EENIGE BESCHOUWINGEN

OVER DE

POTENTIAAL-FUNCTIE.

4

EENIGE BESCHOUWINGEN

OVER DE

POTENTIAAL-FUNCTIE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

op Gezag van den Rector Magnificus

Dr. JAN HENDRIK STUFFKEN,

Hoogleeraar in de Faculteit van Bespiegelende Wijsbegeerte en Letteren,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

DOOR

ELIZA VAN DER VEN,

op Zaturdag den 15en Mei 1858, des namiddags ten 2 ure.

AMSTERDAM,

IPENBUUR & VAN SELDAM.

1858.

AAN MIJNEN VRIEND

Petrus Isaäc Kloos van Amstel Hollman,

Doctor in de Genees-, Heel- en Verloskunde.

INHOUD.

INLEIDING . . . . Blz. 1.

EERSTE HOOFDSTUK. Over het eindig zijn der potentiaal $V = d\int\frac{ds}{r}$ en der gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$ . . . . » 5.

TWEEDE HOOFDSTUK. Over de partiële differentiaal-verhoudingen, in zooverre zij *zijn* of *niet kunnen zijn* uitdrukkingen van evenredige grootte der ontbondenen van de algeheele aantrekking; dat is over het overeenstemmen en over het verschillen der waarden van $\frac{dV}{dx} = \int d.\frac{d(\frac{1}{r})}{dx}\,ds$ *enz.* en $\int\frac{d.(a-x)}{r^3}\,ds$ *enz.* . . . . » 16.

DERDE HOOFDSTUK. Voorbeelden ter toelichting van het algemeen verhandelde in de voorgaande Hoofdstukken . . . . » 35.

INHOUD.

Inleiding . . . . Blz. 1.

Eerste Hoofdstuk. Over het eindig zijn der potentiaal $V = \int \frac{dm}{r}$ en der gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ . . . . 5.

Tweede Hoofdstuk. Over de partiële differentiaal-verhoudingen, in [illegible] van eindige grootte [illegible] van de [illegible] bewerking; dat is over het [illegible] stelling en over het verschil der waarden van [illegible] $= \int d$ [illegible] dx enz. en $\int$ [illegible] . . . . 15.

Derde Hoofdstuk. Voorbeelden ter toelichting van het algemeen verhandelde in de voorgaande Hoofdstukken [illegible] . . . 35.

VOORREDE.

Door de Faculteit des wis- en natuurkundige wetenschappen aan de Hoogeschool te Leiden werd, voor het academie-jaar 1857—1858, *eene prijsvraag over de zoogenaamde* potentiaal-functie *van* GAUSS *voorgesteld. Alhoewel ik vreesde, dat het mijne krachten zou te boven gaan om het moeijelijk en veel omvattend onderwerp, tot hetwelk deze vraag betrekking had, binnen den gegeven tijd naar behooren en volledig te kunnen behandelen, waagde ik niettemin te pogen. Eene proeve van beantwoording werd door mij ingediend, en de hoop dat mijn streven niet geheel vruchteloos zou zijn geweest, werd meer dan vervuld, daar mijne verhandeling der bekrooning niet onwaardig werd geoordeeld.*

Aan het einde mijner academische loopbaan genaderd, bestond er nu geene bedenking tegen het gebruik mijner verhandeling voor het academisch proefschrift, dat ter verkrijging van den graad van Doctor in de wis- en natuurkundige wetenschappen vereischt wordt. Maar bij dat gebruik moest ik mij tot een klein gedeelte der verhandeling bepalen.

De vraag, die ik getracht had te beantwoorden, omvatte veel, zeer veel. Er was verlangd dat de aard en de eigenschappen der potentiaal-functie naauwkeurig zouden worden verklaard en aangetoond, — dat het uitgestrekt gebruik zou worden aangewezen, — dat het een en ander door voorbeelden zou worden toegelicht, — maar vooral dat ook zou worden aangeduid en ontvouwd, wat door groote wiskundigen, die zich met de beschouwing der functie onledig hadden gehouden, was verrigt, en tot het verbeteren *van hare behandeling, tot het meer vruchtbaar maken van haar gebruik, en tot het uitbreiden onzer kennis in hare beschouwing als anderzins, was bijgedragen. Alleenlijk dit laatste, zoo men let op het groote en hoogst verdienstelijke van den arbeid van zoo vele uitstekende wiskundigen, — zoo als van* LA PLACE, GAUSS, POISSON, CHASLES, PLANA, LEJEUNE-DIRICHLET, HEINE *en anderen, — alleenlijk dit was eene stof, die een groot bestek eischte om genoegzaam — ook al ware het dan ten aanzien der hoofdpunten — uiteengezet te worden. Niet veel meer beperkt kon de ruimte zijn, noodig om van de genoemde functie, het voornaam gebruik te doen kennen, zooals inzonderheid haar gebruik in de leer der aantrekking, in die der warmte en in die der electriciteit en van het magnetisme, daarbij tevens aanwijzende hetgeen, in dit opzigt, door de genoemde wiskundigen, en dan ook door* GREEN *en* LAMÉ *was gedaan en onderzocht. En het verklaren van den aard der functie, het aantoonen van hare eigenschappen, de beschouwing der gewigtige differentiaal-vergelijking van de tweede orde, tot haar betrekking hebbende, hare ontwikkeling en bepaling uit deze vergelijking, het toelichten met voorbeelden, enz. enz. was reeds een onderwerp dat breede behandeling vorderde. Mijne proeve van beantwoording, zij mogt in meer dan een opzigt onvolledig zijn, had dan ook eene uitgebreidheid verkregen, te groot om, zonder wezenlijke beperking, als academisch proefschrift te kunnen dienen. Het tijdstip voor mijne promotie was daarenboven reeds bepaald toen mij de bekrooning te beurt viel. Om meer dan éénе reden kon dit tijdstip niet verwijderd worden, en het was te nabij, om mijne verhandeling in haar geheel als academisch proefschrift te kunnen geven. Dan toch zou het aanvullen, ook met beschouwingen die later (nadat mijne verhandeling reeds was ingediend) zijn bekend geworden, het omwerken van sommige deelen enz., noodzakelijk zijn geweest; ik zou dan tot uitbreiden in stede van tot beperken hebben moeten besluiten.*

Om van mijne verhandeling voor het academisch proefschrift gebruik te kunnen maken, moest derhalve mijne keuze vallen op een gedeelte van geen te grooten omvang. Zij is bepaald geworden tot een voornaam alhoewel eenvoudig gedeelte, dat in mijne verhandeling alleen ten aanzien van het hoofdzakelijke en algemeene was behandeld, maar hetwelk, bij meer uitvoerige ontwikkeling, mij toescheen toereikende stof voor mijn academisch proefschrift te geven. Het is het gedeelte, betrekking hebbende tot het belangrijk onderzoek over het eindig en onafgebroken zijn der potentiaal-functie en van hare ge-

deeltelijke differentiaal-verhoudingen van de eerste orde, waarin tevens het al of niet onbeperkte en onvoorwaardelijke eener eigenschap dezer verhoudingen wordt onderzocht, door welke zij de grootte van gedeeltelijke of ontbondene werkingen kunnen doen bekend worden, die voortkomen uit aantrekking of afstooting van stof. En het is dit onderwerp mijner keuze, dat ik getracht heb in dit proefschrift meer te ontwikkelen. Daartoe mogt en moest ik een gepast gebruik maken van het belangrijke, dat door GAUSS *ons geleerd is, of volgde ik, bij verder onderzoek, den weg door dezen grooten wiskundige aangewezen.*

Na dus de redenen te hebben ontvouwd, die mij de aandacht deden vestigen op de gekozene stof, zou ik onmiddelijk tot hare behandeling kunnen overgaan. Een blik echter op de studiebaan, waarvan zoo ras door mij het einde zal bereikt zijn, noopt mij tot het uiten van gevoelens van innige dankbaarheid jegens allen, die door leiding en raad, niet minder door bewijzen van hartelijke toegenegenheid, het voor mij gemakkelijk en aangenaam hebben gemaakt haar te bewandelen.

Dat dankbaar gevoel wordt vooral in mij levendig, wanneer ik mij herinner hoe Gij, hooggeschatte Promotor, Hooggeleerde VERDAM, *van mijne komst aan deze Hoogeschool af, tot aan dit oogenblik, waarop Uwe hand mij het maatschappelijk leven zal inleiden, niet opgehouden hebt mij op de minzaamste wijze ter zijde te staan, om mijne studiën te bevorderen en tot een goed doel te leiden. Lang nog worde Uw leven gespaard voor allen wien Gij dierbaar zijt; lang nog moge het U aan lust noch aan krachten ontbreken om door Uwe lessen en Uwen omgang nuttig te zijn voor hen, die zich aan de beoefening der wetenschap willen wijden.*

Ook Gij, Hooggeleerde KAISER, *hebt aanspraak op mijnen hartelijken dank. Door Uwen vertrouwelijken omgang zoowel als door Uw onderwijs, hebt gij steeds getracht die ware liefde voor de wetenschap in mij op te wekken, die in U woont. Moge nog lang Uw leven gespaard blijven voor de uwen, voor de wetenschap en voor uwe leerlingen, die in U den leermeester bewonderen en den vriend leeren liefhebben.*

Aan U, Hooggeleerde RIJKE, *gevoel ik mij ook ten hoogste verpligt. Uw uitstekend onderwijs, waardoor Gij tot mijne vorming zooveel hebt bijgedragen, Uwe hulpvaardigheid, daar waar gij mijne studiën kondt bevorderen, Uwe raadgevingen, daar waar* *het noodig was die te leiden, zijn zoo vele herinneringen die mij van harte doen wenschen, dat nog aan velen na mij het geluk moge te beurt vallen Uw leerling te zijn.*

Neem ook Gij, Hoogleeraren VAN DER HOEVEN, VAN DER BOON MESCH *en* DE VRIESE, *de betuigingen mijner dankbaarheid aan voor het genoten onderwijs. De rigting mijner studiën deed mij slechts korten tijd uw leerling zijn, maar toch lang genoeg om mij voor altijd aan U verpligt te gevoelen.*

U, waarde SURINGAR, *met wien ik, gedurende mijn verblijf aan deze Hoogeschool, steeds door vriendschap mogt zijn verbonden, op den dag mijner promotie als Hoogleeraar te mogen begroeten, geeft mij stof tot innige vreugde.*

Allen verder, die mij op eenige wijze zijn behulpzaam geweest gedurende mijne academische loopbaan, breng ik mijnen dank; terwijl ik tevens met genoegen melding maak van de diensten die mij, bij het schrijven mijner proeve van beantwoording, het gebruik der academische Bibliotheek heeft verleend.

Gij eindelijk, mijne vrienden, met wien ik de genoegens van het gezellige leven mogt smaken, hebt dank voor de gelukkige oogenblikken die uwe vriendschap mij bereid heeft.

INLEIDING.

In de beschouwingen der uitwerking van aantrekkende of afstootende krachten, insgelijks in die der warmte, wordt, zoo als bekend is, gebruik gemaakt van eene functie, aan welke door GAUSS, en ook door GREEN, de naam van *Potentiaal* is gegeven. Tot meerdere eenvoudigheid der voorstelling hier alleenlijk lettende op het gebruik dezer functie in de leer der aantrekking van stoffelijke ligchamen of groepen van stoffelijke deelen, verstaat men door *potentiaal van eene massa of van stoffelijke deelen ten opzigte van een punt* P, eene functie, welke is de uitdrukking of welke geeft de waarde eener som van quotienten, die verkregen worden, wanneer men, voor elk deeltje (*element*) der aantrekkende stof, de getalwaarde der grootte van het element deelt door die van zijn afstand tot het stoffelijk punt P, dat aangetrokken wordt, dat is ten opzigte van hetwelk men de grootte der uitwerking van de aantrekkende stof wil kennen. Zijn de deelen der stof niet afgescheiden, maar kan men aannemen dat zij onafgebroken aan elkander sluiten en, als zamenhangende, eene massa van zekere uitgebreidheid uitmaken, dan wordt die som eene integraal, genomen tusschen de grenzen, welke door den vorm en de uitgebreidheid der massa bepaald zijn. De grootte der elementen heeft niet alleenlijk betrekking tot de uitgebreidheid (het *volumen*), maar ook tot de stof, want het zijn elementen der massa, aantrekkende elementen. Voor elk element moet derhalve ook de digtheid der stof, de digtheid der massa ter plaatse en in de uitgebreidheid van het element, in rekening worden gebragt. Is de digtheid der massa veranderlijk van punt tot punt, of van element tot element, en kent men de wet dezer verandering door eene functie $f\ (a, b, c)$ van de coördinaten a, b, c der punten of der elementen, is wijders r de afstand van eenig element tot het aangetrokken punt P, en drukt men de potentiaal uit door V, dan zal, in het algemeen

$$V = \int\int\int f\ (a, b, c)\ \frac{da.\ db.\ dc}{r},$$

zijn. Is de massa gelijkslachtig, dan wordt $f\ (a, b, c)$ gelijk aan de standvastige digtheid d der stof, en d wordt een standvastige factor van de integraal. Zijn de stofdeelen afgescheiden, onzamenhangend, of wordt de werking uitgeoefend door eenige meer of minder groote massae, afgescheiden van elkander geplaatst, maar van die betrekkelijke uitgebreidheid, gesteldheid, als anderzins, dat van elke de stof in een enkel punt vereenigd gedacht zou mogen worden, dan zal de potentiaal eene som en geene eigenlijke integraal zijn, terwijl, bijaldien van zoodanige gezamentlijk aantrekkende massae de stof niet kan gedacht worden als vereenigd in even zoo vele verspreide punten, de potentiaal eene som van integralen zal moeten wezen.

Aan massa wordt ligchamelijke uitgebreidheid toegekend. Men kan nogtans stofdeelen zamenhangend verdeeld over een oppervlak, of eeniglijk langs eene lijn, denken, en wel zoodanig, dat het in de beschouwing geoorloofd zij, eene oneindig dunne stoffelijke laag als een stoffelijk oppervlak, of eene reeks van oneindig kleine zamenhangend elkander opvolgende, dat is aaneengeschakelde, stoffelijke elementen, als eene stoffelijke lijn aan te merken. De aantrekkende massa kan, in dezen zin, een aantrekkend stoffelijk oppervlak, eene aantrekkende stoffelijke lijn wezen. De uitdrukking der potentiaal ondergaat, voor deze gevallen van beschouwing, alleenlijk verandering ten opzigte van het nemen der integraal; want terwijl deze is *drievoudig* als de stof eene ligchamelijke uitgebreidheid vult, moet zij *dubbel* zijn, indien de stof slechts uitgebreidheid heeft als een oppervlak, en voor de stoffelijke lijn is zij niet meer dan *enkel*. Drukt men evenwel de uitgebreidheid van het stoffelijk element door ds uit, hetzij dit element behoort tot een stoffelijk ligchaam, hetzij men denkt aan een stoffelijk oppervlak, hetzij men zich eene regte of kromme (vlakke of niet vlakke) lijn voorstelt, dan is in het algemeen,

$$V = \int f(a, b, c) \frac{ds}{r},$$

of
$$V = d \int \frac{ds}{r},$$

als namelijk de stof is gelijkslachtig, en deze vooronderstelling wordt hier doorgaand aangenomen, maar dan ook dat de standvastige digtheid d der stof, alhoewel zeer klein of zeer groot kunnende zijn, nogtans eene eindige grootte hebbe.

Indien x, y, z, zijn de coördinaten van het aangetrokken punt, dan is

$$r^2 = \left\{ (x - a)^2 + (ij - b)^2 + (z - c)^2 \right\}.$$

De potentiaal is derhalve niet louter eene functie van a, b, c; zij moet ook, gelijk overigens uit den aard der zaak duidelijk is, van de genoemde coördinaten afhangen, en men kan daarom de differentiaal-verhoudingen der potentiaal ten opzigte van deze coördinaten of (zoo men liever wil) parameters bepalen. Hoogst belangrijk is de betrekking, welke tusschen de tweede gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen bestaat: zij is de grondslag geweest van of gaf de aanleiding tot velerlei nasporingen van groote wiskundigen, die, met de voortreffelijke uitkomsten van hun onderzoek, de theorie der potentiaal verrijkt en meer en meer gewigtig gemaakt hebben. Maar ook aan de eerste gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen komt iets toe, dat zeer belangrijk is. De functien namelijk, van welke zij de sijmbolen of de teekens zijn, zijn tevens die, welker waarden in het algemeen evenredig zijn aan de algeheele kracht der aantrekking op het aangetrokken punt, maar genomen in de drie rigtingen, gaande door dit punt en evenwijdig aan de assen der coördinaten.

Over deze eerste gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$ der potentiaal V, gelijk over de potentiaal zelve, loopt het onderzoek, dat het onderwerp van dit proefschrift uitmaakt.

Een eerst gedeelte is gewijd aan het onderzoek over het eindig en aaneengeschakeld of onafgebroken zijn der functie V, en van hare eerste afgeleide functien $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$. Want ofschoon dat eindig zijn buiten twijfel is, zoo lang r is eindig, zou hierover onzekerheid kunnen ontstaan, wanneer het aangetrokken punt, welks plaats elke kan zijn, ergens onder de aantrekkende stofdeelen was gelegen, en derhalve ter plaatse van een aantrekkend stofdeel. Zoo ook verdient opzettelijk onderzocht te worden, of genoemde functien altijd de hoedanigheid hebben van onafgebroken te zijn, dat is of hare waarden aaneengeschakeld, trapswijze, en als bij onmerkbare graden, zullen veranderen, bij het allengs, trapswijze, en aaneengeschakeld doen veranderen der elementen x, ij, z, van welke zij afhangen, en zulks vooral met betrekking tot de plaats of de grens, alwaar het aangetrokken punt, eerst buiten de aantrekkende stof gelegen, daarin zal overgaan, en tot het stoffelijk ligchaam of tot de stoffelijke vlakte- of lengte-uitgebreidheid zal behooren.

