3

VRAAGSTUKKEN UIT EINSTEIN'S GRAVITATIETHEORIE

W. VAN DEN BERG

VRAAGSTUKKEN UIT EINSTEIN'S
:: GRAVITATIETHEORIE ::

VRAAGSTUKKEN UIT EINSTEIN'S GRAVITATIETHEORIE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS R. P. VAN CALCAR, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, TE VERDEDIGEN OP MAANDAG DEN 17EN JANUARI 1921, DES NAMIDDAGS TE 4 UREN, DOOR

WILLEM VAN DEN BERG, GEBOREN TE AMSTERDAM.

DRUKKERIJ DE ERVEN LOOSJES — HAARLEM — 1920

AAN MIJNE OUDERS
EN
AAN MIJNE VROUW.

Bij de voltooiing van dit proefschrift past het mij, een woord van hartelijken dank te brengen aan U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige faculteit der Amsterdamsche Universiteit voor het degelijke en opwekkende onderwijs, dat ik gedurende mijn studententijd van U mocht genieten en voor het aandeel, dat gij langs dezen weg tot mijn wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Moeilijk onder woorden te brengen is de dank, die ik verschuldigd ben aan U, hooggeleerde LORENTZ, die van uw kostbaren tijd heeft willen afnemen, om mij te steunen bij de voorbereidende studie voor en de bewerking van dit proefschrift. Dankbaar herinner ik mij de gesprekken, die ik met U in uw studeerkamer had. Steeds oefende een onderhoud met U een opheffenden invloed, ook in moreelen zin, op mij uit. Uw groote kennis, uw klaarheid, uw eenvoud en welwillendheid, uw rust en nauwgezetheid, zoowel in 't groote als in 't kleine, zij vormen te zamen een schoon harmonisch geheel. Moge het beeld daarvan ons, uwen leerlingen, èn bij onzen wetenschappelijken arbeid, èn in onzen dagelijkschen omgang met anderen, helder voor den geest staan.

INHOUD.

INLEIDING.

1. In dit proefschrift zullen eenige betrekkelijk onsamenhangende vraagstukken worden behandeld, die zich in EINSTEIN's gravitatietheorie voordoen. Ter inleiding moge er aan herinnerd worden, dat de grondgedachte van de algemeene relativiteitstheorie deze is, dat de algemeene vergelijkingen der physica steeds denzelfden vorm hebben, hoe men de coördinaten ook kiest. Hierbij is sprake van vier coördinaten in overeenstemming met het feit, dat plaats en tijd van een physisch gebeuren bepaald zijn door vier getallen. De vier coördinaten onderscheiden we als x_1 , x_2 , x_3 en x_4. Kenmerkend voor de theorie is zoodoende de voorstelling der verschijnselen in een vier-dimensionale uitgebreidheid.

2. Een groot onderscheid tusschen de oude theorie van NEWTON en de nieuwe van EINSTEIN is nu, dat in de eerste het gravitatieveld bepaald wordt door één potentiaal, terwijl in de laatste het veld in elk punt tien potentialen heeft. EINSTEIN stelt deze potentialen voor door g_{ab}, waarin de indices a en b de waarden van 1 tot en met 4 kunnen aannemen ($g_{ab} = g_{ba}$). De grootheden g_{ab} zijn functies van de coördinaten x_1 , x_2 , x_3 , x_4. Bij overgang naar een ander coördinatensysteem x'_1 , x'_2 , x'_3 , x'_4 krijgen de gravitatiepotentialen in een ruimte-tijdpunt andere waarden: g'_{ab}. Deze waarden zijn zóó, dat de uitdrukking

$$d\,s^2 = \Sigma\,(ab)\,g_{ab}\,dx_a\,dx_b$$

invariant is, dus $\Sigma\,(ab)\,g_{ab}\,dx_a\,dx_b = \Sigma\,(ab)\,g'_{ab}\,dx'_a\,dx'_b$ . . . (1)

3. Het blijkt nu mogelijk te zijn, alle vergelijkingen in covarianten vorm te schrijven, waardoor dus de beschrijving der ver-

schijnselen onafhankelijk van de keuze der coördinaten wordt, b.v. de voortplantingssnelheid van een lichtstraal wordt bepaald door

$$ds^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

de beweging van een stoffelijk punt onder invloed van het gravitatieveld door de voorwaarde

$$\delta \int ds = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

indien daarbij de begin- en eindwaarden der vier cöordinaten niet gevarieerd worden. We herinneren er verder aan, dat MINKOWSKI het begrip „wereldlijn" heeft ingevoerd en dat EINSTEIN er op gewezen heeft dat al onze waarnemingen betrekking hebben op onderlinge ontmoetingen van wereldlijnen. Men zou den loop der wereldlijnen en de ligging der ontmoetingspunten zuiver meetkundig kunnen beschrijven en op deze wijze eene mededeeling kunnen doen over de waargenomen verschijnselen en de verschillende betrekkingen, die er tusschen deze verschijnselen bestaan. Prof. LORENTZ heeft een aantal voorbeelden van deze meetkundige beschrijving der natuurverschijnselen gegeven in eenige vergaderingen der K. A. v. W. [1]). Zoo zegt b.v. (3) dat de wereldlijn van een stoffelijk punt in een gravitatieveld een geodetische lijn in de vierdimensionale ruimte-tijduitgebreidheid is, indien we onder ds^2 verstaan het kwadraat van de lengte van een lijnelement in die uitgebreidheid.

4. Vooropgesteld wordt de hypothese, dat in een gravitatievrij veld de coördinaten zóó gekozen kunnen worden, dat overal geldt:

$$g_{ab} = 0 \text{ voor } a \neq b \; ; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \; ; g_{44} = 1, \text{ d. w. z.}$$

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + dx_4^2.$$

De lichtsnelheid is dan volgens (2) gelijk één, terwijl volgens (3) stoffelijke punten zich rechtlijnig en gelijkmatig bewegen. Bovenstaande waarden van de g's zullen we in het volgende steeds de „normale" waarden noemen. 't Is duidelijk, dat de zooeven ingevoerde ruimtecoördinaten x_1, x_2, x_3 rechthoekig zijn.

---

[1]) Vergadering van 26 Febr. 1916 en van 25 Maart 1916.

Ook in gevallen, waar wel een gravitatieveld bestaat, zullen we dikwijls een rechthoekig coördinatenstelsel bezigen.

5. Gaat men bij de beschrijving van een of ander physisch, b.v. electromagnetisch, verschijnsel, over van een coördinatenstelsel x_1, x_2, x_3, x_4 tot een ander x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, dan zal men — evenals er andere waarden aan de zwaartekrachtspotentialen worden toegekend — ook aan allerlei andere physische grootheden als b.v. componenten der electrische en magnetische kracht, energie per volume-eenheid, componenten der spanningen in het electromagnetische veld, enz., andere waarden moeten geven. Deze nieuwe waarden, steeds door accenten aangegeven, zullen door bepaalde betrekkingen met de oorspronkelijke waarden samenhangen. Bedoelde betrekkingen zijn de „transformatieformules". Zij moeten de covariantie der vergelijkingen waarborgen. Met het oog op het volgende willen we een aantal dezer transformatieformules vermelden en daarbij tegelijkertijd eenige formules uit de gravitatietheorie geven.

6. We stellen ons dus voor, dat we van een coördinatenstelsel zonder accenten overgaan naar één met accenten en stellen nu:

$$p_{ab} = \frac{\partial x_a}{\partial x'_b} \quad ; \quad \pi_{ba} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_b}$$

Dan is $dx_a = \Sigma(b)\, p_{ab}\, dx'_b \quad ; \quad dx'_a = \Sigma(b)\, \pi_{ba}\, dx_b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$

We merken op, dat voor de transformatiecoëfficiënten p en π de volgende betrekkingen gelden:

$\Sigma(b)\, p_{ba}\, \pi_{bc} = \delta^c_a$, als we onder δ^c_a de eenheid verstaan, indien $a = c$ en nul als $a \neq c$. De determinant op de 16 grootheden p_{ab} wordt kortweg p genoemd.

Uit (1) leidt men nu gemakkelijk de transformatieformules voor de gravitatiepotentialen af:

$$g'_{ab} = \Sigma(cd)\, p_{ca}\, p_{db}\, g_{cd} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Stelt men den symmetrischen determinant op de grootheden g_{ab} door g voor, dan is $\sqrt{-g'} = p\sqrt{-g}$ . . . . (6)

zoodat voor reëele transformaties van „normale coördinaten" naar andere coördinaten $\sqrt{-g'}$ altijd bestaanbaar is, daar voor normale coördinaten $\sqrt{-g}$ gelijk aan de eenheid is.

Vervolgens maken we gebruik van grootheden, verkregen door de onderdeterminanten van g door g te deelen. Deze „genormeerde" onderdeterminanten worden voorgesteld door g^{ab}. Ook voor deze gelden orthogonale betrekkingen als $\Sigma\,(a)\; g_{ac}\, g^{ab} = \delta_c^b$, terwijl de transformatie dezer grootheden gegeven wordt door

$$g'^{ab} = \Sigma\,(c\,d)\; \pi_{ca}\, \pi_{db}\, g^{cd}.$$

Ingevoerd wordt de spanningsenergietensor der materie, waarvan de componenten voorgesteld worden door $\overline{T}_a^b$. Hier is $\overline{T}_1^1$, wat in de elasticiteitstheorie X_x genoemd wordt. Evenzoo is $\overline{T}_1^2 = X_y$ enz.; $-\overline{T}_1^4$, $-\overline{T}_2^4$ en $-\overline{T}_3^4$ zijn de componenten van de hoeveelheid van beweging per volume-eenheid, $\overline{T}_4^1$ enz., die van den energiestroom, terwijl $\overline{T}_4^4$ de energie per volume-eenheid voorstelt. In het algemeen is $\overline{T}_b^a \neq \overline{T}_b^a$ [1]).

De transformatieformules dezer grootheden zijn:

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\,\overline{T'}_c^b = \Sigma\,(kl)\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,p_{kc}\,\pi_{lb}\;\overline{T}_k^l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Door (7) wordt de invariantie gewaarborgd van de z.g. impulsenergievergelijkingen:

$$\Sigma\,(b)\,\frac{\partial\,\overline{T}_c^b}{\partial x_b} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\Sigma\,(p\,q)\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_c}\,T_{pq} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hierin is gesteld $T_{pq} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\Sigma(a)\,g_{pa}\;\overline{T}_q^a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8a)$

Verder heeft men:

$T'_{ac} = \Sigma\,(m\,k)\,p_{ma}\,p_{kc}\,T_{mk} \quad \ldots\ldots \quad (9)$; $\qquad T_{ac} = T_{ca} \quad \ldots\ldots \quad (10)$

---

[1]) De streep boven de tensorcomponenten zal beteekenen, dat we te doen hebben met wat EINSTEIN een volumetensor noemt. In de transformatieformules voor deze tensoren komt altijd de determinant p als factor voor.

Ten slotte wordt nog ingevoerd de scalar T, die gedefinieerd wordt door:

$$T = \Sigma\,(c\,d)\,g^{cd}\,T_{cd} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (11)$$

We wijzen er op, dat in (8) het tweede lid kan opgevat worden als de impuls, die in de x_c-richting per volume-eenheid door het gravitatieveld op de materie wordt overgedragen of zoo men wil als de kracht, die het veld in die richting op de materie in de volume-eenheid uitoefent.

7. Natuurlijk worden de electromagnetische grondvergelijkingen anders dan in de oude theorie. Wij voeren een tensor ψ_{ab} in met de eigenschap: $\psi_{ab} = -\psi_{ba}$, zoodat $\psi_{ab} = 0$ voor $a = b$. Verder stellen wij $\psi^*_{ab} = \psi_{a'b'}$, indien de volgorde $a\ b\ a'\ b'$ een even permutatie der cijfers 1 2 3 4 voorstelt.

Een nieuwe tensor $\overline{\psi}^{cd}$ worde gedefinieerd door de betrekking:

$$\overline{\psi}^{cd} = \sqrt{-g}\;\Sigma\,(a\,b)\,g^{ca}\,g^{db}\,\psi_{ab} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (12)$$

waaruit door middel van de orthogonale betrekkingen tusschen de grootheden g_{ab} en g^{ab} volgt:

$$\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\;\Sigma\,(c\,d)\,g_{ca}\,g_{db}\;\overline{\psi}^{cd} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (13)$$

We noemen ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{34} de componenten $E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}$ der electrische kracht, evenals ψ_{23}, ψ_{31}, ψ_{12} de componenten B_{x_1}, B_{x_2}, B_{x_3} der magnetische inductie.

Verder $\overline{\psi}^{23}$, $\overline{\psi}^{31}$, $\overline{\psi}^{12}$ de componenten H_{x_1}, H_{x_2}, H_{x_3}, der magnetische kracht, evenals $-\overline{\psi}^{14}$, $-\overline{\psi}^{24}$, $-\overline{\psi}^{34}$ de componenten D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3} der electrische verplaatsing. Door deze notatie èn door die van de ongestreepte ψ's komt tot uiting de correspondentie tusschen de electromagnetische grondvergelijkingen voor een gravitatieveld en de oude vergelijkingen voor het veld binnen in de materie [1]). Natuurlijk wordt weer $\overline{\psi}^{cd} = \overline{\psi}^{dc}$. Ten slotte schrijven wij $\overline{w}_a$ voor $\varrho\, v_a$, als ϱ de dichtheid der electriciteit en v_a de snelheidscomponent in de x_a-richting beduidt. $v_4 = 1$.

---

[1]) Zie LAUE, Das Relativitätsprinzip pag. 143 en 144.

De electromagnetische grondvergelijkingen worden nu:

$$\Sigma\,(b)\,\frac{\partial\,\psi^*{}_{ab}}{\partial\,x_b} = 0 \;\ldots\ldots\; (14); \quad \Sigma\,(b)\,\frac{\partial\,\overline{\psi}^{ab}}{\partial\,x_b} = \overline{w}^a \;\ldots\ldots\; (14a)$$

Bij gebruikmaking van onderstaande transformatieformules op bovenstaande grootheden blijven de grondvergelijkingen invariant tegenover een willekeurige verandering van coördinatenstelsel:

$$\left.\begin{aligned} \psi'_{ab} &= \Sigma\,(c\;d)\,p_{ca}\;p_{db}\;\psi_{cd} \\ \overline{\psi}'^{ab} &= \Sigma\,(c\;d)\,p\;\pi_{ca}\;\pi_{db}\;\overline{\psi}_{cd} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$\overline{w}'_a = \Sigma\,(b)\,p\;\pi_{ba}\,\overline{w}^b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

8. Van fundamenteel belang zullen in deze nieuwe theorie zijn de differentiaalvergelijkingen, waaruit bij gegeven spanningsenergietensor $\overline{T}_a^b$ der materie, de g_{ab}'s moeten bepaald worden. Ook van deze vergelijkingen wordt verlangd, dat ze tegenover een willekeurige coördinatentransformatie invariant zullen zijn. In hoofdstuk III, waar o. a. berekend wordt het gravitatieveld, dat door een electron met zijn veld veroorzaakt wordt, zullen bedoelde differentiaalvergelijkingen vermeld worden.

9. Hier moge een opmerking volgen betreffende de impulsenergie-vergelijkingen (8), en wel in 't bijzonder met betrekking tot het rechterlid daarvan, indien de daarin voorkomende „materieele" tensor die is van een electromagnetisch stelsel. Prof. Lorentz geeft dan aan het tweede lid een anderen vorm. We willen ons tot taak stellen, de gelijkwaardigheid der beide uitdrukkingen voor het rechterlid aan te toonen. Het zal blijken, wat trouwens te verwachten was, dat het optreden der tien gravitatiepotentialen in de vergelijkingen der theorie het rekenwerk belangrijk ingewikkelder maakt dan in de klassieke theorie. Evenwel zal men in veel gevallen bij het behandelen van concrete vraagstukken, zooals bij de berekening van een gravitatieveld uit een gegeven spanningsenergietensor der materie, vereenvoudigingen kunnen aanbrengen door de omstandigheid, dat de waarden der g's meestal zeer weinig zullen afwijken van de „normale".

10. Prof. LORENTZ geeft dan voor het bedoelde tweede lid: [1])

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Hierin is $L = \frac{1}{4}\Sigma(ab)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}$. De index ψ in (17) beduidt, dat deze grootheden bij differentiatie naar x_σ als constanten moeten behandeld worden. Daar ik de notatie's der ψ's eenigszins anders gekozen heb, dan ze gebruikt zijn in het geciteerde verslag, wordt nu het tweede lid

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_{\overline{\psi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

De uitdrukking voor L blijft onveranderd. In (18) wordt L gedacht uitgeschreven te zijn als een kwadratische functie der $\overline{\psi}$'s, waarin dan de coëfficiënten, zooals uit (13) volgt, van de gravitatiepotentialen zullen afhangen. Men kan natuurlijk even goed L in de ψ's uitdrukken. Gemakkelijk bewijst men de volgende betrekking:

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_{\overline{\psi}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

EINSTEIN geeft als tweede lid van de impuls-energievergelijkingen

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\Sigma(pq)\;\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}\,T_{pq} \quad \ldots\ldots \quad (20).\ \text{Zie (8)}$$

Hierin is, zooals in (8a) werd aangegeven

$T_{pq} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Sigma(\mu)\,g_{p\mu}\,\overline{T}^{\mu}_{q}$, terwijl voor de impuls-energiecomponenten van het electromagnetische veld door beide schrijvers gegeven wordt:

$$\overline{T}^{b}_{c} = -\,\delta^{b}_{c}\,L + \Sigma(a \neq c\;,\; a \neq b)\,\psi^*{}_{ab}\,\overline{\psi}^{a'c'} \quad \ldots\ldots \quad (21)\,^{2)}$$

---

[1]) Zie verslag K. A. v. W. 1915 blz. 1085 vgl. 44.

[2]) De notatie der ψ's en $\overline{\psi}$'s is hier met het bovenstaande in overeenstemming gebracht.

11. Onze bedoeling is nu de gelijkwaardigheid van (18) en (20) aan te toonen. We willen dus laten zien, dat

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_\psi = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \Sigma(p\,q)\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}\,T_{pq}\ \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Nu volgt uit de uitdrukking voor L en uit (12):

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\ \Sigma(a\,b\,c\,d)\,g^{ac}\,g^{bd}\,\psi_{ab}\,\psi_{cd}\,,$$

$$\text{zoodat}\ \left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_\psi = \frac{1}{4}\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}\,\Sigma(a\,b\,c\,d)\ g^{ac}\,g^{bd}\,\psi_{ab}\,\psi_{cd}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \Sigma(a\,b\,c\,d)\ g^{ac}\,\frac{\partial g^{bd}}{\partial x_\sigma}\,\psi_{ab}\,\psi_{cd}\,.$$

Merken we nu eerst op, dat

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \sqrt{-g}\ \frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \frac{1}{g}\ \frac{\partial g}{\partial x_\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \ \Sigma(p\,q)\,g_{pq}\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}\ ^{1)}$$

dan kan geschreven worden:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_\sigma}\right)_\psi = -\frac{1}{8}\sqrt{-g}\ \ \Sigma(a\,b\,c\,d\,p\,q)\ g^{ac}\ g^{bd}\ \psi_{ab}\ \psi_{cd}\,g_{pq}\ \ \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma} +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \Sigma(a\,b\,c\,d)\,g^{ac}\,\frac{\partial g^{bd}}{\partial x_\sigma}\,\psi_{ab}\,\psi_{cd}\,.$$

Gebruik makende van de betrekkingen (12) en (13) kunnen we voor het tweede lid ook zetten:

$$-\frac{1}{8}\,\Sigma(a\,b\,p\,q)\,\psi_{ab}\ \overline{\psi}^{ab}\ g_{pq}\ \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\ \Sigma(a\,b\,d\,q)\ \psi_{ab}\ \overline{\psi}^{aq}\ g_{dq}\,\frac{\partial g^{bd}}{\partial x_\sigma}\ \ .\ .\ (23)$$

12. Voor het tweede lid van (22) kan volgens (8a) gezet worden:

$$-\frac{1}{2}\ \Sigma(p\,\mu\,q)\,g_{p\mu}\ \overline{T}^{\mu}_{q}\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}\,.$$

Door (21) wordt dit:

$$\frac{1}{8}\,\Sigma(a\,b\,p\,q)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}\,g_{pq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial x\sigma} - \frac{1}{2}\,\Sigma(p\,\mu\,q\,a\,,\,a \ddagger q\,,\,a \ddagger \mu)\,g_{p\mu}\ \psi_{a'\mu'}\ \overline{\psi}^{a'q'}\ \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}$$

---

1) EINSTEIN: Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie pag. 34.

