

versie 1 september 2013

Speciale relativiteitstheorie

J.W. van Holten

NIKHEF
Amsterdam

en

LION
Universiteit Leiden

Hoofdstuk 1

Inleiding

Natuurkunde is de wetenschap van de materie en haar wisselwerkingen. Er zijn vele vormen van materie, zoals sterren en planeten in de kosmos, vaste stoffen en vloeistoffen aan het oppervlak van de aarde en elektronen en kerndeeltjes in een atoom. Die materie is niet onveranderlijk: wisselwerkingen in en tussen materievormen veroorzaken veranderingen van vorm en eigenschappen. Sterren ontstaan uit gaswolken, produceren licht en warmte, om uiteindelijk uit te doven of ineen te storten, vaste stoffen kunnen smelten, en vloeistoffen stollen of verdampen. Atomen vormen een veelvoud aan scheikundige verbindingen, en kunnen oplichten in karakteristieke kleuren.

Ondanks de vele verschijningsvormen zijn de opbouw en het gedrag van al die soorten materie onderworpen aan strikte universele regels: natuurwetten, die onafhankelijk van tijd en plaats de ontwikkeling van het heelal en alles wat het bevat bepalen. Hoe beter we die regels kennen en begrijpen, hoe meer inzicht we krijgen in de werking van de natuur en de eigenschappen van de materie.

De meeste natuurwetten behoren tot een van de volgende categorieën:

1. *Behoudswetten*. Een behoudswet zegt, dat de totale hoeveelheid van een bepaalde grootte in de natuur niet verandert. Voorbeelden van behoudswetten zijn de wet van behoud van energie en de wet van behoud van elektrische lading.

2. *Veranderingswetten*. Een veranderingswet beschrijft hoe natuurkundige grootheden in de tijd veranderen. Voorbeelden van veranderingswetten zijn bewegingswetten, die de positie, snelheid en versnelling van voorwerpen onder invloed van externe krachten beschrijven; maar b.v. ook de wetten van het elektromagnetisch veld, die de sterkte en patronen van elektrische en magnetische velden bepalen uitgaande van een gegeven verdeling van elektrische ladingen en stromen.

Een speciale categorie van veranderingswetten zijn de wetten van *onomkeerbare veranderingen*. Hieronder vallen b.v. de tweede hoofdwet van de thermodynamica, die vaststelt dat de entropie van een geïsoleerd systeem wel kan toenemen, maar nooit afneemt; en een vergelijkbare wet voor de grootte van zwarte gaten: bij wisselwerkingen van zwarte gaten met elkaar of met materie kan het oppervlak dat het zwarte gat omsluit wel groter worden, maar nooit kleiner. Er is veel discussie over de vraag of dit absolute wetten zijn, of dat ze statistisch van aard zijn en onder bepaalde omstandigheden geschonden kunnen worden.

1.1 Bewegingswetten

De speciale relativiteitstheorie draait om bewegingswetten, in het bijzonder de beweging van stoffelijke voorwerpen¹, en de voortplanting van licht. We beginnen met de beweging van vrije lichamen, d.w.z. voorwerpen waarop geen uitwendige kracht werkt.

Opmerking:

In de meeste stoffelijke voorwerpen zijn wel inwendige krachten aan het werk, krachten die het object bij elkaar houden en vervormingen tegengaan. Voor zover deze krachten de beweging van het voorwerp als geheel niet beïnvloeden kunnen we ze buiten beschouwing laten. In de praktijk is dat vaak het geval, zodat we ervan uit gaan dat er inderdaad vrije lichamen in deze zin bestaan.

De beweging van stabiele vrije lichamen (voorwerpen waarvan de vorm en samenstelling niet verandert) voldoet aan de volgende regel: een vrij lichaam staat stil of verplaatst zich met constante snelheid langs een rechte lijn. Dit inzicht is in de 17^e eeuw verwoord door Galilei, en wordt het *traagheidsprincipe* genoemd.

Newton voegde daar later aan toe, dat deze toestand van uniforme beweging alleen onder invloed van een uitwendige kracht, die op het lichaam als geheel werkt, veranderd kan worden. Hoe de beweging door een kracht wordt beïnvloed, hangt echter af van de specifieke eigenschappen van het object. Zo is duidelijk dat de botsing van een voorwerp met een zwaar object een heel ander effect heeft dan een botsing met een licht object dat dezelfde snelheid heeft.

De grootte die eenduidig het verband tussen kracht en versnelling van een voorwerp bepaalt is de *massa*; de massa is een maat voor de hoeveelheid materie, die bij voorbeeld vastgelegd kan worden door weging met een balans. Een balans vergelijkt immers het gewicht van een voorwerp direct met dat van een bekende hoeveelheid materie. Newton's behandeling van de niet-uniforme beweging, met veranderlijke snelheid v , bestaat nu uit twee stappen: (1) druk de verandering in beweging uit in termen van de versnelling $a = dv/dt$; (2) stel de kracht gelijk aan het product van massa en versnelling:

$$F = ma. \tag{1.1}$$

In het bijzonder betekent dit, dat twee voorwerpen met dezelfde massa onder invloed van dezelfde kracht eenzelfde versnelling ondergaan.

Newton's oorspronkelijke formulering van de krachtwet was nog algemener. In navolging van voorgangers als Descartes, Galilei en Huygens legde hij de bewegingstoestand van een lichaam vast in termen van de *hoeveelheid van beweging*, die hij opvatte als het product van massa en snelheid

$$p = mv. \tag{1.2}$$

Tegenwoordig wordt deze grootte in het nederlands meestal *impuls* genoemd². Voor vrije lichamen is de hoeveelheid van beweging constant; hij verandert echter bij uitoefening van

¹Zulke voorwerpen worden ook wel aangeduid met de term *lichamen*, het equivalent van het engelse begrip *bodies*.

²De engelse term is *momentum*.

een uitwendige kracht. In plaats van vergelijking (1.1) stelde Newton daarom (in moderne notatie), dat

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (1.3)$$

Deze vergelijking leidt terug tot vergelijking (1.1) als je de uitdrukking (1.2) voor p invult en aanneemt dat de massa m niet verandert. Vergelijking (1.3) is echter algemener en ook bruikbaar in situaties waarin de massa van een object niet constant is, of waarin een andere uitdrukking voor de impuls gebruikt moet worden.

Tot nu toe zijn we er stilzwijgend van uitgegaan, dat snelheid, versnelling en kracht allemaal in dezelfde richting werken. In onze drie-dimensionale ruimte is dat echter meestal niet het geval. Grootheden als snelheid, impuls, kracht en versnelling worden niet alleen gekarakteriseerd door hun grootte of sterkte, maar ook door hun richting: het zijn *vectoren*. Dat betekent in de praktijk, dat we ze moeten vastleggen t.o.v. een geven coördinatenstelsel, b.v. een cartesisch stelsel van onderling loodrechte coördinaten (x, y, z) . In zo'n stelsel heeft een vector dan drie componenten, gevormd door de projectie langs de drie assen³. Zo heeft de snelheidsvector \mathbf{v} de componenten

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (1.4)$$

met als totale absolute grootte:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.5)$$

In deze notatie krijgt de klassieke definitie van impuls dan de vorm

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = (mv_x, mv_y, mv_z) = (p_x, p_y, p_z), \quad (1.6)$$

en de bewegingswet van Newton wordt

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left(\frac{dp_x}{dt}, \frac{dp_y}{dt}, \frac{dp_z}{dt} \right). \quad (1.7)$$

In het geval van een constante massa m gaat dit over in

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = (ma_x, ma_y, ma_z) = \left(m\frac{dv_x}{dt}, m\frac{dv_y}{dt}, m\frac{dv_z}{dt} \right). \quad (1.8)$$

Over de oorsprong van de kracht \mathbf{F} die op een voorwerp werkt, doet de Newton's wet (1.7) geen uitspraak; hij legt alleen het effect van een gegeven kracht op de snelheidsverandering van een object met massa m vast.

In veel gevallen is het van belang de beweging te onderzoeken van twee objecten die onderling op elkaar krachten uitoefenen. Dat kunnen stootkrachten zijn, zoals bij een botsing, of krachten op afstand, zoals de zwaartekracht tussen de aarde en de maan. Newton

³Vectoren noteren we met vette letters; voor een uitgebreidere bespreking, zie bijlage A.

voerde voor dat geval naast het traagheidsprincipe en de krachtwet een derde principe in, door te stellen dat de krachten die de lichamen daarbij op elkaar uitoefenen gelijk van grootte en tegengesteld van richting zijn:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (1.9)$$

Deze stelling heeft een eenvoudige interpretatie in termen van de impulsen. Gebruiken we voor de individuele impulsen de notatie \mathbf{p}_1 en \mathbf{p}_2 , dan geldt voor de totale impuls:

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0. \quad (1.10)$$

Newton's principe legt dus vast, dat onder invloed van onderlinge krachten individuele objecten hun impuls wel kunnen veranderen, maar dat de totale hoeveelheid van beweging van het gecombineerde systeem onder die werking constant blijft. Een lichaam dat is samengesteld uit twee kleinere objecten gedraagt zich in die zin als een enkel vrij lichaam, zelfs als de onderdelen krachten op elkaar uitoefenen. Dit principe impliceert zo formeel, dat inwendige krachten geen rol spelen in het gedrag van een vrij lichaam.

1.2 Inertiaalstelsels

Als we zeggen dat een trein een snelheid heeft van 80 km/uur, dan bedoelen we impliciet dat dit is gemeten ten opzichte van het spoor, en van de bomen en huizen langs het spoor. Het aardoppervlak met alles wat erop staat is ons lokale referentiekader, en we interpreteren beweging als verplaatsing in dit kader. Als we de complete beweging van de trein zouden willen beschrijven, zouden we ook rekening moeten houden met de draaiing van de aarde om haar as, met de beweging van de aarde om de zon, en met de beweging van de zon om het centrum van de Melkweg. Met andere woorden: beweging is relatief ten opzichte van een gegeven waarnemingsstelsel, en verschillende waarnemingsstelsels kunnen ook ten opzichte van elkaar bewegen.

Het is dan ook duidelijk, dat de stelling dat vrije lichamen met constante snelheid langs een rechte lijn bewegen niet voor alle waarnemingsstelsels kan gelden. Het traagheidsprincipe moet worden beperkt tot waarnemers die zelf als vrij object bewegen, en geen versnelling ondergaan. Een preciezere formulering van het traagheidsprincipe is daarom, dat vrije lichamen *ten opzichte van elkaar* stilstaan of met constante snelheid en langs rechte lijnen bewegen. Ieder vrij object kan volgens dit principe worden beschouwd als de oorsprong van een waarnemingsstelsel waarin het traagheidsprincipe geldt. De zo te construeren waarnemingsstelsels noemen we *inertiaalstelsels*.

Stel dat we twee zulke inertiaalstelsels hebben, die we met Σ en Σ' zullen aanduiden, en die t.o.v. elkaar een snelheid ter grootte v hebben. We kunnen de stelsels zo draaien, dat de x -, y - en z -as van het ene stelsel dezelfde orientatie hebben als de x' -, y' - en z' -as van het andere stelsel, en dat hun onderlinge beweging langs de x - en x' -as is gericht. Verder mogen we aannemen dat op zeker tijdstip de oorsprong van Σ' samenvalt met die van Σ ; als dat niet het geval is, schuiven we y' - en z' -assen van Σ' zo op, dat als het punt $x' = 0$

het punt $x = 0$ passeert de nulpunten van de y - en y' -assen en die van de z - en z' -assen ook samenvallen. Tenslotte kunnen we ook de klokken in Σ en Σ' op dat moment gelijk zetten, door ze beide tijdens het passeren op nul te zetten: $t = t' = 0$ als $x = x' = 0$. Daarmee hebben we dan uiteindelijk alle vrijheid gebruikt om posities en tijden in de twee stelsels vast te leggen bij gegeven onderlinge snelheid v . Onder al deze aannamen kunnen we de tijden en coördinaten van de twee stelsels in elkaar omrekenen via de transformaties van de algemene vorm

$$t' = \alpha x + \beta t, \quad x' = \gamma x + \kappa t, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.11)$$

Hierin zijn de coëfficiënten $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$ constanten, waarvan de waarde in het algemeen van de snelheid v zal afhangen.

Het is makkelijk in te zien, dat een stelsel Σ' waarvan de ruimte- en tijdcoördinaten volgens (1.11) samenhangen met die van een inertiaalstelsel Σ , zelf ook een inertiaalstelsel is. Beschouw b.v. de beweging van een puntmassa met positie $(x(t), y(t), z(t))$ in een inertiaalstelsel Σ ; als dit een vrij deeltje is, dan beweegt het met een constante snelheid in een vaste richting:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \text{constant}. \quad (1.12)$$

Voor de beweging van deze puntmassa t.o.v. het stelsel Σ' geldt dan

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt} = \frac{\gamma dx/dt + \kappa}{\alpha dx/dt + \beta} = \frac{\gamma u_x + \kappa}{\alpha u_x + \beta}, \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dy}{dt} = \frac{u_y}{\alpha u_x + \beta}, \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dz}{dt} = \frac{u_z}{\alpha u_x + \beta}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Het is dan duidelijk, dat de constante snelheid \mathbf{u} garandeert dat ook alle componenten van de snelheid \mathbf{u}' in Σ' constant zijn: $(u'_x, u'_y, u'_z) = \text{constant}$. Dus een deeltje dat met constante snelheid (grootte en richting) in Σ beweegt, beweegt ook met constante snelheid (grootte en richting) in Σ' . In Σ geldt deze eigenschap voor alle vrije deeltjes, en daarom geldt hij ook voor de beweging van alle vrije deeltjes t.o.v. Σ' . Dus Σ' is een inertiaalstelsel als Σ dit is. Het omgekeerde geldt op grond van symmetrie ook.

Opgave 1.1

Voor een expliciet bewijs is het voldoende de transformaties (1.11) om te keren; leid af dat

$$t = \alpha' x' + \beta' t', \quad x = \gamma' x' + \kappa' t', \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (1.14)$$

met nieuwe constanten

$$\alpha' = \frac{-\alpha}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \beta' = \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \gamma' = \frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \kappa' = \frac{-\kappa}{\beta\gamma - \alpha\kappa}. \quad (1.15)$$

Bij de gegeven randvoorwaarden zijn de transformaties (1.11) de *enige* transformaties die twee inertiaalstelsels met elkaar verbinden. Als b.v. een van de parameters $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$ zelf van de tijd af zou hangen, dan zouden niet alleen de componenten (1.13) van de snelheid \mathbf{u}' extra bijdragen krijgen, ze zouden ook expliciet tijdafhankelijk worden. Hetzelfde gebeurt, als de transformaties hogere machten van t of x zouden bevatten. De conclusie van dit argument is, dat twee gelijk georiënteerde inertiaalstelsels die t.o.v. elkaar in de x -richting bewegen door transformaties van de vorm (1.11) verbonden zijn.

1.3 De voortplanting van licht

In de jaren 1672-76 deed de deense astronoom Ole Rømer in Parijs onderzoek naar de beweging van de manen van Jupiter, en in het bijzonder naar de beweging van de binnenste maan Io, die in gemiddeld 42,5 uur eenmaal om de planeet draait. Rømer ontdekte, dat in het deel van het jaar waarin de aarde van Jupiter af beweegt de periode tussen achtereenvolgende verschijningen van Io uit de schaduw van Jupiter langer wordt, terwijl in het deel van het jaar waarin de aarde naar Jupiter toe beweegt de periode tussen opeenvolgende verdwijningen in de schaduw van Jupiter steeds korter werd. Hij kon dit alleen verklaren door aan te nemen dat licht er in het eerste geval steeds langer over doet om de aarde te bereiken, terwijl het licht in het tweede geval geleidelijk minder tijd nodig had. Deze verklaring houdt in, dat de snelheid van het licht eindig is.

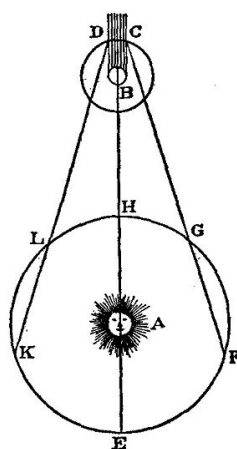


FIG. 70.

Fig. 1.1: Roemer's verklaring van de tijden van opkomst en ondergang van Io in Jupiter's nachtschaduw.

Christiaan Huygens ontwikkelde een theorie van licht als golfverschijnsel⁴. Deze theorie, later verbeterd en uitgebreid door Thomas Young en Augustin Fresnel, kan verschijnselen

⁴Chr. Huygens, *Traité de la lumière* (1690).

als breking, buiging en interferentie van licht verklaren. Uitgaande van Roemer's waarnemingen kon Huygens ook een schatting maken van de lichtsnelheid, en vond een waarde in de buurt van 220 000 km/sec, bijna 30% lager dan de huidige geaccepteerde waarde. Betere metingen werden in de 19^e eeuw gedaan door Foucault en Fizeau. In Fizeau's versie van het experiment werd een lichtbundel tussen de tanden van een draaiend tandwiel door gestuurd, en ruim 8 km verderop door een spiegel teruggekaatst, om tenslotte weer tussen de tanden van het wiel door terug te komen en te worden waargenomen. Dat kon alleen als het wiel met de juiste snelheid draaide om het licht een opening te bieden op het moment van terugkomst. Door de snelheid waarmee het wiel draaide, de afstand tussen de tanden en de afstand die het licht intussen aflegde te combineren, kon Fizeau de lichtsnelheid bepalen. Hij vond een waarde van 313 000 km/sec, ongeveer 4% te hoog.

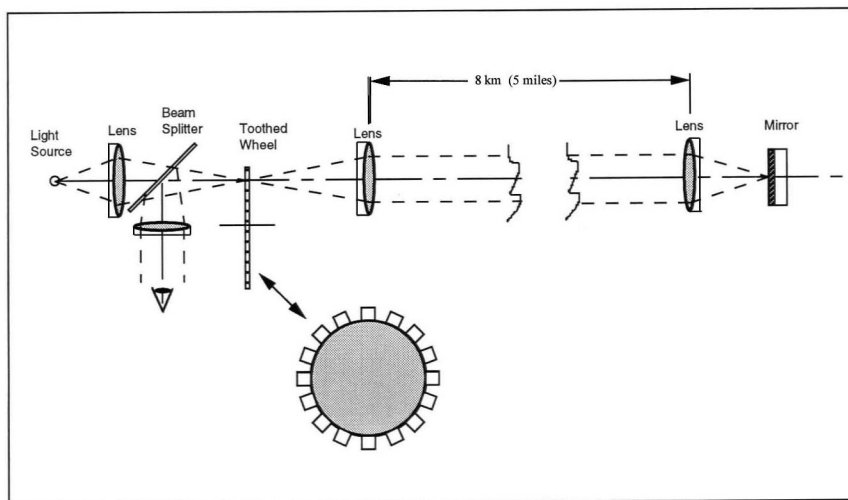


Fig. 1.2: Fizeau's meting van de lichtsnelheid.