Wanneer de algeheele hoegrootheid der aantrekking van de aantrekkende stof op het aangetrokken punt P, ontbonden wordt in drie gedeeltelijke aantrekkingen of krachten X, Y, Z, evenwijdig aan de coördinaten-assen gerigt, zullen dan de afgeleide functien $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$ steeds de uitdrukkingen of waarden zijn of geven, aan welke de grootten van deze ontbondene krachten evenredig zijn? — Bijaldien derhalve μ eene positieve of negatieve standvastige factor is, welke voorstelt de hoegrootheid der aantrekking van de eenheid der massa op de eenheid van afstand, zal men dan in elk geval, waar ook het aangetrokken punt zij geplaatst, mogen stellen

$$X = \mu \frac{dV}{dx},\ Y = \mu \frac{dV}{dij},\ Z = \mu \frac{dV}{dz},$$

of zijn er gevallen, waarin tot de hoegrootheid der ontbondene aantrekkingen, niet door middel van de eerste gedeeltelijke differentialen der potentiaal zou kunnen worden besloten?

Deze belangrijke vraag wordt in het tweede gedeelte overwogen.

En het derde gedeelte bevat eene vergelijking der uitkomsten, verkregen zoowel bij eene regtstreeksche bepaling der potentiaal, als door hare afleiding uit de hoegrootheid der afzonderlijk bepaalde ontbondene aantrekkingen. Het bevat de voorbeelden, dienende om voor bijzondere gevallen aan te toonen, wat bij algemeene beschouwing is gebleken.

EERSTE HOOFDSTUK.

Over het eindig en onafgebroken zijn der potentiaal $V = d\int\frac{ds}{r}$ *en der gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen* $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dij}, \frac{dV}{dz}$.

Gelijk in de Inleiding is opgemerkt, bestaat er geen twijfel over het eindig zijn der potentiaal en van hare eerste gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen, ten opzigte van de coördinaten van het aangetrokken punt, wanneer dit punt ligt buiten de uitgebreidheid der aantrekkende stof, dat is buiten de grenzen, binnen welke deze stof is bevat of begrepen. Alsdan toch is de waarde van r steeds eindig, en het integreren van de differentiaal-uitdrukking der potentiaal komt als het ware neêr op het nemen eener som van geene andere dan oneindige kleine hoegrootheden binnen bepaalde grenzen.

Ook het onafgebroken zijn of de zoogenaamde *continuiteit* der potentiaal blijkt alsdan, dewijl hare waarde oneindig weinig veranderd zal worden, bij eene oneindig kleine verplaatsing van het aangetrokken punt, en zulks onafhankelijk van de beteekenis van ds, hetzij deze voorstelt het element eener lijn of van eenig oppervlak of van een volumen.

Maar is het punt een punt der aantrekkende stof zelve, dan geeft de vorm der uitdrukking van de potentiaal aanleiding tot twijfel over het eindig zijn van hare waarde. Want het oneindig klein worden van r voor punten, naast, bij of rondom het aangetrokken punt gelegen, schijnt te moeten doen besluiten dat de deelen der integraal, tot deze punten betrekking hebbende, oneindig groot zullen worden. Doch het is noodig dat het onderzoek hieromtrent niet geschiede in het algemeen, maar voor elk der drie voorname gevallen in het bijzonder of afzonderlijk.

A. *Het stoffelijk ligchaam.*

Zijn de aantrekkende stofdeelen die eener massa, hebbende ligchamelijke maar bepaalde uitgebreidheid, dan is

$$V = d \int \frac{da,\ db,\ dc}{r} = d \int \frac{da,\ db,\ dc.}{\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}}}$$

De oorsprong, tot welken de coördinaten a, b, c, x, y, z, betrekking hebben, worde oorspronkelijk binnen de massa gedacht, maar hij worde daarna in het aangetrokken punt genomen, evenwel zonder verandering van de rigting der coördinaten-assen, dat is de verplaatste assen loopen evenwijdig aan de oorspronkelijke.

Zij ϑ de hoek, dien r maakt met de as der abscissen a of x, ψ de standhoek der vlakken (r, x) en x, y, alsdan zullen r, ϑ, ψ, de polaire coördinaten zijn van een punt der aantrekkende massa, en aangezien, bij het gebruik dezer soort van coördinaten, de uitdrukking der differentiaal van een volumen is

$$d\ v. = r^2.\ \sin.\ \vartheta.\ d\ \vartheta.\ d\ \psi.\ d\ r,$$

zal de uitdrukking der potentiaal nu zijn

$$V = d \iiint \frac{r^2.\ \sin.\ \vartheta.\ d\ \vartheta.\ d\ \psi.\ d\ r.}{r} = d \iiint r.\ \sin.\ \vartheta.\ d\ \vartheta.\ d\ \psi.\ dr.$$

De grenzen, tusschen welke de integralen moeten genomen worden, zullen zeer onderscheiden zijn, naar gelang der plaats van het aangetrokken punt. Is dit punt buiten de aantrekkende massa, dan heeft men als grenzen voor ϑ, in het algemeen, $\vartheta = \alpha$ en $\vartheta = 0$, kunnende, als de massa hol is, en dat het aangetrokken punt in deze holle kern is gelegen, $\alpha = \pi$ zijn. Voor ψ zijn de grenzen, $\psi = 2\pi$ en $\psi = 0$, en voor r, $r = r_2$ $r = r_1$. Ten aanzien van deze grenswaarden van r merke men op, dat de lijn r, uit het aangetrokken punt door een aantrekkend stofdeel getrokken en genoegzaam verlengd, de oppervlakte der ligchamelijke uitgebreidheid zal snijden, of als het ware door de oppervlakte zal gaan. Het aantal snijpunten is *twee* of (naar gelang van den bijzonderen vorm der grens van het stoffelijk ligchaam) *meer*. Is het aantal *twee*, dan is het eerste snijpunt als het ware een punt van ingang des voorstraals r, en het tweede snijpunt zal het punt van uitgang zijn. Voor dit laatste punt is dan $r = \mathrm{r}_2$ en voor het eerste is $r = \mathrm{r}_1$. Is, in dezelfde vooronderstelling het aantal snijpunten *vier* of *zes* of *meer*, dan moet de integraal ten opzigte van r bij gedeelten genomen worden tusschen de limieten r_6, r_5; r_4, r_3; r_2, r_1; enz. Ligt het aangetrokken punt binnen of in de massa, en kent men (zoo als in elk geval wordt voorondersteld) de vergelijking der oppervlakte van het aantrekkend ligchaam, dan zijn ook op elke lijn, door den oorsprong getrokken en tot aan de oppervlakte uitgestrekt, de afstanden r bekend, en de grenzen voor het integreren zullen dan wezen voor ϑ, $\vartheta = \pi$ en $\vartheta = 0$, voor ψ wederom 2π en 0, en voor r nu r en 0. Met betrekking tot ϑ, en ook tot ψ, kunnen de limieten meer zamengesteld zijn, naar gelang der bijzondere figuur van het ligchaam, doch op de wijzigingen, welke daardoor noodzakelijk zouden worden, behoeft hier niet gelet te worden.

En beschouwt men nu de potentiaal onder den boven verkregen vorm, en binnen de aangeduide mogelijke grenzen der integralen, dan blijkt dat zij nimmer eene oneindig groote waarde kan erlangen; slechts verkrijgt zij eene oneindig kleine waardij voor de punten, onmiddelijk rondom het aangetrokken punt gelegen, wanneer dit punt in de massa is; voor de meer en meer verwijderde stofdeelen ligt het punt als buiten de massa, en de totale waarde der potentiaal moet eindig of bepaald zijn.

Eveneens besluit men dat de potentiaal eene onafgebrokene functie is. Want indien de elementen der massa, die in de onmiddellijke nabijheid van het aangetrokken punt zijn gelegen, slechts oneindig weinig aan de waarde of verandering der waarde van de potentiaal toebrengen, zal de functie, daar zij voor de overige elementen op aaneengeschakelde wijze verandert, ook doorgaand onafgebroken zijn.

Nog geldt hetzelfde wanneer de plaats van het punt, oorspronkelijk buiten de massa, gedacht wordt in de massa over te gaan. Ligt het nog buiten de massa, doch op oneindig kleinen afstand van het oppervlak des ligchaams, dan kan de potentiaal aangemerkt worden als uit twee deelen te bestaan. Het eene heeft betrekking tot alle de elementen der massa, welke niet op oneindig kleinen afstand van het aangetrokken punt liggen, en voor deze is de functie onafgebroken, terwijl het tweede deel behoort tot de kleine groep van elementen, oneindig weinig van het aangetrokken punt verwijderd, en van dit deel kan de waarde der overeenkomstige functie ook slechts oneindig klein zijn. Komt het punt daarna in het oppervlak, dan verandert hierdoor de waarde der eerste functie, wegens hare continuiteit, niet dan zeer weinig, en de waarde der tweede functie zal nog oneindig klein zijn. De totale waarde der potentiaal zal derhalve, in dit laatste geval, oneindig weinig van die in de eerste vooronderstelling moeten verschillen, dat is eene oneindig kleine verandering van r zal ook oneindig kleine verandering van V te weeg brengen.

B. *Het stoffelijk oppervlak.*

In de algemeene uitdrukking $V = d\int\frac{ds}{r}$ is nu ds een element van een oppervlak. Gelijk boven, onder A, noodig was, zoo ook moet hier de uitdrukking der potentiaal vervormd worden, om tot een oordeel over het eindig en onafgebroken zijn te komen. Daartoe kan voorzeker geen beter weg worden gevolgd, dan die aangewezen is door den grooten wiskundige, van wien de beschouwing der potentiaalfunctie, als die van een nieuw onderwerp, is uitgegaan, en die hierover zooveel, en met zooveel vrucht, heeft onderzocht. (1)

Laat het aangetrokken punt P gedacht worden te zijn gelegen in het oppervlak. Dit punt zij oorsprong der regthoekige coördinaten. De normaal in P zij abscissen-as, dan is het coördinaten-vlak yz het vlak, rakende het oppervlak in het punt P.

Door de plaats R van eenig aantrekkend element des oppervlaks worde ook eene normaal gedacht. Zij ψ de hoek, tusschen deze normaal en die van P, welke de abscissen-as is, dan is ψ tevens de standhoek van het vlakte-element in R en het vlak yz. Daarom zal $ds\ cos.\ \psi$ de uitdrukking zijn voor de grootte der projectie ω van

(1) „Von der Endlichkeit des Integrals, welches das Potential ausdrückt, überzeugt man sich leicht „indem man die Zerlegung der Fläche auf ähnliche Weise ausführt, wie im 15ten Art. geschehen ist." — Gauss, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*. 1837. bladz. 18. de noot.

dat element op het vlak *ijz*. Eene andere uitdrukking voor dezelfde hoegrootheid heeft men, door de projectie ω te beschouwen als een differentiaal-element van den inhoud eener vlakke kromme lijn of eener vlakke figuur; want is ϱ de projectie van r op het vlak *ijz*, en derhalve een voerstraal der projectie ω, en maakt ϱ een hoek ϑ met de as der *ij*, dan is $\omega = \varrho \, d\,\vartheta \, d\,\varrho$, en daarom

$$ds \cos \psi = \varrho \, d\,\varrho \, d\,\vartheta,$$

zoodat

$$V = d \int\int \frac{\varrho}{r} \frac{d\,\varrho \, d\,\vartheta}{\cos.\, \psi}, \text{ zal zijn.}$$

De grenzen der integralen zullen klaarblijkelijk, in het algemeen, wezen $2\,\pi$ en 0 voor ϑ, en ϱ' en 0 voor ϱ, indien namelijk ϱ' is de limiet van grootte der projectie ϱ van r op het vlak *ijz*.

Is ϱ' een oneindig kleine waarde van ϱ, dan zal de integraal tusschen de grenzen ϱ' en 0 ook een oneindig kleine waarde hebben. Want indien de hoek, dien de voerstraal r maakt met zijne projectie ϱ op het vlak *ijz*, genoemd wordt φ, zal $\frac{\varrho}{r} = \cos.\, \varphi$ steeds eindig zijn, hoe klein ook ϱ moge wezen. Daar verder $\psi = 0$ wordt voor het element dat in den oorsprong P is, zal ψ, binnen de pas genoemde grenzen van ϱ, oneindig klein moeten zijn, zoodat $\cos.\, \psi$ onafgebroken eene eindige grootte behoudt. Stelde men toch dat $\cos.\, \psi = 0$ kon worden binnen de aangeduide grenzen, dan zou de kromming van het oppervlak in P oneindig groot moeten zijn, strijdig met hetgeen is aangenomen, te weten, dat het vlak *ijz* zij een raakvlak, hebbende P tot raakpunt.

De oneindig nabij P gelegene elementen brengen derhalve zeer weinig toe om V te vergrooten, vermits het gedeelte van V voor deze elementen eene oneindig kleine som van oneindig kleine waarden is. De waarde van V voor een element, nabij dat in P gelegen, kan dan ook slechts oneindig weinig verschillen van die, welke tot het element in P betrekking heeft. En daar V is onafgebroken voor alle op eindigen afstand van P gelegene elementen, zal dan de potentiaal wederom eene functie zijn, welke gelijkmatig met r verandert.

Dit onafgebroken zijn of deze continuiteit der functie bestaat eveneens, wanneer men hare waarden beschouwt voor het geval dat het aangetrokken punt, eerst buiten maar nabij het oppervlak gelegen, daarna in het oppervlak overgaat. Zij b. v. het punt op de normaal of abscissen-as in de nabijheid van den oorsprong, zoodat *dx* de afstand zij van P tot het oppervlak. Zij *r* de afstand van het punt tot eenig element *ds* des oppervlaks, en φ de hoek, tusschen *r* en de negatieve rigting der abscissen-as, dan is $\varrho = r \sin \varphi$, en, als boven

$$V = d \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho'} \frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{r \cos \psi} = d \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho'} \frac{\sin. \varphi.\, d\varrho.\, d\vartheta}{\cos \psi}.$$

Aangezien nu $\cos. \psi$ steeds > 0 is, hoe klein ook de limiet ϱ' van ϱ zou mogen genomen worden, zal de integraal altijd, voor zeer kleine of oneindig kleine grenzen van ϱ, eene oneindig kleine waarde hebben, bij eenigen oneindig kleinen afstand van het aangetrokken punt tot het oppervlak. En het eindig en onafgebroken zijn der potentiaal wordt dan hieruit besloten zoo als boven.

C. *De stoffelijke lijn.*

Het aangetrokken punt P, in de lijn gelegen, zij wederom oorsprong der coördinaten. Is de lijn vlak (vlakke kromme lijn), dan worden de overeenkomstige normaal en raaklijn als assen der coördinaten x en y aangenomen. In plaats van deze hebbe men echter de polaire coördinaten ϱ en ϑ, zoodat ϑ zij de hoek tusschen den voerstaal ϱ van eenig element en de normaal of abscissen-as. De uitdrukking voor het element *ds* zal dan zijn $\sqrt{(d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2)}$, en die voor de potentiaal

$$V = d \int \frac{\sqrt{(d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2)}}{\varrho} = d \int \sqrt{\left\{ \left(\frac{d\varrho}{\varrho}\right)^2 + d\vartheta^2 \right\}} =$$

$$\ldots = d \int d\varrho \sqrt{\left\{ \left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 \right\}}.$$

Uit dezen vorm der uitdrukking is blijkbaar dat, bijaldien men in plaats van de integraal eene som van oneindig vele termen denkt, en wel voor de oneindig vele opvolgende waarden van ϱ, uitgestrekt tusschen de grenzen 0 en ϱ' van ϱ, zoowel aan de eene als aan de andere zijde van de normaal, er met oneindig kleine waarden van ϱ termen zullen overeenstemmen, van welke de waarden elke gestelde of aan te nemen waardij overtreffen, ook zelfs wanneer de som niet geheellijk tot de grens $\varrho = 0$ genomen wordt. Maar het zijn ook alleenlijk de oneindig kleine afstanden van de nabij het punt P gelegene punten, die het oneindig groot worden van de waarde der potentiaal veroorzaken; voor meer verwijderde punten of deelen ligt P even als een punt dat buiten de lijn geplaatst ware.

Ook blijkt dat oneindig groot worden der waarde van de potentiaal terstond, indien men alleenlijk het oneindig klein gedeelte der kromme lijn beschouwt, in hetwelk P is geplaatst, of ook van hetwelk P als het ware het middelpunt zou zijn. Want vermits, ten aanzien der potentiaal zelve, de onderscheiding in betrekkelijke plaatsing (door positief en negatief) van de aantrekkende punten in geene aanmerking moet genomen worden, zal P b. v. het midden zijnde van een oneindig klein boogje, oneindig weinig van de raaklijn afwijkende, het element $+ ds$ niet dan in hoogere orde van kleinheid verschillen van $+ d\varrho$, en men zal mogen stellen:

$$V = d\, 2 \int \frac{ds}{\varrho} = 2\, d \int \frac{d\varrho}{\varrho} = 2\, d \log \varrho + C$$

en deze wordt oneindig groot voor de limieten ϱ' en 0 van ϱ, als namelijk ϱ' is de oneindig kleine grootte van den voerstraal $\varrho = ds$ aan wederzijde van het punt P.

Is de kromme lijn niet vlak, dan kan men het vlak, gaande door de raaklijn in P van de kromme lijn, en loodregt op de rigting der ware normaal (in het kromtevlak gelegen) zijnde, als het coördinatenvlak *ijz* aannemen, en dan zal men, op dezelfde wijze als boven voor het geval van een oppervlak is beschouwd, mogen stellen

$$ds \cos \psi = \sqrt{\left\{ d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2 \right\}}$$

$$\varrho = r \cos \varphi,$$

$$V = d \int \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \sqrt{\left\{ \left(\frac{d\varrho}{\varrho}\right)^2 + d\vartheta^2 \right\}},$$

eene formule, welke eveneens tot het oneindig kunnen worden van V doet besluiten.

