

VRAAGSTUKKEN UIT DE THEORIE
VAN HET MAGNETISME.

82



E. D. BRUINS.



**BIBLIOTHEEK
GORLAEUS LABORATORIA**

Postbus 9502
2300 RA LEIDEN
Tel.: 071 - 527 43.66 / 67

Universiteit Leiden



1 395 414 9



kast dissertaties



82

VRAAGSTUKKEN UIT DE THEORIE VAN HET MAGNETISME.

VRAAGSTUKKEN UIT DE THEORIE VAN HET MAGNETISME.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING
VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT
TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAG-
NIFICUS, DR. G. KALFF, HOOGLEERAAR IN DE
FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE,
VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG 4 JULI
1918, DES NAMIDDAGS KLOKKE 3 UUR, DOOR

EVA DINA BRUINS,
GEBOREN TE ZUTPHEN.

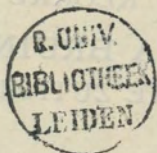


N.V. BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ
VOORHEEN E. J. BRILL, LEIDEN 1918.



VRAAGSTUKKEN UIT DE THEORIE
VAN HET MAGNETISME

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING
VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT
TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTORALG-
MICHUS DE G. KALLER, HOOGLERAAR IN DE
FACULTEIT DER LETTEREN EN WISBEGEERTE
VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDIEDIGEN OP DONDERDAG 4 JULI
1885 DES VORMIDDAGS TIEN EN EEN UUR DOOR



EVA DIN
GEBOREN



N. V. BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ
BOEKDRUKKERIJ N. V. VOORHEEN E. J. BRILL, LEIDEN.



AAN MIJN VADER.



VAN MIJN VADER

Het is mij aangenaam bij het voltooien van dit proefschrift mijn dank uit te spreken aan U, hoogleraren en oud-hoogleraren van de faculteit der wis- en natuurkunde, die tot mijn academische vorming hebt bijgedragen.

U, hooggeleerde EHRENFEST, ben ik erkentelijk voor de wetenschappelijke omgang in uw huis, die mij zoo vaak tot opwekking is geweest.

Bovenal echter ben ik U dankbaar, hooggeleerde LORENTZ, hooggeachte promotor, zoowel voor uw onschatbare steun bij het samenstellen van dit proefschrift als voor de hartelijke belangstelling en welwillendheid, die ik steeds van U mocht ondervinden. Ik beschouw het als een groot voorrecht mijn studie onder uw leiding te hebben mogen volbrengen.

Ten slotte een woord van dank aan U, hooggeleerde WEISS, de tijd, gedurende welke ik te Zürich in uw laboratorium heb mogen werken, zal mij steeds in aangename herinnering blijven.





INHOUD.

	Blz.
HOOFDSTUK I. Algemeene beschouwingen	I
§§ 1—4. Inleiding tot de theorie	I
§§ 5—7. Thermodynamische theorie van de magnetisatie	17
§§ 8—12. Ponderomotorische krachten	24
§ 13. Waarnemingsmethoden	38
HOOFDSTUK II. Dia- en paramagnetische lichamen	45
§§ 1—2. Theorie van het diamagnetisme (Weber, Langevin)	45
§§ 3—4. Theorie voor diamagnetische kristallen	49
§ 5. Diamagnetisme in afhankelijkheid van de temperatuur	53
§ 6. Theorie van Langevin voor paramagnetische lichamen	54
§§ 7—8. Statistische beschouwingen	58
§§ 9—12. Theorie van Weiss voor paramagnetische kristallen	65
HOOFDSTUK III. Ferromagnetische lichamen	77
§§ 1—2. Theorie van Weiss	77
§§ 3—5. Statistische beschouwingen	81
§ 6. Spontane magnetisatie	88
STELLINGEN	95



ERRATA.

p. 5, regel 16 v. o., lees $-\frac{1}{c} \frac{dB}{dt} n l O$ in plaats van $-\frac{dB}{dt} n l O$.

regel 14 v. o., lees $E = \frac{1}{c} \frac{dB}{dt} n l O$ in plaats van $E = \frac{dB}{dt} n l O$.

regel 12 v. o., lees $\frac{1}{c} i n l O dB$ in plaats van $i n l O dB$.

regel 8 v. o., lees $H = \frac{1}{c} n i$ in plaats van $H = n i$.

p. 29, regel 10 v. b., lees een homogene quadratische functie in plaats van een quadratische functie.





HOOFDSTUK I.

Algemeene beschouwingen.

§ 1. POISSON ¹⁾ gaat in zijn theorie van de magnetisatie uit van de hypothese, dat magnetiseerbare stoffen opgebouwd zijn uit oneindig kleine „magnetische elementen”, waarin zich bewegelijke „magnetische fluida” bevinden. Hij bepaalt zich tot isotrope stoffen, maar wijst toch reeds op de mogelijkheid, dat in een kristallijne stof de magnetische elementen niet-bolvormig zouden zijn maar b.v. symmetrisch gerangschikte ellipsoïden, waarvan de assen dezelfde richting hebben over de geheele uitgebreidheid van het lichaam. Een bol gesneden uit een kristal en in de nabijheid van een magneet gebracht zou dan een verschillenden invloed ondervinden, naar gelang de bol in verschillende standen ten opzichte van den magneet is gedraaid. Lord KELVIN ²⁾ heeft het werk van POISSON voortgezet en de theorie der magnetisatie uitgebreid tot kristallijne stoffen, hij laat echter de hypothese van de magnetische fluida vallen. De theorie van KELVIN berust op de volgende wetten van POISSON:

I. Een magnetiseerbaar lichaam geplaatst in de nabijheid van een magneet wordt gemagnetiseerd op een wijze, die alleen afhangt van het magnetisch veld, waarin het zich bevindt.

II. Verschillende magneten tegelijkertijd geplaatst in de nabijheid van een magnetiseerbaar lichaam veroorzaken in het lichaam een verdeling van magnetisatie, die de resultante is van de verschillende magnetisaties te danken aan de verschillende magneten afzonderlijk ieder in zijn eigen stand.

KELVIN merkt op, dat de tweede wet slechts van toepassing is op homogene zwak magnetiseerbare lichamen. Zich dus tot deze lichamen

1) Mémoire sur la Théorie du Magnétisme. Mém. de l'Inst. 1821—22. Paris, (1826) p. 258.

2) Phil. Mag., 1 (1851) p. 177.

beperkende, leidt hij uit de wetten van POISSON verschillende gevolgtrekkingen af, waarvan we hier de volgende noemen:

1. De bepaling van den magnetisatietoestand van een lichaam kan in alle omstandigheden worden teruggebracht tot de kennis van den magnetisatietoestand van een homogenen bol van dezelfde stof geplaatst in een homogeen magnetisch veld.

2. Een homogene bol geplaatst in een homogeen magnetisch veld wordt homogeen gemagnetiseerd.

3. Is de bol van een niet-kristallijne stof, dan is de magnetisatie evenwijdig aan de krachtlijnen van het magnetisch veld; de grootte der magnetisatie is gelijk aan het product van een constante, de susceptibiliteit van de stof (door KELVIN „inductive capacity” genoemd), en de grootte van de magnetische kracht.

4. Is de bol van een kristallijne stof, dan is in het algemeen de magnetisatie niet evenwijdig aan de krachtlijnen van het magnetisch veld.

5. Een stof heeft door ieder punt drie onderling loodrechte magnetische hoofdassen; een magnetische hoofdas is een richting in de stof zoodanig, dat een bol van de stof gebracht in een homogeen magnetisch veld met die richting evenwijdig aan de krachtlijnen een magnetisatie verkrijgt in de richting der krachtlijnen. Is de susceptibiliteit met betrekking tot drie onderling loodrechte assen gelijk, dan heeft de stof geen „magnekristallijne” eigenschappen.

6. Wordt een bol met een volume σ van een stof, waarvan de susceptibiliteiten volgens de drie magnetische hoofdassen respectievelijk A , B , C zijn, gebracht in een homogeen magnetisch veld met de veldsterkte F , terwijl de drie hoofdassen met de richting van de magnetische kracht hoeken maken, waarvan de cosinussen l , m , n zijn, dan zal de bol een magnetisatie verkrijgen, die de resultante is van drie homogene magnetisaties gericht volgens de hoofdassen respectievelijk met een intensiteit AFl , BFm , CFn . In dezen toestand werkt op den bol een koppel met de componenten

$$\sigma F^2 m n (B - C), \quad \sigma F^2 n l (C - A), \quad \sigma F^2 l m (A - B).$$

Dit koppel staat loodrecht op de magnetische kracht en op de magnetisatie, terwijl het den bol zoo tracht te draaien, dat de magnetisatie samenvalt met de magnetische kracht; men kan voor het koppel ook schrijven het vectorproduct van de magnetisatie en de magnetische kracht. De bol zal dien stand trachten aan te nemen, waarbij de hoofdas, volgens welke de susceptibiliteit het grootst is, samenvalt met de magnetische kracht.

7. Is de bol oneindig klein en geplaatst in een homogeen of niet-homogeen magnetisch veld, dan is de geheele werking, die hij ondervindt, bepaald door het volgende: de arbeid noodig om den bol te brengen van een stand, waar de magnetische kracht F is en haar richtingsconstanten met betrekking tot de drie magnetische hoofdasen l, m, n naar een stand, waar de magnetische kracht F' is en de richtingsconstanten met betrekking tot de drie magnetische hoofdasen in hun nieuwen stand l', m', n' , is gelijk aan

$$\frac{1}{2} \sigma \{ (A l^2 + B m^2 + C n^2) F^2 - (A l'^2 + B m'^2 + C n'^2) F'^2 \}.$$

§ 2. Bij de volgende beschouwingen over eenige vraagstukken, die zich in de theorie der magnetisatie voordoen, zal de theorie van MAXWELL op den voorgrond worden gesteld. We beschouwen vooreerst een stelsel, dat zich in den aether binnen een gesloten oppervlak Σ bevindt en dat bestaat uit een magnetiseerbaar lichaam en een stroomgeleider, waarin een stroom loopt. Daarin gelden voor het electromagnetisch veld de grondvergelijkingen van MAXWELL:

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= \frac{1}{c} C, & \text{div } C &= 0, \\ \text{rot } E &= -\frac{1}{c} \dot{B}, & \text{div } B &= 0, \end{aligned}$$

(de grootheden in deze vergelijkingen zijn uitgedrukt in de gewijzigde eenheden). C is de totale stroom, E de elektrische kracht, H de magnetische kracht, B de magnetische inductie en c een constante gelijk aan de snelheid van het licht in den aether. Uit de grondvergelijkingen volgt, dat aan een grensvlak de normale componenten van C en B en de tangentieele componenten van H en E doorlopend zijn. Zij D de dielectrische verplaatsing; we kunnen C splitsen in den geleidingsstroom \mathcal{F} en den verplaatsingsstroom \dot{D} , zoodat

$$C = \mathcal{F} + \dot{D}.$$

Tusschen den geleidingsstroom \mathcal{F} en de som van de elektrische kracht E en de electromotorische kracht \mathbf{E} nemen we de volgende betrekking aan

$$\mathcal{F} = \sigma (E + \mathbf{E}),$$

waarin σ het geleidingsvermogen is.

Het verband tusschen de dielectrische verplaatsing en de elektrische kracht laten we buiten beschouwing, terwijl we tusschen de magnetische inductie en de magnetische kracht voorloopig geen verband



aannemen. Een lichaam zullen we gemagnetiseerd noemen, wanneer B en H verschillend zijn. Voor zulk een lichaam voeren we een nieuwe vectorgrootte in, de magnetisatie M , zoodanig, dat

$$M = B - H.$$

In den aether is $B = H$.

De arbeid door de electromotorische kracht binnen het oppervlak Σ per tijdseenheid verricht is

$$\int (E \cdot \mathcal{F}) ds = \int \left(\frac{1}{\sigma} \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \right) ds - \int (E \cdot \mathcal{F}) ds, \dots \dots (1)$$

waarin voor den laatsten term volgens de grondvergelijkingen geschreven kan worden

$$-c \int (E \cdot \text{rot } H) ds + \int (E \cdot \dot{D}) ds = \int (H \cdot \dot{B}) ds + \int \text{div } c[E \cdot H] ds + \int (E \cdot \dot{D}) ds.$$

Voor het scalair product van twee vectoren is de notatie $(A \cdot B)$ en voor het vectorproduct het teeken $[A \cdot B]$ ingevoerd; ds is een volume-element binnen het oppervlak Σ . Zij n de naar buiten gerichte normaal op het oppervlak Σ , dan kunnen we volgens de stelling van GAUSS van de ruimte-integraal

$$\int \text{div } c[E \cdot H] ds$$

een oppervlakte-integraal maken:

$$\int \text{div } c[E \cdot H] ds = c \int [E \cdot H]_n d\Sigma.$$

Deze term geeft den energiestroom van POYNTING, die per tijdseenheid door het oppervlak Σ gaat.

Na substitutie in (1) is

$$\int (E \cdot \mathcal{F}) ds = \int \left(\frac{1}{\sigma} \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \right) ds + \int (H \cdot \dot{B}) ds + \int (E \cdot \dot{D}) ds + c \int [E \cdot H]_n d\Sigma.$$

Aan deze vergelijking kunnen we ontleenen, dat, als er geen JOULE-warmte is, de arbeid, die per tijdseenheid en per volume-eenheid op het lichaam verricht wordt, en die strekt om het arbeidsvermogen daarvan te vergrooten, kan worden voorgesteld door

$$(H \cdot \dot{B}) + (E \cdot \dot{D}).$$

In de gevallen, waarmede wij ons hebben bezig te houden, komt de laatste term niet in het spel, zoodat wij alleen met $(H \cdot \dot{B})$ te doen hebben.

