8

H. VAN DER KAMP.

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN

IN HET

ELEKTROMAGNETISCH VELD.

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN

IN HET

ELEKTROMAGNETISCH VELD.

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN
IN HET
ELEKTROMAGNETISCH VELD.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. A. C. VREEDE,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op den 26 Februari 1897, des namiddags te drie uren,

DOOR

HERMAN VAN DER KAMP,

GEBOREN TE GRONINGEN.

MIDDELBURG.
J. C. & W. ALTORFFER.
1897.

Bij de verschijning van dit proefschrift is het mij eene aangename behoefte U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige faculteiten te Leiden en te Groningen, mijn dank te betuigen voor het van U ontvangen onderwijs.

Inzonderheid U, Hooggeleerde LORENTZ, zij mijn hartelijke dank gebracht voor de welwillende hulp en de nuttige raadgevingen mij bij de voltooiing van dit proefschrift verstrekt.

Ook gij, Hooggeleerde HEYMANS, hebt mij zeer aan U verplicht door Uw aangenaam en boeiend onderwijs, dat ik gedurende Uw verblijf te *Leiden* van U heb mogen genieten en waaraan ik steeds met genoegen zal blijven denken.

HOOFDSTUK I.

De vergelijkingen, die den toestand van het elektromagnetische veld bepalen.

MAXWELL en zijn voorganger FARADAY hebben getracht de verschijnselen op het gebied van de elektriciteit en het magnetisme zonder de *actio in distans* der oude theorie te verklaren.

Men kan zich daartoe voorstellen, dat de ruimte, waarin de elektrische en magnetische verschijnselen zich vertoonen, behalve met de *ponderabele* stof, nog met eene elektrische vloeistof en eene stof, die men met een raderwerk kan vergelijken, gevuld is. Men denke zich deze drie stoffen in elk deel der ruimte tegelijk aanwezig; de laatstgenoemde is de zetel der *elektrokinetische* energie en dient ter verklaring van de werking van elektrische stroomen op elkaar.

MAXWELL bespreekt deze voorstelling, die men zich van het mechanisme der *elektrische* en *magnetische* verschijnselen kan vormen, in zijne verhandeling: „*On a dynamical theory of the electromagnetic field.*" (Scient. Pap., I, p. 451). O. LODGE heeft in zijn werk: „*Modern Views on Electricity*," een zeer uitgewerkt beeld der verschillende elektrische en magnetische verschijnselen gegeven.

Voor de mathematische behandeling gaat MAXWELL uit van de vergelijkingen van LAGRANGE, daar hij veronderstelt, dat deze voor het mechanisch systeem, waarmee men bij de elektromagnetische verschijnselen te doen heeft, gelden. Ook BOLTZMANN volgt dien weg in zijne: „*Vorlesungen über* MAXWELL'*s Theorie der Electricität und des Lichtes*," en beschrijft daarin tevens een mechanisch toestel, dat werkingen vertoont, analoog aan de inductiewerkingen tusschen twee stroomgeleiders.

Hij merkt hierbij op, dat het *elektromagnetisch veld*, d. i. de ruimte, waarin de elektromagnetische verschijnselen plaats hebben, een systeem bevat, dat *cyclisch* is ten opzichte van de algemeene coördinaat in den zin van LAGRANGE, die de hoeveelheid elektriciteit voorstelt, die sedert een bepaald oogenblik door een zeker oppervlak is gestroomd; d. w. z. de *energie* van het systeem hangt niet af van deze hoeveelheid doorgestroomde elektriciteit, maar van de stroomsterkte; evenals bij eene wentelende beweging alleen de hoeksnelheid en niet de *afgelegde hoek* de energie van het systeem bepaalt.

De elektrische vloeistof gedraagt zich als eene *onsamendrukbare*, zoodat dus, als u, v en w de componenten van den stroom voorstellen, in elk punt $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$ en bij oppervlakken van discontinuiteit de normale componente doorloopend is.

Dientengevolge kan een electrische stroom niet in het eindige eindigen, maar moet *gesloten* zijn.

Stellen wij de kinetische energie van het systeem door T, de algemeene coördinaten voor de elektrische vloeistof door y, die voor den stand der ponderabele massa's door x en hunne afgeleiden naar den tijd door $\dot{y}$ en $\dot{x}$ voor, dan is in de vergelijkingen van Lagrange de term $\frac{d\,\mathrm{T}}{d\,y} = 0$, daar het systeem ten opzichte van y cyclisch is en T dus niet van y afhangt.

Wij zullen in dit eerste hoofdstuk op de wijze van Maxwell de vergelijkingen van het elektromagnetische veld met behulp van die van Lagrange opstellen en tevens de magnetisch induceerbare lichamen daarbij opnemen, daar het vervolgens ons doel is de ponderomotorische krachten, die in een magnetisch veld op deze lichamen werken, uit de vergelijkingen van Lagrange af te leiden, zooals Maxwell de *inductie-* en *elektrodynamische* werkingen heeft bepaald.

Wij zullen de krachten bepalen, die op een ellipsoïde van ijzer, geplaatst in een homogeen magnetisch veld, worden uitgeoefend; de krachten op zwak magnetische, anisotrope lichamen (kristallen) en op vloeistoffen; de vormverandering der oppervlakken dezer laatste zullen vervolgens worden beschouwd en eindelijk de deformatie's, die magnetische lichamen in een magnetisch veld ondervinden.

Deze laatste zullen worden teruggebracht tot krachten, die kunnen worden beschouwd als gevolgen van drukkingen, die in het magnetisch veld heerschen.

Ofschoon wij permanente magneten van onze beschouwingen zullen uitsluiten, en ons dus steeds zullen voorstellen, dat het magnetisch veld door stroomen wordt teweeggebracht, kunnen toch vele uitkomsten ook op het geval van permanente magneten worden toegepast.

Waar in het vervolg het drie-assig coördinatenstelsel zal worden gebruikt, houden we ons aan den stand der coördinatenassen, zooals die vrij algemeen in navolging van Maxwell wordt aangenomen (*Electr. and Magn.* n^0. 23). Normalen op gesloten oppervlakken zullen hunne *positieve* richting naar *buiten* hebben.

Bij de verschijnselen, die wij zullen beschouwen, zijn er tweeërlei vergelijkingen van Lagrange, nl.

$$X = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx},$$

$$Y = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} - \frac{dT}{dy}.$$

De eerste dezer beide vertegenwoordigt een geheele groep behoorende bij de verschillende coördinaten x der ponderabele massa's; de groep, door de tweede vertegenwoordigd, behoort bij de coördinaten y der elektrische vloeistof.

X en Y stellen de, aan de coördinaten x en y beantwoordende, krachtcomponenten voor, d. w. z.: Wanneer aan de coördinaten virtueele verplaatsingen δx of δy worden gegeven, stelt $X \delta x$ of $Y \delta y$ den arbeid voor, die alle op het stelsel werkende krachten verrichten. Wij stellen ons voor, dat daarbij de „verbindingskrachten" buiten beschouwing worden gelaten, daar deze, alle te zamen genomen, geen arbeid verrichten.

Men kan in vele gevallen aan de teekens X en Y of liever aan — X en — Y nog eene andere beteekenis hechten, en komt dan tot eene opvatting, die, hoewel zij zeer goed gemist kan worden, veelal tot eene gemakkelijke beschrijving der verschijnselen leidt.

Stel nl. dat bij de variatie δx zich slechts een bepaald gedeelte A van de ponderabele stof (b. v. een enkele geleiddraad) verplaatst, zoodat de grootheid X alleen uit krachten, die op dit deel werken, is opgebouwd. Men kan nu ook de aan de coördinaat x beantwoordende bewegingsvergelijking voor dat deel A van het stelsel afzonderlijk opstellen.

Hierbij moet men bedenken dat op dit deel, behalve de in X begrepen krachten, ook nog een deel der verbindingskrachten werkt en dat, hoewel alle verbindingskrachten te zamen geen arbeid verrichten, dat *gedeelte* het wel kan doen.

Stellen wij nu door $\xi \delta x$ den arbeid dezer verbindingskrachten voor, dan kunnen wij ξ de aan de coördinaat x beantwoordende kracht noemen, die A van het andere deel van het stelsel ondervindt, of korter de „kracht van het stelsel volgens de coördinaat x." Is voorts T_a de kinetische energie van het deel A (bijv. de energie van de zichtbare beweging van den geleiddraad), dan verkrijgen wij:

$$X + \xi = \frac{d}{dt}\frac{d\,T_a}{d\dot{x}} - \frac{d\,T_a}{dx}.$$

In alle gevallen dus, waarin het tweede lid verdwijnt (bijv. als de geleiddraad in rust is) wordt

$$\xi = -X,$$

zoodat men $-X$ de kracht van het stelsel kan noemen.

Stel dat het systeem van dien aard is, dat de volledige energie kan gesplitst worden in het deel T_a en een ander deel T_b, dat geheel onafhankelijk is van de beweging van A.

Dan heeft men in 't geval dat *A in rust is*, de krachtcomponente:

$$X = \frac{d}{dt}\frac{d\,T_b}{d\dot{x}} - \frac{d\,T_b}{dx} = -\frac{d\,T_b}{dx}$$

en dus voor de kracht van het systeem

$$\xi = \frac{d\,T_b}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Wanneer zich nu het deel *A beweegt* is de bewegingsvergelijking

$$X = \frac{d}{dt}\frac{d T_a}{d\dot{x}} - \frac{d(T_a + T_b)}{dx},$$

dus in het speciale geval, dat $X = 0$ is:

$$\frac{d}{dt}\frac{d T_a}{d\dot{x}} - \frac{d(T_a + T_b)}{dx} = 0.$$

Daar nu T_b thans dezelfde waarde heeft, als toen A in rust was, mogen wij hier in plaats van $\frac{\mathrm{d}\, T_b}{\mathrm{d}\, x}$ de door (1) bepaalde waarde ξ schrijven; de vergelijking gaat daardoor over in:

$$\xi = \frac{d}{dt}\frac{d T_a}{d\dot{x}} - \frac{\mathrm{d}\, T_a}{\mathrm{d}\, x}.$$

Dit is echter juist de bewegingsvergelijking van het deel A, voor 't geval dat daarop de kracht ξ werkt.

Wij kunnen dus zeggen: Wanneer wij, om het deel A in rust te houden, een uitwendige kracht X behoeven, zal dit deel, als wij die kracht X niet laten werken, zich bewegen onder den invloed eener kracht $-$X.

De tweede der bewegingsvergelijkingen geeft tot dergelijke opmerkingen aanleiding.

Laat zich bij de variatie δy alleen de electrische vloeistof in een deel der ruimte, bijv. in een enkelen geleider, verplaatsen, en laat η de bij y behoorende kracht zijn, die op de electriciteit door het overige stelsel wordt uitgeoefend, dan is

$$Y + \eta = \frac{d}{dt}\frac{d\,T_b}{d\dot{y}} - \frac{d\,T_b}{dy},$$

waarin T_b de energie der elektrische vloeistof voorstelt.

Daar nu, zooals we straks zullen aantoonen, $T_b = 0$ moet worden aangenomen, is dus altijd $\eta = -Y$.

Y is nu in lineaire geleiders samengesteld uit:

a. de „electromotorische kracht" van een daarin geplaatst galvanisch element.

b. den weerstand $-r\,i$.

η is de elektromotorische kracht door het stelsel uitgeoefend (elektromotorische kracht der inductie). De som van alle drie is steeds 0.

In vele gevallen heeft men toestanden te beschouwen waarbij de ponderabele stof in rust is en de onzichtbare bewegingen stationnair zijn. De bewegingsvergelijkingen van Lagrange leeren ons dan de kracht X kennen, die op de coördinaat x moet werken om dien toestand te doen voortduren. Vindt men $X = 0$, dan wil dat zeggen dat het stelsel, aan zich zelf overgelaten, in dien toestand blijft, dat het dus zonder uitwendige kracht X „in evenwicht" is. Is X niet gelijk aan nul, dan is zij gelijk aan $-\frac{d\,T}{d\,x}$, daar de term $\frac{d}{dt}\frac{d\,T}{d\dot{x}}$, ingevolge den toestand van het systeem, *nul* is. De kracht ξ, door de overige deelen volgens de coördinaat x uitgeoefend, wordt dus nu $\frac{d\,T}{d\,x}$.

Beschouwen wij voorloopig alleen lineaire gesloten stroomgeleiders, dan kunnen wij, wat de electriciteitsbeweging betreft, voor elken daarvan met één coördinaat volstaan, nl. de hoeveelheid electriciteit, die sedert zeker oogenblik door de doorsnede van den geleider is gestroomd. Hierbij nemen wij eene bepaalde richting in den geleider als de positieve aan.

T is eene homogene kwadratische functie van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ en MAXWELL toont in de eerste plaats aan, dat er geene producten van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ onderling in T voorkomen en deze energie dus slechts uit termen met enkel $\dot{x}$ en andere met enkel $\dot{y}$ bestaat.

Kwamen in T termen met $\dot{x}\,\dot{y}$ voor, dan zou $\frac{dT}{d\dot{x}}$ termen met $\dot{y}$ moeten bevatten en dit zou in $X = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}$ termen geven met $\frac{d\dot{y}}{dt}$, zoodat dus, bij niet aanwending eener uitwendige kracht, eene beweging zou optreden, tengevolge van de kracht $-$ X, bij *verandering* der stroomsterkte.

Ten einde dit te onderzoeken denkt MAXWELL zich een toestel als in nevenstaande figuur is afgebeeld.

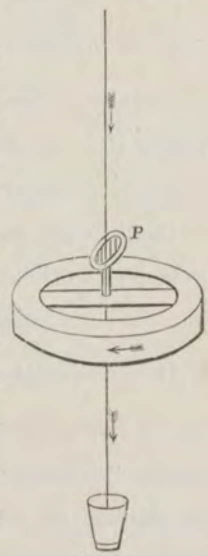

Fig. 1.

Een draadklos, bestaande uit vele cirkelvormige windingen, is opgehangen aan een verticalen draad en draaibaar om een verticale as, waarbij de windingen in horizontale vlakken liggen.

Een elektrische stroom kan door deze draden worden geleid in de richting der pijlen, die in nevenstaande figuur zijn geteekend; de draden, die den stroom toe- en afvoeren, zijn verticaal en liggen in elkanders verlengde. Aan den eersten hangt de klos, terwijl de afvoerdraad in een bakje met kwik eindigt.

Stellen wij ons nu voor, dat een elektrische stroom door dit toestel gaat, dan zou, volgens het boven gezegde, bij *verandering* der stroomsterkte eene wenteling om de verticale as moeten plaats grijpen, wanneer $\frac{d\,T}{d\,\dot{x}}$ termen met $\dot{y}$ bevatte. Deze wenteling zou door middel van het spiegeltje P kunnen worden waargenomen. Zoodanige ponderomotorische werkingen zijn echter nog niet bespeurd.

De bekende ponderomotorische krachten, welke op stroomgeleiders werken, hangen af van de stroomsterkte zelve, niet van *hare veranderingen.*

De aanwezigheid van termen met $\dot{x}\,\dot{y}$ in $\frac{d\,T}{d\,x}$ zou in X een term eveneens met $\dot{x}\,\dot{y}$ opleveren; het bestaan van de daardoor voorgestelde ponderomotorische werking zou moeten blijken bij het *omkeeren* van den stroom; immers daardoor zal het teeken der kracht — X, die wij de kracht van het systeem noemen, veranderen en hiervan zal eene wijziging in den stand der ponderabele massa's — welke stand vóór het omkeeren van den stroom standvastig moge zijn — het gevolg zijn.

Uit het volgende zal de bedoeling duidelijker worden.

In nevenstaande figuur is het schema van een toestel, dat Maxwell voor dit onderzoek heeft doen dienen, afgebeeld. A is een elektromagneet met de magnetische as AA′. Hij kan om eene horizontale as BB′, loodrecht op AA′, wentelen binnen een ring, die zelf met standvastige snelheid om eene verticale as gedraaid wordt. Zijn AA′, BB′, CC′ de drie hoofdtraagheidsassen en noemen we de traagheidsmomenten ten opzichte daarvan respectievelijk A, B en C, verder θ den hoek tusschen CC′ en de verticaal, Φ het azimuth van BB′ en ψ de grootheid, die den stand der elektrische vloeistof in den draad bepaalt, dan wordt, volgens Maxwell, de kinetische energie van het systeem voorgesteld door:

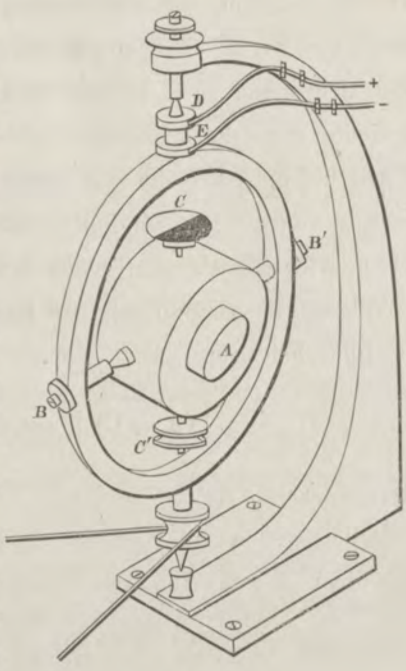

Fig. 2.

$$T = \frac{1}{2}\left\{ A\,\dot{\phi}^2 sin.^2\theta + B\,\dot{\theta}^2 + C\,\dot{\phi}^2 cos.^2\theta + E\,(\dot{\phi}\, sin.\,\theta + \dot{\psi})^2 \right\},$$

waarin E het traagheidsmoment der elektrische vloeistof zou kunnen worden genoemd; terwijl $\dot{\phi}\, sin.\,\theta + \dot{\psi}$ de hoeksnelheid er van voorstelt; $\dot{\phi}\, sin.\,\theta$ is die van de doorsnede van den draad en $\dot{\psi}$ is die van de elektrische vloeistof ten opzichte van deze doorsnede.

Uit het optreden van den factor E in de formule voor de energie van dit systeem blijkt, dat MAXWELL zich de elektrische vloeistof als eene massa heeft gedacht.

Volgens de vergelijking van LAGRANGE is nu de kracht, die bij θ behoort:

$$\Theta = B\,\frac{d^2\theta}{d\,t^2} - \left\{ (A - C)\,\dot{\phi}^2\, sin.\,\theta\, cos.\,\theta + E\,\dot{\phi}\,\gamma\, cos.\,\theta \right\},$$

als $\gamma = \dot{\phi}\, sin.\,\theta + \dot{\psi}$.

Stellen we ons nu voor, dat de beweging van het toestel zich door de wrijving van de as B B′ zoodanig heeft geregeld, dat θ constant blijft, dus $\frac{d^2\theta}{d\,t^2} = 0$, terwijl geen uitwendige kracht Θ op het toestel wordt uitgeoefend, dan moet:

$$sin.\,\theta = \frac{E\,\gamma}{(C - A)\,\dot{\phi}}.$$

Hierin is γ afhankelijk van de stroomsterkte $\dot{\psi}$, zoodat, bij omkeering van den stroom, θ zou moeten veranderen. Door C — A klein te nemen wordt de invloed eener verandering der stroomsterkte groot.