Tegenwoordig kunnen golflengten en frequenties van licht zo nauwkeurig bepaald worden, dat de seconde officieel gedefiniëerd is als de tijd gelijk aan 9 192 631 770 perioden van een bepaalde kleur licht uit het spectrum van cesium, en de meter als de afstand die licht in $1/299792548$ seconde aflegt; met andere woorden, de lengte van de meter is zo gekozen dat de lichtsnelheid $c = 299\,792\,548$ m/sec bedraagt. De lichtsnelheid wordt dus niet langer gemeten in termen van een bekende lengtemaat, maar de lengtemaat wordt vastgelegd in termen van de lichtsnelheid.

De vraag die nu oprijst is, ten opzicht van welk waarnemingsstelsel de lichtsnelheid moet worden vastgelegd. Uiteraard t.o.v. een lichtbron in rust; maar zoals hiervoor besproken is rust een relatief begrip: we kunnen rust definiëren ten opzicht van een oneindig groot aantal inertiaalstelsels. De vraag is dan, of de waarde van de lichtsnelheid in alle inertiaalstelsels hetzelfde is, dan wel varieert tussen verschillende inertiaalstelsels. In het laatste geval zou het mogelijk zijn een absoluut onderscheid te maken tussen inertiaalstelsels in rust of in verschillende toestanden van beweging.

Het antwoord op deze vraag is, dat de lichtsnelheid in alle inertiaalstelsels dezelfde is, en dat het niet mogelijk is een hiërarchie aan te brengen in de klasse van inertiaalstelsels, waarbij sommigen in absolute rust zouden zijn en andere niet. Een belangrijke aanwijzing voor deze vaststelling kwam van een experiment van Michelson en Morley in 1887.

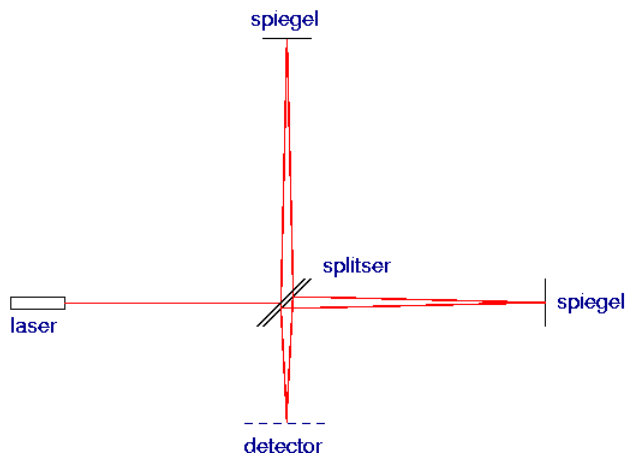


Fig. 1.3: Principe van de Michelson interferometer

In dit experiment werd een interferometer gebruikt, een apparaat waarin een lichtbundel in tweeën wordt gesplitst door een halfdoorlatende spiegel. Beide bundels doorlopen vervolgens een arm van het apparaat in onderling loodrechte richting. Aan het eind van iedere arm bevindt zich een spiegel die de bundel terugkaatst, zodat ze bij de splitser weer bij elkaar komen en samen verder kunnen gaan naar een detector.

Stel eerst dat er wel een absoluut ruststelsel is, waarin de lichtsnelheid in alle richtingen gelijk is aan de hierboven genoemde waarde c . Zo'n stelsel kan worden geïdentificeerd met wat vroeger de 'aether' werd genoemd, een universeel medium waarin licht zich kan voortplanten. Als de interferometer in dit stelsel niet beweegt en de armen de lengten L_x en L_y hebben, dan komen de lichtstralen bij de splitser terug na tijden

$$T_x = \frac{2L_x}{c}, \quad T_y = \frac{2L_y}{c}. \quad (1.16)$$

Als deze tijden een geheel aantal perioden verschillen, dus als de lichtpaden een geheel aantal golflengten λ verschillen:

$$cT_x - cT_y = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dan komen de lichtbundels in fase terug en versterken ze elkaar; is het verschil een halve periode, of een geheel aantal plus een halve periode:

$$cT_x - cT_y = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda,$$

dan doven ze elkaar uit.

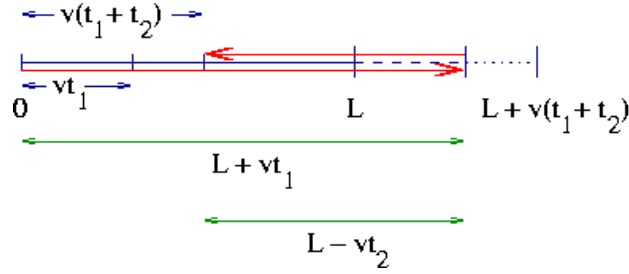


Fig. 1.4: Reistijden van een lichtbundel in de bewegingsrichting van een interferometer en terug.

Vervolgens laten we de hele interferometer met snelheid v in de positieve x -richting bewegen. Nu reist het licht vanaf de splitser in de x -richting gedurende een tijd t_{1x} , waarin de spiegel aan het eind van de x -arm over een afstand vt_{1x} is opgeschoven, zoals geïllustreerd in figuur 1.4. Het licht legt dus op de heenweg een afstand $L_x + vt_{1x}$ af, reizend met de snelheid c , zodat

$$L_x + vt_{1x} = ct_{1x} \quad \Rightarrow \quad t_{1x} = \frac{L_x}{c - v}. \quad (1.17)$$

Op de terugweg hoeft het lichtsignaal niet de volle afstand L_x af te leggen, omdat de splitser het licht met snelheid v tegemoet komt. In de tijd t_{2x} waarin het licht onderweg is, legt de splitser een afstand vt_{2x} af, en het licht zelf een afstand ct_{2x} , zodat

$$L_x - vt_{2x} = ct_{2x} \quad \Rightarrow \quad t_{2x} = \frac{L_x}{c + v}. \quad (1.18)$$

In totaal is deze lichtbundel dus een tijd t_x onderweg, die berekend kan worden als

$$\begin{aligned} t_x &= t_{1x} + t_{2x} = \frac{L_x}{c - v} + \frac{L_x}{c + v} = \frac{2cL_x}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{T_x}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

We kunnen nu een soortgelijke analyse doen voor het licht dat in de y -richting heen en weer reist. In de tijd t_{1y} die het licht nodig heeft om de spiegel aan het eind van de y -arm te bereiken, is die spiegel een afstand vt_{1y} in de x -richting opgeschoven; zie figuur 1.5. Het licht heeft dus een totale afstand

$$ct_{1y} = \sqrt{L_y^2 + (vt_{1y})^2}$$

afgelegd; na kwadrateren krijgen we dan

$$L_y^2 = (c^2 - v^2)t_{1y}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{1y} = \frac{L_y}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.20)$$

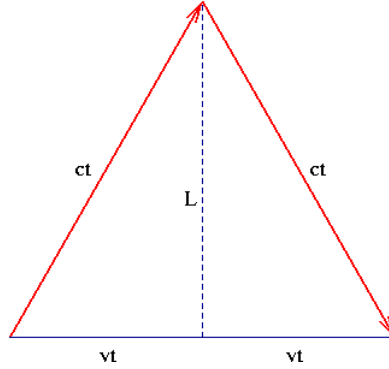


Fig. 1.5: Reistijden van een lichtbundel loodrecht op de bewegingsrichting van een interferometer.

Voor de terugweg is dezelfde tijd nodig: $t_{2y} = t_{1y}$, omdat eenzelfde afstand in omgekeerde richting moet worden afgelegd. De totale tijd tot terugkomst bij de splitser is dus

$$t_y = 2t_{1y} = \frac{2L_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{T_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.21)$$

We zien dat de verhouding van de reistijden in de x - en y -richting snelheidsafhankelijk is:

$$\frac{t_x}{t_y} = \frac{T_x}{T_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.22)$$

De logische conclusie uit deze redenering is: zodra de interferometer beweegt t.o.v. het absolute ruststelsel, ontstaat er een looptijdverschil tussen de bundels in de x - en de y -arm; als de interferometer oorspronkelijk zo was ingesteld dat de bundels in het ruststelsel precies in fase (of juist: uit fase) waren, dan is dat niet langer zo wanneer de interferometer gaat bewegen en dan moeten we dus een verandering in de sterkte van de uittrekkende bundel zien.

Michelson en Morley probeerden dit effect te meten voor de beweging van de aarde door de aether. Hoewel deze snelheid a priori niet met zekerheid te voorspellen was, zou de rotatie van de aarde en de beweging van de aarde om de zon moeten zorgen voor periodieke veranderingen in de richting van de beweging van de aarde, en dus t.o.v. het absolute ruststelsel. Dat zou dan tot periodieke verandering in de sterkte van het signaal moeten leiden.

De uitkomst van het experiment van Michelson en Morley was echter, dat er *geen* significant effect werd gemeten. De enige conclusie die daaruit getrokken kon worden was, dat de analyse van het experiment op een of meer verkeerde aannamen gebaseerd was. Een eerste suggestie kwam van Lorentz, die voorstelde dat objecten bij beweging t.o.v. de aether in de lengterichting korter worden, en wel met een bedrag

$$L'_x = L_x \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.23)$$

Daarmee wordt de totale looptijd in de x -richting dan ook korter:

$$t'_x = t_x \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{T_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.24)$$

Zo kan de uitkomst van het Michelson-Morley experiment verklaard worden:

$$\frac{t'_x}{t'_y} = \frac{T_x}{T_y}. \quad (1.25)$$

De voorgestelde verkorting in de bewegingsrichting wordt een *Lorentzcontractie* genoemd, en verklaart de afwezigheid van effecten die voortkomen uit beweging t.o.v. een absoluut ruststelsel. De verklaring kan echter op een fundamenteeler niveau gevonden worden, wanneer je aanneemt dat er geen absoluut ruststelsel bestaat. Zo'n analyse werd gegeven door Einstein, en vormde de grondslag voor de speciale relativiteitstheorie.

Hoofdstuk 2

De speciale relativiteitstheorie

Het experiment van Michelson en Morley is niet de enige reden om na te denken over de vraag of inertiaalstelsels alle gelijkwaardig zijn, dan wel dat er een onderscheid gemaakt kan worden naar hun absolute bewegingstoestand, wat alleen mogelijk is als er een absoluut ruststelsel is. Lorentz onderzocht de gevolgen van zo'n onderscheid voor de wetten van het elektromagnetisch veld, opgesteld door Maxwell. Hij liet zien dat deze wetten een verschillende vorm aannemen in verschillende inertiaalstelsels, tenzij je aanneemt dat beweging t.o.v. een absoluut ruststelsel altijd met een universele lengtecontractie, en een complementaire rek van tijdsduren, gepaard gaat. Er zijn dus meer mogelijke effecten dan alleen de gevolgen voor de voortplanting van licht.

Voor Einstein was dit reden om te breken met het idee van onderscheid tussen inertiaalstelsels en het bestaan van een absolute ruimte of aether. Einstein ging uit van twee simpele veronderstellingen, waarmee de paradoxen die samenhangen met beweging, licht en elektromagnetische velden, inclusief het resultaat van Michelson en Morley, in een keer werden opgelost. Deze veronderstellingen waren:

a. *Alle inertiaalstelsels zijn gelijkwaardig; er bestaat geen absolute rust, en geen absolute ruimte of aether.*

b. *De lichtsnelheid is in alle inertiaalstelsels hetzelfde, in alle richtingen.*

Uit deze twee aannamen van Einstein volgt een nieuwe bewegingsleer, die consistent en in overeenstemming met de relevante waarnemingen en experimenten is.

2.1 Lorentztransformaties

De consequenties van Einstein's theorie worden duidelijk wanneer we de twee inertiaalstelsels Σ en Σ' uit paragraaf 1.2 nemen, die met onderlinge snelheid v t.o.v. elkaar bewegen. Onder de daar besproken standaardvoorwaarden voor orientatie van coördinatenassen en synchronisatie van klokken zijn de tijd- en plaatscoördinaten van de twee stelsels via de transformaties (1.11) met elkaar verbonden. Uitgaande van de twee aannamen die Einstein maakte, kunnen we nu de constanten α , β , γ en κ in deze transformaties bepalen.

We beginnen met de beschrijving van een lichtflits die in stelsel Σ op $t = 0$ vanuit de

oorsprong $x = 0$ in de x -richting vertrekt. Op tijd t passeert deze lichtflits het punt op de x -as met

$$x = ct. \quad (2.1)$$

Voor het stelsel Σ' geldt, dat het licht vertrekt op $t' = 0$ uit $x' = 0$, omdat op dat ogenblik de oorsprong van Σ en van Σ' samenvallen: $x' = x = 0$, en de klokken gelijk staan: $t' = t = 0$. Aangezien de lichtsnelheid in beide stelsels hetzelfde is, volgt dat het licht op een later tijdstip t' in Σ' tot bij het punt

$$x' = ct' \quad (2.2)$$

is gekomen. Als nu x' in Σ' de coördinaat is van hetzelfde punt dat in Σ de coördinaat x heeft, dan zijn t' en t de tijden waarop de waarnemers in Σ' en Σ de lichtflits ieder op hun eigen klok in dit punt voorbij zien komen. Deze tijden en coördinaten zijn dan met elkaar verbonden door de transformatie (1.11):

$$\gamma x + \kappa t = x' = ct' = c(\alpha x + \beta t). \quad (2.3)$$

Hieruit volgt door herschikking, dat

$$(\gamma - \alpha c)x = (\beta c - \kappa)t; \quad (2.4)$$

maar het linkerlid is volgens (2.1) ook gelijk aan

$$(\gamma - \alpha c)x = (\gamma - \alpha c)ct. \quad (2.5)$$

Uit de twee laatste vergelijkingen kunnen we nu afleiden, dat

$$\gamma - \alpha c = \beta - \frac{\kappa}{c}. \quad (2.6)$$

We vinden zo een verband tussen de constanten $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$. We kunnen echter nog meer van zulke verbanden vinden. Om te beginnen, heeft de oorsprong van Σ' op alle tijden t' de coördinaat $x' = 0$; maar volgens Σ beweegt dit punt met snelheid v langs de x -as, zodat deze zich volgens Σ bevindt op $x = vt$. Gebruiken we opnieuw de transformaties (1.11) voor dit punt, dan vinden we

$$x' = \gamma x + \kappa t = (\gamma v + \kappa)t = 0, \quad (2.7)$$

zodat

$$\kappa = -\gamma v. \quad (2.8)$$

Evenzo beweegt de oorsprong $x = 0$ van Σ met snelheid $-v$ langs de x' as van Σ' , zodat na invullen in (1.11):

$$\kappa t = x' = -vt' = -v\beta t \quad \Rightarrow \quad \kappa = -\beta v. \quad (2.9)$$

Uit (2.8) en (2.9) volgt direct dat $\beta = \gamma$, en dus uit (2.6) ook dat

$$\alpha = \frac{\kappa}{c^2} = -\frac{\gamma v}{c^2}. \quad (2.10)$$

De transformaties (1.11) zijn daarom te herschrijven in de eenvoudigere vorm

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.11)$$

Tenslotte kunnen we ook γ nog bepalen. Omdat de situatie tussen Σ en Σ' symmetrisch is, en Σ t.o.v. Σ' met snelheid $-v$ beweegt, kunnen we met precies hetzelfde argument afleiden dat

$$t = \gamma' \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right), \quad x = \gamma' (x' + vt'), \quad (2.12)$$

waarbij γ' de constante uit de omgekeerde transformatie is. Vullen we nu (2.11) in de laatste vergelijkingen in, dan vinden we

$$t = \gamma' \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t, \quad x = \gamma' \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x, \quad (2.13)$$

en hieruit volgt dat

$$\gamma' \gamma = \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (2.14)$$

Nemen we aan dat de meetlatten en klokken in beide stelsels Σ en Σ' identiek zijn, en dat de waarnemers dus dezelfde eenheden gebruiken, dan moet bij stilstand gelden dat $t' = t$ en $x' = x$, zodat $\gamma = \gamma' = 1$ voor $v = 0$. Daarmee komen we dan uiteindelijk uit op

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.15)$$

Het eindresultaat van deze afleiding is dan, dat het verband tussen twee inertiaalstelsels onder standaard condities wordt beschreven door de coördinatentransformaties

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.16)$$

Deze staan bekend als *Lorentztransformaties*.

2.2 Tijddilatatie

Een direct gevolg van het verschil in tijd en ruimtecoördinaten tussen inertiaalstelsels Σ en Σ' is, dat klokken in de twee stelsels niet even snel lopen. Neem b.v. een klok in de oorsprong $x' = 0$ van het stelsel Σ' , die de tijd t' in Σ' meet. Een waarnemer in Σ ziet deze klok bewegen met snelheid v , in overeenstemming met de Lorentztransformaties (2.16):

$$x = vt \quad \text{zodat} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0. \quad (2.17)$$

Als nu op de klok in Σ' een tijd t' verstreken is, dan meet een klok in Σ een tijdsduur t volgens de regel:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t - v^2t/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.18)$$

Dus t' is altijd korter, of in ieder geval nooit langer, dan t : in een stelsel Σ , waarin de klok met snelheid v beweegt, is de gemeten tijdsduur altijd langer dan in het stelsel Σ' waarin de klok in rust is. Dit verschijnsel noemen we tijdrek, of *tijddilatatie*.

2.3 Relativiteit van de gelijktijdigheid

Omdat klokken in inertiaalstelsels, die t.o.v. elkaar bewegen, niet even hard lopen, is het onmogelijk om een absoluut begrip van gelijktijdigheid te hanteren: gebeurtenissen die voor de ene waarnemer gelijktijdig plaats vinden, kunnen volgens een andere waarnemer op verschillende tijdstippen voorvallen. Neem b.v. twee gebeurtenissen die in Σ plaats vinden op dezelfde tijd t , de ene in het punt x_1 en de andere in het punt x_2 . Dan vindt vanuit Σ' gezien de eerste gebeurtenis plaats op

$$t'_1 = \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.19)$$

terwijl de andere gebeurtenis in Σ' wordt waargenomen op

$$t'_2 = \frac{t - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.20)$$

Een waarnemer in Σ' ziet dus een tijdsverschil tussen de twee gebeurtenissen van

$$t'_2 - t'_1 = \frac{v(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = v(x'_1 - x'_2)/c^2. \quad (2.21)$$

Dus alleen als de gebeurtenissen op dezelfde locatie $x_1 = x_2$ plaats vinden, worden ze ook in Σ' als gelijktijdig gezien. Bij gevolg is het begrip gelijktijdigheid niet absoluut: gelijktijdigheid is relatief (afhankelijk van waarnemer en plaats).