Ten einde met een voorbeeld duidelijk te maken, dat de op de volume-eenheid van het lichaam verrichte arbeid per tijdseenheid gelijk is aan $(H \cdot \dot{B})$ of per tijdselement gelijk aan $(H \cdot dB)$ kunnen we het eenvoudige geval beschouwen, dat B en H dezelfde richting hebben, zoodat de zoeven genoemde uitdrukkingen overgaan in $H \dot{B}$ en $H dB$. Wij stellen ons voor, dat het lichaam, in den vorm van een lange staaf met een doorsnede O en een lengte l , omgeven is door een nauwsluitenden draadklos, waarvan het aantal windingen per lengte-eenheid n bedraagt en waardoor een stroom gaat van de sterkte i . Zij er geen weerstand in de keten. In de staaf zal een magnetische inductie B bestaan, die evenals de magnetische kracht de richting van de lengte heeft. Ten einde de staaf magnetische veranderingen te doen ondergaan brengen we een electromotorische kracht E aan, die we op geschikte wijze veranderen. Laat de magnetische inductie hierdoor per tijdseenheid toenemen met $\frac{dB}{dt}$, dan is de inductiewerking, die in de windingen van den draadklos optreedt, van de grootte

$$-\frac{dB}{dt} n l O,$$

en daar de weerstand in de keten nul is, vinden we

$$E = \frac{dB}{dt} n l O.$$

De arbeid der electromotorische kracht is per tijdselement

$$E i dt = i n l O dB.$$

Wegens het ontbreken van den weerstand in de keten is dit de arbeid per tijdselement op de staaf verricht. Nemen we nu in aanmerking, dat

$$H = n i$$

de magnetische kracht in de staaf is en $l O$ het volume van de staaf, dan is de beschouwde arbeid, die op de volume-eenheid van de staaf verricht wordt

$$dA = H dB.$$

Voor den arbeid noodig om de staaf een geheel kringproces te doen ondergaan kunnen we schrijven

$$A = \int H dB.$$

Aan dezen arbeid moet een toename van het arbeidsvermogen van het lichaam beantwoorden, maar dat arbeidsvermogen kan nog van verschillende soort zijn. In één geval kan men het warmte noemen nl. de warmteontwikkeling, die de magnetische hysteresis begeleidt. Veronderstellen we, dat in het lichaam B niet bepaald wordt door de waarde, die H op hetzelfde oogenblik heeft en dat het lichaam een kringloop doorloopt, terwijl het op constante temperatuur wordt gehouden. Dan is aan het einde van een cyclus de toestand volkomen dezelfde als aan het begin; dus is de inwendige energie ook weer hetzelfde en $\int (H \cdot dB)$ is de aan het lichaam onttrokken warmte of de in het lichaam ontwikkelde warmte. Hebben H en B dezelfde richting, dan gaat $\int (H \cdot dB)$ over in $\int H dB$ en wordt gegeven door het oppervlak van de hysteresis-kromme.

Is echter alle warmtetoevoer naar buiten afgesneden, dan blijft de temperatuur niet constant, maar stijgt door de hysteresis; $\int (H \cdot dB)$ is dan de toename van het arbeidsvermogen van het lichaam. Echter bestaat er nu eenige onzekerheid, in hoeverre men dit meerdere in het lichaam gekomen arbeidsvermogen geheel „warmte” dan wel „magnetisch arbeidsvermogen” noemen zal.

Laten we nu verder de hysteresis buiten beschouwing en nemen we aan, dat er in het gemagnetiseerde lichaam van geen ander arbeidsvermogen sprake is, dan van één, dat door H en B bepaald wordt, dan moet $(H \cdot \dot{B})$ daarvan de toename per tijdseenheid zijn. Noemen we dit magnetisch arbeidsvermogen per volume-eenheid W_m , dan is

$$d W_m = (H \cdot dB) = H_x dB_x + H_y dB_y + H_z dB_z, \dots (2)$$

dus is

$$H_x = \frac{\partial W_m}{\partial B_x}, \quad H_y = \frac{\partial W_m}{\partial B_y}, \quad H_z = \frac{\partial W_m}{\partial B_z}.$$

Hieruit volgt, dat H_x, H_y, H_z zekere functiën van B_x, B_y, B_z moeten zijn en wel zoo, dat aan de volgende betrekkingen voldaan is

$$\frac{\partial H_y}{\partial B_z} = \frac{\partial H_z}{\partial B_y}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial B_x} = \frac{\partial H_x}{\partial B_z}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial H_y}{\partial B_x} \dots (3)$$

Maken we nu verder de veronderstelling, dat er tusschen H en B een lineaire betrekking bestaat. Voor een isotroop lichaam is dan

$$H = \frac{1}{\mu} B \quad (\mu \text{ permeabiliteit})$$

en voor een anisotroop lichaam

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \mu_{11}' B_x + \mu_{12}' B_y + \mu_{13}' B_z, \\ H_y &= \mu_{21}' B_x + \mu_{22}' B_y + \mu_{23}' B_z, \\ H_z &= \mu_{31}' B_x + \mu_{32}' B_y + \mu_{33}' B_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

of als we B in H uitdrukken

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z, \\ B_y &= \mu_{21} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{23} H_z, \\ B_z &= \mu_{31} H_x + \mu_{32} H_y + \mu_{33} H_z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4')$$

Ter afkorting schrijven we hiervoor

$$B = (\mu) H.$$

De betrekkingen (3) in aanmerking nemende vinden we

$$\mu_{23}' = \mu_{32}', \quad \mu_{31}' = \mu_{13}', \quad \mu_{12}' = \mu_{21}',$$

en ook

$$\mu_{23} = \mu_{32}, \quad \mu_{31} = \mu_{13}, \quad \mu_{12} = \mu_{21}.$$

De bepaling van de magnetische eigenschappen van een stof kan ook door middel van de susceptibiliteit (κ) geschieden. Uit het bovenstaande en uit $M = B - H$ volgt voor de magnetisatie van een isotroop lichaam

$$M = \kappa H, \quad \kappa = \mu - 1,$$

en voor de magnetisatie van een anisotroop lichaam

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \kappa_{11} H_x + \kappa_{12} H_y + \kappa_{13} H_z, \\ M_y &= \kappa_{21} H_x + \kappa_{22} H_y + \kappa_{23} H_z, \\ M_z &= \kappa_{31} H_x + \kappa_{32} H_y + \kappa_{33} H_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

waarbij

$$\kappa_{hh} = \mu_{hh} - 1 \text{ en } \kappa_{hk} = \kappa_{kh} = \mu_{hk} \quad (h, k = 1, 2, 3).$$

Substitutie van (4) in (2) geeft

$$dW_m = (\mu_{11}' B_x + \mu_{12}' B_y + \mu_{13}' B_z) dB_x + (\mu_{12}' B_x + \mu_{22}' B_y + \mu_{23}' B_z) dB_y + (\mu_{13}' B_x + \mu_{23}' B_y + \mu_{33}' B_z) dB_z,$$

na integratie wordt dit

$$W_m = \frac{1}{2} (\mu_{11}' B_x^2 + \mu_{22}' B_y^2 + \mu_{33}' B_z^2 + 2 \mu_{12}' B_x B_y + 2 \mu_{13}' B_x B_z + 2 \mu_{23}' B_y B_z) = \frac{1}{2} (H \cdot B),$$

als $W_m = 0$ voor $B = 0$.

Met B_x, B_y, B_z als coördinaten voorgesteld is $W_m = \text{constant}$ een oppervlak van den tweeden graad en wel een ellipsoïde, omdat voor een eindige magnetische kracht B in geen richting oneindig groot wordt.

Het verband tusschen B en H en tusschen M en H kan in een eenvoudiger gedaante geschreven worden door de magnetische hoofdassen als coördinaatassen in te voeren. Daartoe maken we gebruik van de magnetisatie-ellipsoïde, waarvan de vergelijking is

$$\kappa_{11} x^2 + \kappa_{22} y^2 + \kappa_{33} z^2 + 2 \kappa_{12} x y + 2 \kappa_{13} x z + 2 \kappa_{23} y z = 1.$$

Deze ellipsoïde geeft op eenvoudige wijze de richting en de grootte van de magnetisatie bij een gegeven magnetische kracht. Trekt men nl. uit het middelpunt in de richting van de magnetische kracht een voerstraal naar een punt van de ellipsoïde, brengt men in het eindpunt een raakvlak aan de ellipsoïde aan en laat men uit het middelpunt de normaal op het raakvlak neer, dan heeft de magnetisatie de richting van de normaal en haar grootte is gelijk aan de magnetische kracht gedeeld door het product van de normaal en den voerstraal. Immers laat de voerstraal r getrokken zijn naar het punt x_1, y_1, z_1 , dan is de normaal op het raakvlak

$$n = \frac{1}{\sqrt{(\kappa_{11} x_1 + \kappa_{12} y_1 + \kappa_{13} z_1)^2 + (\kappa_{12} x_1 + \kappa_{22} y_1 + \kappa_{23} z_1)^2 + (\kappa_{13} x_1 + \kappa_{23} y_1 + \kappa_{33} z_1)^2}},$$

terwijl

$$H_x = \frac{x_1}{r} H, \quad H_y = \frac{y_1}{r} H, \quad H_z = \frac{z_1}{r} H$$

is. Hieruit volgt in verband met (5), dat de magnetisatie M de richting der normaal heeft en de grootte ervan bepaald wordt door

$$M = \frac{H}{r n}.$$

Bij de ellipsoïde vallen in drie richtingen normaal en voerstraal samen, dit zijn dus de richtingen van de magnetische hoofdassen (verg. p. 2). Nemen we deze als coördinaatassen aan, dan wordt de vergelijking van de ellipsoïde

$$\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 + \kappa_3 z^2 = 1,$$

en dan is

$$M_x = \kappa_1 H_x, \quad M_y = \kappa_2 H_y, \quad M_z = \kappa_3 H_z,$$

terwijl het verband tusschen B en H wordt

$$B_x = \mu_1 H_x, \quad B_y = \mu_2 H_y, \quad B_z = \mu_3 H_z.$$

Daar de grondvergelijkingen geschreven zijn in de gewijzigde een-

heden, zijn de getalwaarden van de magnetische kracht en de magnetische inductie $\sqrt{4\pi}$ maal kleiner en de getalwaarde van de magnetisatie $\sqrt{4\pi}$ maal grooter dan in de oude electromagnetische eenheden. In de oude eenheden geldt

$$B = H + 4\pi M \text{ met } B = \mu H, \quad M = \kappa H, \quad \kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

dus is κ in de oude eenheden 4π maal kleiner dan κ in de gewijzigde eenheden, terwijl μ in beide eenheden even groot is. In het vervolg zullen de getalwaarden der susceptibiliteiten steeds worden uitgedrukt in de gewijzigde eenheden.

Wat betreft den stand der magnetische hoofdrichtingen ten opzichte van de kristallographische assen in de verschillende kristalstelsels merken we op, dat de kristallen tot het regulaire stelsel behoorende zich magnetisch isotroop gedragen en dat in het quadratische, hexagonale en rhombische stelsel de magnetische hoofdrichtingen met de kristallographische assen samenvallen; bovendien vertoonen het quadratische en hexagonale stelsel ook in magnetisch opzicht symmetrie om de kristallographische hoofdas; zij nl. κ_1 de susceptibiliteit in de richting van die hoofdas, dan is $\kappa_2 = \kappa_3$. In het monokliene stelsel valt slechts één magnetische hoofdrichting met een kristallographische as samen en wel met de symmetrie-as. De beide andere magnetische hoofdrichtingen liggen loodrecht op elkaar in het symmetrievlak van het kristal. Hun ligging wordt bepaald door den hoek ψ , dien de magnetische hoofdas, waarbij de grootste der twee susceptibiliteiten in het symmetrievlak behoort, maakt met de kristallographische c-as. Zij $\kappa_1 > \kappa_2$ en zij κ_3 de susceptibiliteit volgens de symmetrie-as. Zij verder $\kappa_I H$ de component van de magnetisatie evenwijdig aan de c-as opgewekt door een veld H in diezelfde richting, dan is

$$\kappa_I H = (\kappa_1 \cos^2 \psi + \kappa_2 \sin^2 \psi) H,$$

dit geeft de betrekking

$$\kappa_I = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \cos 2\psi \dots \dots \dots (6)$$

Evenzoo vinden we

$$\kappa_{II} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \cos 2\psi, \dots \dots \dots (7)$$

als $\kappa_{II} H$ de component van de magnetisatie is loodrecht op de c-as teweeggebracht door een veld H eveneens loodrecht op die as.

Zij ϕ de hoek, dien de normaal op het basisvlak van het kristal



maakt met de c -as en laat een veld H in de richting van deze normaal een magnetisatie teweegbrengen, waarvan de component evenwijdig aan H $\kappa_{III} H$ is, dan is, als, van de c -as uit, de hoeken ϕ en ψ naar denzelfden kant gerekend worden,

$$\kappa_{III} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \cos 2(\phi - \psi). \dots \dots \dots (8)$$

Zijn κ_I , κ_{II} , κ_{III} gemeten, dan zijn met behulp van (6), (7) en (8) κ_1 , κ_2 en ψ te bepalen ¹⁾.

Bij het trikliene stelsel snijden alle drie de kristallographische assen elkaar onder een scheeven hoek, hier wordt dus de bepaling der drie onderling loodrechte magnetische hoofdrichtingen ten opzichte van de kristallographische assen nog ingewikkelder.

§ 3. Het doel is nu de magnetisatie in een gegeven veld werkelijk te bepalen. Wij denken ons het veld door een gegeven constanten stroom voortgebracht. Eerst zij overal aether; in het gebied, dat wij beschouwen, zij het magnetisch veld H_0 homogeen. De potentiaal ϕ_0 van H_0 is dan in dat gebied een lineaire functie van de coördinaten. Vervolgens wordt in het veld een ellipsoïde van een homogene kristallijne stof gebracht. Omtrent het verband tusschen B en H nemen we vooreerst alleen aan, dat B_x , B_y , B_z zekere functiën zijn van H_x , H_y , H_z ; deze functiën behoeven niet noodzakelijk lineaire te zijn. Zij in den nieuwen toestand de magnetische kracht

$$H = H_0 + H'$$

zoowel binnen als buiten de ellipsoïde; dan is de lijnintegraal van H' voor elke gesloten lijn gelijk aan nul, omdat de lijnintegralen van H_0 en van $H_0 + H'$ dezelfde waarden hebben. H' is dus af te leiden uit een potentiaal ϕ' en de totale magnetische kracht H uit den potentiaal

$$\phi = \phi_0 + \phi'.$$

Geven wij aan de grootheden, die betrekking hebben op den toestand binnen de ellipsoïde den index 1, aan die buiten de ellipsoïde den index 2 en zij n de naar buiten gerichte normaal. In een punt van het oppervlak van de ellipsoïde is

$$B_{n1} = B_{n2}$$

of

$$H_{n1} + M_{n1} = H_{n2} + M_{n2}.$$

¹⁾ Verg. FINKE, Magnetische Messungen an Platinmetallen und monoklinen Kristallen, Ann. der Phys., 31 (1910), p. 149.