Bij C zijn twee halfcirkelvormige stukken papier, het eene *rood*, het andere *groen*, aangebracht, zoodat men bij de wenteling van het toestel, al naar de waarde van θ, een rooden cirkel buiten en een groenen binnen zal zien, of omgekeerd. Eene verandering van θ zou zich dus gemakkelijk verraden. Zoodanige verandering is bij omkeering van den elektrischen stroom niet waargenomen.

Wij moeten dus aannemen, dat de elektrische vloeistof geen merkbare massa heeft.

Had ze nl. eene merkbare massa en noemen we die van een vloeistofdeeltje m, dan zou de energie van dit deeltje worden voorgesteld door $^1/_2\, m\,(\dot{x}+\dot{y})^2$, als $\dot{x}$ de snelheid voorstelt van het deel van den geleiddraad, dat we beschouwen, en $\dot{y}$ die van de vloeistof ten opzichte van dat deel van den geleiddraad, waarbij $\dot{x}+\dot{y}$ als een vectorensom moet worden opgevat.

Er zouden dus termen met $\dot{x}\,\dot{y}$ moeten ontstaan en de afwezigheid van deze, die proefondervindelijk is aangetoond, kunnen wij verklaren door de massa m der elektrische vloeistof gelijk *nul* aan te nemen.

Wij kunnen de kinetische energie thans in twee deelen splitsen: het eene, dat slechts termen met $\dot{x}$ bevat en het andere, dat slechts van $\dot{y}$ afhankelijk is. Wij noemen het eerste met Maxwell T_m, het andere T_e; wij zouden ze kunnen onderscheiden door de namen *ponderokinetische* en *elektrokinetische* energie.

Aangezien de massa der elektrische vloeistof als onmerkbaar klein moet worden aangenomen en dus de termen met $\dot{y}^2$ niet met factoren die *daarvan* afhangen, zullen voorkomen, moeten we de energie, die van $\dot{y}^2$ afhangt, aan andere bewegingen, nl. die van de *derde* der op pag. 1 genoemde stoffen, gebonden denken.

Daar wij ons voorloopig alleen met de *elektrokinetische* energie zullen bezig houden, zullen wij deze gemakshalve door T voorstellen.

De waarde van deze grootheid zullen wij thans voor een gegeven stroomverdeeling in een elektromagnetisch veld berekenen.

In een veld met lineaire stroomen van de sterkten $i_1 \dots i_n$ wordt deze energie:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma L_n i^2_n + \Sigma M_{nm} i_n i_m ,$$

waarin de coëfficienten L en M bepaald worden door de ligging en den vorm der stroomgeleiders, voor wier bepaling we de coördinaten x hebben gebruikt.

De beteekenis dezer coëfficienten wenschen wij nader te onderzoeken. Daartoe nemen wij eerst een enkelen lineairen stroomgeleider met een stroom van de sterkte i. De waarde van T wordt dan uitgedrukt door den enkelen term $\frac{1}{2} L i^2$.

Stellen wij met Maxwell voor de uitwendige kracht $E - r i$ waarin r den *weerstand* voorstelt en E de elektromotorische kracht van het galvanisch element, dan geeft de vergelijking van LAGRANGE:

$$Y = E - r\,i = \frac{d}{d\,t}\,(L\,i),$$

of

$$E = L\,\frac{d\,i}{d\,t} + i\,\frac{d\,L}{d\,t} + r\,i.$$

Blijft de vorm van den geleider constant, dan is $\frac{d\,L}{d\,t} = 0$, dus $E = L\,\frac{d\,i}{d\,t} + r\,i$.

De *uitwendige* kracht bevat dus den term $L\,\frac{d\,i}{d\,t}$, zoodat de kracht van het systeem, (de op pag. 7 en 8 besproken γ), $-L\,\frac{d\,i}{d\,t}$ bedraagt. Dit is de elektromotorische kracht van den extra-stroom, die het gevolg is van de verandering der stroomsterkte. L draagt daarom den naam *coëfficient van zelfinductie.*

Nemen wij thans twee lineaire stroomgeleiders, dan is

$$T = \frac{1}{2}\,L_1\,i_1^{\,2} + M\,i_1\,i_2 + \frac{1}{2}\,L_2\,i_2^{\,2},$$

waarin de index 1 op den eenen, de index 2 op den anderen stroomgeleider betrekking heeft.

De bewegingsvergelijking der electriciteit in den eersten geleider wordt nu

$$Y_1 = \frac{d}{d\,t}\,(L_1\,i_1 + M\,i_2),$$

Nemen wij aan, dat de vorm en de betrekkelijke stand der stroomgeleiders standvastig worden gehouden, eveneens i_1 constant (zoo noodig door eene geschikte elektromotorische kracht in den eersten stroomgeleider), dan wordt:

$$Y_1 = M \frac{d\,i_2}{d\,t}$$

de kracht, die noodig is om i_1 constant te houden en dus $-Y_1$ de inductiewerking, in den eersten geleider door de verandering van i_2 uitgeoefend.

Voor de inductiewerking van den eersten op den tweeden stroom zal men evenzoo vinden:

$$-M \frac{d\,i_1}{d\,t}.$$

In beide gevallen heeft men dus met denzelfden coëfficient M te maken, die daarom de *coëfficient van wederkeerige inductie* wordt genoemd.

Daar hij ook de elektrodynamische verschijnselen bepaalt, kan deze coëfficient M worden berekend uit de wet van Ampère voor de elektrodynamische werking van lineaire stroomgeleiders op elkaar.

Uit deze wet leidt men af:

$$M = \int \frac{d\,s \;\, d\,s'}{r} \cos.\, \varepsilon,$$

een integraal genomen over de beide stroomlijnen s en s'.

De hoek tusschen de elementen $d\,s$ en $d\,s'$ is ε en r hun afstand.

De sterkten der stroomen worden *positief* of *negatief* genomen al naarmate ze in de positieve of in de negatieve richting van s of s' loopen.

In het geval van elektrische stroomen in de ruimte verdeelen we deze in een oneindig groot aantal oneindig dunne stroombuizen, die, zooals vroeger reeds is opgemerkt, *gesloten* moeten zijn.

Noemen we de stroomsterkten in deze buizen: $i_1 \ldots . i_n$, waarin nu n zeer groot is, dan is T eene homogene kwadratische functie der i's. Ten einde haar nader te bepalen, maken we gebruik van eene bekende eigenschap van homogene kwadratische functiën, volgens welke:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} i_n \frac{dT}{d\,i_n}.$$

We weten:

$$\frac{dT}{d\,i_n} = L_n\, i_n + M_{1n}\, i_1 + M_{2n}\, i_2 \ldots .$$

Het tweede lid is de som van een oneindig groot aantal oneindig kleine grootheden; wegens de oneindig dunne buizen zijn namelijk de i's oneindig klein.

Veronderstellen wij, dat $L_n\, i_n$ met i_n tot *nul* nadert (wat niet van zelf spreekt, daar L_n niet eindig blijft bij het kleiner worden der doorsnede van een stroomgeleider), dan mogen we dezen term ten opzichte van de som der overige verwaarloozen.

Ieder der overige termen kunnen wij op de zoo even aangegeven wijze berekenen, en vinden dan, als we de lijn door de zwaartepunten der doorsneden van de n^{de} stroombuis door s_n voorstellen:

$$M_{1n} i_1 = i_1 \int \frac{d s_1 \, d s_n}{r} cos. \varepsilon = i_1 \int \frac{d x_1 \, d x_n + d y_1 \, d y_n + d z_1 \, d z_n}{r},$$

waarin $d x_1$, $d y_1$ en $d z_1$ de projecties van $d s_1$ op de coördinatenassen zijn, evenals $d x_n$, $d y_n$ en $d z_n$ die van $d s_n$.

Stellen wij $i_1 \int \frac{d x_1}{r}$ — genomen over de stroombuis van i_1, waarin r telkens den afstand voorstelt van een bepaald lijnelement $d s_n$ tot de verschillende elementen van de eerste stroombuis — door de letter F_1 voor, eveneens $i_1 \int \frac{d y_1}{r}$ en $i_1 \int \frac{d z_1}{r}$ door G_1 en H_1, dan wordt:

$$M_{1n} i_1 = \int (F_1 \, d x_n + G_1 \, d y_n + H_1 \, d z_n),$$

genomen over de stroombuis van i_n.

Noemen we $\bar{\imath}_1$ de stroomsterkte per eenheid van loodrechte doorsnede en $d \omega$ de doorsnede der eerste stroombuis, dan kunnen we ook schrijven:

$$F_1 = \int \frac{\bar{\imath}_1 \, d \omega \, d x_1}{r} = \int \frac{\bar{\imath}_1 \, d \omega \, l \, d s_1}{r} = \int \frac{u_1 \, d \tau_1}{r},$$

als l de cosinus van den hoek tusschen $d s_1$ en de x-as, u_1 de x-componente van $\bar{\imath}_1$ en $d \tau_1$ het volumenelement $d \omega \, d s_1$ der buis voorstellen.

Evenzoo vindt men:

$$G_1 = \int \frac{v_1\, d\tau_1}{r},\ H_1 = \int \frac{w_1\, d\tau_1}{r},$$

waarin v_1 en w_1 de y- en z-componenten van $\bar{\imath}_1$ voorstellen.

Van deze formules gebruik makende, vinden we voor den term $\frac{d\,T}{d\,i_n}$:

$$\int (F\, d\,x_n + G\, d\,y_n + H\, d\,z_n),$$

genomen over den stroomgeleider van i_n, waarin nu:

$$F = \sum_{k=1}^{k=\infty} \int \frac{u_k\, d\,\tau_k}{r}, \text{ enz.}$$

of

$$F = \int \frac{u\, d\,\tau}{r} \text{ enz.}$$

welke integralen wij over de *geheele* ruimte, waar de elektrische strooming plaats grijpt, kunnen uitstrekken, ook de ruimte van de n^{de} stroombuis zelf er onder begrepen, daar het bedrag dat deze tot die integraal bijdraagt oneindig klein is, zooals men gemakkelijk inziet.

F, G en H stemmen overeen met gravitatiepotentialen, als de dichtheden der aantrekkende massa u, v en w worden genoemd en over de ruimte der stroomen verdeeld zijn. Uit bekende eigenschappen dier potentialen weten we, dat ze, evenals hunne eerste afgeleiden naar de coördinaten, in alle punten doorloopend zijn.. Men noemt F, G en H de componenten van den *vectorpotentiaal* V.

Zij voldoen nog aan de vergelijking:

$$\frac{d\,F}{d\,x}+\frac{d\,G}{d\,y}+\frac{d\,H}{d\,z}=0.$$

Zetten wij thans onze berekening der energie T voort, dan vinden we:

$$i_n\frac{d\,T}{d\,i_n}=\int\left(\frac{u\,d\,\tau}{r}\,i_n\,d\,x_n+\frac{v\,d\,\tau}{r}\,i_n\,d\,y_n+\frac{w\,d\,\tau}{r}\,i_n\,d\,z_n\right),$$

over de stroombuis van i_n.

Noemen wij de grootheden, die op deze buis betrekking hebben, u', $d\,\tau'$ enz., dan wordt op eenvoudige wijze afgeleid dat:

$$i_n\frac{d\,T}{d\,i_n}=\int\left(\frac{u\,d\,\tau}{r}\,u'\,d\,\tau'+\frac{v\,d\,\tau}{r}\,v'\,d\,\tau'+\frac{w\,d\,\tau}{r}\,w'\,d\,\tau'\right),$$

genomen over de n^{de} buis, waarbij we ons nu elk element dezer buis met alle elementen, waarin de strooming plaats heeft, gecombineerd moeten denken, ook met die van de buis zelf.

Wij vinden verder:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} i_n\frac{d\,T}{d\,i_n}=\int\frac{u\,u'\,d\,\tau\,d\,\tau'+v\,v'\,d\,\tau\,d\,\tau'+w\,w'\,d\,\tau\,d\,\tau'}{r}=$$

$$=\int\frac{uu'+vv'+ww'}{r}\,d\,\tau\,d\,\tau';$$

deze integralen zijn genomen over de ruimte met de elektrische stroomen en bevatten elke combinatie $d\,\tau\,d\,\tau'$ twee keer.

Volgens de eerste formule van pag. 17 wordt ten slotte:

$$T = \frac{1}{2}\int \frac{uu' + vv' + ww'}{r}\, d\tau\, d\tau' = \frac{1}{2}\int \left(Fu + Gv + Hw\right) d\tau.$$

Deze laatste integraal zullen we voor ons doel in andere grootheden uitdrukken.

Uit bekende proeven blijkt, dat een gesloten stroom van de sterkte i op een magneetpool dezelfde werking uitoefent als eene magnetische laag met het magnetische moment i per eenheid van oppervlak en die den stroomgeleider als randbegrenzing heeft, waarbij de positieve richting van de magnetisatie der laag en die van den stroom in den geleider op dezelfde wijze bij elkaar behooren, als de positieve z-as en eene positieve draaiing in het xy-vlak.

Hieruit wordt afgeleid (MAXWELL, II, Art. 422 pag. 41) dat de componenten α, β, γ der magnetische kracht $\mathfrak{H}$ kunnen worden afgeleid uit die van den vectorpotentiaal en wel door middel van de betrekkingen:

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

$$\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$$

$$\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Uit deze waarden van α, β, γ kan worden afgeleid, dat de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{H}$ over eenig oppervlak gelijk is aan de lijnintegraal van V over de randbegrenzing van dat oppervlak.

Uit het gezegde volgt ook, dat de lijnintegraal van de magnetische kracht langs een gesloten lijn gelijk is aan $4\pi \times$ de hoeveelheid elektriciteit, die per tijdseenheid door een oppervlak stroomt, dat door deze lijn wordt begrensd.

Dit kan ook direkt uit de boven gegeven waarden van α, β, γ worden afgeleid:

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2 G}{dx\,dy} - \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{d^2 H}{dx\,dz} =$$

$$= -\frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right),$$

en daar, zooals vroeger is opgemerkt,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0,$$

vinden wij:

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = -\Delta F = 4\pi u,$$

zooals uit de bekende eigenschappen van den gravitatiepotentiaal volgt.

Eveneens vindt men:

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v, \quad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w.$$

Wij kunnen thans voor de energie schrijven:

$$T = \frac{1}{2}\int\Big(F\,u + G\,v + H\,w\Big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{8\,\pi.}\int\Big\{F\Big(\frac{d\gamma}{d\,y} - \frac{d\beta}{d\,z}\Big) + G\Big(\frac{d\,\alpha}{d\,z} - \frac{d\gamma}{d\,x}\Big) + H\Big(\frac{d\beta}{d\,x} - \frac{d\,\alpha}{d\,y}\Big)\Big\}\,d\,\tau.$$

Tot nog toe had $d\,\tau$ den vorm van een stroombuis-elementje. Men ziet echter gemakkelijk in, dat deze vorm willekeurig kan worden genomen, en wij zullen dus thans er onder verstaan een parallelepipedum met de ribben $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$.

Gaan we de laatstgevonden integraal partieel integreeren, en bedenken we, dat $\mathfrak{H}$ en V in alle punten doorloopend zijn, dan wordt de integraal:

$$T = -\frac{1}{8\,\pi.}\int\Big\{\alpha\Big(\frac{d\,G}{d\,z} - \frac{d\,H}{d\,y}\Big) + \beta\Big(\frac{d\,H}{d\,x} - \frac{d\,F}{d\,z}\Big) + \gamma\Big(\frac{d\,F}{d\,y} - \frac{d\,G}{d\,x}\Big)\Big\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{8\,\pi}\int\Big(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\Big)\,d\,\tau,$$

daar de oppervlakte-integralen verdwijnen.

Dezen vorm van de integraal zullen wij in het bizonder gebruiken.

Daar het om de afleiding eener bekende uitkomst te doen was, hebben wij ter bekorting eenige beschouwingen achterwege gelaten, die bij eene strenge behandeling niet gemist zouden kunnen worden.

Stoffen, die de eigenschap bezitten magnetisch te worden, wanneer men ze in een elektromagnetisch veld brengt, heeten *magnetisch induceerbaar.*

Wanneer men zulke media in den aether brengt, en daarbij de stroomen, die, naar wij veronderstellen zullen, het veld te weeg brengen, constant houdt, zal de waarde der elektrokinetische energie anders zijn geworden, dan ze vóór hunne aanwezigheid was.

Wij zullen door middel van de vergelijkingen van LAGRANGE de ponderomotorische krachten, die op deze lichamen in een magnetisch veld worden uitgeoefend, kunnen berekenen.

Daartoe moeten wij de energie van het veld bepalen, wanneer zich deze media er in bevinden. Dit kan geschieden in aansluiting aan het in de vorige bladzijden medegedeelde. Het is nl. gebleken, dat men zulke induceerbare lichamen op eene bepaalde wijze in oneindig kleine cilindertjes, wier diameters oneindig klein ten opzichte hunner lengten zijn, kan verdeelen, die men ten opzichte van hunne werking naar buiten kan vervangen door solenoïdes. En wel moet de as van elke solenoïde evenwijdig aan de beschrijvende lijnen van den cilinder zijn, en moet in de solenoïde de stroomsterkte per lengte-eenheid van beschrijvende lijn $\varkappa\,\mathfrak{H}$ zijn, als $\mathfrak{H}$ de magnetische kracht voorstelt, die in de ruimte van het cilindertje heerscht, als het door aether is vervangen, en $\varkappa$ eene constante, die van den aard der stof afhangt (*magnetiseeringsconstante* of *susceptibiliteit*).

De grootheid $\varkappa \mathfrak{H}$ noemt men de *magnetisatie*; zij wordt gewoonlijk voorgesteld door de letter $\mathfrak{J}$.

Wij kennen aan de *magnetisatie* de richting toe, die wij aan de as van het cilindertje moeten geven, opdat het met eene solenoïde aequivalent zij, en wel die richting langs de as, die met de positieve x-as samenvalt, indien de stroomen der solenoïde in richting met eene wenteling van O Y naar O Z overeenkomen.

Bij *isotrope* stoffen, zooals wij voorloopig alleen beschouwen, heeft de magnetisatie dezelfde of juist de tegengestelde richting als de boven omschreven magnetische kracht $\mathfrak{H}$. Wij zullen deze gevallen van elkander onderscheiden door den coëfficient $\varkappa$ in het eerste geval positief en in het tweede geval negatief te nemen.

Stellen we ons thans een magnetisch veld voor, veroorzaakt door één stroom van de sterkte i; één cilindertje van bovenbedoelde stof zij, met de lengte-richting evenwijdig aan de magnetische kracht, in zeker punt van het veld geplaatst. Overigens bevatte dit laatste alleen aether.

Wij moeten thans trachten de energie te berekenen, die *in* het cilindertje aanwezig is en die wij door T_1 zullen voorstellen. Wij zullen om dit te doen de energie T_2 van de geheele ruimte bepalen, en daarvan de energie T_3, die buiten het cilindertje aanwezig is, aftrekken.

De eerste zal gevonden worden door na te gaan wat er gebeurt, wanneer men, terwijl het cilindertje aanwezig is, den stroom *i* sluit.

Wat T_3 betreft, deze energie is krachtens onze onderstelling dezelfde, die men heeft wanneer de cilinder door de aequivalente solenoïde is vervangen, en kan worden gevonden, wanneer men van de totale energie T_2' in dit geval de energie T_1' aftrekt, die dan in de cilindrische ruimte bestaat.