Opgave 2.1

Laat zien dat $v \leq c$ betekent dat

$$|x'_1 - x'_2| \geq c|t'_1 - t'_2|.$$

2.4 Lengtecontractie

We zeggen dat een meetlat een lengte L heeft, als hij zo langs de x -as gelegd kan worden dat het ene uiteinde zich op tijd t in de oorsprong $x_1 = 0$ bevindt, en het andere uiteinde *gelijktijdig* op het punt $x_2 = L$. Samenvattend:

$$t_2 - t_1 = 0, \quad x_2 - x_1 = L. \quad (2.22)$$

Met behulp van de Lorentztransformaties (2.16) vinden we echter heel algemeen, dat in het stelsel Σ' het ene uiteinde zich op een tijdstip t'_1 bevindt op een plaats x'_1 met

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.23)$$

terwijl het andere uiteinde zich evenzo op tijd t'_2 bevindt ter hoogte van x'_2 met

$$t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.24)$$

Volgens Σ' is de lengte L' van de meetlat de afstand tussen x'_1 en x'_2 gemeten op gelijke tijden t'_1 en t'_2 ; gezien de uitkomst (2.21) is dit echter niet hetzelfde als gelijke tijden t_1 en t_2 zoals gemeten in Σ . Daarom moeten we in twee stappen te werken gaan. In de eerste stap leggen we de voorwaarde op, dat de tijden gemeten in Σ' gelijk zijn: $t'_1 = t'_2$, zodat

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0. \quad (2.25)$$

We meten de plaats van de uiteinden x_1 en x_2 t.o.v. Σ dus op verschillende tijden t_1 en t_2 , zodat

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1). \quad (2.26)$$

In de tweede stap bepalen we nu de afstand tussen de uiteinden van de meetlat in het stelsel Σ' op de gelijke tijden $t'_1 = t'_2$:

$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.27)$$

Stel nu dat de meetlat in Σ stil ligt; dan bevinden de uiteinden zich op ieder ogenblik op dezelfde punten x_1 en x_2 ; dan maakt het niet uit of je de uiteinden gelijktijdig meet of niet, je vindt altijd $x_2 - x_1 = L$. In Σ' , ten opzichte waarvan de meetlat beweegt, is de gelijktijdigheid echter wel relevant; het hierboven gegeven argument leidt dan tot

$$L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.28)$$

Met andere woorden: in een stelsel Σ' waarin een meetlat beweegt, is de lengte *korter* dan in een stelsel Σ waarin de meetlat in rust is. Dit verschijnsel heet lengtekrimp of *lengtecontractie*, en heeft in de praktijk hetzelfde effect als de Lorentzcontractie (1.23).

2.5 Samenstellen van transformaties in een richting

We hebben de Lorentztransformaties afgeleid met als uitgangspunt dat de lichtsnelheid in alle inertiaalstelsels hetzelfde is. Dus als licht in het stelsel Σ' beweegt met de snelheid c en Σ' beweegt ten opzicht van Σ met snelheid v , dan is de lichtsnelheid ook in Σ gelijk aan c , en niet aan $c + v$ of $c - v$. Dat kan alleen omdat tijd en lengte in beide systemen niet dezelfde betekenis hebben. Dat leidt ertoe, dat je snelheden t.o.v. verschillende stelsels niet zo maar bij elkaar mag optellen.

We zullen nu daarom precies nagaan, wat de snelheid van een voorwerp is t.o.v. Σ , als het t.o.v. Σ' beweegt met snelheid u . We beginnen met het geval dat u en v beide langs de x -as zijn gericht. Nemen we nu een derde inertiaalstelsel Σ'' waarin het voorwerp in rust is, dan geldt voor de transformaties tussen Σ'' en Σ' dat

$$t'' = \frac{t' - ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x'' = \frac{x' - ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y'' = y', \quad z'' = z'. \quad (2.29)$$

Vervolgens gelden tussen Σ' en Σ de transformaties (2.16), zodat

$$t'' = \frac{t - vx/c^2 - u(x - vt)/c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}, \quad x'' = \frac{x - vt - u(t - vx/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}, \quad y'' = y, \quad z'' = z. \quad (2.30)$$

Deze transformaties zijn nu te herschrijven als standaard Lorentztransformaties direct van Σ'' naar Σ met de relatieve snelheid w gegeven door

$$w = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}, \quad (2.31)$$

zodat

$$t'' = \frac{t - wx/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad x'' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad y'' = y, \quad z'' = z. \quad (2.32)$$

De transformaties (2.32) en (2.30) zijn hetzelfde, omdat

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}{(1 + vu/c^2)^2}. \quad (2.33)$$

Opgave 2.2

a. Bewijs vergelijking (2.33).

b. Laat m.b.v. dit resultaat zien, dat vergelijking (2.32) volgt uit (2.30).

Een belangrijke uitkomst van onze analyse is, dat de lichtsnelheid inderdaad hetzelfde is in Σ en Σ' : als licht beweegt met snelheid c in Σ' , dan beweegt het in Σ met snelheid

$$\frac{v+c}{1+vc/c^2} = \frac{c(1+v/c)}{1+v/c} = c.$$

Dus de lichtsnelheid is werkelijk invariant onder Lorentztransformaties.

Een tweede uitkomst is, dat als v en u beide kleiner dan de lichtsnelheid zijn de samengestelde snelheid w altijd *kleiner* is dan de som $v+u$, en dat deze nooit groter kan worden dan c . Wiskundig kun je dit laatste als volgt bewijzen. Begin met een relatieve snelheid v van Σ en Σ' die kleiner is dan de lichtsnelheid, dus $v/c < 1$. Introduceer nu een nieuwe parameter s via de relatie

$$s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} \right) \Leftrightarrow \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{v}{c}. \quad (2.34)$$

De linkerkant van de laatste vergelijking is een functie van s die de *tangens-hyperbolicus* wordt genoemd:

$$\tanh s = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}.$$

Deze functie kan alle waarden tussen $(-1, +1)$ aannemen, waarbij de waarden ± 1 worden alleen bereikt voor $s \rightarrow \pm\infty$:

$$-1 < \tanh s < 1.$$

Voor de functie $\tanh s$ geldt de volgende formule:

$$\tanh(s_1 + s_2) = \frac{\tanh s_1 + \tanh s_2}{1 + \tanh s_1 \tanh s_2}. \quad (2.35)$$

Hieruit volgt, dat vergelijking (2.31) overeenkomt met

$$\tanh s_1 = \frac{v}{c}, \quad \tanh s_2 = \frac{u}{c},$$

en vervolgens

$$\frac{w}{c} = \tanh(s_1 + s_2).$$

Wegens het beperkte bereik van de functie $\tanh s$ moet $|w/c| < 1$ zijn. Wanneer de snelheden gelijk zijn: $u = v$, en dus $s_1 = s_2 \equiv s$, dan geldt in het bijzonder

$$\frac{w}{c} = \tanh 2s.$$

Stel nu dat er n stelsels $\Sigma, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ zijn, die allemaal met snelheid v t.o.v. elkaar in de x -richting bewegen; dan geldt voor de snelheid v_n van Σ_n t.o.v. Σ :

$$\frac{v_n}{c} = \tanh ns. \quad (2.36)$$

Als we oneindig veel van deze stelsels zouden hebben: $n \rightarrow \infty$, dan krijgen we

$$\frac{v_\infty}{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh ns = 1. \quad (2.37)$$

Dit maakt onmiddellijk duidelijk waarom het versnellen van deeltjes nooit zal leiden tot snelheden groter dan de lichtsnelheid: ieder beetje bewegingsenergie dat je toevoegt heeft steeds minder effect op de totale snelheid.

Opgave 2.3

a. Leidt de tweede formule (2.34) af uit de eerste.

Hint: Bereken eerst e^{2s} , en werk dit om tot een uitdrukking voor v/c .

b. Laat zien dat $-1 < \tanh s < +1$, en dat

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tanh s = 1.$$

c. Bewijs de formule (2.35).

2.6 Samenstellen van transformaties in onderling loodrechte richtingen

We kunnen nu ook kijken wat het effect is, als een voorwerp in Σ' met snelheid u in de y' -richting beweegt. We kunnen opnieuw een inertiaalstelsel Σ'' construeren waarin het voorwerp in rust is, en de Lorentztransformaties tussen Σ'' en Σ' beschouwen:

$$t'' = \frac{t' - uy'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x'' = x', \quad y'' = \frac{y' - ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad z'' = z'. \quad (2.38)$$

Als we dat verder omzetten naar de coördinaten (t, x, y, z) via een tweede Lorentztransformatie tussen Σ' en Σ , krijgen we

$$t'' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}} - \frac{uy/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x'' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.39)$$

$$y'' = \frac{y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{u(t - vx/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}, \quad z'' = z.$$

Deze samengestelde beweging is natuurlijk niet meer netto een beweging langs een van de coördinaatassen van Σ , maar een beweging in het x - y -vlak.

Opgave 2.4

- a. Zij het deeltje in rust in Σ'' op plaats \mathcal{P}'' met coördinaten (x_0'', y_0'', z_0'') .
Laat zien dat dit punt in Σ beweegt volgens

$$x = vt + x_0'' \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad y = u \sqrt{1 - v^2/c^2} t - uvx_0''/c^2 + \sqrt{1 - u^2/c^2} y_0'',$$

$$z = z_0'', \quad \sqrt{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)} t = t'' + \sqrt{1 - u^2/c^2} vx_0''/c^2 + uy_0''/c^2.$$

- b. Leid hieruit af dat de snelheid $\mathbf{w} = d\mathbf{r}/dt$ van het deeltje in Σ wordt gegeven door

$$\mathbf{w} = (w_x, w_y, 0), \text{ met } w_x = v \text{ en } w_y = u \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$\text{en dat met } w^2 \equiv \mathbf{w}^2 = w_x^2 + w_y^2$$

$$1 - \frac{w^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

- c. Leg uit waarom $w^2 > v^2$ en $w^2 > u^2$.
- d. Beschouw nu de verbindingslijn \mathcal{OO}'' die door de oorsprong van Σ en van Σ'' loopt; toon aan dat voor punten op deze lijn

$$y = \frac{ux}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{en} \quad y'' = \frac{ux''}{v \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

- e. Laat nu zien, dat uit de definities $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $r'' = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}$ volgt, dat

$$r^2 = \frac{w^2 x^2}{v^2} \text{ en } r''^2 = \frac{w^2 x''^2}{v^2 (1 - u^2/c^2)}$$

- f. Leidt tenslotte af dat voor afstanden r en r'' gemeten langs de lijn \mathcal{OO}''

$$t'' = \frac{t - wr/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad r'' = \frac{r - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Leg uit waarom je dit kon verwachten.

2.7 Galileitransformations

Nu we de gevolgen van de aanname, dat de lichtsnelheid hetzelfde is in alle inertiaalstelsels, uitgebreid onder de loep hebben genomen, kunnen we het verschil tussen de relativiteitstheorie en Newton's bewegingsleer makkelijk begrijpen. Ook in Newton's theorie zijn er inertiaalstelsels, maar in plaats van een universele lichtsnelheid gaat Newton uit van een universele tijd: de klokken van alle inertiaalstelsels geven dezelfde tijd aan, ongeacht hun bewegingstoestand.

Als we dit vertalen in termen van de transformaties (1.11) tussen inertiaalstelsels krijgen we

$$t' = t \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1. \quad (2.40)$$

Invullen van deze resultaten in vergl. (1.13) leidt dan tot de conclusie, dat

$$u'_x = \gamma u_x + \kappa. \quad (2.41)$$

Nu gebruiken we de beginconditie dat de oorsprong van Σ' in Σ met snelheid v beweegt:

$$x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = vt. \quad (2.42)$$

Als we dit invullen in de tweede vergelijking (1.11) krijgen we

$$0 = (\gamma v + \kappa) t \quad \Rightarrow \quad \kappa = -\gamma v, \quad (2.43)$$

zodat vergl. (2.41) vereenvoudigt tot

$$u'_x = \gamma (u_x - v). \quad (2.44)$$

Tenslotte gebruiken we, dat de oorsprong van Σ t.o.v. Σ' beweegt met snelheid $-v$:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = -vt'. \quad (2.45)$$

Vullen we dit weer in de tweede vergelijking (1.11) in, samen met $t' = t$, dan vinden we

$$x' = \kappa t = -vt \quad \Rightarrow \quad \kappa = -v, \quad \gamma = 1. \quad (2.46)$$

De complete set transformaties (1.11) vereenvoudigt dan tot

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.47)$$

Deze transformaties staan bekend als *Galileitransformaties*. Tegelijk vinden we uit vergl. (2.44), dat

$$u'_x = u_x - v. \quad (2.48)$$

We zien dus dat, t.g.v. de aanname van een universele tijd en de Galileitransformaties tussen inertiaalstelsels, snelheden gewoon bij elkaar kunnen worden opgeteld: als u'_x de snelheid van een voorwerp is t.o.v. stelsel Σ' , en dit stelsel beweegt in dezelfde richting met snelheid v t.o.v. stelsel Σ , dan is de snelheid van het voorwerp t.o.v. Σ gegeven door

$$u_x = u'_x + v. \quad (2.49)$$

Hoofdstuk 3

Lichtkegels en tijd-ruimte structuur

Het uitgangspunt van de relativistische mechanica is, dat licht zich in de lege ruimte in alle richtingen altijd met dezelfde snelheid voortplant. Concreet betekent dit, dat het front van een lichtflits, die op tijd $t = 0$ vanuit een punt \mathcal{P} naar alle kanten wordt uitgezonden, op een latere tijd t een bol vormt met \mathcal{P} als middelpunt en met straal $r = ct$. Je kunt je een voorstelling maken van de uitbreiding van het lichtfront als een reeks concentrische bollen, waarbij iedere latere bol alle eerdere bollen omsluit. Als je deze reeks bollen zichtbaar zou willen maken, zou je eigenlijk vier dimensies nodig hebben: drie dimensies voor iedere bol, en een vierde dimensie voor de tijd, zodat je de bollen in die vierde dimensie achter elkaar zou kunnen zetten.

Omdat dit op een twee-dimensionaal vlak niet weergegeven kan worden, maken we in de praktijk gebruik van projecties. Met een perspectief-tekening kunnen we nog wel de uitbreiding van een lichtflits in een twee dimensies weergeven. Je krijgt dan een kegel, waarvan de punt \mathcal{P} de plaats en het ogenblik voorstelt van uitzenden van de flits, en de steeds groter wordende cirkels op de mantel de golffronten, waarvan de straal toeneemt met de tijd, zoals gezien door een stationaire waarnemer in \mathcal{P} ; zie figuur 3.1.

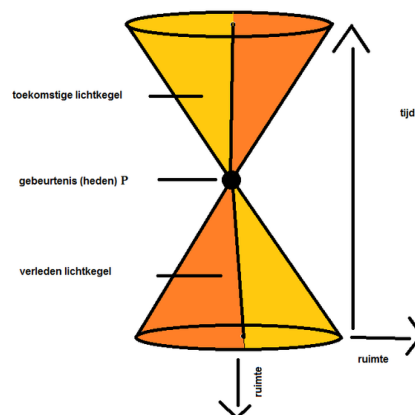


Fig. 3.1 Een lichtkegel beschrijft de uitbreiding van licht op opeenvolgende tijden.

Zoals in de figuur getoond, kun je de kegel ook in de achterwaartse richting tekenen; die

achterwaartse kegel stelt dan een set concentrische ringen voor van licht dat op $t = 0$ convergeert in de oorsprong. Dat is voornamelijk een hulpmiddel om tijden en gebeurtenissen in het verleden te kunnen representeren.

In de meeste gevallen is het mogelijk gebeurtenissen in ruimte en tijd, en het verband tussen verschillende inertiaalstelsels, weer te geven in een diagram met een enkele ruimte-plus een tijddimensie. In dat geval kan de ruimtedimensie bij voorbeeld de radiële afstand tot de oorsprong voorstellen; maar wanneer we beweging in een vaste richting bespreken, kunnen we deze richting ook als x -as kiezen, en de tijd op de andere as uitzetten. Dit is de representatie die in dit hoofdstuk de belangrijkste rol zal spelen.

3.1 Tijd-ruimtediagrammen

In figuur 3.2 is horizontaal de x -as getekend van een inertiaalstelsel Σ , en verticaal de tijdas. Ieder punt in de figuur kun je dus associëren met een gebeurtenis op plaats x en tijd t . De lichtkegel vanuit de oorsprong \mathcal{O} is nu gereduceerd tot de twee schuine lijnen, die aangeven tot hoever licht, uitgezonden vanuit \mathcal{O} , op tijd t in de x -richting is gevorderd.

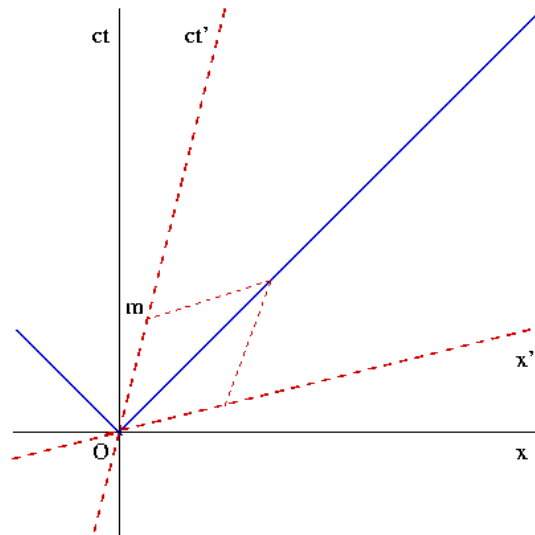


Fig 3.2: Lichtpaden en hun relatie met de inertiaalstelsels Σ en Σ' .

Om het diagram makkelijk te kunnen lezen kiezen we de eenheden langs de tijd-as vergeleken met die langs de x -as zo, dat de lichtkegel precies op de diagonaal ligt. Dat kun je simpel doen door, in plaats van de tijd t zelf, langs de verticale as de afstand af te meten die licht in die tijd kan reizen; we zetten verticaal dus afstanden ct uit, in dezelfde eenheden waarin we ook de afstanden langs de x -as uitzetten. Op een andere manier krijg je dit voor elkaar door tijden te meten in seconden en afstanden in lichtseconden, de afstand die licht per seconde aflegt. In die eenheden is de lichtsnelheid $c = 1$ lichtseconde/seconde; dan maakt het niet uit of je verticaal t of ct uitzet, want numeriek zijn deze grootheden

gelijk. Zo'n diagram waarin ct tegen x is uitgezet staat bekend als een *tijd-ruimte-* of *Minkowski-diagram*.