Gauss, die, in zijn boven aangehaald geschrift, slechts als in het voorbijgaan aanwees, hoe men kan aantoonen dat, met betrekking tot een aantrekkend oppervlak, de potentiaal eene aaneengeschakelde functie is, heeft van het geval eener lijn niet gewaagd. Maar de uitkomst hier verkregen, komt overeen met die, welke men opmerkt in eene *academische dissertatie*, in 1856 te *Marburg* verschenen. De schrijver, Dr. KESSLER (1) had, ter behandeling van het zeer bepaald en eenvoudig gedeelte der beschouwing van de potentiaal, dat hij tot onderwerp van zijne dissertatie gekozen had, de waarden der functie voor den omtrek en voor den inhoud van een cirkel, gelijk mede voor het oppervlak eener bol, regtstreeks berekend, en wel, wat den cirkel aangaat, in de vooronderstelling, dat het punt, waartoe de potentiaal behoort, niet buiten het vlak van den cirkel zij gelegen. Zijne formule voor de potentiaal des omtreks van een cirkel gaf dan ook $V = \infty$, als het overeenkomstig punt in den omtrek zelven aangenomen wordt. Terwijl de uitkomst voor dit bijzonder geval, noodwendiglijk begrepen is in de boven algemeen verkregene, zou men toch hier van het bijzondere tot het algemeene kunnen besluiten, omdat het oneindig groot worden van V toch alleenlijk voortkomt uit het in een element der kromme geplaatst zijn van het aangetrokken punt, of ook, zoo men liever wil, omdat dit punt als het gemeenschappelijke van twee opvolgende elementen kan worden aangemerkt, die beide tevens elementen van den overeenkomstigen kromte-cirkel zijn.

Indien het oneindig worden van V zeer wel verklaard kan worden uit de omstandigheid, dat in $\frac{ds}{r}$ de orde van kleinheid des voerstraals r grooter en veel grooter kan zijn dan die van het element ds, bijaldien dit is het element eener lijn, zal dan, zou men kunnen vragen, een gelijkvormig besluit niet moeten bestaan, als ds is het element van een oppervlak? Het bewijs van het tegendeel is boven gegeven; maar dit tegendeel blijkt ook uit den nu aangevoerden grond van beschouwen. Voor het oppervlak is immers $ds = \frac{\varrho \, d \varrho \, d \vartheta}{\cos \psi}$, en $r = \frac{\varrho}{\cos \varphi}$; daarom $\frac{ds}{r} = \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \, d \varrho \, d \vartheta$, welke nimmer oneindig groot kan worden; of liever, indien men ϱ in den teller en r in den noemer der breuk behoudt, zal, vermits ϱ en r bestendiglijk van dezelfde orde van kleinheid zijn, de teller ten opzigte van den noemer altijd zijn oneindig klein, of oneindig klein van eene hoogere orde.

Volgens hetgeen boven werd ontvouwd zal de potentiaal eindig zijn voor eenig punt, dat niet in de kromme lijn is gelegen. Het verdient opmerking, dat de overgang van deze eindige waarde in de oneindige zeer snel geschiedt. Beschouwt men

(1) H. C. KESSLER, *Inaugural-Dissertation über das Potential des Kreises und der Kugelfläche*; seite 14.

toch de waarde van $\int \frac{ds}{r}$ over een zoodanig klein gedeelte der kromme lijn, dat r oneindig klein kan worden, dan ziet men dat de waarde van V oneindig klein of ook eindig zal kunnen zijn, wanneer r, alhoewel reeds oneindig klein, van lagere of van dezelfde orde als ds is, naar dat zij, wanneer de orde der kleinheid van r hooger wordt dan die van ds, ook spoedig grooter en grooter wordt en zeer snel tot oneindig groot zal naderen.

Mogt het dan ook waar zijn, hetgeen KESSLER in zijne verhandeling (ter aangehaalde plaats) ten onregte opmerkt, dat de potentiaal voor den cirkel elke waarde, tusschen 0 en ∞ kon verkrijgen, zou hij welligt een meer volledig, zoo niet een juister oordeel gegeven hebben, wanneer hij, bij de uitdrukking dat de potentiaal in dit geval »*alle Werthe von* 0 *bis* ∞ *durch lauft*," gevoegd hadde de opmerking, dat dit doorloopen zeer ongelijkmatig plaats heeft, op gelijke wijze als b. v. de goniometrische tangenten van bogen, begrepen tusschen 0^0 en 89^0 $56'$ slechts van 0 tot ongeveer 1000 toenemen, terwijl zij, door de laatste 4 minuten van het quadrant van 1000 tot ∞ aangroeijen.

Het onderzoek tot hiertoe heeft derhalve geleid tot het besluit, *dat de functie*

$$V = d \int \frac{ds}{r}$$

eene steeds eindige *en* aaneengeschakelde *functie van* r *is*, *wanneer het element* ds *is dat eener ligchamelijke uitgebreidheid of van een oppervlak, maar dat dit ten opzigte eener lengte-uitgebreidheid of lijn alleenlijk* dan *waar zal zijn*, *ingeval het aangetrokken punt* niet *in de lijn zelve is gelegen.*

Het geval der stoffelijke lijn dan uitzonderende, zal ook de verhouding tusschen eene oneindig kleine verandering van r of van zijne projectiën x, ij, z, en de overeenkomstige verandering van V, eene eindige verhouding zijn, of, met andere woorden, de functien $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$ zijn steeds eindig. Maar zijn deze verhoudingen of functien zelve aaneengeschakeld of onafgebroken, en brengt derhalve eene oneindig kleine verandering in x, in ij, of in z ook in haar eene slechts oneindig kleine verandering te weeg?

Om dit te onderzoeken is het genoeg de functie V ten opzigte van ééne der coördinaten x, ij, z te differentieren, en de daardoor verkregene afgeleide functie te beschouwen om hare verandering na te gaan. Dit differentieren zal onvoorwaardelijk onder het integraal-teeken mogen geschieden, dewijl eenige verandering der plaats van het aangetrokken punt geene verandering der grenzen van de integraal ten gevolge kan hebben.

a. *Over het veranderen van* $\frac{\mathrm{d\,V}}{\mathrm{d\,x}}$ *wanneer, in* $\mathrm{V} = \mathrm{d} \int \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{r}}$, ds *is een element van een volumen.*

De potentiaal kan, voor dit geval, gesteld worden onder den vorm

$$V = d \int \frac{1}{r} .\; r^2 \sin \vartheta .\; d\,\vartheta .\; d\,\psi .\; d\,r . = \ldots$$

$$\ldots = d \int r \sin \vartheta .\; d\,\vartheta .\; d\,\psi .\; dr.$$

Hieruit

$$\frac{d\,V}{d\,x} = d \int \frac{d\,r}{d\,x} \sin \vartheta .\; d\,\vartheta .\; d\,\psi .\; dr;$$

maar

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d \surd \left\{ (x-a)^2 + (ij-b)^2 + (z-c)^2 \right\}}{d\,x.} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{x-a}{r} = \cos \vartheta;$$

derhalve

$$\frac{d\,V}{d\,x} = d \int \sin \vartheta .\; \cos \vartheta .\; d\,\vartheta .\; d\,\psi .\; dr.$$

En uit dezen vorm blijkt dat $\frac{d\,V}{d\,x}$ gelijkmatig met r in waarde zal veranderen, waar ook het aangetrokken punt gelegen zij. Want eene oneindig kleine verandering van r doet ook de grenzen, tusschen welke geëntigreerd moet worden, oneindig weinig veranderen, en hiermede ook de waarde der functie V, terwijl om dezelfde reden, eene oneindig kleine verandering in r geene andere dan eene oneindig kleine verandering in $\frac{d\,V}{d\,x}$ kan te weeg brengen.

b. *Over het veranderen van* $\frac{\mathrm{d\,V}}{\mathrm{d\,x}}$, *wanneer in* $\mathrm{V} = \mathrm{d} \int \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{r}}$, ds *is het element van een oppervlak.*

De potentiaal kan in dit geval, zoo als vroeger bleek, aldus voorgesteld worden

$$V = d \int \frac{1}{r} \varrho\, d\,\varrho\, d\,\vartheta\, \frac{1}{\cos \psi},$$

waaruit $$\frac{d\,V}{d\,x} = d \int \frac{d\,(\frac{1}{r})}{dx} . \frac{\varrho\, d\, \varrho\, d\, \vartheta}{\cos\, \psi},$$

maar hierbij wordt dan voorondersteld dat de oorsprong der coördinaten is in het aangetrokken punt, dat dit punt ligt in het oppervlak, en dat de overeenkomstige normaal is de abscissen-as.

Uit de boven gevondene uitdrukking voor $\frac{d\,V}{d\,x}$ is moeijelijk eenig besluit te trekken, aangaande het al of niet onafgebroken zijn dier gedeeltelijk afgeleide. Daar latere beschouwingen tot hetzelfde doel als van zelf leiden moeten, kan dit besluit worden uitgesteld tot dat die beschouwingen zijn voorafgegaan. Men zal echter *a priori* reeds eenige vooronderstellingen kunnen maken, aangaande de waarschijnlijke veranderingen van $\frac{d\,V}{d\,x}$ in sommige bijzondere gevallen.

Beschouw daartoe het gebogen oppervlak. Het punt P is voetpunt der normaal, deze zelf as der x. Het punt zal dus door *dx positief* te nemen aan de eene, door *dx negatief* te nemen aan de andere zijde van het oppervlak komen. Daardoor zullen alle elementen van het oppervlak, die P omgeven of op geringen afstand van dit punt liggen, ten opzigte van het aangetrokken punt eene geheel verschillende ligging of rigting verkrijgen; terwijl reeds dan, wanneer dit oppervlak een plat vlak was, de waarde van $\frac{d\,V}{d\,x}$ dadelijk van teeken zou veranderen. Hetzelfde zou nog plaats hebben wanneer de as der x met den normaal eenigen hoek maakte $<$ of $>$ 90^0. In beide gevallen zal de functie afgebroken (discontinu) zijn in het oppervlak.

Wordt echter de hoek, dien de normaal met de as der x maakt $= 90^0$, dan zal de verandering in x, die het punt door het oppervlak doet gaan, in de betrekkelijke ligging van alle elementen, ten opzigte van dit punt, eene geringe verandering te weeg brengen, zoodat de waarden van $\frac{d\,V}{d\,x}$ die (als men den oorsprong ergens op de normaal neemt) met $\pm\, dx$ overeenkomen, slechts oneindig weinig van elkander zullen verschillen.

Dit laatste geval is b. v. dat waarbij het punt ligt in den pool van een bolvormig oppervlak, terwijl de as der x evenwijdig loopt aan het vlak van eenigen cirkel, die P tot pool heeft.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Over de partiële differentiaal-verhoudingen der potentiaal, in zooverre zij zijn of niet kunnen zijn *uitdrukkingen van evenredige grootte der ontbondenen van de algeheele aantrekking; dat is over het overeenstemmen en over het verschillen der waarden van*

$$\frac{dV}{dx} = \int d\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}\,ds \text{ enz. en } \int \frac{d\,(a-x)}{r^3}\,ds \text{ enz.}$$

Zoo als bekend is zal de aantrekking van eenig ligchaam, van eenig stoffelijk oppervlak of van eene stoffelijke lijn op een punt in de ruimte door

$$\mu \int d\,\frac{ds}{r^2}$$

worden voorgesteld, wanneer het vermogen der aantrekkende kracht omgekeerd evenredig is aan de tweede magten der afstanden, en regtstreeks evenredig aan de massa of wel aan de digtheid, d, in het algemeen als veranderlijk gedacht. De factor μ in de gestelde uitdrukking is een standvastige factor, aanduidende de hoegrootheid der aantrekking van de eenheid der massa op de eenheid van afstand; ds is het element van het volumen, van het oppervlak of van de lengte der stoffelijke lijn, en r beteekent den afstand van eenig element tot het punt waarop de werking wordt uitgeoefend. De lijn, die het element ds, waarvan de coördinaten a, b en c zijn, met het aangetrokken punt verbindt, make met de assen der regthoekige coördinaten de hoeken α, β en γ, zoodat men hebbe

$$\cos.\ \alpha = \frac{a-x}{r},\ \cos.\ \beta = \frac{b-ij}{r},\ \cos.\ \gamma = \frac{c-z}{r};$$

zijnde namelijk x, ij, z, de regthoekige coördinaten van het aangetrokken punt.

De ontbondenen der aantrekking in de rigting der assen, zullen dan ten aanzien van grootte worden uitgedrukt door

$$\mu \int d. \frac{a-x}{r^3} ds; \ \mu \int d. \frac{b-y}{r^3} ds; \ \mu \int d. \frac{c-z}{r^3} ds,$$

moetende de integralen uitgestrekt worden over de geheele uitgebreidheid, waarvan *ds* een element is.

Zij thans voorgesteld te onderzoeken in hoeverre er overeenkomst bestaat tusschen de uitdrukkingen

$$\int d. \frac{a-x}{r^3} ds, \text{ enz. en de waarden van } \frac{dV}{dx} = \int d. \frac{d\frac{1}{r}}{dx} ds, \text{ enz.}$$

zoo als deze door het differentiëren van de potentiaal voortkomen.

A. *Het stoffelijk ligchaam, zoodat het differentiaal-element* ds, *in de integralen, is het element van een volumen.*

Boven (bladz. 14) werd reeds besloten dat, in dit geval, $\frac{dV}{dx}$ altijd eene aaneengeschakelde functie is, die nergens oneindig wordt, en altijd eene bepaalde waarde zal moeten hebben, als zijnde de afgeleide der steeds eindige en onafgebrokene functie V, wanneer namelijk *d* wordt beschouwd als eene eindige functie der coördinaten van de punten der massa.

Bij het eerste inzien schijnt het, dat de uitdrukking $\int d. \frac{a-x}{r^3} ds$ niet altijd door eene bepaalde waarde kan voorgesteld worden; — dewijl, wanneer het punt in de massa mogt liggen, en daardoor *r* oneindig klein kan worden, sommige elementen der integraal eene oneindige waarde schijnen te zullen moeten verkrijgen, hoe naauw ook de grenzen zijn binnen welke geïntegreerd, dat is binnen welke de som der elementen genomen worde.

Stelt men hierin echter de waarden, boven (bladz. 7) gevonden, te weten

$$ds = r^2 \sin. \vartheta \, d \vartheta \, d \psi \, dr; \ x - a = \pm r \cos. \vartheta,$$

dan wordt die uitdrukking

$$\iiint d. \cos. \vartheta \sin. \vartheta \, d \vartheta \, d \psi \, dr,$$

en deze is, even als $\frac{dV}{dx}$, altijd eindig en onafgebroken.

B. *De stoffelijke lijn, zoodat in de uitdrukkingen* $\int \mathrm{d}.\ \frac{\mathrm{a-x}}{\mathrm{r}^3}\ \mathrm{ds}.$ en $\frac{\mathrm{d\,V}}{\mathrm{d\,x}} = \int \mathrm{d}.\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)}{\mathrm{d\,x}}\ \mathrm{ds}$ *het differentiaal-element* ds *is dat eener kromme lijn.*

Beide functiën hebben voortdurend bepaalde en aaneengeschakelde waarden, zoo lang het aangetrokken punt op eindigen afstand van de kromme is gelegen. De eerste heeft eene bepaalde waarde, omdat er onder het $\int$ teeken geen elementen voorkomen, die oneindig groot worden binnen de grenzen, de tweede omdat zij de afgeleide is van de potentiaal, die ook eindig en aaneengeschakeld is, zoo lang het punt ligt buiten de kromme. De eerste heeft in dat geval aaneengeschakelde waarden; wordt zij toch gesteld onder de gedaante

$$\int d.\ cos.\ \vartheta\ \frac{ds}{r^2} = \int d.\ cos.\ \vartheta\ \frac{\sqrt{\left\{ dr^2 + r^2\ sin.^2\ \vartheta\ d\,\psi^2 + r^2\ d\,\vartheta^2 \right\}}}{r^2} \ldots$$

$$\ldots\ldots = \int d.\ cos.\ \vartheta\ \frac{1}{r} \sqrt{\left\{ \frac{dr^2}{r^2} + sin.^2\ \vartheta\ d\,\psi^2 + d\,\vartheta^2 \right\}}$$

dan blijkt genoegzaam, dat voor eene oneindig kleine verandering in r, deze functie slechts eene oneindig kleine verandering ondergaan zal. De tweede is ook aaneengeschakeld, omdat zij, na het differentiëren onder het integraal-teeken, $= \int d\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\ ds$ wordende, volkomen dezelfde waarde als de eerste verkrijgt.

Maar ligt het punt in de kromme, dan vervalt alle vergelijking, wegens het *oneindig groot* worden van V, voor de onmiddelijk aan het punt grenzende elementen. (Zie bladz. 10)

C. *Het stoffelijk oppervlak, zoodat in de uitdrukkingen* $\int \mathrm{d}\ \frac{\mathrm{a-x}}{\mathrm{r}^3}\ \mathrm{ds}$, *enz. en* $\mathrm{d\,V} = \int \mathrm{d}.\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)}{\mathrm{d\,x}}\ \mathrm{ds}$, *enz. het differentiaal-element* ds, *zij een element van een oppervlak.*

Om dezelfde redenen, als die zoo even ten aanzien der stoffelijke lijn zijn gegeven, mag men altijd de eerste uitdrukking gelijk stellen aan de tweede, zoo lang het aangetrokken punt ligt op eindigen afstand van het oppervlak.

Maar zoodra het punt komt of gedacht wordt in het oppervlak, stemmen beide uitdrukkingen niet meer overeen. Want $\frac{dV}{dx}$ kan als eerste afgeleide der functie V, die ook hier (zie bladz. 10) steeds eindig en onafgebroken is, door eene bepaalde waarde worden voorgesteld; maar het integreren van $d.\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$ kan, voor een gedeelte, zijn het nemen der som van eenige termen of elementen die, algemeen genomen, oneindig worden, en alleenlijk eindige waarden kunnen verkrijgen, wanneer $x-a$ een oneindig klein verschil is, van eene orde, gelijk aan of hooger dan die van r^3.

De eerste functie kan derhalve *altijd* door eene bepaalde waarde worden voorgesteld; de tweede *niet altijd;* beide stemmen dan ook niet zonder uitzondering overeen, en kunnen daarom in het algemeen niet gelijk gesteld worden.

Het bijzonder geval waarin $\int d\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$ *wel* eene bepaalde waarde kan verkrijgen, heeft dan plaats wanneer de as der x, waarop het aangetrokken punt is gelegen, is eene normaal van het oppervlak. In dat geval zal, wanneer het punt ligt in het oppervlak, en wanneer de kromming van dit laatste, daar ter plaatse, eindig is, $(a-x)$ voor onmiddelijk omgrenzende elementen nabij *nul* zijn, of oneindig weinig van *nul* verschillen, en dus van hoogere orde zijn dan r^3.