Daar $M_{n_2} = 0$, is

$$M_{n_1} = H_{n_2} - H_{n_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2 = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right)_2.$$

Uit $B = H + M$ en $\operatorname{div} B = 0$ volgt

$$\operatorname{div} M = -\operatorname{div} H = \Delta \Phi',$$

daar $\Delta \Phi_0 = 0$, wegens hetgeen boven omtrent het veld H_0 verondersteld is.

De betrekkingen

$$\Delta \Phi' = \operatorname{div} M \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right)_2 = M_{n_1}$$

komen overeen met de betrekkingen

$$\Delta \psi = -\rho \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_2 = \omega$$

uit de oude potentiaaltheorie, waarin ψ de potentiaal is, behoorende bij een agens, dat met een ruimtedichtheid ρ en een vlaktedichtheid ω verdeeld is. Maken we om de berekening te vereenvoudigen van deze oude theorie gebruik. We vinden dan, dat de potentiaal Φ' in een willekeurig punt P bepaald wordt door

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} M}{r} ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{M_{n_1}}{r} d\sigma, \dots \dots \dots (9)$$

de eerste integraal moet over het volume, de tweede over het oppervlak van de ellipsoïde worden uitgestrekt, r is de afstand van P tot een punt van de ellipsoïde.

In den zin van de oude potentiaaltheorie is Φ' de potentiaal behoorende bij het „magnetisme“, dat zich met de ruimtedichtheid $-\operatorname{div} M$ in de ellipsoïde bevindt en met de vlaktedichtheid M_{n_1} over het oppervlak van de ellipsoïde verdeeld is.

We gaan nu onderzoeken, of aan alle voorwaarden voldaan kan worden door een zekere homogene magnetisatie. Zijn M_x, M_y, M_z de componenten daarvan, dan kunnen de componenten van H' als functiën van M_x, M_y, M_z berekend worden. Passen we nl. op de tweede integraal van (9) de stelling van GAUSS toe, dan is

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} M}{r} ds + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\operatorname{div} M}{r} + M_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + M_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + M_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \right\} ds \quad (10)$$

of

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi} \int \left\{ M_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + M_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + M_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \right\} ds,$$

als we in $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ onder x, y, z de coördinaten van het beschouwde punt P en niet meer, zooals in (10), die van een punt van de ellipsoïde verstaan. Beschouwen we nu een punt P binnen de ellipsoïde, dan zijn de componenten van H' in dat punt

$$\left. \begin{aligned} H_x' &= \alpha_{11} M_x + \alpha_{12} M_y + \alpha_{13} M_z, \\ H_y' &= \alpha_{21} M_x + \alpha_{22} M_y + \alpha_{23} M_z, \\ H_z' &= \alpha_{31} M_x + \alpha_{32} M_y + \alpha_{33} M_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{als } \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \alpha_{11}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \alpha_{12}, \text{ enz.}$$

In het geval van de ellipsoïde zijn de grootheden $\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots$ constanten. We vinden dus, dat de componenten van H' lineaire functiën zijn van de componenten van M . We veronderstellen nu het verband tusschen B en H bekend nl.

$$\begin{aligned} B_x &= f_1(H_x, H_y, H_z), \\ B_y &= f_2(H_x, H_y, H_z), \\ B_z &= f_3(H_x, H_y, H_z). \end{aligned}$$

Vervangen we hierin B_x, B_y, B_z door $M_x + H_x, M_y + H_y, M_z + H_z$ en H_x, H_y, H_z door $H_{0x} + \alpha_{11} M_x + \alpha_{12} M_y + \alpha_{13} M_z$, enz., dan krijgen we drie vergelijkingen, waarin behalve de constanten $H_{0x}, \dots, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$ alleen de drie grootheden M_x, M_y, M_z voorkomen en waaruit deze grootheden als constanten, zooals zij verondersteld werden te zijn, kunnen worden berekend. Over de geheele uitgestrektheid van de ellipsoïde kan dus slechts sprake zijn van één M , één H en één B .

Daar

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) ds, \text{ enz.,}$$

geldt in de betrekkingen (11)

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

De grootheden α zijn constanten voor lichamen, die door een ellipsoïde begrensd zijn; deze hebben dus het voordeel, dat H zoowel als B overal in het lichaam hetzelfde zijn, zoodat men van de uitdrukking b.v. van het arbeidsvermogen per volume-eenheid gemakkelijk tot die voor het geheele arbeidsvermogen kan overgaan. Maar ook voor een dunne lange staaf in een magnetiseeringsspiraal geldt vrijwel hetzelfde. In dit geval is alleen aan de uiteinden M_{n_1} van nul verschillend, dus is in de staaf behalve in de onmiddellijke nabijheid der uiteinden $\phi' = 0$; in een dunnen gelijkmatig omwikkel-

den ring is ook $\Phi' = 0$, omdat H en M axiaal gericht zijn en dus overal $M_{n1} = 0$ is. Verschillende uitkomsten kunnen ook op deze twee gevallen worden toegepast.

Ten einde nu de magnetisatie van de ellipsoïde te berekenen veronderstellen we, dat tusschen B en H het lineaire verband (4) bestaat en dat de ellipsoïde met de assen volgens de magnetische hoofdrichtingen uit een kristal gesneden is. We leggen de coördinaatassen langs de hoofdrichtingen en brengen het veld H_{0x} aan in de richting van de X-as. Uit het bovenstaande volgt, dat H_{0x} een homogene magnetisatie in de richting van de X-as teweegbrengt. Is deze M_x en zijn a, b, c de halve assen der ellipsoïde, dan is de potentiaal

$$\Phi' = -\frac{M_x}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) ds = A M_x x,$$

als

$$A = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Hieruit volgt

$$H_x' = -A M_x \quad \text{en} \quad H_x = H_{0x} - A M_x,$$

en daar $M_x = \kappa_1 H_x$, vinden we

$$M_x = \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1 A} H_{0x}.$$

Evenzoo geven de velden H_{0y} en H_{0z} de magnetisaties

$$M_y = \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2 B} H_{0y}, \quad M_z = \frac{\kappa_3}{1 + \kappa_3 C} H_{0z},$$

als

$$B = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad \text{en} \quad C = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Heeft de ellipsoïde een willekeurigen stand in het veld, zoodat de richtingsconstanten van de as van de ellipsoïde, waarbij de susceptibiliteit κ_1 behoort, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ zijn, die van de as, waarbij de susceptibiliteit κ_2 behoort, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ en die van de as, waarbij de susceptibiliteit κ_3 behoort, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, dan vinden we de magnetisatie, die door een veld H_{0x} wordt opgewekt, door superpositie van drie velden, nl. de drie componenten van H_{0x} volgens de assen der ellipsoïde, $\alpha_1 H_{0x}, \alpha_2 H_{0x}, \alpha_3 H_{0x}$.

Uit het bovenstaande volgt

$$M_x = \left(\frac{\kappa_1 \alpha_1^2}{1 + \kappa_1 A} + \frac{\kappa_2 \alpha_2^2}{1 + \kappa_2 B} + \frac{\kappa_3 \alpha_3^2}{1 + \kappa_3 C} \right) H_{0x},$$

$$M_y = \left(\frac{\kappa_1 \alpha_1 \beta_1}{1 + \kappa_1 A} + \frac{\kappa_2 \alpha_2 \beta_2}{1 + \kappa_2 B} + \frac{\kappa_3 \alpha_3 \beta_3}{1 + \kappa_3 C} \right) H_{0x},$$

$$M_z = \left(\frac{\kappa_1 \alpha_1 \gamma_1}{1 + \kappa_1 A} + \frac{\kappa_2 \alpha_2 \gamma_2}{1 + \kappa_2 B} + \frac{\kappa_3 \alpha_3 \gamma_3}{1 + \kappa_3 C} \right) H_{0x}.$$

In het geval, dat de ellipsoïde isotroop is, leidt men de magnetisatie uit het bovenstaande onmiddellijk af door $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa$ te stellen ¹⁾.

Ook het geval van den kristallijnen en den isotropen bol ligt in het behandelde opgesloten; voor den kristallijnen bol is (R = straal van den bol)

$$A = B = C = \frac{1}{2} R^3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(R^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3};$$

als de magnetische hoofdrichtingen met de coördinaatassen samenvallen, is dus

1) Reeds POISSON heeft de magnetisatie berekend van een homogene ellipsoïde geplaatst in een homogeen magnetisch veld. Daartoe denkt hij zich de ellipsoïde voorzien van een homogene volumelading van een zeker agens met de dichtheid ρ . De hierbij behorende potentiaal in een punt binnen de ellipsoïde is

$$\varphi = \frac{1}{4} a b c \rho \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} d\lambda,$$

waarvoor geschreven kan worden

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} (A x^2 + B y^2 + C z^2) \rho, \text{ als } \varphi_0 = \frac{1}{4} a b c \rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Verschuift men nu de ellipsoïde over een oneindig kleinen afstand δ in de richting h (α, β, γ) en stelt men op de oorspronkelijke plaats een ellipsoïde met een volumelading, waarvan de dichtheid $-\rho$ is, dan wordt de potentiaal in een inwendig punt

$$-\frac{d\varphi}{dh} \delta = (A x \cos \alpha + B y \cos \beta + C z \cos \gamma) \rho \delta \dots \dots \dots (12)$$

Deze potentiaal is te danken aan een oppervlaktelading met een dichtheid $\rho \delta \cos(n \cdot h)$. Denkt men zich nu de ellipsoïde homogeen gemagnetiseerd met een magnetisatie M volgens de richting h , dan is de oppervlaktedichtheid der magnetisatie $M \cos(n \cdot h)$. Omdat deze oppervlaktedichtheid evenals $\rho \delta \cos(n \cdot h)$ het product is van een constante en $\cos(n \cdot h)$, krijgt men de potentiaal φ' behorende bij de magnetisatie der ellipsoïde door in (12) $\rho \delta$ door M te vervangen, dus

$$\varphi' = (A x \cos \alpha + B y \cos \beta + C z \cos \gamma) M = A M_x x + B M_y y + C M_z z,$$

waardoor men komt tot de formules $H_x' = -A M_x$, enz. van de vorige bladzijde.

$$M_x = \frac{3 \kappa_1}{3 + \kappa_1} H_{0x}, \quad M_y = \frac{3 \kappa_2}{3 + \kappa_2} H_{0y}, \quad M_z = \frac{3 \kappa_3}{3 + \kappa_3} H_{0z}, \quad (13)$$

terwijl voor den isotropen bol bovendien $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa$, dus

$$M = \frac{3 \kappa}{3 + \kappa} H_0.$$

Vermelding verdient hierbij, dat naar een bekende stelling het uitwendige veld, dat de bol zelf teweeg brengt gelijk is aan dat van een moment (dubbelpunt) in het middelpunt. Is de bol isotroop, dan is dit moment

$$\frac{4 \pi \kappa}{3 + \kappa} R^3 H_0;$$

is de bol kristallijn en vallen de coördinaatassen met de magnetische hoofdrichtingen samen, dan zijn de drie componenten van het moment

$$\frac{4 \pi \kappa_1}{3 + \kappa_1} R^3 H_{0x}, \quad \frac{4 \pi \kappa_2}{3 + \kappa_2} R^3 H_{0y}, \quad \frac{4 \pi \kappa_3}{3 + \kappa_3} R^3 H_{0z} \dots (14)$$

Ten slotte merken we op, dat, als de componenten van B lineaire functiën van die van H zijn, er bij een ellipsoïde, die op willekeurige wijze uit een kristal is gesneden, en waarin willekeurige onderling loodrechte middellijnen tot coördinaatassen worden gekozen, een reciprociteitsbetrekking bestaat tusschen de magnetisatie, die in de richting der Y -as wordt opgewekt door een veld in de richting der X -as en de magnetisatie volgens de X -as opgewekt door een veld volgens de Y -as. Omdat de toestand uniform is, mogen we ons hierbij tot de beschouwing van de volume-eenheid beperken. Stellen we ons voor, dat het homogene veld en daarmee ook de eveneens homogene magnetisatie geleidelijk verandert. Dan moet $(H \cdot dB)$ een volledige differentiaal zijn, nl. dW_m . Daar

$$dB = dH + dM,$$

is ook $(H \cdot dM)$ een volledige differentiaal en hetzelfde geldt van $(M \cdot dH)$, omdat

$$(M \cdot dH) = d(M \cdot H) - (H \cdot dM).$$

Aangezien in (11) geldt $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, is $(M \cdot dH)$ een volledige differentiaal en dit kan dus ook gezegd worden van

$$(M \cdot dH_0) = M_x dH_{0x} + M_y dH_{0y} + M_z dH_{0z}.$$

Stellen we $(M \cdot dH_0) = d\chi$, dan is

$$M_x = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_{0x}}, \quad M_y = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_{0y}}, \quad M_z = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_{0z}} \dots \dots (15)$$

Maar, zooals uit de voorafgaande beschouwingen gemakkelijk kan worden afgeleid, zijn ook thans M_x , M_y , M_z lineaire functiën van H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} , we mogen dus stellen

$$\begin{aligned} M_x &= \beta_{11} H_{0x} + \beta_{12} H_{0y} + \beta_{13} H_{0z}, \\ M_y &= \beta_{21} H_{0x} + \beta_{22} H_{0y} + \beta_{23} H_{0z}, \\ M_z &= \beta_{31} H_{0x} + \beta_{32} H_{0y} + \beta_{33} H_{0z}. \end{aligned}$$

Daar uit (15) volgt

$$\frac{\partial M_x}{\partial H_{0y}} = \frac{\partial M_y}{\partial H_{0x}}, \text{ enz.,}$$

vinden we

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

Of wel: de magnetisatie, die in de richting der Y-as wordt opgewekt door een veld in de richting der X-as, is gelijk aan de magnetisatie volgens de X-as opgewekt door een veld volgens de Y-as.

§ 4. In het bovenstaande werd steeds verondersteld, dat het stelsel zich in den aether bevindt; in plaats daarvan kunnen we ons het magnetiseerbare lichaam ook geplaatst denken in een isotroop homogeen medium, waarvan de magnetische permeabiliteit de waarde μ_0 heeft, zoodat voor het medium geldt

$$B = \mu_0 H.$$

Ten einde na te gaan, hoe het nu met de grootheden, die den magnetisatietoestand bepalen, gesteld is, vergelijken we twee systemen met elkaar, 1^o. een systeem, dat bestaat uit een magnetiseerbaar lichaam, dat zich in den aether bevindt en 2^o. een systeem, waarbij de permeabiliteit overal μ_0 maal grooter is. Zij de permeabiliteit van het lichaam in het eerste systeem $\frac{\mu}{\mu_0}$ of $\frac{(\mu)}{\mu_0}$ voor een kristallijn lichaam, dan is in het tweede systeem de permeabiliteit van het lichaam μ of (μ) en die van het medium μ_0 .