Je kunt nu ook de beweging van een willekeurig voorwerp in een Minkowski-diagram weergeven, door de positie in de x -richting tegen de tijd uit te zetten. Zo'n lijn, die de beweging van een materiëel voorwerp t.o.v. het stelsel Σ representeert, wordt de *wereldlijn* van het voorwerp genoemd. Voor een vrij object, dat met constante snelheid $v < c$ in de x -richting beweegt, is dit een rechte lijn met een grotere helling dan de diagonaal:

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} < 1, \quad \text{dus} \quad \frac{ct}{x} > 1.$$

Laten we nu twee klokken vergelijken: een in rust in de oorsprong $x = 0$, en een die beweegt met snelheid v in de x -richting. De tijd t van de klok in rust is de tijd die langs de verticale as is uitgezet. De schuine lijn is de wereldlijn van de klok in beweging; op ieder punt van deze lijn geeft die klok een tijd t' aan. Daarom kun je ieder punt van de wereldlijn ook labelen met de tijd t' (of met de coördinaat ct'), die echter niet hetzelfde is als de bijbehorende t vanwege de tijddilatatie. Alleen op $t = 0$, wanneer de klokken gelijkgezet worden, is ook $t' = 0$; maar daarna ziet de waarnemer in rust in Σ de bewegende klok steeds verder achter lopen.

Tegelijk staat deze klok stil in zijn eigen coördinatenstelsel Σ' , op het punt $x' = 0$. Je kunt nu de volgende vraag stellen: welke punten (t, x) hebben dezelfde tijd t' als de bewegende klok? In het bijzonder, als de bewegende klok $t' = 0$ aanwijst, op welke andere punten in het Minkowski-diagram is dan ook $t' = 0$? Uit vergelijking (2.16) volgt direct het antwoord:

$$t' = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{vx}{c^2}.$$

Dit kan worden herschreven in de vorm

$$x = \frac{c^2 t}{v}. \tag{3.1}$$

Dus $t' = 0$ correspondeert met een andere schuine lijn in het Minkowski-diagram, met een helling

$$\frac{ct}{x} = \frac{v}{c} < 1,$$

een lijn die je krijgt door de wereldlijn van de klok te spiegelen t.o.v. de diagonaal. Dit zijn punten met verschillende waarden van x' , maar dezelfde waarde van t' , nl. $t' = 0$. Deze lijn kun je daarom identificeren met de x' -as van het stelsel Σ' , waarvan de bewegende klok de oorsprong vormt.

Als je nu een derde klok bekijkt, die op $t' = 0$ in een punt x'_1 is en volgens Σ' in dat punt in rust is, dan heeft deze klok dezelfde snelheid t.o.v. Σ als de klok op $x' = 0$, die op $t' = 0$ in $x = 0$ is. De wereldlijnen van de bewegende klokken lopen dus parallel, en ze zullen dezelfde tijd aangeven wanneer ze in Σ dezelfde afstand hebben afgelegd. Als nu de eerste bewegende klok op $t' = 0$ een lichtsignaal uitzendt, zal de tweede bewegende klok dat ontvangen zodra het licht een afstand $ct' = x'_1$ heeft afgelegd. Dat is precies op

het ogenblik dat de tweede klok de diagonaal passeert, want licht beweegt in alle stelsels langs deze zelfde lijn. Voor alle punten op de diagonaal is dus niet alleen $x = ct$, maar ook $x' = ct'$. Op het ogenblik dat de derde klok de diagonaal passeert, wijst hij dezelfde tijd t' aan als de tweede klok in het punt m ; want op dat punt heeft de bewegende klok in $x' = 0$ sinds $t' = 0$ dezelfde afstand in Σ afgelegd als de klok in x'_1 tussen $t' = 0$ en het passeren van de diagonaal. De lijn die het punt m verbindt met de plek waar de wereldlijn van de derde klok de diagonaal passeert is dus de lijn van gelijke tijden $ct' = x'_1$. Deze lijn loopt parallel aan de x' -as.

We zien dus, dat lijnen parallel aan de x' -as lijnen zijn met constante ct' , terwijl lijnen parallel aan de ct' -as lijnen zijn met constante x' . Deze schuine lijnen vormen het rooster van ruimte-tijd coördinaten van het stelsel Σ' , net zoals de onderling loodrechte lijnen parallel aan de ct -as en de x -as het coördinatenrooster van het oorspronkelijke ruststelsel Σ vormen.

3.2 Het Minkowski-interval

Gebeurtenissen in tijd en ruimte kunnen, afhankelijk van het inertiaalstelsel, met verschillende tijden en coördinaten beschreven worden, die via Lorentztransformaties met elkaar samenhangen. Maar op basis van het bestaan van lichtkegels is het mogelijk tijd-ruimte afstanden ook op een coördinaat-invariante manier te karakteriseren. Dit gebeurt met behulp van het *Minkowski-interval*, dat uit het verschil in tijd en afstand tussen twee gebeurtenissen wordt berekend.

We gaan uit van twee gebeurtenissen, die in het inertiaalstelsel Σ plaats vinden op tijd t_1 en tijd t_2 , en op plaats $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ en $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. De afstand tussen deze gebeurtenissen in tijd en ruimte wordt gekarakteriseerd door

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (3.2)$$

Het Minkowski-interval is dan gedefiniëerd door de uitdrukking

$$I_M = \Delta \mathbf{r}^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2. \quad (3.3)$$

Dit interval wordt uitgedrukt in termen van de coördinaten (t, x, y, z) van Σ , maar de waarde van I_M zelf is onafhankelijk van welk inertiaalstelsel wordt gebruikt; het Minkowski-interval I_M blijft namelijk hetzelfde na een Lorentztransformatie: $I_M = I'_M$. Met behulp van de standaardtransformatie (2.16) is dit makkelijk te bewijzen; voor deze transformaties is $\Delta y = \Delta y'$ en $\Delta z = \Delta z'$, zodat $I_M = I'_M$ als

$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2. \quad (3.4)$$

Dit zullen we nu aantonen:

$$\begin{aligned}
\Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 &= \left(\frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\Delta t - v \Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 \\
&= \frac{\Delta x^2 - 2v \Delta t \Delta x + v^2 \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 + 2v \Delta t \Delta x - v^2 \Delta x^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{\Delta x^2 (1 - v^2/c^2) - c^2 \Delta t^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\
&= \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Het Minkowski-interval I_M is dus inderdaad invariant onder Lorentztransformaties.

Gewapend met dit inzicht kunnen we nu drie soorten intervallen I_M onderscheiden:

a. $I_M = 0$; twee punten die door een nul-interval verbonden zijn liggen op elkaars lichtkegel:

$$I_M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{r}^2 = c^2 \Delta t^2.$$

In een Minkowski-diagram met een ruimte-dimensie x wordt dit $\Delta x^2 = c^2 \Delta t^2$, zodat Δx precies de afstand is die licht in een tijd Δt kan afleggen. Als op t_1 vanuit x_1 een lichtsignaal wordt verstuurd, dan komt dit dus precies op t_2 in x_2 aan. Daarom noemen we een interval $I_M = 0$ een *lichtachtig* interval.

b. $I_M > 0$; twee punten die door een positief Minkowski-interval verbonden zijn liggen buiten elkaars lichtkegel. De afstand tussen deze punten is te groot om door een lichtsignaal in tijd Δt overbrugd te kunnen worden:

$$I_M > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{r}^2 > c^2 \Delta t^2.$$

In een Minkowski-diagram heeft het lijnstuk dat (t_1, x_1) en (t_2, x_2) verbindt een helling kleiner dan 45° : $c \Delta t < \Delta x$, dus het interval ligt op de x' -as van een ander inertiaalstelsel Σ' waarin $\Delta t' = 0$. Daarom noemen we een positief interval I_M *ruimteachtig*. Uit $\Delta t' = 0$ volgt, dat de zuivere afstand Δs gemeten tussen de punten x'_1 en x'_2 in dit stelsel gegeven wordt door

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 = I_M. \tag{3.6}$$

We kunnen I_M dus interpreteren als een invariante maat voor de afstand tussen twee ruimteachtig gescheiden gebeurtenissen.

c. $I_M < 0$; twee punten die door een negatief Minkowski-interval verbonden zijn, liggen binnen elkaars lichtkegel. In Δt kan de afstand tussen de punten overbrugd worden door signalen die langzamer reizen dan licht:

$$I_M < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{r}^2 < c^2 \Delta t^2.$$

In een Minkowski-diagram heeft het lijnstuk dat de gebeurtenissen op (t_1, x_1) en (t_2, x_2) verbindt een helling groter dan 45° , dus het interval ligt op de t' -as van een ander inertiaalstelsel Σ' dat met snelheid $v < c$ t.o.v. Σ beweegt. Dit stelsel is het ruststelsel van een klok

die tussen de gebeurtenissen een tijdverschil $\Delta t'$ meet, zonder zich t.o.v. Σ' te verplaatsen: $\Delta x' = 0$. Daarom noemen we een negatief interval I_M *tijdachtig*. De zuivere tijd die in Σ' tussen de gebeurtenissen verstrijkt wordt de *eigentijd* genoemd, meestal aangeduid met de letter τ . Dus $\Delta\tau = \Delta t'$ terwijl $\Delta x' = 0$, zodat

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = -I_M. \quad (3.7)$$

Terugkerend naar algemene 3-dimensionale ruimteafstanden $\Delta\mathbf{r}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ volgt hieruit, dat

$$I_M = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = 0, \quad (3.8)$$

voor lichtachtige intervallen, terwijl

$$I_M = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta s^2 > 0, \quad (3.9)$$

voor ruimteachtige intervallen, en

$$I_M = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = -c^2\Delta\tau^2 < 0, \quad (3.10)$$

voor tijdachtige intervallen. Deze indeling van Minkowski-intervallen is invariant onder Lorentztransformaties en geldt dus in ieder inertiaalstelsel.

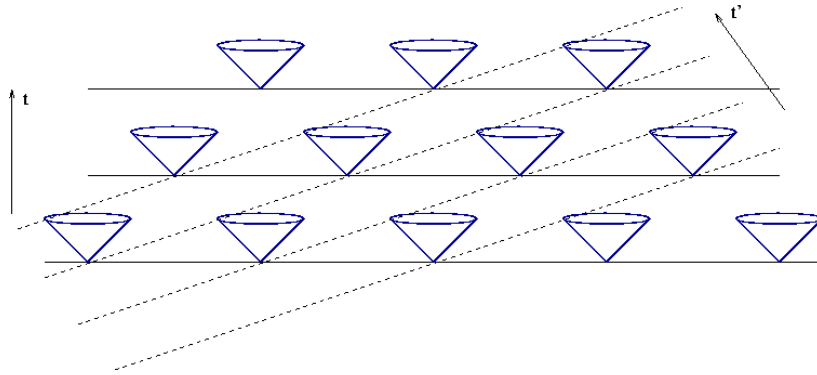


Fig. 3.3: Lichtkegelstructuur van de tijd-ruimte: vlakken van gelijke tijden in Σ en Σ' .

Omdat ze invariant zijn spelen lichtkegels een bijzondere rol in de meetkunde van de tijd-ruimte. Je kunt lichtkegels construeren rond ieder punt in de ruimte, voor elke tijd t . Ze bepalen welke andere gebeurtenissen licht-, ruimte- of tijdachtig met het betreffende punt verbonden zijn. Als je lang genoeg wacht, zullen de lichtkegels met hun oorsprong op dezelfde tijd t en op onderlinge afstand d elkaar na een tijd $t + \Delta t$ overlappen, namelijk zodra $c\Delta t \geq d$. Tot die tijd kunnen ze van elkaar geen lichtsignalen ontvangen. Maar zoals we hebben gezien, is gelijktijdigheid relatief. In een ander inertiaalstelsel zijn het andere verzamelingen lichtkegels die hun oorsprong hebben op $t' = 0$. Ook de onderlinge afstanden d' zijn anders. Niettemin zijn de lichtkegels zelf in alle inertiaalstelsels identiek, en zijn alle waarnemers het er over eens welke lichtsignalen een andere waarnemer vanaf welk punt in de tijd-ruimte wel of niet kunnen bereiken.

Hoofdstuk 4

Toepassingen

4.1 Kosmische straling en muonen

Hoewel inertiaalstelsels speciaal zijn, kan een onbeperkt aantal van zulke stelsels geconstrueerd worden. In ieder van die stelsels worden gebeurtenissen in tijd en ruimte anders beschreven, maar niettemin kunnen waarnemers in verschillende inertiaalstelsels het eens worden over ketens van oorzaak en gevolg. Dat heeft direct te maken met de eindige snelheid waarmee licht en andere fysische signalen zich voortplanten, waardoor het duidelijk is wat de bron en wat de ontvanger van een signaal is: de ontvanger moet zich binnen de lichtkegel van de bron bevinden.

Als voorbeeld van hoe eenzelfde verschijnsel in de relativiteitstheorie vanuit verschillende gezichtspunten beschreven kan worden, behandelen we de detectie en het verval van muonen in de kosmische straling. Kosmische straling is de naam voor de regen van deeltjes die zonder ophouden vanuit de ruimte atmosfeer van de aarde binnendringen. Deze deeltjes kunnen zeer veel energie bezitten, in sommige gevallen veel meer dan deeltjes in de grote versnellers in onze laboratoria. Als die hoog-energetische deeltjes op stikstof- of zuurstofatomen in de atmosfeer botsen, ontstaat er een regen aan nieuwe deeltjes, de meeste instabiel. Onder die instabiele deeltjes zijn een groot aantal *muonen*, deeltjes die erg lijken op elektronen, maar ruim 200 maal zoveel massa bezitten. In rust valt een muon na gemiddeld $2.2 \mu\text{sec}$ uiteen¹ in een gewoon elektron en twee neutrino's, lichte ongeladen deeltjes die bijna niet detecteerbaar zijn.

Aangezien de snelheid van het licht in goede benadering $300\,000 \text{ km/sec}$ bedraagt, zou een muon in $2.2 \mu\text{sec}$ maximaal 660 meter kunnen afleggen. Maar de muonen in de kosmische straling, die met grote snelheid door de atmosfeer reizen, kunnen vaak tientallen kilometers afleggen voordat ze tot elektronen vervallen; veel muonen ontstaan op 20 km hoogte of meer, maar bereiken toch het aardoppervlak. De verklaring voor deze paradox is gelegen in de relativiteitstheorie: de snelheid van de muonen ligt dicht bij de lichtsnelheid, en dus speelt de tijddilatatie een belangrijke rol.

¹Een microseconde is een miljoenste seconde: $1\mu\text{sec} = 10^{-6} \text{ sec}$. *N.B.:* in wetenschappelijke notatie gebruiken we een punt i.p.v. een komma om decimale breuken aan te geven.

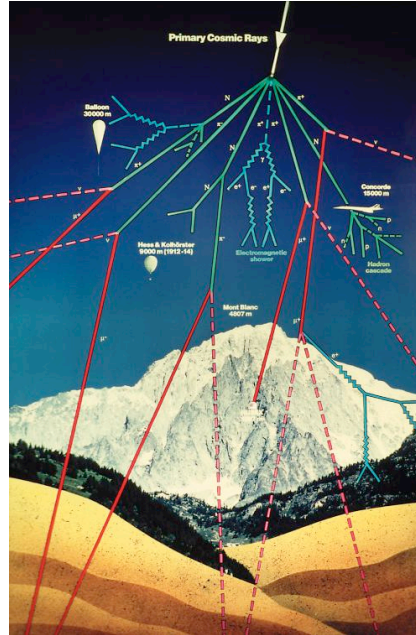


Fig. 4.1: Schematische weergave van een kosmische deeltjeslawine

Voor een meer gedetailleerde verklaring kiezen we twee inertiaalstelsels: een stelsel Σ dat met het muon meebeweegt, en een stelsel Σ' vast verbonden met het aardoppervlak. In het stelsel Σ is het muon in rust, met een gemiddelde levensduur van $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ sec. Gezien vanuit het stelsel Σ' op aarde beweegt het muon met snelheid v , en dus is de levensduur van het deeltje die daar gemeten wordt

$$\tau'_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.1)$$

Als voorbeeld nemen we $v/c = 0.995$; dan is

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.1 \Rightarrow \tau'_\mu = \frac{2.2}{0.1} \times 10^{-6} = 0.22 \times 10^{-4} \text{ sec}. \quad (4.2)$$

Zo'n muon leeft dus gemiddeld tien keer zo lang, en kan in die tijd dan 6.6 km afleggen, gemeten vanaf het aardoppervlak.

Hetzelfde probleem kun je nu ook beschouwen vanuit het standpunt van het muon, in het stelsel Σ . In dat stelsel staat het muon stil, en vervalt het na $2.2 \mu\text{sec}$. Dat muon zal het aardoppervlak met snelheid v op zich af zien komen. Daarom zal de atmosferische afstand tussen het muon en het aardoppervlak door lengtecontractie verkort zijn. Als deze atmosferische afstand h' is, gemeten vanaf het aardoppervlak in het stelsel Σ' , dan is de corresponderende afstand h , gemeten in het ruststelsel van het muon volgens de analyse in paragraaf 2.4, ingekort tot

$$h = h' \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4.3)$$

In ons voorbeeld met $v/c = 0.995$ wordt de afstand tot het aardoppervlak zoals gezien door het muon tien maal kleiner, zodat bij voorbeeld een atmosferische hoogte van 5 km in het

muon-ruststelsel tot 500 m wordt gereduceerd. Vanuit dit gezichtspunt kan het muon dus op het aardoppervlak terecht komen, omdat het aardoppervlak maar een kleine afstand hoeft af te leggen tot aan het muon, en daar aankomt voordat het muon vervalt.

Deze uitvoerige analyse laat zien, dat tijddilatatie en lengtecontractie twee kanten van dezelfde medaille zijn: dat muonen uit de kosmische straling het aardoppervlak kunnen bereiken ligt volgens de ene waarnemer aan de tijddilatatie, en volgens een andere aan lengtecontractie, maar beiden zijn het er over eens of het muon op aarde aankomt of niet.

4.2 Het Dopplereffect

Bewegende klokken lopen langzamer dan in rust, en bewegende meetlatten zijn korter dan in rust. Daarom is het geen verrassing dat de frequentie en golflengte van licht uitgezonden door een bewegende bron verschillen van die voor dezelfde bron in rust. Dit verschijnsel heet het *Dopplereffect*.

