maal groter, zoodat $\log \rho_i$ met $\log n$ toeneemt, dan wordt ook d_{ij} n maal groter, terwijl dan tevens, zooals uit de waarde van P blijkt, deze met

$$-\frac{1}{\pi} \log n \Sigma m_i m_j$$

toeneemt. Dientengevolge is:

$$\Sigma \frac{\partial P}{\partial \log \rho^i} = -\frac{1}{\pi} \Sigma m_i m_j,$$

of

$$\Sigma \rho_i \frac{\partial P}{\partial \rho_i} = -\frac{1}{\pi} \Sigma m_i m_j, \dots (54)$$

waaruit in verband met de waarden van $\frac{\partial P}{\partial \rho_i}$ volgt:

$$\sum m_i \rho_i^2 \frac{d \theta_i}{d t} = \frac{1}{\pi} \sum m_i m_j \dots \quad (55)$$

Passen wij het gevondene nu toe op eenige bijzondere gevallen.

Bevindt er zich in de vloeistof slechts één werveldraad, dan ligt, zooals wij hierboven zagen, het zwaartepunt in of oneindig dicht bij den werveldraad. Daar dat punt niet van plaats verandert, zal ook de werveldraad zich niet verplaatsen; de afzonderlijke deeltjes echter zullen zich wel ten opzichte van elkander kunnen bewegen, terwijl ook de plaats van het zwaartepunt niet altijd door hetzelfde deeltje zal worden ingenomen.

Elk punt, dat op eindigen afstand van den werveldraad gelegen is, zoodat de afstand d er van tot elk willekeurig punt der doorsnede van den draad dezelfde is als die tot het zwaartepunt, beweegt zich volgens (42) om dat zwaartepunt in een cirkel met eene tangentiële snelheid $\frac{m}{\pi d}$.

Hoe wordt de beweging, wanneer in de vloeistof twee werveldraden aanwezig zijn, wier sterkten m_1 en m_2 zijn? Nemen wij tot oorsprong O van coördinaten het zwaartepunt.

Volgens (44) is nu $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$, $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$, zoodat het zwaartepunt ligt op de verbindingslijn der draden; volgens (48) en (50) is $P = -\frac{1}{\pi} m_1 m_2 \log d_{12} = \text{const.}$, waaruit volgt, dat de afstand der werveldraden niet verandert; tevens blijkt nu, dat hunne afstanden tot O ook constant zijn en wel $\frac{m_2 d_{12}}{m_1 + m_2}$, $\frac{m_1 d_{12}}{m_1 + m_2}$.

Daar het zwaartepunt niet van plaats verandert, en de

werveldraden op standvastigen afstand van het zwaartepunt gelegen blijven, kunnen zij niet anders dan zich in een cirkel daaromheen bewegen, hetgeen ook terstond blijkt, als men de waarden der snelheidscomponenten uit (49) bepaalt; deze zijn

$$u_1 = -\frac{m_2}{\pi} \frac{y_1 - y_2}{d_{12}^2}, \quad v_1 = \frac{m_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{d_{12}^2},$$

$$u_2 = -\frac{m_1}{\pi} \frac{y_2 - y_1}{d_{12}^2}, \quad v_2 = \frac{m_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{d_{12}^2},$$

waaruit voor de snelheden zelf volgt:

$$\frac{m_2}{\pi d_{12}} \quad \text{en} \quad \frac{m_1}{\pi d_{12}}.$$

De hoeksnelheid der werveldraden is $\frac{m_1 + m_2}{\pi d_{12}^2}$.

Is de richting van wenteling in de twee werveldraden dezelfde, zoodat m_1 en m_2 hetzelfde teeken hebben, dan ligt O tusschen hen in; hebben zij evenwel tegengesteld teeken, dan ligt O op het verlengde der verbindingslijn.

Is in de eerste plaats $m_1 = m_2 = m$, dan ligt het zwaartepunt O in het midden tusschen de beide werveldraden, die zich nu met gelijke snelheid $\frac{m}{2\pi a}$ ($2a$ hun afstand) om O draaien; de hoeksnelheid is $\omega = \frac{m}{2\pi a^2}$.

De stroomfunctie is

$$N = -\frac{m}{2\pi} \log \left\{ (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right\} - \frac{m}{2\pi} \log \left\{ (x+x_1)^2 + (y+y_1)^2 \right\},$$

want, daar de coördinaten van den eenen werveldraad zijn x_1, y_1 , zijn die van den anderen $-x_1, -y_1$. Verder zijn $x_1 = a \cos \omega t$ en $y_1 = a \sin \omega t$, als de assen zoo gekozen zijn, dat voor $t=0$ de werveldraden op de X-as gelegen

zijn. Men vindt nu voor de vergelijking der bewegingslijnen:

$$\{(x - a \cos \omega t)^2 + (y a - \sin \omega t)^2\} \{(x + a \cos \omega t)^2 + (y + a \sin \omega t)^2\} = \text{const.}$$

Op elk oogenblik zijn dus de bewegingslijnen *lemniscaten*.

Laten wij het coördinatenstelsel met de werveldraden meedraaien, zoodat $x_1 = a$ en $y_1 = 0$ blijft, dan zal, wanneer u, v, x, y op het nieuwe coördinatenstelsel betrekking hebben,

$$u = \frac{dx}{dt} = y \omega + \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -x \omega - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Hieruit volgt door deeling voor de vergelijking der stroomlijnen ten opzichte van het bewegelijke stelsel:

$$\frac{dx}{dy} = - \left(y \omega + \frac{\partial N}{\partial y} \right) : \left(x \omega + \frac{\partial N}{\partial x} \right),$$

$$x \omega dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx + y \omega dy + \frac{\partial N}{\partial y} dy = 0,$$

$$N + \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad \text{of}$$

$$- \frac{m}{2\pi} \log \left\{ (x - a)^2 + y^2 \right\} \left\{ (x + a)^2 + y^2 \right\} + \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Is $m_1 = -m_2 = m$, dan ligt het zwaartepunt O op oneindigen afstand, en de werveldraden bewegen zich met gelijke snelheid $\frac{m}{2\pi a}$ ($2a$ afstand der werveldraden) loodrecht op hunne verbindingslijn, die zich dus verplaatst evenwijdig met zich zelve.

$N = \text{const.}$ geeft de vergelijking der bewegingslijnen op

ieder oogenblik. Zijn weder d_1 en d_2 de afstanden van een punt tot de beide werveldraden, dan is:

$$N = -\frac{m}{\pi} \log d_1 + \frac{m}{\pi} \log d_2 = \text{const. of } \frac{d_1}{d_2} = \text{const.}$$

Neemt men de X-as evenwijdig met de verbindingslijn en de Y-as loodrecht op het midden daarvan, dan bewegen de werveldraden zich in de richting der negatieve Y-as, als de werveldraad met de sterkte m_1 ligt aan den positieven kant der X-as. Dientengevolge wordt de vergelijking der bewegingslijnen:

$$\frac{(x-a)^2 + (y+p)^2}{(x+a)^2 + (y+p)^2} = C,$$

of bij uitwerking:

$$\left(x - a \frac{1+C}{1-C}\right)^2 + (y+p)^2 = 4a^2 \frac{C}{(1-C)^2},$$

waarbij $p = \frac{m}{2\pi a} t$, als voor $t=0$ de werveldraden op de X-as gelegen zijn, terwijl C eene onbepaalde constante voorstelt.

De bewegingslijnen zijn dus cirkels, waarvan het middelpunt ligt op het verlengde der verbindingslijn van de werveldraden en wel het dichtst bij dien draad, welke het dichtst gelegen is bij de punten van de bewegingslijn. Voor $C=1$ wordt $x=0$, zoodat de Y as eene bewegingslijn is en blijft; dit is dus tevens eene stroomlijn. Alle deeltjes gelegen in het vlak, dat loodrecht op het midden der verbindingslijn staat, blijven zich dus in dat vlak bewegen en wel in dezelfde richting als de werveldraden. Wij kunnen nu dat vlak beschouwen als een grensvlak der vloeistof, zoodat wij hier gevonden hebben de beweging der vloeistof begrensd door een plat vlak evenwijdig aan een zich bewegend werveldraad; deze beweegt zich met eene

snelheid $\frac{m}{2\pi a}$ evenwijdig aan het grensvlak (a afstand van den draad tot het grensvlak), terwijl de bewegingslijnen cirkels zijn.

De vergelijking der stroomlijnen ten opzichte van een coördinatenstelsel, welks X-as blijft samenvallen met de verbindingslijn der werveldraden, verkrijgt men weder als volgt:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{m}{2\pi a},$$

dus:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial N}{\partial y} : \left(-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{m}{2\pi a} \right),$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} dy + \frac{\partial N}{\partial x} dx - \frac{m}{2\pi a} dx = 0,$$

$$N - \frac{m x}{2\pi a} = \text{const.},$$

$$-\frac{m}{2\pi} \log \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{m x}{2\pi a} = \text{const.}$$

Wij vonden zoo even, dat de beweging van een werveldraad in eene vloeistof begrensd door een plat vlak, dezelfde is als die, welke de werveldraad in eene onbegrensde vloeistof verkrijgt door een anderen, die het beeld is van den eersten. Deze methode kan nu ook uitgebreid worden en dienen ter bepaling van de beweging van een paar werveldraden, die zich symmetrisch bewegen in een hoek van $\frac{2\pi}{n}$, of ter bepaling van de beweging van een enkelen werveldraad in een hoek van $\frac{\pi}{n}$, waarbij n

een geheel getal is ¹⁾). In het eenvoudigst geval heeft men een paar tegengestelde werveldraden (werveldraden met gelijke sterkte, terwijl de rotatiebeweging in beide tegengestelde richtingen heeft), die zich bewegen in de richting loodrecht op het grensvlak.

Zij de lijn, die de werveldraden verbindt, X-as, de lijn loodrecht op het midden der verbindingslijn opgericht, Y-as, dan zijn de coördinaten der beide wervelbuizen x, y , en $-x, y$, die der beide beelden $x, -y$, en $-x, -y$. De snelheid van den eersten werveldraad is een gevolg van de aanwezigheid van den anderen draad en van den vasten wand, welks werking door die van de beide beelden vervangen wordt; zij bestaat dus uit de drie volgende deelen: *a.* eene snelheid volgens de Y-as, groot $-\frac{m}{2\pi x}$, veroorzaakt door den tweeden werveldraad; *b.* eene snelheid volgens de X-as, groot $\frac{m}{2\pi y}$, veroorzaakt door zijn eigen beeld, en *c.* eene hoeksnelheid in positieve richting, groot $\frac{m}{2\pi(x^2+y^2)}$, veroorzaakt door het beeld van den tweeden werveldraad. De snelheids-componenten zijn:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{2\pi y} - \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{y(x^2+y^2)},$$

en

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{m}{2\pi x} + \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{y^2}{x(x^2+y^2)}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x^3} + \frac{\frac{dy}{dt}}{y^3} = 0, \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{const.},$$

1) Zie GREENHILL, Plane Vortex Motion. Quart. Journ. of Math. XV.

voor de vergelijking der kromme lijn door dien werveldraad beschreven.

Zijn baan kan men ook rechtstreeks uit de stroomfunctie verkrijgen, door op te merken, dat de werveldraad eene stroomlijn volgt, die haar ontstaan te danken heeft aan den anderen werveldraad en aan de beide beelden; voor een punt dier baan wordt dus de stroomfunctie:

$$N = - \frac{m}{2\pi} \log 4x^2 - \frac{m}{2\pi} \log 4y^2 + \frac{m}{2\pi} \log 4(x^2 + y^2).$$

Stelt men dit gelijk aan eene constante, dan vindt men voor de vergelijking van de baan door den werveldraad doorloopen:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \text{const. of } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{const.,}$$

waarbij de constante bepaald wordt door de plaats, die de draad op een zeker oogenblik inneemt. Bij overgang tot poolcoördinaten wordt de vergelijking die der spiraal van Cotes, $r \sin 2\theta = 2a$, een kromme lijn, die symmetrisch is ten opzichte van de lijn, die een hoek van 45° met de X-as maakt, die verder de X-as en de Y-as tot asymptoten heeft, maar deze niet zoo sterk nadert als het geval is bij de gelijkzijdige hyperbool.

Daar alle punten op de Y-as zich bewegen in de richting van die as zelve, kan deze tot grens genomen worden; wij verkrijgen dan het geval, dat een werveldraad in de ruimte tusschen twee onderling loodrechte vlakken zich beweegt langs eene spiraal van Cotes. Dit blijft waar, als de hoek, dien de beide vlakken met elkan- der maken, is het n^{de} deel (n een geheel getal) van 2π , of als men een paar symmetrisch geplaatste tegengestelde wervels heeft in een hoek van $\frac{2\pi}{n}$. Bij gebruik van pool-

coördinaten vindt men voor de coördinaten van den werveldraad en zijne opvolgende beelden:

$$(1) r, \theta, \quad (2) r, \frac{2\pi}{n} - \theta, \quad (3) r, \frac{2\pi}{n} + \theta, \dots \quad (2n) r, \frac{2n\pi}{n} - \theta,$$

waarbij tot as is genomen de lijn, die den hoek $\frac{2\pi}{n}$ middendoor deelt.

De sterkten van den werveldraad en van zijne beelden zijn natuurlijk gelijk, maar achtereenvolgens tegengesteld in teeken.

In dit geval is de stroomfunctie in een punt

$$N = -\frac{m}{\pi} \log \frac{d_1 d_3 d_5 \dots d_{2n-1}}{d_2 d_4 d_6 \dots d_{2n}},$$

als d_1, d_2, \dots de afstanden van dat punt tot den werveldraad en zijne beelden voorstellen. De snelheid in een punt vindt men in poolcoördinaten uitgedrukt:

$$r \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial r}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta}.$$

De snelheid van den werveldraad kan men, evenals hierboven, verkrijgen uit de stroomfunctie door alleen uit deze weg te laten het deel, dat van den werveldraad zelf afkomstig is, omdat hij zich zelf geen beweging mededeelt. Voor den werveldraad is:

$$N = -\frac{m}{\pi} \log \frac{d_3 d_5 \dots d_{2n-1}}{d_2 d_4 \dots d_{2n}},$$

waarbij:

$$d_{2k}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - \theta - \theta' \right),$$

$$d_{2k+1}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + \theta - \theta' \right);$$

hierin zijn r en θ de coördinaten van den werveldraad, terwijl r' en θ' betrekking hebben op de beelden. Hoewel de r' en θ' gelijk zijn aan r en θ moeten wij haar bij de differentiatie toch van elkander onderscheiden, omdat men voor de bepaling der snelheid van den werveldraad de coördinaten der beelden constant moet houden; na de differentiatie moet men echter $r' = r$ en $\theta' = \theta$ nemen. Wij verkrijgen nu:

$$r \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial N}{\partial r} = - \frac{m}{2\pi r} + \frac{m}{2\pi r} - \frac{m}{2\pi r} \dots - \frac{m}{2\pi r} = - \frac{m}{2\pi r},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} = - \frac{m}{2\pi r} \cotg \left(\frac{\pi}{n} - \theta \right) + \frac{m}{2\pi r} \cotg \frac{\pi}{n} -$$

$$- \frac{m}{2\pi r} \cotg \left(\frac{2\pi}{n} - \theta \right) \dots + \frac{m}{2\pi r} \cotg \frac{(n-1)\pi}{n} -$$

$$- \frac{m}{2\pi r} \cotg \left(\frac{n\pi}{n} - \theta \right) = \frac{m}{2\pi r} \cdot n \cotg n\theta \quad 1)$$

$$1) \sum_{k=1}^{k=n-1} \cotg \frac{k\pi}{n} = 0 \text{ want } \cotg \frac{k\pi}{n} + \cotg \frac{(n-k)\pi}{n} = 0.$$

Volgens SCHLÖMILCH, Analysis, is:

$$\sin n u = 2^{n-1} \sin u \sin \left(\frac{\pi}{n} + u \right) \sin \left(\frac{2\pi}{n} + u \right) \dots \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} + u \right);$$

hieruit volgt:

$$\log \sin n u = (n-1) \log 2 + \sum_{k=0}^{k=n-1} \log \sin \left(\frac{k\pi}{n} + u \right).$$

Door differentiatie verkrijgt men:

$$n \cotg n u = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cotg \left(\frac{k\pi}{n} + u \right),$$

waaruit men gemakkelijk afleidt:

$$- n \cotg n \theta = \sum_{k=1}^{k=n} \cotg \left(\frac{k\pi}{n} - \theta \right).$$

voor de snelheidscomponenten, terwijl uit

$$\frac{dr}{r d\theta} = -n \cotg n\theta$$

volgt voor de vergelijking van de baan door den werveldraad doorloopen $r \sin n\theta = a$; dit is eene spiraal van Cotes.

Deze laatste uitkomst had men dadelijk kunnen verkrijgen door de stroomfunctie voor de plaats van den werveldraad gelijk aan eene constante te stellen. Men verkrijgt dan:

$$N = -\frac{m}{\pi} \log \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{n-1}{n} \pi}{2r \sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \theta\right) \dots \sin\left(\frac{n\pi}{n} - \theta\right)} = C,$$

$$-\frac{m}{\pi} \log \left\{ \frac{n}{2^{n-1}} : \frac{2r \sin n\theta}{2^{n-1}} \right\} = C$$

of $r \sin n\theta = a$.

(Zie SCHLÖMILCH, Analysis.)

Hierboven zagen wij, dat de bewegingslijnen, als er zich in de vloeistof twee tegengestelde werveldraden bevinden, cirkels zijn; wij komen hierdoor tot de oplossing van het geval, waarbij de vloeistof in- of uitwendig begrensd wordt door eenen cylinder, terwijl in de vloeistof slechts één werveldraad aanwezig is.

Zij (fig. 2) de cirkel de doorsnede van den cylinder en A de plaats van den werveldraad, zoodat in dit geval de vloeistof inwendig door den cylinder wordt begrensd. Is B het beeld van A ten opzichte van den cirkel, waarvan het middelpunt M is, dan is $MB \times MA = R^2$ (R straal van den cirkel), terwijl $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \text{const. is}$.

Zal de beweging mogelijk zijn, dan moet de cirkel de plaats innemen van eene stroomlijn in eene onbegrensde vloeistof. Dit zal het geval zijn, als wij ons eenen werveldraad van gelijke sterkte, doch met tegengesteld teeken op elk oogenblik denken in het beeldpunt van den zich bewegenden werveldraad. Daar in dit geval de richting van beweging van den draad A loodrecht staat op A B, zoo is het duidelijk, dat aan alle voorwaarden voldaan wordt door A eenen cirkel te laten beschrijven om het punt M met de constante snelheid $\frac{m}{\pi \cdot A B} = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{M A}{M A^2 - R^2}$. Evenzoo zal een werveldraad, binnen den cylinder gelegen, b.v. in B, eenen cirkel beschrijven met de constante snelheid $\frac{m}{\pi} \frac{M B}{R^2 - M B^2}$.

Noemen wij den afstand van den werveldraad tot het middelpunt van den cylinder c , dan is in deze beide gevallen de hoeksnelheid ω achtereenvolgens:

$$\frac{m}{\pi (c^2 - R^2)} \quad \text{en} \quad \frac{m}{\pi (R^2 - c^2)}.$$

Wij zien dus, dat in dit geval de hoeksnelheid van werveldraden, die in elkanders beeldpunt gelegen zijn, niet dezelfde is, zoodat de beweging binnen en buiten den cylinder onafhankelijk van elkander is.

Om de stroomlijnen te vinden, als bijv. de draad in den cylinder ligt, laten wij de assen weder met den werveldraad mededraaien. Men heeft dan:

$$N = - \frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + (x - c)^2 \right\} + \frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + \left(x - \frac{R^2}{c} \right)^2 \right\},$$

$$\frac{dx}{dt} = y \omega + \frac{\partial N}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -x \omega - \frac{\partial N}{\partial x};$$

door integratie van

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y\omega + \frac{\partial N}{\partial y}}{-x\omega - \frac{\partial N}{\partial x}}$$

vindt men voor de vergelijking der stroomlijnen :

$$N + \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = C,$$

welke vergelijking voor eene bepaalde waarde van C $x^2 + y^2 = R^2$ wordt.