In het eerste systeem geldt

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} C, \quad \text{div } B = 0,$$

terwijl in den aether $B = H$ en in het lichaam $B = \frac{(\mu)}{\mu_0} H$;

in het tweede systeem is

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} C, \quad \text{div } B = 0,$$

en $B = \mu_0 H$ in het medium en $B = (\mu) H$ in het lichaam.

Uit de vergelijkingen blijkt, dat H in beide gevallen hetzelfde is, maar dat B in het tweede geval μ_0 maal grooter is dan in het eerste, m. a. w. in een systeem, bestaande uit een lichaam (μ) geplaatst in een medium μ_0 , zal de magnetische kracht even groot en de magnetische inductie μ_0 maal grooter zijn dan in een systeem, bestaande uit een lichaam $\frac{(\mu)}{\mu_0}$ geplaatst in den aether, als in beide gevallen de elektrische stroom, die het magnetisch veld teweegbrengt, dezelfde is.

§ 5. Bij de nu volgende beschouwing wordt op den voorgrond gesteld, dat de arbeid van buiten op het lichaam gedaan, gegeven wordt door $(H \cdot dB)$; deze arbeid is te vergelijken met den arbeid $-p dv$ verricht op een gasmassa, wanneer een volumeverandering dv wordt aangebracht, terwijl het gas zich onder den druk p bevindt. Overeenkomstig met de thermodynamica van een gasmassa verkrijgt men een thermodynamische theorie van de magnetisatie, wanneer men in de eerste $-p$ door H en v door B vervangt.

We beschouwen weer de homogene ellipsoïde in een homogeen veld (§ 3), zoodat in het geheele lichaam slechts sprake is van één H en één B . Alleen omkeerbare veranderingen zullen worden ondersteld, we zien dus af van de hysteresis. We bepalen den toestand door T, B_x, B_y, B_z ; dan zijn de inwendige energie ϵ en de componenten der magnetische kracht H_x, H_y, H_z functiën van die vier grootheden. Beschouwen we de volume-eenheid, we onderstellen nl., dat het volume van het lichaam constant blijft; de vergelijking, die aangeeft, dat de som van de toegevoerde warmte en den uitgeoefenden arbeid gelijk is aan de vermeerdering van de inwendige energie ϵ , is

$$dQ + H_x dB_x + H_y dB_y + H_z dB_z = d\epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT + \frac{\partial \epsilon}{\partial B_x} dB_x + \frac{\partial \epsilon}{\partial B_y} dB_y + \frac{\partial \epsilon}{\partial B_z} dB_z$$

of

$$dQ = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_x} - H_x \right) dB_x + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_y} - H_y \right) dB_y + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_z} - H_z \right) dB_z. \quad (16)$$

Volgens de tweede hoofdwet is $\frac{dQ}{T}$ een volledige differentiaal en gelijk aan de aangroeiing van de entropie η :

$$\frac{dQ}{T} = d\eta = \frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_x} - H_x \right) dB_x + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_y} - H_y \right) dB_y + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B_z} - H_z \right) dB_z,$$

dus is

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial B_x} = \frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial B_x} - \frac{H_x}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial B_y} = \frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial B_y} - \frac{H_y}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial B_z} = \frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial B_z} - \frac{H_z}{T}.$$

De betrekkingen, die hieruit volgen, vallen in twee groepen uiteen,

$$1^0. \frac{\partial}{\partial B_x} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_x} - \frac{H_x}{T} \right) \text{ geeft}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_x} - H_x + T \frac{\partial H_x}{\partial T} &= 0, \\ \text{en evenzoo vinden we} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_y} - H_y + T \frac{\partial H_y}{\partial T} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_z} - H_z + T \frac{\partial H_z}{\partial T} &= 0; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$$2^0. \text{ uit } \frac{\partial}{\partial B_z} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_y} - \frac{H_y}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial B_y} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_z} - \frac{H_z}{T} \right) \text{ volgt}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial B_z} = \frac{\partial H_z}{\partial B_y},$$

en evenzoo is af te leiden

$$\frac{\partial H_z}{\partial B_x} = \frac{\partial H_x}{\partial B_z}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial H_y}{\partial B_x};$$

deze laatste groep komt overeen met de op p. 6 gevonden betrekkingen (3).

Na substitutie van (17) in (16) vinden we

$$dQ = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT - T \frac{\partial H_x}{\partial T} dB_x - T \frac{\partial H_y}{\partial T} dB_y - T \frac{\partial H_z}{\partial T} dB_z = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT - T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \cdot dB \right). \quad (18)$$

Het differentiaalquotient $\frac{\partial H}{\partial T}$ in deze vergelijking geeft de verandering der magnetische kracht aan, als bij constante magnetische inductie de temperatuur één graad stijgt.

We gaan nu na de vrije energie ψ van de gemagnetiseerde ellipsoïde, steeds de volume-eenheid beschouwende. Men heeft

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon - T\eta, \\ d\psi &= d\varepsilon - T d\eta - \eta dT = d\varepsilon - dQ - \eta dT = \\ &= H_x dB_x + H_y dB_y + H_z dB_z - \eta dT. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial B_x} = H_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial B_y} = H_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial B_z} = H_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -\eta.$$

Zooals in het begrip der vrije energie ligt en ook uit bovenstaande formules blijkt, is bij isothermische veranderingen

$$d\psi = (H \cdot dB),$$

dus bij een bepaalde temperatuur

$$\psi = \int_0^B (H \cdot dB) + \psi_0,$$

waarbij ψ_0 voorstelt de vrije energie bij de gekozen temperatuur voor $B=0$. Ook de inwendige energie kunnen we berekenen. Terwijl we steeds de temperatuur constant houden, vinden we

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_x} dB_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_y} dB_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_z} dB_z \\ &= \left(H_x - T \frac{\partial H_x}{\partial T} \right) dB_x + \left(H_y - T \frac{\partial H_y}{\partial T} \right) dB_y + \left(H_z - T \frac{\partial H_z}{\partial T} \right) dB_z, \end{aligned}$$

en bij een bepaalde temperatuur

$$\varepsilon = \int_0^B (H \cdot dB) - \int_0^B T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \cdot dB \right) + \varepsilon_0,$$

hierin is ε_0 gelijk aan de inwendige energie bij de gekozen temperatuur voor $B=0$.

Zijn de magnetische eigenschappen van de stof onafhankelijk van de temperatuur, zoodat voor iedere temperatuur H eenzelfde functie van B is, dan is $\frac{\partial H}{\partial T} = 0$ en

$$\varepsilon = \int_0^B (H \cdot dB) + \varepsilon_0.$$

§ 6. Overeenkomstige vergelijkingen vinden we, als we T, H_x, H_y, H_z als onafhankelijk veranderlijken nemen, nl.

$$\begin{aligned} dQ + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial T} \right) dT + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_x} \right) dH_x + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_y} \right) dH_y + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_z} \right) dH_z = \\ = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT + \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_x} dH_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_y} dH_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_z} dH_z \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

Uit $\frac{dQ}{T} = d\eta$ volgen weer twee groepen van betrekkingen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_x} - \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_x} \right) - T \frac{\partial B_x}{\partial T} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_y} - \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_y} \right) - T \frac{\partial B_y}{\partial T} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_z} - \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_z} \right) - T \frac{\partial B_z}{\partial T} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

en

$$\frac{\partial B_y}{\partial H_z} = \frac{\partial B_z}{\partial H_y}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial H_x} = \frac{\partial B_x}{\partial H_z}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x}.$$

Substitutie van (20) in (19) geeft

$$dQ = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial T} \right) \right] dT + T \left(\frac{\partial B}{\partial T} \cdot dH \right),$$

of, als we B door $H + M$ vervangen,

$$dQ = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \left(H \cdot \frac{\partial M}{\partial T} \right) \right] dT + T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \cdot dH \right) \dots (21)$$

Het differentiaalquotient $\frac{\partial M}{\partial T}$ geeft de verandering der magnetisatie aan, als bij constante magnetische kracht de temperatuur één graad stijgt.

Voor $d\psi$ vinden we nu

$$d\psi = \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_x} \right) dH_x + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_y} \right) dH_y + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_z} \right) dH_z + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial T} \right) dT - \eta dT,$$

en, als we weer de temperatuur constant houden, is

$$\psi = \int_0^H \left\{ \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_x} \right) dH_x + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_y} \right) dH_y + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_z} \right) dH_z \right\} + \psi_0,$$

terwijl uit (20) voor de inwendige energie volgt

$$\varepsilon = \int_0^H \left\{ \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_x} \right) dH_x + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_y} \right) dH_y + \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial H_z} \right) dH_z + T \left(\frac{\partial B}{\partial T} \cdot dH \right) \right\} + \varepsilon_0.$$

In het bijzonder kunnen we het geval beschouwen, dat de ellipsoïde bestaat uit een isotrope stof; de vectoren H en B hebben dan dezelfde richting, zoodat

$$\psi = \int_0^H H \frac{\partial B}{\partial H} dH + \psi_0,$$

$$\varepsilon = \int_0^H \left(H \frac{\partial B}{\partial H} + T \frac{\partial B}{\partial T} \right) dH + \varepsilon_0,$$

en, als we B door $H + M$ vervangen,

$$\psi = \int_0^H H \left(\frac{\partial M}{\partial H} + 1 \right) dH + \psi_0 = \int_0^H H \frac{\partial M}{\partial H} dH + \frac{1}{2} H^2 + \psi_0,$$

$$\varepsilon = \int_0^H \left\{ H \left(\frac{\partial M}{\partial H} + 1 \right) + T \frac{\partial M}{\partial T} \right\} dH + \varepsilon_0 = \int_0^H \left(H \frac{\partial M}{\partial H} + T \frac{\partial M}{\partial T} \right) dH + \frac{1}{2} H^2 + \varepsilon_0. \quad (2)$$

Bestaat nu het verband $M = \kappa H$ (κ onafhankelijk van de temperatuur), dan is

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} M H + \frac{1}{2} H^2 + \psi_0 = \frac{1}{2} B H + \psi_0, \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} M H + \frac{1}{2} H^2 + \varepsilon_0 = \frac{1}{2} B H + \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Is echter κ wel afhankelijk van de temperatuur, dan blijft de vrije energie

$$\psi = \frac{1}{2} B H + \psi_0;$$

bij de berekening van de inwendige energie moeten we den term

$$\int_0^H T \frac{\partial M}{\partial T} dH \text{ in aanmerking nemen en vinden dan}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} B H + \frac{1}{2} H^2 T \frac{d\kappa}{dT} + \epsilon_0.$$

Nemen we tusschen M en H de betrekking aan volgens de formule van LANGEVIN (verg. Hoofdstuk II, § 6)

$$M = M_0 \left(\coth a - \frac{1}{a} \right),$$

waarin $a = \frac{m H}{r T}$, dan is

$$\frac{\partial M}{\partial T} = -\frac{M_0}{T} \left(-\frac{a}{\sinh^2 a} + \frac{1}{a} \right),$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{M_0}{H} \left(-\frac{a}{\sinh^2 a} + \frac{1}{a} \right),$$

zoodat

$$\epsilon = \frac{1}{2} H^2 + \epsilon_0.$$

Het verrassende van deze uitkomst is, dat de inwendige energie geheel onafhankelijk blijkt te zijn van de bijzondere magnetische eigenschappen van de stof en in het geheel niet door $\frac{1}{2} B H$ voorgesteld wordt.

In het algemeen kan gezegd worden, dat, als

$$M = f\left(\frac{H}{T}\right),$$

de inwendige energie van het gemagnetiseerde lichaam per volume-eenheid gelijk is aan

$$\frac{1}{2} H^2 + \epsilon_0;$$

immers dan is

$$H \frac{\partial M}{\partial H} + T \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{H}{T} f' \left(\frac{H}{T} \right) - \frac{H}{T} f' \left(\frac{H}{T} \right) = 0.$$

Dit is van toepassing op de formule van CURIE voor paramagnetische stoffen, waarbij

$$M = C \frac{H}{T}. \quad (C = \text{constante van CURIE}).$$

Volgens de formule van WEISS geldt voor ferromagnetische stoffen boven het CURIEpunt (verg. Hoofdstuk III, § 2)

$$M = C \frac{H}{T - \vartheta}. \quad (C = \text{constante van CURIE, } \vartheta = \text{temperatuur van CURIE})$$

Nemen we dit verband tusschen M en H , dan is

$$\varepsilon = \frac{1}{2} H^2 \left[-C \frac{\vartheta}{(T - \vartheta)^2} + 1 \right] + \varepsilon_0.$$

§ 7. In het volgende zullen we de temperatuursverandering bij adiabatische magnetisatie berekenen. Daartoe stellen we in (18) $dQ = 0$. Dit geeft

$$dT = \frac{T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \cdot dB \right)}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}}, \dots \dots \dots (23)$$

waarin $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ de soortelijke warmte per volume-eenheid bij constante magnetische inductie is.

Nemen we T , H_x , H_y , H_z als onafhankelijk veranderlijken, dan geeft (21)

$$dT = - \frac{T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \cdot dH \right)}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \left(H \cdot \frac{\partial M}{\partial T} \right)}, \dots \dots \dots (24)$$

waarin $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \left(H \cdot \frac{\partial M}{\partial T} \right)$ de soortelijke warmte per volume-eenheid bij constante magnetische kracht is. Is dus de magnetisatie als functie van de temperatuur bekend, dan stelt (24) in staat de adiabatische temperatuursverandering bij een aangroeiing van de magnetische kracht te berekenen.

Als voorbeeld noemen we ijzer of nikkel, welke stoffen hun magnetische eigenschappen bij verwarming verliezen. $\frac{\partial M}{\partial T}$ is derhalve negatief. Uit (24) volgt dan, dat een stuk ijzer of nikkel in temperatuur stijgt, als men het in een magnetisch veld brengt, en afkoelt bij afname van het veld. Van cobalt heeft FARADAY¹⁾ gevonden, dat de susceptibiliteit toeneemt, als de temperatuur stijgt van 0° tot 165° C., terwijl boven 165° C. de susceptibiliteit afneemt. Hieruit kan men

1) FARADAY, Exp. Res., 21, 22.

besluiten, dat bij gewone temperatuur een stuk cobalt afkoelt, als men het in een magnetisch veld brengt en in temperatuur stijgt bij afname van het veld; maar bij een temperatuur boven 165° C. zijn de verschijnselen bij cobalt dezelfde als bij ijzer en nikkel.