Het is nu dadelijk in te zien, dat (22) neerkomt op:

$$-\Sigma(a\,b\,p\,q)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}\,g_{pq}\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}+2\,\Sigma(a\,p\,\mu\,q)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{a\mu}\,g_{q\mu}\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}$$

$$+2\,\Sigma(p\,\mu\,q\,a\,,\,a \neq q\,,\,a \neq \mu)\,g_{p\mu}\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'q'}\,\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}=0\,.$$

Gaan we eerst na, wat de coëfficiënt van $\frac{\partial g^{pp}}{\partial x_\sigma}$ wordt.

Uit bovenstaande uitdrukking volgt, dat deze coëfficiënt is:

$$-\Sigma(a\,b)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}\,g_{pp}+2\,\Sigma\,(a\,\mu)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{a\mu}\,g_{p\mu}+$$

$$+2\,\Sigma(a\,\mu\,,\,a \neq p\,,\,a \neq \mu)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'p'}\,g_{p\mu}\,. \qquad (24)$$

Hierin is de coëfficiënt van g_{pp}:

$$-\Sigma(a\,b)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}+2\,\Sigma(a)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{ap}+2\,\Sigma(a\,,\,a \neq p)\,\psi_{a'p'}\,\overline{\psi}^{a'p'}\,. \qquad (25)$$

De tweede som hierin bevat alle waarden van de producten $\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}$, in welke één der indices p is en wel met de twee indices in zóódanige volgorde, dat p achteraan komt. De som in den laatsten term bevat alle producten $\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}$, bij welke p niet voorkomt, ook weer met de beperking, dat bij elken term de indices slechts in éene volgorde worden geschreven. Verder is $\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{ap}=\psi_{pa}\,\overline{\psi}^{pa}$. Uit één en ander volgt nu gemakkelijk, dat uitdrukking (25) nul wordt.

Dan bevat (24) ook nog termen met $g_{p\mu}$ $(p \neq \mu)$ en wel is de coëfficient van $g_{p\mu}$ het dubbel van:

$$\Sigma(a)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{a\mu}+\Sigma(a\,,\,a \neq p\,,\,a \neq \mu)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'p'} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (26)$$

Dat dit nul is ziet men, als men de sommen, die hier ieder slechts uit twee termen bestaan, even ontwikkelt.

Op dezelfde wijze bewijzen we, dat ook de gezamenlijke coëfficiënt van $\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_\sigma}$ en $\frac{\partial g^{qp}}{\partial x_\sigma}$ wegvalt indien $p \neq q$.

Uit het voorgaande blijkt nl., dat die coëfficiënt het dubbele is van:

$$-\Sigma(a\,b)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}\,g_{pq}+\Sigma(a\,\mu)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{a\mu}\,g_{q\mu}+\Sigma(a\,\mu)\,\psi_{aq}\,\overline{\psi}^{a\mu}\,g_{p\mu}+$$

$$+\Sigma(a\,\mu\,,\,a \neq q\,,\,a \neq \mu)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'q'}\,g_{p\mu}+\Sigma(a\,\mu\,,\,a \neq p\,,\,a \neq \mu)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'p'}\,g_{q\mu}.$$

Hierin is de gezamenlijke coëfficient van g_{pq} en g_{qp}:

$$-\Sigma(a\,b)\,\psi_{ab}\,\overline{\psi}^{ab}+\Sigma(a)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{ap}+\Sigma(a)\,\psi_{aq}\,\overline{\psi}^{aq}+$$
$$+\Sigma(a\,,a\ddagger q)\,\psi_{a'q'}\,\overline{\psi}^{a'q'}+\Sigma(a\,,a\ddagger p)\,\psi_{a'p'}\,\overline{\psi}^{a'p'}.$$

Evenals (25) is deze coëfficient nul.

Voorts is de coëfficient van $g_{p\mu}$, waarin $\mu \ddagger q$:

$$\Sigma(a)\,\psi_{aq}\,\overline{\psi}^{a\mu}+\Sigma(a\,;a\ddagger q\,,a\ddagger\mu)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'q'}$$

Evenals (26) is dit nul. Ten slotte wordt de coëfficient van $g_{q\mu}$, waarin $\mu \ddagger p$: $\quad \Sigma(a)\,\psi_{ap}\,\overline{\psi}^{a\mu}+\Sigma(a\,,a\ddagger p)\,\psi_{a'\mu'}\,\overline{\psi}^{a'p'}=0$, waarmede (22) is aangetoond.

13. Wij spreken dikwijls van een gravitatievrij veld, in tegenstelling met een gravitatieveld. Het laatste wordt teweeggebracht door een verdeeling van materie of door electromagnetische velden. Bij afwezigheid van alle materie en electromagnetische velden noemen we het veld gravitatievrij. In dit geval kan men de coördinaten zóó kiezen, dat over de volle uitgestrektheid van het veld de potentialen de normale waarden aannemen. Is er wel gravitatie aanwezig, dan is dit onmogelijk.

Intusschen kan men wel bij elk zwaartekrachtveld, welke de waarden der potentialen ook zijn, door geschikte coördinatentransformatie in een bepaald punt de g's de normale waarden doen aannemen. Omgekeerd kan men, als men van een gravitatievrij veld uitgaat door invoering van nieuwe coördinaten tot waarden der potentialen komen, die van de normale verschillen en ook niet meer onafhankelijk van de coördinaten zijn. In zekeren zin kan men zeggen dat men nu, enkel door de coördinatentransformatie, een gravitatieveld heeft ingevoerd; men zou van een „pseudo-gravitatieveld" kunnen spreken. Men kan zich veelal van dezen kunstgreep bedienen, om over den invloed van een gravitatieveld op een of ander verschijnsel een besluit te trekken. Dit berust op de stelling, dat die invloed op dezelfde wijze door de potentialen (en eventueel hun gradiënten) zal bepaald worden, onverschillig of men met een werkelijk of met een pseudo-gravitatieveld te doen heeft. Deze stelling vormt den feitelijken inhoud van het bekende aequivalentieprincipe van EINSTEIN.

HOOFDSTUK I.

Voortplanting van het licht in een gravitatieveld.

14. Uit (2) volgt, dat in 't algemeen een gravitatieveld zich tegenover de lichtvoortplanting niet als een isotroop medium zal gedragen, daar de uitdrukking ds^2 gelijk nul gesteld in de meeste gravitatievelden snelheden van voortplanting zal geven, die in verschillende richtingen verschillend zijn. Het loont dus de moeite, uitgaande van de reeds vermelde, door EINSTEIN gewijzigde, electromagnetische grondvergelijkingen, te onderzoeken, hoe een electromagnetische evenwichtsverstoring zich als vlakke golf door het zwaartekrachtveld zal voortplanten.

15. Wij gaan uit van de vergelijkingen (14) en (14a). Indien het veld electriciteitvrij is, wordt het tweede lid van (14a) gelijk nul. Bepalen we ons tot een rechtlijnig gepolariseerde, enkelvoudig harmonisch trillende lichtbeweging, dan wordt een vlakke golf loodrecht op de richting l, m, n en met een golffrontsnelheid s voorgesteld door:

$$\left.\begin{aligned} \psi^*_{ab} &= F_{ab} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{lx + my + nz}{s}\right) \\ \bar{\psi}^{ab} &= G_{ab} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{lx + my + nz}{s}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (27)$$

Vooreerst zij opgemerkt, dat in het algemeene geval de amplitudo's F_{ab} en G_{ab}, evenals de gravitatiepotentialen g_{ab} functies zullen zijn van de vier coördinaten. Niettemin kunnen de grootheden F_{ab} en G_{ab} bij eerste benadering als constanten worden behandeld, indien men aanneemt, dat de snelheid waarmede de niet-constante gravitatiepotentialen van punt tot punt veranderen, veel kleiner is dan de snelheid, waarmede de electromagnetische grootheden dit doen, d. w. z. dat de afstanden die in het gravitatieveld „te pas komen", veel grooter zijn dan de golflengten, of dat de gravitatiepotentialen over een afstand gelijk aan de golflengte zeer weinig veranderen. Bovendien onderstellen we, dat het gravitatieveld, indien het niet constant is, zeer weinig verandert gedurende een trillingstijd. We beschouwen dus de grootheden F_{ab} in G_{ab} als „langzaam veranderlijk". Worden uitdrukkingen als $F_{ab} \sin \frac{2\pi}{T}(t\ldots)$ naar x, y, z of t gedifferentieerd, dan overwegen de termen, die uit de goniometrische functie's ontstaan, ver boven die welke differentiaalquotiënten van F_{ab} en G_{ab} bevatten; men kan dus bij eerste benadering deze laatste weglaten.

In verband hiermede zij opgemerkt, dat men in een niet-homogeen, met den tijd veranderlijk zwaartekrachtveld bij de constructie van Huygens de oneindig kleine elementaire golfoppervlakken zoo kan nemen, zooals ze in een veld met overal constante potentialen zouden zijn; voor de grootheden g_{ab} van dit laatste neemt men dan de waarden, die op de beschouwde plaats en het beschouwde oogenblik bestaan. Beschouwingen als deze zouden ook te pas komen bij het onderzoek van de lichtvoortplanting in een kristallijn medium, waarvan de diëlectrische constanten en magnetische-inductieconstanten van punt tot punt en van tijdstip tot tijdstip veranderden.

16. Uit (14) en (14a) volgen nu acht betrekkingen tusschen de amplitudo's, nl.:

$$\frac{G_{12}\, m}{s} - \frac{G_{31}\, n}{s} = G_{14}\ ; \quad \frac{F_{12} m}{s} - \frac{F_{31} n}{s} = F_{14} \ \ldots\ldots, \tag{28}$$

de vier betrekkingen, die men krijgt door hier de indices 1, 2, 3 cyclisch te verwisselen, alsmede de betrekkingen:

$$\frac{G_{14}\, l}{s} + \frac{G_{24} m}{s} + \frac{G_{34} n}{s} = 0\,; \quad \frac{F_{14}\, l}{s} + \frac{F_{24} m}{s} + \frac{F_{34}\, n}{s} = 0 \ \ldots \tag{29}$$

Gemakkelijk is in te zien, dat de beide laatste vergelijkingen een gevolg zijn van het eerste zestal. Van de in deze zes vergelijkingen voorkomende twaalf grootheden F_{ab} en G_{ab} kunnen we er zes elimineeren met behulp van (13). Daaruit volgt

$$\psi^*_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma(\overline{cd}) \, (g_{ca'} \, g_{db'} - g_{da'} \, g_{cb'}) \, \overline{\psi}^{cd} \, {}^{1)} .$$

In deze uitdrukking zullen we de coëfficiënten van $\overline{\psi}^{cd}$ aangeven door $\mu^{a'b'}_{cd}$, zoodat we schrijven:

$$\psi^*_{a'b'} = \Sigma(\overline{cd}) \, \mu^{ab}_{cd} \, \overline{\psi}^{cd}, \text{ waarin } \ldots \ldots \quad (30)$$

$$\mu^{ab}_{cd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \, (g_{ca} \, g_{db} - g_{da} \, g_{cb}) \ldots \ldots \quad (31)$$

Op dezelfde wijze is tengevolge van (12):

$$\overline{\psi}^{cd} = \sqrt{-g} \, \Sigma(\overline{ab}) \, (g^{ca} \, g^{db} - g^{cb} \, g^{da}) \, \psi^*_{a'b'} ,$$

waarvoor we zetten:

$$\overline{\psi}^{cd} = \Sigma(\overline{ab}) \, \varkappa^{cd}_{ab} \, \psi^*_{a'b'} , \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

$$\varkappa^{cd}_{ab} = \sqrt{-g} \, (g^{ca} \, g^{db} - g^{cb} \, g^{da}) \ldots \ldots \quad (33)$$

Natuurlijk bestaan er verschillende betrekkingen tusschen de coëfficienten μ en $\varkappa$. Wij wijzen op de volgende:

$\mu^{ab}_{cd} = - \mu^{ab}_{dc} = - \mu^{ba}_{cd} = \mu^{ba}_{dc} = \mu^{cd}_{ab}$. Evenzoo voor de $\varkappa$'s.

Dan volgt uit de theorie der determinanten op eenvoudige wijze:

$$\varkappa^{cd}_{ab} = - \mu^{c'd'}_{a'b'} \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

17 Elimineeren we nu uit (28) en (29) die grootheden F_{ab} en G_{ab}, waarin de index 4 voorkomt, dan ontstaan na eenige korte herleidingen de volgende zes betrekkingen, waarvan we slechts de eerste en vierde neerschrijven:

$$\frac{G_{12} m}{s} - \frac{G_{31} n}{s} = F_{23} \left(\varkappa^{14}_{14} + \varkappa^{14}_{31} \frac{n}{s} - \varkappa^{14}_{12} \frac{m}{s} \right) +$$

$$+ F_{31} \left(\varkappa^{14}_{24} + \varkappa^{14}_{12} \frac{l}{s} - \varkappa^{14}_{23} \frac{n}{s} \right) + F_{12} \left(\varkappa^{14}_{34} + \varkappa^{14}_{23} \frac{m}{s} - \varkappa^{14}_{31} \frac{l}{s} \right) .$$

---

1) De streep boven cd onder het Σ teeken beteekent, dat er over c en d *enkel* gesommeerd moet worden; dat dus, als b.v. $c = 1$ en $d = 2$ genomen wordt, niet meer $c = 2$ en $d = 1$ gesteld mag worden.

$$\frac{F_{12}\,m}{s}-\frac{F_{31}\,n}{s}=G_{23}\left(\mu^{23}_{23}+\mu^{23}_{24}\frac{n}{s}-\mu^{23}_{34}\frac{m}{s}\right)+$$
$$+\,G_{31}\left(\mu^{23}_{31}+\mu^{23}_{34}\frac{l}{s}-\mu^{23}_{14}\frac{n}{s}\right)+G_{12}\left(\mu^{23}_{12}+\mu^{23}_{14}\frac{m}{s}-\mu^{23}_{24}\frac{l}{s}\right).$$

Zetten we voor de eerste dezer vergelijkingen:

$$\frac{G_{12}\,m}{s}-\frac{G_{31}\,n}{s}=p_1\,F_{23}+q_1\,F_{31}+r_1\,F_{12}\,. \; . \; . \; . \; . \qquad (35)$$

Uit (34) volgt dan voor de tweede:

$$\frac{F_{12}\,m}{s}-\frac{F_{31}\,n}{s}=-p_1\,G_{23}-q_1\,G_{31}-r_1\,G_{12}\,.$$

Hierin is $p_1=-\mu^{23}_{23}-\mu^{23}_{24}\frac{n}{s}+\mu^{23}_{34}\frac{m}{s}=\varkappa^{14}_{14}+\varkappa^{14}_{31}\frac{n}{s}-\varkappa^{14}_{12}\frac{m}{s}$. (36)

Opgemerkt zij, dat men van p_1 tot q_1 en r_1 overgaat door op de *onderaanstaande* indices $1, 2, 3$, alsmede op l, m, n de cyclische verwisseling toe te passen, waardoor er komt:

$$q_1=-\mu^{23}_{31}-\mu^{23}_{34}\frac{l}{s}+\mu^{23}_{14}\frac{n}{s}=\varkappa^{14}_{24}+\varkappa^{14}_{12}\frac{l}{s}-\varkappa^{14}_{23}\frac{n}{s}.$$
$$r_1=-\mu^{23}_{12}-\mu^{23}_{14}\frac{m}{s}+\mu^{23}_{24}\frac{l}{s}=\varkappa^{14}_{34}+\varkappa^{14}_{23}\frac{m}{s}-\varkappa^{14}_{31}\frac{l}{s}$$

De grootheden $p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3$, die in de vergelijkingen voorkomen welke door de genoemde cyclische verwisseling uit (35) ontstaan, worden uit p_1, q_1, r_1 afgeleid door de *bovenaanstaande* indices cyclisch te verwisselen.

18. Uit de zes verkregen betrekkingen tusschen F_{ab} en G_{ab} (a en $b \neq 4$) elimineeren we deze grootheden en verkrijgen als betrekking, waaraan de golffrontsnelheid s moet voldoen:

$$\begin{vmatrix} 0 & -n & m & -p_1\,s & -q_1\,s & -r_1\,s \\ n & 0 & -l & -p_2\,s & -q_2\,s & -r_2\,s \\ -m & l & 0 & -p_3\,s & -q_3\,s & -r_3\,s \\ p_1\,s & q_1\,s & r_1\,s & 0 & -n & m \\ p_2\,s & q_2\,s & r_2\,s & n & 0 & -l \\ p_3\,s & q_3\,s & r_3\,s & -m & l & 0 \end{vmatrix}=0\,. \qquad (37)$$

Hoewel het linkerlid dezer vergelijking, in aanmerking genomen de uitgeschreven waarden voor de p's, q's en r's, uiterst ingewikkeld lijkt, lukt het toch den determinant tot een betrekkelijk eenvoudigen vorm te herleiden. De wijze van behandeling bestaat hierin, dat men in den determinant de eerste horizontale rij vervangt door hetgeen men krijgt als men bij die rij, na haar met l vermenigvuldigd te hebben, de tweede en de derde rij, resp. met m en n vermenigvuldigd, optelt, en evenzoo de vierde horizontale rij vervangt door de som van die rij, de vijfde en de zesde achtereenvolgens met l, m, n, vermenigvuldigd; terwijl eindelijk met de kolommen van den aldus gevormden determinant wordt gehandeld, zooals zoo even met de rijen van den oorspronkelijken. Stelt men den laasten door $\triangle$ voor, dan verkrijgt men op deze wijze $l^4 \triangle$.

29. Stelt men

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = l^2 p_1 + m^2 q_2 + n^2 r_3 + lm(p_2 + q_1) + mn(q_3 + r_2) + nl(r_1 + p_3) \\ a_{12} = q_1 l + q_2 m + q_3 n ; \quad a_{13} = r_1 l + r_2 m + r_3 n \\ a_{21} = p_2 l + q_2 m + r_2 n ; \quad a_{22} = q_2 \quad ; \; a_{23} = r_2 \\ a_{31} = p_3 l + q_3 m + r_3 n ; \quad a_{32} = q_3 \quad ; \; a_{33} = r_3 , \end{array}\right\} \quad . \; . \; (38)$$

dan is:

$$l^4 \triangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{11}s & -a_{12}s & -a_{13}s \\ 0 & 0 & -l & -a_{21}s & -a_{22}s & -a_{23}s \\ 0 & l & 0 & -a_{31}s & -a_{32}s & -a_{33}s \\ a_{11}s & a_{12}s & a_{13}s & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}s & a_{22}s & a_{23}s & 0 & 0 & -l \\ a_{31}s & a_{32}s & a_{33}s & 0 & l & 0 \end{vmatrix}$$

Onderscheiden we nu hierin het deel zonder een van de 4 l's, die expliciet voorkomen, het deel met één van die l's, enz. We vinden dan voor het eerste deel:

$$s^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2$$

Zetten we hierin voor de a's de boven aangegeven waarden,

$$u_1 = \begin{vmatrix} q_2 & r_2 \\ q_3 & r_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} q_3 & r_3 \\ q_1 & r_1 \end{vmatrix} \text{ enz.}$$

$$v_1 = \begin{vmatrix} r_2 & p_2 \\ r_3 & p_3 \end{vmatrix} \text{ enz.} \quad w_1 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \text{ enz.}$$

dan blijkt na uitwerking voor het eerste deel geschreven te kunnen worden:

$$s^6 \, l^4 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}^2$$

Zooals uit bovenstaande afleiding te verwachten is, is dit eerste deel behoorlijk door l^4 deelbaar, hetgeen ook met de andere deelen het geval moet zijn.