Wij kunnen nu ook bepalen binnen of buiten eenen cylinder de beweging, veroorzaakt door twee gelijke werveldraden, die op gelijke afstanden van de as gelegen zijn in een vlak, dat door de as gaat, door toevoeging van twee werveldraden in de beeldpunten; door gebruik te maken van dezelfde notatie als hierboven, vinden wij nu voor de snelheid der werveldraden :

$$\omega c = \frac{m}{2\pi c} + \frac{m}{\pi \left(\frac{R^2}{c} - c\right)} - \frac{m}{\pi \left(\frac{R^2}{c} + c\right)}$$

of

$$\omega = \frac{m}{2\pi c^2} \frac{R^4 + 3c^4}{R^4 - c^4}.$$

Verder is:

$$N = -\frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + (x-c)^2 \right\} - \frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + (x+c)^2 \right\} + \\ + \frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + \left(x - \frac{R^2}{c} \right)^2 \right\} + \frac{m}{2\pi} \log \left\{ y^2 + \left(x + \frac{R^2}{c} \right)^2 \right\}.$$

Evenals hierboven vindt men voor de vergelijking der stroomlijnen :

$$N + \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = C.$$

Zijn de werveldraden slechts gelegen op gelijke afstanden van de as en niet in een vlak, dat door de as gaat, en hebben zij bovendien tegengestelde sterkte, dan is hunne snelheid in poolcoördinaten op de volgende wijze uit te drukken. Gebruiken wij als as de lijn, die hunne verbindingslijn loodrecht middendoor deelt, en noemen wij de coördinaten van de beide werveldraden en hunne beelden $r, \theta, r, -\theta, \frac{R^2}{r}, \theta, \frac{R^2}{r}, -\theta$; zijn (fig. 3) P en P₁ de werveldraden en Q en Q₁ hunne beelden of omgekeerd, dan is $N = -\frac{m}{2\pi} \log \frac{P Q_1^2}{P Q^2 \cdot P P_1^2}$, waaruit weder evenals op pag. 82 volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} &= \frac{dr}{dt} = \frac{m}{2\pi r} \cotg \theta - \frac{m \frac{R^2}{r} \sin 2\theta}{\pi P Q'^2} \\ -\frac{\partial N}{\partial r} &= r \frac{d\theta}{dt} = -\frac{m}{2\pi r} + \frac{m r}{\pi(R^2 - r^2)} + \\ &+ \frac{m}{2\pi} \frac{2r - 2 \frac{R^2}{r} \cos 2\theta}{P Q'^2} = \frac{m r}{\pi(R^2 - r^2)} + \frac{m}{2\pi r} \frac{r^2 - \frac{R^4}{r^2}}{P Q'^2}. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigt men de eerste dezer vergelijkingen met $r \frac{d\theta}{dt}$, de tweede met $\frac{dr}{dt}$, trekt men ze vervolgens van

elkander af, en deelt men door $\frac{m}{\pi}$, dan verkrijgt men:

$$\frac{r \frac{dr}{dt}}{R^2 - r^2} + \frac{1}{2} \frac{\left(r - \frac{R^4}{r^3}\right) \frac{dr}{dt} + 2 R^2 \sin 2\theta \frac{d\theta}{dt}}{r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2 R^2 \cos 2\theta} - \frac{1}{2} \cotg \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Na vermenigvuldiging met 4 geeft de integratie:

$$- \log (R^2 - r^2)^2 + \log \left(r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2 R^2 \cos 2 \theta \right) - \log \sin^2 \theta = C$$

of

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta (r^2 - R^2)^2}{r^4 - 2 R^2 r^2 \cos 2 \theta + R^4} = b^2$$

voor de vergelijking van de kromme lijn door elken werveldraad beschreven.

Direct was deze vergelijking ook te verkrijgen uit $N = C$.

Men kan haar ook brengen in den volgenden vorm:

$$(r^2 \sin^2 \theta - b^2) (r^2 - R^2)^2 = 4 R^2 b^2 r^2 \sin^2 \theta$$

of

$$(y^2 - b^2) (x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4 R^2 b^2 y^2,$$

eene kromme lijn van den 6^{den} graad met de asymptoten $y = \pm b$, die de X-as en Y-as tot assen van symmetrie heeft. De kromme lijn bestaat uit twee takken buiten den cylinder, die zich oneindig ver uitstrekken, en uit twee gesloten kromme lijntjes binnen den cylinder. De eerste worden doorloopen door een paar tegengestelde werveldraden buiten den cylinder, de laatste door een paar dergelijke werveldraden binnen den cylinder geplaatst.

Om na te gaan, wanneer de gesloten takken overgaan in punten, moet men $r \frac{d\theta}{dt} = 0$ stellen voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $r=c$.

Men vindt dan:

$$- \frac{m}{2c} + \frac{m}{\frac{R^2}{c} - c} + \frac{m}{\frac{R^2}{c} + c} = 0$$

of

$$c^4 + 4 R^2 c^2 - R^4 = 0,$$

$$\left(\frac{c}{R} \right)^2 = \sqrt{5} - 2 = 0,236068,$$

$$\frac{c}{R} = 0,486 \text{ of bijna } = \frac{1}{2}.$$

In dit geval verkrijgt men door gelijktijdig $x = 0$ en $y = c$ te stellen :

$$(R^2 - c^2)^2 (c^2 - b^2) = 4 R^2 b^2 c^2$$

of

$$\frac{b^2}{R^2} = \frac{c^2}{R^2} \left(\frac{R^2 - c^2}{R^2 + c^2} \right)^2 = \frac{5 \sqrt{5} - 11}{2} = 0,09 \text{ bijna,}$$

$$\text{dus } \frac{b}{R} \text{ ongeveer } 0,3.$$

Boren wij dus in den bodem van een verticalen met water gevulden cylinder twee openingen, die op eene zelfde middellijn eenen afstand $2c$ van elkander hebben, dan zullen er bij het uitstroomen van het water twee verticale stationnaire werveldraden boven die openingen trachten te ontstaan. Theoretisch kan dit echter nooit plaats hebben, daar een oppervlak van gelijke druk nooit kan samenvallen met een vlak, dat uit bewegingslijnen is opgebouwd.

Wij kunnen nu ook in het algemeen de beweging van een werveldraad en van een paar tegengestelde werveldraden bepalen in eene vloeistof, die begrensd is binnen of buiten door een cylinder en verder door twee vlakken, gaande door de as van dien cylinder en makende bij één werveldraad een hoek van $\frac{\pi}{n}$ en bij twee werveldraden een hoek van $\frac{2\pi}{n}$; zijn er twee werveldraden, dan moeten zij bovendien nog symmetrisch gelegen zijn ten opzichte van een vlak, dat genoemden hoek midden-door deelt.

Zijn achtereenvolgens de coördinaten van de werveldraden en van hunne beelden:

$$\begin{aligned} r, \theta, & \quad \frac{R^2}{r}, \theta, \\ r, \frac{2\pi}{n} - \theta, & \quad \frac{R^2}{r}, \frac{2\pi}{n} - \theta, \\ r, \frac{2\pi}{n} + \theta, & \quad \frac{R^2}{r}, \frac{2\pi}{n} + \theta, \end{aligned}$$

enz.

$$r, \frac{2n\pi}{n} - \theta, \quad \frac{R^2}{r}, \frac{2n\pi}{n} + \theta;$$

men heeft dan in het punt r, θ :

$$N = -\frac{m}{2\pi} \log \frac{d_3^2 d_4^2 d_7^2 d_8^2 \dots d_{4n-4}^2 d_{4n-1}^2}{d_1^2 d_2^2 d_5^2 d_6^2 \dots d_{4n-3}^2 d_{4n-2}^2},$$

waarbij:

$$d_{4k-2} = 2r \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \theta \right),$$

$$d_{4k-1}^2 = r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2R^2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right),$$

$$d_{4k} = 2r \sin \frac{k\pi}{n}, \quad d_{4k+1}^2 = r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2R^2 \cos \frac{2k\pi}{n}.$$

Stelt men dit gelijk aan eene constante, dan verkrijgt men den weg door den eenen werveldraad (r, θ) doorloopen; deze is dus

$$C = r^2 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{k=n} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} - \theta \right) \cdot \prod_{k=0}^{k=n-1} \left(r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2R^2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right)}{\prod_{k=1}^{k=n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} \cdot \prod_{k=1}^{k=n} \left\{ r^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2R^2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) \right\}},$$

waarbij $\prod_{k=1}^{k=n}$ beteekent, dat men het product moet nemen van de factoren, die men verkrijgt door k de waarden te geven van 1 tot n . Nu is volgens pag. 83 :

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \theta \right) : \prod_{k=1}^{k=n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin n\theta}{n},$$

zoodat men verkrijgt, door weg te laten de constante factoren, als men in aanmerking neemt, dat $\cos \frac{2k\pi}{n}$ voor $k=0$ en $k=n$ dezelfde waarde heeft :

$$C = r^2 \sin^2 n\theta \prod_{k=1}^{k=n} \frac{r^4 + R^4 - 2R^2 r^2 \cos \frac{2k\pi}{n}}{r^4 + R^4 - 2R^2 r^2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right)};$$

door middel van het theorema van COTES wordt dit herleid tot

$$\frac{r^2 \sin^2 n\theta (r^{2n} - a^{2n})^2}{r^{4n} - 2a^{2n} r^{2n} \cos 2n\theta + a^{4n}} = C. \quad (\text{Zie pag. 91.})$$

Uit den aard van het vraagstuk blijkt, dat deze kromme lijn bestaat uit $2n$ symmetrische deelen; verder dat een stel takken ligt buiten, een ander stel binnen den cylinder, terwijl slechts een der takken door den werveldraad wordt doorloopen; eindelijk zijn de lijnen door het middelpunt gaande en met de as hoeken makende $\frac{k\pi}{n}$, asymptoten aan twee takken, terwijl de werveldraad den cylinder het meest genaderd is, wanneer hij gelegen is in het vlak, dat den hoek tusschen de grensvlakken midden-door deelt.

De herleiding van

$$\prod_{k=1}^{k=n} \frac{r^4 + R^4 - 2 R^2 r^2 \cos \frac{2k\pi}{n}}{r^4 + R^4 - 2 R^2 r^2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right)}$$

geschiedt als volgt:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{k=n} \frac{r^4 - 2 R^2 r^2 \cos \frac{2k\pi}{n} + R^4}{r^4 - 2 R^2 r^2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + R^4} = \\ & = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{x^2 - 2 x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1}{x^2 - 2 x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + 1}, \end{aligned}$$

waarbij $\frac{r^2}{R^2} = x$ is.

De noemer wordt:

$$\begin{aligned} & \text{voor } n \text{ even } (x^2 + 2x \cos 2\theta + 1)(x^2 - 2x \cos 2\theta + 1) \times \\ & \prod_{k=n}^{k=\frac{1}{2}n-1} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + 1 \right\} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}n-1} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) + 1 \right\}, \\ & \text{voor } n \text{ oneven } (x^2 - 2x \cos 2\theta + 1) \times \\ & \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + 1 \right\} \times \\ & \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) + 1 \right\}; \\ & \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + 1 \right\} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) + 1 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ x - \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) - i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) - i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} + 2\theta \right) \right\} = \\
& \left\{ x - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \left(\cos 2\theta - i \sin 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \left(\cos 2\theta - i \sin 2\theta \right) \right\} \times \\
& \left\{ x - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta \right) \right\} = \\
& \left\{ x^2 - 2x \left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta \right) \cos \frac{2k\pi}{n} + \left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta \right)^2 \right\} \times \\
& \left\{ x^2 - 2x \left(\cos 2\theta - i \sin 2\theta \right) \cos \frac{2k\pi}{n} + \left(\cos 2\theta - i \sin 2\theta \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Verder is:

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 2x \cos 2\theta + 1) (x^2 - 2x \cos 2\theta + 1) = \\
& (x + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) (x + \cos 2\theta - i \sin 2\theta) \times \\
& (x - \cos 2\theta + i \sin 2\theta) (x - \cos 2\theta - i \sin 2\theta) = \\
& \{ x^2 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^2 \} \{ x^2 - (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^2 \}.
\end{aligned}$$

Dientengevolge wordt:

$$\prod_{k=1}^{k=n} \left\{ x^2 - 2x \cos \left(\frac{2k\pi}{n} - 2\theta \right) + 1 \right\} = \left\{ x^2 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^2 \right\} \times$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}n-1} \left\{ x^2 - 2x (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cos \frac{2k\pi}{n} + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^2 \right\} \times$$

$$\left\{ x^2 - (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^2 \right\} \times$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}n-1} \left\{ x^2 - 2x (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \cos \frac{2k\pi}{n} + (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^2 \right\} =$$

$$\{x^n - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^n\} \{x^n - (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^n\} =$$

$$(x^n - \cos 2n\theta - i \sin 2n\theta) (x^n - \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta) =$$

$$= x^{2n} - 2x^n \cos 2n\theta + 1. \quad (n \text{ even})$$

Voor n oneven wordt de noemer:

$$(x - \cos 2\theta + i \sin 2\theta) \times$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ x^2 - 2x (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \cos \frac{2k\pi}{n} + (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^2 \right\} \times$$

$$(x - \cos 2\theta - i \sin 2\theta)$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ x^2 - 2x (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cos \frac{2k\pi}{n} + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^2 \right\} =$$

$$\{x^n - (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^n\} \{x^n - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^n\} =$$

$$x^{2n} - 2x^n \cos 2n\theta + 1.$$

De teller verkrijgt men door $\theta = 0$ te nemen.

Op dezelfde wijze door gebruik te maken van de theorie der beelden gaat GREENHILL¹⁾ ook na de beweging van een

1) Quart. Journ. of Math. XV.

werveldraad binnen een rechthoek en binnen een vlak begrensd door bogen van twee concentrische cirkels en twee stralen; voor deze gevallen verkrijgt hij zeer samengestelde formules met elliptische integralen. Evenzoo gaat ook COATES ¹⁾ te werk bij de beweging van eenen werveldraad binnen en buiten een elliptischen cylinder; bovendien maakt hij gebruik van de geconjugeerde functies, terwijl het hem gelukt is de transformatie-formules te vinden om den cirkel om te zetten in de ellips.

1) Quart. Journ. of Math. XVI.

ZESDE HOOFDSTUK.

Beweging van drie en meer evenwijdige, rechtlijnige werveldraden.

De beweging van drie en meer werveldraden is uitvoerig behandeld door GRÖBLI¹⁾, aan wien dit hoofdstuk dan ook voor het grootste gedeelte ontleend is. De bewegingen schenen mij evenwel zoo merkwaardig toe, dat ik gemeend heb hiervan het een en ander te moeten mededeelen.

De vergelijkingen (49) geven de zes differentiaalvergelijkingen, die de plaats der werveldraden bepalen; zij zijn:

$$\left. \begin{aligned} \pi \frac{dx_1}{dt} &= -m_2 \frac{y_1 - y_2}{s_3^2} + m_3 \frac{y_3 - y_1}{s_2^2}, \\ \pi \frac{dx_2}{dt} &= -m_3 \frac{y_2 - y_3}{s_1^2} + m_1 \frac{y_1 - y_2}{s_3^2}, \\ \pi \frac{dx_3}{dt} &= -m_1 \frac{y_3 - y_1}{s_2^2} + m_2 \frac{y_2 - y_3}{s_1^2}, \end{aligned} \right\} . \quad (56)$$

1) W. GRÖBLI. Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. Zürich, 1877.

$$\left. \begin{aligned} \pi \frac{d y_1}{d t} &= m_2 \frac{x_1 - x_2}{s_3^2} - m_3 \frac{x_3 - x_1}{s_2^2}, \\ \pi \frac{d y_2}{d t} &= m_3 \frac{x_2 - x_3}{s_1^2} - m_1 \frac{x_1 - x_2}{s_3^2}, \\ \pi \frac{d y_3}{d t} &= m_1 \frac{x_3 - x_1}{s_2^2} - m_2 \frac{x_2 - x_3}{s_1^2}, \end{aligned} \right\} \dots (57)$$

of in poolcoördinaten:

$$\left. \begin{aligned} \pi \frac{d \rho_1}{d t} &= - \frac{m_2 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{s_3^2} + \frac{m_3 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{s_2^2}, \\ \pi \frac{d \rho_2}{d t} &= - \frac{m_3 \rho_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{s_1^2} + \frac{m_1 \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{s_3^2}, \\ \pi \frac{d \rho_3}{d t} &= - \frac{m_1 \rho_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{s_2^2} + \frac{m_2 \rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{s_1^2}, \end{aligned} \right\} (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi \rho_1 \frac{d \theta_1}{d t} &= m_2 \frac{\rho_1 - \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{s_3^2} + m_3 \frac{\rho_1 - \rho_3 \cos(\theta_3 - \theta_1)}{s_2^2}, \\ \pi \rho_2 \frac{d \theta_2}{d t} &= m_3 \frac{\rho_2 - \rho_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{s_1^2} + m_1 \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{s_3^2}, \\ \pi \rho_3 \frac{d \theta_3}{d t} &= m_1 \frac{\rho_3 - \rho_1 \cos(\theta_3 - \theta_1)}{s_2^2} + m_2 \frac{\rho_3 - \rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{s_1^2}; \end{aligned} \right\} (59)$$

hierin stellen s_1, s_2, s_3 achtereenvolgens voor den afstand van (x_2, y_2) en (x_3, y_3) , van (x_1, y_1) en (x_3, y_3) , en van (x_1, y_1) en (x_2, y_2) .

Van deze vergelijkingen zijn reeds vier integralen gevonden, nam. de vergelijkingen (44), (50) en (53). Deze worden achtereenvolgens, als men het zwaartepunt der werveldraden tot oorsprong van coördinaten neemt:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0, \quad (44a)$$

of in poolcoördinaten:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \rho_1 \cos \theta_1 + m_2 \rho_2 \cos \theta_2 + m_3 \rho_3 \cos \theta_3 &= 0, \\ m_1 \rho_1 \sin \theta_1 + m_2 \rho_2 \sin \theta_2 + m_3 \rho_3 \sin \theta_3 &= 0; \end{aligned} \right\} (44 b)$$

$$- \frac{1}{\pi} (m_1 m_2 \log s_3 + m_2 m_3 \log s_1 + m_3 m_1 \log s_2) = \text{const.}$$

of

$$\frac{\log s_1}{m_1} + \frac{\log s_2}{m_2} + \frac{\log s_3}{m_3} = C_1; \quad \dots \quad (50 a)$$

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 = C_2. \quad \dots \quad (53)$$

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking van (44 b) achtereenvolgens met $\sin \theta_1$, $\sin \theta_2$, $\sin \theta_3$ en de tweede met $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ en telt men ze dan twee aan twee op, dan verkrijgt men:

$$\frac{\sin (\theta_2 - \theta_3)}{m_1 \rho_1} = \frac{\sin (\theta_3 - \theta_1)}{m_2 \rho_2} = \frac{\sin (\theta_1 - \theta_2)}{m_3 \rho_3}. \quad (60)$$

Brengt men verder in de beide vergelijkingen (44 b) den eersten term in het tweede lid, telt men de beide eerste en tweede leden op, na ze in het kwadraat verheven te hebben, dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} \cos (\theta_2 - \theta_3) &= \frac{m_1^2 \rho_1^2 - m_2^2 \rho_2^2 - m_3^2 \rho_3^2}{2 m_2 m_3 \rho_2 \rho_3}, \\ \cos (\theta_3 - \theta_1) &= \frac{m_2^2 \rho_2^2 - m_3^2 \rho_3^2 - m_1^2 \rho_1^2}{2 m_3 m_1 \rho_3 \rho_1}, \\ \cos (\theta_1 - \theta_2) &= \frac{m_3^2 \rho_3^2 - m_1^2 \rho_1^2 - m_2^2 \rho_2^2}{2 m_1 m_2 \rho_1 \rho_2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (61)$$

Substitueeren wij deze uitdrukkingen in:

$$s_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2 \rho_2 \rho_3 \cos (\theta_2 - \theta_3),$$

$$s_2^2 = \rho_3^2 + \rho_1^2 - 2 \rho_3 \rho_1 \cos (\theta_3 - \theta_1),$$

$$s_3^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \rho_1 \rho_2 \cos (\theta_1 - \theta_2),$$

met inachtneming van (53), dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} m_2 m_3 s_1^2 &= (m_2 + m_3) C_2 - m_1 (m_1 + m_2 + m_3) \rho_1^2, \\ m_3 m_1 s_2^2 &= (m_3 + m_1) C_2 - m_2 (m_1 + m_2 + m_3) \rho_2^2, \\ m_1 m_2 s_3^2 &= (m_1 + m_2) C_2 - m_3 (m_1 + m_2 + m_3) \rho_3^2. \end{aligned} \right\} (62).$$

Voeren wij eene nieuwe constante C_3 in, die van C_2 op de volgende wijze afhangt: $m_1 m_2 m_3 C_3 = (m_1 + m_2 + m_3) C_2$.