Ten einde de beteekenis der scalaire producten in (24) te doen uitkomen zullen we de adiabatiscbe temperatuursverandering ΔT berekenen, die een kristal geplaatst in een magnetisch veld H ondervindt, wanneer het van een stand, waarbij de as van grootste susceptibiliteit evenwijdig is aan de krachtlijnen, gedraaid wordt naar een stand, waarbij de as van kleinste susceptibiliteit samenvalt met de krachtlijnen.

Zij het kristal paramagnetisch en zij de susceptibiliteit omgekeerd evenredig met de temperatuur.

We veronderstellen

$$M_x = \kappa_1 H_x = \frac{C_1}{T} H_x, \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ zijn constanten})$$

$$M_y = \kappa_2 H_y = \frac{C_2}{T} H_y,$$

$$M_z = \kappa_3 H_z = \frac{C_3}{T} H_z,$$

waarbij $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3$ en dus ook $C_1 > C_2 > C_3$.

Zij c_H de soortelijke warmte per volume-eenheid bij constante magnetische kracht, dan volgt uit (24)

$$dT = \frac{C_1 H_x dH_x + C_2 H_y dH_y + C_3 H_z dH_z}{c_H T}.$$

In plaats van het kristal te draaien zullen we het veld wentelen. H_x neemt dan af van H tot 0, H_z neemt toe van 0 tot H ; we vinden

$$\Delta T = \frac{C_3 - C_1}{2 c_H T} H^2 = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{2 c_H} H^2.$$

Daar $\kappa_1 > \kappa_3$, koelt het kristal bij deze beweging af.

Al deze gevolgtrekkingen zijn reeds door KELVIN gemaakt in zijn verhandeling: „On the thermoelastic, thermomagnetic and pyroelectric properties of matter”¹⁾, waarin hij formules heeft opgesteld, die op hetzelfde neerkomen als (24).

Ten slotte zullen we de temperatuursverhooging ΔT berekenen, die zuurstof bij 0° C. en 76 cM. druk ondervindt, wanneer er plotseling een magnetische kracht H op wordt uitgeoefend. Voor zuurstof is

$$M = \kappa H,$$

1) Phil. Mag., (5) 5 (1878), p. 4.

waarbij κ , bij gegeven dichtheid, omgekeerd evenredig is met de absolute temperatuur. Veronderstellen we weer, dat het volume steeds constant gehouden wordt, dan kunnen we (24) toepassen. $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ in den noemer van (24) leiden we uit (22) af. Wegens hetgeen omtrent het magnetisch gedrag van zuurstof gezegd is, vinden we

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{d \varepsilon_0}{dT},$$

d. i. de soortelijke warmte van het gas bij constant volume buiten het magnetisch veld.

Dit geeft

$$\Delta T = \int_0^H \frac{\kappa H}{\frac{d \varepsilon_0}{dT} + \frac{\kappa H^2}{T}} dH.$$

Voor de susceptibiliteit bij 20° C. en 76 cM. druk geeft PICCARD ¹⁾ $0,141 \cdot 10^{-6}$ (oude eenheden), dus is κ bij 0° C. gelijk aan $4\pi \cdot \left(\frac{293}{273}\right)^2 \cdot 0,141 \cdot 10^{-6} = 2,04 \cdot 10^{-6}$ (gewijzigde eenheden).

De soortelijke warmte van zuurstof bij constant volume per volume-eenheid is $0,225 \cdot 10^{-3}$; daar in de formules ε in ergen is uitgedrukt, is $\frac{d \varepsilon_0}{dT} = 419 \cdot 10^5 \cdot 0,225 \cdot 10^{-3} = 9,4 \cdot 10^3$, dus

$$\Delta T = \int_0^H \frac{2,04 \cdot 10^{-6} H}{9,4 \cdot 10^3 + \frac{2,04 \cdot 10^{-6}}{273} H^2} dH.$$

Voor de bereikbare waarden van H kan in den noemer de tweede term tegenover den eersten verwaarloosd worden; we vinden dan

$$\Delta T = \frac{2,04 \cdot 10^{-6}}{18,8 \cdot 10^3} H^2 = 1,1 \cdot 10^{-10} H^2.$$

Is b.v. $H = 10000$, dan is

$$\Delta T = 0,011^\circ.$$

§ 8. We gaan nu over tot de behandeling van de ponderomotorische krachten, die een magnetiseerbaar lichaam geplaatst in een magnetisch

¹⁾ Die Magnetisierungskoeffizienten des Wassers und des Sauerstoffs, Promotionsarbeit von A. A. PICCARD, Arch. de Genève, (4) 36 (1913), p. 209.

veld daarvan ondervindt. De meest bevredigende afleiding zou de thermodynamische zijn, maar om niet te lang te worden zullen we ons daarvan onthouden en alleen aan twee andere methoden in het kort herinneren, nl. de afleiding met behulp van de spanningen van MAXWELL en die uit het arbeidsvermogen.

Eerste methode. We beschouwen een lichaam van onveranderlijken vorm in een gegeven constant veld H_0 . Gevraagd worden de resulterende kracht en het resulterende koppel, dat het lichaam van het veld ondervindt. Noemen we de componenten der spanning per vlakke-eenheid X, Y, Z , terwijl de toegevoegde index de richting aangeeft van de normaal op het vlakke-element, waarop de spanning werkt, dan is volgens MAXWELL

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2}(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \text{ enz.}, \\ X_y &= Y_x = H_x H_y, \text{ enz.} \end{aligned}$$

Zij σ een gesloten oppervlak, dat het lichaam omringt. De x -component van de resulterende kracht F door het veld op het lichaam uitgeoefend is

$$F_x = \int X_n d\sigma = \int (X_x \cos \alpha + X_y \cos \beta + X_z \cos \gamma) d\sigma,$$

waarin α, β, γ de hoeken zijn tusschen de assen en de naar buiten getrokken normaal.

Is ϕ_0 de potentiaal van het veld H_0 en ϕ' de potentiaal, die daar nog bijkomt, en die geacht kan worden bij het, met de dichtheden $-\text{div } M$ en M_{n_1} verdeelde, magnetisme te behooren, dan is

$$H_x = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \text{ enz.}$$

De spanningen X_x , enz. kunnen nu elk in drie deelen gesplitst worden, waarvan het eerste een homogene quadratische functie is der differentiaalquotienten van ϕ_0 , het tweede een dergelijke functie der differentiaalquotienten van ϕ' , terwijl het derde producten telkens van een differentiaalquotient van ϕ_0 en een van ϕ' bevat.

Men toont nu gemakkelijk aan, dat het eerste en het tweede deel niets tot de resulterende kracht bijdragen. Dit was trouwens te verwachten, daar zij de resulterende kracht opleveren voor het geval, dat het magnetiseerbare lichaam er niet of dat het er alleen, met de waarden van $-\text{div } M$ en M_{n_1} , is. Voor de resulterende kracht in de richting der X -as kan men dus schrijven

$$F_x = \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \cos \gamma \right] d\sigma.$$

Herleiden we dit tot een ruimte-integraal over de ruimte s binnen σ en nemen we in aanmerking, dat aan het oppervlak σ' van het lichaam de differentiaalquotienten van Φ' in de richting van de normaal een discontinuïteit vertoonen, dan vinden we

$$F_x = \int \left(\Delta \Phi_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \Delta \Phi' \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) ds + \int \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_1 \right] + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \left[\left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_1 \right\} \cos \beta - \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right)_1 \right\} \cos \alpha \right] + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \left[\left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_1 \right\} \cos \gamma - \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)_1 \right\} \cos \alpha \right] \right) d\sigma'.$$

$$\text{Daar } \Delta \Phi_0 = 0, \quad \Delta \Phi' = \text{div } M, \quad \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_2 = M_{n_1},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)_2 = M_{n_1} \cos \alpha, \text{ enz.},$$

is ten slotte

$$F_x = \int H_{0x} (-\text{div } M) ds + \int H_{0x} M_{n_1} d\sigma'. \dots \dots (25)$$

Op dergelijke wijze toont men aan, dat de x -component van het resulterende koppel is

$$L_x = \int (y H_{0z} - z H_{0y}) (-\text{div } M) ds + \int (y H_{0z} - z H_{0y}) M_{n_1} d\sigma'. (26)$$

De resulterende kracht en het resulterende koppel worden dus gevonden door het magnetisme als iets stoffelijks te beschouwen en er een kracht op te laten werken, die per eenheid daarvan H_0 bedraagt.

Het koppel, dat de kristallijne bol in het homogene veld H_0 ondervindt, kan men nu vinden uit de overweging, dat het gelijk is aan het koppel, dat op een magnetisch dubbelpunt in het centrum werkt, wanneer het moment daarvan gelijk is aan dat van het lichaam (verg. p. 15 (14)).

Dit geeft

$$L_x = 12 \pi R^3 \frac{\kappa_2 - \kappa_3}{(\kappa_2 + 3)(\kappa_3 + 3)} H_{0y} H_{0z}$$

$$L_y = 12 \pi R^3 \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{(\kappa_3 + 3)(\kappa_1 + 3)} H_{0z} H_{0x}$$

$$L_z = 12 \pi R^3 \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{(\kappa_1 + 3)(\kappa_2 + 3)} H_{0x} H_{0y}$$

of, als we (13) in aanmerking nemen,

$$L = \frac{4 \pi R^3}{3} [M \cdot H_0].$$

De componenten van het koppel per volume-eenheid zijn

$$l_x = 9 \frac{\kappa_2 - \kappa_3}{(\kappa_2 + 3)(\kappa_3 + 3)} H_{0y} H_{0z}, \text{ enz.}$$

Veronderstellen we, dat de stof zwak magnetiseerbaar is en verwaarloozen we tweede en hoogere machten der κ 's. We vinden dan

$$l_x = (\kappa_2 - \kappa_3) H_{0y} H_{0z},$$

$$l_y = (\kappa_3 - \kappa_1) H_{0z} H_{0x},$$

$$l_z = (\kappa_1 - \kappa_2) H_{0x} H_{0y}.$$

Deze uitkomst is in overeenstemming met hetgeen KELVIN voor dit koppel geeft (p. 2), daar hij zich, zooals we gezien hebben, tot zwak magnetiseerbare lichamen beperkt. Ten slotte merken we op, dat de gevolgde methode, waarbij de ponderomotorische krachten teruggebracht worden tot die, welke op het magnetisme zouden werken, steeds geldt, hoe ook de magnetische eigenschappen van het lichaam mogen zijn, b.v. ook als er hysteresis bestaat. In dit geval kan de methode van het arbeidsvermogen bezwaarlijk worden toegepast.

§ 9. Tweede methode. We zullen nu de ponderomotorische krachten, door het magnetisch veld op een magnetiseerbaar lichaam Q uitgeoefend, afleiden uit de verandering van het magnetisch arbeidsvermogen T van de beschouwde ruimte bij een willekeurige oneindig kleine verplaatsing van Q . Voor dat arbeidsvermogen rekenen wij daarbij $\frac{1}{2} (H \cdot B)$ per volume-eenheid. We veronderstellen, dat het magnetisch veld teweeggebracht wordt door elektrische stroomen. We kunnen het systeem dan opvatten als een cyclisch systeem ¹⁾, waarbij de stroomsterkte de afgeleide naar den tijd van de cyclische coördinaat voorstelt en de stand van Q door de parameters bepaald wordt; want, daar de parameters zoo langzaam veranderen, dat hun afgeleiden naar den tijd verwaar-

1) HERTZ, Prinziptien der Mechanik, p. 240.

loosd kunnen worden, kan de energie van het systeem met voldoende benadering worden voorgesteld als een homogene quadratische functie van de afgeleide naar den tijd der cyclische coördinaat. Omtrent de veranderingen, die we het systeem doen ondergaan, kunnen we nu tweeërlei veronderstellingen maken, ten eerste, dat bij de verplaatsing van Q de stroomen constant gehouden worden en ten tweede, dat de electrokinetische hoeveelheid van beweging constant gehouden wordt.

In het eerste geval is het systeem nader te definieeren als een isocyclisch systeem, omdat bij de beweging van Q de afgeleide naar den tijd van de cyclische coördinaat constant gehouden wordt. Dan geldt de volgende eigenschap der isocyclische systemen: de arbeid der krachten, door het systeem volgens de parameters uitgeoefend, is bij een isocyclische beweging gelijk aan de toename van de energie van het systeem. Dus is bij een willekeurige oneindig kleine verplaatsing van Q de arbeid der ponderomotorische krachten

$$\delta A = \delta T_{(isocycl.)}$$

We merken hierbij op, dat, hoewel deze arbeid gelijk is aan de aangroeiing van het magnetisch arbeidsvermogen toch aan de wet van het behoud van arbeidsvermogen voldaan is; de aangroeiing van het magnetisch arbeidsvermogen en de arbeid der ponderomotorische krachten worden nl. geleverd door de meerdere electromotorische kracht, die noodig is om de stroomen, die het magnetisch veld teweegbrengen, constant te houden. Deze meerdere electromotorische kracht heft de inductiewerking op, die een gevolg is van de beweging van het lichaam Q . Of wel, als we een stroomgeleider zonder weerstand hebben, dan werkt er geen electromotorische kracht, zoolang Q in rust is, terwijl bij de beweging van Q een electromotorische kracht noodig is om de stroomsterkte constant te houden.

In de tweede veronderstelling, dat bij de beweging van Q de electrokinetische hoeveelheid van beweging constant blijft, hebben we een adiabatisch cyclisch systeem. Nemen we aan, dat de weerstand in den stroomgeleider gelijk nul is, dan is bij de adiabatische beweging van Q de electromotorische kracht voortdurend gelijk nul; in dit geval is dus de stroomsterkte niet constant. Heeft echter de stroomgeleider wel een weerstand, dan moet er in het geval, dat wij nu beschouwen, een electromotorische kracht werken, die gelijk is aan het product van den weerstand en de oogenblikkelijke grootte van de stroomsterkte. Bij de adiabatische beweging is de arbeid der krachten gelijk aan de afname der energie, dus

$$\delta A = - \delta T_{(adiab.)}$$

Aangezien de verandering van de ponderomotorische krachten bij de oneindig kleine verplaatsing van Q oneindig klein is, komt voor δA in beide gevallen de ponderomotorische kracht in aanmerking, zooals die is bij het begin van de verplaatsing van Q , de arbeid der ponderomotorische krachten is dus hetzelfde of men de stroomsterkte dan wel de electrokinetische hoeveelheid van beweging constant houdt. We vinden dus

$$\delta T_{(\text{isocycl.})} = - \delta T_{(\text{adiab.})} \dots \dots \dots (27)$$

Dit is een bijzonder geval van een bekende stelling uit de mechanica ¹⁾. Kan nl. de energie T geschreven worden als een quadratische functie zoowel van grootheden ϕ als van grootheden ψ , zoodanig dat

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_{\kappa}} = \psi_{\kappa} \text{ en } \frac{\partial T}{\partial \psi_{\kappa}} = \phi_{\kappa},$$

terwijl T bovendien afhankelijk is van parameters q , dan is

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_{\psi \text{ constant}} = - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_{\phi \text{ constant.}}$$

Ten einde nu de ponderomotorische krachten te berekenen gaan we de verandering van het magnetisch arbeidsvermogen na bij een oneindig kleine isocyclische verplaatsing van Q .