Gemakkelijk is te verifieeren, dat die deelen, welke l expliciet tot de eerste en derde macht bevatten, nul zijn. De term met l^2 luidt:

$$l^2 \, s^4 \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}^2 - 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right\}$$

Na een eenigszins uitvoerige becijfering, die evenwel geen moeilijkheden oplevert, vindt men dat voor dezen term kan geschreven worden

$$- 2 \, l^4 \, s^4 \, a_{11} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \, l^4 \, s^4 \left[l\,(v_3 - w_2) + m\,(w_1 - u_3) + n\,(u_2 - v_1) \right]^2.$$

Ten slotte is de term, die l^4 expliciet bevat $a_{11}^2 \, s^2 \, l^4$.

Resumeerende schrijven wij:

$$\triangle = \left\{ \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} s^2 - a_{11} \right\}^2 s^2 +$$

$$+ \left[l\,(v_3 - w_2) + m\,(w_1 - u_3) + n\,(u_2 - v_1) \right]^2 s^4 .$$

Het blijkt, dat de uitdrukking tusschen de vierkante haken, indien men v_3, w_2, enz., door hunne waarden vervangt en vervolgens gebruik maakt van de uitdrukkingen, die de p's, q's en r's voorstellen, nul wordt, zoodat ten slotte de vergelijking, waardoor de golffrontsnelheid bepaald wordt, den vorm heeft:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} s^2 - a_{11} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

20. Voor de verdere oplossing dezer vergelijking, moeten we bedenken, dat in p_1, q_1, r_1, enz., de grootheid s voorkomt en daarmede ook in a_{11}. Voor het volgende is het goed den in de vergelijking voorkomenden determinant uit te schrijven in de μ's. Volgens (36) luidt hij dan:

$$\begin{vmatrix} -\mu^{23}_{23} - \mu^{23}_{24}\frac{n}{s} + \mu^{23}_{34}\frac{m}{s} & -\mu^{23}_{31} - \mu^{23}_{34}\frac{l}{s} + \mu^{23}_{14}\frac{n}{s} & -\mu^{23}_{12} - \mu^{23}_{14}\frac{m}{s} + \mu^{22}_{43}\frac{l}{s} \\ -\mu^{31}_{23} - \mu^{31}_{24}\frac{n}{s} + \mu^{31}_{34}\frac{m}{s} & -\mu^{31}_{31} - \mu^{31}_{34}\frac{l}{s} + \mu^{31}_{14}\frac{n}{s} & -\mu^{31}_{12} - \mu^{31}_{14}\frac{m}{s} + \mu^{31}_{24}\frac{l}{s} \\ -\mu^{12}_{23} - \mu^{12}_{24}\frac{n}{s} + \mu^{12}_{34}\frac{m}{s} & -\mu^{12}_{31} - \mu^{12}_{34}\frac{l}{s} + \mu^{12}_{14}\frac{n}{s} & -\mu^{12}_{12} - \mu^{12}_{14}\frac{m}{s} + \mu^{12}_{24}\frac{l}{s} \end{vmatrix} \quad (40)$$

Zeer gemakkelijk blijkt vooreerst, dat in de ontwikkeling van dezen determinant de termen met $\frac{1}{s^3}$ verdwijnen. We voeren nu in grootheden $g^{a\,b}_{c\,d}$, waaronder verstaan wordt de onderdeterminant op g_{cd} in g^{ab}, indien g^{ab} voorstelt, in afwijking van de gebruikelijke notatie, den onderdeterminant op g_{ab} in den bekenden determinant g. Men ook zeggen: $g^{a\,b}_{c\,d}$ is hetgeen men uit g krijgt, indien men daarin g_{ab} en g_{cd} door 1 vervangt en al de elementen die met één van deze op dezelfde horizontale of verticale rij staan, door 0 vervangt. Er bestaan nu tusschen de nieuw ingevoerde grootheden zeer eenvoudige betrekkingen als: $g^{a\,b}_{c\,d} = g^{c\,d}_{a\,b} = g^{b\,a}_{d\,c} = -\,g^{a\,d}_{c\,b}$. Het verdient vermelding, dat in 't algemeen $g^{a\,b}_{c\,d}$ niet gelijk is aan $g^{b\,a}_{c\,d}$, indien $c \neq d$.

Uit (31) volgt verder gemakkelijk de betrekking

$$\mu_{cd}^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, g_{d'b'}^{c'a'}\text{, indien hierin } a\,b\,a'\,b' \text{ en } c\,d\,c'\,d' \text{ even}$$

permutatie's der volgorde 1 2 3 4 voorstellen. Indien men nu gebruik maakt van eenvoudige eigenschappen der determinanten, dan vindt men voor (40) [1]):

$$\frac{1}{(\sqrt{-g})^3}\left\{ -(g^{44})^2 + 2\,g^{44}\,g^{14}\,\frac{l}{s} + 2\,g^{44}\,g^{24}\,\frac{m}{s} + 2\,g^{44}\,g^{34}\,\frac{n}{s} - \right.$$
$$\left. -(g^{14})^2\,\frac{l^2}{s^2}.\;.\;.\;.-2\,g^{24}\,g^{34}\,\frac{mn}{s^2}\;.\;.\;.\;.\right\}$$

Verder volgt uit (38) en (36), dat in a_{11} de termen met s in den noemer wegvallen en dat voor deze grootheid geschreven kan worden:

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(l^2\,\overset{11}{\underset{44}{g}} + m^2\,\overset{22}{\underset{44}{g}} + n^2\,\overset{33}{\underset{44}{g}} + 2\,lm\,\overset{12}{\underset{44}{g}} + 2\,mn\,\overset{23}{\underset{44}{g}} + 2\,nl\,\overset{31}{\underset{44}{g}}\right).$$

Door de verkregen uitkomsten gaat de vergelijking, waaruit s bepaald moet worden over in:

$$(g^{44})^2\,s^2 - 2\,g^{44}\,(g^{14}\,l + g^{24}\,m + g^{34}\,n)\,s + (g^{14})^2\,l^2 + .\;.\;.$$
$$+ 2\,g^{14}\,g^{24}\,lm + .\;.\;. + g\,(\overset{11}{\underset{44}{g}}\,l^2 + .\;.\;.\;2\,\overset{12}{\underset{44}{g}}\,lm + .\;.\;.) = 0\;. \qquad (41)$$

21. Onze vergelijking heeft dus nu den vorm $A\,s^2 + B\,s + C = 0$ aangenomen. Hierin is

$$\left.\begin{aligned} A &= (g^{44})^2 \\ B &= -2\,g^{44}\,(g^{14}\,l + g^{24}\,m + g^{34}\,n) \\ C &= (g^{14})^2\,l^2 + ..+ 2g^{14}g^{24}\,lm + ..+ g\,(\overset{11}{\underset{44}{g}}\,l^2 + ..\,2\,\overset{12}{\underset{44}{g}}\,lm + ..) \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

---

[1]) Als voorbeeld van berekening der coïfficiënten, geef ik die van $\frac{l^2}{s^2}$. Men vindt daarvoor uit (40):

$$g^{11}_{44}\;g^{2}_{24}\;g^{33}_{14} - g^{11}_{44}\;g^{13}_{24}\;g^{32}_{14} - g^{11}_{24}\;g^{12}_{44}\;g^{33}_{14} + g^{11}_{24}\;g^{13}_{44}\;g^{32}_{14} +$$
$$+ g^{31}_{14}\;g^{12}_{44}\;g^{13}_{24} - g^{31}_{14}\;g^{13}_{44}\;g^{12}_{24} = -\,g^{11}_{44}\,(g^{14}_{22}\;g^{14}_{33} - g^{14}_{23}\;g^{14}_{32}) -$$
$$-\,g^{12}_{44}\,(g^{14}_{31}\;g^{14}_{23} - g^{14}_{21}\;g^{14}_{33}) - g^{13}_{44}\,(g^{14}_{21}\;g^{14}_{32} - g^{14}_{31}\;g^{14}_{22}).$$

Hiervoor kan volgens bekende determinanten eigenschappen gezet worden:

$$+\,g^{11}_{44}\;g_{14}\;g^{14} + g^{12}_{44}\;g_{24}\;g^{14} + g^{13}_{44}\;g_{34}\;g^{14} = -\,g^{14}_{41}\;g_{41}\;g^{14} -$$
$$-\,g^{14}_{42}\;g_{42}\;g^{14} - g^{14}_{43}\;g_{43}\;g^{14} = -\,(g^{14})^2.$$

Voor de bestaanbaarheid der wortels wordt vereischt, dat

$$B^2 - 4\,A\,C > 0$$

Substitutie van de uitdrukkingen voor A, B en C in deze conditie geeft de volgende voorwaarde:

$$-g\,(\overset{11}{\underset{44}{g}}\,l^2 + \ldots + 2\,\overset{12}{\underset{44}{g}}\,lm + \ldots) > 0 \;\ldots\ldots\; (43)$$

Aannemende, dat g een negatieve waarde heeft[1]), kunnen we voor de conditie zetten:

$$\overset{11}{\underset{44}{g}}\,l^2 + \ldots + 2\,\overset{12}{\underset{44}{g}}\,lm > 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (44)$$

In het volgende komen we nog even op deze conditie terug.

22. Uit (41) kan nu ook de snelheid van den lichtstraal gevonden worden, indien daarvan de voortplantingsrichting bekend is. Het is te verwachten dat het resultaat van het opsporen der betrekking, waaraan de straalsnelheid moet voldoen, zal zijn de in de inleiding vermelde vergelijking (2).

Uitgaande van het beginsel van Huygens, denken we om een punt O, dat als oorsprong van een rechthoekig stelsel genomen wordt, alle golffronten $lx + my + nz = s$ aangebracht. Deze golffronten omhullen het golfoppervlak om O. Vatten we nu een bepaald stel waarden l_1, m_1, n_1, in 't oog, dan zal het daardoor bepaalde golffront het golfoppervlak raken in een punt x_1, y_1, z_1. De verbindingslijn van O met dit punt geeft de straalrichting aan, die behoort bij de golffrontrichting l_1, m_1, n_1. De vlakcoördinaten van het raakvlak in het punt x_1, y_1, z_1 zijn $\xi_1 = \frac{l_1}{s}$, $\eta_1 = \frac{m_1}{s}$, $\zeta_1 = \frac{n_1}{s}$. Indien men dus in (41) substitueert $l = \xi s$, $m = \eta s$, $n = \zeta s$, verkrijgt men de vergelijking van het golfoppervlak in vlakcoördinaten.

Schrijven we deze laatste vergelijking

$$\psi\,(\xi\;\eta\;\zeta) = 0,$$

dan worden de coördinaten van het raakpunt volgens een algemeen bekende stelling uit de analytische meetkunde bepaald

---

[1]) Zie Einstein: Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie pag. 27.

door $x_1 : y_1 : z_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} : \frac{\partial \psi}{\partial \eta} : \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$ voor ξ_1, η_1 en ζ_1, met de bijkomende conditie: $\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 = 1$. Nu is

$$\psi(\xi \eta \zeta) = (g^{44})^2 - 2 g^{44} (g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta) + (g^{14})^2 \xi^2 + \ldots$$
$$+ 2 g^{14} g^{24} \xi \eta + \ldots + g \left(g^{11}_{44} \xi^2 + \ldots + 2 g^{12}_{44} \xi \eta + \ldots \right) = 0 .$$

Stelt men, den index 1 weglatende,

$$x = \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \; y = \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \; z = \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \zeta},$$

dan vindt men uit bovenstaande betrekkingen gemakkelijk:

$$\sigma = \frac{1}{2 g^{44} (- g^{44} + g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta)} .$$

Vervangt men ook $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ enz., door hun waarden, dan vindt men:

$$x = \frac{g^{14}}{g^{44}} + \frac{g \left(g^{11}_{44} \xi + g^{12}_{44} \eta + g^{13}_{44} \zeta \right)}{g^{44} (- g^{44} + g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta)} .$$

Voor y en z gelden uitdrukkingen, die uit de waarde van x dadelijk volgen. Men ziet nu verder gemakkelijk de volgende gelijkheid in:

$$g_{11} x + g_{12} y + g_{13} z = - g_{14} + \frac{g \xi}{- g^{44} + g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta} .$$

Dergelijke uitdrukkingen gelden voor $g_{21} x + g_{22} y + g_{23} z$ en $g_{31} x + g_{32} y + g_{33} z$. Na eenige herleiding vindt men voor $x (g_{11} x + g_{12} y + g_{13} z) + y (g_{21} x + g_{22} y + g_{23} z) + z (g_{31} x + g_{32} y + g_{33} z)$ de waarde:

$$- \frac{2 g}{g^{44}} + g_{44} + \frac{2 g}{g^{44}} \; \frac{g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta}{- g^{44} + g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta} .$$

Vervolgens is $2 (g_{14} x + g_{24} y + g_{34} z) = \frac{2 g}{g^{44}} - 2 g_{44} -$

$$- \frac{2 g}{g^{44}} \; \frac{g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta}{- g^{44} + g^{14} \xi + g^{24} \eta + g^{34} \zeta} .$$

Door optelling verkrijgt men gemakkelijk:

$g_{11} x^2 + 2 g_{12} x y + \ldots + 2 g_{14} x + \ldots + g_{44} = 0$. Dit stelt de vergelijking in puntcoördinaten van het golfoppervlak om

O voor. Noemt men de richtingsconstanten van den lichtstraal α, β, γ en de snelheid v, dan kan de vorige vergelijking ook geschreven worden

$$(g_{11}\,\alpha^2 + \ldots + 2\,g_{12}\,\alpha\,\beta + ..)\,v^2 + 2\,(g_{14}\,\alpha + \ldots)\,v + g_{44} = 0 \quad (2^a);$$

wat geheel in overeenstemming is met (2).

Aangetoond is nu feitelijk het volgende: Indien voor de vier-dimensionale ruimte-tijd uitgebreidheid de kwadratische vorm gegeven is, waardoor de lengte van het vier-dimensionale lijnelement bepaald wordt en indien de covariante vergelijkingen van het electromagnetische veld den vorm hebben, zooals EINSTEIN ons dien gegeven heeft, dan is langs de wereldlijnen van lichtstralen noodzakelijk $ds^2 = 0$.

23. Indien men de vergelijkingen (41) en (2^a), die respectievelijk de golffrontsnelheid en de straalsnelheid van het licht in het gravitatieveld doen kennen, vergelijkt, dan spelen ten deele in (41) de g^{ab},s dezelfde rol als de g_{ab}'s in (2^a). Het ligt voor de hand te beproeven, of de termen, die in (41) niet met s of met s^2 vermenigvuldigd worden, ook geschreven kunnen worden in een vorm, die overeenkomt met den coëfficiënt van v^2 in (2^a), met dit verschil, dat nu de g's hooge accenten dragen.

Dit is inderdaad mogelijk en wel ten gevolge van de betrekkingen

$$(g^{14})^2 + g\,g^{11}_{44} = g^{44}\,g^{11}\,,\quad g^{14}\,g^{24} + g\,g^{12}_{44} = g^{44}\,g^{12}\,,$$

$$g^{14}\,g^{34} + g\,g^{13}_{44} = g^{44}\,g^{13}$$

De vergelijkingen voor de frontsnelheid en voor de straalsnelheid schrijven we nu onder elkaar:

straalsnelheid:

$$(g_{11}\,\alpha^2 + \ldots + 2\,g_{12}\,\alpha\,\beta + \ldots)\,v^2 + 2\,(g_{14}\,\alpha + \ldots)\,v + g_{44} = 0$$

frontsnelheid:

$$(g^{11}\,l^2 + \ldots + 2\,g^{12}\,l\,m + \ldots) - 2\,(g^{14}\,l + \ldots.)\,s + g^{44}\,s^2 = 0\,.$$

Wij merken op dat wij in de laatste vergelijking onder g^{11}, g^{12}, enz. weer de genormeerde onderdeterminanten mogen verstaan.

24. We willen de vergelijkingen (41) en (2^a), die respectievelijk de golffrontsnelheid en de straalsnelheid leeren kennen, aan een nader onderzoek onderwerpen. Om al te wonderlijke gravitatievelden te vermijden, zullen we, indien het tegengestelde niet uitdrukkelijk vermeld wordt, aannemen, dat de uitdrukking voor het kwadraat van het vier-dimensionale lijnelement drie trage negatieve teekens en één traag positief teeken bezit [1]). Dit komt hierop neer, dat het golfoppervlak eene ellipsoïde is. De imaginaire asymptotenkegel van dit oppervlak is:

$$g_{11}\, x^2 + 2\, g_{12}\, xy + \ldots . + g_{33}\, z^2 = 0.$$

Het linkerlid van bovenstaande vergelijking is dus essentiëel positief of wel negatief voor reëele waarden van de ruimte-coördinaten. In dit geval negatief, omdat de symmetrische determinant op de coëfficiënten, d. i. g_{44}, de *niet* genormeerde onderdeterminant op g_{44} in g negatief is. De vergelijking van het golfoppervlak kan nl. bij geschikte coördinatenkeuze geschreven worden in den vorm [2]):

$$s_1\, x^2 + s_2\, y^2 + s_3\, z^2 - \frac{g}{g^{44}} = 0$$

Hierin zijn de coëfficiënten s positief. Voor een bestaanbare ellipsoïde moet dus $\frac{g}{g^{44}} > 0$ zijn. Doordat we voor g een negatieve waarde hebben verondersteld, moet een dergelijke waarde aan g^{44} toegekend worden. Verder bewijst men gemakkelijk, dat nu de vorm:

$$\overset{11}{\underset{44}{g}}\, x^2 + 2\, \overset{12}{\underset{44}{g}}\, xy + \ldots . + \overset{33}{\underset{44}{g}}\, z^2 \text{ essentiëel positief is } ^{3)}.$$

---

[1]) Zie voor de uitdrukking „traagheid der teekens" CARNOY. Algèbre supérieure, pag. 435.

[2]) Zie PRUVOST. Géométrie analytique II, pag. 205.

[3]) Immers stel $\xi = g_{11}\, x + g_{12}\, y + g_{13}\, z, \eta = g_{21}\, x + .., \zeta = g_{31}\, x + ..$
Dan is $g^{11}_{44}\, \xi + g^{21}_{44}\, \eta + g^{31}_{44}\, \zeta = g^{44}\, x$,
of $\xi\, (g^{11}_{44}\, \xi + g^{21}_{44}\, \eta + g^{31}_{44}\, \zeta) + \eta\, (g^{21}_{44}\, \xi + \ldots..) + \zeta\, (g^{31}_{44}\, \xi + \ldots .) =$
$g^{44}\, x\, (g_{11}\, x + g_{12}\, y + g_{13}\, z) + g^{44}\, y\, (\ldots .$
zoodat $g^{11}_{44}\, \xi^2 + 2\, g^{21}_{44}\, \xi\, \eta + \ldots . = g^{44}\, (g_{11}\, x^2 + 2\, g_{12}\, xy + \ldots .)$

Conditie (44) is dus voor dit geval altijd vervuld, zoodat de golffrontsnelheden voor alle richtingen reëel uitvallen. Dit spreekt trouwens vanzelf. De loodlijnen op de raakvlakken aan een ellipsoïde kunnen alle richtingen aannemen. Anders zou de quaestie worden, indien het golfoppervlak een bestaanbaren asymptotenkegel had. Dan zou ook de supplementaire of poolkegel $\overset{11}{\underset{44}{g}} x^2 + 2 \overset{12}{\underset{44}{g}} xy + \ldots . = 0$ bestaanbaar zijn, zoodat er een ruimtegebied zou aan te wijzen zijn, waarin het linkerlid van de laatste vergelijking negatief was. In dat gebied wijzende golfnormalen zouden dan imaginaire golffrontsnelheden geven, hetgeen ook meetkundig weer gemakkelijk is in te zien.

Keeren we weer terug tot het geval der ellipsoïde, waarin dus s steeds bestaanbaar is, hoewel vergelijking (2^a) voor verschillende richtingen α, β, γ onbestaanbare waarden voor de straalsnelheid v kan geven. Dit laatste hangt samen met de vraag, of de oorsprong binnen, op of buiten de golfellipsoïde ligt. Om deze kwestie nader te onderzoeken, willen we van uit den oorsprong den raakkegel aan de ellipsoïde aanbrengen. Van zelf komen dan de teekens der beide wortels van de vergelijking ter sprake.