Beide deze grootheden kunnen met behulp van het voorgaande berekend worden, en men heeft dan:

$$T_3 = T_2' - T_1'$$

en

$$T_1 = T_2 - T_3$$

dus

$$T_1 = T_2 - T_2' + T_1'.$$

Bij de volgende berekeningen zullen we de dikte der laag, waarin de stroomen der solenoïde loopen, oneindig klein veronderstellen ten opzichte van de middellijn van den cilinder, zoodat men de geheele ruimte kan verdeelen in die, welke *buiten* en die, welke *binnen* de solenoïde ligt.

De magnetische kracht, die het gevolg is van den stroom *i* zullen we aanduiden door $\mathfrak{H}$ (α, β, γ), die, welke het gevolg is van de solenoïde door $\mathfrak{H}'$ $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Berekening van T_2'.

Noemen we de stroomsterkte in elke winding der solenoïde j, dan is:

$$T_2' = \frac{1}{2} L_1 i^2 + M i j + \frac{1}{2} L_2 j^2,$$

waarin L_1, M en L_2 de bekende beteekenissen hebben.

Volgens de wet van Ampère is:

$$M i = i \int\int \frac{\cos. \varepsilon}{r} \, d s \, d s' =$$

$$= i \int\int \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} = \int (F\,dx' + G\,dy' + H\,dz'),$$

over de stroomlijn der solenoïde.

De beteekenis der grootheden is bekend; de accenten hebben betrekking op de solenoïde.

De laatste integraal kunnen we vervangen door de oppervlakte-integraal der magnetische kracht $\mathfrak{H}$ over een oppervlak, dat door de windingen der solenoïde wordt begrensd. Als het aantal windingen n en de doorsnede ω is, dan kunnen we voor deze integraal schrijven: $\mathfrak{H} n \omega$, daar $\mathfrak{H}$ overal loodrecht op de doorsnede staat en over de ruimte der solenoïde als constant mag worden beschouwd, zoodat we hebben:

$M i = \mathfrak{H} n \omega$, dus $M i j = \varkappa l \omega \mathfrak{H}^2$, daar $j = \dfrac{l \varkappa \mathfrak{H}}{n}$,
als l de lengte der solenoïde voorstelt.

Wij weten verder, dat:

$$\frac{1}{2} L_2 j^2 = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\tau.$$

Wij kunnen bewijzen, dat de waarde van:

$$\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\tau,$$

genomen over de ruimte *buiten* de solenoïde, oneindig klein is ten opzichte van $M\, i\, j$ en dus kan worden verwaarloosd.

Daartoe merken wij op, dat de solenoïde naar buiten werkt, zooals eene verdeeling van noord-magnetisme over het eene en van zuid-magnetisme over het andere eindvlak volgens de wet van Coulomb werken zou.

Noemen we de krachten door deze verdeelingen op de eenheid van noord-magnetisme in zeker punt uitgeoefend, $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$, dan is:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{H}_2^2 + 2\, \mathfrak{H}_1\, \mathfrak{H}_2 \cos.\, \theta$$

als θ de hoek tusschen $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$ voorstelt.

Dus:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 < 2\, (\mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{H}_2^2),$$

nu is:

$$\int \mathfrak{H}_1^2\, d\tau = \int \mathfrak{H}_2^2\, d\tau,$$

dus:

$$\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\tau < 4 \int \mathfrak{H}_1^2\, d\tau.$$

Nemen we de afmetingen van den cilinder eindig en een eindige magnetische dichtheid, dan heeft $\int \mathfrak{H}_1^2\, d\tau$ eene eindige waarde. Laten we vervolgens alle afmetingen der ruimte, waarover deze integraal is genomen, in dezelfde verhouding kleiner worden, zoodat de eindige cilinder overgaat in die met de doorsnede ω, en de lengte l, en elk element $d\tau$ door een gelijkstandig kleiner element wordt vervangen, terwijl de magnetische dichtheid dezelfde blijft, dan blijft $\mathfrak{H}_1^2$ onveranderd, daar deze grootheid van de orde $\frac{\omega}{r^2}$ is. Het ruimte-element $d\tau$ verkrijgt echter den factor $\omega^{\frac{3}{2}}$, zoodat de integraal van de orde $\omega^{\frac{3}{2}}$ wordt en dus kan worden verwaarloosd ten opzichte van de vroeger bepaalde, die van de orde ω is.

Het gedeelte van $\frac{1}{2} L_2 j^2$, behoorende bij de ruimte der solenoïde, is $\frac{1}{8\pi} l \omega \mathfrak{H}'^2$, daar we $\mathfrak{H}'$ over deze ruimte als constant mogen beschouwen.

Wij vinden dus voor de energie van het veld:

$$T_2' = \frac{1}{2} L_1 i^2 + \varkappa l \omega \mathfrak{H}^2 + \frac{1}{8\pi} l \omega \mathfrak{H}'^2.$$

Berekening van T_1'.

Wanneer eene solenoïde met ν windingen per lengte-eenheid van de beschrijvende lijn doorloopen wordt door eene stroom j, bestaat dientengevolge in elk inwendig punt eene magnetische kracht // aan de as der solenoïde van de grootte $\mathfrak{H}' = 4\pi\nu j$. In ons geval wordt dit:

$$\mathfrak{H}' = 4\pi\varkappa\mathfrak{H},$$

en uit het omtrent het teeken van $\varkappa$ gezegde volgt, dat, als $\varkappa$ positief is, $\mathfrak{H}'$ dezelfde richting heeft als $\mathfrak{H}$.

Dus is:

$$T_1' = \frac{1}{8\pi} l\omega(\mathfrak{H}+\mathfrak{H}')^2 = \frac{1}{8\pi} l\omega(1+8\pi\varkappa)\mathfrak{H}^2 + \frac{1}{8\pi} l\omega\mathfrak{H}'^2.$$

Berekening van T_2.

Wij stellen ons voor, dat de stroom i gesloten wordt, terwijl het cilindertje der magnetiseerbare stof op zijne plaats is. Was dit cilindertje er niet, dan zou

$$E - ri = L_1 \frac{di}{dt}$$

zijn. Thans oefent het ontstaan van 't magnetisme eene inductiewerking uit, en wij mogen aannemen, dat, ook wat deze betreft, het cilindertje door de aequivalente solenoïde, waarin dan ook j aangroeit, mag worden vervangen. Daaruit volgt:

$$Y = E - ri = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{dj}{dt}$$

voor de bewegingsvergelijking der elektriciteit in den stroomgeleider.

Daar deze Y de eenige uitwendige kracht is, die op het systeem werkt, is de aangroeiing der energie T_2 in den tijd dt:

$$dT_2 = (E - ri) \times i\,dt = \left(L_1 i\frac{di}{dt} + M i\frac{dj}{dt}\right) dt =$$

$$= \left(L_1 i\frac{di}{dt} + \varkappa l\omega\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right) dt = d\left[\frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2}\varkappa l\omega\mathfrak{H}^2\right],$$

dus:

$$T_2 = \frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2}\varkappa l\omega\mathfrak{H}^2,$$

daar de integratieconstante *nul* moet zijn, aangezien voor i en $\mathfrak{H}$ beide nul, ook T_2 *nul* is.

Ten slotte is

$$T_1 = T_2 - T_2' + T_1' = \frac{1}{8\pi} l\,\omega\,(1 + 4\pi\varkappa)\,\mathfrak{H}^2.$$

Wij kunnen deze uitkomst eenvoudiger schrijven, wanneer wij een nieuwen vector

$$\mathfrak{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathfrak{H},$$

of,

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu$$

stellende,

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

invoeren. Dan is nl. de energie in het cilindertje

$$\frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}$$

per ruimte-eenheid.

Den vector $\mathfrak{B}$ noemt men de *magnetische inductie*, μ den *inductie-coëfficient* of de *permeabiliteit*.

$\mathfrak{B}$ is de magnetische kracht, die in de ruimte van het cilindertje heerscht, wanneer dit door de aequivalente solenoïde is vervangen ($\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$).

Hebben wij een magnetisch induceerbaar lichaam van willekeurigen vorm, dan verdeelen wij dit eerst in cilindertjes van bovengemelde gedaante met de beschrijvende lijnen evenwijdig aan de *magnetisatie*. Vervangen we alle op één na door de aequivalente solenoïdes, dan vinden we, evenals boven, voor de energievermeerdering binnen de ruimte van dat éene cilindertje dezelfde waarde $\frac{1}{2} \varkappa \mathfrak{H}^2 l \omega$. Dit kan met ieder cilindertje geschieden, dus we mogen zeggen, dat de energie per volume-eenheid eener magnetisch induceerbare stof $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H}$ bedraagt. Hierin stelt dus $\mathfrak{H}$ voor de magnetische kracht, die in zeker punt heerscht, wanneer men het meergemelde cilindertje door *aether* vervangt en $\mathfrak{B}$ de magnetische kracht in datzelfde punt, wanneer het cilindertje door de solenoïde wordt vervangen. Voor punten in den aether is $\mu = 1$ en $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ en gaat dus deze waarde over in de bekende $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2$, zoodat wij de waarde $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H}$ algemeen mogen vaststellen.

Bij *anisotrope* stoffen zal de *magnetisatie* $\mathfrak{J}$ niet samenvallen met de *magnetische kracht* $\mathfrak{H}$. Definieert men voor zoodanige stoffen de *magnetische inductie* $\mathfrak{B}$ door de vectorvergelijking

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{J},$$

dan kan men op de boven gevolgde wijze aantoonen, dat de energie per volume-eenheid gevonden wordt door het produkt van de *inductie* met de componente der magnetische kracht in de richting der inductie door 8π te deelen. (Scalaire deel van het vectoren-produkt).

Uit de vroeger (pag. 21) bepaalde waarden van α, β, γ volgt, dat

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

dus $\int \mathfrak{H}_n\, d\sigma$, over een gesloten oppervlak, is *nul*. Nu is $\mathfrak{B}$ ook een magnetische kracht nl: $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}' = = \mathfrak{H} + 4\pi\varkappa\mathfrak{H}$, d. w. z. de magnetische kracht, die heerscht, wanneer al de cilindertjes door de aequivalente solenoïdes zijn vervangen. Nemen wij nu $\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma$ over een gesloten oppervlak. In de deelen van het oppervlak, die behooren tot de ruimte der stroombanen van de solenoïdes bestaat eene magnetische kracht die wel van die der overige ruimte zal verschillen; omdat echter het bedrag, dat ze voor de oppervlakte-integraal leveren oneindig klein is, daar de stroombanen oneindig dun zijn ten opzichte van de diameters der solenoïdes, kan men zich bepalen tot het overblijvende deel van het oppervlak en slechts het bedrag, dat deze voor onze integraal opleveren in rekening brengen. Dan geldt de formule:

$$\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma = 0$$

over een gesloten oppervlak.

Hieruit volgt $\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$, als a, b, c de componenten van $\mathfrak{B}$ voorstellen.

Bij oppervlakken van discontinuiteit is:

$$\mathfrak{B}_{n\,1} = \mathfrak{B}_{n\,2}$$

m. a. w. de normale componente der *inductie* is doorloopend.

De lijn-integraal der magnetische kracht is ook binnen de ruimte der magnetisch induceerbare lichamen gelijk aan

4π maal de hoeveelheid elektriciteit, die per tijdseenheid door een oppervlak stroomt, dat de lijn tot randbegrenzing heeft. Dus bij niet aanwezigheid van stroomen moet die waarde nul zijn.

Dit kan blijken door alle elementen der induceerbare stof door de meermalen genoemde solenoïdes te vervangen en de lijn-integraal der dan bestaande magnetische kracht $\mathfrak{B}$ langs een gesloten lijn te nemen. Door een oppervlak dat deze lijn tot rand heeft gaat nu overal waar het eene solenoïde-winding doorsnijdt eene zekere hoeveelheid electriciteit, en men kan aantoonen dat de totale per tijdseenheid doorstroomende hoeveelheid gelijk is aan de lijn-integraal der magnetisatie langs de beschouwde lijn.

Iedere winding der solenoïdes toch, die twee keer door het oppervlak wordt gesneden, levert voor de oppervlakte-integraal *nul*, daar de richting van den stroom bij de beide doorsnijdingen tegengesteld is. Alleen dus de windingen die slechts éénmaal worden gesneden leveren een bedrag voor de oppervlakte-integraal; dit zijn die, welke met de grenslijn van het oppervlak zijn geschakeld.

Noemen wij de lengte van een cilindertje waarvan de eindvlakken door de grenslijn worden gesneden λ, dan geeft deze solenoïde voor de gezochte hoeveelheid electriciteit het bedrag $\mathfrak{J}\lambda$. Is l de lengte van het stuk der grenslijn, dat binnen deze solenoïde ligt en ε de hoek tusschen λ en l, dan is $\lambda = l \cos. \varepsilon$, dus wij kunnen het bovengenoemde bedrag ook aldus schrijven: $\mathfrak{J}\, l \cos. \varepsilon$, waaruit wij zien, dat werkelijk de totale door het oppervlak stroomende hoeveelheid electriciteit te beschouwen is als de lijn-integraal van $\mathfrak{J}$ langs de grenslijn, zoodat we hebben:

$$\text{lijnintegraal } \mathfrak{B} = \text{lijnintegraal } 4\pi\mathfrak{J},$$

(waarbij nog moet worden opgemerkt, dat blijkens hetgeen op pag. 25 omtrent het teeken van $\varkappa$ is gezegd en met inachtneming van de formules op pag. 22, klaarblijkelijk bovenstaande formule, ook wat het teeken betreft, juist is);

of $\text{lijnintegraal } \mathfrak{H} + \text{lijnintegraal } 4\pi\mathfrak{J} = \text{lijnintegraal } 4\pi\mathfrak{J}$,

dus $$\text{lijnintegraal } \mathfrak{H} = 0.$$

Nemen wij de lijnintegraal van $\mathfrak{H}$ langs den omtrek van een klein rechthoekje waarvan de langste zijden $d\,l$ in de richting t // aan een oppervlak van discontinuïteit loopen, de éene er *binnen*, de andere er *buiten*, terwijl de andere zijden ten opzichte van $d\,l$ oneindig klein zijn, zoodat de hoeveelheid door het oppervlak van den rechthoek stroomende elektriciteit oneindig klein is ten opzichte van $d\,l$. Van de lijnintegraal van $\mathfrak{H}$ langs dezen omtrek moet dus hetzelfde gelden. Aan den anderen kant kan men voor deze lijnintegraal schrijven $(\mathfrak{H}_{t1} - \mathfrak{H}_{t2})\,d\,l$, als $\mathfrak{H}_{t1}$ en $\mathfrak{H}_{t2}$ de componenten van $\mathfrak{H}$ ter weerszijden van het oppervlak voorstellen, volgens de richting t.

Hieruit volgt $\mathfrak{H}_{t1} = \mathfrak{H}_{t2}$, en daar dit van *elke* richting t

in het grensvlak geldt, is de *tangentieele* componente der magnetische kracht doorloopend. Noemen we deze $\mathfrak{H}_{t\,1}$ en $\mathfrak{H}_{t\,2}$ aan weerszijden dan hebben wij dus $\mathfrak{H}_{t\,1} = \mathfrak{H}_{t\,2}$.

Aan het grensvlak van twee verschillende magnetisch geïnduceerde isotrope stoffen, met μ_1 en μ_2 tot *permeabiliteiten*, vinden we voor de tangenten der hoeken tusschen de normaal en de inductie:

$$tg\,\Phi_1 = \frac{\mu_1\,\mathfrak{H}_t}{\mu_1\,\mathfrak{H}_{n\,1}},\quad tg\,\Phi_2 = \frac{\mu_2\,\mathfrak{H}_t}{\mu_2\,\mathfrak{H}_{n\,2}},$$

en daar $\mu_1\,\mathfrak{H}_{n\,1} = \mu_2\,\mathfrak{H}_{n\,2}$ volgt hieruit:

$$\frac{tg\,\Phi_1}{tg\,\Phi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

de *tangentenwet* voor de breking der krachtlijnen.

Eene mathematische stelling, die in het vervolg eenige malen zal worden toegepast, is de volgende:

Laten $\mathfrak{J}$ en Σ twee vectoren zijn, voldoende aan de voorwaarden dat over de geheele ruimte:

$$\frac{d\,\mathfrak{J}_z}{d\,y} - \frac{d\,\mathfrak{J}_y}{d\,z} = \frac{d\,\mathfrak{J}_x}{d\,z} - \frac{d\,\mathfrak{J}_z}{d\,x} = \frac{d\,\mathfrak{J}_y}{d\,x} - \frac{d\,\mathfrak{J}_x}{d\,y} = 0,$$

$$\frac{d\,\Sigma_x}{d\,x} + \frac{d\,\Sigma_y}{d\,y} + \frac{d\,\Sigma_z}{d\,z} = 0,$$

bij grensvlakken: $\mathfrak{J}_{t\,1} = \mathfrak{J}_{t\,2}$, $\Sigma_{n\,1} = \Sigma_{n\,2}$, en in het oneindige zoowel $\mathfrak{J}$ als Σ snel genoeg tot *nul* naderen om de oppervlakte-integraal over een boloppervlak in het oneindige, die bij de integratie te pas komt, te doen verdwijnen.

Dan is, over de geheele ruimte uitgestrekt:

$$\int (\mathfrak{J}_x \Sigma_x + \mathfrak{J}_y \Sigma_y + \mathfrak{J}_z \Sigma_z)\, d\,x\, d\,y\, d\,z = 0.$$

Het bewijs verkrijgt men onmiddellijk door partieele integratie der integraal.

Beschouwen wij $\mathfrak{J}_x$, $\mathfrak{J}_y$ en $\mathfrak{J}_z$ als afgeleiden naar de coördinaten eener functie ψ, wat op grond der differentiaalvergelijkingen, waaraan $\mathfrak{J}$ moet voldoen, mogelijk is, dan wordt onze integraal:

$$-\int \psi \left(\frac{d\,\Sigma_x}{d\,x} + \frac{d\,\Sigma_y}{d\,y} + \frac{d\,\Sigma_z}{d\,z}\right) d\,\tau + \int \left(\psi_1\, \Sigma_{n\,1} - \psi_2\, \Sigma_{n\,2}\right) d\,\sigma.$$

De eerste is een ruimte-integraal, die verdwijnt wegens de vergelijking, waaraan Σ voldoet.

De oppervlakte-integraal over een oppervlak in het oneindige is wegens de gemaakte veronderstelling weggelaten. De oppervlakte-integraal over de grensvlakken kan ook aldus worden geschreven:

$$\int (\psi_1 - \psi_2)\, \Sigma_{n\,1}\, d\,\sigma,$$

daar $\Sigma_{n\,1} = \Sigma_{n\,2}$.