Bij afwezigheid van Q zij overal aether en de magnetische kracht zij H_0 . Het aanbrengen van Q heeft een toestandsverandering tengevolge. Zij in den nieuwen toestand de magnetische kracht

$$H = H_0 + H'$$

zowel binnen als buiten Q . De lijnintegraal van H' is weer voor elke gesloten lijn nul. Zij verder B de magnetische inductie in den nieuwen toestand. Buiten Q is

$$B = H_0 + H',$$

binnen Q treedt de magnetisatie M op, dus geldt daar

$$B = H_0 + H' + M.$$

De magnetische energie in den nieuwen toestand wordt bepaald door

$$T = \frac{1}{2} \int (B \cdot \{ H_0 + H' \}) ds,$$

waarbij de integratie over de geheele ruimte moet worden uitgestrekt.

1) ROUTH, Elementary rigid dynamics, p. 334.

Nemen we in aanmerking, dat

$$\int (B \cdot H') ds = 0,$$

omdat B solenoïdaal en H' irrotationeel verdeeld is, en dat

$$\int (H' \cdot H_0) ds = 0,$$

omdat H_0 solenoïdaal en H' irrotationeel verdeeld is, dan kunnen we voor T schrijven

$$T = \frac{1}{2} \int (B \cdot H_0) ds = \frac{1}{2} \int (\{H_0 + H' + M\} \cdot H_0) ds = \frac{1}{2} \int H_0^2 ds + \frac{1}{2} \int (M \cdot H_0) ds \dots (28)$$

Hierin komt alleen de magnetische kracht H_0 voor, die bij afwezigheid van Q bestaat en in de tweede integraal behoeft slechts over het lichaam Q geïntegreerd te worden. Daar de term $\frac{1}{2} \int H_0^2 ds$ niet van den stand van Q afhangt, vinden we

$$\delta A = \frac{1}{2} \delta \int_Q (M \cdot H_0) ds = \delta R,$$

als we

$$\frac{1}{2} \int_Q (M \cdot H_0) ds = R$$

stellen.

Tusschen M en H nemen we nu het verband (5) van p. 7 aan, zoodat M op de volgende wijze van H afhangt

$$M_x = \kappa_{11} H_x + \kappa_{12} H_y + \kappa_{13} H_z, \text{ enz.}$$

Omtrent het lichaam Q maken we verder de bijzondere veronderstelling, dat het zeer zwak magnetiseerbaar is, opdat de uitkomsten een eenvoudigen vorm aannemen. De grootheden κ evenals H'_x, H'_y, H'_z zijn dan oneindig klein. We verwaarloozen oneindig kleine grootheden van tweede en hoogere orde. Voor de componenten van M mogen we dan schrijven

$$M_x = \kappa_{11} H_{0x} + \kappa_{12} H_{0y} + \kappa_{13} H_{0z}, \text{ enz.}$$

Dit geeft

$$R = \frac{1}{2} \int_Q (\kappa_{11} H_{0x}^2 + \kappa_{22} H_{0y}^2 + \kappa_{33} H_{0z}^2 + 2\kappa_{12} H_{0x} H_{0y} + 2\kappa_{13} H_{0x} H_{0z} + 2\kappa_{23} H_{0y} H_{0z}) ds$$

Is het veld homogeen, dan is

$$R = \frac{1}{2} (\kappa_{11} H_{0x}^2 + \kappa_{22} H_{0y}^2 + \kappa_{33} H_{0z}^2 + 2\kappa_{12} H_{0x} H_{0y} + 2\kappa_{13} H_{0x} H_{0z} + 2\kappa_{23} H_{0y} H_{0z}) \sigma,$$

als σ het volume van Q is. Bij een translatie van Q is

$$\delta R = 0,$$

$$\text{daar dan } \delta H_{0x} = 0, \quad \delta H_{0y} = 0, \quad \delta H_{0z} = 0;$$

maar bij een wenteling van Q verrichten de ponderomotorische krachten arbeid. Denken we ons een wenteling van Q over een hoek ε om de X-as of, wat op hetzelfde neerkomt, een wenteling van het veld over een hoek $-\varepsilon$ om de X-as, dan is

$$\delta H_{0x} = 0, \quad \delta H_{0y} = \varepsilon H_{0z}, \quad \delta H_{0z} = -\varepsilon H_{0y},$$

en

$$\delta R = \varepsilon \{ (\kappa_{22} - \kappa_{33}) H_{0y} H_{0z} + \kappa_{23} (H_{0z}^2 - H_{0y}^2) - \kappa_{13} H_{0x} H_{0y} + \kappa_{12} H_{0x} H_{0z} \} \sigma.$$

We vinden dus voor de componenten van het koppel door het veld op Q per volume-eenheid uitgeoefend

$$l_x = (\kappa_{22} - \kappa_{33}) H_{0y} H_{0z} + \kappa_{23} (H_{0z}^2 - H_{0y}^2) - \kappa_{13} H_{0x} H_{0y} + \kappa_{12} H_{0x} H_{0z}, \text{ enz.}$$

Zijn de coördinaatassen gericht volgens de magnetische hoofdasen van Q , dan gaan κ_{11} , κ_{22} , κ_{33} respectievelijk over in κ_1 , κ_2 , κ_3 en dan is $\kappa_{12} = \kappa_{23} = \kappa_{13} = 0$. Dit geeft

$$l_x = (\kappa_2 - \kappa_3) H_{0y} H_{0z}, \text{ enz.,}$$

in overeenstemming met de op p. 27 gevonden uitkomst.

Uit het bovenstaande volgt, dat het bij een zwak magnetiseerbaar lichaam alleen op het volume en niet op den vorm aankomt, daarom kan men van het koppel per volume-eenheid spreken. Een isotroop lichaam zal zich, als het zwak magnetisch is, in een homogeen veld niet richten, welken vorm het ook heeft, immers dan is $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa$ en dus $l_x = l_y = l_z = 0$.

Heeft men met een sterker magnetiseerbaar lichaam te doen, dan zal het zich wegens zijn vorm in een bepaalde richting plaatsen, tenzij het een bijzonderen vorm, b.v. dien van een bol of van een kubus, heeft. Als voorbeeld beschouwen we een ellipsoïde van een isotrope stof met halve assen a , b , c geplaatst met de assen langs de coördinaatassen. Zij er een homogeen magnetisch veld met de componenten H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} . De componenten van de magnetisatie der ellipsoïde zijn (verg. p. 13)

$$M_x = \frac{\kappa}{1 + \kappa A} H_{0x}, \quad M_y = \frac{\kappa}{1 + \kappa B} H_{0y}, \quad M_z = \frac{\kappa}{1 + \kappa C} H_{0z}.$$

Daar de magnetisatie homogeen is, kunnen we voor R schrijven

$$R = \frac{2\pi abc}{3} \left(\frac{\kappa}{1 + \kappa A} H_{0x}^2 + \frac{\kappa}{1 + \kappa B} H_{0y}^2 + \frac{\kappa}{1 + \kappa C} H_{0z}^2 \right).$$

Laten we om de componenten van het koppel te vinden het veld weer wentelen over een hoek $-\varepsilon$ om de X-as, dan is

$$\delta R = \frac{4\pi abc}{3} \frac{x^2(C-B)}{(1+xB)(1+xC)} H_{0y} H_{0z} \varepsilon.$$

Hieruit volgt voor de componenten van het koppel

$$L_x = \frac{4\pi abc}{3} \frac{x^2(C-B)}{(1+xB)(1+xC)} H_{0y} H_{0z}, \text{ enz.};$$

deze uitdrukkingen blijken meer ingewikkelde functiën te zijn van de afmetingen van de ellipsoïde, zoodat men nu niet van het koppel per volume-eenheid kan spreken.

§ 10. Kan het in § 9 beschouwde lichaam Q zich vrij bewegen, dan zal het zich zoo instellen, dat R zoo groot mogelijk wordt. Leggen we de coördinaatassen langs de magnetische hoofdassen van Q , dan is

$$R = \frac{1}{2} (x_1 H_{0x}^2 + x_2 H_{0y}^2 + x_3 H_{0z}^2) \sigma.$$

Veronderstellen we, dat $x_1 > x_2 > x_3$, dan is de maximumwaarde van R

$$\frac{1}{2} x_1 H_0^2 \sigma.$$

We moeten nu echter twee gevallen onderscheiden, nl. x_1, x_2, x_3 grooter dan nul (het lichaam is dan paramagnetisch) en x_1, x_2, x_3 kleiner dan nul (diamagnetische lichamen). Uit het bovenstaande volgt, dat een paramagnetisch lichaam zich zoodanig in het magnetisch veld plaatst, dat zijn richting van grootste susceptibiliteit samenvalt met de richting van de magnetische krachtlijnen en een diamagnetisch lichaam zoodanig, dat zijn richting van kleinste diamagnetische susceptibiliteit evenwijdig is aan de magnetische krachtlijnen.

Is het veld niet homogeen, maar hebben we een lichaam van zoo kleine uitgestrektheid, dat over de geheele ruimte, die het inneemt, het veld even sterk kan worden geacht, dan kan men toch voor R schrijven

$$R = \frac{1}{2} (x_1 H_{0x}^2 + x_2 H_{0y}^2 + x_3 H_{0z}^2) \sigma.$$

Nu is bij een translatie van Q δR niet meer gelijk nul. We vinden voor de componenten van de resulterende kracht door het veld op Q uitgeoefend

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x} = \left(x_1 H_{0x} \frac{\partial H_{0x}}{\partial x} + x_2 H_{0y} \frac{\partial H_{0y}}{\partial x} + x_3 H_{0z} \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right) \sigma \text{ } ^1) \text{ enz. . (29)}$$

1) Uit het bovenstaande volgt onmiddellijk, dat de arbeid, dien de ponderomotorische krachten verrichten, als zij het lichaam verplaatsen van een stand, waar R de waarde R_1 heeft, naar een stand, waar R de waarde R_2 heeft, $R_2 - R_1$ bedraagt, in overeenstemming met 7, p. 3.

Hieruit kunnen we tweeërlei gevolgtrekkingen maken.

1^o. Een paramagnetisch lichaam wordt door de ponderomotorische krachten gedreven naar plaatsen, waar het veld sterker is, een diamagnetisch lichaam naar plaatsen, waar het veld zwakker is.

2^o. Stel, dat een der krachtlijnen l recht is en het veld rondom die lijn symmetrisch. Dan is in elk punt van l , als h een richting loodrecht daarop is, $H_{0h} = 0$ en $\frac{\partial H_{0l}}{\partial h} = 0$, terwijl er een bepaalde gradient

$\frac{\partial H_{0l}}{\partial l}$ bestaat. Plaatst men nu in een punt der lijn l het lichaam zoo, dat de eerste hoofdrichting met l samenvalt, dan ondervindt het lichaam blijkens de drie formules (29) een langs l gerichte kracht van de grootte $\kappa_1 H_{0l} \frac{\partial H_{0l}}{\partial l} \sigma$. Dergelijke uitdrukkingen gelden, als men de tweede of de derde hoofdrichting langs l laat vallen. Dus is de ponderomotorische kracht door het veld op het lichaam uitgeoefend het grootst, als het lichaam zich zoo in het veld bevindt, dat de richting van grootste susceptibiliteit evenwijdig is aan de magnetische krachtlijnen.

Het bovenstaande wordt bevestigd door de resultaten, die TYNDALL en KNOBLAUCH ¹⁾ bij hun waarnemingen verkregen. Zij vonden nl., dat bij het diamagnetische kalkspaat, dat zich in het magnetisch veld met de optische as loodrecht op de krachtlijnen plaatst, de afstooting, die het van een magneetpool ondervindt, het grootst is, als het met de optische as langs de verbindingslijn met die pool geplaatst is. Bij latere waarnemingen vond TYNDALL ²⁾, dat sideriet en ijzervitriool, welke stoffen beide paramagnetisch zijn, de grootste aantrekking vertoonen volgens die richting, die zich bij instelling in een homogeen veld evenwijdig aan de krachtlijnen plaatst. Bovendien deed TYNDALL zijn waarnemingen bij verschillende sterkten van het magnetisch veld; hij vond voor een bepaalde richting in het kristal de aantrekking of afstooting evenredig aan het kwadraat van de stroomsterkte, die het magnetisch veld teweegbrengt. Hieruit besluit hij, dat de magnetisatie evenredig is aan de magnetische kracht; hij vindt dus de betrekking $M = (\kappa) H$. Bij de verschillende proeven moesten de kristallen zeer zorgvuldig gereinigd worden, opdat geen ijzersporen de resultaten bedierven.

Een voorbeeld van het koppel, dat een gemagnetiseerd lichaam van een niet-homogeen veld ondervindt, zal in § 13 behandeld worden.

1) Pogg. Ann., 79 (1850), p. 223; 81 (1850), p. 481.

2) Pogg. Ann., 83 (1851), p. 398.

§ 11. Tot nog toe werd aangenomen (§ 9), dat het veld H_0 , waarin het magnetiseerbare lichaam geplaatst is, door een constanten stroom wordt teweeggebracht. Wij kunnen ons echter ook voorstellen dat het wordt voortgebracht door een permanenten magneet en, terwijl wij dezen opvatten als een gegeven onveranderlijke verdeling van „magnetisme” (verg. § 3), de oude theorie der magnetisatie toepassen.

In het binnenste van het magnetiseerbare lichaam hebben wij nu weder de magnetisatie M en de magnetische inductie $B = H + M$ in het oog te vatten, die evenals in het voorgaande bepaald worden door de voorwaarde, dat H irrotationeel en B solenoïdaal verdeeld is, terwijl tusschen B en H een der vroeger aangenomen betrekkingen bestaat. Van de hysteresis wordt weer afgezien. Buiten het lichaam Q is $B = H$.