Meer opzettelijk en meer van nabij behoort echter de integraal $\int d.\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$ onderzocht te worden, om tot eene meer volledige vergelijking van de waarde dezer functie met die van $\frac{dV}{dx}$ te geraken. (1)

(1) Dit onderzoek van $\int d.\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$, is door GAUSS in het werk gesteld. (*Resultate*, *enz.* pag. 22—27.) Het is, in de hoofdtrekken, hier ter plaatse wel gevolgd, maar breeder ontwikkeld. De uitkomsten toch van dat onderzoek zijn van het grootste gewigt. Zij leveren den grond, waarop GAUSS de bepaling vestigde van de uitdrukking voor de veranderlijke digtheid die eenige aantrekkende stof, verdeeld als eene laag over een oppervlak, behoort te hebben, opdat de werking van dit stoffelijk oppervlak op een daar buiten gelegen punt dezelfde zij, als die welke op dit punt wordt uitgeoefend door eenige massa binnen het oppervlak op bekende of gegevene wijze uitgebreid zijnde. De uitdrukking voor die digtheid, — met welker bepaling in meer algemeene gevallen, de kennis van de onderlinge werking van ligchamen, wier oppervlakten met electriciteit bedekt zijn, gelijken tred zal houden — op grond van genoemd onderzoek ge-

Bij dit onderzoek worden deze onderstellingen aangenomen:

1°. dat het oppervlak overal eene eindige kromming heeft;

2°. dat de digtheid eene *eindige* functie is der coördinaten van het oppervlak.

Uit een punt P, buiten het oppervlak gelegen, worde eene normaal op dit oppervlak neêrgelaten; haar voetpunt O zij oorsprong, zij zelve as der x. Op deze as worde de plaats van het punt P, (als aangetrokken punt) veranderlijk gedacht, even alsof het bewogen werde, doch inzonderheid worde de waarde van $\int d.\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$ beschouwd voor deze drie stellingen of plaatsen van het punt P,

a. Oneindig digt bij het oppervlak, derhalve zeer nabij O zoodat, ε oneindig klein zijnde, $x = + \varepsilon$ zij.

b. In het punt O, zoodat $x = 0$ zij.

c. Oneindig digt bij O, aan de andere zijde van het oppervlak, zoodat $x = - \varepsilon$ zij.

In den eersten stand is het punt nog aan dezelfde zijde van het oppervlak, alwaar het oorspronkelijk was gelegen. In den derden stand ligt het aan de andere zijde. De tweede plaats is in het oppervlak. Klaarblijkelijk zal door de aangenomene bijzondere rigting van de abscissen-as, laatstgenoemd geval het bovengemelde zijn, waarvoor $\int d.\ \frac{a-x}{r^3}\ ds$ steeds eene bepaalde waarde kan verkrijgen.

Men zal (zie boven, bladz. 9) $ds = \frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{cos.\ \psi}$ kunnen stellen, indien ϱ is de voerstraal der projectie van eenig element van het oppervlak op het vlak der yz, (dat raakvlak is in O) en ψ de hoek, dien de normaal van eenig element maakt met de as der x. Daarbij is dan $\varrho = \sqrt{\{b^2 + c^2\}}$, dewijl a, b en c de doorloopende coördinaten zijn van het oppervlak. En omdat, wegens de eindige kromming in O, de factor $\frac{1}{cos.\ \psi}$ nooit oneindig kan worden binnen de grenzen tusschen welke de integraal hier wordt en moet worden beschouwd, zal het geoorloofd zijn dien factor met d te zamen te nemen en te stellen $\frac{d}{cos.\ \psi} = h$, zoodat h dan ook altijd eene

vonden, is volkomen overeenkomstig met die welke daarvoor door GREEN en CHASLES, uit geheel andere beginselen, zijn afgeleid. Eene vergelijking dier uitdrukkingen was gegeven in de *Proeve*, in de voorrede van dit geschrift genoemd.

eindige uitdrukking zal geven, voor de digtheid der elementen, binnen de grenzen der integraal.

De functie gaat derhalve over in:

$$\int\int h. \frac{(a-x)\ \varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{r^3}.$$

De limieten der integralen zijn:

1°. voor ϑ, 0 en 2π; want ϑ is (zie boven) de hoek, dien ϱ maakt met de as der ij, en voor alle punten of elementen, op het vlak ijz geprojecteerd, zal de voerstraal ϱ den geheelen omtrek, uit O met eenigen radius beschreven, moeten doorloopen.

2°. De grenzen voor ϱ behoeven slechts eene zeer geringe uitgestrektheid te hebben, b. v. van $\varrho = \varrho'$ tot $\varrho = 0$, zijnde ϱ' zeer klein, zoo niet oneindig klein.

Immers voor elke eindige waarde van ϱ zal $\int d. \frac{a-x}{r^3} ds$ eene bepaalde waarde verkrijgen; want als ϱ eindig is, kan ook $r = \frac{\varrho}{cos.\ \varphi}$ (zijnde φ de hoek, dien r met zijne projectie maakt) niet oneindig klein zijn. Bovendien zal deze functie in dat geval, voor oneindig kleine veranderingen in r, overeenkomstige in waarde ondergaan, zoodat, wanneer er discontinuiteit mogt bestaan, (en dit wordt hier onderzocht) deze slechts kan voortkomen uit hetgeen betrekking heeft tot elementen, voor welke r, en dan ook ϱ, zeer klein is.

De functie is diensvolgens, meer bepaald,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho'} \frac{h\ (a-x)\ \varrho\, d\varrho}{r^3}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{\varrho'} \frac{h\ (a-x)\ \varrho\, d\varrho}{r^3}\right\} d\vartheta.$$

De integraal onder het integraal-teeken, dat is de integraal ten opzigte van ϱ worde nu beschouwd voor de drie boven genoemde gevallen van plaatsing van het punt P. Stel daartoe tot bekorting dat men hebbe

$$\int_0^{\varrho'} \frac{a-\varepsilon}{r^3}\ \varrho\, d\varrho = Q^{(1)};\ \int_0^{\varrho'} \frac{a}{r^3}\ \varrho\, d\varrho = Q^{(0)};\ \int_0^{\varrho'} \frac{a+\varepsilon}{r^3}\ \varrho\, d\varrho = Q^{(2)}$$

zijnde dan Q de vorm of de uitdrukking, door welke de waarde der integraal in het algemeen wordt voorgesteld. Deze functie Q behoort voor het beter kunnen bereiken van het doel des onderzoeks, in andere functiën ontbonden te worden.

Daartoe differentiëre men de uitdrukking $\frac{h\,(a-x)}{r}$ ten opzigte van alle daarin voorkomende veranderlijke grootheden, mits lettende op de vergelijking

$$r = \sqrt{\{(a-x)^2 + \varrho^2\}},$$

dan komt

$$d.\, \frac{h\,(a-x)}{r} = \frac{\sqrt{(r^2-\varrho^2)}}{r}\, d\,h + h\,\frac{\varrho^2}{r^3}\, d\,a - \frac{h\sqrt{(r^2-\varrho^2)}}{r^3}\,\varrho\, d\,\varrho,$$

weshalve

$$Q = \int_0^{\varrho'} \frac{h\,(a-x)}{r^3}\,\varrho\, d\,\varrho = \int_0^{\varrho'} \frac{d\,h}{d\,\varrho}.\ \frac{a-x}{r}\, d\,\varrho + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho}.\ \frac{h\,\varrho^2}{r^3}\, d\,\varrho - \frac{h'\,(a'-x)}{r'} + \textit{constante}$$

waarin $\sqrt{(r^2-\varrho^2)}$ wederom door $(a-x)$ is vervangen, en h', a' en r' de waarden zijn van h, a en r voor $\varrho = \varrho'$. De *constante* is de waarde van $\frac{h\,(a-x)}{r}$ voor $\varrho = 0$. Zij zal, voor $x = 0$, ook $= 0$ zijn; want $\frac{a}{r}$ heeft tot grenswaarde 0, wanneer ϱ tot in het oneindige afneemt. Immers $a = \varrho\ tang.\,\varphi$, als φ, even als boven, de hoek is dien r met ϱ maakt. Naarmate nu ϱ tot *nul* nadert, wordt r evenwijdig met ϱ; want voor de oneindig nabij O gelegene elementen zal r in het raakvlak, dat hier tevens vlak der yz is, vallen; of, met andere woorden, a zal reeds *nul* zijn voor nog $\varrho = 0$ is. Derhalve is $\frac{a}{\varrho} = 0$ als $\varrho = 0$ is; maar dan is ook $\frac{a}{r} = 0$ voor $\varrho = 0$, want $\frac{\varrho}{r} = cos.\,\varphi$ heeft bij afnemende waarde van ϱ de eenheid tot limiet.

Voor $x = \pm\,\varepsilon$ daarentegen wordt die waarde van $\frac{h\,(a-x)}{r} = \mp\, d^{(0)}$, indien namelijk $d^{(0)}$ de digtheid is in het punt dat als oorsprong is aangenomen. Want is $\varrho = 0$, zonder dat $x = 0$ is, dan wordt $a = 0$, omdat alsdan het element, welks projectie op yz, op eenen afstand ϱ van den oorsprong lag, in den oorsprong valt; dien ten gevolge zal de normaal in dit element gerigt zijn langs de as der x, en daarom $\psi = 0$; maar dan is $h = \frac{d^{(0)}}{cos.\ \psi} = d^{(0)}$, en uit $r = \sqrt{\{(a-x)^2 + \varrho^2\}}$ volgt $x = \pm\, r$ als $\varrho = 0$ en $a = 0$. Door substitutie dezer waarden zal men voor $\frac{h\,(a-x)}{r}$ verkrijgen $\mp\, d^{(0)}$.

Er blijft nog over te onderzoeken welke de veranderingen zullen zijn der drie andere termen, waaruit Q bestaat indien de waarde van x, eerst *nul*, overgaat in eene oneindig kleine grootheid $\pm\, \varepsilon$.

Men stelle vooreerst

$$\int_0^{\varrho'} \frac{dh}{dr} \cdot \frac{a-x}{r}\, d\varrho = \int_0^{\delta} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a-x}{r}\, d\varrho + \int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a-x}{r}\, d\varrho,$$

waarin de verhouding $\frac{dh}{d\varrho}$ steeds eindig verondersteld wordt.

De eerste term $\int_0^{\delta} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a-x}{r}\, d\varrho$ zal, zoo lang δ oneindig klein blijft, zelf oneindig klein blijven. Derhalve zal deze term slechts eene oneindig kleine verandering ondergaan, als x eerst $= 0$, en daarna $= \pm\, \varepsilon$ genomen wordt.

De tweede term

$$\int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a-x}{r}\, d\varrho,$$

welke, voor $x = 0$, zou zijn

$$\int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a\, d\varrho}{\sqrt{(a^2 + \varrho^2)}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gaat nu over in:

$$\int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{d\varrho} \cdot \frac{a \mp \varepsilon}{\sqrt{\left\{(a \mp \varepsilon)^2 + \varrho^2\right\}}}\, d\varrho. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Beschouwt men nu deze integralen, welker bovenste grenzen ϱ' reeds zeer klein zijn, als sommen van een niet groot maar zelfde aantal van termen, dan zullen van beide de integralen de overeenkomstige termen alleenlijk verschillen door den factor van gebroken vorm. Voor den eersten en voor den laatsten term van de tweede integraal, zullen deze factoren zijn

$$\frac{a \mp \varepsilon}{\sqrt{\left\{(a \mp \varepsilon)^2 + \varrho'^2\right\}}} \text{ en } \frac{a \mp \varepsilon}{\sqrt{\left\{(a \mp \varepsilon)^2 + \delta^2\right\}}}.$$

Is nu ε oneindig klein, dan zullen de noemers oneindig weinig verschillen van $\sqrt{(a^2 + \varrho'^2)}$ en van $\sqrt{(a^2 + \delta^2)}$, en aangezien dan b. v.

$$\frac{a \mp \varepsilon}{\sqrt{\left\{(a \mp \varepsilon)^2 + \varrho'^2\right\}}} = \text{nabij } \frac{a \mp \varepsilon}{\sqrt{(a^2 + \varrho'^2)}} = \text{nabij } \frac{a}{\sqrt{(a^2 + \varrho'^2)}} \mp \frac{\varepsilon}{\sqrt{(a^2 + \varrho'^2)}}$$

is, zal het onderscheid tusschen den eersten term der eerste en den eersten term der tweede integraal $= \frac{\mp \varepsilon}{\sqrt{(a^2 + \varrho'^2)}}$ zijn. En vermits ϱ', alhoewel zeer klein, eindig kan zijn ten opzigte van ε, kan men ook dit onderscheid tusschen de twee eerste termen of elementen der integraal als oneindig klein beschouwen. Eveneens zal de verandering, welke de laatste term der eerste integraal zal hebben ondergaan om te kunnen zijn laatste term van de tweede integraal, dat is het onderscheid tusschen de twee laatste termen of elementen van de beide integralen, uitgedrukt kunnen worden door

$$\frac{\pm \varepsilon}{\sqrt{(a^2 + \delta^2)}},$$

en dit onderscheid is mede oneindig klein, zoo slechts δ veel minder klein is dan ε; derhalve zoo de orde of graad van kleinheid van δ lager is dan die van ε. Voor alle termen, tusschen de eerste en laatste termen, dat is voor alle de overeenkomstige elementen van beide de integralen moet hetzelfde besloten worden. En vermits het aantal dezer elementen, wegens het klein zijn der limieten van de integralen, gering of althans eindig is, zal de som van dit bepaald aantal oneindig kleine verschillen zelve oneindig klein zijn. En hiermede is bewezen dat, op eene oneindig kleine grootheid na, de waarde der eerste integraal onveranderd blijft, als x van $x = 0$ wordt $x = \pm \varepsilon$.

Wat, *in de tweede plaats*, betreft den tweeden term der uitdrukking voor de algemeene functie Q verkregen, te weten,

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{h\,\varrho^2}{\varrho^3}\, d\,\varrho,$$

opdat ten aanzien van dezen een besluit kunne worden gemaakt, moet gelet worden op de voorwaarde, bij het begin van dit onderzoek vooruit gesteld (zie boven bladz. 20), te weten, dat het oppervlak overal eene eindige kromming hebbe; derhalve moet hier gelet worden op de kromming des oppervlaks rondom het punt O, want met deze kromming staat $\frac{d\,a}{d\,\varrho}$ in verband. De kromming moet eindig zijn in elke doorsnede des oppervlaks met een plat vlak, gaande door de normaal of as van x. Klaarblijkelijk behoeft dit slechts beschouwd te worden ten aanzien van het punt O; want het is immers slechts het kleine gedeelte des oppervlaks rondom O, voor hetwelk de grenzen van ϱ zijn ϱ' en o, dat hier in aanmerking kan komen. Voor zoodanig klein gedeelte dan kan a als de *sinus versus* van een klein boogje des kromte-cirkels van O aangenomen worden, en ϱ als gelijk aan de *sinus;* maar op eene oneindig kleine grootheid na is ook ϱ gelijk aan de koorde van zoodanig boogje, zoodat, naar de bekende eigenschap van den cirkel, de middellijn van den kromte-cirkel voor het punt O, gelijk $\frac{\varrho^2}{a}$ zal wezen. Derhalve is de kromtestraal evenredig aan $\frac{\varrho^2}{a}$; daarom de kromming evenredig aan $\frac{a}{\varrho^2}$, en deze moet eene eindige grootheid voor het punt zijn, en tevens aaneengeschakeld over de geheele uitgestrektheid (ofschoon deze dan ook gering zij) van de integraal. Stel deze eindige waarde $= \mathrm{a}$,

of

$$a = \mathrm{a}\,\varrho^2,$$

dan is

$$d a = 2\,\mathrm{a}\,\varrho\,d\varrho + \varrho^2\,d\mathrm{a},$$

en daarom

$$\frac{d a}{d\varrho} = 2\,\mathrm{a}\,\varrho + \frac{d\mathrm{a}}{d\varrho}.\,\varrho^2;$$

zoodat de gestelde integraal vervangen wordt door de som van twee andere, namelijk

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d a}{d\varrho}.\,\frac{h\varrho^2}{r^3}\,d\varrho = 2\int_0^{\varrho'} \frac{\mathrm{a}\,\varrho^3\,h}{r^3}\,d\varrho + \int_0^{\varrho'} \frac{d\mathrm{a}}{d\varrho}.\,\frac{\varrho^4\,h}{r^3}\,d\varrho.$$

En op deze beide integralen nu toepassende dezelfde wijze van beschouwen, naar welke de twee, waarin de eerste term der uitdrukking voor Q verdeeld werd, boven zijn behandeld, zal ook het besluit hier zijn, dat de waarde van

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d a}{d\varrho}.\,\frac{h\varrho^2}{r^3}\,d\varrho$$

slechts oneindig weinig verandert, wanneer het aangetrokken punt, uit het punt O in het oppervlak, oneindig weinig, aan deze of aan gene zijde des oppervlaks, langs de as van x verplaatst wordt, zoodat x, eerst $= 0$, verandert in $+\ \varepsilon$ of in $-\ \varepsilon$.

Aangaande den derden term in de uitdrukking voor Q, namelijk

$$\frac{h'\ (a' - x)}{r}$$

van dezen zal de waarde ook blijkbaar slechts oneindig weinig kunnen veranderen, wanneer x van 0 wordt $+\ \varepsilon$ of $-\ \varepsilon$.