Wij kunnen echter ook nog aantoonen dat $\psi_1 - \psi_2$ aan het grensvlak *constant* is. Nemen wij daartoe twee punten tegenover elkaar ter weerszijden van het grensoppervlak gelegen en noemen de waarden die ψ daar heeft ψ_1 en ψ_2. Nemen wij vervolgens twee op oneindig kleinen afstand van de vorige op dezelfde wijze liggende punten en noemen t de richting en $d\,l$ de lengte der lijn, uit het eerste puntenpaar naar het laatste getrokken, dan zullen de waarden der functie ψ in de nieuwe punten zijn:

$$\psi'_1 = \psi_1 + \mathfrak{J}_{t\,1}\, d\,l \text{ en } \psi'_2 = \psi_2 + \mathfrak{J}_{t\,2}\, d\,l,$$

en daar nu $\mathfrak{J}_{t\,1} = \mathfrak{J}_{t\,2}$ is

$$\psi'_1 - \psi'_2 = \psi_1 - \psi_2 = \mathrm{C}.$$

Onze oppervlakte-integraal wordt dus:

$$\mathrm{C} \int \Sigma_{n\,1}\, d\,\sigma,$$

en dit is nul wegens de solenoïdale verdeeling van Σ over de geheele ruimte.

Zoodat de stelling is bewezen.

HOOFDSTUK II.

Ponderomotorische werkingen in het elektromagnetisch veld zonder deformatie der ponderabele massa's.

Wij zullen onder T thans de geheele energie, dus ook het *ponderokinetische* gedeelte, van het elektromagnetische veld verstaan.

De ruimte zij gevuld met aether en magnetisch induceerbare stoffen, terwijl gegeven elektrische stroomen het veld te weeg brengen.

Wij veronderstellen, dat de ponderabele massa's in rust zijn, zoodat de term $\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{d\dot{x}}$, in de vergelijking van Lagrange, nul is en wij voor de algemeene uitwendige krachtcomponente vinden:

$$\mathrm{X} = -\frac{d\mathrm{T}}{dx}.$$

Deze kracht moet worden aangewend om, bij het constant blijven der stroomen, het stelsel in rust te houden. Het systeem oefent dus een gelijke en tegengestelde kracht uit, nl. $\frac{dT}{dx}$, waaruit dus volgt, dat deze T doet *toenemen* en er slechts evenwicht zal zijn, wanneer T een *maximum* is; dan is nl. $\frac{dT}{dx} = 0$. Bij een *minimum* is ook $\frac{dT}{dx} = 0$, en is er dus ook evenwicht, dit is echter *labiel*, terwijl het in het eerste geval *stabiel* is.

Willen wij de kracht berekenen, die in een elektromagnetisch veld op een magnetisch geïnduceerd lichaam wordt uitgeoefend, dan berekenen wij δ T, d. i. de aangroeiing van T, die ontstaat tengevolge van eene virtueele verplaatsing ε en deelen de laatste op de eerste.

Wij zullen het lichaam voor het gemak *ijzer* noemen en aannemen, dat het *isotroop* is en dit bij de virtueele verplaatsing blijft.

Door deze verplaatsing ondergaan $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ over de geheele ruimte veranderingen. Daar de stroomen bij de verplaatsing constant worden gehouden, moet de lijnintegraal van de aangroeiing van $\mathfrak{H}$ langs elke gesloten lijn *nul* zijn. De aangroeiing van $\mathfrak{B}$ is, evenals $\mathfrak{B}$ zelf, solenoïdaal over de ruimte verdeeld.

Voor de berekening van $\delta \int \mathfrak{H} \mathfrak{B} \, d\tau$ moeten wij de ruimte in 3 deelen verdeelen: 1^0. die waar, zoowel vóór als na de verplaatsing, *aether* is, 2^0. die, waar zoowel vóór als na de verplaatsing, *ijzer* is, en 3^0. die, waar *aether* door *ijzer*, of omgekeerd, wordt vervangen.

Noemen wij deze ruimten respectievelijk I, II en III, dan kunnen wij in de eerste plaats opmerken, dat de variaties van $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ in I en II oneindig klein zijn; wij zullen ze voorstellen door $\delta\,\mathfrak{H}$ en $\delta\,\mathfrak{B}$. In elk dezer ruimten moeten wij $\delta \int \mathfrak{H}\,\mathfrak{B}\,d\,\tau$ berekenen, waarvoor wij met het oog op de betrekking, die tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ bestaat, kunnen schrijven: $2 \int \mathfrak{B}\,\delta\,\mathfrak{H}\,d\,\tau$. Aangezien nu de componenten van $\delta\,\mathfrak{H}$ kunnen worden beschouwd als de afgeleiden eener functie Φ, die van dezelfde orde als $\delta\,\mathfrak{H}$ is, moeten wij berekenen:

$$2 \int \left(a \frac{d\,\Phi}{d\,x} + b \frac{d\,\Phi}{d\,y} + c \frac{d\,\Phi}{d\,z} \right) d\,x\,d\,y\,d\,z,$$

genomen over de ruimte I en vervolgens over de ruimte II.

Door partieele integratie kan deze integraal veranderd worden in een ruimte-integraal, die ingevolge de bekende eigenschap van $\mathfrak{B}$ nul is, en een oppervlakte-integraal over de beide grensvlakken der ruimten I en II, welke grensvlakken ieder afzonderlijk uit twee deelen bestaan, het eene, behoorende tot den eersten stand van het lichaam, het andere tot den stand na de verplaatsing.

Noemen wij de waarden der functie Φ in twee punten der oppervlakken, die oorspronkelijk samenvielen, en thans respectievelijk aan den kant der ruimten I en II zijn gelegen, Φ_{I} en Φ_{II} en bedenken wij, dat wij, met verwaarloozing van oneindig kleine grootheden van hoogere orde, $\mathfrak{B}_n$ in die punten als gelijk mogen beschouwen en tevens het oorspronkelijke oppervlak (in den stand vóór de verplaatsing), als integratie-oppervlak mogen nemen, dan vinden wij voor de integraal:

$$2 \int \mathfrak{B}_n (\Phi_{\mathrm{II}} - \Phi_{\mathrm{I}})\, d\,\sigma.$$

Uit de voorwaarde, waaraan de lijnintegraal van de aangroeiing van $\mathfrak{H}$ moet voldoen, kunnen wij eene uitdrukking voor $\Phi_{\mathrm{II}} - \Phi_{\mathrm{I}}$ afleiden.

Daartoe beschouwen wij een gesloten lijn die door de drie ruimten gaat en bepalen de lijnintegraal der aangroeiing van $\mathfrak{H}$ daarlangs in de richting van het in fig. 3 aangegeven pijltje.

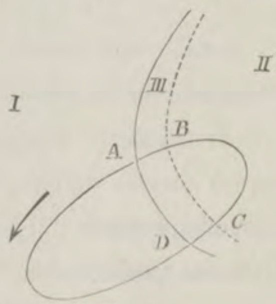

Fig. 3.

In de figuur is verondersteld, dat in de ruimte III de aether in de plaats van het ijzer komt.

Met verwaarloozing van oneindig kleinen van hoogere orde kunnen wij in de punten op de lijnen A B en C D, d. i. in punten van de ruimten III, als aangroeiing van $\mathfrak{H}$ beschouwen het verschil der waarden die deze grootheid vóór de verplaatsing terweerszijden van het oppervlak in die punten heeft en die wij zullen aanduiden door $\mathfrak{H}'$ (in den aether) en $\mathfrak{H}$ (in het ijzer). Daar de tangentiëele componente van $\mathfrak{H}$ aan het oppervlak van het ijzer doorloopend is, hebben wij bij het opmaken van dit verschil slechts de normale componenten in rekening te brengen. Men ziet nu gemakkelijk in, dat de integratie langs A D oplevert: $\varphi_{I_D} - \varphi_{I_A}$, die langs C B: $\varphi_{II_B} - \varphi_{II_C}$ en die langs de beide overige lijntjes B A en D C: $\{(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,d\,n\}_{BA} - \{(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,d\,n\}_{DC}$, waarin $d\,n$ den positief gerekenden afstand der beide oppervlakken voorstelt, terwijl de toegevoegde indices de punten aanwijzen, waarop de grootheden betrekking hebben.

Wij vinden dus, daar de som dezer grootheden nul moet zijn:

$$(\varphi_{I_D} - \varphi_{II_C}) - \{(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)dn\}_{DC} = (\varphi_{I_A} - \varphi_{II_B}) - \{(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)dn\}_{BA},$$

zoodat over het geheele oppervlak: $\varphi_I - \varphi_{II} - (\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,d\,n$ een constante moet zijn.

Noemen wij deze constante $-\chi$, dan is dus $\varphi_{II} - \varphi_I =$ $= \chi - (\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,d\,n.$

Hierin kunnen wij $d\,n$ vervangen door $-\varepsilon\, cos.\, (\varepsilon\, n)$.

Onder ε zullen wij nl. verstaan de baan, die een punt van het oppervlak bij de virtueele verplaatsing doorloopt, dus per se eene positieve grootheid; dit is ook het geval met $d\,n$. Wordt bij de verplaatsing aether door ijzer vervangen, dan moet in onze redeneering de grootheid $\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n$ door $\mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}'_n$ vervangen worden. Dit is echter het geval wanneer de hoek $(\varepsilon\, n)$ scherp is, dus de cosinus er van positief, zoodat dan $d\,n = \varepsilon \cos.(\varepsilon\,n)$. Wij mogen dus in het algemeen zeggen:

$$\Phi_{II} - \Phi_{I} = \chi + (\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,\varepsilon \cos.(\varepsilon\,n).$$

Voeren wij de hier gevonden waarde voor $\Phi_{II} - \Phi_{I}$ in onze integraal in, dan wordt deze:

$$2\int \mathfrak{B}_n (\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,\varepsilon \cos.(\varepsilon\,n)\,d\,\sigma + 2\,\chi \int \mathfrak{B}_n\,d\,\sigma =$$
$$= 2\int \mathfrak{B}_n\,(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,\varepsilon \cos.(\varepsilon\,n)\,d\,\sigma,$$

daar de tweede integraal nul is wegens de solenoïdale verdeeling van $\mathfrak{B}$.

Nemen wij thans de variatie $\delta \int \mathfrak{H}\,\mathfrak{B}\,d\,\tau$ over ruimte III, dan ziet men gemakkelijk in, dat deze, met gelijksoortige verwaarloozingen als boven, wordt:

$$\int \varepsilon\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'^2) \cos.(\varepsilon\,n)\,d\,\sigma,$$

zoodat wij vinden voor δ T:

$$\frac{1}{8\,\pi} \int \varepsilon\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{H} - 2\,\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{H}_n + 2\,\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}'^2) \cos.(\varepsilon\,n)\,d\,\sigma.$$

Dezen vorm kunnen wij nog transformeeren.

Wij kunnen voor de middelste twee termen van den vorm, die tusschen haken staat, schrijven:

$$2\,\mathfrak{B}_n\,(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n) \cos.(\varepsilon\,n).$$

Daar $\mathfrak{H}'_t - \mathfrak{H}_t = 0$ heeft men de vectorvergelijking:

$$\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}' - \mathfrak{H},$$

en dus, al de vectoren op de richting ε projecteerende:

$$(\mathfrak{H}'_n - \mathfrak{H}_n)\,cos.\,(\varepsilon\, n) = \mathfrak{H}'_\varepsilon - \mathfrak{H}_\varepsilon,$$

zoodat δ T wordt:

$$\frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\Big[\Big\{\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,cos.\,(\varepsilon\, n) - 2\,\mathfrak{B}_n\mathfrak{H}_\varepsilon\Big\} - \Big\{\mathfrak{H}'^2\,cos.\,(\varepsilon\, n) - 2\,\mathfrak{B}_n\mathfrak{H}'_\varepsilon\Big\}\Big]d\sigma.$$

Veronderstellen wij nu, dat de virtueele verplaatsing van het lichaam bestaat in een verschuiving, dan is dus ε voor alle punten van het oppervlak constant en kunnen wij direkt voor de kracht in de richting van ε schrijven:

$$\frac{1}{8\pi}\int \Big[\Big\{\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,cos.\,(\varepsilon\, n) - 2\,\mathfrak{B}_n\mathfrak{H}_\varepsilon\Big\} - \Big\{\mathfrak{H}'^2\,cos.\,(\varepsilon\, n) - 2\,\mathfrak{B}_n\mathfrak{H}'_\varepsilon\Big\}\Big]d\sigma.$$

Nu zullen wij aantoonen, dat

$$\int \Big\{\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,cos.\,(\varepsilon\, n) - 2\,\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{H}_\varepsilon\Big\}\,d\sigma$$

verdwijnt. Hiertoe kiezen wij de x-as // aan ε; dan gaat de uitdrukking over in:

$$\mu\int \Big\{\mathfrak{H}^2\,cos.\,\mathrm{l} - 2\,\mathfrak{H}_n\,\mathfrak{H}_x\Big\}\,d\sigma =$$

$$= \mu\int\Big\{(\mathfrak{H}^2 - 2\,\mathfrak{H}_x^2)\,cos.\,\mathrm{l} - 2\,\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\,cos.\,\mathrm{m} - 2\,\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z\,cos.\,\mathrm{n}\Big\}d\sigma =$$

$$= \mu\int\Big\{\frac{d}{d\,x}(-\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) - 2\,\frac{d}{d\,y}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y) - 2\,\frac{d}{d\,z}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z)\Big\}d\tau,$$

$$[\mathrm{l} = (n\,x),\ \mathrm{m} = (n\,y),\ \mathrm{n} = (n\,z)],$$

waarin de laatste integraal over het ijzer moet worden uitgestrekt.

Uit de eigenschappen van $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$ en $\mathfrak{H}_z$ volgt dat de vorm tusschen $\{\,\}$ verdwijnt.

Uitwerking geeft namelijk:

$$-2\,\mathfrak{H}_x\left(\frac{d\,\mathfrak{H}_x}{d\,x}+\frac{d\,\mathfrak{H}_y}{d\,y}+\frac{d\,\mathfrak{H}_z}{d\,z}\right)+$$

$$+2\,\mathfrak{H}_y\left(\frac{d\,\mathfrak{H}_y}{d\,x}-\frac{d\,\mathfrak{H}_x}{d\,y}\right)+2\,\mathfrak{H}_z\left(\frac{d\,\mathfrak{H}_z}{d\,x}-\frac{d\,\mathfrak{H}_x}{d\,z}\right),$$

welke vorm nul is wegens het verdwijnen der vormen tusschen de haken.

Onze integraal is dus werkelijk nul.

Er blijft derhalve van de kracht over:

$$\frac{1}{8\,\pi}\int\left\{2\,\mathfrak{H}'_n\,\mathfrak{H}'_\varepsilon-\mathfrak{H}'^2\cos.(\varepsilon\,n)\right\}d\,\sigma,$$

en men kan deze zoo interpreteeren, dat de aether op een element $d\,\sigma$ in de richting ε een spanning

$$\frac{1}{8\,\pi}\left[2\,\mathfrak{H}'_n\,\mathfrak{H}'_\varepsilon-\mathfrak{H}'^2\cos.(\varepsilon\,n)\right]$$

per vlakte-eenheid op het ijzer uitoefent.

Door voor ε en n de richting der x-as te kiezen, vindt men hieruit, wanneer wij de gewone notatie voor de spanning gebruiken en de accenten bij de $\mathfrak{H}$'s weglaten:

$$X_x=\frac{1}{8\,\pi}(2\,\mathfrak{H}_x^2-\mathfrak{H}^2)=\frac{1}{8\,\pi}(\mathfrak{H}_x^2-\mathfrak{H}_y^2-\mathfrak{H}_z^2)$$

evenzoo, door ε de richting der x-as en n beurtelings die der y- en z-as te geven:

$$X_y=\frac{1}{4\,\pi}\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{H}_y,\quad X_z=\frac{1}{4\,\pi}\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{H}_z.$$

Op dezelfde wijze wordt gevonden:

$$Y_y = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{H}_x^2),$$

$$Z_z = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2),$$

$$Y_x = X_y = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y,$$

$$Y_z = Z_y = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z,$$

$$Z_x = X_z = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x.$$

Deze zelfde spanningen vinden wij bij MAXWELL (*Electr. and Magn.*, II, pag. 258).

Door de x-as met de richting van $\mathfrak{H}$ te laten samenvallen vinden wij:

$$X_x = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2,$$

$$Y_y = Z_z = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2,$$

$$X_y = Y_x = \text{enz.} = 0,$$

zoodat wij ons dezen spanningstoestand kunnen voorstellen als te bestaan in eene *spanning* in de richting der krachtlijnen en een *druk* in de richtingen loodrecht op de krachtlijnen, beide gelijk aan $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2$.

Tot de bovengenoemde waarde der spanningen is men geraakt door beschouwing van eene *verschuiving*. Op soortgelijke wijze kan men eene oneindig kleine *wenteling* behandelen en aantoonen, dat het koppel, dat hieruit wordt afgeleid, kan worden opgevat als uit *dezelfde* spanningen voort te vloeien, zooals mij door Prof. H. A. Lorentz is meegedeeld, aan wiens welwillende voorlichting ik ook bovenstaande beschouwingen dank.

Thans willen wij het koppel berekenen dat op eene ijzeren ellipsoïde wordt uitgeoefend in een magnetisch veld dat in de door de ellipsoïde ingenomen ruimte als homogeen mag worden beschouwd.

Wij moeten daartoe beginnen met in ieder punt der ruimte de grootheden α, β, γ, a, b en c te bepalen, nadat de ellipsoïde in het homogene veld is geplaatst, wanneer gegeven zijn 1°. de magnetische kracht die in ieder punt der ruimte bestond vóór de aanwezigheid der ellipsoïde, 2°. de permeabiliteit van het ijzer.

Noemen wij de eerste $\mathfrak{H}_0$ en noemen wij de magnetische kracht bij aanwezigheid der ellipsoïde $\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}$, dan is $\mathfrak{H}$ irrotationeel over de ruimte verdeeld, daar wij de stroomen die het veld te weeg brengen constant hebben gelaten en dus

$$\frac{d\gamma_0}{dy} - \frac{d\beta_0}{dz} = \frac{d(\gamma_0 + \gamma)}{dy} - \frac{d(\beta_0 + \beta)}{dz}, \text{ enz.,}$$

derhalve

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0, \text{ enz.}$$

Stel dus $\alpha = -\frac{dV}{dx}$, $\beta = -\frac{dV}{dy}$, $\gamma = -\frac{dV}{dz}$.

De eigenschappen van V zijn:

Buiten het ijzer moet $\Delta V = 0$.

Binnen het ijzer is $\mathfrak{B} = \mu (\mathfrak{H}_o + \mathfrak{H})$, en

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0,$$

wat eveneens voert tot $\Delta V = 0$.

Verder moet V overal doorloopend zijn. Aan het grensvlak moet

$$\mathfrak{B}_{n1} = \mathfrak{B}_{n2},$$

waarin de index 1 op het ijzer, 2 op den aether betrekking zal hebben.

Dus:

$$\mu (\mathfrak{H}_{on1} + \mathfrak{H}_{n1}) = \mathfrak{H}_{on2} + \mathfrak{H}_{n2}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en daar $\mathfrak{H}_{n1} = -\left(\frac{dV}{dn}\right)_1$, $\mathfrak{H}_{n2} = -\left(\frac{dV}{dn}\right)_2$, $\mathfrak{H}_{on1} = \mathfrak{H}_{on2}$, verkrijgen wij uit (1):

$$-\mu \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = \mathfrak{H}_{on} (1 - \mu),$$

of

$$-\mu\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = (1-\mu)[\alpha_o \cos. \mathrm{l} + \beta_o \cos. \mathrm{m} + \gamma_o \cos. \mathrm{n}] \; (2).$$

Wij zullen thans trachten de functie V te vinden, die aan de gestelde voorwaarden voldoet en die ons moet dienen ter bepaling der grootheid $\mathfrak{H}$.