We moeten nu aan het stelsel een potentieele energie

$$U = \frac{1}{2} \int (B \cdot H) ds$$

toeschrijven en bepalen de ponderomotorische krachten uit

$$\delta A = - \delta U. \text{ 1)}$$

Daar H de resultante is van H_0 en het veld H' door het lichaam Q teweeggebracht, heeft men

$$U = \frac{1}{2} \int (\{H_0 + H' + M\} \cdot \{H_0 + H'\}) ds.$$

Zowel H_0 als H' zijn irrotationeel verdeeld en $H' + M$ solenoïdaal. Men heeft dus

$$\int (\{H' + M\} \cdot H_0) ds = 0, \dots \dots \dots (30)$$

$$\int (\{H' + M\} \cdot H') ds = 0, \dots \dots \dots (31)$$

en kan schrijven

$$U = \frac{1}{2} \int (H_0 \cdot \{H_0 + H'\}) ds,$$

of, daar blijkens (30)

$$\int (H_0 \cdot H') ds = - \int (H_0 \cdot M) ds,$$

1) Dit alles stemt geheel overeen met het geval van een dielectrisch lichaam Q geplaatst in het veld van, op onveranderlijke wijze verdeelde, elektrische ladingen. Met H , M en B komen overeen de elektrische kracht E , de elektrische polarisatie P en de dielectrische verplaatsing D . Het electrisch arbeidsvermogen is $U = \frac{1}{2} \int (D \cdot E) ds$ en voor elke verplaatsing is $\delta A = - \delta U$.

is

$$U = \frac{1}{2} \int H_0^2 ds - \frac{1}{2} \int (H_0 \cdot M) ds \dots \dots \dots (32)$$

Dit onderscheidt zich van de waarde van T (p. 30 (28)), alleen door het teeken van den tweeden term. Voor de ponderomotorische krachten vinden we dezelfde uitkomst, daar wij vroeger $\delta A = \delta T$ stelden en nu $\delta A = -\delta U$.

Het verdient de aandacht, dat bij de vroeger gevolgde opvatting δA gelijk is aan de vermeerdering, en bij de nu gevolgde gelijk aan de vermindering van het „arbeidsvermogen” en wel, terwijl dit arbeidsvermogen (T of U) in de beide gevallen overal buiten den draadklos of den magneet hetzelfde is, nl. $\frac{1}{2} \int (B \cdot H) ds$. Wij stellen ons hierbij voor, dat het veld H_0 in het eene geval wordt teweeggebracht door een draadklos en in het andere geval door een daaraan aequivalenten permanenten magneet.

De schijnbare paradox wordt hierdoor opgelost, dat *binnen* den draadklos of den magneet het arbeidsvermogen in de twee gevallen niet hetzelfde is; daardoor komt het, dat de totale waarde in het eene geval is $T = \frac{1}{2} \int H_0^2 ds + \frac{1}{2} \int (H_0 \cdot M) ds$ en in het andere $U = \frac{1}{2} \int H_0^2 ds - \frac{1}{2} \int (H_0 \cdot M) ds$.

Dit verschil tusschen T en U zullen we voor een bijzonder geval nader ophelderen. We beschouwen nl. een dunnen cilindrischen draadklos AB in het eene geval en in het andere geval een daaraan aequivalenten permanenten magneet. Buiten AB is dan in de twee gevallen de toestand geheel dezelfde; die ruimte geeft dus dezelfde bijdrage tot T en U . Maar de ruimte binnen AB levert het verschil op. Zij de stroom in de windingen i , het aantal windingen per lengte-eenheid n . Dan geeft de stroom in de ruimte binnen den klos een homogeen veld $\frac{1}{c} in$ in de richting van de as van den klos, die past bij de stroomrichting. Laat in eenig punt P binnen AB het lichaam Q teweegbrengen een magnetische kracht H_1' evenwijdig aan de as van den klos en een magnetische kracht H_2' loodrecht daarop. Dan heeft men voor H^2 in dat punt in het eene geval (stroom in klos) $\left(\frac{1}{c} in + H_1'\right)^2 + H_2'^2$ en in het andere geval (magneet) $H_1'^2 + H_2'^2$. Het verschil is

$$\frac{1}{c^2} i^2 n^2 + \frac{2}{c} i n H_1',$$

en dus moet

$$T - U = \frac{1}{2} \int \frac{i^2 n^2}{c^2} ds + \int \frac{i n}{c} H_1' ds$$

zijn, als de integralen over den cilinder AB worden uitgestrekt.

De eerste term in het tweede lid is niet anders dan $\frac{1}{2} \int H_0^2 ds$ over den cilinder uitgestrekt, en dit is juist wat de term $\frac{1}{2} \int H_0^2 ds$ in T meer bedraagt dan de overeenkomstige term in U . We moeten dus nog aantoonen, dat

$$\int_{AB} \frac{i n}{c} H_1' ds = \int_Q (H_0 \cdot M) ds, \dots \dots \dots (33)$$

waarbij de indices bij de integraalteekens aanwijzen over welke ruimten de integralen moeten worden uitgestrekt. Daar overal buiten Q $M = 0$ en bovendien in den magneet $H_0 = 0$ is, volgt uit (30)

$$\int_Q (H_0 \cdot M) ds = - \int (H_0 \cdot H') ds, \dots \dots \dots (34)$$

als de laatste integraal over de geheele ruimte buiten den magneet wordt uitgestrekt. In het geval van den stroom in den draadklos is

$$\int (H_0 \cdot H') ds = 0 \quad \text{of} \quad \int_{AB} (H_0 \cdot H') ds = - \int_{AB} (H_0 \cdot H') ds, \dots \dots (35)$$

waarbij de integraal in het eerste lid van de laatste vergelijking over de geheele ruimte buiten den draadklos moet worden uitgestrekt.

Daar buiten den draadklos of den magneet $\int (H_0 \cdot H') ds$ hetzelfde is, volgt uit (34) en (35), dat

$$\int_Q (H_0 \cdot M) ds = \int_{AB} (H_0 \cdot H') ds,$$

waaruit (33) volgt, als we in aanmerking nemen, dat $(H_0 \cdot H') = H_0 H_1'$ en dat $H_0 = \frac{i n}{c}$.

Om de volkomen aequivalentie der drie stellingen

$$\delta A = - \delta T_{(\text{adiab.})}, \quad \delta A = \delta T_{(\text{isocycl.})}, \quad \delta A = - \delta U$$

toe te lichten, voegen we er nog het volgende aan toe. Zij δA_e de

arbeid, die in het isocyclische geval door de electromotorische kracht verricht wordt. Dan is

$$\delta A_e = 2 \delta T_{(\text{isocycl.})} \dots \dots \dots (36)$$

Maar

$$\delta T_{(\text{isocycl.})} = \frac{1}{2} \delta \int_Q (H_0 \cdot M) ds.$$

Dus moet

$$\delta A_e = \delta \int_Q (H_0 \cdot M) ds$$

zijn, of volgens (33)

$$\delta A_e = \frac{in}{c} \int_{AB} \delta H_1' ds.$$

Om dit te verifieeren vatten we de inductiewerking

$$-\frac{n}{c} \int_{AB} \delta H_1' ds$$

in het oog, die in den draadklos bestaat bij een verandering $\delta H_1'$ van het magnetisch veld H_1' , welke verandering door een verplaatsing van het lichaam Q wordt teweeggebracht. De electromotorische kracht,

die deze inductiewerking opheft, is $\frac{n}{c} \int_{AB} \delta H_1' ds$ en de arbeid daarvan

bedraagt

$$\delta A_e = \frac{in}{c} \int_{AB} \delta H_1' ds,$$

en dus heeft men in verband met (33) en (32)

$$\delta A_e = -2 \delta U \dots \dots \dots (37)$$

Uit (36) en (37) volgt, dat

$$\delta T_{(\text{isocycl.})} = -\delta U.$$

Omdat het verschil tusschen een isocyclische en een adiabatische beweging van het systeem hierin bestaat, dat in het tweede geval geen electromotorische kracht werkt om den stroom constant te houden, heeft men

$$\delta T_{(\text{adiab.})} = \delta T_{(\text{isocycl.})} - \delta A_e$$

of

$$\delta T_{(\text{adiab.})} = -\delta T_{(\text{isocycl.})} \quad (\text{verg. p. 29, (27)})$$

§ 12. Ten slotte berekenen we de ponderomotorische krachten voor het geval, dat het lichaam Q met de permeabiliteit (μ) zich in een medium met de permeabiliteit μ_0 bevindt. Daartoe vergelijken we dit systeem met een stelsel bestaande uit een lichaam met de permeabiliteit $\frac{(\mu)}{\mu_0}$ geplaatst in den aether, waarbij we veronderstellen, dat de electricische stroom, die het magnetisch veld H_0 teweegbrengt, in beide stelsels even groot is. We hebben gevonden (§ 4), dat dan ook de magnetische kracht H in beide gevallen even groot is, terwijl de inductie B in het eerste geval μ_0 maal grooter is dan in het tweede geval. In het eerste geval zal dan ook $\delta T \mu_0$ maal grooter zijn dan δT in het tweede geval, daar $T = \frac{1}{2} \int (H \cdot B) ds$. Aldus vinden we voor den arbeid δA der ponderomotorische krachten bij een oneindig kleine verplaatsing van Q voor het geval, dat Q zich bevindt in een medium μ_0 (coördinaatassen in de hoofdrichtingen, verg. p. 32)

$$\begin{aligned} \delta A &= \mu_0 \cdot \frac{1}{2} \delta \int_Q \left\{ \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) H_{0x}^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) H_{0y}^2 + \left(\frac{\mu_3}{\mu_0} - 1 \right) H_{0z}^2 \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \delta \int_Q \{ (\mu_1 - \mu_0) H_{0x}^2 + (\mu_2 - \mu_0) H_{0y}^2 + (\mu_3 - \mu_0) H_{0z}^2 \} ds, \end{aligned}$$

of, als we in plaats van de permeabiliteit de susceptibiliteit invoeren (voor het lichaam $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, voor het medium κ_0), dan is

$$\delta A = \frac{1}{2} \delta \int_Q [(\kappa_1 - \kappa_0) H_{0x}^2 + (\kappa_2 - \kappa_0) H_{0y}^2 + (\kappa_3 - \kappa_0) H_{0z}^2] ds.$$

Ten einde de ponderomotorische krachten te verkrijgen, die Q bij een gegeven uitwendig veld H_0 ondervindt, als het zich in een medium bevindt, hebben we dus slechts in de uitkomsten van §§ 8, 9 en 10 de susceptibiliteiten te vervangen door hun waarden ten opzichte van het medium.

§ 13. We gaan nu over tot het behandelen van eenige methoden, volgens welke de magnetische eigenschappen van kristallen zijn waargenomen.

Waarnemingsmethode van ROWLAND en JACQUES ¹⁾.

Deze berust op de meting van den trillingstijd der trillingen, die een staafje van een kristallijne stof in een bekend inhomogeen veld om zijn evenwichtsstand uitvoert. Het veld werd teweeggebracht door

1) Amer. Journ., 18 (1879), p. 360.

een electromagneet en was symmetrisch rondom de horizontale as van dezen en ten opzichte van het vlak loodrecht op de as midden tusschen de polen. De intensiteit van het veld werd met een inductie-spiraal in absolute maat gemeten. Het staafje werd draaibaar om een verticale as opgehangen. De magnetische hoofdassen hadden de richtingen van de afmetingen van het staafje. Zij κ_1 de susceptibiliteit volgens de lengte van het staafje, κ_2 volgens de breedte en κ_3 in verticale richting; is v het volume van het staafje, en zijn de quadraten der componenten van de veldsterkte volgens lengte, breedte en hoogte gemiddeld over de geheele uitgebreidheid van het staafje H_1^2, H_2^2, H_3^2 , dan is, wanneer we het systeem als een isocyclisch systeem opvatten, de aangroeiing van het magnetisch arbeidsvermogen bij een oneindig kleine draaiing van het staafje om den ophangdraad

$$\delta T = \frac{1}{2} \delta (\kappa_1 H_1^2 + \kappa_2 H_2^2) v.$$

Ter vereenvoudiging is hierbij aangenomen, dat het staafje met de as van het veld in hetzelfde horizontale vlak ligt, zoodat $H_3^2 = 0$. Is het staafje paramagnetisch, dan plaatst het zich wegens de wijze, waarop de veldsterkte van punt tot punt verandert, evenwijdig aan de as van het veld, maar is het diamagnetisch, dan plaatst het zich loodrecht op de as van het veld. Is de afwijkingshoek ψ uit den evenwichtsstand zeer klein, dan kunnen we H_1^2 en H_2^2 naar machten van ψ ontwikkelen. Voor een paramagnetisch staafje is

$$H_1^2 = a - a' \psi^2 + \dots, \quad H_2^2 = b + b' \psi^2 + \dots,$$

en voor een diamagnetisch staafje

$$H_1^2 = c + c' \psi^2 + \dots, \quad H_2^2 = d - d' \psi^2 + \dots$$

Alleen even machten van ψ komen voor, omdat het veld symmetrisch is, terwijl voor een paramagnetisch staafje H_1^2 met toenemende ψ moet afnemen en H_2^2 toenemen en voor een diamagnetisch staafje moet H_1^2 met toenemende ψ toenemen en H_2^2 afnemen. $a, a', b, b', c, c', d, d'$ zijn bekende grootheden, daar het veld in absolute maat bepaald kan worden. Het koppel, dat op een paramagnetisch staafje werkt, als het over een kleinen hoek ψ is afgeweken, is

$$\frac{dT}{d\psi} = (-\kappa_1 a' + \kappa_2 b') \psi v.$$

Is I het traagheidsmoment van het staafje ten opzichte van den ophangdraad en τ de halve trillingstijd, dan is

$$\frac{dT}{d\psi} = -I \frac{\pi^2}{\tau^2} \psi$$

of

$$(-\kappa_1 a' + \kappa_2 b') v = -I \frac{\pi^2}{\tau^2} \dots \dots \dots (38)$$

De proef werd herhaald met een tweede staafje van dezelfde stof en dezelfde afmetingen, waarbij κ_1 de susceptibiliteit was volgens de breedte van het staafje, κ_2 volgens de lengte, κ_3 volgens de hoogte; dan is

$$(-\kappa_2 a' + \kappa_1 b') v = -I \frac{\pi^2}{\tau^2} \dots \dots \dots (39)$$

Voor een diamagnetisch staafje verkrijgt men overeenkomstige vergelijkingen. Van ieder staafje bepaalden zij den trillingstijd, het traagheidsmoment, de lengte en de doorsnede; uit (38) en (39) zijn dan κ_1 en κ_2 te berekenen. Daar de waarnemingen in de lucht geschieden, zijn κ_1 en κ_2 de susceptibiliteiten ten opzichte van de lucht.