Bepaalt men de vergelijking van bedoelden kegel volgens de methode der analytische meetkunde, dan vindt men daarvoor:

$$\left(g_{44}\, g_{11} - g_{14}^{2}\right) x^2 + 2\,(g_{44}\, g_{12} - g_{14}\, g_{24})\, x\, y + \ldots$$

$$+ \left(g_{44}\, g_{33} - g_{34}^{2}\right) z^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Men ziet in verband met het voorgaande dadelijk in, dat voor positieve g_{44} het linkerlid essentiëel negatief is. De oorsprong ligt dan binnen het golfoppervlak. Voor $g_{44} = 0$ bestaat de aanrakingskegel uit twee samenvallende platte vlakken, terwijl de oorsprong dan op het golfoppervlak ligt. Voor $g_{44} < 0$ wordt het een bestaanbare kegel. Verder kan als in 23 voor den bekenden term C in de vergelijking $A\, s^2 + B\, s + C = 0$ gezet worden:

$$C = g^{44}\,(g^{11}\, l^2 + 2\, g^{12}\, l\, m + \ldots + g^{33}\, n^2) \quad \ldots . \quad (46)$$

Men krijgt dus gelijke teekens voor de twee waarden van s, indien

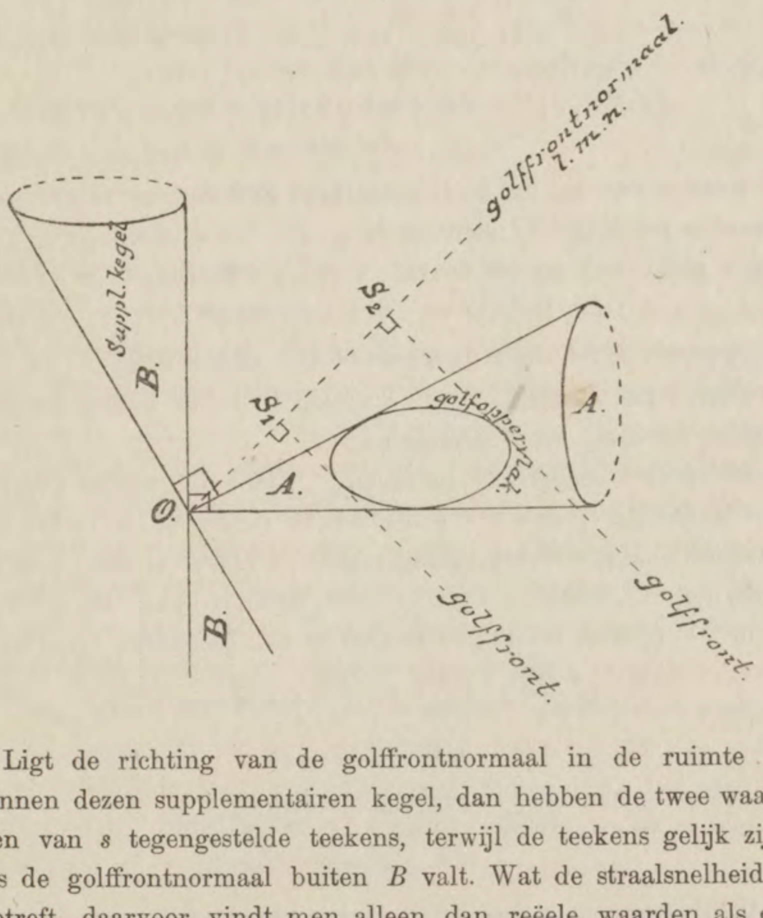
$$g^{11}\,l^2 + 2\,g^{12}\,l\,m + \;.\;.\;.\quad g^{33}\,n^2 < 0 \text{ (omdat } g^{44} < 0)$$

en ongelijke teekens als

$$g^{11}\,l^2 + 2\,g^{12}\,l\,m + g^{33}\,n^2 > 0\,.$$

De grens tusschen deze gevallen wordt gegeven door den supplementairen kegel van (45) waarvan de vergelijking is

$$g^{11}\,x^2 + 2\,g^{12}\,xy + \;.\;.\;.\quad g^{33}\,z^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(47)$$



Ligt de richting van de golffrontnormaal in de ruimte B binnen dezen supplementairen kegel, dan hebben de twee waarden van s tegengestelde teekens, terwijl de teekens gelijk zijn als de golffrontnormaal buiten B valt. Wat de straalsnelheid s betreft, daarvoor vindt men alleen dan reëele waarden als de straalrichting in de ruimte A binnen den raakkegel (45) valt.

25. Coördinatenstelsels in welke het vreemde geval van twee waarden der straalsnelheid v met hetzelfde teeken zich voordoet, zijn gemakkelijk te bedenken. Wij hebben slechts, van een gravitatievrij veld uigaand, een wentelend assenstelsel in te voeren ($x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$, $y' = - x \sin \omega t + y \cos \omega t$, $z' = z$, $t' = t$) en in dit laatste de voortplanting van het licht in een richting loodrecht op den voerstraal r en in het xy-vlak te beschouwen. Zet men in de „normale" uitdrukking voor ds^2

$$dx = \cos \omega t\, dx' - \sin \omega t\, dy' - \omega (y' \cos \omega t + x' \sin \omega t)\, dt'$$
$$dy = \sin \omega t\, dx' + \cos \omega t\, dy' + \omega (x' \cos \omega t - y' \sin \omega t)\, dt'$$
$$dz = dz'; \; dt = dt',$$

dan is de uitgeschreven vorm voor $ds^2 = 0$ nu:

$$- dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\, \omega y'\, dx'\, dt' - 2\, \omega x'\, dy'\, dt' +$$
$$+ (1 - \omega^2 r^2)\, dt'^2 = 0 .$$

Beschouwen we nu de lichtsnelheid in een punt van de y'-as, in eene richting loodrecht op de y'- en z'-as, dan zijn dy', dz', x' en z' gelijk nul, zoodat de vgl. wordt, na deeling door dt':

$$- v^2 + 2\, \omega r v + 1 - \omega^2 r^2 = 0 ,$$

dus, zooals te verwachten was, $v = 1 + \omega r$ of $v = - 1 + \omega r$.

Deze twee waarden voor v kunnen hetzelfde teeken hebben, indien ωr maar groot genoeg is.

26. Een afzonderlijke bespreking willen we wijden aan het geval, dat g_{a4} voor $a \neq 4$ gelijk nul is. Indien we in de electromagnetische grondvergelijkingen (14) en (14a) ψ_{14} enz., door E_x enz., ψ_{23} enz., door B_x enz., $\overline{\psi}^{23}$ enz., door H_x enz., en $\overline{\psi}^{14}$ enz., door $- D_x$ enz., vervangen nemen ze den bekenden vorm aan:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} + \varrho \overline{\overline{v_x}} \text{ enz.,}$$
$$\text{div. } D = \varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \text{ enz.,}$$
$$\text{div. } B = 0 .$$

Daarbij komen volgens (13) betrekkingen tusschen de componenten van **H** en **B**, en tusschen die van **E** en **D**, die voor 'l geval, dat we nu beschouwen, in den volgenden vorm geschreven kunnen worden:

$$\left.\begin{array}{l}
B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\
B_y = \mu_{xy} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\
B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \\
\\
D_x = \varkappa_{xx} E_x + \varkappa_{xy} E_y + \varkappa_{xz} E_z \\
D_y = \varkappa_{yx} E_x + \varkappa_{yy} E_y + \varkappa_{yz} E_z \\
D_z = \varkappa_{zx} E_x + \varkappa_{zy} E_y + \varkappa_{zz} E_z
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (48a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Hierin is volgens (30) } \mu_{xx} = \mu^{23}_{23},\ \mu_{xy} = \mu^{23}_{31} \text{ enz.} \\
\mu_{yx} = \mu^{31}_{23} \text{ enz.}
\end{array}\right\} \quad \ldots (49)$$

Zooals men ziet is $\mu_{xy} = \mu_{yx}$, enz. . . . . (50)

Verder is volgens (32) en (33)

$\varkappa_{xx} = -\sqrt{-g}\; g^{11}\; g^{44}$, $\varkappa_{xy} = -\sqrt{-g}\; g^{12}\; g^{44}$ enz. . . . (51)

Men ziet, dat $\varkappa_{xy} = \varkappa_{yx}$. . . . . (52)

27. De vergelijkingen, zooals ze nu staan in (48a), komen letterlijk overeen met die, waarmede in de klassieke electromagnetische lichttheorie de lichtvoortplanting in een anisotroop medium wordt onderzocht, en wel voor het geval, dat de coördinatenassenrichtingen zóó gekozen worden, dat ze niet samenvallen met de richtingen der hoofdassen van het kristallijne medium. Het resultaat van het onderzoek is daar in hoofdzaak, dat aangetoond wordt, dat in zoo'n medium verschijnselen van dubbele breking moeten optreden. Daar in het materievrije gravitatieveld geen dubbele breking te verwachten is, worden we gevoerd tot de vraag, welke betrekkingen er tusschen de coëfficiënten μ en $\varkappa$ moeten bestaan opdat de vergelijkingen (48) en (48a) in een kristallijne middenstof geen dubbele breking geven. Ter beantwoording dier vraag, willen we eerst de coördinatenassen evenwijdig met de hoofdrichtingen van het kristal kiezen [1]). Dan

[1]) We onderstellen, dat de electrische en magnetische hoofdrichtingen met elkaar samenvallen.

zijn μ_{ab} en $\varkappa_{ab}$ nul, als $a \mp b$. We noemen μ_{xx} enz., nu μ_x, $\varkappa_{xx}$ schrijven we $\varkappa_x$. Uit (48) en (48a) leiden we nu dadelijk af de voor ons doel benoodigde vergelijkingen:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_x \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varkappa_x \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_y \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varkappa_y \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_z \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varkappa_z \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

28. We vragen met welke snelheid een vlakke golf zich door het anisotrope medium voortbeweegt. De golf zij gegeven door:

$$E_x = P \sin \psi, \; E_y = Q \sin \psi, \; E_z = R \sin \psi$$
$$H_x = A \sin \psi, \; H_y = B \sin \psi, \; H_z = C \sin \psi.$$

Hierin is ψ kortheidshalve gezet voor $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{lx + my + nz}{s}\right)$.

P, Q, R; A, B en C zijn constante grootheden, de amplitudo's van de electrische en magnetische kracht, l, m en n zijn weer de richtings-cosinussen van de normaal op het golffront en s is de voortplantingssnelheid van het golffront.

Substitutie in de electro-magnetische grondvergelijkingen geeft zes betrekkingen:

$$\frac{Rm}{s} - \frac{Qn}{s} = \mu_x A; \quad \frac{Cm}{s} - \frac{Bn}{s} = -\varkappa_x P$$

$$\frac{Pn}{s} - \frac{Rl}{s} = \mu_y B; \quad \frac{An}{s} - \frac{Cl}{s} = -\varkappa_y Q$$

$$\frac{Ql}{s} - \frac{Pm}{s} = \mu_z C; \quad \frac{Bl}{s} - \frac{Am}{s} = -\varkappa_z R$$

Eliminatie van de amplitudo's levert ter bepaling van de golffrontsnelheid s de volgende vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 0 & -n & m & -\mu_x s & 0 & 0 \\ n & 0 & -l & 0 & -\mu_y s & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & -\mu_z s \\ \varkappa_x s & 0 & 0 & 0 & -n & m \\ 0 & \varkappa_y s & 0 & n & 0 & -l \\ 0 & 0 & \varkappa_z s & -m & l & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

Deze vergelijking is uitgeschreven, na deeling door s^2 van den vorm:

$$rs^4 + qs^2 + p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

waarin $r = -\varkappa_x \varkappa_y \varkappa_z \mu_x \mu_y \mu_z$

$$\begin{aligned} q &= l^2 \varkappa_x \mu_x (\varkappa_y \mu_z + \varkappa_z \mu_y) + m^2 \varkappa_y \mu_y (\varkappa_z \mu_x + \\ &\quad + \varkappa_x \mu_z) + n^2 \varkappa_z \mu_z (\varkappa_x \mu_y + \varkappa_y \mu_z) \ldots\ldots\ldots \quad (55) \\ p &= -(l^2 \varkappa_x + m^2 \varkappa_y + n^2 \varkappa_z)(l^2 \mu_x + m^2 \mu_y + n^2 \mu_z) \end{aligned}$$

29. In 't algemeen levert (54) twee verschillende waarden voor s^2 op, waaruit dan op de bekende wijze het verschijnsel van dubbele breking is af te leiden. Gemakkelijk is na te gaan, dat de conditie voor gelijke wortels der vergelijking, onafhankelijk van de waarden, die voor l, m en n gekozen worden, luidt:

$$\varkappa_x : \varkappa_y : \varkappa_z = \mu_x : \mu_y : \mu_z \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

In een kristal met deze eigenschap zou dus voor geen enkele voortplantingsrichting dubbele breking voorkomen. Daar evenwel bij alle bekende kristallijne diëlectrica μ_x, μ_y en μ_z nagenoeg 1 zijn, terwijl bij hen de waarden der drie $\varkappa$'s meer of minder uiteenloopen, is bovengenoemd uitzonderingsgeval nimmer waargenomen.

Ook op andere wijze is in te zien, dat bij evenredigheid der $\varkappa$'s en μ's bovenstaande determinant een volkomen kwadraat is. Hij wordt namelijk scheefsymmetrisch, indien we zetten: $\varkappa_x = p\,\mu_x$, $\varkappa_y = p\,\mu_y$, $\varkappa_z = p\,\mu_z$ en vervolgens door p^3 deelen, in dier voege, dat we eerst de eerste drie kolommen door $\sqrt{p}$ deelen en daarna de laatste drie rijen. Volgens de theorie der determinanten zijn scheefsymmetrische determinanten met een even aantal rijen altijd vierkanten.

Men kan zich afvragen, of de conditie van evenredigheid tusschen de $\varkappa$'s en μ's noodig is, wil het linkerlid der vergelijking in s voor alle mogelijke waarden van l, m, n een kwadraat zijn. Dat ze voldoende is, is aangetoond. Zet men $m = 1$, $n = 0$, $l = 0$, dan gaat de conditie voor dubbele wortels over in:

$$(\varkappa_x \mu_z + \varkappa_z \mu_x)^2 = 4\, \varkappa_x \varkappa_z \mu_x \mu_z \text{ of } (\varkappa_x \mu_z - \varkappa_z \mu_x)^2 = 0\,,$$

waaruit de noodzakelijkheid der bedoelde evenredigheid volgt.

30. Laten we de coördinatenassen niet samenvallen met de hoofdrichtingen van het kristal, dan hebben we te doen met de vergelijkingen (48*a*). Wij laten dan tevens voorloopig in het midden, of de electrische hoofdrichtingen van het kristal samenvallen met de magnetische hoofdrichtingen, ja dan neen.

Ter bepaling van de golffrontsnelheid s treedt nu op de determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & -n & m & -\mu_{xx}s & -\mu_{xy}s & -\mu_{xz}s \\ n & 0 & -l & -\mu_{yx}s & -\mu_{yy}s & -\mu_{yz}s \\ -m & l & 0 & -\mu_{zx}s & -\mu_{zy}s & -\mu_{zz}s \\ \varkappa_{xx}s & \varkappa_{xy}s & \varkappa_{xz}s & 0 & -n & m \\ \varkappa_{yx}s & \varkappa_{yy}s & \varkappa_{yz}s & n & 0 & -l \\ \varkappa_{zx}s & \varkappa_{zy}s & \varkappa_{zz}s & -m & l & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

Ook deze determinant bevat uitgeschreven alleen even machten van s, zooals door vervanging van s door $-s$ is in te zien. Daar de term zonder s nul is, is het linkerlid deelbaar door s^2, zoodat we weer te doen hebben met een vierkantvergelijking in s^2. Is bovendien $\varkappa_{ab} = p\mu_{ab}$, dan wordt wegens (50) of (52) de determinant op de wijze als in het vorige nummer scheefsymmetrisch en is weer een kwadraat. De evenredigheid der $\varkappa$'s met de μ's is derhalve een voldoende voorwaarde voor gelijke wortels. Om ook de noodzakelijkheid dier voorwaarde te doen inzien, kunnen we, na hetgeen in 29 behandeld is, er mee volstaan aan te toonen, dat, wil bovenstaande determinant voor alle toelaatbare waarden van l, m, n een vierkant zijn, de hoofdrichtingen der $\varkappa$'s samen moeten vallen met die der μ's.

Uitgeschreven heeft bovenstaande vergelijking den vorm:

$$r\,s^4 + q\,s^2 + p = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Hierin is $r = -|\varkappa|\,|\mu|$, waarin $|\varkappa|$ en $|\mu|$ de determinanten op de $\varkappa$'s en μ's voorstellen.

$$\left.\begin{aligned} q = m^2 \{ \varkappa^{xx}\mu^{zz} + \varkappa^{zz}\mu^{xx} - 2\,\varkappa^{xz}\mu^{xz} \} + n^2\{\ldots\} + l^2\{\ldots\} \\ + 2\,lm\{\varkappa^{xz}\mu^{yz} + \varkappa^{yz}\mu^{xz} - \varkappa^{zz}\mu^{xy} - \varkappa^{xy}\mu^{zz}\} + \\ + 2\,mn\{\ldots\} + 2\,nl\{\ldots\} \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Hierin is $\varkappa^{xy}$ de onderdeterminant van $\varkappa_{xy}$ in $|\varkappa|$, terwijl μ^{xy} een analoge beteekenis heeft.

$$p = -\Sigma\,(a\,b\,c\,d)\ \varkappa_{ab}\,\mu_{cd}\,\sigma_a\,\sigma_b\,\sigma_c\,\sigma_d \ldots\ldots \tag{60}$$

als men voor a, b, c, d elk achtereenvolgens x, y, z stelt en $\sigma_x = l$, $\sigma_y = m$, $\sigma_z = n$ neemt.

31. Ter vereenvoudiging willen we de coördinatenassen al vast zóó kiezen, dat $\varkappa_{xy} = 0$, $\varkappa_{yz} = 0$, $\varkappa_{zx} = 0$ om vervolgens de voorwaarde voor gelijke wortels $q^2 - 4\,pr = 0$ voor eenig bijzonder geval, wat l, m, n betreft, toe te passen. Voor $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$ vinden we

$$\left.\begin{aligned} p &= -\varkappa_{xx}\,\mu_{xx} \\ q = \varkappa^{zz}\,\mu^{yy} + \varkappa^{yy}\,\mu^{zz} &= \varkappa_{xx}\,(\varkappa_{yy}\,\mu^{yy} + \varkappa_{zz}\,\mu^{zz}) \\ r &= -\varkappa_{xx}\,\varkappa_{yy}\,\varkappa_{zz}\,|\mu| \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

De voorwaarde $q^2 - 4\,p\,r = 0$ geeft dus

$$(\varkappa_{yy}\,\mu^{yy} + \varkappa_{zz}\,\mu^{zz})^2 - 4\,\mu_{xx}\,|\mu|\,\varkappa_{yy}\,\varkappa_{zz} = 0$$

of $$(\varkappa_{yy}\,\mu^{yy} - \varkappa_{zz}\,\mu^{zz})^2 + 4\,\varkappa_{yy}\,\varkappa_{zz}\,(\mu^{yy}\,\mu^{zz} - |\mu|\,\mu_{xx}) = 0.$$

In den laatsten term vindt men bij uitwerking voor de uitdrukking tusschen de haakjes

$$(\mu_{xz}\,\mu_{xy} - \mu_{xx}\,\mu_{yz})^2 = (\mu^{yz})^2.$$

De voorwaarde wordt dus:

$$(\varkappa_{yy}\,\mu^{yy} - \varkappa_{zz}\,\mu^{zz})^2 + 4\,\varkappa_{yy}\,\varkappa_{zz}\,(\mu^{yz})^2 = 0\,.$$

Daar de grootheden $\varkappa_{yy}$ en $\varkappa_{zz}$ positief zijn, mogen we hieruit besluiten:

$$\varkappa_{yy}\,\mu^{yy} - \varkappa_{zz}\,\mu^{zz} = 0 \qquad \mu^{yz} = 0\,.$$

Nog twee andere gevallen beschouwende, μ^{yz} komt men nog tot de volgende vier betrekkingen:

$$\varkappa_{zz}\,\mu^{zz} - \varkappa_{xx}\,\mu^{xx} = 0 \qquad \mu^{zx} = 0$$

$$\varkappa_{xx}\,\mu^{xx} - \varkappa_{yy}\,\mu^{yy} = 0 \qquad \mu^{xy} = 0\,.$$

Het tweede drietal der zes betrekkingen toont aan, dat de hoofdrichtingen der μ's samen moeten vallen met die der $\varkappa$'s, terwijl vervolgens uit het eerste drietal volgt:

$$\varkappa_{xx} : \varkappa_{yy} : \varkappa_{zz} = \frac{1}{\mu^{xx}} : \frac{1}{\mu^{yy}} : \frac{1}{\mu^{zz}},$$

waarvoor nu kan geschreven worden:

$$\varkappa_{xx} : \varkappa_{yy} : \varkappa_{zz} = \mu_{xx} : \mu_{yy} : \mu_{zz}\,,$$ waarmede nog eens de noodzakelijkheid der evenredigheid is aangetoond.