Men kan aantoonen dat V te verkrijgen is door differentiatie van een gravitatie-potentiaal Ω, teweeggebracht door eene met de dichtheid 1 over de ruimte der ellipsoïde verdeelde massa.

Wij beginnen dus eerst deze Ω te bepalen. Deze blijkt te zijn, als we de halve assen der ellipsoïde A, B en C noemen, voor punten *binnen* het oppervlak:

$$\Omega_i = \pi \, A \, B \, C \int_0^\infty d\lambda \, \frac{1 - \dfrac{x^2}{A^2 + \lambda} - \dfrac{y^2}{B^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{C^2 + \lambda}}{\sqrt{(A^2 + \lambda)(B^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}},$$

en voor punten *buiten* het oppervlak:

$$\Omega_a = \pi \, A \, B \, C \int_u^\infty d\lambda \, \frac{1 - \dfrac{x^2}{A^2 + \lambda} - \dfrac{y^2}{B^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{C^2 + \lambda}}{\sqrt{(A^2 + \lambda)(B^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}},$$

als u de eenige positieve wortel der vergelijking:

$$\frac{x^2}{A^2 + u} + \frac{y^2}{B^2 + u} + \frac{z^2}{C^2 + u} = 1$$

is.

De juistheid dezer potentialen zal zijn aangetoond als wij bewijzen dat:

$$\Delta \, \Omega_i = -4\pi \text{ (want de dichtheid is 1)}$$

$$\Delta \, \Omega_a = 0,$$

dat de Ω's en hare eerste differentiaalquotienten in alle punten doorloopend zijn en Ω_a in het oneindige verdwijnt.

Uit de bekende stelling, dat er slechts éene functie bestaat, die aan deze voorwaarden voldoet, volgt dan, dat onze integralen deze functie voorstellen.

Daar aan het ijzer-oppervlak $u=0$, is in die punten $\Omega_i = \Omega_a$, dus Ω is doorloopend. Daar in het oneindige $u=\infty$, vallen daar de integratie-grenzen samen en is dus de integraal nul, dus Ω_a verdwijnt in het oneindige.

Kortheidshalve zullen wij in onze berekeningen de volgende notaties invoeren:

$$A_o = 2\pi A B C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(A^2+\lambda)\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}},$$

$$B_o = 2\pi A B C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(B^2+\lambda)\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}},$$

$$C_o = 2\pi A B C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(C^2+\lambda)\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}},$$

$$A'_o = 2\pi A B C \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(A^2+\lambda)\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}},$$

evenzoo B'_o en C'_o.

Wij vinden dan:

$$\frac{d\Omega_i}{dx} = -A_o x, \quad \frac{d\Omega_a}{dx} = -A'_o x, \text{ enz.}$$

en daar aan het oppervlak $A_o = A'_o$ enz., zijn dus de eerste differentiaalquotienten van Ω doorloopend.

Bij de berekening van $\frac{d\Omega_a}{dx}$ is de term $\frac{d\Omega_a}{du}\frac{du}{dx}$ verdwenen, daar:

$$\frac{d\,\Omega_a}{d\,u} = -\pi\,A\,B\,C\,\frac{1 - \dfrac{x^2}{A^2+u} - \dfrac{y^2}{B^2+u} - \dfrac{z^2}{C^2+u}}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)(C^2+u)}} = 0,$$

wegens de vergelijking waaraan u moet voldoen.

Wij vinden verder:

$$\frac{d^2\,\Omega_i}{d\,x^2} = -\,A_o,\ \text{enz.}$$

$$\frac{d^2\,\Omega_a}{d\,x^2} = \frac{x}{A^2+u}\,\frac{d\,u}{d\,x}\,\frac{2\,\pi\,A\,B\,C}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)(C^2+u)}} - A'_o.$$

Daar nu:

$$\int\left(\frac{1}{A^2+\lambda}+\frac{1}{B^2+\lambda}+\frac{1}{C^2+\lambda}\right)\frac{d\,\lambda}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)(C^2+u)}} =$$

$$= \text{constante} - \frac{2}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}},$$

is

$$\Delta\,\Omega_i = -\,2\,\pi\,A\,B\,C \times \frac{2}{A\,B\,C} = -\,4\,\pi.$$

Verder is:

$$\left\{\frac{x^2}{(A^2+u)^2}+\frac{y^2}{(B^2+u)^2}+\frac{z^2}{(C^2+u)^2}\right\}\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{2\,x}{A^2+u},$$

$$\left\{\frac{x^2}{(A^2+u)^2}+\frac{y^2}{(B^2+u)^2}+\frac{z^2}{(C^2+u)^2}\right\}\frac{d\,u}{d\,y} = \frac{2\,y}{B^2+u},$$

$$\left\{\frac{x^2}{(A^2+u)^2}+\frac{y^2}{(B^2+u)^2}+\frac{z^2}{(C^2+u)^2}\right\}\frac{d\,u}{d\,z} = \frac{2\,z}{C^2+u},$$

zooals uit de vergelijking voor u volgt. Door vermenigvuldiging met $\frac{x}{A^2+u}$, $\frac{y}{B^2+u}$, $\frac{z}{C^2+u}$ en optelling, volgt uit deze 3 gelijkheden:

$$\frac{x}{A^2+u}\frac{du}{dx}+\frac{y}{B^2+u}\frac{du}{dy}+\frac{z}{C^2+u}\frac{du}{dz}=2,$$

dus:

$$\Delta\Omega_a=2\pi ABC\left\{\frac{2}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)(C^2+u)}}-\frac{2}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)(C^2+u)}}\right\}=0,$$

zoodat wij bewezen hebben, dat Ω de gezochte gravitatiepotentiaal is en over kunnen gaan tot de bepaling van V.

Wij stellen daartoe buiten en binnen de ellipsoïde:

$$V=-\left(\overline{A}\frac{d\Omega}{dx}+\overline{B}\frac{d\Omega}{dy}+\overline{C}\frac{d\Omega}{dz}\right),$$

waarin $\overline{A}$, $\overline{B}$ en $\overline{C}$ constanten zijn. Dan is V doorloopend, daar $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$ en $\frac{d\Omega}{dz}$ het zijn.

Verder voldoet V buiten en binnen aan de vergelijking van Laplace, zooals direkt door differentiatie blijkt.

Alleen aan de grensvoorwaarde moet dus nog worden voldaan.

Men heeft:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2=-\overline{A}\left\{\frac{d^2\Omega_a}{dx^2}\cos.l+\frac{d^2\Omega_a}{dx\,dy}\cos.m+\frac{d^2\Omega_a}{dx\,dz}\cos.n\right\}$$
$$-\overline{B}\left\{\frac{d^2\Omega_a}{dx\,dy}\cos.l+\frac{d^2\Omega_a}{dy^2}\cos.m+\frac{d^2\Omega_a}{dy\,dz}\cos.n\right\}$$
$$-\overline{C}\left\{\frac{d^2\Omega_a}{dx\,dz}\cos.l+\frac{d^2\Omega_a}{dy\,dz}\cos.m+\frac{d^2\Omega_a}{dz^2}\cos.n\right\}$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1=-\overline{A}\left\{\frac{d^2\Omega_i}{dx^2}\cos.l+\ldots\text{ enz.}\right\}$$

waarin l, m, n op de naar *buiten* getrokken normaal betrekking hebben.

Door substitutie van deze waarden in vergel. (2), pag. 49, vinden wij, dat V hieraan zal voldoen, wanneer aan 3 betrekkingen door de grootheden $\overline{A}$, $\overline{B}$ en $\overline{C}$ wordt voldaan.

Wat de differentiaalquotienten van Ω betreft, hebben wij daarbij met de waarden aan het oppervlak te doen.

Men vindt hiervoor gemakkelijk:

$$\frac{d^2\,\Omega_a}{d\,x^2} = 4\,\pi\,cos.^2\,\mathrm{l} - \mathrm{A}_o\,, \quad \frac{d^2\,\Omega_a}{d\,y^2} = 4\,\pi\,cos.^2\,\mathrm{m} - \mathrm{B}_o\,,$$

$$\frac{d^2\,\Omega_a}{d\,z^2} = 4\,\pi\,cos.^2\,\mathrm{n} - \mathrm{C}_o.$$

$$\frac{d^2\,\Omega_a}{d\,y\,d\,z} = 4\,\pi\,cos.\,\mathrm{m}\;cos.\,\mathrm{n}\,, \quad \frac{d^2\,\Omega_a}{d x d y} = 4\,\pi\,cos.\,\mathrm{l}\;cos.\,\mathrm{n}\,,$$

$$\frac{d^2\,\Omega_a}{d\,x\,d\,z} = 4\,\pi\,cos.\,\mathrm{l}\;cos.\,\mathrm{m}.$$

$$\frac{d^2\,\Omega_i}{d\,x^2} = -\,\mathrm{A}_o\,, \quad \frac{d^2\,\Omega_i}{d\,y^2} = -\,\mathrm{B}_o\,, \quad \frac{d^2\,\Omega_i}{d\,z^2} = -\,\mathrm{C}_o\,.$$

$$\frac{d^2\,\Omega_i}{d y\,d z} = \frac{d^2\,\Omega_i}{d z\,d x} = \frac{d^2\,\Omega_i}{d x\,d\,y} = 0\,.$$

Substitutie dezer waarden in de bovenbedoelde grensvoorwaarde voor V geeft, wanneer men bedenkt, dat $cos.^2\,\mathrm{l} + {}$ $+ cos.^2\,\mathrm{m} + cos.^2\,\mathrm{n} = 1$:

$$-\,\overline{\mathrm{A}}\left\{4\,\pi + (\mu - 1)\,\mathrm{A}_o\right\}cos.\,\mathrm{l} - \overline{\mathrm{B}}\left\{4\,\pi + (\mu - 1)\,\mathrm{B}_o\right\}cos.\,\mathrm{m} -$$
$$-\,\overline{\mathrm{C}}\left\{4\pi + (\mu - 1)\mathrm{C}_o\right\}cos.\mathrm{n} = (1 - \mu)\,(\alpha_o\,cos.\mathrm{l} + \beta_o\,cos.\mathrm{m} + \gamma_o\,cos.\mathrm{n}),$$

H. VAN DER KAMP.

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN

IN HET

ELEKTROMAGNETISCH VELD.

VERBETERING.

Klaarblijkelijk is op pag. 55 uit de formules (3) de factor $\varkappa$ foutievelijk weggelaten.

Zij moeten dus zijn:

$$\overline{A} = \frac{\varkappa \, \alpha_0}{1 + \varkappa \, A_0} \text{ enz.}$$

Dientengevolge wordt op pag. 57 regel 6 v. o. veranderd in:

$$K + (1 - \mu)\left(\alpha_0^2 \frac{\varkappa \, A_0}{1 + \varkappa \, A_0} + \beta_0^2 \frac{\varkappa \, B_0}{1 + \varkappa \, B_0} + \gamma_0^2 \frac{\varkappa \, C_0}{1 + \varkappa \, C_0}\right) v \text{ enz.}$$

De koppels op pag. 58 worden:

$$\varkappa \, \beta_0 \, \gamma_0 \left(\frac{1}{1 + \varkappa \, B_0} - \frac{1}{1 + \varkappa \, C_0}\right) v \text{ enz.}$$

en die op pag. 60:

$$\frac{-2 \pi \varkappa^2 \gamma_0 \, \alpha_0 \, v}{1 + 2 \pi \varkappa} \text{ en } \frac{2 \pi \varkappa^2 \alpha_0 \, \beta_0 \, v}{1 + 2 \pi \varkappa}.$$

Hieruit blijkt, dat de koppels evenredig zijn met $\varkappa^2$, zoodat er geen verschil bestaat tusschen het gedrag van *diamagnetische* en dat van *paramagnetische* ellipsoïden in een homogeen magnetisch veld geplaatst.

Daar bij de bekende diamagnetische lichamen $\varkappa$ echter zeer klein is, zal men in de meeste gevallen *geen* koppel waarnemen.

De laatste drie regels van pag. 60 kunnen vervallen.

---

waaruit wij afleiden, dat V aan de voorwaarden zal voldoen, wanneer:

$$-\overline{A}\left\{4\pi+(\mu-1)A_o\right\}=(1-\mu)\alpha_o, \text{ enz.}$$

dus:

$$\overline{A}=\frac{(\mu-1)\alpha_o}{4\pi+(\mu-1)A_o}$$

of, daar $\mu-1=4\pi\varkappa$,

Evenzoo

$$\left.\begin{aligned}\overline{A}&=\frac{\alpha_o}{1+\varkappa A_o}\\ \overline{B}&=\frac{\beta_o}{1+\varkappa B_o}\\ \overline{C}&=\frac{\gamma_o}{1+\varkappa C_o}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(3).$$

Nu wij dus de functie V hebben bepaald zijn alle grootheden van het veld bekend, die moeten dienen om de energie T te berekenen.

Wij vinden:

$$8\pi T=\int_a\left[\left(\alpha_o-\frac{dV}{dx}\right)^2+\ldots\right]d\tau+\mu\int_i\left[\left(\alpha_o-\frac{dV}{dx}\right)^2+\ldots\right]d\tau=$$

$$=K-2\int_a\left(\alpha_o\frac{dV}{dx}+\beta_o\frac{dV}{dy}+\gamma_o\frac{dV}{dz}\right)d\tau-2\mu\int_i\left(\alpha_o\frac{dV}{dx}\ldots\right)d\tau+$$

$$+\int_a\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau+\mu\int_i\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\ldots\right]d\tau.$$

De indices u en i hebben betrekking op de ruimte buiten en binnen het ijzer. K is de waarde:

$$\int_a (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2)\, d\tau + \mu \int_i (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2)\, d\tau$$

die onafhankelijk is van den stand der ellipsoïde.

Noemen wij de vier overige termen achtereenvolgens i_1, i_2, i_3 en i_4; deze kunnen alle worden herleid tot oppervlakte-integralen.

Daartoe integreeren wij i_1 en i_2 partieel, waarbij wij moeten bedenken dat de oppervlakte-integraal in het oneindige verdwijnt, omdat V daar verdwijnt, en de ruimte-integraal eveneens, omdat $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$.

Bedenken wij, dat langs de normaal op het oppervlak der ellipsoïde de positieve richting naar buiten wordt genomen, dan vinden wij voor de som der termen i_1 en i_2:

$$2(1 - \mu) \int \mathrm{V}\, (\alpha_0 \cos. \mathrm{l} + \beta_0 \cos. \mathrm{m} + \gamma_0 \cos. \mathrm{n})\, d\sigma$$

genomen over het oppervlak der ellipsoïde. De partieele integratie der integralen i_3 en i_4 geeft: een oppervlakte-integraal in het oneindige, die evenals de vorige verdwijnt, eveneens twee ruimte-integralen, die verdwijnen daar $\Delta \mathrm{V} = 0$ en twee oppervlakte-integralen over het oppervlak der ellipsoïde die tot som hebben:

$$\int \mathrm{V} \left[-\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)_2 + \mu \left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)_1 \right] d\sigma =$$

$$= -(1 - \mu) \int \mathrm{V}\, (\alpha_0 \cos. \mathrm{l} + \beta_0 \cos. \mathrm{m} + \gamma_0 \cos. \mathrm{n})\, d\sigma.$$

Wij vinden dus door sommatie:

$$8\pi T = K + (1-\mu) \int V\,(\alpha_0 \cos. l + \beta_0 \cos. m + \gamma_0 \cos. n)\, d\sigma.$$

Substitueeren wij hierin voor V de waarde:

$$-\left(\overline{A}\,\frac{d\,\Omega}{d\,x} + \overline{B}\,\frac{d\,\Omega}{d\,y} + \overline{C}\,\frac{d\,\Omega}{d\,z}\right),$$

zooals die aan het oppervlak is, bedenken, dat

$$\frac{d\,\Omega}{d\,x} = -\,x\,A_0,\ \frac{d\,\Omega}{d\,y} = -\,y\,B_0 \text{ en } \frac{d\,\Omega}{d\,z} = -\,z\,C_0$$

(pag. 51) en dat:

$$\int x \cos. l\, d\sigma = \int y \cos. m\, d\sigma = \int z \cos. n\, d\sigma = v,$$

als v het volume der ellipsoïde voorstelt, en

$$\int x \cos. m\, d\sigma = \int x \cos. n\, d\sigma = \int y \cos. l\, d\sigma =$$
$$= \int y \cos. n\, d\sigma = \int z \cos. l\, d\sigma = \int z \cos. m\, d\sigma = 0,$$

dan wordt ten slotte:

$$8\pi T = K + (1-\mu)\,(\alpha_0\,\overline{A}\,A_0 + \beta_0\,\overline{B}\,B_0 + \gamma_0\,\overline{C}\,C_0)\,v =$$
$$= K + (1-\mu)\left(\alpha_0^2\,\frac{A_0}{1+\varkappa A_0} + \beta_0^2\,\frac{B_0}{1+\varkappa B_0} + \gamma_0^2\,\frac{C_0}{1+\varkappa C_0}\right) v,$$

door substitutie der vroeger gevonden waarden voor $\overline{A}$, $\overline{B}$ en $\overline{C}$ (pag. 55).

Willen wij thans het koppel berekenen, dat op de ellipsoïde werkt, dan geven we haar eene virtueele draaiing $\delta\theta$ beurtelings om elk der coördinaten-assen, telkens in den positieven zin, d. w. z. in de richting eener draaiing van de pos. x-as naar de pos. y-as, of van de pos. y-as naar de pos. z-as enz.

De δ T die daarbij ontstaat kunnen wij ook bepalen door aan de magnetische kracht $\mathfrak{H}_o$ wentelingen $-\delta\theta$ om de coördinaten-assen te geven.

Bedenken wij, dat bij zoo'n wenteling om de x-as, $\delta\gamma_o =$ $= -\beta_o\delta\theta$ en $\delta\beta_o = \gamma_o\delta\theta$, dan vinden wij:

$$8\pi\delta T = 2(1-\mu)\beta_o\gamma_o\left(\frac{B_o}{1+\varkappa B_o} - \frac{C_o}{1+\varkappa C_o}\right)v\,\delta\theta =$$

$$= 2\,\frac{1-\mu}{\varkappa}\,\beta_o\gamma_o\left(\frac{1}{1+\varkappa C_o} - \frac{1}{1+\varkappa B_o}\right)v\,\delta\theta =$$

$$= 8\pi\beta_o\gamma_o\left(\frac{1}{1+\varkappa B_o} - \frac{1}{1+\varkappa C_o}\right)v\,\delta\theta,$$

dus, het koppel om de x-as $\frac{\delta T}{\delta\theta}$ is:

$$\beta_o\gamma_o\left(\frac{1}{1+\varkappa B_o} - \frac{1}{1+\varkappa C_o}\right)v.$$

Evenzoo vindt men voor de koppels om de y- en de z-as:

$$\gamma_o\alpha_o\left(\frac{1}{1+\varkappa C_o} - \frac{1}{1+\varkappa A_o}\right)v,$$

en:

$$\alpha_o\beta_o\left(\frac{1}{1+\varkappa A_o} - \frac{1}{1+\varkappa B_o}\right)v.$$

Nemen wij aan, dat $A > B > C$, dan ziet men aan de integralen A_o, B_o en C_o direkt, dat $A_o < B_o < C_o$ en daar, zooals tevens gemakkelijk uit de sommatie dezer integralen blijkt,

$$A_o + B_o + C_o = 4\pi$$

is:

$$A_o < \frac{4}{3}\pi \text{ en } C_o > \frac{4}{3}\pi.$$

Tevens volgt uit de ongelijkheid der drie integralen dat:

$$\frac{1}{1 + \varkappa A_o} > \frac{1}{1 + \varkappa B_o} > \frac{1}{1 + \varkappa C_o},$$

wanneer $\varkappa$ positief is, zooals bij ijzer. Is $\varkappa$ negatief, maar blijven toch, zooals bij alle bekende diamagnetische lichamen voor alle waarden van A, B, C het geval is, de drie noemers positief, dan is het omgekeerd. Onze koppels hebben dus bij paramagnetische lichamen hetzelfde teeken als de produkten: $\beta_o \gamma_o$, $-\gamma_o \alpha_o$ en $\alpha_o \beta_o$, waaruit volgt, dat het koppel de langste as der ellipsoïde evenwijdig aan de magnetische kracht $\mathfrak{H}_o$ tracht te plaatsen.