Al het voorgaande dan zamennemende, zal men thans mogen besluiten dat, zoo men de som der integralen, uitmakende de waarde of de uitdrukking voor Q, in de drie boven gestelde gevallen, noemt

$$B + \beta,\ B,\ B + \gamma,$$

men zal moeten hebben

$$Q^{(1)} = B + \beta - d^{(0)};\ Q^{(0)} = B;\ Q^{(2)} = B + \gamma + d^{(0)}.$$

Daar nu bewezen is dat β en γ beide oneindig klein zijn, zullen $Q^{(1)} + d^{(0)}$, $Q^{(0)}$, $Q^{(2)} - d^{(0)}$ eveneens slechts oneindig weinig verschillen, maar zij zullen nu ook zijn de uitdrukkingen der waarden van Q in de drie voorname gevallen, tot welke het onderzoek betrekking heeft. Substituerende dan deze in de vroeger gestelde integraal-formule

$$\int_0^{2\pi} Q\, d\vartheta,$$

dan komen deze drie uitdrukkingen

$$\int_0^{2\pi} (Q^{(1)} + d^0)\, d\vartheta,\ \int_0^{2\pi} Q^{(0)}\, d\vartheta,\ \int_0^{2\pi} (Q^{(2)} - d^{(0)})\, d\vartheta.$$

Noemt men $X^{(1)}$, $X^{(0)}$, $X^{(2)}$, de waarden der integralen

$$\int_0^{2\pi} Q^{(1)}\, d\vartheta,\ \int_0^{2\pi} Q^{(0)}\, d\vartheta,\ \int_0^{2\pi} Q^{(2)}\, d\vartheta,$$

dan zijn de totale waarden van

$$\int_0^{2\pi} Q\, d\vartheta,$$

in de drie beschouwde gevallen:

$$X^{(1)} + 2\pi\, d^{(0)},\ X^{(0)},\ X^{(2)} - 2\pi\, d^{(0)}.$$

Tusschen deze bestaat evenzoo een oneindig klein verschil, als tusschen $Q^{(1)}$, $Q^{(0)}$, $Q^{(2)}$, waaruit zij zijn voortgekomen; daarom zal men mogen stellen

$$X^{(1)} + 2\pi\, d^{(0)} = X^{(0)} = X^{(2)} - 2\pi\, d^{(0)};$$

gevolgelijk is

$$X^{(1)} = X^{(0)} - 2\pi\, d^{(0)} \text{ en } X^{(2)} = X^{(0)} - 2\pi\, d^{(0)}.$$

Deze uitkomst is eeniglijk gegrond op de vooronderstelling dat ϵ is oneindig klein of dat ϵ tot nul nadert, en men kan dan stellen dat, wanneer x van positief nul wordt, X plotselijk $2\pi\, d^{(0)}$ grooter, en als x van negatief nul wordt, X eensklaps $2\pi\, d^{(0)}$ kleiner wordt. Er heeft derhalve discontinuiteit plaats in de functie wanneer het punt door het oppervlak gaat, en de waarden van X, welke als het ware aan de gaping grenzen, of aan beide zijden van de gaping zijn gelegen, hebben een verschil $4\pi d^{(0)}$.

Ofschoon de waarden van $\int d \frac{b - ij}{r^3} ds$ en $\int \frac{c - z}{r^3} ds$, als $x = 0$, $ij = 0$ en $z = 0$ is, bij de aangenomene ligging der assen, voor geen eigenlijk integreren vatbaar zijn, omdat $b - ij$ en $c - z$ niet met x, ij en z nul worden, wanneer de waarden van r oneindig klein zijn, zoo als dit bij $\int d \frac{a - x}{r^3} ds$ het geval was (zie bladz. 19) moet echter worden nagegaan of de waarden dezer uitdrukkingen als bij een sprong, veranderen bij den overgang van het punt P van de eene zijde des oppervlaks naar de andere. Dit onderzoek toch is noodig om volledig te kunnen oordeelen over de waarden der partiële differentiaal-verhoudingen van de functie V, voor het geval, wanneer het punt P ligt in het oppervlak.

Omdat het punt P ligt op den as der x zijn ij en z gelijk nul; daarom zijn

$$\int d \frac{b - ij}{r^3} ds = \int d \frac{b\, ds}{r^3}$$

en

$$\int d \frac{c - z}{r^3} ds = \int d \frac{c\, ds}{r^3}.$$

De projectie van het element ds op het vlak der $ij\,z$ is $= db\,dc$; derhalve $ds = \frac{db\, dc}{cos.\ \psi}$.

Zoo als boven mag dan ook hier gesteld worden

$$\int d \frac{b - ij}{r^3} ds = \int h. \frac{b\, db\, dc}{r^3}$$

en

$$\int d \frac{c - z}{r^3} ds = \int h. \frac{c\, db\, dc}{r^3};$$

en vermits de uitdrukking voor r nu zal wezen

$$r = \sqrt{\{(a - x)^2 + b^2 + c^2\}},$$

zal men hebben

$$\frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{\{(a - x)^2 + b^2 + c^2\}}}.$$

Om nu, in de eerste plaats, of slechts alleenlijk te onderzoeken, wat er zij van de integraal

$$\int d.\,\frac{b - ij}{r^3}\,ds = \int \frac{h.\,b\,db\,dc}{r^3},$$

dat is, wat er geoordeeld moet worden over de ontbondene Y, differentiere men deze uitdrukking ten opzigte van b en beschouwe daarbij c als standvastig. Men verkrijgt dan

$$\frac{d.\,\frac{h}{r}}{db} = -\,\frac{hb}{r^3} + \frac{1}{r}\,\frac{dh}{db} - \frac{h\,(a - x)}{r^3}.\,\frac{da}{db}.$$

De integraal dezer vergelijking zal, omdat vooreerst c standvastig is genomen, betrekking hebben tot b, dat is tot alle elementen, gelegen op elke lijn in het vlak der $ij\,z$, evenwijdig aan den as der ij getrokken. Indien derhalve h_2, r_2 en h_1, r_1, zijn de waarden van h en r, overeenkomende met de grenswaarden van b, dan komt:

$$\frac{h_2}{r_2} - \frac{h_1}{r_1} = -\int h\,\frac{b}{r^3}\,db + \int \frac{1}{r}\,\frac{dh}{db}\,db - \ldots.$$

$$\ldots.\, - \int \frac{h\,(a - x)}{r^3}.\,\frac{da}{db}\,db.$$

Hieruit volgt onmiddelijk

$$\int\!\!\int h.\,\frac{b\;db\;dc}{r^3}. = \int \left(\frac{h_1}{r_1} - \frac{h_2}{r_2}\right) dc + \int\!\!\int \frac{1}{r}.\,\frac{dh}{db}\,db\;dc\; -$$

$$\ldots - \int\!\!\int \frac{h\,(a - x)}{r^3}.\,\frac{da}{db}\,db\;dc,$$

welke integraal nu ook betrekking heeft tot c, zoodat de dubbele integralen moeten uitgestrekt worden van de kleinste tot de grootste waarde van c.

Maar, voor de polaire coördinaten ϱ en ϑ in het vlak $ij\,z$ is

$$db\,dc = \varrho\,d\varrho\,d\vartheta;$$

derhalve

$$\int\!\!\int \frac{h\,b\,db\,dc}{r^3} = \int \left(\frac{h_1}{r_1} - \frac{h_2}{r_2}\right) dc + \int\!\!\int \frac{\varrho}{r}.\,\frac{dh}{db}\,d\varrho\;d\vartheta\; -$$

$$\ldots - \int\!\!\int \frac{h\,(a - x)}{r^3}\,\varrho\,\frac{da}{db}\,d\varrho\,d\vartheta = \ldots.$$

$$\ldots = \int \left(\frac{h_1}{r_1} - \frac{h_2}{r_2}\right) dc + \int\!\!\int \left(\frac{\varrho}{r}.\,\frac{dh}{db} - \frac{h\,(a - x)}{r^3}\,\varrho\,\frac{da}{db}\right) d\varrho\,d\vartheta.$$

Zoo als vroeger zijn hier wederom 0 en 2π de limieten voor ϑ, en 0 en ϱ' voor ϱ, zijnde ϱ' zeer klein.

Ten opzigte van deze ontwikkelde integraal moet nu worden nagegaan, welke verandering zij ondergaat als x van 0 wordt $\pm\ \varepsilon$, indien namelijk ε oneindig klein is.

De eerste term is onafhankelijk van de waarde van x.

De tweede kan worden voorgesteld onder den vorm $\int_0^{2\pi} \mathrm{R}\, d\,\vartheta$, zoodat alleenlijk het onderzoek bepaald is tot

$$\mathrm{R} = \int_0^{\varrho'} \left\{ \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{dh}{db} - \frac{h\,(a-x)}{r^3}\,\varrho\,\frac{da}{db} \right\} d\,\varrho,$$

en deze wederom in twee deelen scheidende, komt eerst in aanmerking het eerste gedeelte; zij dit $=$ Q, dan is, gelijk vroeger, door het verdeelen der limieten ϱ' en 0, in ϱ', δ en δ, 0; zijnde δ oneindig klein,

$$\mathrm{Q} = \int_0^{\varrho'} \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{dh}{db} \cdot d\,\varrho = \int_0^{\delta} \frac{dh}{db} \cdot \frac{\varrho}{r}\, d\,\varrho + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{db} \cdot \frac{\varrho}{r}\, d\,\varrho.$$

De eerste term van het laatste lid dezer vergelijking is voor $x = 0$ en omdat $b^2 + c^2 = \varrho^2$ is,

$$\int_0^{\delta} \frac{dh}{db} \cdot \frac{\varrho\, d\,\varrho}{\sqrt{\{\varrho^2 + a^2\}}};$$

voor $x = \pm\ \varepsilon$ wordt hij

$$\int_0^{\delta} \frac{dh}{db} \cdot \frac{\varrho\, d\,\varrho}{\sqrt{\{\varrho^2 + (a \mp \varepsilon)^2\}}}.$$

Deze uitdrukkingen zijn, in de vooronderstelling dat $\frac{dh}{db}$ eindig is, geheel gelijkvormig aan die, welke boven, bij het overwegen van $\int_0^{\varrho'} \frac{dh}{dr} \cdot \frac{a-x}{r^2}\, d\,\varrho$, zijn beschouwd. Dezelfde redenering als daar mag dan ook hier worden toegepast, en zal dan moeten doen besluiten dat het eerste deel der waarde van Q slechts oneindig weinig verandert als men, in plaats van $x = 0$ te stellen, de oneindig kleine waarde $+\ \varepsilon$ of $-\ \varepsilon$ voor x aanneemt.

Gelijke redenering, en gelijk besluit gelden voor het tweede gedeelte $\int_{\delta}^{\varrho'} \frac{dh}{db} \cdot \frac{\varrho}{r}\, d\varrho$

der waarde van Q. Daarom zal dan, op eene oneindig kleine grootheid na, Q de zelfde waarde behouden, hetzij men stelt $x = 0$ of $x = \pm\ \varepsilon$.

Het tweede gedeelte van R, namelijk

$$\int_0^{\varrho'} \frac{h(a-x)\ \varrho}{r^3} \cdot \frac{d\,a}{d\,b}\ d\,\varrho = \int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,b} \cdot \frac{h\ (a-x)\ \varrho}{r^3}\ d\,\varrho$$

verandert eveneens niet dan oneindig weinig, wanneer x eene oneindig kleine verandering ondergaat, dat is wanneer x, van *nul* af, met de oneindig kleine grootheid ε vermeerdert of vermindert. Dit oordeel steunt op denzelfden grond, waarop hier boven omtrent het oneindig weinig veranderen van

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{h\,\varrho^2}{r^3}\ d\,\varrho$$

is beslist (bladz. 24 en 25). Gelijk toen als voorwaarde diende, dat de kromming, evenredig aan $\frac{a}{\varrho^2}$, eindig moest zijn, binnen de limieten ϱ' en 0 der integraal, kan hier uit een overeenkomstigen grond worden geredeneerd. Want $\frac{a}{b^2}$, evenredig aan de kromming bij P in eenige doorsnede evenwijdig aan het vlak xij, komt dan hier in de plaats van $\frac{a}{\varrho^2}$, enz. Of men heeft, daar $b = \varrho\ cos.\,\vartheta$, en derhalve, voor eenige bepaalde grootte van ϑ, $\frac{d\,\varrho}{d\,b} = sec.\,\vartheta$ is,

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{h\ (a-x)}{r^3}\ d\,\varrho = \int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{d\,\varrho}{d\,b} \cdot \frac{h\ (a-x)\ \varrho}{r^3}\ d\,\varrho = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot sec.\,\vartheta \cdot \frac{h\ (a-x)\ \varrho}{r^3}\ d\,\varrho = sec.\,\vartheta \int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{h\ (a-x)}{r^3}\ d\,\varrho,$$

en aangezien de afmeting van $h\ (a-x)\ \varrho$ althans niet grooter is dan die van $h\,\varrho^2$, zal het oordeel over de verandering van de hier beschouwde integraal geen ander kunnen zijn dan dat, waartoe ten opzigte van de integraal

$$\int_0^{\varrho'} \frac{d\,a}{d\,\varrho} \cdot \frac{h\,\varrho^2}{r^3}\ d\,\varrho$$

is besloten.

Daar dan de waarden der zamenstellende deelen van $\int\int h\ \frac{b\,\varrho\,d\,\varrho\,d\,\vartheta}{r^3}$, dat is van $\int h\ \frac{b\ db\ dc}{r^3}$ op eene oneindig kleine grootheid na niet onderscheiden zijn, hetzij

$x = 0$ hetzij $x = \pm \varepsilon$ wordt gesteld, zal ook de geheele integraal $\int h \frac{b\, db\, dc}{r^3}$ $= \mathrm{Y}$, voor die veranderingen van x, geene verandering ondergaan, of wel, hare waarde zal naar eene zelfde grenswaarde $\mathrm{Y}^{(0)}$ convergeren, de waarde zijnde, welke zij verkrijgt voor $x = 0$, mits de integraal bepaald worde, zoo als hier is geschied, namelijk dat eerst, bij het differentieren van $\frac{h}{r}$ de grootheid c in de uitdrukking van r standvastig blijve en dan voor eenige standvastige waarde van c, geïntegreerd worde tusschen die grenswaarden van b welke met de gedachte waarde van c overeenkomen.

Op gelijke wijze komt men tot een overeenkomstig besluit bij het onderzoek van $\mathrm{Z} = \int h \cdot \frac{c\, db\, dc}{r^3}$. Hare waarde zal, op eene oneindig kleine grootheid na, dezelfde blijven hetzij men $x = 0$ stelt, hetzij $x =$ de oneindig kleine grootheid $\pm \varepsilon$. Zij zal dan ook de waarde $\mathrm{Z}^{(0)}$, die zij voor $x = 0$ verkrijgt, tot grenswaarde hebben, als wederom deze waarde wordt bepaald door eene orde van integreren, gelijkvormig aan de zoo pas aangeduide, welke tot het bepalen van Y betrekking had.

Het besluit uit al het voorgaande is nu:

1°. dat $\mathrm{X} = \int h \frac{a-x}{r^3} d\varrho\, d\vartheta = \mathrm{X}^{(0)}$ voor $x = 0$,

$$= \mathrm{X}^{(0)} + 2\pi\, d^{(0)} \text{ voor } x = -\varepsilon$$

$$= \mathrm{X}^{(0)} - 2\pi\, d^{(0)} \text{ voor } x = +\varepsilon;$$

2°. dat $\mathrm{Y} = \int h. \frac{b\, db\, dc}{r^3} = \mathrm{Y}^{(0)}$ is, voor $x = 0$,

en $= \mathrm{Y}^{(0)} \mp \beta$, voor $x = \pm \varepsilon$;

3°. dat $\mathrm{Z} = \int h. \frac{c\, dc\, db}{r^3} = \mathrm{Z}^{(0)}$ is, voor $x = 0$,

en $= \mathrm{Z}^{(0)} \mp \gamma$ voor $x = \pm \varepsilon$;

als β on γ oneindig kleinen voorstellen. Maar bij de waardijen van X behoorden ook nog oneindig kleine grootheden (zie bladz. 26), en deze zijn buiten rekening gelaten, omdat zij, vermenigvuldigd met $d\,\vartheta$ enz. oneindig kleinen van de tweede orde (op welke geen acht geslagen wordt) zouden opleveren. Hetzelfde mag dan ook op de waarden van Y en Z worden toegepast, en deze zullen derhalve, zoowel voor $x = \pm \varepsilon$ als voor $x = 0$, zijn $\mathrm{Y}^{(0)}$ en $\mathrm{Z}^{(0)}$.

Uit het behandelde is nu gereedelijk op te maken, welke de uitdrukking of de waarde der potentiaal zal zijn voor punten, zeer nabij of oneindig digt bij het oppervlak gelegen. Want daar bewezen is, dat voor alle punten der ruimte welke *niet* in het oppervlak liggen, de uitdrukkingen X, Y, Z der grootte van de ontbondenen der totale aantrekking ook evenrediglijk verkregen worden door de partiële eerste differentiaal-verhoudingen van de potentiaal genomen, ten opzigte van de coördinaten van het aangetrokken punt, zoodat men zal hebben

$$X = -\mu f. \frac{dV}{dx}, \; Y = -\mu f. \frac{dV}{d\ddot{y}}, \; Z = -\mu f. \frac{dV}{dz},$$

zal het ook geoorloofd zijn in plaats van de totale differentiaal-vergelijking

$$dV = \frac{dV}{dx}\, dx + \frac{dV}{d\ddot{y}}\, d\ddot{y} + \frac{dV}{dz}\, dz,$$

te stellen

$$dV = X\, dx + Y\, d\ddot{y} + Z\, dz.$$

Indien derhalve X, Y, Z betrekking hebben tot een punt, gelegen op oneindig kleinen afstand $\pm \varepsilon$ van het oppervlak, zal men, overeenkomstig de boven verkregene uitkomsten, voor zoodanig punt hebben

$$dV = (X^{(0)} \mp 2\pi\, d^{(0)})\, dx + Y^{(0)}\, d\ddot{y} + Z^{(0)}\, dz.$$

De integraal is

$$V = C + (X^{(0)} \mp 2\pi\, d^{(0)}) + Y^{(0)}\, \ddot{y} + Z^{(0)}\, z.$$

Is $V^{(0)}$ de waarde van V voor het punt welks coördinaten zijn $x = 0$, $\ddot{y} = 0$, $z = 0$, — derhalve voor het punt O in het oppervlak, dat als oorsprong der coördinaten is aangenomen, — dan wordt de standvastige C aan deze waarde $V^{(0)}$ gelijk, en de begeerde volledige algemeene waarde der potentiaal zal dan wezen

$$V = V^{(0)} + (X^{(0)} \mp 2\pi\, d^{(0)}) + Y^{(0)}\, \ddot{y} + Z^{(0)}\, z,$$

in welke uitdrukking het bovenste teeken voor eene *positieve*, het onderste voor eene *negatieve* oneindig kleine waarde van x geldt.