We willen de volgende vraag beantwoorden: als een lichtbron in rust licht met golflengte λ_0 en frequentie $f_0 = c/\lambda_0$ uitstraalt, wat is dan de frequentie f die een waarnemer ziet als de bron met snelheid v van hem af beweegt? Om deze vraag te beantwoorden nemen we weer een inertiaalstelsel Σ in rust t.o.v. de waarnemer, en een stelsel Σ' in rust t.o.v. de bron. Σ' beweegt dus met snelheid v langs de x -as van de waarnemer af. Op punt x aangekomen begint de bron een lichtgolf uit te zenden; na een tijd T is de lichttrein precies een golflengte lang. De bron bevindt zich dan inmiddels op punt $x_1 = x + vT$, terwijl het lichtfront zich in de tegengestelde richting naar de waarnemer toe heeft bewogen over een afstand cT ; het lichtfront bevindt zich dus op het punt $x_2 = x - cT$. De golflengte in het stelsel Σ is dan de totale afstand tussen de bron op x_1 en het golffront op x_2 :

$$\lambda = (c + v)T. \quad (4.4)$$

De frequentie die een stilstaande waarnemer in Σ dus ziet is

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{(1 + v/c)T}. \quad (4.5)$$

Nu is T de tijd die de bron nodig heeft om een golf uit te zenden in het stelsel Σ , waarin de bron beweegt. Deze tijd is langer dan de tijd T' die het kost om een golf uit te zenden in het ruststelsel van de bron, vanwege de tijddilatatie:

$$T' = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.6)$$

De eigenfrequentie van de bron, de frequentie van het licht zoals het wordt uitgezonden in het stelsel Σ' , is dus

$$f_0 = f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{T \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.7)$$

Invullen van dit resultaat in vergelijking (4.5) leidt dan tot het resultaat

$$f = f' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = f_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \quad (4.8)$$

Voor de golflengte (in vacuüm) geldt het omgekeerde:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \lambda_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \quad (4.9)$$

Dus als de bron van de waarnemer af beweegt wordt de frequentie kleiner en de golflengte langer. Omdat rood licht in het spectrum van zichtbaar licht de langste golflengte heeft, noemen we dit een *roodverschuiving*.

Wanneer de bron naar de waarnemer toe beweegt kunnen we dezelfde analyse maken, met als enig verschil dat we v moeten vervangen door $-v$. In dat geval wordt de waargenomen frequentie groter en de golflengte kleiner:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \quad (4.10)$$

Deze vorm van Dopplereffect heet vanzelfsprekend een *blauwverschuiving*.

4.3 De wet van Hubble

Lang niet alle sterren in het heelal hebben een vaste helderheid. Er zijn ruwweg twee soorten veranderlijke sterren. De ene soort verandert periodiek van helderheid, typisch een factor 2 in een paar dagen. De andere soort verandert eenmalig reusachtig in helderheid, die soms wel een factor van een miljard of meer toeneemt in enkele dagen, en dan terugvalt over een periode van weken tot maanden.

Als voorbeeld van periodiek veranderlijke sterren gelden de Cepheïden. In 1912 vond de Amerikaanse sterrenkundige Henriette Leavitt een direct verband tussen de periode en de absolute helderheid van deze sterren. Door de periode te meten weet je dus hoe helder de ster in werkelijkheid is. De helderheid die we op aarde meten (de schijnbare helderheid) hangt echter af van de afstand. Uit de schijnbare helderheid en de periode kunnen we nu omgekeerd de afstand tot de ster bepalen. Door de ontdekking van Cepheïden in de Andromedanevel kon een andere Amerikaanse sterrenkundige, Edwin Hubble, in 1924 vaststellen deze nevel een afzonderlijk sterrenstelsel was, ver buiten onze melkweg. Al snel daarna was er een groot aantal sterrenstelsels buiten onze melkweg bekend waarvan de afstand bepaald kon worden.

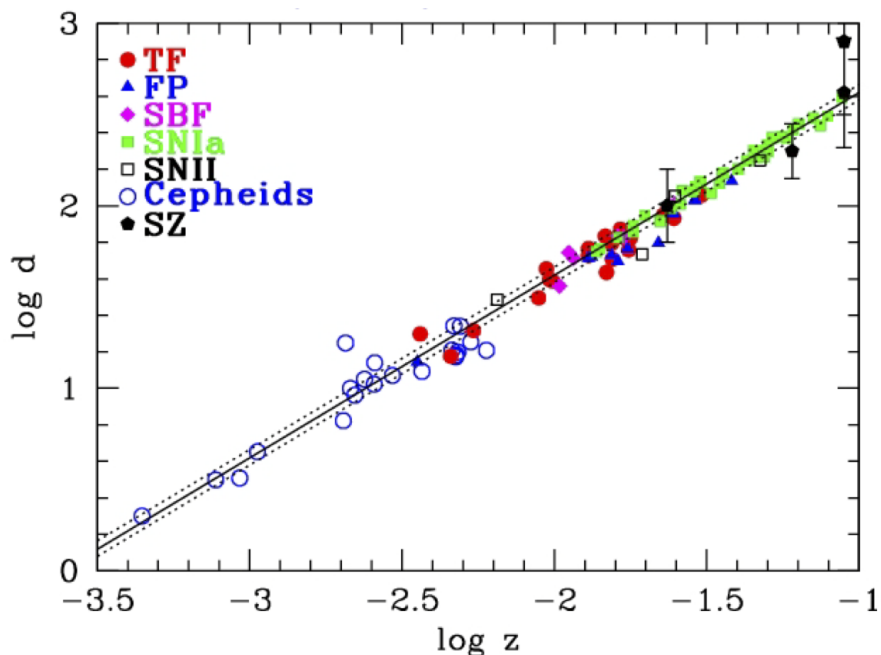


Fig. 4.2: Roodverschuiving versus afstand van veranderlijke sterren

Eenmalig veranderende sterren zijn nova's en supernova's. Dit zijn sterren die door groot-schalige kernfusie in korte tijd een gigantische hoeveelheid energie kunnen vrijmaken. Een bepaald type supernova, bekend als type Ia, ontstaat als een kleine witte dwergster in een dubbelstersysteem door het opnemen van materie van de begeleidende ster een kritische massa overschrijdt en explodeert. De hoeveelheid energie die daarbij vrijkomt is goed bekend en direct te bepalen uit de snelheid waarmee de helderheid verandert. Ook in dit geval kan dus uit de op aarde gemeten schijnbare helderheid en de helderheidsverandering de afstand worden bepaald.

Nu kun je behalve de afstand ook de radiële snelheid van de sterren, en van de sterrenstelsels waar ze in staan, bepalen door de roodverschuiving te meten. Dat kan betrouwbaar door naar *spectraallijnen* te kijken, licht van speciale frequenties die karakteristiek zijn voor bepaalde chemische elementen. Als de frequenties/golflengten van die lijnen systematisch verschoven zijn, is dat een maat voor de snelheid van de bron. Een aantal van zulke metingen is uitgezet in fig. 3.3. Deze figuur laat zien, dat de roodverschuiving van sterren in andere sterrenstelsels systematisch toeneemt met de afstand. Hiertoe is verticaal de afstand uitgezet (op een logaritmische schaal) en horizontaal de logaritme van de roodverschuiving, getalsmatig gedefinieerd door de relatieve verandering van de golflengte

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + z. \quad (4.11)$$

Het verband tussen z en de snelheid is volgens vergl. (4.9):

$$1 + z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = 1 + \frac{v}{c} + \mathcal{O}[v^2/c^2]. \quad (4.12)$$

Dus als de snelheid en de bijbehorende roodverschuiving niet al te groot zijn, is

$$z \approx \frac{v}{c}. \quad (4.13)$$

Nu valt uit de figuur af te leiden, dat z en d evenredig zijn, en dus ook v en d ; daarom kunnen we een evenredigheidsconstante H_0 invoeren gedefiniëerd door

$$H_0 = \frac{v}{d} \Leftrightarrow z = \frac{H_0 d}{c}. \quad (4.14)$$

Uit de waarnemingen volgt als waarde van deze constante

$$H_0 = (72 \pm 3) \text{ km/s/Mpc}. \quad (4.15)$$

Een toelichting op de eenheden: Mpc staat voor megaparsec, een astronomische afstand gelijk aan

$$1 \text{ Mpc} \simeq 3.086 \times 10^{19} \text{ km}, \quad (4.16)$$

vergelijkbaar met de afstand tot Andromeda. De betekenis van de Hubbleconstante is, dat de gemiddelde snelheid waarmee sterren en sterrenstelsels van ons af bewegen iedere megaparsec toeneemt met 72 km/s. Door meeton nauwkeurigheden is de onzekerheid in deze waarde ongeveer 3 km/s.

De interpretatie van deze metingen is enigszins subtiel. Het is niet zo, dat wij in het middelpunt van een explosie staan van waaruit alle sterrenstelsels wegvliegen. Dat zou er eerder toe hebben geleid dat de snelheid van de verste stelsels zou moeten afnemen, i.p.v. toenemen. De juiste interpretatie is, dat *alle* sterrenstelsels zich overal van *elkaar* verwijderen, zoals de afstanden tussen de rozijnen in een krentebrood toenemen als het deeg gaat rijzen. Met andere woorden: het heelal dijt uit, waarbij de afstanden tussen de sterrenstelsels voortdurend groter worden.

Dit betekent, dat in het verleden die onderlinge afstanden kleiner waren. Extrapolatie van de bekende gegevens leert ons dan dat tussen 13 en 14 miljard jaar geleden alle materie op atomaire afstanden van elkaar moet hebben gezeten. Ongetwijfeld was het heelal toen niet alleen heel compact en dicht, maar ook heel heet. De daarbij horende warmtestraling, voor zover nog aanwezig, zou dan door het uitdijen en afkoelen van het heelal ook weer in golflengte moeten zijn toegenomen. Deze straling is inderdaad waargenomen, en staat bekend als de kosmische achtergrondstraling (CMB, voor Cosmic Background Radiation). De CMB heeft nu een temperatuur van 2.7 K, vlak boven het absolute nulpunt. Dat geeft aan hoe groot en koud het heelal nu dus is.

Hoofdstuk 5

Energie en impuls

5.1 De viersnelheid

Alle inertiaalstelsels zijn equivalent, zodat de keuze van een stelsel veelal wordt bepaald door praktische overwegingen. Afstanden en tijden in het ene stelsel kunnen worden omgerekend naar een ander stelsel door middel van de Lorentztransformaties (2.16). Het omrekenen van snelheden tussen inertiaalstelsels is aanzienlijk ingewikkelder. Een voorbeeld daarvan is het samenstellen van de snelheid van een bewegend voorwerp met dat van een inertiaalstelsel, een probleem dat we al in hoofdstuk 2 hebben besproken. Zeker als het gaat om het combineren van snelheden in verschillende richtingen, zoals besproken in paragraaf 2.6, leidt dit tot lang en weinig inzichtelijk rekenwerk.

Daarom introduceren we hier een simpele methode die het omrekenen van snelheden terugbrengt tot het uitvoeren van Lorentztransformaties. Dit gaat met behulp van de grootheden eigentijd en viersnelheid. De eigentijd van een bewegend voorwerp hebben we al in paragraaf 3.2 besproken: het is de tijd gemeten door een klok in een inertiaalstelsel dat met het voorwerp meebeweegt. Als dit voorwerp t.o.v. het referentiestelsel Σ in een tijd Δt een verplaatsing $\Delta \mathbf{r}$ ondergaat, dan is de eigentijd $\Delta \tau$ de zuivere tijd overeenkomend met het Minkowski-interval I_M :

$$c^2 \Delta \tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2. \quad (5.1)$$

Beweegt het voorwerp met snelheid \mathbf{v} , dan is de afstand die het in de tijd Δt in Σ aflegt $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$, zodat

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (5.2)$$

In plaats van de kloksnelheid

$$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t, \quad (5.3)$$

kunnen we nu ook een andere grootheid invoeren om de snelheid uit te drukken: de verplaatsing per eenheid eigentijd, in plaats van per eenheid kloktijd:

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (5.4)$$

Uiteraard kan $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ componenten in alle richtingen hebben. Daarnaast kunnen we een vierde snelheidscomponent u_t invoeren, als de afstand die een lichtsignaal aflegt per eenheid eigentijd:

$$u_t = \frac{c\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (5.5)$$

Deze factor vertelt ons feitelijk, hoe we eigentijd in kloktijd moeten omrekenen:

$$\Delta t = \frac{u_t}{c} \Delta\tau.$$

Samen vormen de vier snelheidscomponenten (u_t, u_x, u_y, u_z) de viersnelheid:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (u_t, u_x, u_y, u_z) \\ &= \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Uit deze definities volgt onmiddellijk, dat de viersnelheid voldoet aan de regel

$$-u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = -c^2. \quad (5.7)$$

De vier componenten van \underline{u} kunnen veranderen van inertiaalstelsel tot inertiaalstelsel, maar de combinatie van kwadraten van deze componenten in (5.7) heeft in ieder stelsel dezelfde waarde; zulke onveranderlijke grootheden noemen we een *invariant*.

Een andere belangrijke eigenschap van de viersnelheid is, dat de componenten in verschillende inertiaalstelsels in elkaar kunnen worden omgerekend d.m.v. Lorentztransformaties. Als \underline{u} de viersnelheid van een object in een stelsel Σ voorstelt, en \underline{u}' is de viersnelheid gemeten in een stelsel Σ' dat t.o.v. Σ met snelheid v in de x -richting beweegt, dan zijn de componenten met elkaar verbonden door de transformaties

$$u'_t = \frac{u_t - v u_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u'_x = \frac{u_x - v u_t/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z. \quad (5.8)$$

Dit volgt direct uit de definities (5.4) en (5.5), en de invariantie van de eigentijd $\Delta\tau' = \Delta\tau$; in het bijzonder

$$u'_t = \frac{c\Delta t'}{\Delta\tau'} = \frac{1}{\Delta\tau} \frac{c\Delta t - v\Delta x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u_t - v u_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

en

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta\tau'} = \frac{1}{\Delta\tau} \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u_x - v u_t/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nu kan de gewone kloksnelheid \mathbf{v} uit de viersnelheid berekend worden m.b.v. de uitdrukkingen (5.4) of (5.6), waaruit volgt dat

$$1 + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2/c^2}}. \quad (5.9)$$

Dientengevolge is de viersnelheid een handig hulpmiddel bij het omrekenen van snelheden tussen inertiaalstelsels via de transformaties (5.8).

We zullen dit hier toelichten aan de hand van twee voorbeelden. In beide gevallen gaan we uit van de standaard situatie, waarin een inertiaalstelsel Σ' t.o.v. een stelsel Σ met snelheid v in de x -richting beweegt. In het eerste voorbeeld staat een voorwerp stil in Σ' . De componenten van de viersnelheid \underline{u}' van dit object t.o.v. Σ' zijn dan

$$\underline{u}' = (c, 0, 0, 0), \quad (5.10)$$

dus $u'_t = c$ en $u'_x = 0$. Nu beweegt Σ t.o.v. Σ' met de tegengestelde snelheid $-v$ langs de x -as; de viersnelheid \underline{u} t.o.v. Σ heeft dan volgens (5.8) de componenten:

$$u_t = \frac{u'_t + vu'_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u_x = \frac{u'_x + vu'_t/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u'_y = u'_z = 0. \quad (5.11)$$

Dit is niets anders dan de viersnelheid van een voorwerp dat met kloksnelheid v langs de x -as in Σ beweegt. Deze uitkomst spreekt eigenlijk vanzelf: een voorwerp dat stilstaat in Σ' heeft t.o.v. Σ dezelfde snelheid als Σ' .

Het tweede voorbeeld bouwt hierop voort, met een voorwerp dat nu in Σ' met kloksnelheid v' in de x' -richting beweegt. Dus t.o.v. Σ' heeft de viersnelheid nu de componenten

$$u'_t = \frac{c}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad u'_x = \frac{v'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad u'_y = u'_z = 0. \quad (5.12)$$

Omdat er geen bewegingen in de y - en z -richtingen zijn, kunnen we deze componenten verder buiten beschouwing laten. De viersnelheid \underline{u} t.o.v. Σ heeft dan de relevante componenten

$$u_t = \frac{u'_t + vu'_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c + vv'/c}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}}, \quad (5.13)$$

$$u_x = \frac{u'_x + vu'_t/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v' + v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}}.$$

Nu beweegt het voorwerp t.o.v. Σ ook in de x -richting, met een kloksnelheid w die we willen bepalen. Daaruit volgt, dat de componenten van de viersnelheid t.o.v. Σ ook te schrijven moeten zijn als

$$u_t = \frac{c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad u_x = \frac{w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (5.14)$$

Vergelijken we dit met de uitdrukkingen in vgl. (5.13) dan zien we, dat

$$\frac{w}{c} = \frac{u_x}{u_t} = \frac{v + v'}{c + vv'/c}, \quad (5.15)$$

equivalent met vergelijking (2.31) in paragraaf 2.5. Merk op dat vergelijking (2.33) ook hier van belang is om de volledige consistentie van de uitdrukkingen voor u_t en u_x in (5.13) en (5.14) te garanderen.

5.2 De vierimpuls

Net zoals we de snelheid kunnen generaliseren tot de viersnelheid, kunnen we ook het begrip impuls generaliseren tot de vierimpuls:

$$\underline{p} = m\underline{u} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right). \quad (5.16)$$

En net als voor de viersnelheid, volgt uit vergl. (5.7) dat we uit \underline{p} een invariant kunnen maken:

$$-p_t^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -m^2 c^2. \quad (5.17)$$

In het bijzonder geldt voor een deeltje in rust, dat

$$p_t|_{\mathbf{v}=0} = mc. \quad (5.18)$$

Anderzijds geldt algemeen voor de drie ruimtelijke componenten $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, dat

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}. \quad (5.19)$$

Nu kunnen we in de limiet van kleine snelheden: $\mathbf{v}^2 \ll c^2$, de volgende benadering maken:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \approx \frac{1}{1 - \mathbf{v}^2/2c^2 + \dots} \approx 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + \dots, \quad (5.20)$$

waarbij de puntjes in het algemeen staan voor termen die nog een orde van grootte in \mathbf{v}^2/c^2 kleiner zijn, in dit geval dus minimaal evenredig met $(\mathbf{v}^2/c^2)^2$. Als $\mathbf{v}^2/c^2 \ll 1$ krijgen we dan bij benadering

$$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v} + \dots, \quad cp_t \approx mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \dots \quad (5.21)$$

Dus als de snelheid van het deeltje veel kleiner is dan de lichtsnelheid komt \mathbf{p} overeen met de impuls (1.16), en cp_t komt overeen met de kinetische energie plus een constante term

$$E_0 = mc^2, \quad (5.22)$$

die wegens (5.18) de *rustenergie* wordt genoemd. De combinatie cp_t heeft inderdaad de dimensie van energie, zodat het gebruikelijk is deze te identificeren met de totale energie van een vrij lichaam:

$$E = cp_t = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (5.23)$$

In termen van de totale energie kunnen we vergelijking (5.17) omschrijven in de vorm

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2. \quad (5.24)$$

We zien uit deze vergelijkingen opnieuw, dat voor een deeltje in rust ($\mathbf{p} = 0$), de totale energie gelijk is aan de rustenergie: $E = E_0$, gedefinieerd in (5.22).