Door te bedenken, dat $\dfrac{A_o}{1 + \varkappa A_o} = \dfrac{1}{\varkappa}\left(1 - \dfrac{1}{1 + \varkappa A_o}\right)$ *kleiner* is dan $\dfrac{B_o}{1 + \varkappa B_o}$, ziet men trouwens aanstonds aan de voor $8\pi T$ gevonden waarde, dat de energie in den stand der ellipsoïde, waarbij de langste as // evenwijdig aan $\mathfrak{H}_o$ loopt, *grooter* is dan in de standen, waarbij een der andere assen evenwijdig met $\mathfrak{H}_o$ is.

Is A zeer groot in vergelijking met B en C, dan nadert

A_0 tot nul; zijn tevens B en C gelijk, dan naderen B_0 en C_0 tot $2\,\pi$.

Bij dezen languitgerekten vorm dus, met cirkelvormige doorsnede, verdwijnt het eerste der drie koppels en naderen de anderen tot:

$$\frac{-\,2\,\pi\,\varkappa\,\gamma_0\,\alpha_0\,\mathrm{v}}{1+2\,\pi\,\varkappa}\ \text{en}\ \frac{2\,\pi\,\varkappa\,\alpha_0\,\beta_0\,\mathrm{v}}{1+2\,\pi\,\varkappa}.$$

Nemen wij de z-as loodrecht op de magnetische kracht, dan is de eerste dezer twee uitdrukkingen *nul*, en stelt de laatste de waarde van het geheele koppel voor, dat op het ijzer werkt.

Bij vele proeven van PLÜCKER plaatste zich een stelsel van koperen en ijzeren staafjes steeds zóó, dat de ijzeren met hunne langste afmeting evenwijdig aan de magnetische kracht waren.

Daar men nu lange cilindervormige staafjes ten naaste bij als ellipsoïden kan beschouwen, vinden deze verschijnselen in de gevonden formules hunne verklaring.

Het bekende gedrag van *diamagnetische* stoffen, waarvoor $\varkappa$ *negatief*, maar $1+4\,\pi\,\varkappa$ positief is, wordt op gelijke wijze uit de bovengenoemde formules afgeleid.

Bij eene gegeven stroomverdeeling moeten $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ voldoen aan de voorwaarden:

$$\mathfrak{B} = \mu\, \mathfrak{H}, \quad \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u, \quad \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \text{ enz.},$$

en aan grensvlakken $\mathfrak{H}_t$ en $\mathfrak{B}_n$ doorloopend.

Gaan wij in het geheele veld μ met een zelfde getal p vermenigvuldigen en laten de stroomverdeeling constant, dan zal dezelfde verdeeling van $\mathfrak{H}$ aan de bovenstaande vergelijkingen voldoen, als de oorspronkelijke.

Dat $\mathfrak{B}_n$ doorloopend blijft, blijkt als volgt: Wij weten, dat in het oorspronkelijke veld $\mathfrak{B}_{n1} = \mathfrak{B}_{n2}$, m. a. w. $\mu_1\, \mathfrak{H}_{n1} = \mu_2\, \mathfrak{H}_{n2}$ en hieruit volgt direkt $p\, \mu_1\, \mathfrak{H}_{n1} = p\, \mu_2\, \mathfrak{H}_{n2}$. Dat ook aan de andere voorwaarden door dezelfde verdeeling van $\mathfrak{H}$ wordt voldaan ziet men op het eerste gezicht.

Wanneer wij dus bijv. een stelsel elektrische stroomen geheel in een *para-* of *diamagnetisch* medium plaatsen, met de *permeabiliteit* μ, dan is de magnetische kracht in ieder punt dezelfde als wanneer de stroomen zich in den aether bevinden. Onze integraal $\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}\, \mathfrak{B}\, d\tau$ is dus μ-maal zoo groot als in den aether, waarbij wij echter, strikt genomen, moeten veronderstellen, dat de permeabiliteit van de stof, waaruit de stroomgeleiders bestaan, eveneens met μ is vermenigvuldigd, of, dat deze permeabiliteit zoo weinig ter zake doet, dat haar invloed kan worden verwaarloosd.

Is dit het geval dan zullen dus ook de differentiaalquotienten van T, m. a. w. de *elektrodynamische* en *inductie*-werkingen het μ-voud zijn geworden van wat ze in den aether waren. In een *diamagnetisch* medium zullen deze dus *verzwakt*, in een *paramagnetisch versterkt* worden.

Zoo even werd ondersteld dat in de *geheele* ruimte de permeabiliteit veranderd werd. Wanneer wij bij het constant houden eener gegeven stroomverdeeling slechts een *deel* van den aether door een *para*- of *diamagnetisch* medium vervangen, dan wordt de energie T daardoor eveneens, in het eerste geval *vermeerderd*, in het tweede *verminderd*.

Het bewijs hiervoor ontleenen wij met eenige wijziging aan de verhandeling van Dr. L. H. Siertsema: „*Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffen volgens* Duhem, *en eenige minimumeigenschappen in het magnetisch veld.*" (Verh. K. Akad. v. Wet., deel V. No. 4).

Men kan nl. aantoonen dat, bij afwezigheid van permanente magneten en dus in het geval het magnetisch veld alleen door elektrische stroomen wordt teweeggebracht, de integraal $T = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 d\tau$ eene minimum-eigenschap bezit ten opzichte van de waarden derzelfde integraal bij andere verdeelingen van $\mathfrak{H}$ over het veld, waarbij verondersteld is dat de stroomverdeeling dezelfde is gebleven en de nieuwe $\mathfrak{H}$ aan dezelfde voorwaarden voldoet als de oorspronkelijke, behalve aan die dat $\mu \mathfrak{H}$ solenoïdaal verdeeld is.

Noemen wij de niet gevarieerde magnetische kracht $\mathfrak{H}_0$

en de vector, die er door de variatie aan wordt toegevoegd: $\mathfrak{H}_1$, dan kunnen de componenten van $\mathfrak{H}_1$ worden beschouwd als de afgeleiden van een potentiaal (vergelijk pag. 48 en 49).

Voor het $8\,\pi$-voud van de nieuwe T vinden wij dan:

$$\int \mu (\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1)^2\, d\tau = \int \mu \mathfrak{H}_0^2\, d\tau + 2 \int \mu \mathfrak{H}_0\, \mathfrak{H}_1\, d\tau + \int \mu \mathfrak{H}_1^2\, d\tau.$$

De derde integraal van het tweede lid is *positief*. De minimum-eigenschap zal dus bestaan, indien $\int \mu\, \mathfrak{H}_0\, \mathfrak{H}_1\, d\tau = 0$ is.

Dat dit laatste het geval is, volgt echter aanstonds uit de algemeene stelling, die wij op pp. 36—38 bewezen hebben. Immers, de vector $\mu\, \mathfrak{H}_0$ is solenoïdaal, en de vector $\mathfrak{H}_1$ irrationeel verdeeld.

Thans kunnen wij overgaan tot het bewijs, dat de energie toeneemt door in het veld een *paramagnetisch* lichaam te brengen en afneemt door er eene *diamagnetisch* in te plaatsen.

Wij noemen het lichaam A, en de magnetische kracht bij aanwezigheid van A in de ruimte, waar dit lichaam zich bevindt $\mathfrak{H}_i$, die daar buiten $\mathfrak{H}_e$; terwijl diezelfde grootheden in het geval het lichaam niet aanwezig is, zullen heeten $\mathfrak{H}'_i$ en $\mathfrak{H}'_e$.

Wij kunnen nu de volgende integralen beschouwen:

$$\begin{aligned} P &= \int_i \mathfrak{H}_i^2\, d\tau + \int_e \mathfrak{H}_e^2\, d\tau. \\ Q &= \int_i \mathfrak{H}'^2_i\, d\tau + \int_e \mathfrak{H}'^2_e\, d\tau. \\ R &= \int_i \mu\, \mathfrak{H}_i^2\, d\tau + \int_e \mathfrak{H}_e^2\, d\tau. \\ S &= \int_i \mu\, \mathfrak{H}'^2_i\, d\tau + \int_e \mathfrak{H}'^2_e\, d\tau. \end{aligned}$$

Men ziet dan gemakkelijk in, dat wij moeten bewijzen:

1^0. voor $\mu > 1$, $R > Q$.

2^0. voor $\mu < 1$, $R < Q$.

Wij weten, dat $P > Q$ volgens de minimum-eigenschap, want, wanneer het lichaam A er *niet* is, heeft Q op den werkelijken toestand betrekking en kan P worden beschouwd als eene gevarieerde waarde van Q. Eveneens $R < S$, omdat, als het lichaam er *wel* is, R voor den werkelijken toestand geldt, en S kan worden opgevat als eene gevarieerde waarde.

Wanneer nu $\mu > 1$ ziet men direkt, dat $R > P$ en daar $P > Q$, is dus $R > Q$, q. e. d.

Is $\mu < 1$ dan is $S < Q$ en daar $R < S$ is $R < Q$, q. e. d. Beschouwen wij nu eens een enkelen stroom en vergelijken met elkaar het geval, dat deze zich in den aether bevindt, en dat behalve de aether een *dia-* of *paramagnetisch* lichaam aanwezig is. De energie wordt voorgesteld door $\frac{1}{2} L i^2$. Daar i constant blijft en de energie vermeerdert of vermindert, moet deze toe- of afname plaats hebben in L. Hieruit volgt dus, dat de elektromotorische kracht van den extrastroom $L \frac{d i}{d t}$ is *toegenomen* door de aanwezigheid van een *paramagnetisch* en *afgenomen* door de aanwezigheid van een *diamagnetisch* lichaam.

De ponderomotorische krachten, uitgeoefend op magnetisch induceerbare media, geplaatst in een ander magnetisch induceerbaar medium, zullen later, in verband met den inhoud van het laatste hoofdstuk, worden behandeld.

HOOFDSTUK III.

Kristallen en vloeistoffen in een elektromagnetisch veld.

Wanneer een anisotroop medium (*kristallen*), waarvan de inductie-coëfficienten weinig van die van den aether verschillen, in den aether wordt geplaatst, kunnen wij de *vermeerdering* der energie, die hiervan het gevolg is, berekenen door de energie als eene quadratische functie van de magnetische kracht op te vatten en in de ruimte van het nieuwe medium de magnetische kracht in rekening te brengen, die er bestond, toen er nog alleen aether was.

Wel te verstaan moeten bij de berekening der energie de μ's voor den nieuwen toestand in rekening worden gebracht.

Het bewijs dezer stelling is aldus:

Bij anisotrope lichamen bestaan tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ de volgende betrekkingen:

$$a = \mu_{1.1}\,\alpha + \mu_{1.2}\,\beta + \mu_{1.3}\,\gamma,$$
$$b = \mu_{2.1}\,\alpha + \mu_{2.2}\,\beta + \mu_{2.3}\,\gamma,$$
$$c = \mu_{3.1}\,\alpha + \mu_{3.2}\,\beta + \mu_{3.3}\,\gamma.$$

Hierin is $\mu_{2.1} = \mu_{1.2}$, $\mu_{1.3} = \mu_{3.1}$, $\mu_{2.3} = \mu_{3.2}$; deze coëfficienten verschillen in ons geval weinig van *nul*, terwijl de andere drie $\mu_{1.1}$, $\mu_{2.2}$ en $\mu_{3.3}$, weinig van *één* verschillen.

Deze coëfficienten moeten worden beschouwd als physische constanten, die van den aard der stof afhangen en misschien ook van de magnetische kracht. Van deze laatste afhankelijkheid wordt intusschen afgezien.

Noemen wij de magnetische kracht vóór aanwezigheid van het medium $\mathfrak{H}_o$ en bij de aanwezigheid $\mathfrak{H}_o + \mathfrak{H}'$, dan is $\mathfrak{H}'$ in alle punten der ruimte een zeer kleine vector. De componenten dezer grootheden onderscheiden wij door dezelfde indices. Stellen wij verder $\mu_{1.1} = 1 + \nu_{1.1}$, $\mu_{2.2} = 1 + \nu_{2.2}$, $\mu_{3.3} = 1 + \nu_{3.3}$, waarbij deze ν's dus weinig van *nul* verschillen, dan vinden wij voor de energie van het veld bij aanwezigheid van het medium:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{8\pi}\int \Big\{ & (\alpha_o + \alpha')(\alpha_o + \alpha' + \nu_{11}\,\alpha_o + \mu_{12}\,\beta_o + \mu_{13}\,\gamma_o) + \\ & + (\beta_o + \beta')(\beta_o + \beta' + \mu_{12}\,\alpha_o + \nu_{22}\,\beta_o + \mu_{23}\,\gamma_o) + \\ & + (\gamma_o + \gamma')(\gamma_o + \gamma' + \mu_{13}\,\alpha_o + \mu_{23}\,\beta_o + \nu_{33}\,\gamma_o)\Big\}\,d\tau. \end{aligned}$$

Hier moet geintegreerd worden over de geheele ruimte; wij kunnen ons nl. voorstellen dat al het boven gezegde ook van den aether rondom het kristal geldt, mits men hier $\nu_{1.1}$, $\mu_{1.2}$, enz. $= 0$ stelle.

In de laatste vergelijking zijn produkten van grootheden, die weinig van nul verschillen, weggelaten. Doen wij dit ook bij de verdere uitwerking dan vinden wij:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \{\alpha_0(\alpha_0 + \nu_{11}\alpha_0 + \mu_{12}\beta_0 + \mu_{13}\gamma_0) +$$
$$+ \beta_0(\beta_0 + \mu_{12}\alpha_0 + \nu_{22}\beta_0 + \mu_{23}\gamma_0) +$$
$$+ \gamma_0(\gamma_0 + \mu_{13}\alpha_0 + \mu_{23}\beta_0 + \nu_{33}\gamma_0)\}\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int (\alpha_0\alpha' + \beta_0\beta' + \gamma_0\gamma')\, d\tau.$$

Deze laatste integraal is *nul* volgens de mathematische stelling van pp. 36—38: α_0, β_0, γ_0 zijn de componenten eener grootheid als Σ, α', β', γ' die van eene grootheid als $\mathfrak{J}$.

De overblijvende integraal is nu juist de energie, in het geval in elk punt α_0, β_0, γ_0 als componenten der magnetische kracht worden genomen, q. e. d.

Er zijn 3 onderling loodrechte richtingen, waarin $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ samenvallen (vergelijk eene overeenkomstige stelling bij de deformatie van vaste lichamen: Kirchhoff, *Mechanik.* X § 3).

Veronderstellen wij een homogeen kristal te hebben, zoodat deze richtingen in alle punten van het kristal dezelfde zijn en nemen wij de coördinaatassen in deze richtingen, de permeabiliteiten volgens de assen μ_x, μ_y, μ_z noemende, dan wordt, in het geval van een oorspronkelijk homogeen magnetisch veld (α, β, γ), de energie die toekomt aan de ruimte van het anisotrope lichaam, voorgesteld door:

$$\frac{\text{v}}{8\pi}(\mu_x \alpha^2 + \mu_y \beta^2 + \mu_z \gamma^2),$$

als v het volume van het kristal is.

De componenten van het koppel, dat op het kristal werkt, zullen evenals vroeger (pag. 57) worden gevonden door aan de *magnetische* kracht eene virtueele wenteling $-\delta\theta$ om de coördinaten-assen te geven en de δ T, die hiervan het gevolg is, door $\delta\theta$ te deelen.

Geheel op dezelfde wijze als op pag. 57 vindt men dan voor de koppels om de assen:

$$\frac{\text{v}}{4\pi}(\mu_y - \mu_z)\beta\gamma,$$

$$\frac{\text{v}}{4\pi}(\mu_z - \mu_x)\gamma\alpha,$$

$$\frac{\text{v}}{4\pi}(\mu_x - \mu_y)\alpha\beta.$$

Als $\mu_x > \mu_y > \mu_z$, zijn het eerste en het derde koppel positief, terwijl het tweede negatief is. Daaruit volgt dat het resulteerende koppel het kristal zoodanig tracht te plaatsen, dat de as met de grootste μ evenwijdig aan de magnetische kracht is. Door berekening van de energie in dien stand ziet men tevens gemakkelijk, dat deze een *maximum* is en dus het evenwicht *stabiel*.

Is eene andere hoofdrichting evenwijdig met de magnetische kracht, dan is er ook evenwicht, maar dit is *labiel*.

Een - isotroop magnetisch induceerbaar lichaam met de permeabiliteit μ_l, geplaatst in eene vloeistof met de permeabiliteit μ_v (beide weinig van 1 verschillend) gedraagt zich als een lichaam met de permeabiliteit $\mu_l - \mu_v$, geplaatst in den aether (analogie met de wet van ARCHIMEDES).

Geven wij namelijk het lichaam eene virtueele verplaatsing en verstaan onder ε den weg, die daarbij door een punt van het oppervlak wordt doorloopen, dan vindt men gemakkelijk door toepassing van de in het begin van dit hoofdstuk bewezen stelling:

$$\delta T = \frac{1}{8\pi} \int (\mu_l - \mu_v)\, \mathfrak{H}^2\, \varepsilon \cos. (\varepsilon n)\, d\sigma,$$

genomen over het oppervlak van het induceerbare lichaam.

Het valt aanstonds in het oog, dat deze waarde van δT overeenkomt met die, welke men zou verkrijgen bij dezelfde virtueele verplaatsing van een induceerbaar lichaam met de permeabiliteit $(\mu_l - \mu_v)$, geplaatst in den aether. De krachten zullen dus ook in beide gevallen overeenstemmen.

QUINCKE heeft proeven gedaan ter vergelijking der magnetische constanten van verschillende vloeistoffen en gassen. (*Wied. Ann.* Bd. 24 pag. 347 en Bd. 34 pag. 401).

Hij bracht de vloeistof in 2 communiceerende buizen, waarvan de eene tusschen de polen van een sterken magneet werd geplaatst en de andere buiten het veld.