Deelt men elk der verg. (62) door $m_1 m_2 m_3$, en telt men ze dan op, gebruik makende van (53), dan verkrijgt men:

$$\frac{s_1^2}{m_1} + \frac{s_2^2}{m_2} + \frac{s_3^2}{m_3} = C_3. \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Wij hebben nu twee vergelijkingen verkregen, waarin voorkomen de zijden van den driehoek, waarvan de werfeldraden de hoekpunten zijn. Kan men nu nog eene integraalvergelijking vinden, waarin die drie zijden voorkomen, dan kan men op elk oogenblik de gedaante van dien driehoek bepalen. Eene differentiaalvergelijking, waarin alleen die drie zijden voorkomen, vindt men als volgt:

Trekt men de derde verg. van (56) en (57) telkens van de tweede af, vermenigvuldigt men de eerste uitkomst met $x_2 - x_3$, de tweede met $y_2 - y_3$ en telt men ze dan op, zoo verkrijgt men:

$$\frac{\pi}{2} \frac{d(s_1^2)}{dt} = m_1 \frac{s_2^2 - s_3^2}{s_2^2 s_3^2} \left\{ y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) \right\}.$$

De vorm tusschen accolades stelt den dubbelen inhoud van den driehoek voor met positief of negatief teeken, al naarmate de wervelbuizen 1, 2, 3 in den driehoek op elkander volgen in dezelfde of in tegengestelde richting, als waarin de positieve Y-as moet draaien om met de positieve X-as samen te vallen. De inhoud van den drie-

hoek kunnen wij, zooals bekend is, in zijne drie zijden uitdrukken:

$$16 I^2 = 2 s_2^2 s_3^2 + 2 s_1^2 s_2^2 + 2 s_1^2 s_3^2 - s_1^4 - s_2^4 - s_3^4 \quad (64).$$

Wij vinden dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(s_1^2)}{dt} &= \frac{m_1}{\pi} 4 I \frac{s_2^2 - s_3^2}{s_2^2 s_3^2}, \\ \text{en door verwisseling der indices:} \\ \frac{d(s_2^2)}{dt} &= \frac{m_2}{\pi} 4 I \frac{s_3^2 - s_1^2}{s_3^2 s_1^2}, \\ \frac{d(s_3^2)}{dt} &= \frac{m_3}{\pi} 4 I \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2 s_2^2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (65).$$

Eigenlijk moesten de tweede leden dezer vergelijkingen voorzien zijn van het teeken \pm , waaruit dus zou blijken, dat de zijden met den tijd toenamen of afnamen, al naarmate het tweede lid positief of negatief was; daar wij echter toch de maximum en minimum waarden der zijden zullen nagaan, is het onverschillig welk teeken men neemt.

Wij hebben hier dus drie differentiaalvergelijkingen, waarin slechts de zijden van den driehoek voorkomen, en waarvan (50 a) en (63) twee integraalvergelijkingen zijn, die hieruit gemakkelijk zijn af te leiden; (50 a) door de vergelijkingen achtereenvolgens te deelen door $m_1 s_1^2$, $m_2 s_2^2$, $m_3 s_3^2$ en dan op te tellen; (63) door ze te deelen door m_1 , m_2 , m_3 en ook vervolgens op te tellen.

Door in een der vergelijkingen (65) twee zijden te elimineeren met behulp van (50 a) en (63), verkrijgt men na eene quadratuur van de verkregen differentiaalvergelijking de derde zijde als functie van den tijd, zoodat men dan door middel van (50 a) en (63) ook de beide andere zijden kan uitdrukken als functies van den tijd; vervolgens kan

men in de tweede leden van (59) met behulp van (61) en (62) de θ 's en ρ 's door de zijden van den driehoek vervangen. Men verkrijgt dan:

$$2\pi \left\{ (m_2 + m_3) C_2 - m_2 m_3 s_1^2 \right\} s_2^2 s_3^2 \frac{d\theta_1}{dt} =$$

$$= m_1 m_2 m_3 \left\{ (s_2^2 - s_3^2)^2 - s_1^2 (s_2^2 + s_3^2) \right\} + 2m_1 (m_2 + m_3)^2 s_2^2 s_3^2 \quad (66)$$

en nog twee vergelijkingen, die men hieruit verkrijgt door eene cyclische verwisseling der indices. Door eene quadratuur van deze vergelijkingen verkrijgt men dus ook de θ 's als functie van den tijd, zoodat dan de plaats der werveldraden volkomen bepaald is.

Bovengenoemde eliminaties en quadraturen zijn evenwel niet in alle gevallen uit te voeren.

Vergelijking (50 a) is in het algemeen transcendent en slechts algebraïsch als de verhouding der grootheden m door geheele getallen kan worden uitgedrukt. Zij zal de eenvoudigste gedaante verkrijgen, wanneer de volgende betrekkingen tusschen de grootheden m bestaan. Naast elk geval vindt men de gedaante, die de vergelijkingen (50 a) en (63) aannemen.

$$m_1 = m_2 = m_3, \quad s_1 s_2 s_3 = C_1, \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = C_2^2, \quad (a)$$

$$m_1 = m_2 = -m_3, \quad s_1 s_2 : s_3 = C_1, \quad s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = C_2^2, \quad (b)$$

$$m_1 = m_2 = 2m_3, \quad s_1 s_2 s_3^2 = C_1, \quad s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 = C_2^2, \quad (c)$$

$$m_1 = -m_2 = 2m_3, \quad s_1 s_3^2 : s_2 = C_1, \quad s_1^2 - s_2^2 + 2s_3^2 = C_2^2, \quad (d)$$

$$m_1 = m_2 = -2m_3, \quad s_1 s_2 : s_3^2 = C_1, \quad s_1^2 + s_2^2 - 2s_3^2 = C_2^2, \quad (e)$$

$$m_1 = 2m_2 = 2m_3, \quad s_1 s_2^2 s_3^2 = C_1, \quad s_1^2 + 2s_2^2 + 2s_3^2 = C_2^2, \quad (f)$$

$$m_1 = 2m_2 = -2m_3, \quad s_1 s_2^2 : s_3^2 = C_1, \quad s_1^2 + 2s_2^2 - 2s_3^2 = C_2^2, \quad (g)$$

$$m_1 = -2m_2 = -2m_3, \quad s_1 : s_2^2 s_3^2 = C_1 \quad (h)$$

$$\text{of } s_2^2 s_3^2 : s_1 = C_1.$$

De waarde van C_1 en C_2 is natuurlijk niet dezelfde als die van C_1 en C_2 in (50 a) en (63); het stellen slechts constante grootheden voor.

Op het laatste geval echter mogen wij niet al onze gevonden formules toepassen, daar zij opgesteld zijn in de onderstelling, dat het zwaartepunt der werveldraden in den oorsprong valt, terwijl in het geval (*h*) $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ is, zoodat het zwaartepunt op oneindigen afstand gelegen is. De vergelijkingen (63) en (65) blijven in dit geval toch doorgaan, evenwel niet de vergelijking (50 a). Geeft men de X-as de richting, waarin het zwaartepunt is verdwenen, dan worden de vergelijkingen (44 a) in dit geval:

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = C_2, \quad -2y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad (67)$$

welke vergelijkingen men ook kan schrijven:

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) = C_2, \quad (y_2 - y_1) + (y_3 - y_1) = 0.$$

Door den bijzonderen vorm, dien deze vergelijkingen hebben, kan men met behulp van haar uit:

$$s_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, \quad s_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2, \\ s_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

de grootheden:

$$x_1 - x_2, \quad x_2 - x_3, \quad x_3 - x_1, \quad y_1 - y_2, \quad y_2 - y_3, \quad y_3 - y_1$$

elimineeren, waardoor men vindt:

$$2s_3^2 + 2s_2^2 - s_1^2 = C_2^2.$$

Toevallig is deze vergelijking dezelfde, die men uit (50 a) zou verkrijgen, door de aangenomen betrekkingen tusschen de grootheden m daarin te substitueeren; alleen dus in het bijzondere geval $m_1 = -2m_2 = -2m_3$ blijft (50 a) doorgaan,

niettegenstaande $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ is; in elk ander geval geldt (50a) niet, zoodra $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ is.

Daar de beide betrekkingen tusschen s_1 , s_2 en s_3 nu eene zeer eenvoudige gedaante hebben, kunnen twee van deze gemakkelijk in de derde worden uitgedrukt en de verkregen waarden in een der vergelijkingen (65) worden gesubstitueerd. Evenwel zullen alle gevallen niet tot even eenvoudige formules aanleiding geven; de meest eenvoudige formules verkrijgt men bij de gevallen (b) en (e), die tot elliptische integralen voeren, en bij de gevallen (a) en (g), die tot hyperelliptische integralen leiden. In bijzondere gevallen verdwijnen zelfs de elliptische en hyperelliptische integralen, zooals wij zullen zien. Wij gaan daartoe de beide eerste gevallen wat uitvoeriger na.

$$m_1 = m_2 = m_3 = m.$$

De oorsprong zal nu samenvallen met het zwaartepunt van den driehoek.

De vergelijkingen (50 a) en (63) worden nu, zooals wij zagen:

$$s_1 s_2 s_3 = C_1^3 \quad \text{of} \quad s_1 s_2 = \frac{C_1^3}{s_3}, \quad \text{en}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = C_2^2 \quad \text{of} \quad s_1^2 + s_2^2 = C_2^2 - s_3^2,$$

dus:

$$s_1 + s_2 = \sqrt{\frac{(C_2^2 - s_3^2)s_3 + 2C_1^3}{s_3}},$$

$$s_1 - s_2 = \sqrt{\frac{(C_2^2 - s_3^2)s_3 - 2C_1^3}{s_3}}.$$

Elimineert men met behulp hiervan s_1 en s_2 uit (64), dan vindt men:

$$16 I^2 = \frac{-4s_3^6 + 4s_3^4 C_2^2 - s_3^2 C_2^4 + 4C_1^6}{s_3^2}.$$

Verder is:

$$s_1^2 - s_2^2 = \frac{1}{s_3} \sqrt{(s_3^6 - 2s_3^4 C_2^2 + s_3^2 C_2^4 - 4C_1^6)},$$

zoodat men vindt uit (65):

$$\frac{d(s_3^2)}{dt} = \frac{m}{\pi C_1^6} \sqrt{(s_3^6 - 2s_3^4 C_2^2 + s_3^2 C_2^4 - 4C_1^6)} \\ (-4s_3^6 + 4s_3^4 C_2^2 - s_3^2 C_2^4 + 4C_1^6), \quad (68)$$

$$\int \frac{d(s_3^2)}{\sqrt{(s_3^6 - 2s_3^4 C_2^2 + s_3^2 C_2^4 - 4C_1^6)(-4s_3^6 + 4s_3^4 C_2^2 - s_3^2 C_2^4 + 4C_1^6)}} = \frac{m}{\pi C_1^6} t. \quad (68a)$$

Eenzoo vindt men uit (66) θ_3 als functie van den tijd (in aanmerking nemende, dat de daar gebruikte C_2 gelijk staat met $\frac{m}{3} \times$ het vierkant van de hier gebruikte C_2 , zoodaas blijkt uit het verband van (63) en $s_1^2 + s_2^2 = C_2^2 - s_3^2$):

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \frac{m}{2\pi C_1^6} \frac{6s_3^6 - 9C_2^2 s_3^4 + 3C_2^4 s_3^2 + 12C_1^6}{2C_2^2 - 3s_3^2}. \quad (69)$$

Door eliminatie van t uit (68) en (69) vindt men ook het verband tusschen s_3 en θ_3 ; eene quadratuur geeft dan θ_3 evenals hierboven t , door hyperelliptische integralen als functie van s_3^2 . Vervangt men s_3 door middel van (52) door ρ_3 , dan geeft de betrekking tusschen θ_3 en ρ_3 de baan aan van den werveldraad 3. Dezelfde vergelijkingen gelden voor de beide andere werveldraden, alleen heeft men dan slechts de indices te veranderen.

Voor de snelheid der werveldraden verkrijgt men eene zeer eenvoudige formule. Noemen wij V_3 die voor werveldraad 3, dan is:

$$V_3^2 = \left(\frac{d\rho_3}{dt}\right)^2 + \rho_3^2 \left(\frac{d\theta_3}{dt}\right)^2.$$

Uit (62) volgt in verband met de voor dit geval aangenomen constante:

$$s_3^2 = \frac{2}{3} C_2^2 - 3 \rho_3^2,$$

zoodat
$$\frac{d(s_3^2)}{dt} = -6 \rho_3 \frac{d\rho_3}{dt}.$$

Men verkrijgt dus:

$$V_3^2 = \frac{1}{36 \rho_3^2} \left(\frac{d(s_3^2)}{dt} \right)^2 + \rho_3^2 \left(\frac{d\theta_3}{dt} \right)^2.$$

Substitueert men hierin de waarden van $\frac{d(s_3^2)}{dt}$ en $\frac{d\theta_3}{dt}$ uit (68) en (69), dan verkrijgt men:

$$V_3 = \frac{3 m \rho_3 s_3}{\pi C_1^3}; \text{ evenzoo } V_1 = \frac{3 m \rho_1 s_1}{\pi C_1^3}, V_2 = \frac{3 m \rho_2 s_2}{\pi C_1^3}.$$

Stellen wij den noemer in (68 a) voor door $f(s_3^2)$. De vergelijking $f(s_3^2) = 0$ heeft twee gelijke wortels voor $C_1^2 = 0$, $C_2^2 = 3 C_1^2$ en $C_2^2 = 3 C_1^2 \sqrt{2}$. Uit $C_1^2 = 0$ volgt $s_1 s_2 s_3 = 0$, wat niet anders mogelijk is, dan wanneer s_1 , s_2 of s_3 nul is; dit geval is gemakkelijk te herleiden tot dat, waarin slechts twee werveldraden aanwezig zijn. Is $C_2^2 = 3 C_1^2$, dan wordt:

$$s_1 + s_2 = \sqrt{\frac{(3 C_1^2 - s_3^2) s_3 + 2 C_1^3}{s_3}} = \pm (s_3 + C_1) \sqrt{\frac{2 C_1 - s_3}{s_3}},$$

$$s_1 - s_2 = \sqrt{\frac{(3 C_1^2 - s_3^2) s_3 - 2 C_1^3}{s_3}} = \pm (s_3 - C_1) \sqrt{\frac{-2 C_1 - s_3}{s_3}}.$$

Daar noch C_1 , noch s_3 negatief kan zijn, zou de waarde van $s_1 - s_2$ imaginair zijn, iets wat evenmin mogelijk is. Alleen kan dus bovenstaand verband tusschen C_2 en C_1 bestaan, als $s_3 = C_1$ is; in dit geval is ook $s_1 = s_2 = C_1$, zoodat de werveldraden op gelijke afstanden van elkander

gelegen zijn en op denzelfden gelijken afstand van elkander gelegen blijven; tevens is dan $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{3m}{\pi C_1^2}$, zoodat de door de werveldraden gevormde driehoek met constante snelheid om zijn middelpunt draait.

Is $C_2^2 = 3 C_1^2 \sqrt[3]{2}$, dan wordt:

$$-4s_3^6 + 4s_3^4 C_2^2 - s_3^2 C_2^4 + 4C_1^6 = -4s_3^6 + 12s_3^4 C_1^2 \sqrt[3]{2} - 9s_3^2 C_1^4 \sqrt[3]{4} + 4C_1^6.$$

Deze vorm kan ontbonden worden in:

$$-(C_1^2 \sqrt[3]{2} - 2s_3^2)^2 (s_3^2 - 2C_1^2 \sqrt[3]{2}),$$

zoodat (68 a) wordt:

$$\int \frac{d\alpha}{(\mp 2s_3^2 \pm C_1^2 \sqrt[3]{2})(2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2) \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}} = \frac{m}{\pi C_1^6} t. \quad (70)$$

Integreert men dit, dan verkrijgt men:

$$\frac{m}{\pi C_1^6} t = \frac{\mp 1}{3C_1^4 \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} \log \left\{ \frac{C_1^2 \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2} \right\} \pm \frac{2}{3C_1^4 \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} \log \left\{ \frac{s_3^2 \sqrt[3]{3} + \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{\pm C_1^2 \sqrt[3]{2} \mp 2s_3^2} \right\} + C_3. \quad (71)$$

Uit (68) en (69) volgt:

$$\frac{d(s_3^2)}{d\theta_3} = \frac{2(6C_1^2 \sqrt[3]{2} - 3s_3^2)(\mp 2s_3^2 \pm C_1^2 \sqrt[3]{2})(2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2) \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{6s_3^6 - 27C_1^2 s_3^4 \sqrt[3]{2} + 27C_1^4 s_3^2 \sqrt[3]{4} + 12C_1^6} \\ = \frac{2(\mp 2s_3^2 \pm C_1^2 \sqrt[3]{2})(2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2) \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{-2s_3^4 + 5s_3^2 C_1^2 \sqrt[3]{2} + C_1^4 \sqrt[3]{4}}.$$

De laatste noemer is $(\mp 2s_3^2 \pm C_1^2 \sqrt[3]{2})(\pm s_3^2 \mp 2C_1^2 \sqrt[3]{2}) + 3C_1^4 \sqrt[3]{4}$, zoodat men verkrijgt in verband met (70):

$$\theta_3 = \mp \int \frac{d(s_3^2)}{2\sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}} + \frac{3\sqrt[3]{4}}{2C_1^2} \frac{mt}{\pi}, \\ \theta_3 = \mp \frac{1}{2} \log \cos \frac{2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2}{C_1^2 \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} \mp \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \log \left\{ \frac{C_1^2 \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{2C_1^2 \sqrt[3]{2} - s_3^2} \right\} \\ \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \log \left\{ \frac{s_3^2 \sqrt[3]{3} + \sqrt{-s_3^4 + 4C_1^2 s_3^2 \sqrt[3]{2} - C_1^4 \sqrt[3]{4}}}{\pm C_1^2 \sqrt[3]{2} \mp 2s_3^2} \right\} + C_4. \quad (72)$$

Willen de wortelgrootheden, voorkomende in (71) en (72) reëel zijn, dan moet s_3^2 gelegen zijn tusschen de grenzen $(2 - \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}$ en $(2 + \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}$. Verder gelden in die formules de bovenste teekens voor $s_3^2 < \frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$, de onderste voor $s_3^2 > \frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$.

Heeft s_3 zijn minimumwaarde, dan wordt (71) en (72):

$$\frac{m}{\pi C_1^6} t = C_3 \quad \text{en} \quad \theta_3 = C_4.$$

Begint men dus op dat oogenblik den tijd te rekenen, en geeft men de X-as de richting, die op dat oogenblik de lijn heeft, die uit het zwaartepunt van den driehoek naar den werveldraad 3 getrokken is, dan zijn $C_3 = C_4 = 0$.