Indien we nu weer letten op de lichtvoortplanting door het gravitatieveld, dan moeten we in het bovenstaande voor de $\varkappa$'s en de μ's de waarden nemen, zooals ze in (49) en (51) zijn aangegeven. Hier bestaat nu inderdaad evenredigheid tusschen de beide soorten van coëfficiënten.

Immers $$\frac{\mu_{xx}}{\varkappa_{xx}} = \frac{-\mu^{23}_{23}}{\sqrt{-g}\; g^{11}\, g^{44}} = 1 \text{ enz.}$$

Evenzoo $$\frac{\mu_{xy}}{\varkappa_{xy}} = \frac{-\mu^{23}_{31}}{\sqrt{-g}\; g^{12}\, g^{44}} = 1 \text{ enz.}$$

Hiermede is het uitblijven van dubbele breking verklaard.

Ten slotte zij er nog eens op gewezen, dat alleen in een gravitatieveld, waarvoor $g_{a4} = 0$ voor $a \neq 4$, de vectoren **B** en **D** op dezelfde wijze van **H** en **E** afhangen als in een kristallijn veld. In een willekeurig gravitatieveld hangt **B** zoowel van **H** als van **E** af. Hetzelfde is het geval met **D**. Ook voor dit veld is het linkerlid van de vergelijking in s een kwadraat. Hier bevat echter het linkerlid ook oneven machten van s, waarmede dan samenhangt het snelheidsverschil voor tegengestelde voortplantingsrichtingen.

32. Uit de wijze, waarop we in 22 tot de vergelijking, die de snelheid van den lichtstraal bepaalt, gekomen zijn volgt, dat de bekende vergelijking van Einstein $ds^2 = 0$ inderdaad de straalsnelheid en niet de golffrontsnelheid geeft. Dat dit zoo is, volgt trouwens onmiddellijk uit de covariantie van de vergelijkingen der gravitatietheorie en uit de physische beteekenis der lichtstralen. Deze zijn de beschrijvende lijnen [1]) van de cylindrische oppervlakken waardoor, als men van de diffractie mag afzien, lichtbundels zijdelings begrensd kunnen zijn; men kan boven-

---

[1]) Zie H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische physik. pag. 415.

dien zeggen, dat in het binnenste van zoodanigen lichtbundel de evenwichtsverstoring langs lichtstralen en met de aan deze eigen snelheid verder gaat. Vatten wij een bepaalde evenwichtsverstoring in het oog, dan zullen daarvoor in den tijd dx_4 de ruimtecoördinaten bepaalde veranderingen dx_1, dx_2, dx_3 ondergaan. Stel nu, dat wij eerst met een gravitatievrijveld te doen hebben, en dat wij door tot andere coördinaten over te gaan, een gravitatie invoeren. Eerst was dan de snelheid van den lichtstraal 1, zoodat dus gold, indien wij de oorspronkelijke coördinaten door accenten onderscheiden:

$$-dx'^2_1 - dx'^2_2 - dx'^2_3 + dx'^2_4 = 0 .$$

Bij de transformatie der coördinaten gaat het eerste lid dezer vergelijking over in $\Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b = 0$, zoodat in het nieuwe stelsel de voortplantingssnelheid van den straal inderdaad aan $ds^2 = 0$ voldoet.

33. Ten slotte een korte opmerking over de frequentie eener lichttrilling, uitgezonden door een lichtbron, die zich in een stationnair gravitatieveld in rust bevindt. We willen den invloed van de zwaartekracht op de frequentie als volgt bepalen. We denken ons de lichtbron eerst in een gravitatievrij veld. Vervolgens voeren we door de transformatieformules een pseudo-gravitatieveld in. Daardoor stellen we vast den invloed der pseudopotentialen op de lichtfrequentie. Dan onderstellen we, in overeenstemming met het slot der inleiding, dat de invloed van werkelijke gravitatiepotentialen dezelfde is, als die van de pseudo-potentialen.

Denken we ons voor de eenvoudigheid een waterstofatoom, dat volgens Bohr bestaat uit een positieve geladen kern en een in een ellips of cirkel daaromheen loopend negatief electron. De mogelijke banen van 't laatste zijn bepaald door eene quantenvoorwaarde. Springt het electron van een baan met de energie E_1 naar een andere baan met een kleinere energie E_2, dan zendt het atoom bij dien overgang een lichtbeweging uit, waarvan de frequentie bepaald wordt door de vergelijking:

$$E_1 - E_2 = h\nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

waarin ν de frequentie, h de z.g. constante van Planck is.

Denk nu eerst het atoom in een gravitatievrij veld. Dan is volgens (62) de uitgezonden frequentie bepaald door:

$$h\nu = \int_1 \overline{T}_4^4 \, d\tau - \int_2 \overline{T}_4^4 \, d\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

Hierin is $\overline{T}_4^4$ de energie per volume-eenheid, terwijl $d\tau$ een volume-element is van de ruimte, waarin de energie van het atoom verspreid is. Voeren we nu een stationnair pseudo-gravitatieveld in door een coördinatentransformatie, dan wordt nu de frequentie bepaald door

$$h\nu' = \int_1 \overline{T'}_4^4 \, d\tau' - \int_2 \overline{T'}_4 \, d\tau' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Men ziet gemakkelijk in, dat van de transformatiecoëfficiënten p, waardoor een stationnair veld ingevoerd wordt, waarbij het atoom in rust blijft, $p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0$. Evenzoo is $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$. 't Zelfde geldt voor de π's. Volgens (7) is nu:

$$\overline{T'}_4^4 = \sqrt{-g'} \, p_{44} \, \pi_{44} \, \overline{T}_4^4 = \sqrt{-g'} \, \overline{T}_4^4 \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

Is $d\tau$ een volume-element, waarin de coördinaten varieeren tusschen x_1 en $x_1 + dx_1$, x_2 en $x_2 + dx_2$ enz., dan levert onze transformatie een volume-element, waarvan de coördinaten liggen tusschen x'_1 en $x'_1 + dx'_1$, x'_2 en enz. Uit de betrekking $\sqrt{-g'} \, dx' \, dy' \, dz' \, dt' = dx \, dy \, dz \, dt$ leidt men dadelijk af:

$$d\tau' = \frac{p_{44} \, d\tau}{\sqrt{-g'}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

Substitutie van (65) en (66) in (64) geeft:

$$h\nu' = p_{44} \int_1 \overline{T}_4^4 \, d\tau - p_{44} \int_2 \overline{T}_4^4 \, d\tau = p_{44} \, h\nu \text{ [1]}$$

[1] Ondersteld is, dat p_{44} in 't gebiedje om 't atoom als constant mag beschouwd worden.

of $\nu' = p_{44}\,\nu$, waaruit onmiddellijk volgt:

$$\nu' = \sqrt{g_{44}}\,.\,\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

We nemen nu volgens 't voorgaande aan, dat (67) ook geldt voor de frequenties, die een rustend systeem, geplaatst in een gravitatievrij veld, uitzendt en die hetzelfde systeem uitzendt, wanneer het gezet wordt in een stationnair werkelijk gravitatieveld.

(67) komt overeen met de uitdrukking, die EINSTEIN afleidt [1]) voor de frequenties van een rustende klok, eerst geplaatst in een gravitatievrij veld en daarna in een stationnair zwaartekrachtveld.

---

[1]) EINSTEIN. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, pag. 62.

HOOFDSTUK II.

Hoeveelheid van beweging van een „klein" lichaam, dat zich beweegt in een gegeven gravitatieveld. Kracht, door dat veld op het lichaam uitgeoefend.

34. Onder een „klein lichaam" willen we verstaan een spanningsenergietensor $\overline{T}_a^b$, waarvan alle of een deel der componenten slechts in een beperkt, samenhangend deel der ruimte waarden hebben, die zooveel van nul verschillen, dat ze in aanmerking komen, terwijl in dat gedeelte der ruimte de gravitatiepotentialen van het gegeven veld slechts zóó weinig van punt tot punt veranderen, dat ze over de uitgestrektheid van het kleine lichaam als constanten mogen beschouwd worden. Een electron met zijn veld zal wel in alle werkelijke gravitatievelden als een klein lichaam beschouwd mogen worden, evenzeer als dit het geval zal zijn met de configuratie van electronen, waaruit het één of ander atoom bestaat. Ook een ruimte gevuld met zwarte straling kan volgens onze definitie als „klein lichaam" behandeld worden, indien in die ruimte de g's als constanten mogen opgevat worden. Op dezelfde wijze is een planeet in het gravitatieveld van de zon „klein". 't Is duidelijk, dat een klein lichaam niet bolvormig behoeft te zijn of bolvormige symmetrie behoeft te vertoonen.

35. Om nu de uitdrukking voor de hoeveelheid van beweging, in de x_1-richting van zoo'n lichaam in een gegeven gravitatieveld te onderzoeken, denken we ons 't lichaam eerst in rust in een gravitatievrij veld. Voeren we nu een willekeurige coördinatentransformatie uit, dan zal het lichaam in 't ingevoerde pseudogravitatieveld de één of andere beweging hebben. Door middel van de transformatieformules zullen we de uitdrukking voor de hoeveelheid van beweging van 't lichaam in 't pseudo-veld vast-

stellen en nu weer onderstellen, in overeenstemming met het slot der inleiding, dat in de uitdrukking voor de hoeveelheid van beweging in een werkelijk gravitatieveld de zwaartekrachtpotentialen op dezelfde wijze voorkomen.

36. Opgemerkt zij, dat in 't gravitatievrije veld voor het rustende kleine lichaam geldt de betrekking van LAUE: [1])

$$\int \overline{T}_b^a \, d\tau = 0 \quad \text{voor } a \neq 4 \; , \; b \neq 4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

Hierin kan de volume-integraal òf over de in 34 bedoelde, òf over de geheele ruimte genomen worden, wat volgens de definitie van een klein lichaam op hetzelfde neerkomt.

37. In een vergelijking als (68) wordt voor een bepaalde waarde van t over de uitgebreidheid x, y, z geïntegreerd. Willen wij, na nieuwe coördinaten x', y', z', t' te hebben ingevoerd de hoeveelheid van beweging of zooals aanstonds in 39 de energie van het lichaam berekenen, dan zullen wij op dergelijke wijze voor een vastgestelde waarde van t' over de ruimte x', y', z' moeten integreeren. Om deze integralen tot de vorige terug te brengen vatten wij een element van het lichaam in het oog. Een bepaald punt daarvan zal in de vierdimensionale uitgebreidheid een wereldlijn L beschrijven en de wereldlijnen van alle punten van het element zullen in die uitgebreidheid een buisvormig gebied G beslaan. Laat nu P en Q twee oneindig dicht bij elkander liggende punten van L zijn en snijden wij uit G twee deelen, het eene begrensd door uitgebreidheden $t =$ constant, die door P en Q gaan, het andere door uitgebreidheden $t' =$ constant, door dezelfde punten gebracht. Het is duidelijk, dat die deelen even groot zijn. Daaruit volgt dat, wanneer het eerste, in x, y, z, t-maat uitgedrukt, de grootte dS heeft en het tweede, in x', y', z', t'-maat gemeten, de grootte dS', de betrekking geldt:

$$\sqrt{-g}\, dS = \sqrt{-g'}\, dS' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69)$$

Laat dt en dt' de veranderingen zijn, die t en t' ondergaan

---

[1]) Zie LAUE „Das Relativitätsprinzip", pag. 208 en 209.

bij den overgang van P naar Q; verder de doorsnede van de buis G met een uitgebreidheid $t =$ constant, in x, y, z-maat uitgedrukt, $d\tau$ en de doorsnede met een uitgebreidheïd $t' =$ constant, gemeten in x', y', z'-maat, $d\tau'$. Dan is

$$dS = d\tau\, dt \quad , \quad dS' = d\tau'\, dt'$$

Daar in het stelsel x, y, z, t het veld „normaal" is, en het lichaam zich niet beweegt heeft men $\sqrt{-g} = 1$, $dt = ds$, welke laatste grootheid invariant is. Als men in plaats van dt' schrijft dx'_4 volgt dus uit (69)

$$d\tau\, ds = \sqrt{-g'}\, d\tau'\, dx'_4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Volgens wat in 6 gezegd is omtrent de componenten van de hoeveelheid van beweging per volume-eenheid is de te zoeken uitdrukking vooreerst voor te stellen door

$$-\int \overline{T'}_1^{4}\, d\tau' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

38. Zet nu in (71) volgens (70) $d\tau' = d\tau \dfrac{ds}{dx'_4} \dfrac{1}{\sqrt{-g'}}$ en vervang volgens (7) $\dfrac{1}{\sqrt{-g'}} \overline{T'}_1^{4}$ door $\Sigma\, (a\, b)\, p_{a1}\, \pi_{b4}\, \overline{T}_a^{b}$, dan wordt de hoeveelheid van beweging in de x'_1-richting:

$$-\int \Sigma\, (a\, b)\, p_{a1}\, \pi_{b4} \frac{ds}{dx'_4}\, \overline{T}_a^{b}\, d\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (72)$$

Allereerst zij opgemerkt, dat volgens (5) de potentialen van het ingevoerde pseudo-veld sommen van de producten der transformatiecoëfficiënten p zijn, en dat we voor 't kleine lichaam mogen aannemen, dat over zijn uitgestrektheid de waarden der p's en natuurlijk evengoed die der π's zóó weinig veranderen, dat ze als constanten mogen behandeld worden. Ook onderstellen we, dat 't kleine lichaam in hoofdzaak een translatiebeweging in het pseudo-veld heeft en wel in dien zin, dat geen rotaties voorkomen, waardoor $\dfrac{ds}{dx'_4}$, over de uitgestrektheid van het lichaam niet meer als constant zou mogen behandeld worden. We kunnen dan voor (72) zetten:

$$- \Sigma(a\,b)\, p_{a1}\, \pi_{b4} \frac{ds}{dx'_4} \int \overline{T}_a^b \, d\tau \,.$$

Volgens (68) is dit al dadelijk te vereenvoudigen tot

$$- p_{41}\, \pi_{44} \frac{ds}{dx'_4} \int \overline{T}_4^4 \, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Hierin is $\int \overline{T}_4^4 \, d\tau$ de totale energie van het kleine lichaam. We zullen deze zijn massa m noemen en schrijven nu voor (73):

$$\frac{- m\, p_{41}\, \pi_{44} \left(\dfrac{ds}{dx'_4}\right)^2}{\dfrac{ds}{dx'_4}}$$

Nu is [1]) $$\left(\frac{ds}{dx'_4}\right)^2 = \Sigma(a\,b)\, g_{ab} \frac{dx'_a}{dx'_4} \frac{dx'_b}{dx'_4}\,,$$

terwijl $$\frac{dx'_a}{dx'_4} = \frac{\Sigma(c)\, \pi_{ca} \dfrac{dx_c}{dx_4}}{\dfrac{dx'_4}{dx_4}} = \frac{\pi_{4a}}{\pi_{44}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Zoodoende is $\left(\dfrac{ds}{dx'_4}\right)^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab} \dfrac{\pi_{4a}}{\pi_{44}} \dfrac{dx'_b}{dx'_4}$ en kan voor de hoeveelheid van beweging geschreven worden:

$$\frac{- \Sigma(a\,b)\, m\, p_{41}\, \pi_{4a}\, g_{ab} \dfrac{dx'_b}{dx'_4}}{\dfrac{ds}{dx'_4}}$$

Uit de orthogonale betrekkingen $\Sigma(b)\, p_{ab}\, \pi_{cb} = \delta_a^c$ volgt dadelijk, dat bovenstaande uitdrukking gelijk is aan:

$$\frac{- \Sigma(a)\, m\, p_{41}\, p_{4a} \dfrac{dx'_a}{dx'_4}}{\dfrac{ds}{dx'_4}} \quad ^{2)}.$$

---

[1]) Bij de volgende berekeningen schrijven wij voor de zwaartekrachtpotentialen in het stelsel met de accenten g_{ab}, in plaats van g'_{ab}.

[2]) Voor g_{ab} te zetten: (wegens (5)) $-p_{1a}\, p_{1b} - p_{2a}\, p_{2b} - p_{3a}\, p_{3b} + p_{4a}\, p_{4b}$.

Merken we nu op, dat volgens deze zelfde betrekkingen geldt:

$$\Sigma(a)\,(p_{11}\,p_{1a} + p_{21}\,p_{2a} + p_{31}\,p_{3a})\,\pi_{4a} = 0\,,$$

dan kan volgens (74) ook geschreven worden:

$$\Sigma(a)\,(p_{11}\,p_{1a} + p_{21}\,p_{2a} + p_{31}\,p_{3a})\,\frac{d\,x'_a}{d\,x'_4} = 0\,,$$

zoodat bovenstaande uitdrukking kan vervangen worden door:

$$\frac{-\,\Sigma(a)\,m\,\dfrac{d\,x'_a}{d\,x'_4}\,(p_{41}\,p_{4a} - p_{11}\,p_{1a} - p_{21}\,p_{2a} - p_{31}\,p_{3a})}{\dfrac{d\,s}{d\,x'_4}} =$$

$$= \frac{-\,\Sigma(a)\,m\,g_{1a}\,\dfrac{d\,x'_a}{d\,x'_4}}{\dfrac{d\,s}{d\,x'_4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

(75) stemt volkomen overeen met de uitdrukking, die EINSTEIN geeft voor de hoeveelheid van beweging van een „stoffelijk punt" in de x_1-richting [1]). We nemen dus aan, dat in elk werkelijk gravitatieveld (75) de uitdrukking is voor den impuls in de x_1-richting van een klein lichaam, dat we dan ook wel bij gelegenheid „stoffelijk punt" kunnen noemen.

Ten slotte zij er nog eens op gewezen, dat het al of niet „klein" zijn van een lichaam afhangt van het zwaartekrachtveld, waarin het zich bevindt. In 't éene veld zal het klein zijn, in het andere veld niet klein. Zoo zal een electron in de meeste velden klein zijn. Bevinden zich echter twee electronen vlak bij elkaar, dan zullen zij ten opzichte van het door hen samen gevormde gravitatieveld niet meer klein zijn. Dan geldt dus voor hen in dat veld (75) niet meer. Iets dergelijks zou zich kunnen voordoen bij de elementen van een dubbelster in het gravitatieveld, dat zij te zamen vormen.

39. Ook de energie van het kleine lichaam in het gegeven gravitatieveld is gemakkelijk te vinden. Allereerst is deze:

---

1) Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie pag. 7.

$$\int \overline{T'}_4^4 \, d\tau' .$$

Past men op deze uitdrukking weder (7) en (70) toe en past men nu de herleiding van 37 ook hier toe met dit eenige verschil, dat sommige der indices 1 door den index 4 moeten vervangen worden, dan vindt men gemakkelijk de volgende uitdrukking voor de energie:

$$\frac{+ \Sigma\,(a)\, m\, g_{4a} \dfrac{dx'_a}{dx'_4}}{\dfrac{ds}{dx'_4}}$$

Ook deze uitdrukking stemt overeen met die EINSTEIN l. c. geeft voor de energie van een „stoffelijk punt" in een gegeven gravitatieveld.