Deze uitkomst is waar, zoolang de as der z, waarop het aangetrokken punt is gesteld geworden, zamenvalt met de normaal op het oppervlak uit dat punt getrokken. Bijaldien evenwel, met behoud van dezelfde coördinaten-assen, de lijn uit P naar den oorsprong O getrokken, niet valt langs de normaal, dat is, bijaldien P ligt buiten de normaal of as van x, en dat de lijn PO met de coördinaten-assen de hoeken α, β, γ maakt, dan zullen de voorgaande oneindig kleine coördinaten x, y, z vervangen moeten worden door

$$x = \xi \cos.\alpha;\ y = \xi \cos.\beta;\ z = \xi \cos.\gamma,$$

indien namelijk ξ is de zeer kleine afstand tusschen den oorsprong O en het punt P, op de lijn, welke de hoeken α, β, γ met de coördinaten-assen maakt. Voor eene dusdanige plaatsing van het punt P zal men derhalve hebben

$$V = V^{(0)} + \xi \left\{(X^{(0)} \mp 2\pi d^{(0)}) \cos.\alpha + Y^{(0)} \cos.\beta + Z^{(0)} \cos.\gamma\right\},$$

moetende het bovenste teeken genomen worden als $\varepsilon = \xi \cos.\ \alpha$ is positief, en het onderste als ε is negatief. Maar uit deze vergelijking volgt nu ook

$$\frac{V - V^0}{\xi} = X^{(0)} \cos.\alpha + Y^{(0)} \cos.\beta + Z^{(0)} \cos.\gamma \mp 2\pi d^{(0)} \cos.\ \alpha,$$

dat is ook, overgaande tot de limieten

$$\frac{dV}{d\xi} = X^{(0)} \cos.\alpha + Y^{(0)} \cos.\beta + Z^{(0)} \cos.\gamma \mp 2\pi d^{(0)} \cos.\alpha.$$

Deze vergelijking heeft nu betrekking tot het punt P van de limiet of grens van het oppervlak; zij leert dat de eerste afgeleide der potentiaal ten opzigte eener abscis ξ, gerekend langs de lijn, op welke het aangetrokken punt is geplaatst, en makende met de normaal van het punt O des oppervlaks — hetwelk als oorsprong van coördinaten is aangenomen, — eenen hoek α, eene dubbele waarde heeft zoo lang α is $< 90^0$, en wel naar gelang $d\xi$ of ξ is positief of negatief, maar dat deze twee waarden tot ééne waarde overgaan, als $\alpha = 90^0$ wordt, dat is wanneer P gelegen is op eene lijn, gaande door den oorsprong, en rakende het oppervlak.

Wanneer nu de gevolgtrekkingen, in den loop van het onderzoek tot hiertoe gemaakt zamengenomen worden, dan mag besloten worden:

1°. *dat men eene werking, door een ligchaam, door een stoffelijk oppervlak of door eene stoffelijke lijn op eenig punt, buiten dat ligchaam, dat oppervlak of die lijn uitgeoefend, en wanneer die werking naar bovengenoemde* (zie bladz. 16) *wetten geschiedt, steeds uit de potentiaal kan afleiden.*

2°. *dat eene zoodanige werking, van een* ligchaam *uitgaande, nog uit de potentiaal mag worden afgeleid, als het punt is in de massa of aan hare oppervlakte.* (zie bladz. 17)

3°. *dat eene zoodanige werking, van eene* lijn *uitgaande*, niet *met behulp van de poten-*

tiaal kan *worden gevonden*, *wanneer het punt in die lijn ligt*, *omdat de potentiaal alsdan in geene bepaalde waarde kan worden uitgedrukt.* (zie bladz. 12)

4°. *dat eene zoodanige werking*, *als zij van een* oppervlak *uitgaat*, niet *uit de potentiaal* mag *worden afgeleid*, *wanneer het punt in dat oppervlak ligt*, *omdat de ontbondenen dier werking evenwijdig aan de coördinaten-assen*, *en de overeenkomstige afgeleiden van de potentiaal*, *in het algemeen alsdan verschillende waarden hebben. Die ontbondenen toch kunnen algemeen door geene bepaalde waarde worden voorgesteld*, *terwijl die afgeleiden over het algemeen*, *als men* dx *positief neemt niet dezelfde waarde verkrijgen als wanneer men* dx *negatief neemt*, *zoodat men haar twee verschillende waarden in het oppervlak moet toekennen. Daarenboven heeft het bijzondere geval*, *waarin de ontbondenen wel door eene bepaalde waarde voorgesteld kunnen worden*, *plaats in punten van het oppervlak*, *geheel verschillende van die waarvoor die afgeleiden ééne waarde bekomen.* (zie bladz. 19 en 33).

DERDE HOOFDSTUK.

Voorbeelden ter toelichting van het algemeen verhandelde in de voorgaande Hoofdstukken.

Het zal wel niet overtollig geacht worden, zoo eenige gewigtige gevolgtrekkingen, in de voorgaande Hoofdstukken, doch voornamelijk in het tweede Hoofdstuk gemaakt, door een klein aantal van eenvoudige voorbeelden in helderder licht gesteld, en ook gestaafd worden. Inzonderheid moet dan door voorbeelden blijken, wanneer, en wanneer niet, de uitdrukkingen van de differentiaal-verhoudingen der eerste orde van de potentiaal-functie V, zullen kunnen of mogen dienen ter bepaling van de uitdrukkingen der grootte van gedeeltelijke aantrekkingen, dat is van aantrekkingen, uitgeoefend in rigtingen, evenwijdig aan de coördinaten van eenig aangetrokken punt. In het eerste geval moet ook, omgekeerd, de uitdrukking der potentiaal V uit die der gedeeltelijke aantrekkingen kunnen voortkomen, en niet onderscheiden zijn van die, welke regtstreeks kan worden verkregen, terwijl in het tweede of tegenovergesteld geval, de vergelijking der uitkomsten verschil zal moeten opleveren, indien men, naar beide wijzen van afleiden, tot eindige uitkomsten geraakt of kan geraken.

Bijaldien dan de gedeeltelijke of ontbondene aantrekkingen, door integreren opgemaakt of regtstreeks verkregen, als vroeger worden uitgedrukt door X, Y, Z, en dat werkelijk

$$X = \pm \mu f \frac{dV}{dx}, \; Y = \pm \mu f \frac{dV}{dij}, \; Z = \pm \mu f \frac{dV}{dx}$$

is, of korter ($\pm \mu f$ eenvoudigheidshalve $= 1$ stellende), indien de uitdrukkingen voor X, Y, Z, identisch zijn met die voor $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dij}$, $\frac{dV}{dz}$, dan zal ook de uitdrukking der integraal van de differentiaal-vergelijking

$$d\varphi = X\,dx + Y\,dij + Z\,dx$$

niet onderscheiden moeten zijn van de uitdrukking voor V, regtstreeks bepaald door

$$V = \int d\,\frac{ds}{r}.$$

De voorbeelden, welke hier worden bijgebragt, hebben betrekking tot de overwogene drie gevallen, te weten wanneer de werking voortkomt uit de aantrekking der elementen, *hetzij* van eene bepaalde massa, *hetzij* van een in vorm en grootte bepaald stoffelijk oppervlak, *hetzij* van eene stoffelijke lijn van bepaalde figuur en uitgestrektheid. Die voorbeelden zijn overigens eenvoudig; zelfs zijn bijzondere voorwaarden gesteld, of beperkende vooronderstellingen aangenomen, opdat de noodige rekenkundige bewerkingen eenvoudigst, dat is gemakkelijk en minst omslagtig, zouden wezen.

I.

De potentiaal van eene gelijkslachtige bolvormige massa.

Tot eerste voorbeeld diene het bepalen der uitdrukking van de grootte of waarde der potentiaal van eene gelijkslachtige massa, de gedaante hebbende van een bol, derhalve de potentiaal eens bols, uit eene stof van standvastige digtheid bestaande. Deze bepaling geschiedde eerst regtstreeks of onmiddelijk, en daarna uit de formule, welke de hoegrootheid leert der aantrekking van dit ligchaam op een stoffelijk punt of element; maar bij elke dezer wijzen moet op het voornaam onderscheid in plaats van dit punt gelet worden, te weten naar gelang het is gelegen buiten de aantrekkende massa, of dat het tot de massa behoort, of dat het ligge aan of in de grens der massa.

A. *Regtstreeksche bepaling van* V.

a. Het punt voor of ten opzigte van hetwelk de potentiaal gevonden moet worden, ligge buiten den bol, op een afstand a van het middelpunt.

De lijn α als as der abscissen aannemende, denke men den bol, op een positieven of negatieven afstand x van het middelpunt, gesneden door een plat vlak, loodregt op de lijn α gerigt. De doorsnijding is een cirkel, hebbende $ij = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ tot straal, indien namelijk a is de radius van den bol. Het is gemakkelijk de uitdrukking te vinden voor de potentiaal van het vlak van dezen cirkel ten opzigte van het gestelde punt, dat nu op de as van den cirkel ligt. Wordt deze uitdrukking met dx vermenigvuldigd, dan heeft men de differentiaal der potentiaal van den bol, en daaruit de potentiaal zelve. Laat evenwel eerder gerekend worden naar de vroeger gebezigde formule

$$\mathrm{V} = d \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho^2 \, sin. \, \vartheta . \, d\vartheta . \, d\psi . \, d\varrho}{r},$$

in welke ϱ beteekent den voerstraal van eenig element van den bol (de oorsprong der polaire coördinaten in het middelpunt van den bol stellende), r den afstand van dat element tot het aangetrokken punt, ϑ den hoek tusschen ϱ en de lijn α, en ψ den standhoek van het vlak (ϱ, α) en dat van eenigen grooten cirkel, gaande door α. De grenzen der integraal zijn 0 en 2π voor ψ, 0 en π voor ϑ, en 0 en a voor ϱ.

Terstond is
$$\mathrm{V} = 2\pi d \int\!\!\int \frac{\varrho^2 \, d\varrho . \, sin. \, \vartheta . \, d\vartheta}{r};$$

maar $r = \sqrt{\{\varrho^2 + \alpha^2 - 2\alpha\varrho . \, cos. \, \vartheta\}}$; derhalve is de onbepaalde integraal ten opzigte van ϑ,

$$\mathrm{V} = 2\pi d \int \frac{\varrho^2 \, d\varrho}{\alpha\varrho} \sqrt{\{\varrho^2 + \alpha^2 - 2\alpha\varrho \, cos. \, \vartheta\}},$$

dat is, voor de limieten π en 0 van den hoek ϑ,

$$\mathrm{V} = \frac{2\pi d}{\alpha} \int \{\alpha + \varrho - (\alpha - \varrho)\} \, \varrho \, d\varrho = \frac{4\pi d}{\alpha} \int \varrho^2 \, d\varrho,$$

en dan eindelijk, a en 0 de grenzen van ϱ zijnde,

$$\mathrm{V} = \tfrac{4}{3}\pi d . \, \frac{a^3}{\alpha} = \frac{\mathrm{M}}{\alpha}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

indien M beteekent de massa van den bol.

b. Ligt het punt in de massa, dan dient nog dezelfde differentiaal-vergelijking, maar de integraal moet uit twee deelen bestaan; want de voorgaande berekening beruste op de vooronderstelling $\varrho < \alpha$, terwijl dit in het onderwerpelijk geval alleenlijk waar is voor de punten der massa, behoorende tot den bol, welke α tot straal heeft; voor de overige elementen is $\varrho > \alpha$. Voor het eerste gedeelte der massa, zal het overeenkomstig gedeelte V_1 van V zijn, als boven,

$$V_1 = \frac{2\pi d}{\alpha}\int \{\alpha + \varrho - (\alpha - \varrho).\}\, \varrho\, d\varrho = \frac{4\pi d}{\alpha}\int \varrho^2\, d\varrho;$$

maar voor het tweede gedeelte van V zal men moeten hebben:

$$V_2 = \frac{2\pi d}{\alpha}\int \{\alpha + \varrho - (\varrho - \alpha)\}\, \varrho\, d\varrho = 4\pi d \int \varrho\, d\varrho.$$

Weshalve, op de limieten lettende,

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 &= \frac{4\pi d}{\alpha}\int_0^\alpha \varrho^2\, d\varrho + 4\pi d \int_\alpha^a \varrho\, d\varrho \\ &= \tfrac{4}{3}\pi d\, \alpha^2 + 2\pi d\, (a^2 - \alpha^2) \\ &= 2\pi d\, a^2 - \tfrac{2}{3}\pi d\, \alpha^2 = \tfrac{2}{3}\pi d\, (3a^2 - \alpha^2), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2) \end{aligned}$$

of ook

$$V = \left\{3 - \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\right\} . \frac{M}{2a}.$$

c. Is het punt in de oppervlakte van den bol gelegen, dan geldt altijd nog dezelfde differentiaal-vergelijking, en haar op nieuw integrerende, mits $\alpha = a$ stellende, komt er

$$V = \tfrac{4}{3}\pi d.\, a^2 = \frac{M}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Zoowel de verkregene formule (2) als (1) geeft dezelfde uitkomst, als $\alpha = a$ wordt gesteld.

B. *Bepaling van* V *door de uitdrukking der groote van de aantrekking.*

a. Men weet dat de totale aantrekking van alle de stofdeelen eens gelijkslachtigen bols op een punt, buiten den bol, op een afstand α van het middelpunt gelegen, dezelfde is als die der geheele massa, zoo deze, als een enkel stoffelijk punt, in het middelpunt geplaatst ware, en altijd, hetgeen naauwelijks behoeft herinnerd te worden, in de vooronderstelling dat de wet der aantrekking is die der omgekeerde vierkante reden van den afstand. Nemende derhalve het vlak van eenen grooten cirkel gaande door de lijn α, als vlak der coördinaten x, y, en de lijn α zelve als lijn der abscissen, dan is hier $Y = 0$, $Z = 0$, en

$$X = -\frac{M}{\alpha^2} = -\tfrac{4}{3}\pi d.\frac{a^3}{\alpha^2}.$$

Men zal daarom moeten hebben:

$$\frac{dV}{d\alpha} = -M.\frac{1}{\alpha^2};$$

en dan

$$V = M\int\frac{-d\alpha}{\alpha^2} + C = \frac{M}{\alpha} + C = \frac{M}{\alpha},$$

overeenkomstig de boven verkregene formule (1), dewijl C is *nul*, omdat de potentiaal eener massa, ten opzigte van een oneindig ver verwijderd punt *nul* is.

b. Voor de aantrekking der stof van een gelijkslachtigen bol op een punt van zijne massa zelve, heeft men, bij eene zelfde ligging der coördinaten-assen als boven, de uitdrukking

$$X = -\tfrac{4}{3}\pi d\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = -\tfrac{4}{3}\pi d.\alpha;$$

gevolgelijk

$$\frac{dV}{d\alpha} = -\tfrac{4}{3}\pi d.\alpha,$$

$$V = -\tfrac{4}{3}\pi d\int\alpha d\alpha + C = -\tfrac{2}{3}\pi d.\alpha^2 + C.$$

Om C te bepalen denke men het aangetrokken punt in het centrum, dan is klaarblijkelijk voor eenige spherische laag van den bol,

$$V' = d\frac{4\pi\varrho^2 d\varrho}{\varrho} = 4\pi d.\varrho d\varrho,$$

indien namelijk ϱ is de straal van deze laag en $d\varrho$ hare dikte. Eigenlijk is dan deze uitdrukking de differentiaal der potentiaal ten opzigte van het middelpunt; en uitgestrekt over alle lagen, van het oppervlak tot aan het centrum, wordt deze potentiaal $= 2\pi d.a^2$, zoodat

$$V = -\tfrac{2}{3}\pi d.\alpha^2 + 2\pi d.a^2 = \tfrac{2}{3}\pi d(3a^2 - \alpha^2)$$

zal zijn, gelijk boven (formule (2)) gevonden is.

c. Een punt in het oppervlak wordt door den geheelen bol aangetrokken naar dezelfde wet als eenig punt, buiten de massa gelegen; daarom dan, voor dit geval

$$X = - \tfrac{4}{3}\pi\, d.\, \frac{a^3}{a^2} = - \tfrac{4}{3}\pi\, d.\, a.$$

Deze uitdrukking standvastig zijnde, uithoofde der standvastige grootte van α, geeft geen middel ter bepaling van V. Wel is waar dat men eerst α als niet $= a$ zou kunnen aannemen, waardoor zou komen

$$V = - \tfrac{4}{3}\,\pi\, d.\, a\,\alpha + C,$$

maar nu wederom $\alpha = a$ stellende, blijft dezelfde onbepaaldheid voor het vinden der waarde van C. Wil men α vooreerst nog niet $= a$ stellen, dan moet deze grootheid ook in de uitdrukking van X onderscheiden van a blijven. En de zoo pas genoemde omstandigheid, dat X door dezelfde formule wordt bepaald, en eene onafgebrokene functie is, het punt moge buiten de massa of in het oppervlak zijn gelegen, veroorlooft dusdanige vooronderstelling. Maar dan komt zij neder op eene plaatsing van het punt buiten de oppervlakte, b. v. zeer nabij de oppervlakte, zoo dat $\alpha = a + \varepsilon$ (en ε oneindig klein) zij, en daarna op het aan *nul* gelijkstellen van ε. Naar dezen gang van werken wordt

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\, d.\, \frac{a + \varepsilon}{a^3},$$

weshalve, voor $\varepsilon = 0$, $V = \tfrac{4}{3}\pi\ d.\, a^2$, als door formule (3).