Op dat oogenblik vindt men $s_1^2 = s_2^2 = \frac{(1 + \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}}{2}$,

zoodat dan de driehoek, door de werveldraden gevormd, gelijkbeenig is. Het blijkt nu uit het positief zijn van $\frac{d(s_3^2)}{dt}$ voor $s_3^2 > (2 - \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}$, dat s_3^2 met den tijd

toeneemt; verder volgt uit de beide eerste formules van (65), dat ook s_1^2 of s_2^2 met den tijd klimt, terwijl de ander met den tijd daalt, als $s_3^2 = (2 - \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}$, omdat dan een van de grootheden $s_2^2 - s_3^2$ en $s_3^2 - s_1^2$ negatief en de ander positief is wegens het gelijk zijn van s_1^2 en s_2^2 . Na oneindigen tijd zal, als wij onderstellen dat s_1^2 ge-

klimmen is, $s_3^2 = s_2^2 = \frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$ en $s_1^2 = 2 C_1^2 \sqrt[3]{2}$

geworden zijn, zoodat dan de drie werveldraden in eene rechte lijn gelegen zijn en wel de werveldraad 1 in het midden van de beide andere.

Wij merken op, dat s_3^2 bij deze redeneering ligt tusschen

de grenzen, $(2 - \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2}$ en $\frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$, s_2^3 tusschen $\frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$ en $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$, terwijl s_1^3 ligt tusschen $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$ en $2 C_1^2 \sqrt[3]{2}$. Evenwel kan s_3^3 ook grooter zijn dan $\frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$, maar dan zal s_2^3 of s_1^3 tusschen de beide eerstgenoemde grenzen komen te liggen. In het algemeen kan elk der drie grootheden s_1^3 , s_2^3 , s_3^3 tusschen elk der drie genoemde grenzen begrepen zijn, maar zoo, dat nooit twee van haar tusschen dezelfde grenzen gelegen zijn. Dit is duidelijk, daar er oorspronkelijk tusschen de drie werveldraden geen verschil bestaat.

Substitueert men in (72) $s_3^3 = 2 C_1^2 \sqrt[3]{2} - 3 \rho_3^3$, dan verkrijgt men de vergelijking van de baan van werveldraad 3. Deze baan is eene spiraal, die tot asymptoot heeft den cirkel met een straal $C_1 \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, terwijl dan $s_3^3 = \frac{1}{2} C_1^2 \sqrt[3]{2}$ is; zooals wij zagen, is voor

$$s_3^3 = (2 - \sqrt{3}) C_1^2 \sqrt[3]{2} \quad \text{of} \quad \rho_3^3 = C_1^2 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}},$$

$\theta_3 = 0$; verder kan θ_3 nooit negatief zijn. De uiterste grenzen van ρ_3 zijn $C_1 \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ en $C_1 \sqrt[3]{\frac{4}{27}}$, zoodat werveldraad 3 dus bijna voortdurend in een cirkel loopt. De werveldraad 2 heeft denzelfden cirkel tot asymptoot, maar ligt in tegenstelling van werveldraad 3 er steeds binnen; werveldraad 1 heeft tot asymptoot den oorsprong. Zoodra t dus eene vrij groote waarde heeft, bewegen 3 en 2 zich bijna langs den asymptotencirkel aan de uiteinden van eene middellijn, terwijl 1 ongeveer in het middelpunt gelegen is. De snelheid der werveldraden is

dan ook ongeveer gelijk, daar zij hare grens nadert, te weten :

$$V_3 = \frac{3 m \rho_3 s_3}{\pi C_1^3} = \frac{3 m}{\pi C_1} \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{3 m}{2 \pi C_1} \sqrt[3]{2}. \quad (\text{Verg. pag. 103}).$$

Gaan wij nu het algemeene geval na, dat de noemer van (68 a) geen gelijke wortels heeft; noem deze $f(\alpha)$ en $s_3^2 = \alpha$, dan wordt die vergelijking :

$$\int \frac{d\alpha}{f(\alpha)} = \frac{m}{\pi C_1^6} t, \quad \dots \dots \dots (73)$$

terwijl uit (68) en (69) volgt:

$$\int \frac{3(2\alpha^3 - 3\alpha^2 C_2^2 + \alpha C_2^4 + 4C_1^6) d\alpha}{2(2C_2^2 - 3\alpha)f(\alpha)} = \theta_3. \quad (74)$$

Daar $s_1 - s_2 = \sqrt{\frac{(C_2^2 - s_3^2) s_3 - 2C_1^3}{s_3}}$ reëel moet

zijn, en, zooals wij zagen, deze vorm voor $C_2^2 = 3C_1^2$ imaginair is, moet $3C_1^2$ kleiner zijn dan C_2^2 , omdat de vorm onder het wortelteeken rijst tegelijk met C_2^2 .

De maximum- en minimumwaarde van s_3^2 vindt men door $\frac{d(s_3^2)}{dt} = 0$ te stellen; in dat geval moet, zooals uit

(65) blijkt, $s_1 = s_2$ zijn, terwijl tevens de maximumwaarde van s_3 kleiner is dan $s_1 + s_2$ of hoogstens gelijk aan $s_1 + s_2$. Is $s_3 = s_1 + s_2$, dan gaat de vergelijking $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = C_2^2$ over in $\frac{3}{2} s_3^2 = C_2^2$ of in $s_3 = C_2 \sqrt{\frac{2}{3}}$. De ver-

gelijking $s_1 s_2 s_3 = C_1^3$ wordt dan $\frac{1}{4} s_3^3 = C_1^3$, zoodat dan $C_1 = C_2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = C_2 \sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ of $C_2^2 = 3C_1^2 \sqrt[3]{2}$ moet zijn,

welk geval wij kunnen laten rusten, daar wij het hierboven besproken hebben. Wij zien dus $s_3^2 < \frac{2}{3} C_2^2$, zoodat de factor $2 C_2^2 - 3 \alpha$ in (74) de integraal nooit oneindig groot kan maken.

Onderscheiden wij nu de gevallen $C_2^2 < 3 C_1^2 \sqrt{2}$ en $C_2^2 > 3 C_1^2 \sqrt{2}$.

$$1^0. C_2^2 < 3 C_1^2 \sqrt{2}.$$

De vergelijking $f(x) = 0$ kan men splitsen in twee vergelijkingen. De eene

$$\alpha^3 - 2 \alpha^2 C_2^2 + \alpha C_2^4 - 4 C_1^6 = 0$$

heeft 3 reële wortels, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gelegen tusschen de volgende grenzen:

$$\frac{1}{3} (2 - \sqrt{3}) C_2^2 < \alpha_1 < \frac{1}{3} C_2^2,$$

$$\frac{1}{3} C_2^2 < \alpha_2 < \frac{2}{3} C_2^2, \quad \frac{1}{3} (2 + \sqrt{3}) C_2^2 < \alpha_3 < \frac{4}{3} C_2^2;$$

terwijl $-4 \alpha^3 + 4 \alpha^2 C_2^2 - \alpha C_2^4 + 4 C_1^6 = 0$

slechts één reële wortel α_4 heeft, tusschen de grenzen $\frac{2}{3} C_2^2$ en C_2^2 . Daar, zooals wij hierboven opmerkten, $\alpha < \frac{2}{3} C_2^2$ moet zijn, behoeven wij ons met α_3 en α_4 niet bezig te houden.

Neemt men in aanmerking dat

$$\alpha^3 - 2 \alpha^2 C_2^2 + \alpha C_2^4 - 4 C_1^6 = s_3^2 (s_1 - s_2)^2 (s_1 + s_2)^2 \quad 1)$$

is, en dat, wanneer α zijn maximum- of minimumwaarde heeft, $s_1 = s_2$ moet zijn, d. w. z.

$$s_1 - s_2 = 0 \quad \text{of} \quad -s_3^3 + C_2^2 s_3 - 2 C_1^3 = 0, \quad 1)$$

1) Zie pag. 102.

en bleef, en steeds dezelfde grootte behield, zoodat dan $\Theta = 0$ was, terwijl wij voor $C_2^2 = 3 C_1^2 \sqrt{2}$ vonden $\Theta = \infty$. Er zullen dus oneindig veel waarden voor C_2 zijn, waarbij $\frac{2\pi + \Theta}{3}$ een veelvoud van 2π wordt, in welk geval de drie werveldraden zich in een zelfde baan zullen bewegen.

$$\text{Uit } V_3^2 = \frac{m^2 s_3^2}{\pi^2 C_1^6} \times 9 s_3^2 = \frac{m^2}{\pi^2 C_1^6} (2 C_2^2 s_3^2 - 3 s_3^4) \text{ volgt,}$$

dat V_3 met s_3 klimt, zoolang $\frac{dV_3}{ds_3}$ positief is, dus voor $C_2^2 > 3 s_3^2$, terwijl V_3 een maximumwaarde heeft voor $C_2^2 = 3 s_3^2$. Wij zien dus, dat V_3 een minimum is, als s_3 haar minimumwaarde bereikt, d.w.z. op een tijd $t = 0$; dat verder V_3 grooter wordt, totdat $s_3^2 = \frac{1}{3} C_2^2$ of totdat $V_3 = \frac{m C_2^2 \sqrt{3}}{3\pi C_1^3}$ geworden is; dit is dus de maximumwaarde van V_3 ; vervolgens gaat V_3 dalen, totdat s_3 haar maximumwaarde bereikt heeft; dit geschiedt voor $t = \frac{1}{2} T$; eindelijk stijgt die snelheid weder tot haar vorige maximumwaarde en daalt ten slotte weder, zoodat voor $t = T$ zij weder haar oorspronkelijke waarde bereikt heeft.

Fig. 4 geeft eene voorstelling van de baan door de werveldraden doorloopen.

$$2^0. C_2^2 > 3 C_1^2 \sqrt{2}.$$

De vergelijking $\alpha^3 - 2\alpha^2 C_2^2 + \alpha C_2^4 - 4 C_1^6 = 0$ heeft drie reële wortels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tusschen de volgende grenzen:

$$0 < \alpha_1 < \frac{1}{3} (2 - \sqrt{3}) C_2^2,$$

$$\frac{2}{3} C_2^2 < \alpha_2 < C_2^2 < \alpha_3 < \frac{1}{3} (2 + \sqrt{3}) C_2^2.$$

De wortel α_1 is de minimumwaarde, die α in verband met het vraagstuk kan verkrijgen, terwijl α_2 en α_3 aan s_3 waarden geven, die, zooals wij boven zagen, niet voldoen.

De vergelijking $-4\alpha^3 + 4\alpha^2 C_2^2 - \alpha C_2^4 + 4C_1^6 = 0$ bezit drie reële wortels α' , α'' , α''' , als volgt begrensd:

$$0 < \alpha' < \frac{1}{6} C_2^2 < \alpha'' < \frac{1}{2} C_2^2 < \alpha''' < \frac{2}{3} C_2^2.$$

Deze drie waarden van α kunnen alle voldoen.

Ontbinden wij $f(\alpha)$, dan verkrijgt men:

$f(\alpha) = \sqrt{-4(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3)}$, welke vorm positief is als α gelegen is tusschen α_1 en α' , tusschen α'' en α''' of tusschen α_2 en α_3 . Daar α''' de grootste waarde is, die α kan verkrijgen, vindt men $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha'$ of $\alpha'' \leq \alpha \leq \alpha'''$. Van deze twee gevallen behoeft er slechts één te worden nagegaan, daar bij eene verwisseling van den werveldraad 3 met een der beide andere het eene geval in het andere overgaat. Ligt α bijv. tusschen α_1 en α' , dan is de tijd, dien de werveldraden noodig hebben om weder in hun oorspronkelijken stand ten opzichte van elkander te komen:

$$T = \frac{\pi C_1^6}{m} \cdot 4 \int_{\alpha_1}^{\alpha'} \frac{d\alpha}{f(\alpha)},$$

terwijl gedurende dezen tijd de θ 's toenemen met

$$\Theta = 6 \int_{\alpha_1}^{\alpha'} \frac{(2\alpha^3 - 3\alpha^2 C_2^2 + \alpha C_2^4 + 4C_1^6) d\alpha}{(2C_2^2 - 3\alpha) f(\alpha)}.$$

Hierbij ligt s_3^2 tusschen de grenzen α_1 en α' , terwijl s_1^2 en s_2^2 tusschen de grenzen α'' en α''' gelegen zijn. Beginnen

wij den tijd te rekenen op het oogenblik, dat de driehoek gelijkbeenig is, werveldraad 3 zich in den top bevindt en s_3 een minimum is; tot het oogenblik $t = \frac{1}{4} T$ zullen s_3 en s_2 toenemen, s_1 afnemen, terwijl juist dan de drie werveldraden op eene rechte lijn zullen komen met werveldraad 2 tusschen de beide andere, evenwel het dichtst bij 1. Bij verdere beweging verkrijgt voor $t = \frac{1}{2} T$ de driehoek weder zijne oorspronkelijke gedaante, en voor $t = \frac{3}{4} T$ liggen de werveldraden ten opzichte van elkander evenals voor $t = \frac{1}{4} T$, alleen met dit verschil, dat 2 en 3 verwisseld zijn.

Na de vrij uitvoerige behandeling van het geval $m_1 = m_2 = m_3$, zullen wij alleen het merkwaardigste aangeven, als $m_1 = m_2 = -m_3 = m$ is.

De formules betrekking hebbende op de werveldraden 1 en 2 zijn dezelfde.

Hier is

$$\frac{s_1 s_2}{s_3} = C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

$$\text{en } s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = C_2^2 \quad (C_2^2 \text{ kan ook negatief zijn}). \quad (76)$$

Lettende op het verschil tusschen de constanten in het algemeene geval en de hier gebezigde, vindt men uit (62):

$$s_1^2 = \rho_1^2, \quad s_2^2 = \rho_2^2, \quad s_3^2 = \rho_3^2 - 2 C_2^2. \quad . \quad (77)$$

Uit (65) volgt dat, zoodra de driehoek door de werveldraden gevormd, gelijkbeenig is, de ongelijke zijde een maximum of minimum is; verder is ook de afstand van twee draden een maximum of minimum, wanneer de drie

werveldraden op eene rechte lijn gelegen zijn; tegelijk met s_1, s_2, s_3 is ook ρ_1, ρ_2 en ρ_3 een maximum of minimum.

Uit (65) vindt men met behulp van de vergg. (75) en (76) door integratie s_1 en s_3 als functie van den tijd, in den vorm van elliptische integralen; met behulp van (54) kan men vervolgens de baan der werveldraden verkrijgen. De elliptische integralen gaan over in algebraïsche en logarithmische voor het geval, dat

$$C_2 = C_1, \quad C_2 = 0, \quad C_2^2 = -8 C_1^2 \quad \text{is.}$$

10. Voor $C_2 = 0$ gaat (76) over in $s_1^2 + s_2^2 = s_3^2$, zoodat de driehoek der werveldraden rechthoekig is en blijft. Bepaalt men, zooals hierboven is aangegeven, de baan der werveldraden, dan vindt men, dat de werveldraad 3 zich beweegt langs eene lijn evenwijdig aan de Y-as en op een afstand $2 C_1$ daarvan verwijderd. Uit de eigenschap, dat het zwaartepunt der werveldraden bij de beweging op zijne plaats blijft, volgt $x_1 + x_2 = x_3$ en $y_1 + y_2 = y_3$, zoodat de drie werveldraden met den oorsprong de hoekpunten vormen van een parallelogram, waarvan dus ρ_3 en s_3 de diagonalen zijn; uit de gelijkheid van s_3 en ρ_3 volgt verder, dat genoemd parallelogram een rechthoek is. Daar verder $s_1 s_2$ den dubbelen inhoud van den driehoek door de werveldraden gevormd voorstelt, moet, daar s_3 de derde zijde van dien driehoek en $s_1 s_2 = C_1 s_3$ is, C_1 de lengte van de loodlijn zijn uit den werveldraad 3 op s_3 neergelaten; daar de lengte van deze loodlijn constant is en de werveldraad 3 zich beweegt langs eene lijn evenwijdig aan de Y-as op een afstand $2 C_1$, zullen de werveldraden 1 en 2 zich bewegen op eene andere lijn evenwijdig aan de Y-as, zoodat $x_1 = x_2 = C_1$ is. Verder is het duidelijk, dat een van de werveldraden 1 en 3 ligt in het eerste quadrant,

terwijl de andere zich in het vierde quadrant bevindt, en dat de een meer en meer de X-as nadert en de andere er zich van verwijderd.

Bepaalt men de snelheid der werveldraden, dan vindt men $V_3 = \frac{m}{\pi C_1}$, terwijl die van den werveldraad, welke zich van de X-as verwijderd, tot diezelfde waarde nadert en die van den anderen nul tot grens heeft. Ligt werveldraad 3 op de X-as, dan zijn de snelheden van de beide andere werveldraden $\frac{m}{2\pi C_1}$ en gelijk gericht.

2^o. $C_2 = C_1$. In dit geval is $s_1 s_2 = C_1 s_3$, $s_1^2 + s_2^2 = s_3^2 + C_1^2$, waaruit volgt s_1 of $s_2 = C_1$ en s_2 of $s_1 = s_3$. De driehoek is dus steeds gelijkbeenig en heeft eene constante basis. Nemen wij $s_2 = C_1$ dan is ook $\rho_2 = C_1$, zoodat de werveldraad 2 zich in een cirkel beweegt, die het zwaartepunt der werveldraden tot middelpunt heeft. Bepaalt men w_1 uit $w^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, dan verkrijgt men $w_1 = \frac{m}{\pi C_1}$, zoodat werveldraad 1 zich met eene constante snelheid beweegt.

Is $s_3 = C_1$ dus ook $s_1 = C_1$, dan is het duidelijk, dat aan (65) voldaan wordt; in dit geval is de driehoek, waarvan de werveldraden de hoekpunten zijn, gelijkzijdig, en zijne zijden blijven bij de beweging constant; hij draait met eene constante snelheid $\frac{m}{\pi C_1}$ om zijn zwaartepunt.

Is $s_3 > C_1$, dan blijkt het uit (65), dat s_3 en s_1 voortdurend afnemen; θ_1 , θ_2 , θ_3 nemen voortdurend toe met den tijd.

Bepaalt men de baan van den werveldraad 1, dan vindt men:

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} = \text{bg tg} \frac{C_1}{4\rho_1^2 - C_1^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{4\rho_1^2 - C_1^2} + C_1\sqrt{3}}{\sqrt{4\rho_1^2 - C_1^2} - C_1\sqrt{3}}.$$

Neemt men ρ_1 zeer groot en ontwikkelt men het tweede lid in eene reeks, waarbij men slechts de eerste macht van $\frac{C_1}{\rho_1}$ behoudt, dan verkrijgt men :

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{3C_1}{2\rho_1} \quad \text{of} \quad x_1 = \frac{3}{2} C_1.$$

De rechte lijn $x_1 = \frac{3}{2} C_1$ is dus een asymptoot der baan door werveldraad 1 beschreven ; evenzoo volgt uit de waarde van θ_3 , dat $x_3 = \frac{5}{2} C_1$ een asymptoot is der baan door 3 doorloopen. De baan der werveldraden 1 en 3 zijn spiralen, waarvan de eerste een cirkel met straal C_1 , de ander een cirkel met straal $C_1\sqrt{3}$ tot asymptoot heeft. Beide spiralen naderen zeer snel tot hunne asymptotische cirkels.

Voor $t = -\infty$ is

$$\rho_1 = \infty, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0, \rho_3 = \infty, \theta_3 = -\frac{\pi}{2},$$

en voor $t = +\infty$,

$$\rho_1 = C_1, \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \theta_2, \theta_2 = \infty, \rho_3 = C_1\sqrt{3}, \theta_3 = -\frac{\pi}{6} + \theta_2.$$

Zijn de werveldraden 1 en 3 bij het begin van de beweging nog zeer ver van het zwaartepunt verwijderd, dan bevindt 2 zich ongeveer in het punt $x_2 = C_1, y_2 = 0$; zijne snelheid is zeer klein, terwijl w_3 bijna gelijk is aan $\frac{m}{\pi C_1}$; beide snelheden nemen snel toe en naderen tot $\frac{m}{\pi C_1}$ en $\frac{m\sqrt{3}}{\pi C_1}$. Heeft de werveldraad 2 eens zijn cirkel

doorloopen, dan is bijna $\rho_1 = C_1$ en $\rho_3 = C_1 \sqrt{3}$, zoodat de werveldraden 1 en 2 beide den cirkel met een straal C_1 doorloopen met eene snelheid $\frac{m}{\pi C_1}$, terwijl 3 zich met eene snelheid $\frac{m\sqrt{3}}{\pi C_1}$ langs een cirkel met een straal $C_1 \sqrt{3}$ beweegt. De driehoek door de werveldraden gevormd is dan gelijkzijdig en wentelt met eene constante snelheid om het zwaartepunt.