40. We gaan berekenen de zwaartekracht, door het gravitatieveld op het kleine lichaam uitgeoefend. Wat we in (35) over de methode van berekening van den impuls zeiden, moge ook hier gelden.

Volgens (8) is de kracht in de x'_1-richting per volume-eenheid:

$$\frac{1}{2}\, \Sigma\,(pq)\, \sqrt{-g'}\, \frac{\partial g^{pq}}{\partial x'_1}\, T'_{pq}$$

Maakt men gebruik van (8^a) dan vindt men voor de totale kracht, die het veld op het kleine lichaam uitoefent:

$$\frac{1}{2}\, \Sigma\,(pq\mu)\, \frac{\partial g^{pq}}{\partial x'_1}\, g_{p\mu} \int \overline{T}'^{\mu}_{q} d\tau' .$$

Volgens (70) is deze uitdrukking te vervangen door:

$$-\frac{1}{2}\, \Sigma\,(\alpha\,\beta\,p\,q\,a\,b\,\mu)\, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1}\, g^{p\alpha}\, g^{q\beta}\, g_{p\mu}\, p_{aq}\, \pi_{b\mu}\, \frac{ds}{dx'_4} \int \overline{T}^{b}_{a}\, d\tau,$$

waarin we ook nog $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x'_1}$ door $- \Sigma\,(\alpha\,\beta) \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1}\, g^{p\alpha}\, g^{q\beta}$ vervangen hebben [1]). Volgens (68) hebben we ons alleen bezig te houden met $a = b = 4$.

---

[1]) Zie EINSTEIN. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, pag. 35.

De bedoelde kracht wordt dus bij invoering van de „massa" m:

$$\frac{-\frac{1}{2} m \, \Sigma (\alpha \, \beta \, q) \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1} \, g^{q\beta} \, p_{4q} \, \pi_{4\alpha} \left(\frac{ds}{dx'_4}\right)^2}{\frac{ds}{dx'_4}}$$

Hierin zijn de factoren $g^{p\alpha} \; g_{p\mu}$ door 1 vervangen voor $\mu = \alpha$ en door nul voor $\mu \neq \alpha$. Vervolgens merken we op, dat, gebruik makende van (74):

$$\left(\frac{ds}{dx'_4}\right)^2 = \Sigma (\mu\nu) \, g_{\mu\nu} \, \frac{dx'_\mu}{dx'_4} \, \frac{dx'_\nu}{dx'_4} = \Sigma (\mu\nu) \, \frac{\pi_{4\mu} \, \pi_{4\nu} \, g_{\mu\nu}}{\pi_{44}^2} \, ,$$

zoodat bovenstaande uitdrukking wordt:

$$\frac{-\frac{1}{2} m \, \Sigma (\alpha \, \beta \, q \, \mu \, \nu) \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1} \, g^{q\beta} \, p_{4q} \, \pi_{4\alpha} \, \pi_{4\mu} \, \pi_{4\nu} \, g_{\mu\nu}}{\pi_{44}^2 \, \frac{ds}{dx'_4}}$$

Nu is wegens de transformatieformule (pag. 4) voor $g^{q\beta}$ te zetten: $- \Sigma (a) \, \pi_{aq} \, \pi_{a\beta} + 2 \, \pi_{4q} \, \pi_{4\beta}$.

Dit gesubstitueerd en wederom gebruik gemaakt van de orthogonale betrekkingen tusschen de p's en de π's, geeft:

$$\frac{-\frac{1}{2} m \, \Sigma (\alpha \, \beta \, \mu \, \nu) \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1} \, \pi_{4\beta} \, \pi_{4\alpha} \, \pi_{4\mu} \, \pi_{4\nu} \, g_{\mu\nu}}{\frac{ds}{dx'_4} \, \pi_{44}^2}$$

Zetten we ten slotte voor $g_{\mu\nu}$ in de plaats wegens (5):

$$- \Sigma (a) \, p_{a\mu} \, p_{a\nu} + 2 \, p_{4\mu} \, p_{4\nu} \, ,$$

dan wordt de kracht:

$$\frac{-\frac{1}{2} m \, \Sigma (\alpha \, \beta) \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1} \, \pi_{4\beta} \, \pi_{4\alpha}}{\pi_{44}^2 \, \frac{ds}{dx'_4}} \, ,$$

wat volgens (74) vervangen mag worden door:

$$\frac{-\frac{1}{2}m\,\Sigma(\alpha\,\beta)\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_1}\,\frac{dx'_\alpha}{dx'_4}\,\frac{dx'_\beta}{dx'_4}}{\frac{ds}{dx'_4}}.$$

Ook deze uitkomst stemt overeen met wat EINSTEIN l. c. aangeeft voor de kracht, die in de x_1-richting door een gegeven gravitatieveld op een „stoffelijk punt" wordt uitgeoefend. De opmerking, aan het slot van 38 gemaakt, geldt natuurlijk ook hier.

41. Wat we tot nu toe in dit hoofdstuk hebben aangetoond, kan ook op de volgende wijze geformuleerd worden: Indien een klein lichaam zich in een gegeven gravitatieveld beweegt met een snelheid, waarvan de componenten zijn $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ en $\dot{x}_3$ en we voeren in een grootheid

$$H = -m\sqrt{g_{11}\,\dot{x}_1^2 + \ldots + 2\,g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots + 2\,g_{14}\,\dot{x}_1 + \ldots\, g_{44}}\,,$$

dan zijn de componenten van de hoeveelheid beweging gegeven door:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} = -m\,\frac{g_{11}\dot{x}_1 + g_{12}\,\dot{x}_2 + g_{13}\,\dot{x}_3 + g_{14}}{\sqrt{g_{11}\,\dot{x}_1^2 + \ldots}}\,,\ \text{enz.} \quad . \quad . \quad (76)$$

terwijl de componenten der kracht door het gravitatieveld op het lichaam uitgeoefend zijn:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\,m\,\frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\,\dot{x}_1^2 + \ldots\ldots + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}}{\sqrt{g_{11}\,\dot{x}_1^2 + \ldots\ldots}}\,,\ \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

42. We willen deze uitkomsten eens gebruiken, om de centrifugale kracht en de Corioliskracht te berekenen. Daartoe voeren we een transformatie uit, die ons van een assenstelsel, waarin de g's de normale waarden hebben, voert naar een tweede stelsel, dat ten opzichte van het eerste met constante snelheid roteert. Kiezen we de z-as als rotatieas, dan zijn de transformatieformules daardoor nog niet éénduidig vastgesteld. Men kan b.v. vergen dat ze zoo gekozen worden, dat zij op grooten afstand

van de as, waarbij de rotatie veel heeft van een onversnelde translatie, de Lorentz-contractie geven [1]). Men kan ook de eenvoudige transformatie kiezen, die overeenkomt met de z.g. Galileitransformatie. Volgens de algemeene relativiteitstheorie is, wat het wezen der zaak betreft, geen stel van transformatieformules bevoorrecht boven andere toelaatbare stellen. Voor ons doel willen we de zooeven bedoelde eenvoudige transformatie kiezen, dus:

$$x_1 = x'_1 \cos \omega x'_4 - x'_2 \sin \omega x'_4 \,;\, x_2 = x'_1 \sin \omega x'_4 + x'_2 \cos \omega x'_4 \,;$$
$$x_3 = x'_3 \,;\, x_4 = x'_4 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (78)$$

ω is de hoeksnelheid.

De tabel der transformatiecoëfficiënten p wordt dan

$$\begin{array}{cccc}
\cos \omega x'_4 & -\sin \omega x'_4 & 0 & -\omega x'_1 \sin \omega x'_4 - \omega x'_2 \cos \omega x'_4 \\
\sin \omega x'_4 & \cos \omega x'_4 & 0 & \omega x'_1 \cos \omega x'_4 - \omega x'_2 \sin \omega x'_4 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

terwijl men voor de waarden der potentialen vindt:

$$g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = -1 \,,\, g'_{14} = \omega x'_2 \,,\, g'_{24} = -\omega x'_1 \,,\, g'_{44} = 1 - \omega^2 \left(x'^2_1 + x'^2_2 \right)$$

de verdere g's zijn nul . . . . (79)

43. De bewegingsvergelijking van een klein lichaam is nu volgens (76) en (77) voor de beweging in de x_1-richting, als we de accenten weglaten:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} \right) .$$

Dit wordt voor snelheden, die klein zijn ten opzichte van de eenheid, en waarbij dus de wortelvorm in den noemer van H met groote benadering gelijk aan één is:

$$+ m (\omega \dot{x}_2 + \omega^2 x_1) = \frac{d}{dt} m (\dot{x}_1 - \omega x_2) \; \ldots\ldots \; (79a)$$

[1]) Zie F. Kottler, Annalen der Physik. 1918 No. 14.

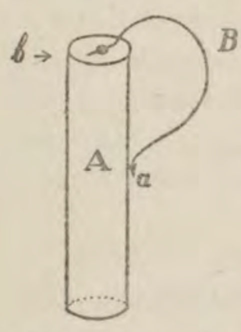
De bewegingsvergelijking van een stoffelijk punt ten opzichte van een assenstelsel, dat een rotatie uitvoert als de hier ingevoerde, zou in de klassieke mechanica volgens een bekende uitkomst luiden:

$$2\,m\,\omega\,\dot{x}_2 + m\,\omega^2 x_1 = \frac{d}{dt} m\dot{x}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79b)$$

Vergelijkt men (79*a*) en (79*b*), dan merkt men op, dat de tweede term van het linkerlid, zoowel in (79*a*) als in (79*b*), de gewone centrifugale kracht voorstelt; daarentegen levert de eerste term van dat lid in (79*a*) slechts de *halve* kracht van Coriolis. De andere helft daarvan bevindt zich als fluxie van de hoeveelheid van beweging in den tweeden term van het rechterlid.

44. We willen aan deze korte bespreking van een roteerend assenstelsel vastknoopen een beschouwing over een kwestie van unipolaire inductie.

Het verschijnsel van unipolaire inductie kan opgewekt worden door een cylindervormige staafmagneet (A) door middel van twee glijdcontacten (*a* en *b*) in aanraking te brengen met een koperdraad *B* op de wijze, zooals nevenstaande fig. aangeeft. Het bedoelde verschijnsel kan nu verkregen worden, door den magneet om zijn as te doen roteeren, terwijl de draad stil gehouden wordt. In deze ontstaat nu een electrische stroom. Draaien we daarentegen den draad met dezelfde snelheid in tegengestelde richting als zooeven den magneet, terwijl we nu den laatsten in rust laten, dan ontstaat dezelfde electrische stroom in *B*. Men kan zich afvragen, waar in beide gevallen de zetel van de electromotorische kracht is, die den bedoelden stroom veroorzaakt [1]). Op het standpunt van de electronentheorie is 't duidelijk, dat in het eerste geval de electronen in A zich bewegen door het magnetische veld binnen in A. Deze electronen ondervinden zoo-



[1]) Zie Pegram. Physical Review, Dec. 1917 pag. 591.

doende krachten van het magnetische veld, waardoor ze bewegingen krijgen, die de oorzaak van den stroom in B zijn. In het tweede geval daarentegen bewegen zich de electronen in B door het magnetische veld, zoodat nu de zetel van de electromotorische kracht in den draad gezocht moet worden. Men komt nu licht tot de volgende schijnbare tegenstrijdigheid. Denken we ons een assenstelsel II, dat in het tweede geval met B mededraait. Daarin staat de draad stil en roteert de magneet. Volgens het standpunt der electronentheorie zetelt in dit coördinatenstelsel de electromotorische kracht in A, terwijl volgens die theorie in het eerst gebezigde stelsel I, waarin de draad zich beweegt, de electromotorische kracht in B gezocht moet worden. De tegenstrijdigheid wordt opgelost, doordat, indien we het stelsel I als gravitatievrij veronderstellen, het stelsel II een gravitatieveld vertoont, waarvan de potentialen gegeven kunnen worden door de uitdrukkingen voor de g's, zooals ze in § 42 aangewezen zijn. In II mag dus niet zonder meer de klassieke electronentheorie toegepast worden. Men moet daarin rekening houden met het gravitatieveld.

45. Om aan te toonen, dat ook in II de electromotorische kracht in B gezocht moet worden, terwijl bovendien die kracht dezelfde waarde heeft als de kracht, die in I op de electronen in den draad werkt, denken we ons in B een enkel electron, dat ten opzichte van den draad in rust is.

In het eerste stelsel beweegt het electron zich. De kracht, die er op wordt uitgeoefend in de x_a-richting wordt gegeven door:

$$K_a = \Sigma(b)\ \psi_{ab}\ v_b \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Hierin is volgens de reeds gebruikte notatie:

$$\psi_{14} = E_1\ ;\ \psi_{24} = E_2\ ;\ \psi_{34} = E_3\ ;\ \psi_{23} = B_1\ ;\ \psi_{31} = B_2\ ;\ \psi_{12} = B_3\ ,$$

waarin de B's de componenten der magnetische inductie zijn,

[1]) Zie LORENTZ K. A. v. W. 12 Febr. 1915, pag. 1084.

In bovenstaande berekening is in de uitdrukking voor de kracht overal de factor e (lading van het electron) weggelaten.

$v_3 = 0$, $v_4 = 1$. Bovenstaande uitdrukking voor de kracht is niet anders dan die uit de electronentheorie. Uitgeschreven zijn de componenten:

$$\begin{aligned} K_1 &= \quad B_3 v_2 + E_1 \\ K_2 &= - B_3 v_1 + E_2 \\ K_3 &= \quad B_2 v_1 - v_2 B_1 + E_3 \ . \end{aligned}$$

In het tweede stelsel rust het electron, zoodat daarin alleen v'_4 van nul verschilt. Nu is volgens de transformatieformules (15):

$$\psi'_{14} = \Sigma (c\, d)\, p_{c1}\, p_{d4}\, \psi_{cd} = \omega x'_1\, \psi_{12} + \psi_{14} \cos \omega x'_4 + \psi_{24} \sin \omega x'_4 \ .$$

Evenzoo: $\psi'_{24} = \omega x'_2\, \psi_{12} + \psi_{24} \cos \omega x'_4 - \psi_{14} \sin \omega x'_4$

en $\psi'_{34} = -(\omega x'_1 \sin \omega x'_4 + \omega x'_2 \cos \omega x'_4)\, \psi_{31} +$

$+ (\omega x'_1 \cos \omega x'_4 - \omega x'_2 \sin \omega x'_4)\, \psi_{32} + \psi_{34} = + v_1 B_2 - v_2 B_1 + E_3$.

De componenten van de kracht, die in het tweede stelsel op het rustend electron werkt, zijn dus volgens 80:

$$\left. \begin{aligned} K'_1 &= \omega x'_1\, B_3 + E_1 \cos \omega x'_4 + E_2 \sin \omega x'_4 \\ K'_2 &= \omega x'_2 B_3 + E_2 \cos \omega x'_4 - E_1 \sin \omega x'_4 \\ K'_3 &= v_1 B_2 - v_2 B_1 + E_3 \ . \end{aligned} \right\} \quad . \ . \ . \ (81)$$

Nu leidt men direct af:

$$\begin{aligned} \omega x'_1 &= \quad v_2 \cos \omega x'_4 - v_1 \sin \omega x'_4 \\ \omega x'_2 &= - v_2 \sin \omega x'_4 - v_1 \cos \omega x'_4 \ . \end{aligned}$$

Substitueert men deze uitkomsten in (81), dan ziet men gemakkelijk in dat K en K' denzelfden krachtvector voorstellen. De kracht K' is de electrische kracht, die, hoewel ze in 't eerste stelsel ontbreekt (daar bij de beschouwde proef $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ is), in 't tweede stelsel optreedt, in zekeren zin als gevolg van het gravitatieveld, dat in dat stelsel aanwezig is.

46. Natuurlijk staat het ons vrij, de rollen der twee stelsels om te keeren, d.w.z., aan te nemen, dat II gravitatievrij is, terwijl in I een gravitatieveld heerscht. In het tweede stelsel is dan de kracht, op het electron uitgeoefend nul. Volgens de voor-

gaande beschouwingen moet dat nu ook het geval zijn in het eerste stelsel, hoewel daarin het electron zich beweegt in een magnetisch veld. De transformatie van de magnetische inductie uit II levert nu echter componenten voor de electrische kracht in I op. Deze electrische kracht heft in I de magnetische kracht op.

47. Nu nog een enkel woord over de zwaartekracht, die de transformatie invoert. Is stelsel I normaal, dan moet men daarin, om het electron ten opzichte van den draad in rust te houden, een uitwendige centripetale kracht F laten werken. Deze wordt in stelsel II opgeheven door de centrifugale kracht van het gravitatieveld. Is stelsel II normaal, dan behoeft daarin geen kracht op het elektron te werken om het in den draad in rust te houden. Maar in stelsel I worden ingevoerd een centrifugale kracht en een Corioliskracht, welke laatste zooals uit (79*a*) blijkt, waarin nu ω door $-\omega$ vervangen moet worden, tegengesteld gericht is aan de eerste en dubbel zoo groot is, zoodat precies de middelpunt zoekende kracht geleverd wordt, die in stelsel I het electron op zijn baan moet houden.

De vraag naar den zetel van de electromotorische kracht bij het besproken verschijnsel van unipolaire inductie heeft dus pas zin, indien men daarbij aangeeft welk coördinatenstelsel men als „normaal" wenscht te beschouwen.

HOOFDSTUK III.

Gravitatieveld, dat wordt teweeggebracht door een stationnairen spanningsenergietensor, die bolvormige symmetrie om een middelpunt vertoont.

48. Om het veld te bepalen, willen we gebruik maken van de differentiaalvergelijkingen, die EINSTEIN gegeven heeft ter berekening van een gravitatieveld uit de spannings-energiecomponenten der materie. De tien bedoelde vergelijkingen kunnen samengevat worden in den vorm:

$$G_{ab} = -\varkappa \left(T_{ab} - \frac{1}{2}\, g_{ab}\, T\right) \quad \ldots\ldots\ldots (82)$$

De T's zijn dezelfde grootheden, die we reeds in vorige nummers ontmoetten. Wij herinneren er aan, dat

$$T = \Sigma(cd)\, g^{cd}\, T_{cd}\,.$$

Vervolgens is $\varkappa$ een constante, waarvan de waarde uit het volgende zal blijken.

De grootheden G_{ab} worden op de volgende wijze gedefinieerd:

$G_{ab} = \Sigma(c\,d)\, g^{cd}\,(a\,c\,, db)$, waarin $(a\,c\,, d\,b)$ het symbool van RIEMANN is:

$$(a\,c\,, d\,b) = \frac{1}{2}\left(g_{ab\,.\,cd} + g_{cd\,.\,ab} - g_{ad\,.\,bc} - g_{cb\,.\,ad}\right) +$$
$$+ \Sigma(p\,q)\, g^{pq} \left\{ \begin{bmatrix} a\,b \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\,d \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a\,d \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\,b \\ q \end{bmatrix} \right\};$$

Hierin is $g_{ab\,.\,cd}$ gezet voor $\dfrac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x_c\, \partial x_d}$, terwijl ten slotte $\begin{bmatrix} a\,b \\ p \end{bmatrix}$ het symbool van CHRISTOFFEL is en beteekent:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ap}}{\partial x_b} + \frac{\partial g_{bp}}{\partial x_a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_p}\right).$$

Daar de grootheden G_{ab} covariante tensoren van den tweeden rang zijn en bovendien symmetrisch zijn, hetgeen direct uit

4

't bovenstaande volgt, behouden de vergelijkingen (82) denzelfden vorm bij een willekeurige coördinatentransformatie.

49. Het middelpunt der beschouwde materie kiezen we als oorsprong en voeren in poolcoördinaten:

$x_1 = \cos\Theta\,;\, x_2 = \varphi\,;\, x_3 = r\,;\, x_4 = t$ in dien zin, dat de rechthoekige coördinaten zouden zijn:

$$x = r\cos\Theta\,;\, y = r\sin\Theta\cos\varphi\,;\, z = r\sin\Theta\sin\varphi.$$

Het te berekenen stationnaire veld zal eveneens bolvormige symmetrie om den oorsprong vertoonen. Dit brengt met zich mede, dat de uitdrukking voor ds^2, die met de aangegeven coördinaten in een „normaal" veld van den vorm:

$$-\frac{x_3^2}{1-x_1^2}dx_1^2 - x_3^2\left(1-x_1^2\right)dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 \quad \ldots \quad (83)$$

is, er nu als volgt zal uitzien:

$$-\frac{u}{1-x_1^2}dx_1^2 - u\left(1-x_1^2\right)dx_2^2 - v\,dx_3^2 + w\,dx_4^2 \;{}^{1)}. \quad . \quad (84)$$

u, v en w zijn nader te bepalen functie's van r, dus van x_3.