Een van de redenen voor het invoeren van de vierimpuls is weer, dat de componenten eenvoudig transformeren tussen inertiaalstelsels; met de standaardconventies dat de inertiaalstelsels onderling in de x -richting bewegen, krijgen we net als in vergl. (5.8) voor de viersnelheid, dat

$$p'_t = \frac{p_t - wp_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - wp_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (5.25)$$

Equivalenten vormen van deze transformaties zijn

$$E' = \frac{E - wp_x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - wE/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (5.26)$$

5.3 Behoudswetten

Een tweede reden om belang te hechten aan de vierimpuls is, dat de componenten van deze grootheid bij afwezigheid van wisselwerkingen behouden zijn. In de eerste plaats geldt dat voor individuele deeltjes in de afwezigheid van externe krachten. Een elektron dat een bepaalde hoeveelheid kinetische energie bezit, zal in een rechte lijn met constante energie en impuls blijven doorlopen, zolang het geen andere deeltjes of velden tegenkomt waar het door gestopt of afgebogen wordt. Evenzo geldt voor een systeem dat uit twee of meer deeltjes bestaat, dat zelfs als deze onderling in wisselwerking zijn, hun totale vierimpuls behouden is. Dat is geen wet die je met zuiver wiskundige argumenten kunt afleiden: er liggen natuurkundige, empirische waarnemingen aan ten grondslag. Het is een dynamisch principe, vergelijkbaar met en verwant aan de bewegingswetten van Newton, maar dan in een versie waarin de relativistische principes van equivalentie van inertiaalstelsels en universaliteit van de lichtsnelheid zijn ingebouwd.

Een simpel voorbeeld wordt geleverd door de elastische verstrooiing van deeltjes, b.v. van protonen in een versneller als de LHC¹. Daar botst een proton met snelheid \mathbf{v} op een proton met tegengestelde snelheid $-\mathbf{v}$; de impulsen van de protonen zijn dus even groot, maar tegengesteld:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}, \quad (5.27)$$

De som van de impulsen na de botsing is nu gelijk aan de som van impulsen voor de botsing:

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'. \quad (5.28)$$

Behoud van energie betekent, dat ook de totale energie voor en na de botsing hetzelfde is:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2. \quad (5.29)$$

¹De fysisch meest interessante botsingen van protonen in de LHC zijn juist niet elastisch: botsingen waarin allerlei nieuwe deeltjes ontstaan.

Gebruiken we nu de uitdrukking (5.24) voor de energie van de individuele deeltjes, dan vinden we

$$2\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} = 2\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}'^2c^2}. \quad (5.30)$$

Dit houdt in dat

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|. \quad (5.31)$$

Bij gevolg zijn de impulsen van de deeltjes voor en na de botsing even groot; alleen de richting kan door de botsing veranderen. In dit opzicht zijn elastische botsingen in de relativistische beschrijving niet anders dan die in de newtonse mechanica.

Er zijn echter ook belangrijke verschillen tussen botsingen volgens de relativistische en newtonse theorie. Dat begint ermee, dat de massa van deeltjes ook een bijdrage levert aan hun energie. Dat is meer dan alleen een formele vaststelling: deze energie kan ook omgezet worden in andere vormen van energie; we zullen daar verderop nog op terugkomen. Maar tegelijk is het belangrijk op te merken, dat er ook deeltjes zonder massa zijn, deeltjes die alleen kinetische energie bezitten zonder rustenergie. Voor zulke deeltjes geldt

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad E = |\mathbf{p}|c. \quad (5.32)$$

Nu volgt uit de definitie (5.16), dat voor deeltjes met massa $m \neq 0$

$$\frac{\mathbf{p}}{p_t} = \frac{c\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{\mathbf{p}^2c^2}{E^2}. \quad (5.33)$$

In deze vergelijking komt de massa echter niet meer expliciet voor, dus kunnen we de limiet $m \rightarrow 0$ nemen en hem ook toepassen op massaloze deeltjes. Met gebruikmaking van vergl. (5.32), krijgen we dan:

$$\mathbf{v}^2 = c^2. \quad (5.34)$$

We zien dus, dat voor massaloze deeltjes van elke energie de snelheid gelijk aan de lichtsnelheid is: massaloze deeltjes staan nooit stil, maar bewegen *altijd* met de snelheid van het licht. Inderdaad kunnen we licht zelf opvatten als bestaande uit massaloze deeltjes: lichtquanta of *fotonen*. Aan deze deeltjestheorie van het licht heeft Einstein, voortbouwend op werk van Planck, ook belangrijke bijdragen geleverd².

5.4 Het Comptoneffect

Een belangrijke test voor het idee dat licht uit deeltjes bestaat is het Comptoneffect: de verstrooiing van licht aan een geladen deeltje zoals een elektron. Als de deeltjestheorie van licht juist is, kan je dit verstrooiingsproces behandelen als een botsing tussen een massaloos en een massief deeltje. Het energieverlies van licht bij verstrooiing onder een bepaalde hoek kan je dan als volgt uitrekenen.

²De Nobelprijs is Einstein ook hiervoor toegekend, niet voor de relativiteitstheorie.

Een foton met impuls \mathbf{p} botst op een elektron in rust. De massa van het elektron is m_e . Na de botsing heeft het foton een impuls \mathbf{p}' en het elektron een impuls \mathbf{p}'_e ; de wet van behoud van impuls houdt dan in dat

$$\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_e = \mathbf{p}. \quad (5.35)$$

Hieruit volgt, dat de drie impulsvectoren in een vlak liggen: \mathbf{p}' en \mathbf{p}'_e bepalen samen een vlak, en hun som \mathbf{p} moet daar dan ook in moet liggen. We kiezen dit vlak als x - y -vlak, zodat geen van de impulsvectoren componenten in de z -richting hebben. Als x -richting kiezen we voorts de bewegingsrichting van het oorspronkelijke foton, zodat $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$. Voor de impulsvectoren van het foton en elektron na de botsing betekent dit dan, dat

$$\mathbf{p}' = (p'_x, p'_y, 0), \quad \mathbf{p}'_e = (p'_{ex}, p'_{ey}, 0), \quad (5.36)$$

met

$$p'_x + p'_{ex} = p, \quad p'_y + p'_{ey} = 0. \quad (5.37)$$

Als nu θ de hoek is waaronder het foton wordt verstrooid, en $p' = \sqrt{p'^2_x + p'^2_y}$, dan is

$$p'_x = p' \cos \theta, \quad p'_y = p' \sin \theta. \quad (5.38)$$

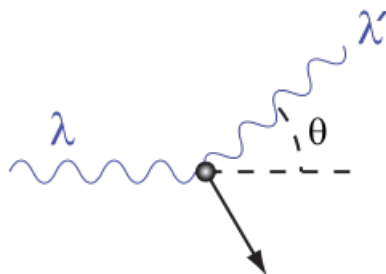


Fig. 5.1: Verstrooiing van licht aan een geladen deeltje volgens Compton.

Omdat het foton massaloos is kunnen we bovendien de impulsen p en p' uitdrukken in termen van de energie van het foton voor en na de botsing:

$$E = pc, \quad E' = p'c. \quad (5.39)$$

Met behulp van de vergelijkingen (5.37) vinden we dan voor de impulscomponenten van het elektron na de botsing, dat

$$p'_{ex} = p - p' \cos \theta = \frac{E}{c} - \frac{E'}{c} \cos \theta, \quad (5.40)$$

$$p'_{ey} = -p' \sin \theta = -\frac{E'}{c} \sin \theta.$$

Nu wordt de energie van het elektron voor en na de botsing gegeven door

$$E_e = m_e c^2, \quad E'_e = \sqrt{\mathbf{p}'_e{}^2 c^2 + m_e^2 c^4}. \quad (5.41)$$

Uit de laatste vergelijking volgt dan, dat

$$E_e'^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta + m_e^2 c^4. \quad (5.42)$$

We kunnen deze grootheid echter ook uitrekenen uit de wet van behoud van energie:

$$E' + E_e' = E + m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad E_e' = E - E' + m_e c^2, \quad (5.43)$$

zodat

$$E_e'^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' + 2m_e c^2(E - E') + m_e^2 c^4. \quad (5.44)$$

Door het combineren van de resultaten (5.42) en (5.44) krijgen we nu

$$EE'(1 - \cos \theta) = m_e c^2 (E - E'), \quad (5.45)$$

wat om te schrijven is tot

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta). \quad (5.46)$$

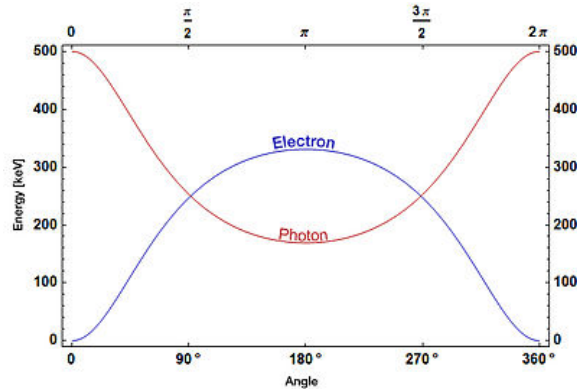


Fig. 5.2: Verandering van de energie van het foton en het elektron als functie van de verstrooiingshoek bij Comptonverstrooiing.

Dit is een verband tussen de verandering in de energie en de richting van het foton dat experimenteel getoetst kan worden, mits je de energie van fotonen kunt bepalen.

Je kunt de verandering in energie van het foton ook vertalen in termen van een verandering van de golflengte van de straling. Planck ontdekte in 1900 dat hij het kleurspectrum van warmtestraling kon verklaren als hij aannam dat er een kleinste hoeveelheid energie is die licht van een bepaalde golflengte kan hebben. Zo'n lichtquantum, de kleinste hoeveelheid licht met een frequentie f en golflengte $\lambda = c/f$, heeft een energie

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (5.47)$$

De evenredigheidsconstante h , die universeel is en dus onafhankelijk van de frequentie, heet de constante van Planck en heeft de waarde

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV s}. \quad (5.48)$$

Einstein combineerde de formule van Planck met zijn fotontheorie en concludeerde, dat het foton dan een impuls

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

moet hebben. In termen van de verandering van golflengte kunnen we de Comptonformule (5.46) nu herschrijven als

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (5.49)$$

De combinatie van grootheden in de eerste factor aan de rechterkant van de vergelijking heeft de dimensie van lengte, en wordt de Comptongolflengte van het elektron genoemd:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m}. \quad (5.50)$$

Omdat deze zo klein is, kun je het experiment alleen uitvoeren met fotonen die zelf ook een kleine golflengte hebben, zoals gammastraling. Arthur Compton deed dit experiment in 1923 uit en liet zien dat de verstrooiing van gammastraling aan elektronen inderdaad aan deze relatie voldoet. In 1927 kreeg hij daarvoor de Nobelprijs.

Opgave 5.1

Bereken de Comptongolflengte voor een proton en leg uit waarom het Comptoneffect met protonen in de praktijk niet te testen is.

5.5 Massa als een vorm van energie

Er is een belangrijk verschil tussen deeltjes met of zonder massa: een deeltje zonder massa beweegt altijd met de lichtsnelheid, ongeacht zijn energie, terwijl een deeltje met massa tot stilstand kan worden gebracht, waarbij de kinetische energie verdwijnt en er alleen rustenergie overblijft in de vorm van massa.

Dat massa een echte vorm van energie vertegenwoordigt blijkt uit het feit dat massa in andere vormen van energie kan worden omgezet, en omgekeerd. Dit komt duidelijk naar voren in de kernfysica; atoomkernen zijn opgebouwd uit protonen en neutronen, die in vrije toestand een massa bezitten gegeven door de rustenergie

$$m_p c^2 = 938.3 \text{ MeV}, \quad m_n c^2 = 939.6 \text{ MeV}. \quad (5.51)$$

Een heliumkern echter, d.w.z. een α -deeltje bestaande uit 2 protonen en 2 neutronen, heeft een massa m_α ter grootte

$$m_\alpha c^2 = 3727 \text{ MeV}. \quad (5.52)$$

Bij de vorming van een α -deeltje uit 2 protonen en 2 neutronen komt dus een energie

$$\Delta m c^2 = 2(m_p c^2 + m_n c^2) - m_\alpha c^2 = 3756 - 3727 = 29 \text{ MeV} \quad (5.53)$$

vrij in de vormte van warmte en/of straling. Omgekeerd geldt ook: om de protonen en neutronen in een α -deeltje vrij te maken moet je eerst minimaal 29 MeV aan energie toevoeren. Uit zichzelf kunnen de kerndeeltjes in de heliumkern nooit vrijkomen. Het energieverval Δmc^2 noemen we daarom de *bindingsenergie* van het α -deeltje. Deze bindingsenergie, die dus vrijkomt bij de samensmelting van kerndeeltjes tot een atoomkern, is een vorm van echte energie. Onze zon en alle andere sterren halen hun energie uit dit soort kernfusieprocessen.

Massa is dus niet alleen formeel, maar ook praktisch gesproken een vorm van energie. Bijgevolg kan je niet alleen massa in andere vormen van energie omzetten, zoals bij kernfusie, maar ook omgekeerd uit energie massa maken. Een voorbeeld is het proces van paarcreatie, waarbij een positief en een negatief geladen elektron gemaakt worden uit fotonen. Naast gewone, negatief geladen elektronen komen er namelijk in de natuur ook deeltjes voor met precies dezelfde massa en een even grote positieve lading. Deze deeltjes worden *positronen* of *anti-elektronen* genoemd. Een elektron en een positron kunnen samen verdwijnen door omzetting in twee fotonen:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (5.54)$$

Merk op, dat aan beide kanten van de reactie de totale elektrische lading nul is, zodat de wet van behoud van (totale) lading niet wordt geschonden. Daarnaast moet ook de totale energie en impuls behouden zijn, wat mogelijk is als er minimaal twee fotonen ontstaan.

De omgekeerde reactie is echter ook mogelijk:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+, \quad (5.55)$$

mits de fotonen maar genoeg energie hebben: de rustenergie van een elektron of positron is 0.511 MeV, dus de fotonen moeten samen minimaal 1.022 MeV aan energie bezitten om dit proces mogelijk te maken.

5.6 Het neutrino

Vrije neutronen zijn niet stabiel: gemiddeld na bijna een kwartier gaat een vrij neutron over in een proton, waarbij ook een elektron vrijkomt zodat de totale lading gelijk blijft. Dit proces heet β -verval van het neutron; het is mogelijk omdat de massa van een vrij neutron groter is dan die van een proton en elektron tesamen:

$$m_n c^2 = 939.6 \text{ MeV}, \quad m_p c^2 = 938.3 \text{ MeV}, \quad m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}. \quad (5.56)$$

Er blijft dus energie over, die je als kinetische energie van het proton en elektron terug zou moeten vinden. Laten we de energie- en impulsbalans opstellen voor het verval van een neutron in rust:

$$\mathbf{p}_n = 0 = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e, \quad E_n = m_n c^2 = E_p + E_e. \quad (5.57)$$

Hieruit volgt

$$\mathbf{p}_p = -\mathbf{p}_e, \quad m_n c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{p}_e^2 c^2} + \sqrt{m_e^2 c^4 + \mathbf{p}_e^2 c^2}. \quad (5.58)$$

Deze vergelijking kun je oplossen voor $p_e = |\mathbf{p}_e|$, met als oplossing

$$p_e^2 = c^2 \frac{(m_n^2 - m_p^2)^2 - 2m_e^2(m_n^2 + m_p^2) + m_e^4}{4m_n^2} = 1.43 \text{ MeV}^2/c^2. \quad (5.59)$$

en dus voor de totale energie:

$$E_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} = 1.30 \text{ MeV}. \quad (5.60)$$

Opgave 5.2

Leid vergelijking (5.59) af.

We zouden dus verwachten, dat de elektronen uit het neutronverval er alle met dezelfde impuls en kinetische energie uitkomen; men zegt dan: het spektrum van de elektronen is *mono-energetisch*. Dit blijkt echter niet overeen te komen met de waarnemingen: in experimenten komen elektronen er met alle mogelijke impulsen tussen nul en 1.20 MeV/c uit. Het energiespektrum van elektronen is dus *continu*, zoals weergegeven in fig. 5.3. Lise Meitner en Otto Hahn, twee natuurkundigen in Berlijn, ontdekten dit voor de eerste wereldoorlog al voor elektronen uit het β -verval van instabiele isotopen. Een tijd lang was dit een aanleiding voor speculaties over schendingen van de wet van behoud van energie.

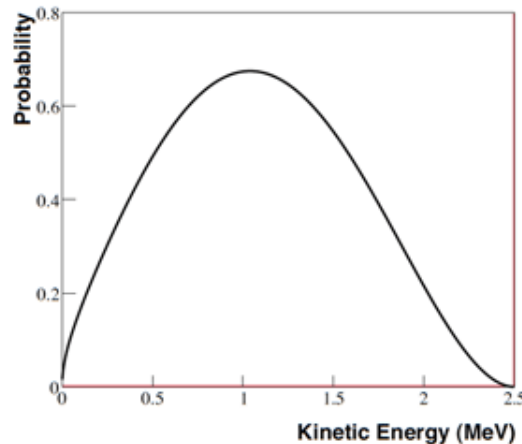


Fig. 5.3: Aantallen elektronen van verschillende kinetische energie bij β -verval.

De juiste verklaring werd in 1930 gegeven door Wolfgang Pauli: behalve een proton en een elektron wordt bij β -verval nog een derde deeltje geproduceerd, het superlichte en elektrisch neutrale *neutrino*. De massa van het neutrino is nog steeds onbekend, maar in ieder geval minder dan een miljoenste van de elektronmassa:

$$m_\nu c^2 < 0.5 \text{ eV}. \quad (5.61)$$

Het neutrino neemt een deel van de energie in β -verval mee; hoeveel hangt af van de hoeken tussen de wegliggende deeltjes proton, elektron en neutrino. Daarom omvat het

energiespectrum van de elektronen alle mogelijke waarden tussen nul en $\Delta E - m_\nu c^2$, met $\Delta E = 1.30$ MeV het verschil in rustenergie van neutron en proton, die nu beschikbaar is voor het elektron en neutrino samen. Door de maximale elektronenergie te meten zou je in principe de neutrinomassa m_ν kunnen bepalen. Deze blijkt echter te klein om in een dergelijk experiment gemeten te kunnen worden.

Hoofdstuk 6

Versnelling en kracht

6.1 Vierversnelling

Het begrip inertiaalstelsel speelt een cruciale rol in de bewegingsleer, zowel in die van Newton als in de relativistische versie. Inertiaalstelsels zijn stelsels waarin het traagheidsprincipe manifest is en vrije deeltjes eenparig langs rechte lijnen bewegen. Verandering van snelheid (in grootte of richting) in een inertiaalstelsel is altijd het gevolg van krachten. Dit principe is ook in de relativistische mechanica van toepassing.