Figuur 5 geeft eenigszins eene voorstelling van de beweging.

Ligt s_3 tusschen C_1 en $\frac{1}{2} C_1$ (uit de waarde van $\frac{ds_3}{dt}$ blijkt, dat s_3 niet kleiner kan zijn dan $\frac{1}{2} C_1$), dan hebben s_1 en ρ_1 dezelfde grenzen als s_3 , terwijl ρ_3 tot grenzen heeft $\frac{3}{2} C_1$ en $C_1 \sqrt{3}$.

De baan, die werveldraad 1 doorloopt, is eene spiraal, wier kleinste radiusvector is $\frac{1}{2} C_1$, en die een cirkel met een straal C_1 tot asymptoot en de X-as tot as van symmetrie heeft. Werveldraad 2 beweegt zich steeds in een cirkel met een straal C_1 en werveldraad 3 langs eene spiraal, die eveneens de X-as tot as van symmetrie heeft, maar waarvan de asymptotencirkel een straal $C_1 \sqrt{3}$ bezit; het punt, dat van deze spiraal het dichtst bij den oorsprong ligt, is er $\frac{2}{3} C_1$ van verwijderd. Beide spiralen naderen snel tot hare asymptoten (zie fig. 6). Op het oogenblik $t = 0$ liggen de 3 werveldraden op de X-as op afstanden $\frac{1}{2} C_1$, C_1 , $\frac{3}{2} C_1$ van den oorsprong, hunne snelheden zijn dan $\frac{m}{\pi C_1}$, $\frac{4m}{\pi C_1}$ en $\frac{3m}{\pi C_1}$. θ_1 neemt eerst

af, bereikt een minimum voor $\rho_1 = \frac{1}{3} C_1 \sqrt{3}$, en gaat dan verder toenemen; θ_2 en θ_3 nemen steeds toe; werveldraad 1 beweegt zich steeds met de snelheid $\frac{m}{\pi C_1}$, terwijl de snelheid der andere werveldraden steeds afneemt en tot de grenzen $\frac{m}{\pi C_1}$ en $\frac{m \sqrt{3}}{\pi C_1}$ nadert. Heeft werveldraad 2 eenmaal zijn cirkel doorloopen, wat na eindigen tijd plaats heeft, dan is de driehoek door de werveldraden gevormd, bijna gelijkzijdig; deze beweegt zich bijna met de hoeksnelheid $\frac{m}{\pi C_1^2}$ om den oorsprong.

Worden de algemeene vergelijkingen voor de beweging van 3 werveldraden eenvoudiger door het maken van bijzondere onderstellingen, wat betreft de sterkte, GRÖBLI heeft ook nagegaan, of de beweging mogelijk is, en zoo ja, hoe zij dan plaats heeft, als hij de grootte en den vorm van de driehoeken aan banden legt.

Hij gaat daartoe de volgende gevallen na:

- 1°. de driehoek verandert noch van grootte, noch van vorm;
- 2°. de driehoek verandert alleen van vorm, maar behoudt zijn grootte;
- 3°. de driehoek blijft gelijkbeenig.

Het blijkt, dat deze gevallen dan mogelijk zijn, als er tevens eene betrekking tusschen de sterkte der werveldraden bestaat.

Wat de beweging van meer dan drie werveldraden aangaat, in het algemeen is deze niet te bepalen; een bijzonder geval daarvan hebben wij in het vorige hoofdstuk nagegaan, toen wij bepaalden de beweging van één werveldraad tusschen twee vlakken, die een hoek met elkander

maakten gelijk aan het n^{de} deel van 2π ; vervangen wij namelijk de beelden door werveldraden, dan verkrijgen wij eene mogelijke beweging.

Voor vier werveldraden kunnen wij ook het geval bespreken, dat er niet twee maar slechts één vlak van symmetrie is; deze beweging is slechts mogelijk, wanneer de werveldraden 1 en 3 en evenzoo 2 en 4 elkanders spiegelbeelden zijn. Het beschouwen van al deze bijzondere gevallen zou ons echter te ver voeren.

ZEVENDE HOOFDSTUK.

Wervelcylinder.

Hebben wij ons tot hiertoe bezig gehouden met afzonderlijke rechthoekige werveldraden, wij zullen nu het geval nagaan, dat de werveldraden een aaneengesloten geheel vormen, dat de gedaante heeft van een oneindig langen cylinder met eindige doorsnede, waarvan de vorm eene ellips is.

Is ζ voor alle punten van eene doorsnede constant, dan zou men volgens KIRCHHOFF ¹⁾ kunnen aantoonen, dat aan alle voorwaarden voor de beweging voldaan wordt door aan te nemen, dat de doorsnede eene ellips blijft met gelijke assen, die evenwel met constante snelheid om het middelpunt draaien. KIRCHHOFF vindt dan de snelheden binnen den cylinder, maar spreekt niet over die daar buiten. Evenwel kan men beide op een zeker oogenblik verkrijgen door u en v te bepalen als twee functies van x en y , die aan de volgende voorwaarden moeten voldoen ²⁾:

1) KIRCHHOFF, Vorlesungen über Math. Physik, 3e Aufl., Leipzig, 1883, pag. 262.

2) Deze methode ben ik verschuldigd aan Dr. NIEUWENHUYZEN KRUSEMAN.

- 1^o. Overal moet $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ zijn.
- 2^o. Voor oneindig ver gelegen punten zijn u en v nul.
- 3^o. Voor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ is $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta$.
- en voor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ is $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
- 4^o. u en v zijn doorlopende functies, ook aan de grens van den cylinder.

Hierbij is ondersteld, dat $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ op het bepaalde oogenblik de vergelijking is van de grens der doorsnede. Zijn A en B de halve assen van eene door x, y gaande, met $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ homofocale ellips, dan is identiek

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0, \quad (78)$$

terwijl $A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = c^2$ is; hierbij zijn dan A en B functies van x en y .

Aan alle gestelde voorwaarden wordt voldaan door:

$$u = -\frac{2\zeta ay}{a+b}, \quad v = \frac{2\zeta bx}{a+b}$$

voor inwendige punten,

$$u = -\frac{2\zeta aby}{c^2} \left(\frac{A}{B} - 1 \right), \quad v = \frac{2\zeta abx}{c^2} \left(1 - \frac{B}{A} \right)$$

voor uitwendige punten.

Dat aan 4 voldaan wordt, blijkt dadelijk, als men c^2 door $A^2 - B^2$ vervangt, want voor de grensellips wordt $A = a, B = b$.

Uit (78) in verband met $A^2 - B^2 = c^2$ volgt:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{x}{P A^3}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{x}{P A^2 B},$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{y}{P A B^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{y}{P B^3},$$

waarbij ter bekorting genomen is $P = \frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4}$.

Verder is:

voor inwendige punten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2 \zeta a}{a+b}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2 \zeta b}{a+b},$$

voor uitwendige punten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2 \zeta a b x y}{P A^3 B^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2 \zeta a b}{c^2} \left\{ \frac{A}{B} - 1 \right\} + \frac{2 \zeta a b y^2}{P A B^5},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2 \zeta a b}{c^2} \left\{ 1 - \frac{B}{A} \right\} - \frac{2 \zeta a b x^2}{P A^5 B}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2 \zeta a b x y}{P A^3 B^3},$$

waaruit volgt, dat aan de voorwaarden 1 en 3 voldaan is.

Dat u en v voor oneindig ver gelegen punten verdwijnen, volgt uit:

$$u = -2 \zeta a b \cdot \frac{y}{c^2} \left(\frac{A}{B} - 1 \right) = -2 \zeta a b \cdot \frac{y(A-B)}{(A^2 - B^2) B},$$

$$u = -2 \zeta a b \cdot \frac{y}{(A+B) B} = 0 \text{ voor } A = B = \infty, y = \infty.$$

Hetzelfde geldt voor v .

De geschetste bewegingstoestand geldt natuurlijk slechts voor een enkel tijdstip, daar de werveldraden, waaruit de cylinder bestaat, zich met de snelheidscomponenten u en v verplaatsen.

Kiezen wij evenwel zulk een werveldraad uit, waarvan de coördinaten zijn $\lambda a \cos \phi$ en $\lambda b \sin \phi$; λa en λb zijn

dan de halve assen van een met de gegeven grensellips gelijkvormige concentrische ellips, waarop de gekozen draad gelegen is, terwijl ϕ den excentrischen hoek voorstelt.

Na een tijd dt zijn de coördinaten van den werveldraad geworden :

$$x' = \lambda a \cos \phi - \frac{2 \zeta a b \sin \phi}{a + b} \lambda dt,$$

$$y' = \lambda b \sin \phi + \frac{2 \zeta a b \cos \phi}{a + b} \lambda dt.$$

Stellen wij

$$\frac{2 \zeta a b}{a + b} = (a + b) h,$$

dan is :

$$x' + h b \lambda \sin \phi dt = \lambda a (\cos \phi - \omega \sin \phi dt),$$

$$y' - h a \lambda \cos \phi dt = \lambda b (\sin \phi + \omega \cos \phi dt),$$

waaruit volgt bij verwaarloozing van dt^2 :

$$\left(\frac{x' + h y' dt}{\lambda a} \right)^2 + \left(\frac{y' - h x' dt}{\lambda b} \right)^2 = 1,$$

wat de vergelijking van de ellips $\frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - 1 = 0$ is, nadat zij in positieve zin met eene hoeksnelheid h gedurende den tijd dt gedraaid is. Daar h onafhankelijk van λ is, draait zich de wervelcylinder of liever de assen van de doorsnede, terwijl deze haar vorm behoudt, met eene constante hoeksnelheid

$$h = \frac{2 \zeta a b}{(a + b)^2}.$$

De totale snelheid van een werveldraad is $V = \frac{2 \zeta a b \lambda}{a + b}$,

terwijl hare richting bepaald is door $\frac{u}{v} = -tg \phi$. Wij

zien dus, dat alle inwendige punten, die op een met de grensellips gelijkvormige ellips gelegen zijn, dezelfde snelheid hebben, terwijl hunne bewegingsrichting loodrecht op het bewegelijke been van den excentrischen hoek staat.

Voor alle uitwendige punten, die op een met de grensellips homofocale ellips gelegen zijn, is de snelheid

$$\frac{2 \zeta a b}{c^2} (A - B) = \frac{2 \zeta a b}{A + B}$$

dus ook constant, terwijl ook hier door $x = A \cos \phi$, $y = B \sin \phi$ te stellen, blijkt dat $\frac{u}{v} = -\operatorname{tg} \phi$ is, zoodat de bewegingsrichting ook buiten den cylinder loodrecht staat op het bewegelijke been van den excentrischen hoek.

Evenals wij hierboven aantoonden, dat punten binnen den cylinder, die op eene met de grensellips gelijkvormige ellips gelegen waren, na een tijd dt , op dezelfde ellips lagen, waarvan evenwel de assen met eene hoeksnelheid h gedraaid waren, kan men bewijzen, dat punten buiten den cylinder, die oorspronkelijk op eene ellips lagen, homofocaal met de grensellips, na een tijd dt ook nog op dezelfde ellips gelegen zijn, terwijl hare assen met eene hoeksnelheid $H = \frac{2 \zeta a b}{(A+B)}$ gewenteld zijn.

Terwijl dus voor alle gelijkvormige ellipsen binnen den cylinder de hoeksnelheid der assen dezelfde is, verschilt deze voor alle homofocale ellipsen buiten den cylinder.

Behalve de draaiing der assen verplaatsen de deeltjes zich ook nog met eene zekere snelheid langs hunne ellips; stellen wij van

$$x' + h b l \sin \phi \, dt = \lambda a (\cos \phi - \omega \sin \phi \, dt),$$

$$y' - h a l \cos \phi \, dt = \lambda b (\sin \phi + \omega \cos \phi \, dt),$$

de laatste leden achtereenvolgens gelijk aan $\lambda a \cos (\psi + d\psi)$

en $\lambda b \sin(\psi + d\psi)$, dan is $d\psi$ blijkbaar de verandering van den excentrischen hoek van het beschouwde punt; deze verandering is weder voor alle punten van de ellips standvastig en wel is $\frac{d\psi}{dt} = h$. Hetzelfde geldt ook voor punten buiten den cylinder, weder met dit verschil, dat de verandering van den excentrischen hoek binnen den cylinder voor alle punten dezelfde is, terwijl zij voor punten buiten dezen van de eene homofocale ellips tot de andere verandert.

De beweging van ieder punt wordt dus bepaald door de hoeksnelheid h of H van de ellips, (gelijkvormig of homofocaal met de grensellips) waarop het ligt, vereenigd met eene even groote hoeksnelheid van den radiusvector van den excentrischen hoek.

Hieruit blijkt tevens, dat alle werveldraden, die op een gemeenschappelijken voerstraal gelegen zijn, steeds op een gemeenschappelijken voerstraal zullen blijven liggen; de lengte van den voerstraal blijft evenwel niet dezelfde.

Bij een cirkelvormigen cylinder met een straal r is de snelheid van een punt op den cylinder ζr , terwijl elk der beide genoemde hoeksnelheden zijn $\frac{1}{2} \zeta$. De cylinder zal zich dus als een vast lichaam draaien; de snelheid van een punt buiten den cylinder op een afstand R van de as is $\frac{\zeta r^2}{R} = 2 R H$.

Het bovenstaande kan ook toegepast worden voor het geval $b = 0$, waarbij dus de wervelcylinder overgaat in een wervelvlak. Stellen wij dan $\pi \zeta a b = 2 \delta a$ of $b \zeta = \frac{2 \delta}{\pi}$, dan kan men δ de sterkte van het wervelvlak noemen voor de lengte-eenheid.

Wij vinden dan voor de snelheid buiten het vlak:

$$u = -\frac{4\delta y}{\pi a} \left(\frac{A}{B} - 1 \right), \quad v = \frac{4\delta x}{\pi a} \left(1 - \frac{B}{A} \right),$$

of

$$u = -h y \frac{A-B}{B}, \quad v = h x \frac{A-B}{A}.$$

daar de hoeksnelheid op het vlak $h = \frac{4\delta}{\pi a}$ wordt omdat dan $c = a$ is.

Voor een punt op het oppervlak van de plaat wordt $A = a$, $B = b$, terwijl men y vervangen kan door

$$\pm \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

zoodat men heeft:

$$u = \left[\mp h \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a-b}{b} \right]_{b=0} = \mp h \sqrt{a^2 - x^2}, \quad v = h x,$$

waarbij het bovenste teeken moet gebruikt worden voor de positieve zijde van het wervelvlak. Het blijkt dus, dat het wervelvlak kan vervangen worden door eene vaste plaat, die met eene hoeksnelheid h draait. De normale snelheidscomponent aan het oppervlak is dan gegeven $h x$,

die met de voorwaarden, dat in de ruimte $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ en $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ de snelheden u en v volkomen bepaalt.

Het is duidelijk, dat bovenstaande functies aan alle voorwaarden voldoen.

De waarde van u aan het oppervlak van de plaat wijst op eene eenvoudige periodieke beweging der deeltjes of evenals hierboven op eene beweging van den excentrischen straal met eene eenparige hoeksnelheid h ; daarmede is nog

vereenigd de draaiing van het geheel met eene hoeksnelheid h .

W. THOMSON heeft de beweging nagegaan ¹⁾ bij een bijna cirkelvormigen wervelcylinder, waarbij evenwel ook de beweging in verschillende vlakken loodrecht op de as van den cylinder niet dezelfde is, terwijl de snelheid in eene richting evenwijdig met die as oneindig klein is. Hij vindt dan eene trillende beweging langs het oppervlak zoowel longitudinaal als transversaal. Zijne verschillende formules leidt hij af uit de grondformules (1), die hij op cilindrische coördinaten overbrengt.

1) Proc. Royal Soc. of Edinb. Vol. X, 1880.

ACHTSTE HOOFDSTUK.

Cirkelvormige werveldraden.

Beschouwen wij vervolgens het geval dat alle wervellijnen cirkels zijn, waarvan de gemeenschappelijke as de Z-as is. Hebben de vloeistofdeeltjes geen andere beweging dan die, welke het gevolg is van de rotatie van eenige deeltjes, dan zal de Z-as steeds de gemeenschappelijke as der wervellijnen blijven.

Denken wij ons de vloeistof onsamendrukbaar en naar alle kanten oneindig ver uitgestrekt, terwijl de snelheid aan de grenzen nul is, dan is $P_1 = P_2 = L_2 = M_2 = N_2 = 0$ (formules 33, 34, 36).

De grootte en stand van elke wervellijn op elk oogenblik wordt gegeven door de grootte van haar straal (r') en door haar afstand tot het X Y-vlak (z'). De baan van een vloeistofdeeltje ligt in een vlak, dat door de Z-as gaat, en is eene functie van de coördinaten van dat deeltje.

Zijn van een punt op eene wervellijn de poolcoördinaten

r' en θ' , dan is $x' = r' \cos \theta'$, $y' = r' \sin \theta'$; is verder de rotatiesnelheid van dat deeltje ω' , dan is

$$\xi' = -\omega' \sin \theta', \quad \eta' = \omega' \cos \theta', \quad \zeta' = 0, \quad (79)$$

waarbij ω' onafhankelijk is van θ' , terwijl de snelheidscomponenten in een punt r, θ, z dientengevolge zijn

$$u = -\frac{\partial M}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial L}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad (91)$$

omdat volgens (31) $N = 0$ is. Hierin zijn

$$L = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega' \sin \theta'}{d} d\tau', \quad M = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega' \cos \theta'}{d} d\tau', \quad (81)$$

waarin voorstelt $d\tau'$ een volume-element, dat eene rotatiesnelheid ω' heeft, en d den afstand van dat element tot het deeltje met de coördinaten r, θ, z ; nu is

$$d\tau' = r' dr' d\theta' dz', \quad d^2 = (z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\theta' - \theta).$$

Nemen wij

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \int \int_{\theta}^{2\pi + \theta} \frac{\omega' \cos(\theta' - \theta)}{d} d\tau',$$

waarbij $2\pi + \theta$ en θ de grenzen zijn van θ' , dan is

$$S = M \cos \theta - L \sin \theta.$$

Daar verder

$$\int \int \int_{\theta}^{2\pi + \theta} \frac{\omega' \sin(\theta' - \theta)}{d} d\tau' = 0$$

is, heeft men

$$L \cos \theta + M \sin \theta = 0,$$

dus $L = -S \sin \theta$, $M = S \cos \theta$ (82)

Vervangt men $\theta' - \theta$ door Φ , dan wordt

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \int \int_{\theta}^{2\pi} \frac{\omega' \cos \Phi d\Phi}{\sqrt{[(z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \Phi]}} r' dr' dz'; \quad (83)$$

vervangt men vervolgens ϕ door $\pi - 2\psi$, dan verkrijgt men :

$$S = -\frac{2}{\pi} \int \int \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega' (1 - 2 \sin^2 \psi) d\psi}{\sqrt{[(z' - z)^2 + (r + r')^2 - 4r'r \sin^2 \psi]}} r' dr' dz'. \quad (84)$$

Neemt men $k^2 = \frac{4r'r}{(z' - z)^2 + (r' + r)^2}$, dan verkrijgt men :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{2}{\pi} \int \int \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega' r' dr' dz'}{\sqrt{\{(z' - z)^2 + (r' + r)^2\}}} \left\{ \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2 - 2k^2 \sin^2 \psi) - 2}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int \int \frac{k}{2\sqrt{r'r'}} \cdot \omega' r' dr' dz' \left(K + \frac{2}{k^2} E - \frac{2}{k^2} K \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int \int \sqrt{\frac{r'}{r}} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right\} \omega' dr' dz' \quad (85) \\ &= \frac{1}{\pi} \int \int \sqrt{\frac{r'}{r}} U \omega' dr' dz', \quad (86) \end{aligned}$$

waarbij K en E zijn de volledige elliptische integralen van de eerste en tweede soort, terwijl $\left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E$ vervangen wordt door U.