Aanmerking. Door de bijzondere keuze van ligging der coördinaten-assen, was de wijze van rekenen in het tweede gedeelte van dit derde voorbeeld zeer eenvoudig en gemakkelijk. Ware, bij eene zelfde stelling van het coördinaten-vlak, $x\,y$, de as der abscissen niet door het aangetrokken punt gerigt geworden, zoodat dit punt tot coördinaten hadde gehad ξ en η $(\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2)$, dan zou de uitdrukking voor X ook eene andere zijn geweest, gelijk tevens eene uitdrukking voor Y, onderscheiden van *nul*, zou hebben bestaan. Zeer omslagtig zouden de berekeningen worden, indien men deze uitdrukkingen, bij regtstreeks integreren der differentiaal-uitdrukkingen van de ontbondene aantrekkingen, wilde bepalen. Neemt men echter de elementen der massa van de bol bij paren, elk paar gelegen in een vlak, gaande door de lijn α, het een dezer twee elementen boven, het ander, op gelijken afstand, onder het vlak xij, en beide even ver van het aangetrokken punt verwijderd, dan oefenen beide gelijke aantrekkingen op het punt uit. Van beide is dan de gezamenlijke of vereenigde aantrekking gerigt langs de lijn α, en dan is het klaar, dat de ontbinding dezer zamengestelde aantrekking dezelfde uitkomst zal geven, als die men zoekt, dat is de som der ontbondene aantrekkingen, elke afzonderlijk genomen. En voor de geheele massa komt dit dan, gelijk te voorzien was, neder op de ontbinding der totale aantrekking, welke in de rigting der lijn α hare werking uitoefent.

Indien b. v. het aangetrokken punt buiten den bol ligt, zullen de uitdrukkingen voor de gedeeltelijke of ontbondene aantrekkingen, uitgeoefend in de rigtingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en ij, zijn

$$X = -\tfrac{4}{3}\pi\, d.\, \frac{a^3}{\alpha^2}.\ \frac{\xi}{\alpha};\quad Y = -\tfrac{4}{3}\pi\, d.\, \frac{a^3}{\alpha^2}.\ \frac{\eta}{\alpha}.$$

Hieruit moet dan de waarde van V verkregen worden, en wel doordien men nu zal moeten hebben:

$$dV = X\, d\xi + Y\, d\eta = -\tfrac{4}{3}\pi\, d.\, a^3 \left(\frac{\xi\, d\xi + \eta\, d\eta}{\alpha^3}\right),$$

derhalve, vermits $\alpha = \sqrt{\{\xi^2 + \eta^2\}}$ is,

$$V = -\tfrac{4}{3}\pi\, d.\, a^3 \int \frac{\xi\, d\xi + \eta\, d\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^3}} + C = +\tfrac{4}{3}\pi\, d.\, a^3.\ \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}} + C$$

$$= +\tfrac{4}{3}\pi\, d. a^3.\ \frac{1}{\alpha} + C = \frac{M}{\alpha},$$

want C is *nul*, omdat (als boven, onder a) $V = 0$ voor $\alpha = \infty$.

Hadde men het aangetrokken punt *niet* gedacht in het vlak xij, maar ergens in een der octanten van de coördinaten, dan zou Z niet $= 0$ zijn geweest; eene uitdrukking voor Z, gelijk die voor X en Y, zou in aanmerking hebben moeten komen; maar, bij soortgelijke rekening met drie coördinaten ξ, η, ζ, van het aangetrokken punt, als hier voor het geval van slechts twee coördinaten is gegeven, zou men tot dezelfde uitkomst voor V geraken.

II.

De potentiaal van een stoffelijk bolvormig oppervlak.

A. *Regtstreeksche bepaling van* V.

a. In de algemeene differentiaal-uitdrukking der potentiaal van een oppervlak, wordt het element ϱ (de voerstraal) standvastig, indien het oppervlak is bolvormig. Voor het oppervlak van een bol, hebbende a tot straal, zal daarom

$$V = d.\, a^2 \int_0^{2\pi} d\,\psi \int_0^{\pi} \frac{sin.\ \vartheta.\, d\,\vartheta}{r} = 2\,\pi\, d.\, a^2 \int_0^{\pi} \frac{sin.\ \vartheta\ d\,\vartheta}{r}$$

zijn. Wederom is $r = \sqrt{(a^2 + \alpha^2 - 2a\,\alpha\ cos.\ \vartheta)}$, zoodat de onbepaalde integraal zal wezen

$$V = \frac{2\pi\, d\, a^2}{a\,\alpha} \sqrt{\left\{a^2 + \alpha^2 - 2a\ \alpha \cos.\ \vartheta\right\}}.$$

Voor de grenzen π en 0 van ϑ wordt de worteluitdrukking $\sqrt{(a+\alpha)^2}$ en $\sqrt{(a-\alpha)^2}$; maar deze laatste moet vervangen worden door $\sqrt{(\alpha-a)^2}$ indien het punt buiten de ruimte van het oppervlak ligt, en er komt dan

$$V = \frac{2\pi\, d.\, a}{\alpha}\left\{(\alpha + a) - (\alpha - a)\right\} = \frac{4\pi\, d.\, a^2}{\alpha} = \frac{m}{\alpha} \ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

indien namelijk de massa van het geheele stoffelijk oppervlak wordt uitgedrukt door m. In vorm komt deze uitdrukking van V overeen met die voor een massieven bol (zie formule (1)).

Gebruik makende van regthoekige lineaire coördinaten en van de uitdrukking der potentiaal van een cirkelomtrek ten opzigte van een punt, ergens in de as (mits niet in het middelpunt) van den cirkel gelegen, zou de uitdrukking (4) niet minder gemakkelijk zijn geworden, als men voor dien cirkelomtrek had genomen eenige doorsnede van den bol met een vlak, loodregt door de lijn α gerigt.

b. Ligt het punt binnen het bolvormig oppervlak, dan zal $\alpha < a$ zijn; de onbepaalde integraal, onder *a* gevonden, is dan nog dezelfde, namelijk

$$V = 2\pi\, d.\ \frac{a^2}{a\,\alpha} \sqrt{\left\{a^2 + \alpha^2 - 2a\ \alpha\ cos.\ \vartheta\right\}},$$

maar de bepaalde zal nu zijn

$$V = 2\pi\, d.\, \frac{a}{\alpha}\left\{(a + \alpha) - (a - \alpha)\right\} = 2\pi\, d.\, \frac{a}{\alpha}.\, 2\alpha = 4\pi\, d.\, a = \frac{m}{a} \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

c. Voor een punt in het oppervlak wordt $r = 2a\ sin.\, \frac{1}{2}\,\vartheta$, en

$$V = 2\pi\, d.\, a^2 \int_0^\pi \frac{sin.\, \vartheta\, d\, \vartheta}{r} = \pi\, d.\, a \int_0^\pi \frac{sin.\, \vartheta\, d\, \vartheta}{sin.\, \frac{1}{2}\,\vartheta}$$

$$= 4\pi\, d.\, a \int_0^\pi \frac{sin.\, \frac{1}{2}\,\vartheta.\, cos.\, \frac{1}{2}\,\vartheta.\, d\, \frac{1}{2}\,\vartheta}{sin.\, \frac{1}{2}\,\vartheta} = 4\pi\, d.\, a\ \left[sin.\, \tfrac{1}{2}\,\vartheta\right]_0^\pi = 4\pi\, d.\, a \quad . \; . \; . \; (6).$$

Men zou tot deze uitkomst ook hebben mogen besluiten uit (5). Want de uitkomst (5) leert dat, voor een punt binnen het oppervlak, de potentiaal onafhankelijk is van de plaats van het punt binnen het oppervlak. Derhalve kan deze plaats ook aan en in het oppervlak gedacht worden. Ook de formule (4) geeft $V = 4\pi d.\, a$, indien $\alpha = a$ wordt. Doch men heeft geene vrijheid om uit (4) of (5) tot (6) te besluiten, als men niet kan aannemen, dat V is eene onafgebrokene functie, en de waarheid hiervan is wel in het eerste Hoofdstuk bewezen, maar het doel, hier voorgesteld, is ook om dat bewezene, door regtstreeksche bepaling, te staven.

De formulen (5) en (6) drukken de waarheid uit, » dat de potentiaal van een » bolvormig oppervlak, ten opzigte van alle punten *in* of *binnen* dat oppervlak gele- » gen, is eene zelfde standvastige grootheid.''

B. *Bepaling van* V, *door de uitdrukking der grootte van de aantrekking.*

a. De uitdrukking der grootte of hoeveelheid der aantrekking van eene spherische laag, — derhalve van een stoffelijk bolvormig oppervlak, — op een punt buiten die laag, buiten dit oppervlak, gelegen, is, in de rigting der lijn α, die het middelpunt des oppervlaks, met het aangetrokken punt vereenigt,

$$X = -\ 4\pi\, d\, \frac{a^2}{\alpha^2}.$$

Zal V hieruit kunnen afgeleid worden, dan moet

$$\frac{dV}{d\,\alpha} = -\ 4\pi\, d\, \frac{a^2}{\alpha^2}$$

zijn; weshalve

$$V = 4\pi d.a^2 \int -\frac{d\alpha}{\alpha^2} = 4\pi d.a^2 \frac{1}{\alpha} + C = \frac{4\pi d.a^2}{\alpha} = \frac{m}{\alpha},$$

zijnde dezelfde uitkomst als de boven (formule (4)) regtstreeks gevondene, vermits $C = 0$, uithoofde van $V = 0$ voor $\alpha = \infty$.

b. Ligt het aangetrokken punt binnen de bolvormige laag, binnen het bolvormig oppervlak, dan is, waar ook het punt gelegen zij in de ruimte door het oppervlak begrensd, de aantrekking $= 0$; derhalve

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \text{ en } V = C.$$

De hoegrootheid dezer standvastige waarde van V moet hier bepaald worden onafhankelijk van hetgeen boven uit (5) en (6) is afgeleid en dit is gemakkelijk: want het aangetrokken punt in het middelpunt denkende, zal de potentiaal zijn de integraal, of liever de som der getalwaarden, die men verkrijgt, als de getalwaarde der grootte van elk element des oppervlaks gedeeld wordt door de getalwaarde van zijn afstand tot het centrum, en deze afstand standvastig zijnde $= a$, is

$$V = \frac{\textit{som der elementen}}{a} = \frac{4\pi d.a^2}{a} = 4\pi d.a = C.$$

c. Ware de functie der aantrekking

$$X = -4\pi d.\frac{a^2}{\alpha^2}$$

onafgebroken voor elke mogelijke plaats van het aangetrokken punt, dan zou zij voor een punt *in* het oppervlak geven

$$X = -4\pi d.$$

Maar hiermede komt men niet tot de uitdrukking voor V, tenzij men, om de standvastige der integraal te bepalen, de waarde V uit den aard van het gevraagde, dat is regtstreeks, opmaakt. Dusdanige gang van rekenen verschilt evenwel niet wezenlijk van het rondgaan in een cirkel. Eerder zou men dan den weg behooren in te slaan, gevolgd in het eerste voorbeeld, onder *c.* Zoo verkrijgt men wel het ware $V = 4\pi d.a$, doch het is toevallig; want die weg mag niet gevolgd worden, omdat X hier geene onafgebrokene functie is. In het tweede Hoofdstuk toch is breedvoerig aangetoond dat, bij eene willekeurige stelling der coördinaten-assen, het bepalen der ontbondene aantrekkingen, b. v. X, uit de formule

$$dX = 2\pi d. a^2. \frac{sin. \vartheta. d\vartheta}{r^2}. \frac{\xi - x}{r},$$

in welke x is de abscis van het aantrekkend element, en ξ de abscis van het aangetrokken punt in het oppervlak, — dat dit bepalen door integreren, in den zin van een eigenlijk sommeren, in het algemeen niet kan geschieden of geene eindige uitkomst geeft, tenzij de as, ten opzigte van welke de ontbondene aantrekking begeerd wordt, invalle met de normaal, gaande door het aangetrokken punt. Voor den bol, en dan ter bepaling van X, zal dit klaarblijkelijk plaats hebben, indien $\xi = a$ is en $\eta = 0$, $\zeta = 0$ (η en ζ de beide andere coördinaten van het aangetrokken punt zijnde). Maar ook zal dan zelfs in dit geval de eindige waarde van X niet identisch zijn met eene waarde van $\frac{dV}{d\alpha}$ of liever van $\frac{dV}{d\xi}$, zoodat, omgekeerd, V niet door X zal kunnen bepaald worden; van de functie X, om V te vinden, kan en mag alsdan geen gebruik gemaakt worden.

Bij de genoemde voorwaardelijke rigting der coördinaten-assen is, voor het bolvormig oppervlak, $\frac{a - x}{r}$ de *cosinus* van den hoek, tusschen r en de normaal of lijn α, en deze hoek het complement van $\frac{1}{2}\vartheta$ zijnde, wordt dan

$$X = -2\pi d. a^2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta. sin. \vartheta. sin. \frac{1}{2}\vartheta}{r^3} = -2\pi d. a^2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta. sin. \vartheta. sin. \frac{1}{2}\vartheta}{4a^2\, sin.^2 \frac{1}{2}\vartheta}$$

$$= -2\pi d. \int_0^\pi d\tfrac{1}{2}\vartheta. cos. \tfrac{1}{2}\vartheta = -2\pi d \left[sin. \tfrac{1}{2}\vartheta\right]_0^\pi = -2\pi d.$$

Ook op meer dan ééne andere wijze verkrijgt men deze uitkomst, als hoegrootheid van algeheele aantrekking van een bolvormig oppervlak op een punt in dit oppervlak gelegen. Laat b. v. het punt aangeduid worden door O, het centrum van den bol door C, en door P de plaats van eenig aantrekkend element des oppervlaks. In den grooten cirkel COP worde PO getrokken en PQ loodregt op OC. Zij $OQ = x$, $PQ = y$, $PO = r$, $CO = a$. De hoegrootheid der aantrekking van het element ds des omtreks van den grooten cirkel COP is, in P,

$$= d. \frac{ds}{r^2}.$$

De ontbondene in de rigting van O naar C zal derhalve zijn

$$= - d. \frac{ds}{r}. \frac{a - x}{r},$$

en voor den gordel, hebbende ij tot straal,

$$= - 2\pi d. \frac{ij\, ds}{r^2}. \frac{a - x}{r}.$$

Deze is de uitdrukking voor dX; zij moet geïntegreerd worden tusschen de limieten $x = + a$ en $x = - a$. Substitueer daartoe, uit $x^2 + ij^2 = a^2$, $ij\, ds = a\, d\, x$, en $r = \sqrt{\{ij^2 + (a - x)^2\}} = \sqrt{\{a^2 - x^2 + (a - x)^2\}} = \sqrt{2a\,(a - x)}$, dan komt

$$d\mathrm{X} = - 2\pi d \frac{a\,(a - x)\, d\, x}{\sqrt{(2a)^3\,(a - x)^3}} = - \pi d. \frac{d\, x}{\sqrt{2a\,(a - x)}}.$$

De onbepaalde integraal hiervan is

$$\mathrm{X} = - \frac{\pi d}{\sqrt{2a}} \{- 2\sqrt{(a - x)}\},$$

en tusschen de grenzen a en $- a$,

$$\mathrm{X} = - \frac{\pi d}{\sqrt{2a}} \{+ 2\sqrt{2a}\} = - 2\pi d.$$

Men vindt derhalve regtstreeks $\mathrm{X} = - 2\pi d$; bij afleiding uit de algemeene uitdrukking voor een uitwendig gelegen punt, dat is uit

$$\mathrm{X} = - 4\pi d. \frac{a^2}{\alpha^2},$$

wordt $\mathrm{X} = - 4\pi d$ gevonden. Beide uitkomsten strekken niettemin tot bevestiging van de uitkomsten der algemeene beschouwingen van GAUSS, in het voorgaand Hoofdstuk gegeven. De uitdrukking

$$\mathrm{X} = - 4\pi d. \frac{a^2}{\alpha^2}$$

geldt en kan toegepast worden, zoo lang het aangetrokken punt niet is in het oppervlak noch er binnen; daarbij kan α oneindig weinig grooter zijn dan a, zoodat, *aan* of *tegen* of *op* het oppervlak dat oneindig weinig als *niets* aannemende, ook $\alpha = a$ gesteld kan worden, waardoor werkelijk

$$\mathrm{X} = - 4\pi d$$

wordt. Maar gelijk de uitdrukking $X = -4\pi d \frac{a^2}{\alpha^2}$ niet kan gelden, niet aangevoerd kan worden, of geen zin heeft, voor of in het geval der ligging van het aangetrokken punt *binnen* het oppervlak (als wanneer $X = 0$ is), kan zij ook niet worden toegepast voor de plaats van overgang van buiten naar binnen, dat is wanneer het aangetrokken punt is *in* de stof der bolvormige schaal van oneindig kleine dikte.

De uitkomsten bevestigen wijders ook dit gewigtig besluit, in het voorgaand Hoofdstuk gemaakt, dat, bij den overgang van het aangetrokken punt uit de ruimte binnen het oppervlak in de ruimte daar buiten, de waarde van X plotselijk tweemalen verandert, en wel telkens met dezelfde hoegrootheid $2\pi d$ verminderd wordt. Want *binnen* het oppervlak is overal $X = 0$, derhalve aan de binnenzijde *tegen* het oppervlak; — *in* het oppervlak is $X = -2\pi d$, dat is $= 0 - (2\pi d)$; — en *op* het oppervlak aan de buitenzijde is $X = -4\pi d$, dat is $X = (-2\pi d) - (2\pi d)$; of ook, als X_0 beteekent de waarde $-2\pi d$ voor een punt *in* het oppervlak, zal men de waarden van X, voor de drie genoemde plaatsen van het punt, kunnen voorstellen door

$$X_0 + 2\pi d,\ X_0,\ X_0 - 2\pi d.$$

Dat de uitkomst $X = -4\pi d$ waar is, zoo men haar begrijpt in den verklaarden of boven genoemden zin, heeft ook daarin reden, dat zij is in overeenstemming met het bekende Theorema van LA PLACE, volgens hetwelk de aantrekking eener gelijkslachtige stoffelijke laag, begrensd door twee oneindig weinig verwijderde ellipsoïdale oppervlakken, — derhalve ook de aantrekking eener oneindig dunne bolvormige gelijkslachtige stoffelijke schaal of laag, — op een punt, aan de buitenoppervlakte gelegen, gerigt is langs de normaal voor dat punt, en evenredig aan de oneindig kleine dikte ε van de laag, terwijl de uitdrukking der bepaalde hoegrootheid van deze aantrekking is

$$X = -4\pi d.\varepsilon.$$

Wanneer het aangetrokken punt ligt buiten of binnen het oppervlak, kan V door X bepaald worden. Wederkeerig zal uit

$$V = 4\pi d.\, a,$$

als het punt ligt binnen het oppervlak, volgen

$$X = -\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

omdat de waarde van V is onafhankelijk van α.