Wij noemen de doorsnede der buis en de magnetische kracht aan het vloeistofoppervlak in het eerste been: ω_1 en $\mathfrak{H}_1$, die in het tweede been ω_2 en $\mathfrak{H}_2$ en onderscheiden ook andere gelijksoortige grootheden in de twee beenen door de indices 1 en 2. Wij nemen de z-as vertikaal naar beneden en geven het oppervlak der vloeistof in het eerste been eene virtueele verplaatsing δz_1. Noemen wij de dichtheid der vloeistof s en duiden door g de versnelling der zwaartekracht aan, dan is de door de zwaartekracht bij deze virtueele verplaatsing verrichte arbeid $(z_2 - z_1)\, s\, g\, \omega_1\, \delta z_1$. De aangroeiing van $\frac{1}{8\pi}\int \mu\, \mathfrak{H}^2\, d\tau$ wordt:

$$\frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_1\, \mathfrak{H}_1^2\, \omega_1\, \delta z_1 - \frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_2\, \mathfrak{H}_2^2\, \omega_2\, \delta z_2,$$

waarin μ_g en μ_v de permeabiliteiten van het gas en de vloeistof voorstellen en $\omega_1\, \delta z_1 = \omega_2\, \delta z_2$, zooals men gemakkelijk inziet.

Deze waarde van δ T vindt men door te bedenken, dat in het eerste been een volume-element $\omega_1\, \delta z_1$ van de vloeistof wordt vervangen door een evengroot volume-element van het gas; in het tweede been heeft het omgekeerde plaats.

In den toestand van evenwicht moet nu, volgens pag. 8, de arbeid der uitwendige krachten bij de beschouwde virtueele verplaatsing gelijk zijn aan $-\delta$ T, zoodat wij hebben:

$$(z_2 - z_1)\, s\, g\, \omega_1\, \delta z_1 = -\frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_1\, \mathfrak{H}_1^2\, \omega_1\, \delta z_1 +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_2\, \mathfrak{H}_2^2\, \omega_2\, \delta z_2,$$

waaruit volgt:

$$(z_2 - z_1)\, s\, g = \frac{1}{8\pi}\left\{-(\mu_g - \mu_v)_1\, \mathfrak{H}_1^2 + (\mu_g - \mu_v)_2\, \mathfrak{H}_2^2\right\}.$$

Deze formule stelt ons in staat, de proeven van QUINCKE te verklaren.

Door de laatste vergelijking aldus te schrijven:

$$-z_1\, s\, g + \frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_1\, \mathfrak{H}_1^2 = -z_2\, s\, g + \frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_2\, \mathfrak{H}_2^2 \quad (a)$$

zien wij, dat het is, alsof de hydrostatische druk per eenheid van doorsnede der vloeistofkolom wordt vermeerderd met $\frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)\, \mathfrak{H}^2$.

Bij de proeven van QUINCKE mocht men $\mathfrak{H}_2 = 0$ stellen, dus:

$$(z_1 - z_2)\, s\, g = \frac{1}{8\pi}(\mu_g - \mu_v)_1\, \mathfrak{H}_1^2.$$

Deze formule doet zien, dat de verplaatsing van het vloeistofoppervlak onafhankelijk is van de richting van $\mathfrak{H}_1$ ten opzichte van dit oppervlak. Bij de proeven met paramagnetische vloeistoffen was $\mu_v > \mu_g$ en werd dus $z_1 < z_2$; de vloeistof steeg dus in het been tusschen de magneetpolen hooger dan in het andere.

Plaatsen we eene vloeistofmassa in een magnetisch veld op de wijze als bij de bekende proeven van PLÜCKER, dan kunnen we uit de vergelijkingen van LAGRANGE den vorm van het oppervlak afleiden.

Nemen wij de z-as vertikaal naar beneden en geven de deelen van het vloeistofoppervlak virtueele verplaatsingen δz, dan moeten deze voldoen aan de voorwaarde:

$$\int \delta z \, d x \, d y = 0,$$

welke integraal over de horizontale projectie van het oppervlak moet worden genomen.

Op gelijke wijze als in het vorige geval vinden wij voor de evenwichtsvoorwaarde:

$$\int \left\{ z s g - \frac{1}{8 \pi} (\mu_g - \mu_v) \mathfrak{H}^2 \right\} \delta z \, d x \, d y = 0.$$

In verband met de vorige formule volgt hieruit:

$$z s g - \frac{1}{8 \pi} (\mu_g - \mu_v) \mathfrak{H}^2 = \text{constant},$$

dus:

$$z = \mathrm{C} + \frac{(\mu_g - \mu_v) \mathfrak{H}^2}{8 \pi s g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

zoodat dus de vloeistof zich ophoopt waar $\mathfrak{H}$ het grootst is, als $\mu_g - \mu_v$ *negatief* is, en omgekeerd, als $\mu_g - \mu_v$ *positief* is, zal ze zich ophoopen, waar $\mathfrak{H}$ het kleinst is.

De vloeistof staat nl. het *hoogst*, waar z de grootste *negatieve* waarde heeft.

Wij zien, dat de formule (a), die wij voor de proeven van QUINCKE hebben afgeleid, in (b) is begrepen. In den grond der zaak is het ook dezelfde quaestie.

De in dit en het vorige hoofdstuk bedoelde proeven van PLÜCKER vindt men in *Pogg. Ann.*, Bd. 72, 73, 74, 75, 76, 77, 82, 83, 84, 86, 91, 110.

HOOFDSTUK IV.

Deformatie van magnetisch induceerbare lichamen in een magnetisch veld.

(Kirchhoff, *Wied. Ann.*, Bd. XXIV, pag. 52).

De deformaties van magnetisch induceerbare lichamen in een magnetisch veld werden door Kirchhoff bepaald; en het bleek hem dat zij kunnen worden opgevat als voort te vloeien uit hypothetische drukkingen, die in die lichamen bestaan, wanneer ze zich in zoo'n veld bevinden. Men kan zich dit voorstellen als eene werking van het medium, dat de drager der elektrokinetische energie is, op de ponderabele stof.

Langs den tot nu toe gevolgden weg willen wij thans ook deze deformaties en de grootte der hypothetische drukkingen afleiden.

Daartoe bepalen wij de toename der energie T, die het gevolg is van zeer kleine verplaatsingen der deeltjes uit den oorspronkelijken stand. Hieruit worden de krachten afgeleid, die op de deeltjes werken en deze vervolgens teruggebracht tot spanningen en drukkingen.

Noemen wij de te beschouwen stof gemakshalve *ijzer* en nemen aan, dat dit vóór de deformatie *isotroop* is, dan gelden in een punt (x, y, z) de betrekkingen:

$$a = \mu\,\alpha, \quad b = \mu\,\beta, \quad c = \mu\,\gamma,$$

als μ de permeabiliteit voorstelt.

Na de deformatie zal het ijzer *anisotroop* zijn geworden, zooals wij althans in het algemeen moeten aannemen.

Stel dan:

$$\begin{aligned} a &= \mu_{11}\,\alpha + \mu_{12}\,\beta + \mu_{13}\,\gamma, \\ b &= \mu_{21}\,\alpha + \mu_{22}\,\beta + \mu_{23}\,\gamma, \\ c &= \mu_{31}\,\alpha + \mu_{32}\,\beta + \mu_{33}\,\gamma, \end{aligned}$$

waarin de μ's physische constanten voorstellen, die door de deformatie en den aard der stof worden bepaald.

Tevens is $\mu_{12} = \mu_{21}$, $\mu_{13} = \mu_{31}$, $\mu_{23} = \mu_{32}$, zooals reeds in het vorige hoofdstuk is opgemerkt. Deze 6 grootheden zijn, evenals $\mu_{11} - \mu$, $\mu_{22} - \mu$ en $\mu_{33} - \mu$ als zeer klein ten opzichte van μ te beschouwen, daar ze afhankelijk zijn van de zeer kleine deformaties en met deze verdwijnen.

Wij zullen deze grootheden uitdrukken in die, welke de deformatie bepalen.

Daartoe beginnen wij met de beschouwing van een gedeformeerd volume-element.

Wij veronderstellen, dat de 3 richtingen, waarin de magnetische inductie en de magnetische kracht met elkander samenvallen, dezelfde zijn als die der *drie* hoofddilataties, dit moeten wij, bij eene aanvankelijk isotrope stof, om redenen van symmetrie, aannemen. Noemen wij de hoofddilataties, die wij zeer klein veronderstellen, λ_1, λ_2 en λ_3; nemen wij eene magnetische kracht in de richting van λ_1 en veronderstellen, dat de inductie een zekeren hoek θ met de magnetische kracht maakte, dan zou om redenen van symmetrie, een zelfde inductie moeten optreden symmetrisch met de vorige ten opzichte der richting van λ_1 gelegen. Wegens deze absurditeit zullen wij moeten aannemen, dat de inductie met de richting van λ_1 samenvalt; dat dus λ_1 en evenzoo λ_2 en λ_3 de richtingen zijn, waarin de inductie en de magnetische kracht met elkander samenvallen.

De onderstelling ligt verder voor de hand dat, bij zeer kleine waarden van λ_1, λ_2, λ_3, de permeabiliteiten van het gedeformeerde volume-element *liniaire* functiën dier dilataties zijn. Daar verder, wegens de isotropie, de permeabiliteit in de richting van λ_1 op dezelfde wijze van λ_2 en λ_3 moet afhangen, kunnen wij voor die permeabiliteit schrijven: $\mu + \xi\lambda_1 + \eta(\lambda_2 + \lambda_3)$ of: $\mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_1$, waarin μ' en μ'' eindige physische constanten zijn, die van den aard der stof afhangen. Soortgelijke waarden vinden wij voor de permeabiliteiten in de richtingen van λ_2 en λ_3.

Nemen wij nu de coördinaten-assen evenwijdig aan de richtingen der hoofddilataties, voorzien de grootheden met betrekking tot dit stelsel genomen, van den index s en noemen de coördinaten s_1, s_2 en s_3, dan worden de formules voor de componenten der inductie:

$$\left.\begin{aligned} a_s &= \{\mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_1\}\alpha_s \\ b_s &= \{\mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_2\}\beta_s \\ c_s &= \{\mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_3\}\gamma_s \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (I).$$

Thans transformeeren wij deze formules op willekeurige coördinaten-assen (x, y, z); l_1, m_1, n_1, zullen de richtingscosinussen van de as van s_1 met betrekking tot de assen van x, y en z voorstellen, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3 hebben eene analoge beteekenis.

Op bekende wijze worden dan de volgende formules afgeleid, waarin u, v en w de componenten der verplaatsing van een ijzerdeeltje voorstellen en de grootheden zonder indices op het nieuwe coördinatenstelsel betrekking hebben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s &= l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma \\ \beta_s &= l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma \\ \gamma_s &= l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma \end{aligned}\right\} (II). \qquad \left.\begin{aligned} a &= l_1 a_s + l_2 b_s + l_3 c_s \\ b &= m_1 a_s + m_2 b_s + m_3 c_s \\ c &= n_1 a_s + n_2 b_s + n_3 c_s \end{aligned}\right\} (III).$$

$$\begin{aligned} u &= l_1 u_s + l_2 v_s + l_3 w_s = l_1\lambda_1 s_1 + l_2\lambda_2 s_2 + l_3\lambda_3 s_3 \\ v &= m_1 u_s + m_2 v_s + m_3 w_s = m_1\lambda_1 s_1 + m_2\lambda_2 s_2 + m_3\lambda_3 s_3 \\ w &= n_1 u_s + n_2 v_s + n_3 w_s = n_1\lambda_1 s_1 + n_2\lambda_2 s_2 + n_3\lambda_3 s_3 \end{aligned}$$

daar men mag stellen $u_s = \lambda_1 s_1$ enz.

Verder is:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{ds_1}\dfrac{ds_1}{dx} + \dfrac{du}{ds_2}\dfrac{ds_2}{dx} + \dfrac{du}{ds_3}\dfrac{ds_3}{dx} = \\
\qquad = l_1^2\lambda_1 + l_2^2\lambda_2 + l_3^2\lambda_3, \\
\text{daar } \dfrac{du}{ds_1} = l_1\lambda_1 \text{ en } \dfrac{ds_1}{dx} = l_1 \text{ enz.;} \\
\text{evenzoo:} \\
\dfrac{dv}{dy} = m_1^2\lambda_1 + m_2^2\lambda_2 + m_3^2\lambda_3, \\
\dfrac{dw}{dz} = n_1^2\lambda_1 + n_2^2\lambda_2 + n_3^2\lambda_3.
\end{array}\right\} \quad . . (\mathrm{IV}).$$

Op gelijke wijze vindt men:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right) = m_1 n_1 \lambda_1 + m_2 n_2 \lambda_2 + m_3 n_3 \lambda_3 \\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right) = n_1 l_1 \lambda_1 + n_2 l_2 \lambda_2 + n_3 l_3 \lambda_3 \\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) = l_1 m_1 \lambda_1 + l_2 m_2 \lambda_2 + l_3 m_3 \lambda_3
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{V}).$$

Krachtens (I) en (III) is nu:

$$\begin{array}{l}
a = l_1 \{ \mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_1 \} \alpha_s + \\
+ l_2 \{ \mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_2 \} \beta_s + \\
+ l_3 \{ \mu + \mu'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \mu''\lambda_3 \} \gamma_s .
\end{array}$$

Dit moet nu, wanneer we met behulp van (II) α_s, β_s en γ_s in α, β, γ uitdrukken, overgaan in:

evenzoo:
$$\left.\begin{aligned} a &= \mu_{11}\,\alpha + \mu_{12}\,\beta + \mu_{13}\,\gamma\,; \\ b &= \mu_{21}\,\alpha + \mu_{22}\,\beta + \mu_{23}\,\gamma \\ c &= \mu_{31}\,\alpha + \mu_{32}\,\beta + \mu_{33}\,\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(VI).}$$

Door deze voorwaarden worden de coëfficienten μ_{11}, μ_{12}, enz. bepaald. Met inachtneming van (IV) en (V) vindt men:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu + \mu'\left(\frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,v}{d\,y} + \frac{d\,w}{d\,z}\right) + \mu''\frac{d\,u}{d\,x} \\ \mu_{22} &= \mu + \mu'\left(\frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,v}{d\,y} + \frac{d\,w}{d\,z}\right) + \mu''\frac{d\,v}{d\,y} \\ \mu_{33} &= \mu + \mu'\left(\frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,v}{d\,y} + \frac{d\,w}{d\,z}\right) + \mu''\frac{d\,w}{d\,z} \\ \mu_{23} = \mu_{32} &= \frac{\mu''}{2}\left(\frac{d\,v}{d\,z} + \frac{d\,w}{d\,y}\right) \\ \mu_{31} = \mu_{13} &= \frac{\mu''}{2}\left(\frac{d\,w}{d\,x} + \frac{d\,u}{d\,z}\right) \\ \mu_{12} = \mu_{21} &= \frac{\mu''}{2}\left(\frac{d\,u}{d\,y} + \frac{d\,v}{d\,x}\right) \end{aligned}\right\} \text{(VI}\,a\text{).}$$

Wij zullen onder u, v, w oneindig kleine, hetzij *werkelijke* of *virtueele*, verplaatsingen der ijzerdeeltjes verstaan en willen vooreerst met elkaar vergelijken $\frac{1}{8\,\pi}\int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,d\,\tau$, zooals deze waarde is, indien (wat men zich denken kan) bij constante stroomen de ijzerdeeltjes op de oorspronkelijke plaatsen blijven en het ijzer dus *isotroop* blijft, met de waarde van $\frac{1}{8\,\pi}\int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,d\,\tau$ na de verplaatsingen u, v, w. Wij noemen het verschil $\delta\left[\frac{1}{8\,\pi}\int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,d\,\tau\right]$.

Hierbij kunnen wij nu eene scherpe afscheiding van ijzer en aether aannemen en dan handelen als vroeger (pag. 39 enz.).

Ter vereenvoudiging van de berekeningen kan men echter een kunstgreep van KIRCHHOFF bezigen, bestaande in de onderstelling dat het ijzer geleidelijk in aether overgaat, dus μ geleidelijk 1 en μ' en μ'' 0 worden.

Het oppervlak, waar de grootheden deze waarden verkrijgen, zullen wij het *grensvlak* noemen. De laag, waarin de overgang plaats grijpt en die wij *grenslaag* zulleñ noemen, kan men oneindig dun veronderstellen en zoo tot de werkelijkheid komen.

Verstaan wij onder $\delta\,\mathfrak{B}$ en $\delta\,\mathfrak{H}$ de variaties van $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{H}$ in een vast punt der *ruimte*, dan is:

$$\delta(\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}) = \mathfrak{B}\,\delta\,\mathfrak{H} + \mathfrak{H}\,\delta\,\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII).}$$

Ter berekening van $\delta\,\mathfrak{B}$ merken wij op, dat vóór de verplaatsingen:

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} \,.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \quad \text{(VIII).}$$

Na de verplaatsingen worden de componenten van $\mathfrak{B}$:

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \left\{\mu_1 + \mu'\,\Delta + \mu''\frac{d\,u}{d\,x}\right\}\alpha_1 + \frac{\mu''}{2}\left(\frac{d\,u}{d\,y} + \frac{d\,v}{d\,x}\right)\beta_1 + \\ + \frac{\mu''}{2}\left(\frac{d\,u}{d\,z} + \frac{d\,w}{d\,x}\right)\gamma_1, \\ \left(\Delta = \frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,v}{d\,y} + \frac{d\,w}{d\,z}\right) \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX).}$$

Door μ_1 is hier aangeduid, dat, afgezien van het anisotroop worden, de μ in een bepaald punt der ruimte anders wordt daar, tengevolge der verplaatsingen, eene *andere* stof in dat punt komt. Wegens deze omstandigheid (die zich alleen in de grenslaag voordoet) moet men schrijven:

$$\mu_1 = \mu - \left(u \frac{d\mu}{dx} + v \frac{d\mu}{dy} + w \frac{d\mu}{dz}\right),$$

daar zich in het punt (x, y, z) *na* de verplaatsing het ijzerdeeltje bevindt, dat *vóór* de verplaatsing de coördinaten $x - u$, $y - v$, $z - w$ had. Bovendien zijn α, β, γ niet gebleven, wat zij eerst waren en heeft men dan te stellen:

$$\alpha_1 = \alpha + \delta\alpha, \quad \beta_1 = \beta + \delta\beta, \quad \gamma_1 = \gamma + \delta\gamma.$$

Het verdient nog opmerking dat men, wat de coëfficienten μ' en μ'' betreft, geen rekening behoeft te houden met de omstandigheid dat in een vast punt der ruimte door de verplaatsing eene stof met andere eigenschappen gekomen is; immers, μ' en μ'' zijn reeds met grootheden vermenigvuldigd, die van dezelfde orde zijn als u, v en w.

Substitueert men de gevonden waarden in (IX) en trekt er de oorspronkelijke waarde van a af, dan komt er, met verwaarloozing van grootheden van de tweede orde:

$$\left.\begin{array}{l} \delta a = -\alpha\left(u\dfrac{d\mu}{dx} + v\dfrac{d\mu}{dy} + w\dfrac{d\mu}{dz}\right) + \alpha\mu'\Delta + \alpha\mu''\dfrac{du}{dx} + \\ + \dfrac{1}{2}\beta\mu''\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) + \dfrac{1}{2}\gamma\mu''\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right) + \mu\delta\alpha \end{array}\right\} \text{(X).}$$

Eveneens δb en δc.