Substitueert men de gevonden waarden van M en L in u, v, w , dan vindt men :

$$u = -\frac{\partial S}{\partial z} \cos \theta, \quad v = -\frac{\partial S}{\partial z} \sin \theta, \quad \text{dus} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial z}, \quad (87)$$

en

$$w = \frac{\partial (S \cos \theta)}{\partial v} + \frac{\partial (S \sin \theta)}{\partial y} = \frac{S}{r} + \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (Sr)}{\partial r}. \quad (88)$$

Voor de vergelijking der bewegingslijnen verkrijgt men:

$$\left\{ -\frac{1}{r} \frac{d(Sr)}{dz} \right\} : \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial(Sr)}{\partial r} \right\} = \frac{dr}{dz} \quad \text{of} \quad Sr = C;$$

Sr is dus de stroomfunctie.

Noemen wij de grootte der snelheid in de richting van den voerstraal s dan is $u = s \cos \theta$, $v = s \sin \theta$.

Eenige vergelijkingen analoog met die op pag. 73 vinden wij, door in aanmerking te nemen, dat

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \Phi d\Phi}{\sqrt{[(z'-z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Phi]}}$$

alleen van teeken verandert, door verwisseling van de letters met en zonder accenten. Dientengevolge is

$$\int \int r r' \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \Phi d\Phi}{\sqrt{[(z'-z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Phi]}} \right\} \omega \omega' df df' = 0;$$

df en df' stellen de doorsneden van de werveldraden voor. Hieruit volgt volgens (83):

$$0 = \int r \frac{\partial S}{\partial z} \omega df = - \int r \frac{dr}{dt} \omega df,$$

zoodat

$$\int r^2 \omega df = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

is, daar ωdf voor elken werveldraad constant is ten opzichte van den tijd.

De energie wordt volgens (38) bij eene dichtheid = 1 $E = \int (S \omega \sin^2 \theta + S \omega \cos^2 \theta) d\tau = \int S \omega d\tau$ of

$$E = 2\pi \int S r \omega df = \int \int \int \frac{\cos \Phi d\Phi}{\sqrt{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \Phi]}} \omega \omega' r r' df df'. \quad (90)$$

Uit (40) vindt men:

$$E = 2 \int \int \int [s \cos \theta (-z \omega \cos \theta) + s \sin \theta (-z \omega \sin \theta) + w (r \omega \cos^2 \theta + r \omega \sin^2 \theta)] d\tau \\ = 2 \int \int \int (w r \omega - s z \omega) d\tau = 2 \int \int \int \omega (w r - s z) r d z d \theta d r.$$

Integreert men dit naar θ en vervangt men $d r d z$ door $d f$, w door $\frac{d z}{d t}$ en s door $\frac{d r}{d t}$, dan heeft men:

$$E = 4 \pi \int \int \omega r \left(r \frac{d z}{d t} - z \frac{d r}{d t} \right) d f. \quad (91)$$

Zij weder de sterkte $m = \int \omega d f$, dan is volgens (89):

$$\Sigma m r^2 = \text{const.} \quad (92)$$

Wordt verder r_0 bepaald door $r_0^2 = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}$, dan kan men dit den middelbaren straal der werveldraden noemen; deze blijft gedurende de beweging constant.

Voeren wij ook in de grootte z_0 , zoodanig dat

$$z_0 \Sigma m r^2 = \Sigma m r^2 z \quad (93)$$

is, dan blijkt het duidelijk, dat de plaats, die de cirkel met coördinaten r_0, z_0 inneemt, alleen afhangt van de sterkte en de onderlinge ligging der werveldraden en niet van de plaats van den oorsprong van coördinaten. Dezen cirkel zouden wij kunnen noemen de circulaire as van het stelsel werveldraden; zijn grootte blijft constant, maar hij beweegt zich in de richting van de Z-as met eene snelheid $\frac{d z_0}{d t}$, te vinden door differentiatie van (93):

$$\frac{d z_0}{d t} \Sigma m r^2 = \Sigma m r^2 \frac{d z}{d t} + \Sigma 2 m r z \frac{d r}{d t}, \quad (94)$$

$$\frac{d z_0}{d t} \Sigma m r^2 = \Sigma \left(m r^2 \frac{d z}{d t} - m r z \frac{d r}{d t} \right) + 3 \Sigma m r z \frac{d r}{d t}.$$

In verband met (91) volgt hieruit, in aanmerking nemende $\Sigma m z_0 r \frac{dr}{dt} = 0$, omdat $\Sigma m r^2 = \text{const.}$ is,

$$\frac{dz_0}{dt} \Sigma m r^2 = \frac{E}{4\pi} + 3 \Sigma m (z - z_0) r \frac{dr}{dt}. \quad (95)$$

Nemen wij nu het geval, dat er zich in de vloeistof een cirkelvormigen werveldraad bevindt met eene eindige sterkte m , terwijl de lengte-afmetingen van de doorsnede zijn van de orde ε ; de hoeksnelheid ω is dus van de orde $\frac{1}{\varepsilon^2}$. In dit geval wordt

$$S = \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} U,$$

waarbij R den straal van den werveldraad voorstelt, terwijl de snelheidscomponenten in het punt r, z zijn:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= - \frac{\partial S}{\partial z} = - \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{dU}{dk} \frac{\partial k}{\partial z} = \\ &= - \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \frac{dU}{dk} \cdot k \frac{Z - z}{(R + r)^2 + (Z - z)^2}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial(Sr)}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \sqrt{\frac{R}{r}} \left\{ U + \frac{dU}{dk} \cdot k \frac{(R^2 - r^2) + (Z - z)^2}{(R + r)^2 + (Z - z)^2} \right\}. \quad (97)$$

(Z is de afstand van den werveldraad tot het XY-vlak).

Verder is:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dk} &= -K \left(\frac{2}{k^2} + 1 \right) + \frac{2E}{k^2} + \left(\frac{2}{k} - k \right) \frac{dK}{dk} - \frac{2}{k} \frac{dE}{dk}, \\ \frac{dK}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}^3} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \psi - 1}{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}^3} d\psi = \\ &= - \frac{K}{k} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2}{k k'^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}^3} d\psi \quad (\text{waarbij } k'^2 = 1 - k^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dus } \frac{dK}{dk} &= -\frac{K}{k} + \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2k^2 \sin^2 \psi + k^4 \sin^4 \psi) + (2k^2 \sin^2 \psi - k^4 \sin^4 \psi - k^2)}{k k'^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\
&= -\frac{K}{k} + \frac{E}{k k'^2} - \frac{k}{k'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin^2 \psi + k^2 \sin^4 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\
&= -\frac{K}{k} + \frac{E}{k k'^2} - \frac{k}{k'^2} \left[\frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k k'^2}, \\
\frac{dE}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \psi - 1}{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi = \frac{E - K}{k}.
\end{aligned}$$

Substitueert men deze waarden in $\frac{dU}{dk}$, dan vindt men:

$$\frac{dU}{dk} = -\frac{2K}{k^2} + \frac{2E - E k^2}{k^2 k'^2}.$$

Om de snelheidscomponenten in de nabijheid van den werveldraad te vinden, stellen wij $(R - r)^2 + (Z - z)^2 = \varepsilon^2$, waarbij dus ε zeer klein is ten opzichte van R ; dientengevolge is $k^2 = \frac{4Rr}{4Rr + \varepsilon^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4Rr + \varepsilon^2}$, zoodat $k'^2 = \frac{\varepsilon^2}{4Rr + \varepsilon^2}$ of bij benadering $\frac{\varepsilon^2}{4R^2}$. In dit geval verschilt dus k weinig van de eenheid.

Volgens LEGENDRE ¹⁾ is:

1) Zie SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis. Bd. 2.

$$K = \log \frac{4}{k'} + \frac{k'^2}{4} \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2} \right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k'^4 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4} \right),$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} k'^2 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{1}{1.2} \right) + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} k'^4 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2} - \frac{1}{3.4} \right),$$

wanneer de hoogere machten van k' dan de vierde worden verwaarloosd.

Substitueert men deze waarden in $\frac{dU}{dk}$, dan vindt men :

$$\frac{dU}{dk} = \frac{1}{k'^2} + 1 \frac{3}{4} + 1 \frac{51}{64} k'^2 - \frac{7}{32} k'^4 -$$

$$- \left(1 \frac{1}{2} + 1 \frac{5}{16} k'^2 + 1 \frac{37}{128} k'^4 \right) \log \frac{4}{k'}, \quad (98)$$

terwijl men bij substitutie in U verkrijgt:

$$U = -2 - \frac{3}{4} k'^2 - \frac{81}{128} k'^4 + \left(1 + \frac{3}{4} k'^2 + \frac{33}{64} k'^4 \right) \log \frac{4}{k'}, \quad (99)$$

Wij zien nu, dat U is van de orde $\log \frac{1}{k'}$, terwijl $\frac{dU}{dk}$ is van de orde $\frac{1}{k'^2}$; verder zijn, daar ε en k' van dezelfde orde zijn ook met $R - r$ en $Z - z$, $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$, zooals uit (96) en (97) blijkt, oneindig groot van de orde $\frac{1}{\varepsilon}$.

Echter is $\frac{dr}{dt}$ overal in het vlak van den werveldraad 0; voor deeltjes boven den werveldraad heeft deze snelheidscomponent eene positieve of negatieve waarde, al naarmate m positief of negatief is, zooals ook opgemaakt kan worden, uit hetgeen op pag. 54 gebleken is. Volkomen in overeenstemming met het daar gevondene blijkt ook uit (97), dat in het vlak van den werveldraad de deeltjes, die

dichter bij de as liggen dan de werveldraad zelf, eene snelheidscomponent hebben in de richting van de Z-as, waarvan het teeken overeenkomt met dat van de roteerende deeltjes. De snelheid der deeltjes in het vlak van den werveldraad op de Z-as gelegen is $\frac{m}{R}$, zooals direct uit pag. 54 volgt.

Uit de formules (92) en (95) vindt men de snelheden van den werveldraad zelf; daaruit blijkt, dat de straal van den werveldraad steeds dezelfde blijft, terwijl hij zich langs de Z-as voortbeweegt met eene snelheid:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{S}{2R} = \frac{m}{2\pi R} \left(\log \frac{4}{k'} - 2 \right), \quad . \quad (100)$$

waarbij de machten van k' verwaarloosd worden. De snelheid van den werveldraad komt dus in teeken overeen met m , evenals de snelheid van alle deeltjes in het vlak, dat door den werveldraad begrensd wordt.

Beschouwen wij nu eene niet elementaire cirkelvormige wervelbuis, die wij wervelring zullen noemen, en wier doorsnede een cirkel of liever het oppervlak tusschen twee concentrische cirkels is, waarvan de stralen zeer klein zijn ten opzichte van den straal R van den cirkel, die de middelpunten van de doorsneden van den wervelring verbindt. Deze cirkel zal dus bijna met de circulaire as samenvallen, zoodat wij hem dien naam zullen kunnen geven. Zijn de stralen van den binnensten en den buitensten cirkel achtereenvolgens b en a , dan verkrijgt men door $b = 0$ te nemen een massieven wervelring; de straal van een werveldraad wordt dan $R + \rho \cos \theta$, wanneer ρ voorstelt den afstand van dien werveldraad tot de circulaire as van den wervelring en θ den hoek, dien ρ maakt met het verlengde van R ; de afstand van den werveldraad tot het XY-vlak wordt vervolgens

$Z + \rho \sin \theta$, waarbij Z is de afstand van de circulaire as van den ring tot het XY -vlak; verder is $m = \omega \rho d \rho d \theta$. Voor een punt binnen den werveling op een afstand $R + \alpha$ van de Z -as, en een afstand $Z + \beta$ van het XY -vlak wordt dan volgens (96) en (97), als wij ω overal in den ring constant nemen:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\pi} \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \sqrt{\frac{R + \rho \cos \theta}{R + \alpha}} \cdot \frac{dU}{dk} \cdot k \times \\ \times \frac{\rho \sin \theta - \beta}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{2\pi(R + \alpha)} \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \sqrt{\frac{R + \rho \cos \theta}{R + \alpha}} \left\{ U + \right. \\ \left. + \frac{dU}{dk} \cdot k \cdot \frac{(\rho^2 \cos^2 \theta + 2R\rho \cos \theta - 2\alpha R - \alpha^2) + (\rho \sin \theta - \beta)^2}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2} \right\},$$

waarbij

$$k = \sqrt{\frac{4(R + \rho \cos \theta)(R + \alpha)}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2}},$$

$$k' = \sqrt{\frac{(\rho \cos \theta - \alpha)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2}}.$$

Gebruiken wij bij onze integraties van $\frac{dU}{dk}$ alleen den term $\frac{1}{k'^2}$ en bij die van U alleen $\log \frac{4}{k'} - 2$, terwijl wij de andere termen verwaarloozen, dan verkrijgen wij:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega}{\pi \sqrt{R + \alpha}} \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{R + \rho \cos \theta} \times \\ \times \frac{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2}{(\rho \cos \theta - \alpha)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2} \cdot \sqrt{\frac{4(R + \rho \cos \theta)(R + \alpha)}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2}} \times \\ \times \frac{\rho \sin \theta - \beta}{(2R + \alpha + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta - \beta)^2} d\theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{2\pi\sqrt{R+\alpha^3}} \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{R+\rho\cos\theta} \times$$

$$\times \left\{ \log \frac{4\sqrt{(2R+\alpha+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2}}{\sqrt{(\rho\cos\theta-\alpha)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2}} - 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(2R+\alpha+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2}{(\rho\cos\theta-\alpha)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2} \cdot \sqrt{\frac{4(R+\rho\cos\theta)(R+\alpha)}{(2R+\alpha+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\beta^2+\rho^2-\alpha^2-2\alpha R+2R\rho\cos\theta-2\beta\rho\sin\theta}{(2R+\alpha+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2} \right\} d\theta.$$

Voor $\sqrt{\frac{1}{(2R+\alpha+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-\beta)^2}}$ in de plaats stellende $\frac{1}{2R+\alpha} \left(1 - \frac{\rho\cos\theta}{2R+\alpha}\right)$, wordt

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2\omega}{\pi(2R+\alpha)} \times$$

$$\times \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(R+\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta-\beta)}{\rho^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\rho\cos\theta-2\beta\rho\sin\theta} \left\{ 1 - \frac{\rho\cos\theta}{2R+\alpha} \right\} d\theta =$$

$$= -\frac{2\omega}{\pi(2R+\alpha)^2} \times$$

$$\times \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(2R+\alpha)R\rho\sin\theta - (2R+\alpha)R\beta + R\rho^2\sin\theta\cos\theta - R\beta\rho\cos\theta}{\rho^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\rho\cos\theta-2\beta\rho\sin\theta} d\theta,$$

waarbij in den teller de derde machten van α , β en ρ en producten uit drie van die factoren bestaande verwaarloosd zijn.

Evenzoo vindt men bij gelijke benadering:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega\sqrt{R}}{2\pi\sqrt{R+\alpha^3}} \times$$

$$\times \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left\{ (\log 4 - 2) + \frac{1}{2} \log[(2R+\alpha)^2+\rho^2+\beta^2+2(2R+\alpha)\rho\cos\theta-2\beta\rho\sin\theta] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \log(\alpha^2+\beta^2+\rho^2-2\alpha\rho\cos\theta-2\beta\rho\sin\theta) \right\} d\theta +$$

$$+ \frac{2 \omega R^2}{\pi(R + \alpha)(2R + \alpha)^2} \times \\ \times \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(\beta^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha R + \rho^2 + 2R\rho \cos\theta - 2\beta\rho \sin\theta + \rho^2 \cos^2\theta)}{\rho^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\rho \cos\theta - 2\beta\rho \sin\theta} d\theta.$$

Ter bepaling van deze integralen heeft men de volgende integralen noodig:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{p - q \cos \Phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} \quad q^2 < p^2, \\ \int_0^\pi \log(p - \cos\Phi) d\Phi = -2\pi \log(\sqrt{p+1} - \sqrt{p-1}) \quad p^2 > 1, \\ \int_0^\pi \log(p + \cos\Phi) d\Phi = -2\pi \log(\sqrt{p+1} + \sqrt{p-1}) \quad p^2 > 1.$$

$$\text{Neem} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \rho^2 = p, \quad 2\alpha\rho = q \cos \Phi, \\ 2\beta\rho = q \sin \Phi, \quad \theta - \Phi = x,$$

dan wordt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\rho^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\rho \cos\theta - 2\beta\rho \sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x \cos \Phi + \cos x \sin \Phi) d\theta}{p - q \cos x} = \\ = \int_{-\Phi}^{2\pi - \Phi} \frac{(\sin x \cos \Phi + \cos x \sin \Phi) dx}{p - q \cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x \cos \Phi + \cos x \sin \Phi) dx}{p - q \cos x} = \\ = \sin \Phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{p - q \cos x} = -\frac{\sin \Phi}{q} \int_0^{2\pi} \frac{p - q \cos x - p}{p - q \cos x} dx =$$

1) Zie BIERENS DE HAAN, Tables d'Intégrales Définies, achtereenvolgens Table 88 N^o. 11 en Table 353 N^o. 11 en 13.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sin \Phi}{q} \int_0^{2\pi} dx + \frac{p \sin \Phi}{q} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{p-q \cos \Phi} = \\
&= -\frac{2\pi \sin \Phi}{q} + \frac{2\pi p \sin \Phi}{q \sqrt{p^2 - q^2}}.
\end{aligned}$$

Op dergelijke wijze vindt men:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{p-q \cos x} = -\frac{4\pi p \sin \Phi \cos \Phi}{q^2} + \frac{2\pi(2p^2 - q^2) \sin \Phi \cos \Phi}{q^2 \sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Berekent men de verschillende integralen, dan moet men in het oog houden, dat $\sqrt{p^2 - q^2}$ uit den aard der zaak positief moet zijn; $\sqrt{p^2 - q^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)^2} = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2$, zoolang $\alpha^2 + \beta^2 > \rho^2$ en $\sqrt{p^2 - q^2} = \rho^2 - \alpha^2 - \beta^2$ voor $\alpha^2 + \beta^2 < \rho^2$. Dit in aanmerking nemende, vindt men:

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = -\frac{2\omega}{\pi(2R + \alpha)^2} \times \\
&\left[\int_b^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left\{ (2R + \alpha) R \rho \left(-\frac{2\pi \sin \Phi}{q} + \frac{2\pi p \sin \Phi}{q(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)} \right) - \frac{(2R + \alpha) R \beta 2\pi}{\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2} + \right. \\
&\quad + R \rho^2 \left(-\frac{4\pi p \sin \Phi \cos \Phi}{q^2} + \frac{2\pi(2p^2 - q^2) \sin \Phi \cos \Phi}{q^2(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)} \right) - \\
&\quad \left. - R \beta \rho \left(-\frac{2\pi \cos \Phi}{q} + \frac{2\pi p \cos \Phi}{q(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)} \right) \right\} d\rho + \\
&\quad + \int_a^{\rho} \left\{ (2R + \alpha) R \rho \left(-\frac{2\pi \sin \Phi}{q} + \frac{2\pi p \sin \Phi}{q(\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2)} \right) - \frac{(2R + \alpha) R \beta 2\pi}{\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2} + \right. \\
&\quad \left. + R \rho^2 \left(-\frac{4\pi p \sin \Phi \cos \Phi}{q^2} + \frac{2\pi(2p^2 - q^2) \sin \Phi \cos \Phi}{q^2(\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - R \beta \rho \left(-\frac{2\pi \cos \Phi}{q} + \frac{2\pi p \cos \Phi}{q(\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2)} \right) \right\} d\rho \right].
\end{aligned}$$

Bij substitutie van p , q , $\cos \Phi$ en $\sin \Phi$ wordt de vorm achter het tweede integraalteeken nul, en men verkrijgt:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{4\omega R\beta}{(2R+\alpha)^2} \int_b^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \left\{ \frac{2R+\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\alpha\rho^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right\} \rho d\rho = \\ &= \frac{2\omega R\beta}{(2R+\alpha)} \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2-b^2}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\omega R\beta\alpha}{(2R+\alpha)^2} \cdot \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-b^4}{(\alpha^2+\beta^2)^2}. \end{aligned}$$