Desgelijks, zoo het punt ligt buiten het oppervlak, is

$$V = \frac{4\pi d.\, a^2}{\alpha},$$

en
$$X = \frac{dV}{d\alpha} = -\,4\pi d.\,\frac{a^2}{\alpha^2}.$$

Maar is het punt in het oppervlak, dan is nog

$$V = 4\pi d.\, a,$$

en $X = \frac{dV}{d\alpha}$ zou dan ook $= 0$, en niet $= -\,2\pi d$ wezen.

De waarde $X = -\,2\pi d$ is dan met geene der waarden 0 en $-\,4\pi d\,\frac{a^2}{a^2} = -$ $-\,4\pi d$ in overeenstemming, behoort tot geene dezer waarden, maar zou (gelijk zich GAUSS uitdrukte) alleenlijk overeenstemmen met het arithmetisch midden $\frac{1}{2}\,(0 + (-4\pi d)) = -\,2\pi d$ dezer waarden. Het is in dezen zin dat men ook zou kunnen aannemen dat, bij de enkele waarde van X, twee waarden van $\frac{dV}{d\alpha}$ behooren, zoo het punt is *op* het oppervlak, en wel naar gelang men deze plaats van het punt beschouwt *op de binnenzijde* of *op de buitenzijde* van het oppervlak. En algemeener nog, indien de normaal van het punt niet als as der abscissen wordt aangenomen, zoodat de coördinaten niet zijn a, 0 en 0, maar algemeen ξ, η, ζ, en derhalve $\alpha = \sqrt{\{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\}}$, en dat men eenige der eerste differentiaal-verhoudingen van V, b. v. $\frac{dV}{d\xi}$, begrijpt of aanmerkt als eene verhouding tusschen de verandering van V en eene oneindig kleine verandering van ξ, zal men hebben

$$\text{óf } \frac{dV}{d\xi} = 0 \text{ óf } = -\,4\pi d.\,\frac{a^2\,\xi}{\alpha^3},$$

naar gelang de rigting der plaatsverandering van het punt is buitenwaarts of binnenwaarts ten opzigte van het oppervlak des bols, dat is naar gelang $d\xi$ is positief of negatief. Maar $d\xi$ is oneindig klein, en men kan daarom de twee waarden van $\frac{dV}{d\xi}$ aanmerken als beide te gelijk tot een punt *van* of *op* het oppervlak betrekking te hebben, beide te gelijk voor een punt des oppervlaks te gelden. Is de plaats echter het punt van doorsnijding der oppervlakte met de coördinaten-as ij of z, alsdan bestaat er uitzondering; want ξ is dan *nul*, en de tweede waarde van $\frac{dV}{d\xi}$ wordt gelijk aan de eerste en wederkeerig, of wel beide die waarden worden gelijk, en X heeft geene waarde. Uit den aard der zaak is het duidelijk, dat in dit geval eene oneindig kleine positieve of negatieve verandering van ξ geene verandering in V zal kunnen doen ontstaan, omdat het aangetrokken punt niet zal ophouden, in of aan het oppervlak te verblijven (vergelijk de beschouwingen, I Hoofdst. bladz. 15).

III.

De potentiaal van een stoffelijken cirkel-omtrek.

A. *Regtstreeksche bepaling van* V.

a. Het punt, ten opzigte van hetwelk de potentiaal verlangd wordt, zij gelegen in het vlak van den cirkel-omtrek, maar vooreerst buiten dezen omtrek. Den afstand van dit punt tot het centrum des cirkels, noeme men δ; de straal van den cirkel hebbe eene grootte $= a$, en de straal van eenig element make een hoek ϑ met de lijn m.

De potentiaal zal hier bepaald zijn door de formule

$$V = 2d\int_0^\pi \frac{a\,d\vartheta}{r} = 2a.d\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sqrt{\{a^2 + m^2 - 2am\cos.\vartheta\}}}.$$

Maar $(a^2 + m^2 - 2am\cos.\vartheta) = (a+m)^2\,(1 - \frac{4am}{(a+m)^2}\cos.^2\tfrac{1}{2}\vartheta)$.

Stellende nu $\frac{4am}{(a+m)^2}$ (van welke de getalwaarde altijd $<$ 1 is) $= c^2$, en $\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, zoodat dan van het nieuwe element φ de limieten zullen zijn 0 en $\frac{1}{2}\pi$, dan gaat de integraal-formule over in

$$V = -\frac{4a.d}{a+m}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\{1 - c^2 \sin.^2 \varphi\}}} = \frac{4a.d}{a+m}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \varphi)}}.$$

De waarde der potentiaal is derhalve die eener elliptische functie, en wel eener complete functie van de eerste soort of eener complete digamma D. Maar volgens eene eigenschap dezer functie kan zij vereenvoudigd worden.

De modulus namelijk is

$$c = \frac{2\sqrt{am}}{a+m} = \frac{2\sqrt{\frac{a}{m}}}{1+\frac{a}{m}},$$

en bij dezen vorm wordt de complete functie

$$D(c) = \left(1 + \frac{a}{m}\right) D\left(\frac{a}{m}\right);$$

weshalve

$$V = 4d.\left(\frac{a}{m}\right) D\left(\frac{a}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

b. Ligt het punt binnen den omtrek dan geldt dezelfde differentiaal-formule; ook is de uitdrukking voor r geene andere, noch ondergaan de grenzen der integraal verandering. Alleenlijk zal men, vermits nu $m < a$ is, voor den modulus moeten stellen

$$c = \frac{2\sqrt{am}}{a+m} = \frac{2\sqrt{\frac{m}{a}}}{1+\frac{m}{a}},$$

en

$$D(c) = \left(1 + \frac{m}{a}\right) D\left(\frac{m}{a}\right),$$

zoodat V zal uitgedrukt worden door

$$V = 4d.D\left(\frac{m}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In het centrum is $m = 0$, en dan $D = \frac{1}{2}\pi$, zoodat

$$V = 2\pi d$$

zal wezen, gelijk ook, zonder integreren, uit den aard der functie V onmiddelijk blijkt, als zijnde zij nu eene som van elementen elk gedeeld door een zelfden afstand a, derhalve $= 2\pi a d : a = 2\pi d$.

c. Het punt in den omtrek liggende, zal de overeenkomstige potentiaal bepaald moeten worden door

$$V = 2d. \int_0^{\pi} \frac{a\,d\,\vartheta}{2\,a\,sin.\,\frac{1}{2}\,\vartheta} = d \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi}{cos.\,\varphi};$$

de onbepaalde integraal is

$$V = d.\,log.\,tang.\,\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi),$$

en daarom de bepaalde of totale potentiaal

$$V = \infty, \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

overeenkomstig hetgeen vroeger (bladz. 11—13) besloten is.

B. *Bepaling der uitdrukking voor de differentiaal-verhouding* $\frac{dV}{dm}$, *ten einde met deze die der grootte van de volstrekte aantrekking te kunnen vergelijken.*

Differentiëert met de uitdrukking

$$V = 2a.d \int_0^{\pi} \frac{d\,\vartheta}{\sqrt{(a^2 + m^2 - 2\,a\,m.\,cos.\,\vartheta)}}$$

ten opzigte van m, dan komt:

$$\frac{dV}{dm} = -\,2\,a\,d \int_0^{\pi} \frac{(m - a.\,cos.\,\vartheta)\,d\,\vartheta}{(a^2 + m^2 - 2\,a\,m\,cos.\,\vartheta)^{\frac{3}{2}}} = -\,\frac{2\,a\,d}{(a+m)^2} - \int_0^{\pi} \frac{\left(1 - \frac{2\,a}{a+m} cos.^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta\right) d\,\vartheta}{\left\{1 - \frac{4\,a\,m}{(a+m)^2} cos.^2\,\frac{1}{2}\vartheta\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Verder, als boven, $\frac{2\sqrt{a\,m}}{m+a} = c$ en $\frac{1}{2}\,\vartheta = \frac{1}{2}\,\pi - \varphi$ stellende, als ook $(1 - c^2\,sin.^2\,\varphi) = \Delta$,

$$\frac{dV}{dm} = -\,\frac{d}{m}\,c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\left(1 - c\sqrt{\frac{a}{m}}\,sin.^2\,\varphi\right) d\,\varphi}{\Delta^3} = +\,\frac{d}{m}\,c^2 \left\{c\sqrt{\frac{a}{m}} \int \frac{d\,\varphi\,sin.^2\,\varphi}{\Delta^3} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi}{\Delta^3}\right\}.$$

Maar nu is, $b^2 = 1 - c^2$ zijnde

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi.\,sin.^2\,\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2\,c^2}\,[\mathrm{E}\,(c) - b^2\,\mathrm{D}\,(c)],\ \text{en}\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\,\mathrm{E}\,(c);$$

derhalve

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\,m} = \frac{d}{m}.\frac{c^2}{b^2}\left\{\left[\frac{1}{c}\sqrt{\frac{a}{m}} - 1\right]\mathrm{E}\,(c) - \frac{b^2}{c^2}\sqrt{\frac{a}{m}}\mathrm{D}\,(c)\right\} = \frac{4\,a\,d}{(a-m)^2}\ldots$$

$$\ldots\left\{\frac{a-m}{2\,m}.\,\mathrm{E}\,(c) - \frac{(a-m)^2}{m\,(a+m)}\mathrm{D}\,(c)\right\} = \frac{2\,a\,d}{m\,(a^2-m^2)}\left\{(a+m)\,\mathrm{E}\,(c) - (a-m)\,\mathrm{D}\,(c)\right\}.$$

Nu is, zie boven,

$$\mathrm{D}\,(c) = \left(1 + \frac{a}{m}\right)\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)\ \text{of} = \left(1 + \frac{m}{a}\right)\mathrm{D}\left(\frac{m}{a}\right),$$

naardat het punt, waartoe de potentiaal behoort is buiten of binnen den cirkel-omtrek gelegen. Om E (c) te bepalen, heeft men, eveneens naar beide de vooronderstellingen omtrent de plaats van het punt, deze betrekkingen uit de theorie der elliptische functiën,

$$\left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{m}\right) - \left(1 + \frac{a}{m}\right)\mathrm{E}\,(c),$$

$$\left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right)\mathrm{D}\left(\frac{m}{a}\right) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \left(1 + \frac{a}{m}\right)\mathrm{E}\,(c),$$

weshalve

$$\mathrm{E}\,(c) = \frac{m}{a+m}\left\{2\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{m}\right) - \frac{m^2-a^2}{m^2}\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)\right\}\ \text{of} = \frac{a+m}{a}\left\{2\,\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \frac{a^2-m^2}{a^2}\mathrm{D}\left(\frac{m}{a}\right)\right\}.$$

En dit in de laatstverkregene uitdrukking voor $\frac{d\mathrm{V}}{d\,m}$ substituerende, zal er, na herleiding, komen:

a, als het punt buiten den omtrek is gelegen,

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\,m} = -\,\frac{4\,a\,d}{m^2-a^2}.\ \mathrm{E}\left(\frac{a}{m}\right);\ \ldots\ldots\ldots\ (10)$$

b, indien het binnen den omtrek ligt,

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\,m} = +\,\frac{4\,a\,d}{a^2-m^2},\left\{\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \frac{a^2-m^2}{a^2}\,\mathrm{D}\left(\frac{m}{a}\right)\right\}\ \ldots\ldots\ (11).$$

De laatste uitdrukking zal, door de substitutie van de bekende reeksen voor de complete functiën E en D, en als slechts een drietal termen dezer reeksen in rekening worden genomen, overgaan in deze:

$$\frac{dV}{dm} = + \frac{4ad}{a^2 m^2}. \frac{a}{m}. \tfrac{1}{2}\pi \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{m}{a}\right)^4 \right\},$$

dat is

$$\frac{dV}{dm} = \frac{\pi a d}{a^2 - m^2}. \frac{m}{a} \left\{ 1 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (12)$$

De uitdrukkingen (10) en (11) of (12) geven eene eindige waarde van $\frac{dV}{dm}$, zoo lang het punt óf buiten den omtrek, óf binnen den omtrek is gelegen, en zij mogen dan ook gehouden worden de indrukkingen te zijn van de evenredige grootte der aantrekking, op het punt uitgeoefend. Ligt het punt buiten den omtrek, dan zal er, door de aantrekking, poging worden uitgeoefend om het punt tot den cirkel te doen naderen; daarom is de uitdrukking (11) voor $\frac{dV}{dm}$ negatief. Ligt het punt binnen den omtrek, dan is die poging juist tegenovergesteld, en $\frac{dV}{dm}$ is positief. Alleen in het centrum zal het punt, zoo het vrij is, in rust moeten blijven; de grootte der volstrekte aantrekking is alsdan *nul;* de uitdrukkiug (11) van $\frac{dV}{dm}$ zal dit dan ook moeten leeren, en het is daartoe dat zij tot den vorm (12) is overgebragt, want uit deze blijkt dat $\frac{dV}{dm}$ wordt *nul* als $m = 0$ is.

Ligt het punt in den omtrek, is derhalve $m = a$, dan verkrijgt $\frac{dV}{dm}$ door elke der formulen (10), (11) en (12), eene oneindige grootte. Of tegelijk ook de aantrekking in dit geval oneindig groot zal zijn, mag, door het gebruik der potentiaal niet worden besloten, omdat de potentiaal zelve oneindig groot is, wanneer het punt in den omtrek ligt. Dit al of niet overeenstemmende kan alleen blijken door *regtstreeksche bepaling der hoegrootheid van de aantrekking*, gelijk deze bepaling tevens kan strekken om het geoorloofde van dat gebruik in de andere gevallen buiten elken twijfel te stellen.

De hoegrootheid nu der aantrekking van eenig differentiaal-element $a\,d\vartheta$ des omtreks uitgedrukt wordende door

$$\mp\, a\, d.\, \frac{d\vartheta}{r^2},$$

zal men voor de ontbondene in de rigting der lijn m hebben

$$\mp\, a\, d.\ \frac{d\,\vartheta}{r^2}.\ \frac{\pm\,(m - a\ cos.\ \vartheta)}{r},$$

naar dat het aangetrokken punt buiten of binnen den cirkel-omtrek is gelegen, en r in elk dezer gevallen, $= \sqrt{\{a^2 + m^2 - 2am\ cos.\ \vartheta\}}$ zijnde, komt ook, in elk geval, voor de totale hoegrootheid van de aantrekking

$$-\ 2a\,d. \int_0^{\pi} \frac{(m - a.\ cos.\ \vartheta)}{(a^2 + m^2 - 2am\ cos.\ \vartheta)^{\frac{3}{2}}};$$

want de limieten der integraal zijn wel is waar 2π en 0, maar de cirkel wordt door de lijn m in twee gelijke symmetrisch gelegene deelen verdeeld, waardoor de integraal tusschen 2π en 0 aan het dubbel der integraal tusschen π en 0 gelijk wordt.

Het blijkt derhalve, dat de uitdrukking voor de hoegrootheid der aantrekking van een stoffelijken cirkel-omtrek op een punt, ergens in het vlak van dezen omtrek gelegen, in niets onderscheiden is van de uitdrukking voor $\frac{d\,V}{d\,m}$ verkregen. Zij moet dan ook tot dezelfde uitkomsten voeren, welke uit de behandeling van deze laatste zijn afgeleid. En aangezien de wijze, waarop zij is gevormd, niet afhankelijk is van eenige voorwaarde omtrent de bijzondere plaats van het aangetrokken punt, of liever, aangezien zij, $m = a$ stellende, dezelfde formule is, tot welke men komt indien de plaats van het punt in den omtrek des cirkels wordt aangenomen, zal zij ook op dit geval toepasselijk zijn, en leeren dat alsdan de grootte der aantrekking oneindig is, alhoewel, om hiertoe te mogen besluiten, het gebruik der potentiaal moest uitgesloten worden.

STELLINGEN.

I.

Hetgeen door Prof. MATZKA, in de §§ 22 en 23 van zijn werk *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra*, wordt aangevoerd tot bewijs »*dat de verdeeling of onderscheiding van grootheden in* positieve *en* negatieve *onvolledig is*", of, met andere woorden, dat de stelling, »*alle grootheid is òf positief of negatief*" valsch is, — komt mij voor ontoereikend te zijn.

II.

Ook schijnt mij niet aannemelijk hetgeen in hetzelfde werk (in stelling I genoemd), § 32, wordt besloten, te weten:

» Die Ablenkung der Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer negativ bezieh-
» lichen Zahl von der Grundbeziehung beträgt daher den n^{ten} Theil der Ablen-
» kung der negativen Beziehung von der positiven." —

III.

Er bestaat geene reden, die eenig verband tusschen den wederstand en de onontleedbaarheid van electrolijten a priori waarschijnlijk zou kunnen maken.

IV.

De bewijzen, die BUNSEN (*Gasometrische Methoden*, Braunschweig, 1857, bladz. 258—274) aanvoert voor de juistheid van zijne verklaring der zoogenaamde katalijtische werkingen, zijn onvoldoende.

—

V.

De uitkomsten door Dr. KRECKE verkregen, door middel van den, naar zijn voorschrift zamengestelden, photometer, pleiten tegen de geschiktheid van dat werktuig.

VI.

Geen der werktuigen, tot hiertoe ontworpen, voorgesteld of gebruikt, om de lichtsterkte van sterren te meten, geeft genoegzamen waarborg voor de zekerheid van de uitkomsten der waarnemingen, die er mede gedaan zijn.

VII.

BERNARD heeft (*Compt. Rend.* 1855. passim.) bewezen dat er in de lever suiker wordt gevormd.

VIII.

Ten onregte houden sommigen het zoogenaamd kali-albuminaat voor hetzelfde ligchaam als de caseïne.

IX.

De chlorometrie van OTTO is naauwkeuriger dan die van GAIJ-LUSSAC.

X.

De vorming van koolzuur en alcohol door gisting is geen bewijs voor de aanwezigheid van suiker.

XI.

De namen *Plantae endogenae* en *Plantae exogenae* worden nog door sommigen ten onregte gebezigd.

XII.

De melksapvaten in de planten zijn gewijzigde bastcellen.