50. Allereerst dienen nu aangegeven te worden de waarden, die de grootheden G_{ab} verkrijgen, indien ze behooren bij de uitdrukking (84) voor ds^2. Na een vrij lange berekening vindt men dat voor ongelijke indices $G_{ab} = 0$, terwijl verder

$$\left.\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{1-x_1^2}\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right)\\
G_{22} &= \left(1-x_1^2\right)\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right)\\
G_{33} &= \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{2u^2} - \frac{u'v'}{2uv} - \frac{v'w'}{4vw} + \frac{w''}{2w} - \frac{w'^2}{4w^2}\\
G_{44} &= \frac{-u'w'}{2uv} + \frac{v'w'}{4v^2} - \frac{w''}{2v} + \frac{w'^2}{4vw}.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (85)$$

[1]) Lorentz, Verslag K. A. v. W. 20 Sept. 1916, pag. 482.

Hierin beduiden de enkele en dubbele accenten, dat de grootheden één, respect. twee keer naar r gedifferentieerd zijn.

51. We voeren nu eene vereenvoudiging in. De te berekenen functie's u, v en w onderstellen we zeer weinig te verschillen van de waarden, die voor hen in een gravitatievrijveld gelden en die optreden in de uitdrukking (83) voor $d\,s^2$. Wij stellen:

$$u = r^2 (1 + \lambda)\,;\, v = 1 + \mu\,;\, w = 1 + \nu\,,$$

waarin λ, μ en ν functies van r zijn.

Bovenstaande uitdrukkingen voor de G's gaan nu over in:

$$\left.\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{1-x_1^2}\left(\lambda + 2\,r\,\lambda' + \frac{1}{2}\,r^2\,\lambda'' - \mu - \frac{1}{2}\,r\,\mu' + \frac{1}{2}\,r\,\nu'\right) \\
G_{22} &= \left(1-x_1^2\right)\left(\lambda + 2\,r\,\lambda' + \frac{1}{2}\,r^2\,\lambda'' - \mu - \frac{1}{2}\,r\,\mu' + \frac{1}{2}\,r\,\nu'\right) \\
G_{33} &= \frac{2}{r}\,\lambda' + \lambda'' - \frac{1}{r}\,\mu' + \frac{1}{2}\,\nu'' \\
G_{44} &= -\left(\frac{1}{r}\,\nu' + \frac{1}{2}\,\nu''\right)
\end{aligned}\right\} \;. \quad (86)$$

Bij de hier niet uitgevoerde afleiding dezer waarden zijn tweede en hoogere machten van λ, μ en ν en van hunne differentiaalquotienten, alsmede producten dezer grootheden verwaarloosd. Bovenstaande uitkomsten voor de G's deelt Prof. Lorentz mede in het verslag der K. A. v. W. Mei 1917 blz. 1384.

52. Nu willen we nagaan, wat we voor ons geval in (82) voor de grootheden T_{ab} en T moeten zetten. Daartoe bepalen we den vorm der componenten $\overline{T}_c^d$ van den spannings-energietensor. De bolvormige symmetrie brengt mede, dat de energiecomponent $\overline{T}_4^4$ één of andere functie is van den afstand r tot het middelpunt. De componenten met één index 4, dus die van den energiestroom en van de hoeveelheid van beweging zijn natuurlijk nul. Wat de spanningscomponenten betreft, kan men hiervan uitgaan, dat voor een vlakte-element door een willekeurig punt P, loodrecht op $O\,P$ gebracht, de spanning normaal moet zijn, stel M en dat hetzelfde ook moet gelden voor een vlakte-element door $P\,O$ gaande; en wel moet de waarde N dier spanning voor alle

door PO gaande vlakte-elementen dezelfde zijn. M en N zijn natuurlijk alleen functie's van den afstand r. Om deze spanningen op rechthoekige coördinatenassen aan te geven, gaan we als volgt te werk:

We willen de spanningen in een willekeurig punt P met behulp van het assenstelsel $(x_1' \; x_2' \; x_3')$ opschrijven. In een rechthoekig stelsel, waarvan OP de x_1-as is, geldt:

$$\overline{T}_1^1 = M \,,\; \overline{T}_2^2 = \overline{T}_3^3 = N \,,\; \overline{T}_1^2 \,, \text{enz.} = 0 \,.$$

Voeren we nu een assendraaiing uit waardoor het x_1, x_2, x_3-stelsel overgaat in het stelsel met accenten, dan komt dat neer op de transformatie:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x'_1\,(x'_1\,x_1) + x'_2\,(x'_2\,x_1) + x'_3\,(x'_3\,x_1)\\
x_2 &= x'_1\,(x'_1\,x_2) + x'_2\,(x'_2\,x_2) + x'_3\,(x'_3\,x_2)\\
x_3 &= x'_1\,(x'_1\,x_3) + x'_2\,(x'_2\,x_3) + x'_3\,(x'_3\,x_3)
\end{aligned}$$

Hierin is $(x'_1\,x_1)$ de cosinus van den hoek tusschen de x_1- en de x'_1-as en verder is in $P\,(x_1\,x'_1) = \frac{x'_1}{r}\,,\; (x_1\,x'_2) = \frac{x'_2}{r}\,,\; (x_1\,x'_3) = \frac{x'_3}{r}\,.$

Door nu gebruik te maken van de transformatieformules (7) vindt men gemakkelijk nadat men de accenten weer weggelaten heeft:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{T}_1^1 = N + (M-N)\,\frac{x_1^2}{r^2}\,,\; \overline{T}_2^2 = N + (M-N)\,\frac{x_2^2}{r^2}\,,\\
&\overline{T}_3^3 = N + (M-N)\,\frac{x_3^2}{r^2}\,,\; T_1^2 = T_2^1 = (M-N)\,\frac{x_1\,x_2}{r^2}\,.\;.\;.\;.\;.\\
&\left(\text{samengevat voor: } a \neq 4, b \neq 4\,, \overline{T}_a^b = \delta_a^b\,N + (M-N)\,\frac{x_a\,x_b}{r^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Verder geldt $\overline{T}_4^4 = E$, waarin E de energie per volume-eenheid beteekent.

Willen we de spanningen en de energie ook uitdrukken in de in dit hoofdstuk gebruikte poolcoördinaten, dan kunnen we

---

[1]) LORENTZ. Verslag K. A. v. W., 12 Febr. 1915, pag. 1074 formule 23.

dit doen door gebruik te maken van de in 50 aangegeven transformatieformules. We vinden dan na eenige becijfering:

$$\overline{T}{}^{1}_{1} = Nr^2 \,;\; \overline{T}{}^{2}_{2} = Nr^2 \,;\; \overline{T}{}^{3}_{3} = Mr^2 \,;\; \overline{T}{}^{4}_{4} = Er^2 \,;\; \overline{T}{}^{2}_{1} = 0 \text{ , enz.}$$

Wij berekenen hieruit met behulp van (8a) en (11) de grootheden T_{ab} en T. Daar deze in het tweede lid der veldvergelijkingen (82) met $\varkappa$ vermenigvuldigd voorkomen, en wij grootheden van de orde $\varkappa^2$ verwaarloozen, zullen wij voor de grootheden g_{pa}, g^{cd} in (8a) en (11) de „normale" waarden mogen nemen, die men bij de thans gebezigde coördinaten aan de uitdrukking (83) kan ontleenen. Men krijgt dan:

$$T_{11} = -\frac{Nr^2}{1-x_1^2} \,;\; T_{22} = -Nr^2(1-x_1^2) \,;\; T_{33} = -M \,;$$

$$T_{44} = E \,;\; T_{12} = 0 \text{ enz.}$$

en ten slotte: $\qquad T = M + 2N + E\,.$

53. We zetten nu de voor de T's verkregen waarden in de veldvergelijkingen (82) en gebruiken in het tweede lid daarvan weer de „normale" waarden der g's. Gebruik makende van de voor de G's verkregen benaderde waarden (86), vinden we nu de volgende vergelijkingen voor de bepaling van het gravitatieveld:

$$\left.\begin{aligned} \lambda + 2r\lambda' + \frac{1}{2}r^2\lambda'' - \mu - \frac{1}{2}r\mu' + \frac{1}{2}r\nu' &= -\frac{1}{2}\varkappa r^2(M+E) \\ \frac{2}{r}\lambda' + \lambda'' - \frac{1}{r}\mu' + \frac{1}{2}\nu'' &= \varkappa\left(\frac{1}{2}M - N - \frac{1}{2}E\right) \\ \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2}\nu'' &= \varkappa\left(\frac{1}{2}E - N - \frac{1}{2}M\right) \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

We letten op de laatste van deze drie vergelijkingen. Als we deze integreeren in de onderstelling, dat ν in het middelpunt eindig blijft, dan vinden we gemakkelijk:

$$\nu = \int_0^r \frac{dr}{r^2}\int_0^r 2\,\varkappa r^2\left(\frac{1}{2}E - N - \frac{1}{2}M\right)dr + \nu_0 \quad . \; . \; (90)$$

Hierin is ν_0 de waarde, die ν in 't middelpunt aanneemt.

De uitkomst (90) zal pas verder uitgewerkt kunnen worden, indien we weten, welke functies van r we voor E, N en M moeten substitueeren. Een moeilijkheid is hier, dat de toestand van het lichaam door de eigen gravitatie er van wordt gewijzigd, zoodat ook de grootheden E, N, M van die gravitatie afhangen. Daar wij steeds grootheden van de orde $\varkappa^2$ verwaarloozen mogen wij echter hiervan afzien en voor E, N, M de waarden nemen, die bij afwezigheid der gravitatie zouden bestaan.

54. Als eerste toepassing van (89) beschouwen wij een lichaam, waarin alleen ten gevolge van de gravitatie een afwijking van een homogene stofverdeeling en inwendige spanningen bestaan. Volgens het zooeven gezegde mogen wij dan $M = 0, N = 0$ stellen, en aan de „dichtheid” E een constante waarde ϱ toekennen. Wij nemen aan, dat die waarde overal binnen een bol met den straal a bestaat, en dat de dichtheid vervolgens voor waarden van r, gelegen tusschen $a + \varepsilon$ (ε zeer klein), afneemt tot de waarde nul.

De laatste vergelijking van (89) wordt nu:

$$\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2}\nu'' = \frac{1}{2}\varkappa\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Deze vergelijking geldt binnen den bol. Daarbuiten gaat ze over in

$$\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2}\nu'' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

We willen van beide vergelijkingen een oplossing hebben, die op oneindig grooten afstand verdwijnt en met haar eerste afgeleide aan 't boloppervlak doorloopend is. Dat dit laatste het geval moet zijn, volgt hieruit dat blijkens (91) de differentiaalquotienten ν' en ν'' ook in de bovengenoemde dunne laag eindig moeten zijn. Men vindt gemakkelijk:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{buiten den bol} \ldots\ldots\ldots & \nu = -\dfrac{\varkappa \mathrm{M}}{4\pi r} \\[2ex] \text{binnen den bol} \ldots\ldots\ldots & \nu = \dfrac{\varkappa \mathrm{M} r^2}{8\pi a^3} - \dfrac{3\varkappa \mathrm{M}}{8\pi a} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (93)$$

Hierin is M de totale massa van den bol.

55. Bevindt zich in het buitenveld een klein rustend materieel deeltje, waarvan we den invloed op het bovenstaande gravitatieveld verwaarloozen (een proefballetje dus), en met een massa m, dan is de kracht, die het gravitatieveld daarop in de r richting uitoefent volgens (77):

$$K_r = -\frac{1}{2} m \frac{\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}}{\frac{ds}{dt}}$$

Stelt men hierin $g_{44} = 1 + \nu$, dan vindt men, met de tot nu toe gebruikte benadering $K_r = -\frac{\varkappa M m}{8 \pi r^2}$. In de oude theorie schreef men $-\frac{f M m}{r^2}$, wat voor de nu gebruikte tijdseenheid wordt $-\frac{f m M}{r^2 c^2}$, waarin f de gewone gravitatieconstante is. We vinden dus:

$$\varkappa = \frac{8 \pi f}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Bevindt zich in het binnenveld zoo'n materieel deeltje, dan vinden we voor de daarop uitgeoefende kracht:

$$K_r = -\frac{\varkappa M m r}{8 \pi a^3}.$$

Zetten we hierin $M' = \frac{r^3}{a^3} M$, waarin M' de massa is binnen een bol met straal r, dan verkrijgen we de bekende uitkomst:

$$K_r = -\frac{\varkappa M' m}{8 \pi r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

56. Indien het stoffelijk punt in het buitenveld zich beweegt met een snelheid $\dot{x}_3$ volgens de richting van den voerstraal, dan is volgens (77) de uitdrukking voor de kracht, die het gravitatieveld er op uitoefent:

$$K_r = \frac{-\frac{1}{2} m \left(g_{33.3} \dot{x}_3^2 + g_{44.3}\right)}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\text{of } K_r = -\frac{1}{2} m \frac{\nu' - \mu' \dot{x}_3^2}{\sqrt{1-\dot{x}_3^2}} \quad (96).$$

Het blijkt echter, dat de vergelijkingen (89), zooals ze er uitzien voor het nu beschouwde gravitatieveld, de grootheden λ en μ niet geheel bepalen [1]), wat intusschen niet verhindert dat alle waarneembare verschijnselen ondubbelzinnig door de theorie bepaald worden. We willen hierover niet uitweiden, en alleen aangeven hoe de vergelijkingen bij een bepaalde onderstelling worden.

Neemt men aan, dat $\mu = \nu$, waarbij dan de lichtsnelheid volgens een voerstraal de normale zou zijn, dan gaat (96) over in:

$$K_r = -\frac{1}{2} m \nu' \sqrt{1-\dot{x}_3^2} \quad \dots\dots\dots\dots (97)$$

De hoeveelheid van beweging is in dat geval [2]):

$$I_r = -m\sqrt{1+\nu}\,\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{1-\dot{x}_3^2}}$$

Substitueert men de gevonden uitdrukkingen voor K_r en I_r in de vergelijking

$$K_r = \frac{d\,I_r}{dt}$$

dan krijgt men de betrekkingen waardoor de beweging langs den voerstraal bepaald wordt.

57. Als tweede toepassing van (89) denken we in den oorsprong een electron. Stellen we de electrische kracht voor door $\mathcal{E}$, dan geven de bekende uitdrukking voor de spanningen van Maxwell dadelijk:

$M = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2$, $N = -\frac{1}{2}\mathcal{E}^2$, $E = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2$, alles buiten het electron. Bin-

[1]) Lorentz. Verslag K. A. v. W. 31 Mei 1917, pag. 7.

[2]) Einstein l.c. Zie ook hoofdstuk II.

nen het electron hebben we rekening te houden met de spanningen van POINCARÉ. Deze geven:

$M = \frac{1}{2}\mathcal{E}_a^2$, $N = \frac{1}{2}\mathcal{E}_a^2$, $E = \frac{1}{2}\mathcal{E}_a^2$, waarin $\mathcal{E}_a$ de electrische kracht aan de oppervlakte van het electron voorstelt.

Zet men nu $\mathcal{E} = \frac{e}{4\pi r^2}$, waarin e de lading beduidt, dan vindt men uit (89) gemakkelijk de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{binnen het electron } 2 r \nu' + r^2 \nu'' = \frac{-2 p r^2}{a^4} \\ &\text{buiten het electron } 2 r \nu' + r^2 \nu'' = \frac{2p}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

Hierin is ter vereenvoudiging de factor $\frac{\varkappa e^2}{32\pi^2} = p$ gesteld.

Lost men uit (98) ν op, weer met de conditie van doorloopende ν en ν' aan het oppervlak van het electron en van een in 't oneindig verdwijnende ν, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned} \nu_{\text{binnen}} &= \frac{-p r^2}{3 a^4} \\ \nu_{\text{buiten}} &= \frac{-4p}{3 a r} + \frac{p}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

Op grooten afstand van het electron domineert de term met r in den noemer. Vergelijken we dezen term met de uitkomst voor ν in (93), dan ziet men, dat de gravitatiewerking van het electron gelijk is aan die van een bolletje materie, waarvan de massa gegeven wordt door

$$\frac{4p}{3a} = \frac{\varkappa \mathrm{M}}{4\pi}, \text{ waaruit } \mathrm{M} = \frac{e^2}{6\pi a}.$$

Dit is de uitkomst voor de trage massa van een electron, zooals die in de electronentheorie verkregen is. Men ziet dus, dat de trage massa en de graviteerende massa inderdaad aan elkaar gelijk worden.

Vlak in de nabijheid van het electron werkt een afstootende zwaartekracht, die omgekeerd evenredig is met de derde macht van den afstand tot het middelpunt, zooals onmiddellijk volgt uit de tweede uitdrukking voor ν_{buiten}.

58. We willen even de verhouding nagaan, die er bestaat tusschen de electrostatische werking en de gravitatiewerking, welke door een rustend electron op een ander eveneens rustend electron wordt uitgeoefend. In gebruikelijke eenheden kan voor de aantrekkende werking der zwaartekracht gezet worden:

$K_1 = \frac{f}{r^2} \frac{e^4}{36\,\pi^2 a^2 c^4}$, terwijl de afstootende electrostatische kracht gelijk wordt aan $K_2 = \frac{e^2}{4\,\pi\, r^2}$.

De gevraagde verhouding $\frac{K_2}{K_1}$ wordt dus gelijk aan:

$$\frac{9\,\pi\, a^2 c^4}{f e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Men verifieert gemakkelijk, dat deze verhouding van de dimensie nul is, daarbij bedenkende dat e van de dimensie $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ is, en f van de dimensie $L^3 M^{-1} T^{-2}$. Om de orde van grootte van de gevonden verhouding na te gaan, zetten we:

$a = 1{,}5 \times 10^{-13}$, $c = 3 \times 10^{10}$, $f = 6{,}65 \times 10^{-8}$, $e = 3{,}9 \times 10^{-20}$.

Men vindt zoodoende voor die verhouding ongeveer 10^{40}. Beweegt één der beide electronen zich in de richting van het andere, dan ondergaat de gravitatiewerking de in (97) aangegeven wijziging, die zich bij de electrische werking niet voordoet. De verhouding tusschen de zwaartekracht en de electrostatische kracht is dus niet onafhankelijk van den bewegingstoestand der beide electronen ten opzichte van elkaar.

59. Einstein wijst er in zijn theorie op, dat de door de zwaartekracht uitgeoefende werkingen opgevat kunnen worden als het gevolg van zekere spanningen, die in het gravitatieveld heerschen.

We willen deze spanningen nagaan voor het geval, dat het veld gevormd wordt door twee rustende stoffelijke punten en onderzoeken of inderdaad uit deze spanningen de bekende uitdrukking voor de aantrekkingskracht tusschen die twee punten kan afgeleid worden. We vonden in § 54 voor het veld rondom een stoffelijk punt: $\nu = -\frac{\varkappa M}{4\pi r}$. Daar we in 't volgende ook de andere gravitatiepotentialen zullen noodig hebben, moeten we een coördinatenkeuze doen. Het zal blijken, dat die keuze, waarvoor $\lambda = \mu$ tot vereenvoudiging in de berekening voert. Men vindt uit (89), waarìn nu M en N gelijk nul gesteld worden:

$$\lambda + r\lambda' - \mu + r\nu' = 0$$ [1]),

zoodat $\lambda' = -\nu'$. Indien we op zeer grooten afstand het „normale" veld aannemen, dan hebben we dus te zetten $\lambda = -\nu$. We zullen nu de volgende berekeningen met rechthoekige coördinaten verrichten, omdat voor 't te beschouwen geval van twee materieele deeltjes de bolvormige symmetrie uit de becijferingen verdwijnt. Door middel van de gewone transformatieformules vindt men voor rechthoekige coördinaten:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= -(1+\lambda) + \frac{x_1^2}{r^2}(\lambda - \mu)\,;\ g_{22} = \text{enz.} \\ g_{12} &= \frac{x_1 x_2}{r^2}(\lambda - \mu)\,;\ g_{23} = \text{enz.} \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0\,;\ g_{44} = 1 + \nu\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

Voor onze coördinatenkeuze dus:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1+\lambda)\,;\ g_{44} = 1 - \lambda \quad \ldots\ldots \quad (102)$$ [2])

't Is duidelijk, dat we voor de zwakke velden der beide deeltjes de veranderlijke deelen der gravitatiepotentialen mogen superponeeren, zoodat het veld ten slotte gegeven wordt door:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + \lambda' + \lambda'')\,;\ g_{44} = 1 - (\lambda' + \lambda'') \quad \ldots \quad (103)$$

Hierin is $\lambda' = \frac{\varkappa M'}{4\pi r'}$ en $\lambda'' = \frac{\varkappa M''}{4\pi r''}$ . . . . (104)

---

[1]) Lorentz. Verslag K. A. v. W. 31 Mei 1917, pag. 1386.