Neemt men voor de bepaling van $\frac{dz}{dt}$

$$(2R+\alpha)^2+\rho^2+\beta^2=s, \quad 2(2R+\alpha)\rho=t\cos\psi, \quad 2\beta\rho=t\sin\psi,$$

dan wordt het eerste deel van $\frac{dz}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega\sqrt{R}}{\pi\sqrt{R+\alpha^3}} \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \left(\log 4\sqrt{\frac{t}{q}} - 2 \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{s}{t} + \cos(\theta+\psi) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \log \left(\frac{p}{q} - \cos(\theta-\Phi) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Verder is:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log(p\pm\cos\Phi) d\Phi &= \int_0^{\pi} \log(p\pm\cos\Phi) d\Phi + \\ + \int_{\pi}^{2\pi} \log(p\pm\cos\Phi) d\Phi &= \int_0^{\pi} \log(p\pm\cos\Phi) d\Phi + \int_0^{\pi} \log(p\mp\cos\psi) dt\psi \\ \text{(waarbij } \Phi \text{ vervangen is door } \pi+\psi) & \\ &= -4\pi \log(\sqrt{p+1}-\sqrt{p-1}), \end{aligned}$$

waardoor het eerste deel van $\frac{dz}{dt}$ overgaat in:

$$\begin{aligned} \frac{\omega\sqrt{R}}{\sqrt{R+\alpha^3}} \int_b^a \rho d\rho \left\{ \left(\log 4\sqrt{\frac{t}{q}} - 2 \right) - \log \left(\sqrt{\frac{s}{t}+1} - \sqrt{\frac{s}{t}-1} \right) + \right. \\ \left. + \log \left(\sqrt{\frac{p}{q}+1} - \sqrt{\frac{p}{q}-1} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\frac{\omega\sqrt{R}}{\sqrt{R+\alpha^3}} \int_b^a \rho d\rho \left\{ \log \left(4 \frac{t}{q} \frac{\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q}}{\sqrt{s+t} - \sqrt{s-t}} \right) - 2 \right\}.$$

Daar $\sqrt{p-q}$ positief moet zijn, zoodat $\sqrt{p-q} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \rho$ is voor $\rho^2 < \alpha^2 + \beta^2$, en $\sqrt{p-q} = \rho - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ voor $\rho^2 > \alpha^2 + \beta^2$, gaat deze vorm over in

$$\begin{aligned} \frac{\omega\sqrt{R}}{\sqrt{R+\alpha^3}} \int_b^a \left\{ \log(4\sqrt{(2R+\alpha)^2 + \beta^2} - 2) \right\} \rho d\rho - \int_b^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \log \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \rho d\rho - \\ - \int_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}^a \rho \log \rho d\rho = \frac{\omega\sqrt{R}a^2}{2\sqrt{R+\alpha^3}} \left\{ \log \frac{4\sqrt{(2R+\alpha)^2 + \beta^2}}{a} - \frac{3}{2} \right\} - \\ - \frac{\omega\sqrt{R}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\sqrt{R+\alpha^3}} - \frac{\omega\sqrt{R}b^2}{2\sqrt{R+\alpha^3}} \left\{ \log 4\sqrt{\frac{(2R+\alpha)^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} - 2 \right\}. \end{aligned}$$

Voor de bepaling van het andere deel van $\frac{dz}{dt}$, moet men nog weten:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{p-q\cos(\theta-\Phi)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos x \cos \Phi - \sin x \sin \Phi)^2}{p-q\cos x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) \cos^2 x + \sin^2 \Phi}{p-q\cos x} dx + \\ + \int_0^{2\pi} \frac{-2\sin \Phi \cos \Phi \sin x \cos x}{p-q\cos x} dx = -\frac{\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi}{q^2} \int_0^{2\pi} \frac{p^2 - q^2 \cos^2 x - p^2}{p-q\cos x} dx + \\ + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \Phi}{p-q\cos x} dx = \frac{\sin^2 \Phi - \cos^2 \Phi}{q^2} \cdot 2\pi p + \frac{p^3(\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) + q^2 \sin^2 \Phi}{q^2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}}. \end{aligned}$$

Weder in aanmerking nemende dat $\sqrt{p^2 - q^2}$ positief moet zijn, verkrijgt men:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\omega R^2}{\pi (R+\alpha)(2R+\alpha)^2} \times \\
& \times \int_b^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\beta^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha R + \rho^2 + 2R\rho \cos\theta - 2R\rho \sin\theta + \rho^2 \cos^2\theta}{\rho^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\rho \cos\theta - 2\beta\rho \sin\theta} d\theta = \\
& = \frac{4\omega R^2}{(R+\alpha)(2R+\alpha)^2} \left\{ \int_b^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \left(-\frac{2\alpha R + 2\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\rho^2(\alpha^2 - \beta^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right) \rho d\rho + \int_b^a 3\rho d\rho \right\} = \\
& = \frac{4\omega R^2}{(R+\alpha)(2R+\alpha)^2} \left\{ -\alpha R - 2\frac{5}{8}\alpha^2 - \frac{7}{8}\beta^2 + \frac{3}{2}a^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b^2(2\alpha R + 2\alpha^2 - \beta^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{b^4(\alpha^2 - \beta^2)}{8(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Brengt men nu de formules voor $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$ in de volgende gedaante:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \omega \beta \left(1 - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \frac{\omega \alpha \beta}{2R} \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{b^4}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right), \\
\frac{dz}{dt} &= -\omega \alpha \left(1 - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + \frac{\omega \alpha^2}{2R} \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{b^4}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right) + \\
& \quad + \frac{\omega}{2R} \left(a^2 \log \frac{8R}{a} + \frac{3}{4} a^2 + b^2 \right) - \\
& \quad - \frac{9\omega}{8R} (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\omega b^4}{8R(\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{\omega b^2}{2R} \log \frac{8R}{\alpha^2 + \beta^2},
\end{aligned}$$

dan blijkt het, dat een punt α, β zich met eene hoeksnelheid

$$\omega \left\{ 1 - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{2R} \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{b^4}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right) \right\}$$

om de circulaire as van den werveling draait, en bovendien alleen eene beweging heeft in de richting der Z-as; deze laatste bestaat uit twee verschillende deelen, een deel onafhankelijk van α , β , terwijl het andere daarvan afhankelijk is; het laatste deel heeft ten gevolge, dat de verschillende deeltjes van den werveling uit elkander gaan, zoodat deze niet stabiel is. Is de ring niet hol, zoodat men $b = 0$ moet nemen, dan is de hoeksnelheid om de circulaire as gelijk aan $\omega \left(1 - \frac{\alpha}{4R}\right)$, terwijl de voortgaande beweging van den werveling wordt

$$\frac{\omega a^2}{2R} \left(\log \frac{8R}{a} + \frac{3}{4} \right).$$

W. THOMSON, COATES, LEWIS, J. J. THOMSON en HICKS, geven voor $\frac{3\omega a^2}{8R}$ iets anders; dit deel is echter voor verschillende punten binnen den werveling verschillend, daar hiervan moet worden afgetrokken $\frac{9(\alpha^2 + \beta^2)}{8\omega R}$, eene grootheid van dezelfde orde als $\frac{3\omega a^2}{8R}$. De eenige term, die de voortgaande beweging van den werveling bepaalt, is slechts $\frac{\omega a^2}{2R} \log \frac{8R}{a}$. Neemt men ω niet overal in den ring constant, maar gelijk aan $\frac{r}{R} \omega_0$, waarbij ω_0 de hoeksnelheid in punten van de circulaire as voorstelt, dan verandert slechts de term, waarin de tweede macht van den straal der doorsnede voorkomt, en de termen van dezelfde orde, wier grootte, zooals wij hierboven zagen, voor verschillende punten verschillend is en die dientengevolge ook van geen belang zijn.

Bevinden zich in de vloeistof meerdere cirkelvormige

wervelingen¹⁾, hetzij met dezelfde as, hetzij met verschillende assen, dan kan de beweging van elk hunner beschouwd worden als te bestaan uit twee deelen, nam. eene beweging, die het gevolg is van den ring zelf, en eene beweging, die het gevolg is van al de overige wervelingen. Tengevolge van de eerste blijft zijn straal dezelfde, maar beweegt hij zich in de richting van zijne as met eene zeer groote constante snelheid; de werking van de andere wervelingen zal zijn straal doen veranderen en hem eene beweging mededeelen, die echter niet zeer groot is, wanneer ten minste niet een dier wervelingen hem oneindig dicht nadert. De resulterende beweging zal dus zijn, dat elk der wervelingen zich met eene zeer groote snelheid voortbeweegt in de richting van zijne as. Hebben zij verschillend gerichte assen, dan zullen zij spoedig zeer ver van elkander verwijderd zijn en dus geen invloed meer op elkander uitoefenen, zoodat in dit geval de verschillende wervelingen zonder merkbare verandering van grootte of vorm zich met constante snelheid blijven bewegen. Zijn echter eenige assen gelijk gericht, dan is het mogelijk dat eenige wervelingen in elkanders nabijheid blijven en dus werkelijk invloed op elkanders stralen uitoefenen. Gaan wij daartoe nog even na den invloed, dien twee wervelingen op elkander kunnen uitoefenen, als zij dezelfde as hebben. Wij zagen hiervoor, dat $\Sigma m r^2 = \text{const.}$ is. Hieruit blijkt dus dat, terwijl de straal van den eenen ring grooter wordt, de andere ring nauwer wordt als tenminste zijne rotatierichting dezelfde is en beide zich dus in dezelfde richting voortbewegen. Daar verder de voortgaande beweging van den ring ongeveer omgekeerd evenredig is

1) Zie hierover J. J. THOMSON, Motion of Vortex Rings. London 1883.

met zijn straal, zal tegelijk met het nauwer worden van den ring zijne snelheid grooter worden. Daar, zooals wij vroeger (zie pag. 54) opmerkten, een roteerend deeltje op een ander deeltje werkt, alsof het er vast mede verbonden is, zoo zal de eerste ring wijder, de volgende nauwer worden, terwijl de eerste zich langzamer en de tweede zich sneller zal gaan bewegen. Het zal dus kunnen gebeuren, dat de tweede ring den eersten inhaalt en er door heen gaat; dan zal echter de tweede ring de eerste worden, zoodat de andere ring hem zal verwijden en dientengevolge zijne snelheid verkleinen, terwijl hij zelf nauwer wordt met toenemende snelheid, waardoor hij weder door den hem voorgaanden zal gaan. Dit zal zich zoo telkens kunnen herhalen, zoodat de ringen beurtelings door elkander heengaan.

Is de bewegingsrichting en dus de rotatierichting der twee ringen tegengesteld, dan zullen zij beide wijder worden, als zij elkander naderen; het zal dan weder kunnen gebeuren, dat de kleinste ring door den grootsten gaat; daarna zal de straal van beide kleiner worden en hunne snelheid dientengevolge grooter, maar weldra zullen zij zoover van elkander verwijderd zijn, dat zij geen invloed meer op elkander uitoefenen. Waren oorspronkelijk de sterkte en grootte der wervelingen dezelfde, dan zal bij het naderen hunne grootte dezelfde blijven; spoedig zullen zij oneindig dicht bij elkander zijn, maar dan zullen hunne stralen ook oneindig groot zijn en hunne voortgaande snelheid oneindig klein; de wervelingen zullen meer en meer het vlak naderen, dat hun afstand middendoor deelt. Alle deeltjes in dat vlak zullen zich in dat vlak blijven bewegen; wij zouden dit vlak dus als een vasten wand kunnen beschouwen en verkrijgen dan de beweging van

een cirkelvormigen werveldraad, wiens vlak evenwijdig met een plat vlak is, en wiens bewegingsrichting loodrecht op dat vlak staat.

Gaan wij nu nog eens na, evenals vroeger bij rechtlijnige werveldraden geschied is, de beweging van cirkelvormige werveldraden in begrensde ruimten.

Zij bijv. een werveldraad symmetrisch geplaatst in een bol; dit vraagstuk is opgelost door LEWIS¹⁾, door aan te toonen, dat een andere cirkelvormige werveldraad, die met den eersten dezelfde as heeft, zoo buiten den bol geplaatst kan worden, dat de vloeistof op het oppervlak van dien bol geen normale snelheid bezit. Zijn de coördinaten van den nieuwen draad R_1 en Z_1 , zoodat

$$k^2 = \frac{4 R r}{(R + r)^2 + (Z - z)^2} = \frac{4 R_1 r}{(R_1 + r)^2 + (Z_1 - z)^2} \quad (101)$$

is voor alle punten van den bol, welks straal is a . De voorwaarde, waaraan r en z hebben te voldoen, is $r^2 + z^2 = a^2$.

Aan vergelijking (101) wordt voldaan, wanneer

$$\left. \begin{aligned} R Z_1 &= R_1 Z & \text{en} \\ R R_1 + Z Z_1 &= a^2 \end{aligned} \right\} \dots (102)$$

is, waaruit men kan afleiden:

$$(R^2 + Z^2)(R_1^2 + Z_1^2) = a^4.$$

De beide werveldraden zijn dus gelegen op denzelfden rechten cirkelvormigen kegel op zulke afstanden van den top, dat hun product gelijk is aan het vierkant op den straal van den bol, m. a. w. de eene werveldraad is het beeld van den anderen. Verder zijn nu de grootheden U

1) LEWIS, On the images of vortices in a spherical vessel. Quart. Journ. of Math. XVI.

en $\frac{dU}{dk}$ op het oppervlak van den bol voor elk der beide werveldraden even groot. Wil bovendien de normale snelheid op den bol nul zijn, dan moeten natuurlijk de werveldraden tegengestelde sterkte hebben; hieraan wordt voldaan voor

$$m \sqrt{R} = -m_1 \sqrt{R_1},$$

want:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{dU}{dk} k \left\{ m \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{Z-z}{(R+r)^2 + (Z-z)^2} + m_1 \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{Z_1-z}{(R_1+r)^2 + (Z_1-z)^2} \right\}$$

$$\frac{dz}{dt} = U \left\{ \frac{m}{2r} \sqrt{\frac{R}{r}} + \frac{m_1}{2r} \sqrt{\frac{R_1}{r}} \right\} + \frac{dU}{dk} k \left\{ \frac{m}{2r} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{R^2-r^2 + (Z-z)^2}{(R+r)^2 + (Z-z)^2} + \frac{m_1}{2r} \sqrt{\frac{R_1}{r}} \frac{R_1^2-r^2 + (Z_1-z)^2}{(R_1+r)^2 + (Z_1-z)^2} \right\}$$

wordt dan:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \frac{Z-z}{(R+r)^2 + (Z-z)^2} - \frac{Z_1-z}{(R_1+r)^2 + (Z_1-z)^2} \right\}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left\{ \frac{R^2-r^2 + (Z-z)^2}{(R+r)^2 + (Z-z)^2} + \frac{R_1^2-r^2 + (Z_1-z)^2}{(R_1+r)^2 + (Z_1-z)^2} \right\},$$

waaruit men door gebruik te maken van (101) afleidt:

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{z}{r}.$$

Het beeld van den gegeven werveldraad ten opzichte van den bol is dus geplaatst buiten den bol, terwijl de sterkte der beide draden omgekeerd evenredig is met den vierkantswortel uit hunne afstanden tot het middelpunt van den bol.

Van zelf komt men nu tot de vraag, of elke schikking van werveldraden binnen den vasten bol een daarmede

correspondeerend stelsel van beelden heeft, zoodanig dat vloeistofdeeltjes aan het oppervlak van den bol slechts eene tangentiëele beweging hebben.

Zij A (fig. 7) het middelpunt van den bol, BB' een element (ds) van een werveldraad en CC' zijn beeld (ds_1), O het snijpunt van ds en ds_1 ; verder is

$$OB = OC \quad \text{en} \quad ds : ds_1 = AB : AC.$$

Neemt men O aan als oorsprong van coördinaten, OC tot Y-as en de X-as in het vlak OBC; zijn de coördinaten van

$$\begin{array}{l} A \quad a, b, 0, \\ B \quad x_1, y_1, 0, \\ C \quad 0, y_2, 0. \end{array}$$

De snelheidscomponenten van een punt P (x, y, z) zijn door de werking van ds en ds_1 (zie pag. 54):

$$\begin{aligned} u &= \frac{m ds}{2 \pi r^2} \sin OBP \cdot \alpha + \frac{m_1 ds_1}{2 \pi r_1^2} \sin OCP \cdot \alpha_1 = \\ &= \frac{m ds}{2 \pi r^2} \cdot \frac{y_1 z}{y_2 r} + \frac{m_1 ds_1}{2 \pi r_1^2} \cdot \frac{z}{r_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{m ds}{2 \pi r^2} \sin OBP \cdot \beta + \frac{m_1 ds_1}{2 \pi r_1^2} \sin OCP \cdot \beta_1 = \\ &= - \frac{m ds}{2 \pi r^2} \cdot \frac{z x_1}{y_2 r}, \quad \text{want} \quad \beta_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{m ds}{2 \pi r^2} \sin OBP \cdot \gamma + \frac{m_1 ds_1}{2 \pi r_1^2} \sin OCP \cdot \gamma_1 = \\ &= - \frac{m ds}{2 \pi r^2} \cdot \frac{x y_1 - x_1 y}{y_2 r} - \frac{m_1 ds_1}{2 \pi r_1} \cdot \frac{x}{r_1}, \end{aligned}$$

als α, β, γ zijn de richtingscosinussen van den normaal op vlak OBP, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die van den normaal op vlak OCP, terwijl r en r_1 achtereenvolgens de afstanden van P tot B en C voorstellen.

Verplaatst men den oorsprong naar A en zijn x', y' de coördinaten van B, x'_1, y'_1 die van C, dan wordt:

$$u = \frac{m \bar{d} s}{2 \pi r^3} \cdot \frac{y' + b}{y'_1 + b} \cdot z + \frac{m_1 \bar{d} s_1}{2 \pi r_1^3} \cdot z,$$

$$v = -\frac{m \bar{d} s}{2 \pi r^3} \cdot \frac{z(x' + a)}{(y'_1 + b)},$$

$$w = -\frac{m \bar{d} s}{2 \pi r^3} \cdot \frac{(x + a)(y' + b) - (x' + a)(y + b)}{(y'_1 + b)} - \frac{m_1 \bar{d} s_1}{2 \pi r_1^3} (x + a).$$

Zal de normale snelheid aan het oppervlak van den bol, veroorzaakt door deze beide deeltjes, nul zijn, dan moet

$$u x + v y + w z = 0 \quad \text{zijn.}$$

Dit geeft

$$-\frac{m \bar{d} s}{2 \pi r^3} \cdot \frac{z(a y' - b x')}{(y'_1 + b)} - \frac{m_1 \bar{d} s_1}{2 \pi r_1^3} \cdot a z = 0.$$

Daar verder $y' : y'_1 = x' : x'_1$ en $a = -x'$ is, wordt deze voorwaarde

$$\frac{m \bar{d} s}{r^3} \cdot x' = -\frac{m_1 \bar{d} s_1}{r_1^3} \cdot x'_1;$$

maar $\bar{d} s : \bar{d} s_1 = x' : x'_1 = R : R_1$, ($R = AB$, $R_1 = AC$) dus

$$-\frac{m R^2}{m_1 R_1^2} = \frac{r^3}{r_1^3} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{want} \quad \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2},$$

omdat B en C wederkeerig elkanders beeldpunten zijn.

Wij vinden dus $m \sphericalangle R = -m_1 \sphericalangle R_1$, zoodat de sterkten der werveldraden tegengesteld in teeken zijn en zich verhouden omgekeerd evenredig met de vierkantswortels uit de afstanden der elementen van het middelpunt van den bol, evenals wij vonden voor het geval, dat de werveldraad symmetrisch in den bol geplaatst was.

Elk element van een werveldraad heeft buiten den bol dus zijn beeld, zoodat zij te zamen aan de vloeistofdeeltjes aan het oppervlak van den bol eene tangentiële snelheid geven. De verschillende beelden van de elementen van een werveldraad vormen echter niet altijd een mogelijken werveldraad, daar zijne sterkte niet overal dezelfde is; m toch is constant, wil nu m_1 ook constant zijn, dan moet $\sqrt{\frac{R}{R_1}}$ of $\frac{R}{a}$, d. w. z. R constant zijn.