Om snelheidsverandering te beschrijven voeren we het begrip vierversnelling in: de verandering van de viersnelheid als functie van de eigentijd¹. Verandert gedurende een eigentijdperiode $\Delta\tau$ de eigensnelheid met $\Delta\underline{u}$, dan is de gemiddelde vierversnelling $\Delta\underline{u}/\Delta\tau$, wat in de limiet $\Delta\tau \rightarrow 0$ overgaat in de instantane vierversnelling

$$\underline{a} = \frac{d\underline{u}}{d\tau}. \quad (6.1)$$

De vierversnelling heeft een speciale eigenschap, die volgt uit vergl. (5.7):

$$\frac{d}{d\tau} (-u_t^2 + \mathbf{u}^2) = -2u_t a_t + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (6.2)$$

zodat

$$u_t a_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}. \quad (6.3)$$

De tijdcomponent van de vierversnelling ligt dus vast in termen van de drie ruimtelijke componenten. Voor het simpele geval van een cirkelbeweging met constante baansnelheid geldt bijvoorbeeld, dat de snelheid langs de cirkelbaan is gericht, terwijl de versnelling naar het middelpunt van de cirkel is gericht, en dus loodrecht op de snelheid staat: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$, zodat in dat geval $a_t = 0$.

¹De viersnelheid en vierversnelling worden ook wel *eigensnelheid* en *eigenversnelling* genoemd (eng.: *proper velocity* en *proper acceleration*), omdat het veranderingen in de positie en snelheid als functie van de eigentijd betreft, dus in het momentane ruststelsel van de massa m .

Opgave 6.1

Laat op grond van de definitie van de vierversnelling zien, dat onder de standaard Lorentz-transformaties met snelheid w in de x -richting

$$a'_t = \frac{a_t - wa_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad a'_x = \frac{a_x - wa_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (6.4)$$

Opgave 6.2

De gewone versnelling in inertiaalcoördinaten is

$$\mathbf{q} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6.5)$$

a. Bewijs, dat

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{q}}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}/c^2}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}. \quad (6.6)$$

b. Leid hieruit af, dat

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}. \quad (6.7)$$

Uit het resultaat (6.7) volgt, dat $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ dan en slechts dan als $\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = 0$, zodat $a_t = 0$ als $\mathbf{v} = 0$ of als \mathbf{q} loodrecht op \mathbf{v} staat. Verder volgt uit vergelijking (6.6), dat voor een deeltje dat momentaan in rust is: $\mathbf{v} = 0$, de ruimtelijke componenten van de vierversnelling gelijk zijn aan de gewone versnelling: $\mathbf{a} = \mathbf{q}$. Volgens de newtonse mechanica een versnelling echter geleverd door een kracht

$$\mathbf{F}_{Newton} = m\mathbf{q}. \quad (6.8)$$

De kracht die in het momentane ruststelsel op een deeltje werkt kan hier nu mee worden geïdentificeerd. De algemene vorm van de krachtwet in een willekeurig inertiaalstelsel krijgt dan de relativistische vorm:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = m\underline{a}. \quad (6.9)$$

Voor de ruimte- en tijdcomponenten afzonderlijk wordt dit

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = m\mathbf{a}, \quad F_t = \frac{dp_t}{d\tau}.$$

Het voorgaande houdt in, dat zulke krachten in de limiet van kleine snelheden $v \ll c$ overeenkomen met de newtonse krachten: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{q}$, dus voor de ruimtelijke componenten van \underline{F} geldt dat voor kleine snelheden $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}_{Newton}$. Dit geldt in het bijzonder voor statische krachten, zoals een massa die in een zwaartekrachtsveld aan een koord hangt; maar ook op ogenblikken dat een massa momentaan stil staat, zoals een slinger op een van de omkeerpunten.

Uit de vergelijking (6.9) en de uitdrukking (6.3) voor de tijdcomponent van de vierver-
snelling zien we verder, dat de tijdcomponent van de relativistische kracht uitgedrukt kan
worden in termen van de ruimtelijke componenten door

$$F_t = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}. \quad (6.10)$$

Deze conditie moet natuurlijk gelden in ieder inertiaalstelsel. Om dit expliciet na te gaan,
nemen we weer twee inertiaalstelsels Σ en Σ' die met snelheid w t.o.v. elkaar langs de
 x -as bewegen. We nemen voor de eenvoud ook een kracht die in Σ in de x -richting werkt:
 $\mathbf{F} = (F_x, 0, 0)$. We willen aantonen, dat de definitie (6.10) voor F_t consistent is met de
transformatie van de krachtcomponenten van Σ naar Σ' volgens

$$F'_t = \frac{F_t - wF_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad F'_x = \frac{F_x - wF_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (6.11)$$

Om te beginnen, stellen we vast dat een massa die in Σ met de snelheid v beweegt, in Σ'
met snelheid v' beweegt, die volgens vergl. (2.31) wordt gegeven door

$$v' = \frac{v - w}{1 - vw/c^2}; \quad (6.12)$$

het minteken volgt eruit, dat de massa en het stelsel Σ' t.o.v. Σ in dezelfde richting bewegen.
Vervolgens nemen we als uitgangspunt, dat de tijdcomponent van de kracht in de twee
stelsels voldoet aan

$$F_t = \frac{vF_x}{c}, \quad F'_t = \frac{v'F'_x}{c}. \quad (6.13)$$

Hieruit volgt, dat

$$\begin{aligned} F'_t &= \frac{v - w}{1 - vw/c^2} \frac{F'_x}{c} = \frac{vF_x/c - wF_x/c}{1 - vw/c^2} \frac{F'_x}{F_x} \\ &= \frac{F_t - wF_x/c}{1 - vw/c^2} \frac{F'_x}{F_x}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Als nu de ruimtelijke component transformeert volgens

$$F'_x = \frac{F_x - wF_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (6.15)$$

dan is

$$F'_x = \frac{F_x - wvF_x/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \Rightarrow \frac{F'_x}{F_x} = \frac{1 - vw/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (6.16)$$

In combinatie met vergelijking (6.14) krijgen we dan inderdaad

$$F'_t = \frac{F_t - wF_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (6.17)$$

De component F_t van de vierkracht kan geïnterpreteerd worden in termen van het door de kracht geleverde vermogen. Voor deze component betekent de vergelijking (6.9) immers dat

$$F_t = \frac{p_t}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}. \quad (6.18)$$

Dit is consistent met de in paragraaf 5.2 besproken energie-impuls relatie voor een deeltje:

$$\frac{dE^2}{d\tau} = 2E \frac{dE}{d\tau} = \frac{d(\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4)}{d\tau} = 2c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}. \quad (6.19)$$

Na herschikking wordt dit

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{c\mathbf{p}}{E} \cdot \mathbf{F} = \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{F} = F_t. \quad (6.20)$$

De grootheid cF_t is dus de energietoename per eenheid van eigentijd, ofwel het door de vierkracht geleverde eigenvermogen.

Opgave 6.3

We beschouwen een deeltje met massa m en viersnelheid \underline{u} , dat in de x -richting beweegt:

$$\underline{u} = (u_t, u_x, 0, 0).$$

- a. Leid uit de eigenschap $u_t^2 - u_x^2 = c^2$ af, dat we de viersnelheid kunnen parametrizeren als $u_t = c \cosh s(\tau)$, $u_x = c \sinh s(\tau)$.
- b. Bewijs dat

$$a_t = u_x \frac{ds}{d\tau}, \quad a_x = u_t \frac{ds}{d\tau}, \quad a_x^2 - a_t^2 = c^2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

- c. Check dat $u_t a_t - u_x a_x = 0$.
- d. Bewijs

$$\frac{v}{c} = \frac{u_x}{u_t} = \tanh s(\tau).$$

- e. Laat zien, dat als $\underline{a}^2 = a^2 = \text{constant}$, en als $v = 0$ op $\tau = 0$, dan

$$u_t = c \cosh \frac{a\tau}{c}, \quad u_x = c \sinh \frac{a\tau}{c}.$$

- f. Los deze vergelijkingen op en leid af dat met $t = 0$ op $\tau = 0$

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2}, \quad v = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2 / c^2}}, \quad q = \frac{a}{(1 + a^2 t^2 / c^2)^{3/2}}.$$

- g. Teken deze banen in een tijd-ruimte diagram en laat zien dat $v \rightarrow c$ voor $t \rightarrow \infty$.
h. Bewijs dat

$$p_t = mc\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2 t^2}}, \quad p_x = mat.$$

6.2 Lorentzsymmetrie en Lorentzcovariantie

De relativistische vorm van Newtons krachtwet (6.9) laat op fraaie wijze zien, hoe we wetten van de natuurkunde op zo'n manier kunnen formuleren dat ze geldig zijn in ieder inertiaalstelsel. Zowel de relativistische kracht \underline{F} als de relativistische versnelling \underline{a} wordt beschreven door een viervector. We zullen dat begrip nu wat verder inperken: een grootheid \underline{n} met vier componenten:

$$\underline{n} = (n_t, n_x, n_y, n_z), \quad (6.21)$$

noemen we alleen een *viervector* als de componenten in twee verschillende inertiaalstelsels zijn verbonden door Lorentztransformaties, analoog aan de speciale Lorentztransformaties (5.8) en (5.25) tussen de standaardstelsels Σ en Σ' bij onderlinge snelheid w geldt:

$$n'_t = \frac{n_t - wn_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad n'_x = \frac{n_x - wn_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad n'_y = n_y, \quad n'_z = n_z. \quad (6.22)$$

We hebben al gezien dat de viersnelheid \underline{u} , de vierimpuls \underline{p} en de vierversnelling \underline{a} deze eigenschap hebben. Dit zijn dus viervectoren in enge zin.

Als we nu een vergelijking als (6.9) opschrijven en we weten, dat zowel \underline{F} als \underline{a} viervectoren zijn, dan weten we meteen dat deze vergelijking geldt in alle inertiaalstelsels. Immers, als (6.9) de beweging van de massa m correct beschrijft in stelsel Σ , dan geldt in stelsel Σ' dat

$$\underline{F}' = m\underline{a}', \quad (6.23)$$

waarbij \underline{F}' en \underline{a}' direct te vinden zijn via de transformaties (6.22). Zulke vergelijkingen die automatisch in alle inertiaalstelsels gelden (omdat het linker- en rechterlid van de vergelijking op dezelfde manier transformeren onder Lorentztransformaties) noemen we *Lorentzcovariant*.

Ter illustratie van het belang van deze eigenschap kunnen we de krachtvergelijking zelf nemen. Stel dat we de componenten $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ van de kracht kennen in het stelsel waarin de massa m momentaan in rust is: $\mathbf{v} = 0$. M.b.v. vergl. (6.10) leiden we daaruit onmiddellijk af, dat $F_t = 0$. Dus de krachtviervector is in dat stelsel

$$\underline{F} = (0, F_x, F_y, F_z). \quad (6.24)$$

Als op dat ogenblik het deeltje een snelheid $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$ t.o.v. een waarnemer heeft (en de waarnemer dus een snelheid $(-w, 0, 0)$ t.o.v. het deeltje), dan zijn de componenten van de viervektorkracht voor de waarnemer

$$F'_t = \frac{wF_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad F'_x = \frac{F_x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad F'_y = F_y, \quad F'_z = F_z. \quad (6.25)$$

We zien weer, dat automatisch is voldaan aan de voorwaarde

$$F'_t = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{F}'}{c}, \quad (6.26)$$

zoals te verwachten op grond van de argumenten in de vorige paragraaf. Omdat in het momentane ruststelsel van het deeltje $\mathbf{a} = \mathbf{q}$, kunnen we de krachten $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ in dat stelsel direct uit de newtonse mechanica overnemen.

Bijlage A

Vectoren

Vectoren

Een vector is een natuurkundige grootheid met zowel een grootte als een richting. In 3 dimensies heeft een vector 3 componenten: in de x -richting, in de y -richting en in de z -richting. We noteren vectoren met een vette letter; zo wordt de positie van een deeltje aangeduid met de vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$, waarbij x , y en z de coördinaten van de positie in drie onderling loodrechte richtingen zijn. De afstand tot de oorsprong is dan

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (\text{A.1})$$

De richting van \mathbf{r} wordt gekenmerkt door de hoeken van \mathbf{r} met de coördinatenassen zoals aangegeven in fig. a.1:

$$\cos \alpha_x = \frac{x}{r}, \quad \cos \alpha_y = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha_z = \frac{z}{r}. \quad (\text{A.2})$$

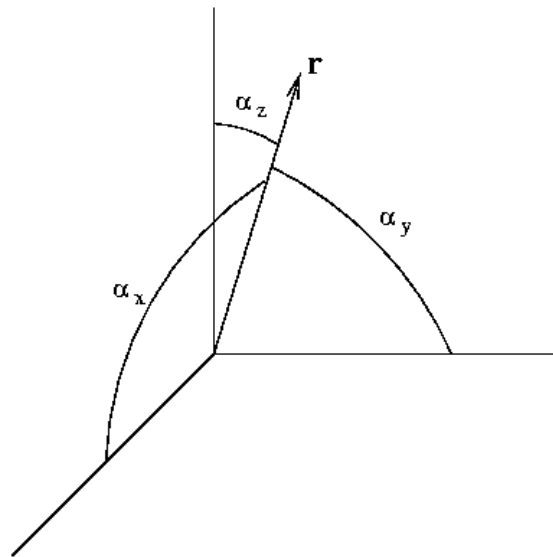


Fig. a.1: De hoeken $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ met de x -, y - en z -assen bepalen de richting van de vector \mathbf{r} .

De snelheid van een deeltje is de verandering van de positie per tijdseenheid: als de verandering van de positie in het tijdinterval Δt wordt gegeven door de vector $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, dan is de gemiddelde snelheid in die periode

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (\text{A.3})$$

De vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ heeft componenten in de verschillende richtingen gegeven door

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (\text{A.4})$$

In de limiet dat Δt heel klein wordt: $\Delta t \rightarrow 0$, gaat de gemiddelde snelheid tussen tijd t en $t + \Delta t$ over in de *instantane* snelheid op tijd t , waarbij \mathbf{v} een raakvector aan de baan van het deeltje is met lengte v ; zie fig. a.2. We noteren de limiet als

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (\text{A.5})$$

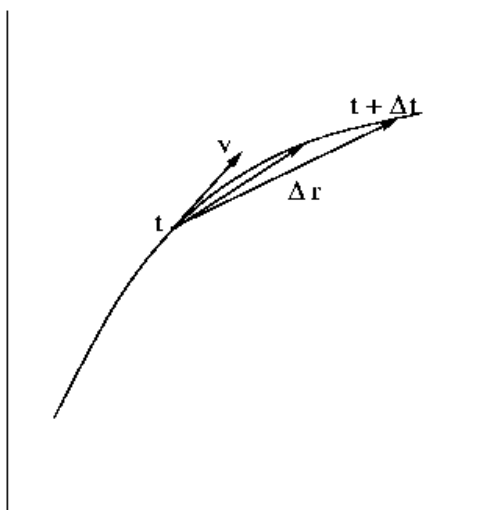


Fig. a.2: Gemiddelde en instantane snelheid van een bewegend puntdeeltje.

De versnelling van een deeltje is de verandering in de snelheidsvector per tijdseenheid: als in een periode Δt de verandering in de snelheid wordt gegeven door de vector $\Delta \mathbf{v} = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$, dan is de gemiddelde versnelling

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right). \quad (\text{A.6})$$

In de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ krijgen we de instantane versnelling, waarvan de componenten de afgeleiden van (v_x, v_y, v_z) zijn; we noteren dit als de afgeleide van de vector \mathbf{v} :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right). \quad (\text{A.7})$$

De tweede wet van Newton, die zegt dat de versnelling van een voorwerp evenredig is met de op dat voorwerp uitgeoefende kracht, krijgt in vectornotatie de vorm

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (\text{A.8})$$

Vectorproducten

Er zijn twee manieren om vectoren in 3 dimensies met elkaar te vermenigvuldigen. De eerste manier is een product dat bij twee vectoren \mathbf{A} en \mathbf{B} een puur getal levert, het inproduct of scalarproduct:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A.9})$$

We kunnen de x -as altijd zo kiezen dat hij in de richting van \mathbf{A} wijst; dan is $\mathbf{A} = (A, 0, 0)$. Verder kunnen we de z -as altijd loodrecht op \mathbf{A} en \mathbf{B} kiezen. Dan heeft \mathbf{B} alleen componenten in het x - y -vlak: $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$. Als we het inproduct uitrekenen in dit coördinatensysteem, dan vinden we dus met $A_x = A$ dat

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB_x. \quad (\text{A.10})$$

Als nu φ de hoek tussen \mathbf{A} en \mathbf{B} is, die in het x - y -vlak ligt, dan is

$$B_x = B \cos \varphi, \quad B_y = B \sin \varphi. \quad (\text{A.11})$$

Bij gevolg vinden we

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \varphi, \quad (\text{A.12})$$

met A en B de lengte van deze vectoren \mathbf{A} en \mathbf{B} , en φ de hoek tussen de vectoren.

De tweede manier om vectoren te vermenigvuldigen levert weer een vector, het uitproduct of vectorproduct:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (\text{A.13})$$

waarin

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x. \quad (\text{A.14})$$

Net als in het vorige geval kunnen we het coördinatensysteem zo kiezen, dat $A_x = A$, $A_y = A_z = 0$ en $B_x = B \cos \varphi$, $B_y = B \sin \varphi$, $B_z = 0$. Invullen in de definitie (A.13) geeft dan

$$C_x = C_y = 0, \quad C_z = AB \sin \varphi. \quad (\text{A.15})$$

De richting van de vector \mathbf{C} is dus loodrecht op \mathbf{A} en \mathbf{B} , terwijl de lengte van \mathbf{C} gegeven wordt door het product van de lengten van \mathbf{A} en \mathbf{B} en de sinus van de hoek tussen de vectoren. Merk tenslotte op, dat het inproduct symmetrisch is, en het uitproduct antisymmetrisch:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.16})$$

Dit kan ook herleid worden tot de regel $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, terwijl $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$.