Voor het scalaire produkt $\mathfrak{H}\,\delta\,\mathfrak{B}$ van (VII) vindt men nu:

$$\alpha\,\delta\,a+\beta\,\delta\,b+\gamma\,\delta\,c=-\alpha^2\left(u\frac{d\mu}{dx}+v\frac{d\mu}{dy}+w\frac{d\mu}{dz}\right)+\alpha^2\mu'\Delta+$$
$$+\alpha^2\mu''\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\alpha\beta\mu''\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\gamma\mu''\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)+\mu\,\alpha\,\delta\,\alpha+\ldots.$$

Voegt men hierbij:

$$\mathfrak{B}\,\delta\,\mathfrak{H}=\mu\,(\alpha\,\delta\,\alpha+\beta\,\delta\,\beta+\gamma\,\delta\,\gamma),$$

dan wordt (VII):

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{H})=2\,(\mu\,\alpha\,\delta\,\alpha+\mu\,\beta\,\delta\,\beta+\mu\,\gamma\,\delta\,\gamma)-\\
&-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(u\frac{d\mu}{dx}+v\frac{d\mu}{dy}+w\frac{d\mu}{dz}\right)+\\
&+\alpha\left[\left(\mu'\Delta+\mu''\frac{du}{dx}\right)\alpha+\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\beta+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\gamma\right]+\beta\left[\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\alpha+\right.\\
&\left.+\left(\mu'\Delta+\mu''\frac{dv}{dy}\right)\beta+\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\gamma\right]+\\
&+\gamma\left[\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\alpha+\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\beta+\right.\\
&\left.+\left(\mu'\Delta+\mu''\frac{dw}{dz}\right)\gamma\right],
\end{aligned}\right\}\ \text{(XI)}.$$

welke formule ook op de ruimte rondom het ijzer kan worden toegepast, wanneer wij hier $\mu = 1$, $\mu' = \mu'' = 0$ stellen.

Bij de integratie van $\int \delta (\mathfrak{B}\,\mathfrak{H})\, d\tau$ over de geheele ruimte geeft de eerste term van het tweede lid van (XI) volgens de stelling, aan het slot van het eerste hoofdstuk bewezen, de waarde *nul*, zoodat wij voor de geheele aangroeiing $\frac{1}{8\pi}\delta \int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\, d\tau$ vinden:

$$\frac{1}{8\mu}\int \left(- u\frac{d\mu}{dx} - v\frac{d\mu}{dy} - w\frac{d\mu}{dz}\right)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{8\mu}\int \Big\{ \alpha \left[\left(\mu'\Delta + \mu''\frac{du}{dx}\right)\alpha + \frac{1}{2}\mu''\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\beta + \frac{1}{2}\mu''\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\gamma\right] +$$

$$+\beta\left[\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\alpha + \left(\mu'\Delta + \mu''\frac{dv}{dy}\right)\beta + \frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\gamma\right] +$$

$$+\gamma\left[\frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\alpha + \frac{1}{2}\mu''\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\beta + \left(\mu'\Delta + \mu''\frac{dw}{dz}\right)\gamma\right]\Big\}\, d\tau.$$

Klaarblijkelijk hebben wij hier alleen over de door het ijzer ingenomen ruimte te integreeren.

De laatste der integralen gaat door partiëele integratie over in een oppervlakte-integraal die nul is, daar μ' en μ'' aan het oppervlak nul zijn, en in de ruimte-integraal:

$$-\frac{1}{8\pi}\int \Big\{ u\left[\frac{d\{\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}}{dx} + \frac{d(\mu''\alpha^2)}{dx} + \frac{d(\mu''\alpha\beta)}{dy} + \frac{d(\mu''\alpha\gamma)}{dz}\right] +$$

$$+ v\left[\frac{d\{\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}}{dy} + \frac{d(\mu''\alpha\beta)}{dx} + \frac{d(\mu''\beta^2)}{dy} + \frac{d(\mu''\beta\gamma)}{dz}\right] +$$

$$+ w\left[\frac{d\{\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}}{dz} + \frac{d(\mu''\alpha\gamma)}{dx} + \frac{d(\mu''\beta\gamma)}{dy} + \frac{d(\mu''\gamma^2)}{dz}\right]\Big\}\, d\tau.$$

Wij kunnen de voor $\frac{1}{8\pi} d \int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\, d\tau$ gevonden waarde schrijven in den vorm:

$$\int (\mathrm{A}\, u + \mathrm{B}\, v + \mathrm{C}\, w)\, d\,\tau,$$

wanneer wij stellen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \\
&-\frac{1}{8\pi}\left[\frac{d\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dx}+\frac{d(\mu''\alpha^2)}{dx}+\frac{d(\mu''\alpha\beta)}{dy}+\frac{d(\mu''\alpha\gamma)}{dz}\right],\\
\mathrm{B} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{dy}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \\
&-\frac{1}{8\pi}\left[\frac{d\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dy}+\frac{d(\mu''\alpha\beta)}{dx}+\frac{d(\mu''\beta^2)}{dy}+\frac{d(\mu''\beta\gamma)}{dz}\right],\\
\mathrm{C} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{dz}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \\
&-\frac{1}{8\pi}\left[\frac{d\mu'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{dz}+\frac{d(\mu''\alpha\gamma)}{dx}+\frac{d(\mu''\beta\gamma)}{dy}+\frac{d(\mu''\gamma^2)}{dz}\right].
\end{aligned}\right\}\ \text{(XII)}.$$

Thans, nu de waarde der kinetische energie onderzocht is, kan men de bewegingsvergelijkingen van Lagrange gebruiken om de deformaties te bepalen, die het ijzer in werkelijkheid ondergaat.

Stellen wij ons te dien einde voor, dat een stuk ijzer in een constant magnetisch veld geplaatst is (teweeggebracht door standvastige elektrische stroomen) en dat er een stationaire toestand ontstaan is, waarin zekere verplaatsingen u, v, w bestaan. De uitwendige krachten, die in dezen toestand werken (en als zoodanig zijn thans de elastische krachten te beschouwen) moeten dan bij eene oneindig kleine virtueele verplaatsing een arbeid verrichten, die gelijk is aan $-\delta T$ (pag. 8).

De oneindig kleine virtueele verplaatsingen kunnen wij bepalen door de veranderingen δu, δv, δw die de reeds bestaande u, v, w ondergaan. Uit de stelling, dat de energie

$$\int (A u + B v + C w)\, d\tau$$

meer bedraagt dan wanneer de deeltjes van het ijzer zich niet verplaatst hadden, volgt:

$$-\delta T = -\int (A \delta u + B \delta v + C \delta w)\, d\tau.$$

Dit moet de arbeid der uitwendige krachten zijn.

Door nu van het op pag. 4—8 omtrent de kracht van het stelsel meegedeelde gebruik te maken, kunnen wij ook zeggen, dat

$$+\int (A \delta u + B \delta v + C \delta w)\, d\tau$$

de arbeid is van de krachten die het systeem, d. i. de drager der elektrokinetische energie in het elektromagnetisch veld, op het ijzer uitoefent en die met de elastische krachten evenwicht moeten maken.

Wij zullen nu een systeem van krachten zoeken, dat dien arbeid levert en gemakshalve zeggen, dat deze in het magnetisch veld in het ijzer worden opgewekt.

Hoe dat stelsel moet zijn, weten wij reeds ten deele. Immers, wij weten reeds, welke spanningen de omringende aether uitoefent (pag. 47) en hebben nu nog verder krachten aan te wijzen, die met de spanningen in den aether te zamen den bovengenoemden arbeid verrichten.

Wij stellen nu vooreerst dat op een volume-element de krachten $A\,d\tau$, $B\,d\tau$, $C\,d\tau$ werken en beproeven of men deze uit *inwendige drukkingen* kan afleiden. Noemen wij van vlakte-elementen loodrecht op de x-, y- en z-as de drukcomponenten per eenheid van oppervlak resp. A_x, B_x, C_x; A_y, B_y, C_y; A_z, B_z, C_z, dan moet, wanneer deze drukkingen werkelijk de krachten $A\,d\tau$, $B\,d\tau$, $C\,d\tau$ zullen opleveren

$$A = -\frac{dA_x}{dx} - \frac{dA_y}{dy} - \frac{dA_z}{dz},$$

$$B = -\frac{dB_x}{dx} - \frac{dB_y}{dy} - \frac{dB_z}{dz},$$

$$C = -\frac{dC_x}{dx} - \frac{dC_y}{dy} - \frac{dC_z}{dz}.$$

zijn; het is dus de vraag, of men voor A_x, enz. zoodanige waarden kan aangeven dat aan deze vergelijkingen voldaan wordt. Inderdaad is dit mogelijk en zelfs op meer dan ééne wijze. Men kan nl. stellen:

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\alpha^2+\frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+P_{xx} \\
B_y &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\beta^2+\frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+P_{yy} \\
C_z &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\gamma^2+\frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+P_{zz} \\
B_z = C_y &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\beta\gamma+P_{zy} \\
C_x = A_z &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\gamma\alpha+P_{xz} \\
A_y = B_x &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\alpha\beta+P_{yx}
\end{aligned}\right\}\text{(XIII).}$$

waarbij de grootheden P moeten voldoen aan de betrekkingen:

$$-\frac{d\,P_{xx}}{d\,x}-\frac{d\,P_{yx}}{d\,y}-\frac{d\,P_{xz}}{d\,z}=0 \text{ enz.,}$$

maar overigens onbepaald blijven. De overige termen in (XIII) voldoen nl. reeds aan de vergelijkingen van A, B, C.

Immers door berekening van $-\frac{d\,A_x}{d\,x}-\frac{d\,A_y}{d\,y}-\frac{d\,A_z}{d\,z}$ vinden wij de gegeven waarde van A, daar

$$+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(\mu\,\alpha^2)}{d\,x}+\frac{d(\mu\,\alpha\,\beta)}{d\,y}+\frac{d(\mu\,\alpha\,\gamma)}{d\,z}\right]-\frac{1}{8\pi}\mu\,\frac{d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{d\,x}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\,\alpha\left[\frac{d(\mu\,\alpha)}{d\,x}+\frac{d(\mu\,\beta)}{d\,y}+\frac{d(\mu\,\gamma)}{d\,z}\right]+\frac{1}{4\pi}\,\mu\,\alpha\,\frac{d\,\alpha}{d\,x}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\,\mu\,\beta\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}+\frac{1}{4\pi}\,\mu\,\gamma\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}-\frac{1}{4\pi}\,\mu\left(\alpha\,\frac{d\,\alpha}{d\,x}+\beta\,\frac{d\,\beta}{d\,x}+\gamma\,\frac{d\,\gamma}{d\,x}\right)=$$

$$= + \frac{1}{4\pi} \alpha \left[\frac{d a}{d x} + \frac{d b}{d y} + \frac{d c}{d z}\right] + \frac{1}{4\pi} \mu \alpha \left(\frac{d \alpha}{d x} - \frac{d \alpha}{d x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \mu \beta \left(\frac{d \alpha}{d y} - \frac{d \beta}{d x}\right) + \frac{1}{4\pi} \mu \gamma \left(\frac{d \alpha}{d z} - \frac{d \gamma}{d x}\right) = 0,$$

omdat:

$$\frac{d a}{d x} + \frac{d b}{d y} + \frac{d c}{d z} = 0,$$

en

$$\frac{d \alpha}{d y} - \frac{d \beta}{d x} = \frac{d \alpha}{d z} - \frac{d \gamma}{d x} = 0.$$

De vergelijkingen (XIII) geven dus werkelijk de *drukkingen* die men in het ijzer kan aannemen ter verklaring der krachten, die op een volume-element van het ijzer in het magnetisch veld worden uitgeoefend.

Deze waarden gaan nu voor $\mu = 1$, $\mu' = \mu'' = 0$, dus aan het *grensvlak*, over in de *spanningen* (met het tegengestelde teeken) die wij op pag. 47 in den aether hebben gevonden, mits wij de grootheden $P = 0$ nemen.

Aan het oppervlak vinden wij bijv.:

$$A_x = \frac{1}{8\pi} (- \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + P_{xx}, \text{ enz.}$$

$$A_y = - \frac{1}{4\pi} \alpha \beta + P_{yx}, \text{ enz.}$$

Deze *drukkingen* komen echter, voor $P_{xx} = P_{xy} = \text{enz.} = 0$ op hetzelfde neer als de *spanningen* op pag. 47.

Het stelsel (XIII), met weglating van de grootheden P, vormt dus met de vroeger gevonden spanningen in den aether een systeem van krachten, die de verschijnselen van het ijzer in het magnetisch veld kunnen verklaren.

Door de x-as evenwijdig aan de magnetische kracht te nemen wordt:

$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{1}{8\pi}(-2\mu+\mu'')\mathfrak{H}^2 + \frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')\mathfrak{H}^2, \\
B_y &= \frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')\mathfrak{H}^2, \\
C_z &= \frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')\mathfrak{H}^2,
\end{aligned}$$

$$B_z = C_y = A_z = C_x = A_y = B_x = 0,$$

zoodat wij de gevonden drukkingen kunnen beschouwen als te bestaan in een normale drukking

$$\frac{1}{8\pi}(\mu+\mu')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

per eenheid van oppervlak, die op vlakte-elementen van elke richting gelijkelijk werkt, en eene *spanning*

$$\frac{1}{8\pi}(2\mu-\mu'')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

langs de *krachtlijnen*.

Voegen wij hierbij de elasticiteitskrachten, die worden afgeleid uit drukkingen met de componenten (Kirchhoff):

$$X_x = -2\,K\left(\frac{d\,u}{d\,x} + \Theta\,\Delta\right),$$

$$Y_y = -2\,K\left(\frac{d\,v}{d\,y} + \Theta\,\Delta\right),$$

$$Z_z = -2\,K\left(\frac{d\,w}{d\,z} + \Theta\,\Delta\right),$$

$$Y_z = Z_y = -K\left(\frac{d\,v}{d\,z} + \frac{d\,w}{d\,y}\right),$$

$$Z_x = X_z = -K\left(\frac{d\,w}{d\,x} + \frac{d\,u}{d\,z}\right),$$

$$X_y = Y_x = -K\left(\frac{d\,u}{d\,y} + \frac{d\,v}{d\,x}\right),$$

waarin $\Delta = \frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,v}{d\,y} + \frac{d\,w}{d\,z}$ en K en Θ de *elasticiteitsconstanten* zijn, dan worden de evenwichtsvoorwaarden voor punten in het ijzer, als wij eventueele uitwendige krachten door X, Y en Z voorstellen:

$$X = \frac{d\,(A_x + X_x)}{d\,x} + \frac{d\,(A_y + X_y)}{d\,y} + \frac{d\,(A_z + X_z)}{d\,z},$$

$$Y = \frac{d\,(B_x + Y_x)}{d\,x} + \frac{d\,(B_y + Y_y)}{d\,y} + \frac{d\,(B_z + Y_z)}{d\,z},$$

$$Z = \frac{d\,(C_x + Z_x)}{d\,x} + \frac{d\,(C_y + Z_y)}{d\,y} + \frac{d\,(C_z + Z_z)}{d\,z}.$$

Stellen $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en $\overline{Z}$ de componenten van andere uitwendige drukkingen op het oppervlak voor, dan blijven voor punten aldaar de gewone evenwichtsvoorwaarden gelden:

$$X_n = \overline{X}, \quad Y_n = \overline{Y}, \quad Z_n = \overline{Z}.$$

STELLINGEN.

I.

Terecht zegt MACH (*Die Mechanik in ihrer Entw. hist.-krit. dargestellt*, pag. 438): „Die *Lagrangesche* Mechanik ist eine grossartige Leistung in Bezug auf die *Oekonomie* des Denkens."

II.

De studie van het mechanisch model van BOLTZMANN (*Vorlesungen über* MAXWELL's *Theorie der Electricität und des Lichtes I*) is aan te bevelen aan hen, die zich met de theorie van MAXWELL vertrouwd wenschen te maken.

III.

„This view which regards all potential energy as really *kinetic* has the advantage of keeping before us the idea that it is one of the objects of Physical science to explain natural phenomena by means of the properties of *matter in motion*. When we have done this we have got a complete physical explanation of any phenomenon and any further explanation must be rather metaphysical than physical. It is not so however when we explain the phenomenon as due to changes in the *potential energy* of the system; for *potential energy cannot be said*, in the strict sense of the therm, *to explain anything. It does little more than embody the results of experiments in a form suitable for mathematical investigations.*"

(J. J. THOMSON. *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*, pag. 15.)

IV.

De argumenten van Dr. BRESTER voor zijne theorie van de zon zijn niet afdoende.

V.

De verplaatsing der *Fraunhofersche* strepen kan *niet* uit de theorie van BRESTER worden verklaard.

VI.

De definitie van een integraal als som van een oneindig groot aantal oneindig kleine grootheden is te verkiezen boven die van het omgekeerde van een differentiaalquotient.

VII.

De studie van het *Riemannsche* vlak is zeer bevorderlijk voor de kennis van den aard van vele belangrijke functies.

VIII.

Het populariseeren der wetenschap is in het belang der wetenschap.

IX.

Het bewijs voor de bekende stelling omtrent de minimum deviatiehoek der lichtstralen bij den gang door een prisma, dat men vindt in: LOMMEL, *Lehrbuch der Experimentalphysik* pag. 506, is te verkiezen boven dat in: WÜLLNER, *Lehrbuch der Experimentalphysik II* 1883, pag. 93.

X.

Bij het begin der bol-driehoeksmeting dient vooraf de stelling, dat een rechthoekige boldriehoek met beide rechthoekszijden kleiner dan 90°, ook de schuine zijde kleiner dan 90° heeft, *meetkundig* te worden bewezen. In: J. VERSLUIJS, *Boldriehoeksmeting met vraagstukken*, 1890, pp. 3 en 8, wordt eerst de formule cos. c = cos. a cos. b algemeen bewezen en daarbij stilzwijgend van bovengenoemde stelling gebruik gemaakt, terwijl later deze formule dient als bewijs voor de bedoelde stelling. Dit is onlogisch.

XI.

Bij het elementaire onderwijs in de wiskunde moet veel tijd worden besteed aan de leer der evenredigheden en hare eigenschappen moet en zooveel mogelijk worden toegepast.

Bewijzen als op pag. 139 van het *Handboek der vlakke driehoeksmeting* van J. VERSLUIJS dienen in bovenbedoelden zin gewijzigd te worden

XII.

Het gezicht is niet voldoende om onze kennis van de ruimte van drie afmetingen te verklaren.

XIII.

De hypothese van RIEHL is in staat onze ruimtevoorstelling te verklaren. (Vergelijk: Dr. G. HEYMANS, *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens*, I *pag*. 225 *enz*.).

XIV.

Het causale denken kan door de hypothese van HAMILTON worden verklaard.

(Vergelijk: Dr. G. HEYMANS, ibid. II, pag. 373 enz).

XV.

Voor de toelating tot Gymnasium en Hoogere Burgerschool behoort een minimum leeftijd van 13 jaar te worden vastgesteld.

XVI.

Onder de eischen van het toelatingsexamen tot de academie voor de Wis- en Natuurkundige faculteit behooren de kennis van de beginselen der *Natuur-* en *Scheikunde* te worden opgenomen.