Wij komen dus tot het besluit, dat de beelden van werveldraden alleen dan werkelijk kunnen bestaan, als de werveldraden symmetrisch in den bol geplaatst zijn of m. a. w. als zij gelegen zijn op bollen concentrisch met den vasten bol. De werveldraden behoeven in dat geval zelfs niet cirkelvormig te zijn.

De snelheidscomponenten van den werveldraad zijn volgens (96), (97), (100), in aanmerking nemende, dat U_1 het deel van U aangeeft, betrekking hebbende op het beeld:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R}} k_1 \frac{Z_1 - Z}{(R + R_1)^2 + (Z_1 - Z)^2} \cdot \frac{dU_1}{dk_1},$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{m}{2\pi R} \left(\log \frac{4}{k'} - 2 \right) + \frac{m_1}{2\pi R} \sqrt{\frac{R_1}{R}} \left\{ U_1 + \frac{dU_1}{dk_1} \cdot k_1 \cdot \frac{R_1^2 - R^2 + (Z_1 - Z)^2}{(R_1 + R)^2 + (Z_1 - Z)^2} \right\},$$

terwijl $k_1^2 = \frac{4R R_1}{(R_1 + R)^2 + (Z_1 - Z)^2}$ en $k' = \frac{\rho}{2R}$ is (ρ straal doorsnede werveldraad).

Daar, zooals wij zagen, $m\sqrt{R} = -m_1\sqrt{R_1}$ is, verkrijgt men

$$\frac{dR}{dt} = \frac{m}{\pi} k_1 \frac{Z_1 - Z}{(R + R_1)^2 + (Z_1 - Z)^2} \cdot \frac{dU_1}{dk_1},$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{m}{2\pi R} \left(\log \frac{8R}{\rho} - 2 \right) - \frac{m}{2\pi R} \left\{ U_1 + \right. \\ \left. + \frac{dU_1}{dk_1} \cdot k_1 \cdot \frac{R_1^2 - R^2 + (Z_1 - Z)^2}{(R_1 + R)^2 + (Z_1 - Z)^2} \right\}.$$

Wanneer de werveldraad en zijn beeld betrekkelijk ver van elkander verwijderd zijn, zal de eerste term van $\frac{dZ}{dt}$ verreweg de grootste zijn, zoodat de draad zich in positieve richting zal bewegen. Daarmede zal gepaard gaan een zich verwijden van den werveldraad, zoodat deze tegelijkertijd dichterbij het oppervlak van den bol komt; dientengevolge komen ook werveldraad en beeld dichterbij elkander en nemen U_1 en $\frac{dU_1}{dk_1}$ toe. Daar $\frac{dU_1}{dk_1}$ nadert tot de grens $\frac{1}{1 - k_1^2}$, zal $\frac{dZ}{dt}$ eindelijk negatief worden, zoodat de werveldraad teruggaat, terwijl hij steeds wijder wordt; dit zal zoolang duren, totdat het vlak van den werveldraad door het middelpunt gaat, omdat dan $Z_1 - Z$ negatief wordt, zoodat van af dat oogenblik zijn straal kleiner wordt; vervolgens zal het deel van $\frac{dZ}{dt}$ tusschen de accolades weder kleiner worden, zoodat op een zeker oogenblik $\frac{dZ}{dt}$ positief wordt en de werveldraad zich in positieve richting gaat bewegen steeds nauwer en nauwer wordende, totdat zijn vlak weder door het middelpunt gaat.

Fig. 8 geeft een beeld van de beweging; B en B' stellen de doorsnede van den werveldraad voor op het oogenblik, dat zijn vlak door het middelpunt gaat en hij zich in positieve richting beweegt, terwijl A en A' de doorsnede vormen, als zijn vlak zich in negatieve richting door het middelpunt beweegt.

Gaat het vlak van den werveldraad door het middelpunt van den bol en is juist op dat oogenblik de voortgaande snelheid nul, dan is ook tevens $\frac{dR}{dt} = 0$, want $Z_1 = Z$; de beweging binnen den bol is dan stationnair; hoe groot zal in dit geval de straal van den werveldraad zijn?

Het is duidelijk, dat R dan weinig van a zal verschillen, zoodat men mag nemen $R = a - \delta$, $R_1 = a + \delta$, waarbij δ zeer klein is; dan is:

$$U_1 = \log \frac{4}{\sqrt{1-k_1^2}} - 2 = \log \frac{4a}{\delta} - 2, \quad \frac{dU_1}{dk_1} = \frac{a^2}{\delta^2}.$$

Men vindt dan:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{m}{2\pi R} \left\{ \log \frac{8R}{\rho} - 2 - \log \frac{4a}{\delta} + 2 - \frac{a}{\delta} \right\} = 0$$

$$\log \frac{2R\delta}{a\rho} = \frac{a}{\delta} \quad \text{of} \quad \log \frac{2\delta}{\rho} = \frac{a}{\delta}.$$

Is $a = 10\delta$, dan vindt men overgaande tot Briggsche logarithmen:

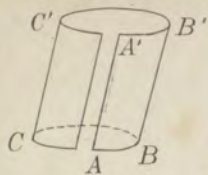
$$\log \frac{2\delta}{\rho} = 10 \times 0,43429,$$

$$\frac{2\delta}{\rho} = 22024,$$

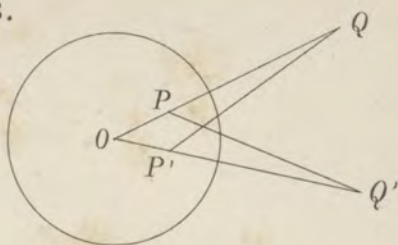
$$\rho = \frac{\delta}{11012} = \frac{a}{110120},$$

eene uitkomst, waarvan de grootte ons blijkbaar recht geeft tot bovenstaande benaderingen.

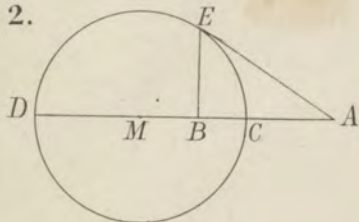
1.



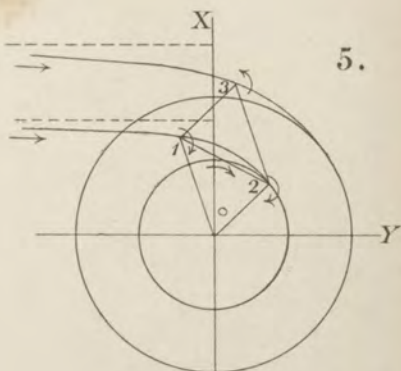
3.



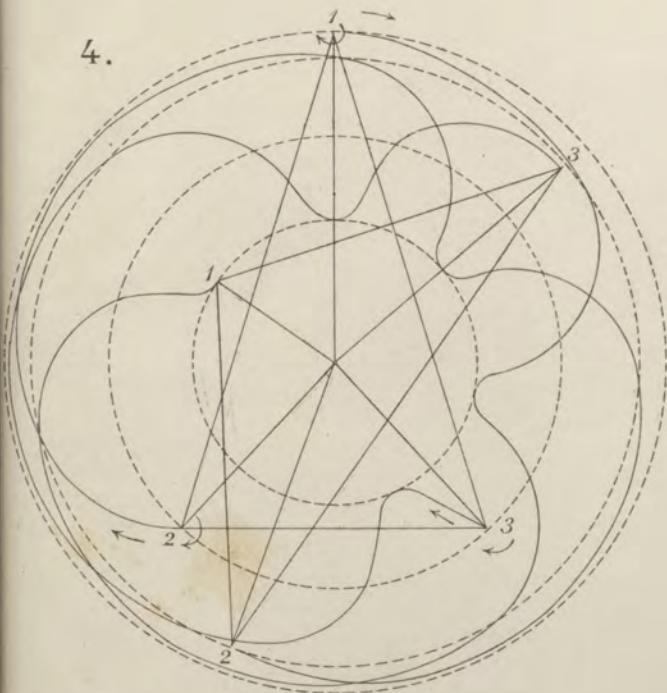
2.



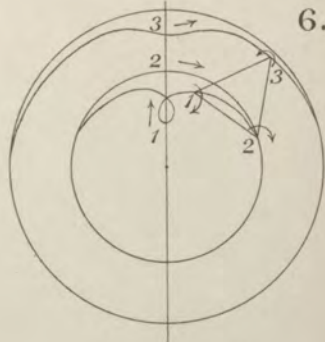
5.



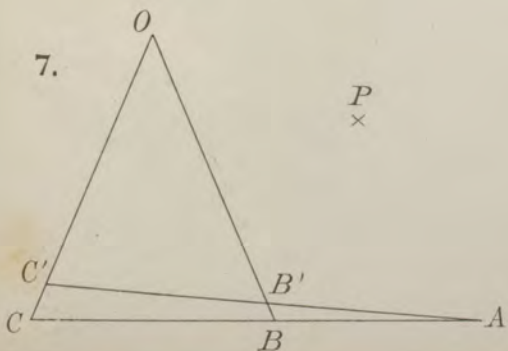
4.



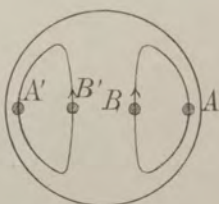
6.

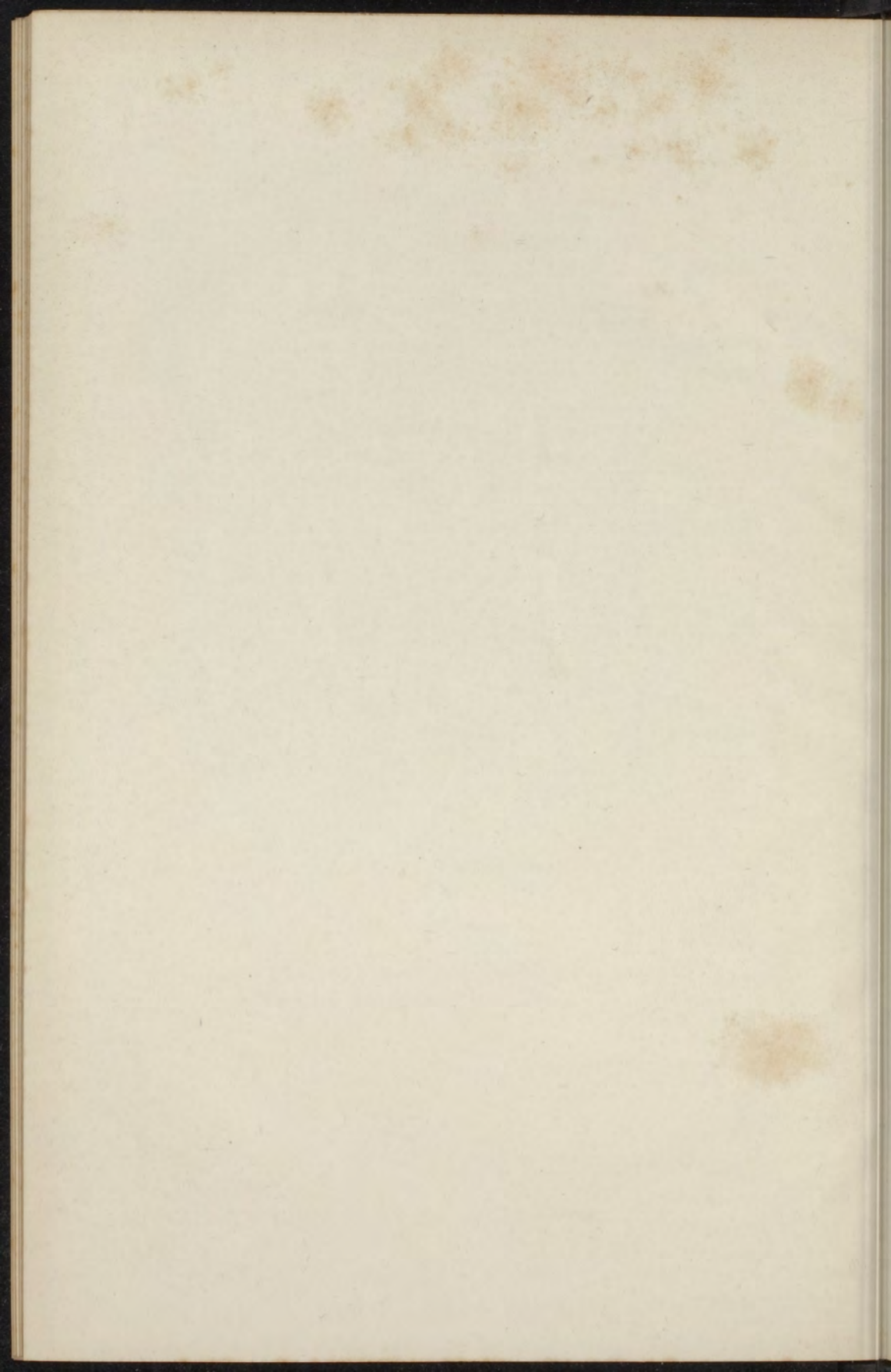


7.



8.





STELLINGEN.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

STELLINGEN.



I.

De bezwaren van BERTRAND tegen HELMHOLTZ zijn voornamelijk het gevolg van de verwarring omtrent het begrip rotatie.

II.

De beschouwingen van Dr. QUINT omtrent het verkrijgen van de baan van een werveldraad uit de stroomfunctie zijn onjuist.

III.

De gevolgtrekking, die KIRCHHOFF in zijne „Vorlesungen über Mathematische Physik”, pag. 265, uit de beweging van den elliptischen wervelcylinder maakt, dat nl. een wervelplaat in rust zou blijven, is onjuist.

IV.

De benaderingen van COATES, Quart. Journ. XVI, voor de snelheid van een punt binnen een cirkelvormigen werfelring, zijn onnauwkeurig.

V.

In hoofdstuk IV van LAMB's „Motion of Fluids" moet overal het woord „streamlines" vervangen worden door „lines of motion".

VI.

Het bewijs van de reeks van FOURRIER, voorkomende in THOMSON and TAIT (Nat. Phil. § 77), is fout.

VII.

De term „Condensor" voor verlichtings-apparaten is, in tegenstelling, van wat ABBE meent, te verdedigen.

VIII.

Ten onrechte meenen NÄGELI und SCHWENDENER (Das Mikroskop, pag. 15), dat een dispansief systeem van reëele voorwerpen slechts virtueele beelden kan opleveren.

IX.

De optische werking van gegolfde membranen is in NÄGELI und SCHWENDENER (Das Mikroskop, pag. 215) verkeerd beschreven.

X.

De verklaring van CROOKES omtrent de proeven van TORRE is onvoldoende.

XI.

Uit de spectroscopische onderzoekingen van de zon blijkt het, dat ijzer niet tot de elementen behoort.

XII.

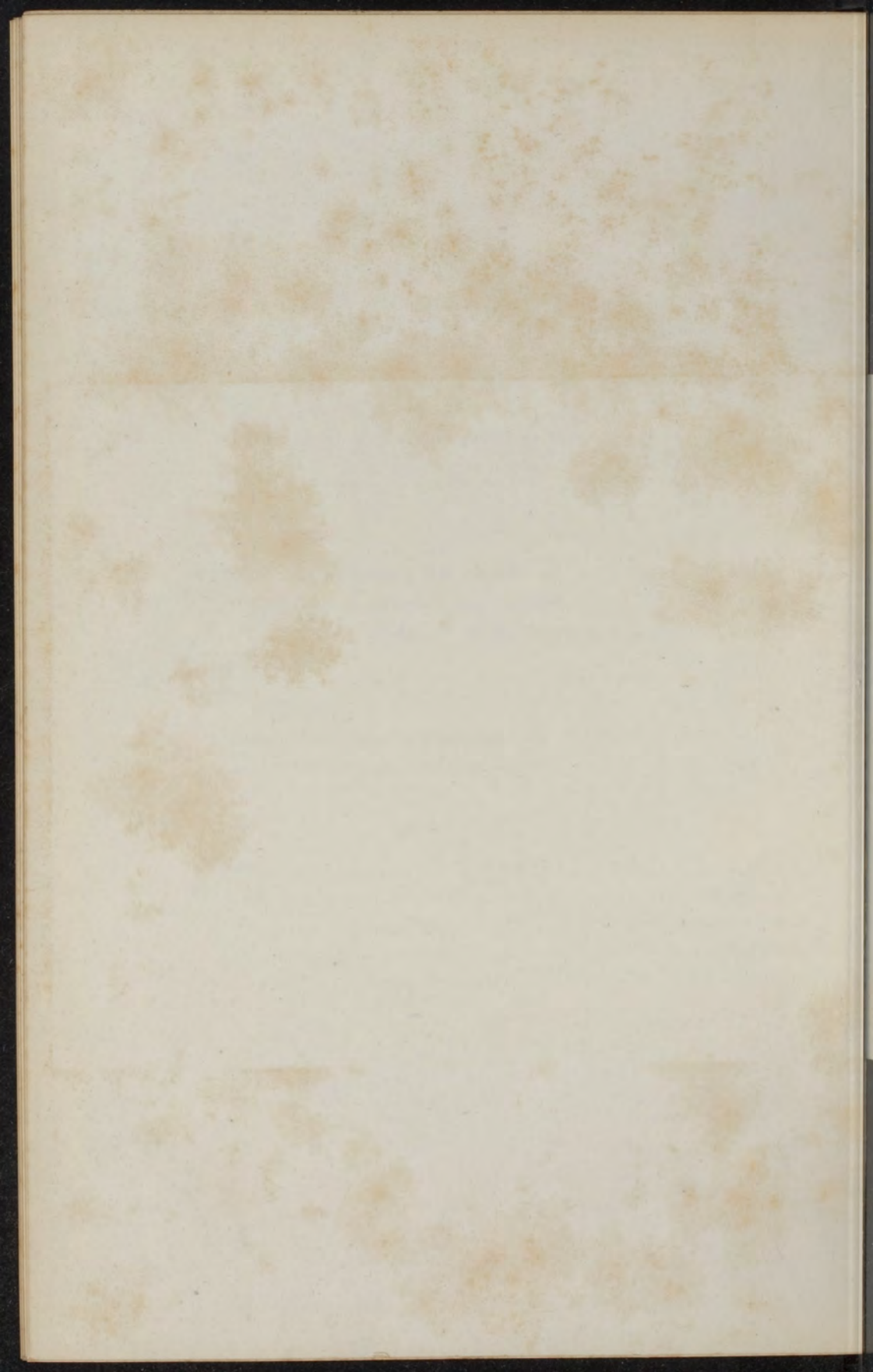
Het is wenschelijk de theorie der rekenkunde en der algebra in de lagere klassen van Hoogere Burgerscholen en Gymnasia zooveel mogelijk te beperken.

XIII.

Het aantal uren op de Gymnasia volgens het laatste leerplan voor de wiskunde uitgetrokken, is voldoende.

XIV.

Het is af te keuren, dat het diploma van het eindexamen eener Hoogere Burgerschool met 5jarigen cursus wel voldoende wordt geacht voor de verdere opleiding van aanstaande artsen, maar niet voor die van doctoren in de medische en philosophische wetenschappen.



E R R A T A.

Bladz. 29 alle vormen $\frac{d\bar{u}}{dt}$, $\frac{d\bar{v}}{dt}$, $\frac{d\bar{w}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{u}}{dt da}$ enz.

te vervangen door $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial a}$ enz.

Bladz. 71 r. 2 v. o. m_i te vervangen door i .

	91	" 5	"	$\prod_{k=\frac{1}{2}n-1}$		"	"	$\prod_{k=1}$	$\prod_{k=\frac{1}{2}n-1}$
--	----	-----	---	----------------------------	--	---	---	---------------	----------------------------

	91	" 2	"	$\frac{2k\pi}{x}$		"	"	$\frac{2k\pi}{n}$
--	----	-----	---	-------------------	--	---	---	-------------------

	108	" 1	"	$C_2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$		"	"	$C_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
--	-----	-----	---	--	--	---	---	--

	150	" 5	"	$\frac{m_1 d s_1}{2\pi r_1}$		"	"	$\frac{m_1 d s_1}{2\pi r_1^2}$
--	-----	-----	---	------------------------------	--	---	---	--------------------------------