Gradiënten

In de natuurkunde zijn vele grootheden functie van de plaats. Denk b.v. aan de temperatuur van een metalen plaat; als de coördinaten van een punt \mathcal{P} van de plaat gegeven worden door (x, y) , dan is de temperatuur in \mathcal{P} een functie $T(x, y)$ van twee variabelen. Evenzo is de waarde van een potentiaal in de drie-dimensionale ruimte een functie van drie variabelen: $\Phi(x, y, z)$. De variatie van deze grootheden tussen naburige punten noemen we de gradiënt; deze hangt af van de afstand en van de richting waarin we de verandering meten. Als de twee punten dezelfde y -coördinaat hebben: \mathcal{P}' heeft co-ordinaten $(x + \Delta x, y)$, en het temperatuurverschil is ΔT , dan is de gradiënt in de x -richting

$$(\Delta T)_x = \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta x \simeq \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x. \quad (\text{A.17})$$

Het symbool $\partial T/\partial x$ staat voor de afgeleide van T naar x als we y vasthouden: het is de limiet van $\Delta T/\Delta x$ voor $\Delta x \rightarrow 0$ bij constante waarde van y . Formeel schrijven we

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta T}{\Delta x} \right|_{y=\text{constant}}. \quad (\text{A.18})$$

We kijken in dit geval dus alleen naar variaties van T langs de lijn $y = \text{constant}$. Evenzo kunnen we kijken naar variaties langs de lijn $x = \text{constant}$:

$$(\Delta T)_y = \frac{\Delta T}{\Delta y} \Delta y \simeq \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y. \quad (\text{A.19})$$

Aangezien de variaties in de x -richting en de y -richting onafhankelijk van elkaar zijn, is de waarde van ΔT in de twee gevallen over het algemeen niet hetzelfde: de gradiënt hangt af van de richting, en is eigenlijk een vector met componenten $\partial T/\partial x$ en $\partial T/\partial y$. Deze vector geven we aan met het symbool ∇ :

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (\text{A.20})$$

Hebben we nu twee punten met coördinaten $\mathbf{r} = (x, y)$ en $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, dan is het temperatuurverschil in eerste benadering (voor kleine afstandsverschillen Δx en Δy):

$$\Delta T \simeq (\Delta T)_x + (\Delta T)_y \simeq \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (\text{A.21})$$

Evenzo is de gradiënt van een potentiaal of een andere grootte in drie dimensies

$$\Delta \Phi \simeq \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Delta z = \nabla \Phi \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (\text{A.22})$$

Bijlage B

Oplossingen van opgaven in de tekst

Hoofdstuk 1

1.1 We beginnen met de resultaten (1.11):

$$t' = \alpha x + \beta t, \quad x' = \gamma x + \kappa t.$$

Hieruit volgt dat

$$\gamma t' - \alpha x' = (\beta\gamma - \alpha\kappa)t, \quad \kappa t' - \beta x' = (\alpha\kappa - \beta\gamma)x.$$

Dan is uiteindelijk

$$t = \alpha' x' + \beta' t', \quad x = \gamma' x' + \kappa' t',$$

met

$$\alpha' = \frac{-\alpha}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \beta' = \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \gamma' = \frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\kappa}, \quad \kappa' = \frac{-\kappa}{\beta\gamma - \alpha\kappa}.$$

Hoofdstuk 2

2.1 Uit vergl. (2.21):

$$c(t'_2 - t'_1) = \frac{v}{c}(x'_1 - x'_2).$$

Neem absolute waarden, zodat

$$c|t'_1 - t'_2| = \left| \frac{v}{c} \right| |x'_1 - x'_2| \leq |x'_1 - x'_2|.$$

2.2 a. De definitie (2.31) van w geeft

$$\begin{aligned} 1 - \frac{w^2}{c^2} &= 1 - \left(\frac{(v/c) + (u/c)}{1 + vu/c^2} \right)^2 \\ &= \frac{1 - (v^2/c^2) - (u^2/c^2) + (v^2u^2/c^4)}{(1 + vu/c^2)^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}{(1 + vu/c^2)^2}. \end{aligned}$$

b. Schrijf het resultaat hierboven om tot

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}} = \frac{1}{1 + uv/c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Hiermee wordt de eerste vergelijking (2.30):

$$t'' = \frac{1}{1 + uv/c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} [t(1 + vu/c^2) - (v + u)x/c^2] = \frac{t - wx/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Evenzo wordt de tweede vergelijking:

$$x'' = \frac{1}{1 + uv/c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} [x(1 + vu/c^2) - (v + u)t] = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

2.3 a. Uit de definitie (2.34) van s volgt dat

$$e^{2s} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c}.$$

Vermenigvuldig beide zijden met $(1 - v/c)$:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) e^{2s} = 1 + \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad e^{2s} - 1 = (e^{2s} + 1) \frac{v}{c}.$$

Hieruit kun je v/c oplossen:

$$\frac{v}{c} = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \equiv \tanh s.$$

b. De e-macht van een reëel getal is positief: $e^s > 0$. Dan is

$$|e^s - e^{-s}| < e^s + e^{-s} = |e^s + e^{-s}|.$$

Delen door de laatste uitdrukking aan de rechterkant geeft:

$$\left| \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \right| = |\tanh s| < 1.$$

Verder is

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-2s} = 0,$$

zodat

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tanh s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-2s}}{1 + e^{-2s}} \right) = 1.$$

c. Het rechterlid van vergelijking (2.35) kan op een iets ingewikkelder manier worden herschreven als

$$\begin{aligned} & \frac{(e^{s_1} + e^{-s_1})(e^{s_2} + e^{-s_2})}{(e^{s_1} + e^{-s_1})(e^{s_2} + e^{-s_2})} \left(\frac{\tanh s_1 + \tanh s_2}{1 + \tanh s_1 \tanh s_2} \right) = \\ & = \frac{(e^{s_1} - e^{-s_1})(e^{s_2} + e^{-s_2}) + (e^{s_1} + e^{-s_1})(e^{s_2} - e^{-s_2})}{(e^{s_1} + e^{-s_1})(e^{s_2} + e^{-s_2}) + (e^{s_1} - e^{-s_1})(e^{s_2} - e^{-s_2})} = \frac{2e^{s_1+s_2} - 2e^{-s_1-s_2}}{2e^{s_1+s_2} + 2e^{-s_1-s_2}} \\ & = \tanh(s_1 + s_2). \end{aligned}$$

2.4 a. Het uitgangspunt zijn de vergelijkingen (2.39). Deze vergelijkingen kan je oplossen voor (x, y, z, t) . Begin met x :

$$x'' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad x = vt + x'' \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Vervolgens voor y :

$$y'' = \frac{y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{ut - uv/c^2 (vt + x'' \sqrt{1 - v^2/c^2})}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}},$$

waaruit volgt dat

$$y = ut \sqrt{1 - v^2/c^2} - \frac{uv}{c^2} x'' + y'' \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Natuurlijk is $z = z''$, en tenslotte

$$\begin{aligned} t'' &= \frac{t - v/c^2 (vt + x'' \sqrt{1 - v^2/c^2})}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}} - \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(ut \sqrt{1 - v^2/c^2} - \frac{uv}{c^2} x'' + y'' \sqrt{1 - u^2/c^2} \right) \\ &= \sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)} t - \frac{vx''}{c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2} - \frac{uy''}{c^2}, \end{aligned}$$

ofwel

$$t = \frac{t'' + uy''/c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}} + \frac{vx''/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

b. Uit de bovenstaande vergelijkingen volgt onmiddellijk dat voor een willekeurig *vast* punt (x'', y'', z'') in Σ'' :

$$w_x = \frac{dx}{dt} = v, \quad w_y = \frac{dy}{dt} = u \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad w_z = \frac{dz}{dt} = 0,$$

zodat

$$1 - \frac{\mathbf{w}^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right).$$

c. Met $w^2 \equiv \mathbf{w}^2$ is dit hetzelfde als

$$w^2 = v^2 + u^2 - \frac{v^2 u^2}{c^2}.$$

Nu is $v^2/c^2 < 1$ en $u^2/c^2 < 1$, waarmee

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad w^2 = v^2 + u^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) > v^2,$$

en evenzo $w^2 > u^2$.

d. We nemen overall $z = z'' = 0$. Dan heeft een rechte lijn door de oorsprong van Σ een vergelijking van de vorm $y = Ax$. Nu moet de oorsprong \mathcal{O}'' van Σ'' ook op deze lijn liggen; dat betekent, dat $(x'', y'') = (0, 0)$ een oplossing moet zijn. Maar voor deze waarden van x'' en y'' is

$$x = vt, \quad y = ut\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

zodat

$$A = \frac{u}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Omgekeerd heeft een lijn door de oorsprong van Σ'' een vergelijking van de vorm $y'' = Bx''$. Nu moet het punt $x = y = 0$ op deze lijn liggen, waarvoor volgens vergl. (2.39)

$$x'' = \frac{-vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y'' = \frac{-ut}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}.$$

Hieruit volgt

$$B = \frac{u}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

e. Per definitie is de afstand van een punt (x, y) op de lijn tot \mathcal{O} :

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + A^2) = \frac{x^2}{v^2} \left(v^2 + u^2 - \frac{v^2 u^2}{c^2} \right) = \frac{w^2 x^2}{v^2}.$$

En op dezelfde manier de afstand tot \mathcal{O}'' langs de lijn, gemeten in Σ'' :

$$r''^2 = x''^2 + y''^2 = x''^2 (1 + B^2) = \frac{w^2 x''^2}{v^2} \frac{1}{1 - u^2/c^2}.$$

f. Door invullen van $y = Ax$ in vergelijking (2.39) krijgen we eerst

$$\begin{aligned} t'' &= \frac{t - vx/c^2 - uy/c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}} = \frac{t - x/vc^2 (v^2 + u^2 - v^2 u^2/c^2)}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ &= \frac{t - w^2 x/vc^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{t - wr/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Vervolgens door invullen van x'' in de uitdrukking voor r'' :

$$\begin{aligned} r''^2 &= \frac{w^2}{v^2(1-u^2/c^2)} \frac{(x-vt)^2}{(1-v^2/c^2)} = \frac{1}{1-w^2/c^2} (wx/v - wt)^2 \\ &= \frac{(r-wt)^2}{1-w^2/c^2} \Rightarrow r'' = \frac{r-wt}{\sqrt{1-w^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Dit is niets anders dan een Lorentztransformatie in de r -richting i.p.v. de x -richting. Dit was te verwachten, omdat Σ'' t.o.v. Σ in de r -richting beweegt. Immers, de snelheid van Σ'' t.o.v. Σ is w , en de coördinaten van \mathcal{O}'' in Σ voldoen aan

$$\frac{y}{x} = \frac{w_y t}{w_x t} = \frac{w_y}{w_x} = \frac{u}{v} \sqrt{1-v^2/c^2} = A;$$

dit is de richtingscoëfficiënt van de lijn $\mathcal{O}\mathcal{O}''$ die de r -richting bepaalt.

Hoofdstuk 5

5.1 De Comptongolflengte van een proton is

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p c} = \frac{m_e}{m_p} \lambda_e = \frac{1}{1836} \times 2.426 \times 10^{-12} = 0.1321 \times 10^{-15} \text{ m}.$$

In het bereik van deze golflengten zou je fotonen moeten gebruiken met energieën in de orde van 1 GeV. Er zijn geen beheersbare bronnen van zulke super-gammastraling.

5.2 De energie balans (5.58) kan worden geschreven als

$$\sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{p}_e^2 c^2} = m_n c^2 - \sqrt{m_e^2 c^4 + \mathbf{p}_e^2 c^2}.$$

Een factor c kan links en rechts worden weggedeeld; daarna geeft kwadrateren

$$m_p^2 c^2 + \mathbf{p}_e^2 = m_n^2 c^2 + m_e^2 c^2 + \mathbf{p}_e^2 - 2m_n c \sqrt{m_e^2 c^2 + \mathbf{p}_e^2},$$

wat weer kan worden herschreven als

$$\sqrt{m_e^2 c^2 + \mathbf{p}_e^2} = \frac{(m_n^2 - m_p^2 + m_e^2) c^2}{2m_n c}$$

Nog een keer kwadrateren leidt tot

$$m_e^2 c^2 + \mathbf{p}_e^2 = \frac{(m_n^2 - m_p^2 + m_e^2)^2 c^2}{4m_n^2}.$$

Herschikken van deze vergelijking geeft dan uiteindelijk

$$\mathbf{p}_e^2 = c^2 \frac{m_n^4 + m_p^4 + m_e^4 - 2m_n^2 m_p^2 - 2m_n^2 m_e^2 - 2m_p^2 m_e^2}{4m_n^2}.$$

Dit is equivalent met vergelijking (5.59).

Hoofdstuk 6

6.1 We beperken ons tot snelheid en versnelling in de x -richting. Dan is de viersnelheid in het stelsel Σ' :

$$u'_t = \frac{u_t - wu_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad u'_x = \frac{u_x - wu_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Verder is de eigentijd τ invariant onder Lorentztransformaties:

$$d\tau' = d\tau.$$

Daarmee vinden we voor de vierversnelling de transformatieregels

$$a'_t = \frac{du'_t}{d\tau'} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u_t - wu_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \right) = \frac{a_t - wa_x/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}},$$

en

$$a'_x = \frac{du'_x}{d\tau'} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u_x - wu_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \right) = \frac{a_x - wa_t/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

6.2 a. De ruimtecomponenten van de vierversnelling zijn

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left[\frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{3/2}} \frac{-2\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{c^2} \right] \\ &= \frac{\mathbf{q}}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}/c^2}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}. \end{aligned}$$

b. Het scalarproduct van de vector \mathbf{a} met de snelheidsvector \mathbf{v} (zie vergl. (A.9)), is

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{(\mathbf{v}^2/c^2)\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}.$$

6.3 Het betreft een deeltje dat alleen in de x -richting beweegt; we nemen daarom overal $y = z = 0$ en $u_y = u_z = 0$.

a. De hyperbolische sinus en cosinus van een variabele s zijn

$$\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}, \quad \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2};$$

hieruit volgt voor alle waarden van s

$$\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1.$$

De componenten van de viersnelheid hebben de eigenschap dat

$$u_t^2 - u_x^2 = c^2.$$

Daarom kunnen we de componenten van de viersnelheid op ieder tijdstip schrijven in de vorm

$$u_t = c \cosh s, \quad u_x = c \sinh s,$$

mits we $s(\tau)$ een functie van de eigentijd laten zijn, zodat ook u_t en u_x afzonderlijk nog in de tijd kunnen veranderen.

b. Gebruik de regels

$$\frac{d \sinh s}{ds} = \cosh s, \quad \frac{d \cosh s}{ds} = \sinh s,$$

en de kettingregel om af te leiden dat

$$a_t = \frac{du_t}{d\tau} = c \frac{d \cosh s}{d\tau} = c \sinh s \frac{ds}{d\tau} = u_x \frac{ds}{d\tau},$$

en

$$a_x = \frac{du_x}{d\tau} = c \frac{d \sinh s}{d\tau} = c \cosh s \frac{ds}{d\tau} = u_t \frac{ds}{d\tau}.$$

Deze resultaten leiden onmidddelijk tot

$$a_x^2 - a_t^2 = (u_t^2 - u_x^2) \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = c^2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

c. Op analoge manier is

$$u_t a_t - u_x a_x = (u_t u_x - u_x u_t) \frac{ds}{d\tau} = 0.$$

d. Uit

$$u_t = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u_x = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

volgt dat

$$\frac{u_x}{u_t} = \frac{v}{c}.$$

Maar in termen van $s(\tau)$ is dan

$$\frac{v}{c} = \frac{u_x}{u_t} = \frac{\sinh s(\tau)}{\cosh s(\tau)} = \tanh s(\tau).$$

e. Als $a_x^2 - a_t^2$ een constante is, dan moet $c ds/d\tau$ constant zijn; noem deze constante a :

$$c \frac{ds}{d\tau} = a \quad \Rightarrow \quad s = \frac{a}{c} (\tau - \tau_0),$$

waarin τ_0 een integratieconstante is. Hieruit volgt door invullen

$$u_t = c \cosh \frac{a}{c} (\tau - \tau_0), \quad u_x = c \sinh \frac{a}{c} (\tau - \tau_0).$$

Als op $\tau = 0$ moet gelden $v = 0$, dan ook $u_x = 0$, en dus

$$\sinh \left(\frac{-a\tau_0}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 0.$$

Dus is de oplossing in dit geval

$$u_t = c \cosh \frac{a\tau}{c}, \quad u_x = c \sinh \frac{a\tau}{c}.$$

f. De viersnelheid is per definitie

$$u_t = c \frac{dt}{d\tau}, \quad u_x = \frac{dx}{d\tau},$$

waarin (t, x) de tijd en positie zijn die horen bij het deeltje in het stelsel Σ . Met bovenstaande uitdrukkingen voor u_t en u_x vinden we dan

$$t = t_0 + \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c}, \quad x = x_0 + \frac{c^2}{a} \cosh \frac{a\tau}{c},$$

waarin t_0 en x_0 weer willekeurige integratieconstanten zijn. Als we $t_0 = x_0 = 0$ kiezen, dan hebben we de oplossingen die op $\tau = 0$ voldoen aan $t(0) = 0$ en $x(0) = c^2/a$:

$$t = \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c}, \quad x = \frac{c^2}{a} \cosh \frac{a\tau}{c}.$$

Merk op, dat t kan lopen van $-\infty$ tot $+\infty$, terwijl x voor positieve a alleen maar positieve waarden kan hebben in het bereik $x \geq c^2/a$. Dit betekent dat de versnelling het deeltje afremt tot snelheid $u_x = 0$ op $\tau = t = 0$, en laat omkeren om zich daarna met een steeds toenemende snelheid weer te verwijderen.

Voor de hier gekozen oplossing geldt

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2} \left(\cosh^2 \frac{a\tau}{c} - \sinh^2 \frac{a\tau}{c} \right) = \frac{c^4}{a^2}.$$

Door links en rechts de afgeleide naar de tijd t te nemen krijg je

$$2xv - 2c^2 t = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c^2 t}{x} = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2 / c^2}}.$$

De gewone versnelling t.o.v. Σ is dan

$$q = \frac{dv}{dt} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 t^2 / c^2}} - \frac{1}{2} \frac{at}{(1 + a^2 t^2 / c^2)^{3/2}} \frac{2a^2 t}{c^2} = \frac{a}{(1 + a^2 t^2 / c^2)^{3/2}}.$$

g. Uit de vergelijking voor de baan

$$x^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

volgt dat de baan voor $a > 0$ de positieve tak van een hyperbool is, met de lijnen $ct = \pm x$ als asymptoot, en $x = c^2/a$ als snijpunt met de x -as. Verder kan je de snelheid v voor $t > 0$ ook schrijven als

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (c^2/a^2)t^2}}.$$

Daaruit volgt direkt, dat in de limiet $t \rightarrow \infty$ de snelheid de lichtsnelheid benadert: $v \rightarrow c$.

h. Uit de oplossing voor v volgt

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{a^2t^2/c^2}{1 + a^2t^2/c^2} = \frac{1}{1 + a^2t^2/c^2}.$$

Dan is de vierimpuls

$$p_t = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc\sqrt{1 + a^2t^2/c^2}, \quad p_x = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mat.$$

Het is makkelijk te controleren dat

$$p_t^2 - p_x^2 = m^2c^2.$$

Literatuur

1. Roger A. Freedman and Hugh D. Young, *Sears and Zemansky's University Physics* (hfdst. 37); Addison Wesley, ISBN: 9780321501219
2. S. Bais, *De sublieme eenvoud van relativiteit*
Amsterdam University Press, ISBN: 9789053569924
3. J.B. Hartle, *Gravity, an Introduction to Einstein's General Relativity* (hfdst. 1-5); Addison Wesley, ISBN: 0805386629
4. W. Rindler, *Essential Relativity*
Springer Verlag (New York, 1977), ISBN: 0387100903
5. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*
Princeton University Press, ISBN: 9780691120270