[2]) Vgl. Eddington. Report on the Relativity Theory of Gravitation, pag. 59.

M′ en M″ zijn de massa's der beide deeltjes, terwijl r' en r'' de afstanden voorstellen van één of ander punt in het veld tot de stoffelijke deeltjes.

Einstein geeft nu voor de spanningscomponenten voor het gravitatieveld de volgende uitdrukkingen:

$$t^p_q = \frac{1}{2\varkappa}\,\delta^p_q\,\Sigma(a\,b\,c\,f)\,g^{ab}\,\Gamma^f_{ac}\,\Gamma^c_{bf} - \frac{1}{\varkappa}\,\Sigma(a\,b\,c)\,g^{ab}\,\Gamma^p_{ac}\,\Gamma^c_{bq} \quad . \ (105)$$

Hierin is $\delta^p_q = 1$ als $p = q$ en 0 als $p \neq q$.

Het symbool Γ^c_{ab}, ook wel voorgesteld door $-\left\{\begin{smallmatrix} a\,b \\ c \end{smallmatrix}\right\}$ beteekent:

$-\Sigma(e)\,g^{ce}\begin{bmatrix} a\,b \\ e \end{bmatrix}$, waarin $\begin{bmatrix} a\,b \\ e \end{bmatrix}$ het in dit hoofdstuk reeds genoemde symbool van Christoffel is.

Deze uitdrukkingen van Einstein gelden in de onderstelling, dat de determinant op de g's gelijk minus één is, wat in ons geval op weinig na waar is. Wij begaan slechts een fout van de tweede orde. Met dezelfde benadering mogen we, daar de grootheden Γ alleen differentiaalquotienten der potentialen bevatten, de factoren g^{11}, g^{22}, g^{33} en g^{44} vervangen door -1, -1, -1 en $+1$, en g^{ab} voor $a \neq b$ door 0.

We kunnen dus zetten:

$$t^1_1 = \frac{1}{2\varkappa}\,\Sigma(a\,c\,f)\,g^{aa}\,\Gamma^f_{ac}\,\Gamma^c_{af} - \frac{1}{\varkappa}\,\Sigma(a\,c)\,g^{aa}\,\Gamma^1_{ac}\,\Gamma^c_{a1}.$$

Voorts is nu in 't algemeen $\Gamma^4_{ab} = -g^{44}\begin{bmatrix} a\,b \\ 4 \end{bmatrix}$. Dit is nul voor $a \neq 4$, $b \neq 4$; ook voor $a = 4$, $b = 4$; maar van nul verschillend als van a en b de eene 4 is, de andere niet, n.l.

$$\Gamma^4_{a4} = -g^{44}\begin{bmatrix} a\,4 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,g^{44}\,g_{44.a}$$

$$\Gamma^4_{4b} = -g^{44}\begin{bmatrix} 4\,b \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,g^{44}\,g_{44.b}.$$

Vervolgens vinden we voor $c \neq 4$:

$\Gamma^c_{ab} = -g^{cc} \begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}$. Dit is nul als de indices a, b en c alle verschillend zijn. Stel a en b aan elkaar gelijk, c niet:

$$\Gamma^c_{aa} = -g^{cc} \begin{bmatrix} aa \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} g^{cc} g_{aa.c}\,.$$

Stel a en c aan elkaar gelijk, b niet:

$$\Gamma^a_{ab} = -g^{aa} \begin{bmatrix} ab \\ a \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} g^{aa} g_{aa.b}\,.$$

Zijn alle drie de indices gelijk, dan is

$$\Gamma^a_{aa} = -g^{aa} \begin{bmatrix} aa \\ a \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} g^{aa} g_{aa.a}\,.$$

We kunnen nu zetten, indien we den index 4 afzonderlijk behandelen:

$$\mathfrak{t}^1_1 = -\frac{1}{2\varkappa} \Sigma(a \neq 4, cf)\, \Gamma^f_{ac}\, \Gamma^c_{af} + \frac{1}{2\varkappa} \Sigma(cf)\, \Gamma_{4c} \Gamma^c_{4}$$
$$+ \frac{1}{\varkappa} \Sigma(a \neq 4, c)\, \Gamma^1_{ac}\, \Gamma^c_{a1} - \frac{1}{\varkappa} \Sigma(c)\, \Gamma^1_{4c}\, \Gamma^c_{41}$$

Hierin is $\Sigma(cf)\, \Gamma_{4c} \Gamma^c_{4f} = \Sigma(c \neq 4)\, \Gamma^4_{4c}\, \Gamma^c_{44} + \Sigma(f \neq 4)\, \Gamma^f_{44}\, \Gamma^4_{4f} =$

$$2\,\Sigma(c \neq 4)\, \Gamma^4_{4c}\, \Gamma^c_{44} = -2\,\Sigma(c \neq 4) \begin{bmatrix} 4c \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Sigma(c \neq 4)\, g^2_{44.c}$$

Op dezelfde wijze is $\Sigma(c)\, \Gamma^1_{4c}\, \Gamma^c_{41} = \frac{1}{4}\, g^2_{44.1}$

Verder is in de uitdrukking voor t^1_1:

$$\Sigma(a \neq 4, cf)\, \Gamma^f_{ac}\, \Gamma^c_{af} = \Sigma(a \neq 4)\, \Gamma^4_{a4}\, \Gamma^4_{a4} + \Sigma \begin{pmatrix} a \neq 4 \\ c \neq 4 \\ f \neq 4 \end{pmatrix} \Gamma^f_{ac}\, \Gamma^c_{af} =$$

$$\Sigma(a \neq 4) \begin{bmatrix} a4 \\ 4 \end{bmatrix}^2 + \Sigma \begin{pmatrix} a \neq 4 \\ c \neq 4 \\ f \neq 4 \end{pmatrix} \Gamma^f_{ac}\, \Gamma^c_{af} =$$

$$= \frac{1}{4} \Sigma(a \neq 4)\, g^2_{44.a} + \frac{1}{4} \Sigma(a \neq 4)\, g^2_{aa.a} - \frac{1}{4} \Sigma \begin{pmatrix} a \neq 4 \\ c \neq 4 \\ a \neq c \end{pmatrix} g^2_{aa.c}$$

Vervolgens:

$$\Sigma(a \neq 4\,,c)\,\Gamma^1_{ac}\,\Gamma^c_{a1} = \Sigma(a \neq 4\,,\,c \neq 4)\,\Gamma^1_{ac}\,\Gamma^c_{a1} = \Gamma^1_{11}\,\Gamma^1_{11} +$$

$$+\,\Sigma(c \neq 1\,, \neq 4)\,\Gamma^1_{1c}\,\Gamma^c_{11} + \Sigma(a \neq 1\,, \neq 4)\,\Gamma^1_{a1}\,\Gamma^1_{a1} + \Sigma\,(a \neq 1\,, \neq 4)\,\Gamma^1_{aa}\,\Gamma^a_{a1}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} + \Sigma\,(c \neq 1\,, \neq 4)\begin{bmatrix} 1c \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ c \end{bmatrix} + \Sigma\,(a \neq 1\,, \neq 4)\begin{bmatrix} a1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+\,\Sigma(a \neq 1\,, \neq 4)\begin{bmatrix} aa \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a1 \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left(\overset{2}{g}_{11.1} - \overset{2}{g}_{22.1} - \overset{2}{g}_{33.1}\right).$$

Substitutie van deze uitkomsten in t^1_1 en invoering van de potentiaal λ geeft gemakkelijk:

$$t^1_1 = \frac{1}{4\varkappa}\left[-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}\right)^2\right] \quad \ldots . \quad (106)$$

Hierin is $\lambda' + \lambda''$ vervangen door λ. 't Is opmerkelijk, dat deze uitkomst voor de eerste component van de gravitatiespanning op dezelfde wijze gebouwd is als die voor de overeenkomstige component van de bekende spanning in het electrostatische veld.

61. Denken we ons nu den oorsprong midden tusschen de materieele deeltjes in en nemen we als x-as de verbindingslijn dier deeltjes, dan is volgens de bekende wijze, waarop de bewegende kracht uit de heerschende spanningen wordt afgeleid de zwaartekracht, waaraan deeltje 2 onderworpen is:

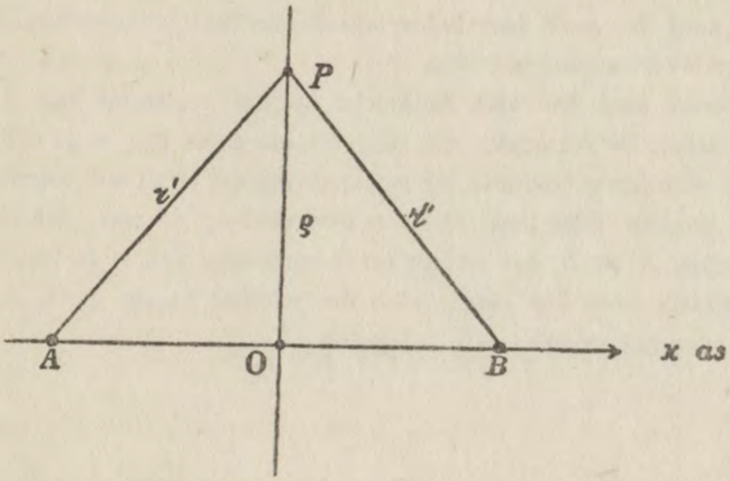
$$\int_S \left(\frac{\partial t^1_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t^2_1}{\partial x_2} + \frac{\partial t^3_1}{\partial x_3}\right) dS, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

indien S een ruimtegebied is, waarin zich alleen het tweede deeltje bevindt. Voor dat ruimtegebied kiezen we de geheele ruimte rechts van het $y\,z$-vlak.

Op de gewone wijze is bovenstaande ruimte-integraal te vervangen door een oppervlakte-integraal. Daar op grooten afstand t^1_1 als $\frac{1}{r^4}$ afneemt, wordt die integraal $-\int t^1_1\, d\sigma$, als $d\sigma$ een element van het $y\,z$-vlak voorstelt en over dat vlak geintegreerd wordt.

't Is duidelijk, dat we bij het verder uitwerken van deze oppervlakte-integraal alleen te letten hebben op die termen, die zoowel op 't eerste als op 't tweede deeltje betrekking hebben, dus die van λ' en λ'' tegelijkertijd afhangen.

Laten we voor het gemak uit λ den factor $\frac{\varkappa M}{4\pi}$ even weg, dan is in P $\lambda' = \frac{1}{r'}$, $\lambda'' = \frac{1}{r''}$.



A is 't eerste stoffelijk punt, B 't tweede $x' = - OA$, $x'' = OB$.

Men vindt dan dadelijk, dat in P geldt:

$$t_1^1 \,(=)\, \frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{-x'x''}{r'^3 r''^3} + \frac{y^2}{r'^3 r''^3} + \frac{z^2}{r'^3 r''^3}\right] (=)\, \frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\varrho^2 - x'x''}{r'^3 r''^3} \quad [1])$$

als y en z de coördinaten van P zijn en ϱ de afstand van P tot O. Doordat we den oorsprong halfweg genomen hebben, kunnen we $AB = l$ stellende, zetten: $t_1^1 \,(=)\, \frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\varrho^2 + \frac{1}{4}l^2}{r^6} = \frac{1}{2\varkappa r^4}$, waarin de beteekenis van r duidelijk is. We hebben dus te berekenen:

$$\int \frac{d\sigma}{r^4} = \frac{4\pi}{l^2}.$$

[1]) (=) wil zeggen, dat de termen in 't rechterlid, die op de uitkomst geen invloed zullen hebben, weggelaten zijn.

Ten slotte wordt dus de kracht

$$-\int t_1^1 \, d\sigma = -\frac{2\pi}{l^2} \cdot \frac{\varkappa \, M' \, M''}{16 \, \pi^2} = -\frac{\varkappa \, M' \, M''}{8 \, \pi \, l^2},$$ wat op hetzelfde neerkomt als de uitkomst (95).

Men kan ook het vlak waarover de oppervlakte-integraal $\int t_1^1 \, d\sigma$ genomen wordt, in een willekeurig punt tusschen A en B loodrecht op de x-as laten staan. De integratie wordt dan uit den aard der zaak door het symmetrieverlies iets ingewikkelder, maar levert even goed (95).

Neemt men het vlak loodrecht op het verlengde van $A\,B$, dan levert de integratie nul. Dat dit zoo moet zijn is duidelijk, daar men het gebied van de ruimte-integraal (107) ook begrensd kan denken door twee vlakken loodrecht op de x-as; het éene tusschen A en B, het andere op 't verlengde van $A\,B$. Daar de integratie over het eerste vlak de gezochte kracht geeft, moet die over het tweede vlak nul geven.

STELLINGEN.

I.

De conclusie, waartoe PEGRAM komt: „in unipolar induction the seat of the electromotive force is in a moving conductor" (Physical Review December 1917 pag. 591) is in het licht van de algemeene relativiteitstheorie zonder meer niet juist.

II.

De uitdrukking: „draaiende magnetische velden", die somtijds wordt aangetroffen, (zie o. a. het slot van het in de vorige stelling aangehaalde artikel) heeft weinig zin en is bovendien overbodig.

III.

Er dient onderscheid gemaakt te worden tusschen „pseudogravitatievelden" (zie dit Proefschrift § 13) en werkelijke gravitatievelden. Ten onrechte ontkent EDDINGTON dit onderscheid als hij zegt: „If the possibility of annulling a field of force by choosing a suitable standard observer is a test of unreality, then gravitation is equally unreal with centrifugal force" (Space, Time and Gravitation pag. 67).

IV.

De wijze waarop door LORENTZ de verschuivingswet van WIEN is afgeleid (verslag K. A. v. W. 26 Januari 1901) kan met behulp der methoden van de algemeene relativiteitstheorie bekort worden.

V.

Niet overtuigend is de wijze, waarop EINSTEIN aantoont, dat het uitmeten van den straal en van den omtrek van een cirkelvormige schijf, die in een gravitatievrij veld roteert om een as, welke de schijf in het middelpunt loodrecht snijdt, door een waarnemer, die met de schijf meedraait, voert tot een niet-Euclidische ruimteverhouding op het oppervlak der schijf. (Zie o. a. EINSTEIN. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie pag. 12.) Weinig grond is er in dit verband ook voor de meening van EDDINGTON dat „each portion of the rim of the wheel has a radial acceleration and this affects its extensional properties (Space, Time and Gravitation, pag. 75).

VI.

De vraag of de aether al dan niet „bestaat" is van dezelfde orde als de vraag of aan atomen en moleculen een „bestaan" moet toegekend worden. Allerminst kan dan ook gezegd worden, dat door de ontwikkeling van de bijzondere en algemeene relativiteitstheorie het „niet-bestaan" van den wereldaether een uitgemaakte zaak geworden is.

VII.

MACH bespreekt in zijn Mechanik (pag. 242 e. v.) de bekende proef van NEWTON met het met water gevulde roteerende vat. Op pag. 247 zegt hij: „Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefässwände immer dicker und massiger, zuletzt mehrere Meilen dick würden." Deze uitspraak wijst reeds in de richting van de algemeene relativiteitstheorie en van de daarmede samenhangende gravitatietheorie.

VIII.

In het eerste hoofdstuk van het in de vorige stelling aangehaalde werk (blz. 77, § 21) ziet MACH het onderscheid tusschen omkeerbare en niet-omkeerbare veranderingen over het hoofd, indien hij zegt: „So wie die schweren Körper abwärts sinken, können sich die elektrischen und Temperaturdifferenzen von selbst nicht vergrössern, sondern nur verkleineren." Zie in dit verband ook: MAX PLANCK, Acht Vorlesungen über Theoretische Physik, pag. 11.

IX.

„Ob die Marsbewohner, falls solche überhaupt existieren, Augen und Ohren haben, wie die unsrigen, das wissen wir nicht; dasz sie aber, wofern sie nur die nötige Intelligenz besitzen, das Gravitationsgesetz und das Energieprinzip kennen, das halten wohl die meisten Physiker für selbstverständlich. Und wem das nicht einleuchtet, der soll sich lieber nicht zu den Physikern rechnen; denn es wird ihm dann im Grunde ein unbegreifliches Rätsel bleiben, dasz man in dem United States die nämliche Physik macht wie in Deutschland." (PLANCK. Acht Vorlesungen über Theoretische Physik, pag. 7.) Het in dit betoog naast elkander stellen van eventueele Marsbewoners en van de bewoners der Vereenigde Staten is daarom onjuist, omdat daarbij van de onderstelling wordt uitgegaan, dat alle anthropomorphe elementen uit de theoretische physica geëlimineerd kunnen worden.

X.

Volgens v. d. WAALS Jr. en KOHNSTAMM is het natuurgebeuren niet zonder meer afleidbaar uit algemeen en altijd geldende fundamenteele natuurwetten, van welken aard die ook mogen zijn. (Zie o. a. v. d. WAALS. Tijdschrift voor Wijsbegeert V pag. 1 en KOHNSTAMM. Ontwikkeling en Onttroning van het begrip Natuurwet.) Op hun betoog is aan te merken:

1°. Dat zij feitelijk invoeren de vage grootheid: entropie der geheele waarneembare natuur.

2°. Dat zij 't als vanzelf sprekend beschouwen, dat deze grootheid in vergelijking met het maximum dat ze bereiken kan, thans zeer klein is.

3°. Dat zij van de meening uitgaan, dat wij ons thans bevinden in een minimumpunt van de „wereld-entropiekromme”.

XI.

Whittaker (A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies § 128) bewijst, dat bij een z.g. contact-transformatie de differentiaaluitdrukking $\Sigma(r)\,\delta p_r\,dq_r$ invariant blijft. In het voorbeeld, dat hij hiervan geeft, maakt hij van de omgekeerde stelling gebruik, waarvan het bewijs achterwege gebleven is.

XII.

Ten onrechte beweren Weber en Wellstein (Encyclopädie der Elementar-Mathematik II pag. 16): „Ob durch die Kongruenz in die Geometrie ein den Grundbegriffen und den übrigen Grundsätzen fremdes, auf empirischen Grundlagen beruhendes Element hineingeschleppt werden musz oder nicht, das wird beim Hilbertschen Aufbau der Elemente nicht vollkommen klar.” Zie ook: Hilbert. Grundlagen der Geometrie pag. 9.

XIII.

Het is verkeerd, dat doctorandi in de Wis- en Natuurkunde de bevoegdheid bezitten, aardrijkskunde-onderwijs aan een Gymnasium te geven. Dit onderwijs verdient alle zorg en behoort gegeven te worden door in bedoelde wetenschap breed onderlegde docenten.

XIV.

De normale leerling, ook die uit de lagere klassen onzer scholen voor Middelbaar en voorbereidend Hooger Onderwijs, is niet gediend van een wiskundeonderwijs, waarin te veel een beroep gedaan wordt op z.g. intuïtieve kennis. In den regel weet hij goed voorgedragen bewijzen te waardeeren. Vandaar dat methoden van wiskunde-onderwijs, waarin ten koste van logische gestrengheid een soort aanschouwings-onderricht aangewend wordt, voor onze leerlingen geen aanbeveling verdienen.