Waarnemingsmethode van CURIE ¹⁾.

Het te onderzoeken lichaam werd geplaatst in een niet-homogeen magnetisch veld; door middel van een zeer gevoelige torsiebalans werd de resulterende kracht gemeten, die het lichaam ondervond. Het magnetisch veld werd teweeggebracht door een electromagneet, bij welken de assen der klossen een hoek met elkaar maakten. Het lichaam werd geplaatst in een punt O van de lijn OX , de doorsnede van het horizontale vlak door de assen van de klossen en het verticale symmetrievlak. Gaat er een stroom door den electromagneet, dan ondervindt het lichaam een kracht langs OX . Het magnetisch veld is om redenen van symmetrie gericht volgens OY loodrecht op OX , terwijl de veldsterkte H_y langs OX van punt tot punt verandert. Om de resulterende kracht, die op het lichaam werkt, te vinden veronderstellen we vooreerst, dat het lichaam willekeurig is; hierbij wordt hysteresis niet uitgesloten. We nemen aan, dat er een zekere magnetisatie bestaat, zoodat het lichaam een moment Mv (v is het volume van het lichaam) in de richting der Y -as heeft. Daarop werkt dan het uitwendig veld (verg. § 8). Zijn de afmetingen van het lichaam klein, dan is de ponderomotorische werking, die het ondervindt, dezelfde als die, welke een oneindig klein magneetstaafje, met het moment Mv en in de richting der Y -as geplaatst, ondergaan zou. Immers zijn x, y, z de coördinaten van een punt van het lichaam ten opzichte van het middelpunt, en is H_{0x} de magnetische kracht in

1) Ann. de Chim. et de Phys., (7) 5 (1895), p. 289.

het middelpunt, dan kunnen we voor de magnetische kracht in een punt P van het lichaam schrijven

$$H_{0x} + x \frac{\partial H_x}{\partial x} + y \frac{\partial H_x}{\partial y} + z \frac{\partial H_x}{\partial z},$$

als we tweede en hogere machten der coördinaten x, y, z verwaarloozen. Met (25) vinden we dan voor de resulterende kracht, die het lichaam volgens de X-as ondervindt

$$F_x = \int \left(H_{0x} + x \frac{\partial H_x}{\partial x} + y \frac{\partial H_x}{\partial y} + z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) M_{n1} d\sigma; \quad (d\sigma \text{ is een oppervlakte-element van het lichaam})$$

wegens hetgeen over de magnetisatie van het lichaam gezegd is, kunnen we hiervoor schrijven

$$M \frac{\partial H_x}{\partial y} v,$$

of, omdat H irrotationeel verdeeld is,

$$M \frac{\partial H_y}{\partial x} v. \dots \dots \dots (40)$$

Is het lichaam para- of diamagnetisch en isotroop, dan is

$$F_x = \kappa H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} v \dots \dots \dots (41)$$

CURIE richtte zijn proeven zoo in, dat het lichaam zich bevond in dat punt van OX , waarvoor het product $H_y \frac{\partial H_y}{\partial x}$ een maximum was.

Uit de waarde van dit product en de grootte van de kracht is met (41) de susceptibiliteit te bepalen.

Is het lichaam ferromagnetisch, dan kan men met behulp van (40) de magnetisatie M bepalen. CURIE deed dit voor verschillende sterkten van het magnetisch veld. Bij het vaststellen van het verband tusschen de magnetisatie en de magnetische kracht nam hij in aanmerking, dat de magnetische kracht H in het ferromagnetisch lichaam de resultante is van H_y en de kracht afkomstig van de magnetisatie van het lichaam zelf, de ontmagnetiseerende kracht. CURIE nam van de te onderzoeken stof zeer langgerekte omwentelingsellipsoiden, waarvan de as geplaatst werd in de richting van de Y-as. Men heeft dan

$$H = H_y - 4\pi \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\log \frac{2a}{b} - 1\right) M,$$

als a de lange en b de korte as van de ellipsoïde is.

Waarnemingsmethode van WEISS. ¹⁾

WEISS mat het koppel door een homogeen magnetisch veld uitgeoefend op een pyrrhotinekristal; het kristal had den vorm van een bol of van een ronde schijf en werd draaibaar om een verticale as opgehangen tusschen de polen van een horizontalen electromagneet; de schijf werd daarbij horizontaal geplaatst. Het veld was in absolute maat gemeten. Het koppel, dat het kristal ondervindt, is

$$L = [M \cdot H] v = M H \sin \alpha \cdot v,$$

als v het volume is en α de hoek, dien de magnetisatie maakt met het veld H . Zoo bepaalde WEISS de component van de magnetisatie volgens een horizontale lijn, die loodrecht op het magnetisch veld staat. De magneet was bovendien draaibaar om een verticale as opgesteld, zoodat het koppel gemeten werd voor verschillende standen van het veld ten opzichte van het kristal.

Bij andere proeven werd de schijf verticaal opgehangen tusschen de polen van den electromagneet en wel zoo, dat het vlak der schijf een zekeren hoek met het veld maakte. Ook nu kan men uit de waarneming weder de component der magnetisatie volgens een horizontale, loodrecht op het veld staande, lijn afleiden, hetgeen het mogelijk maakte verdere besluiten omtrent de magnetische eigenschappen van het kristal te trekken.

Vermelding verdient ook een tweede zeer fraaie waarnemingsmethode van WEISS ²⁾ ter bepaling van de verzadigingsmagnetisatie bij een bepaalde temperatuur ³⁾ van ferromagnetische stoffen; zij bestaat hierin, dat een ellipsoïde van een ferromagnetische stof ⁴⁾ opgehangen wordt aan een torsieveer in het homogene horizontale veld van een electromagneet en dat het koppel gemeten wordt, dat de ellipsoïde van het veld ondervindt. Het veld werd zoo gekozen, dat mocht worden aangenomen, dat de verzadigingsmagnetisatie bij de temperatuur van de waarneming bereikt was. Het koppel is

$$L = [M \cdot H] v = M H \sin (\alpha - \phi) \cdot v;$$

v is het volume van de ellipsoïde en α en ϕ zijn de hoeken die het magnetisch veld en de magnetisatie respectievelijk met de groote as

1) Journal de Physique, (4) 4 (1905), p. 478.

2) Journal de Physique, (4) 6 (1907), p. 665.

3) Verg. p. 78, noot I.

4) WEISS paste deze methode zoowel op isotrope als kristallijne stoffen toe; bij de laatste werd er zorg voor gedragen, dat de ellipsoïde zoo uit het kristal was gesneden, dat de magneetkristallijne invloed bij de meting geheel ondergeschikt was.

($O X$) van de ellipsoïde maken. WEISS neemt nu in aanmerking, dat

$$[M \cdot \{H + H'\}] = 0,$$

omdat de magnetisatie dezelfde richting moet hebben als de resultante van het veld H en het ontmagnetiseerende veld H' van de ellipsoïde. Zijn N_1 en N_2 de coëfficiënten van de ontmagnetisatie der ellipsoïde volgens de horizontale assen $O X$ en $O Y$, dan moet

$$\frac{H \cos \alpha - N_1 M \cos \phi}{\cos \phi} = \frac{H \sin \alpha - N_2 M \sin \phi}{\sin \phi}.$$

Dit geeft

$$L = (N_2 - N_1) M^2 \sin \phi \cos \phi \cdot v.$$

Daar de verzadigingsmagnetisatie M een bepaalde waarde heeft, is het koppel een maximum voor $\phi = 45^\circ$; dan is

$$L = \frac{1}{2} (N_2 - N_1) M^2 \cdot v.$$

De magneet was draaibaar om een verticale as opgesteld, het is dus voldoende om den magneet te draaien en in elken stand het koppel te meten, totdat dit een maximum is. De maximumwaarde geeft op een constante na de tweede macht van de magnetisatie.

Ten slotte vermelden we de methode door VOIGT en KINOSHITA ¹⁾ toegepast om de susceptibiliteit van para- en diamagnetische kristallen te bepalen. Als magnetisch veld gebruikten zij het veld van een horizontaal geplaatsten electromagneet. Op den horizontalen straal van het aequatorvlak werd met behulp van een bismuthspiraal de gemiddelde waarde van H^2 bepaald als functie van den afstand s tot de as van het veld. Daartoe werd de weerstand van de bismuthspiraal in eenige opvolgende standen gemeten, waarbij haar vlak telkens samenviel met het aequatorvlak en haar middelpunt zich bevond op den horizontalen straal van het aequatorvlak. Zoodoende kon $\frac{\partial}{\partial s} H^2 = f(s)$ berekend worden. De bismuthspiraal had ongeveer dezelfde grootte als de te meten kristalplaatjes (5 mM. doorsnede bij 1 mM. dikte). Deze waren gesneden loodrecht op een magnetische hoofdas. Een kristalplaatje in één van de standen van de bismuthspiraal gebracht ondervindt tengevolge van de symmetrie van het veld alleen een kracht langs den straal s in het aequatorvlak. Is κ_h de susceptibiliteit ten opzichte van de lucht in de richting van de magnetische

1) Annalen der Physik, 24 (1907), p. 492.

hoofdas loodrecht op het plaatje, v het volume van het plaatje, dan is de kracht in de richting van s

$$F_s = \frac{1}{2} \kappa_h v \frac{\partial}{\partial s} H^2. \quad (\text{verg. p. 32 (29)})$$

Met behulp van een gevoelige torsiebalans, waaraan het kristalplaatje was opgehangen, werd de grootte van F_s en daarmee de waarde der susceptibiliteit bepaald.

Ten slotte vermelden we, dat de orde van grootte van de susceptibiliteit van diamagnetische kristallen is van 10^{-5} (in de gewijzigde eenheden).

Zoo volgt uit de gegevens van VOIGT en KINOSHITA voor kalkspaat

$$\kappa_1 = -0,987 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = -1,240 \cdot 10^{-5},$$

$$\kappa_3 = -1,101 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = -1,382 \cdot 10^{-5};$$

κ_3 is de susceptibiliteit volgens de kristallographische hoofdas. Voor kwarts is het verschil tusschen κ_1 en κ_3 zeer klein

$$\kappa_1 = -1,223 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = -1,537 \cdot 10^{-5},$$

$$\kappa_3 = -1,235 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = -1,552 \cdot 10^{-5}.$$

Zirkon is het eenige kristal, dat in één richting paramagnetisch, in een andere richting diamagnetisch bleek te zijn, maar de gevonden waarden van κ_1 en κ_3

$$\kappa_1 = -0,784 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = -0,985 \cdot 10^{-5},$$

$$\kappa_3 = +3,37 \cdot 10^{-6} \times 4\pi = +4,32 \cdot 10^{-5},$$

zijn niet geheel betrouwbaar, daar de kristallen tal van barsten hadden en bijmenging van andere bestanddeelen niet uitgesloten was.

Van de paramagnetische monokliene kristallen, die FINKE onderzocht (verg. p. 9) is de waarde van de susceptibiliteit grooter nl. van de orde van grootte van 10^{-3} , b.v. voor ferrosulfaat is

$$\kappa_1 = +8,43 \cdot 10^{-5} \times 4\pi = +10,59 \cdot 10^{-4},$$

$$\kappa_2 = +7,87 \cdot 10^{-5} \times 4\pi = +9,89 \cdot 10^{-4},$$

$$\kappa_3 = +7,62 \cdot 10^{-5} \times 4\pi = +9,58 \cdot 10^{-4},$$

waarbij $\psi = +30^\circ 10'$.

(ψ is positief, als de magnetische hoofdas, waarbij κ_1 behoort, ligt binnen den stompen hoek, dien de kristallographische assen in het symmetrievlak met elkaar maken).

HOOFDSTUK II.

Dia- en paramagnetische lichamen.

§ 1. Volgens de theorie door AMPÈRE ongeveer een eeuw geleden opgesteld zijn alle magnetische verschijnselen te danken aan elektrische stroomen. Ook nu is deze theorie nog van kracht, men tracht de magnetisatie te verklaren uit beweging van electriciteit door aan te nemen, dat in een molecuul van een lichaam, geplaatst in een magnetisch veld, elektrische stroomen rondloopen, waarvan de richting afhangt van den para- of diamagnetischen aard van het lichaam; maar, terwijl AMPÈRE zich de moleculaire stroompjes dacht als een beweging van een elektrisch fluidum, nemen we nu electronen aan, die zich in gesloten banen in het molecuul bewegen. Deze theorie heeft in de onderzoekingen van EINSTEIN en DE HAAS ¹⁾ opnieuw een bevestiging gevonden.

Bij diamagnetische stoffen, die een negatieve susceptibiliteit hebben en dus in een magnetisch veld een magnetisch moment krijgen tegengesteld gericht aan de magnetische kracht, moeten we aannemen, dat de moleculen, zoolang er geen uitwendig veld werkt, geen magnetisch moment hebben. Van deze veronderstelling gaat ook WILHELM WEBER uit, die het eerst het diamagnetisme verklaarde door middel van geïnduceerde elektrische stroomen.

Volgens WEBER bestaan er in de moleculen van diamagnetische stoffen cirkelvormige banen langs welke een elektrische stroom kan loopen zonder weerstand. Door het ontstaan van een magnetisch veld worden in die banen stroomen geïnduceerd, waarvan de richting door de gewone regels bepaald wordt. Het molecuul verkrijgt dan een magnetisch moment en, wanneer men met een groot aantal moleculen te doen heeft, welker stroombanen zonder voorkeur voor eenigen bij-

¹⁾ Verh. der Deutschen Physik. Ges., 17 (1915), p. 152. Zittingsverslag Akad. v. Wet. Amsterdam, 23 (1915), p. 1449; 24 (1916), p. 638.

zonderen stand op alle wijzen gericht zijn, zal het resulterende moment tegengesteld zijn aan de magnetische kracht. De moleculaire inductiestroomen blijven rondloopen, totdat zij vernietigd worden door het inductieverschijnsel, dat gepaard gaat met het verdwijnen van het magnetisch veld. Zoolang het veld bestaat, heeft de stof een magnetisch moment.

LANGEVIN ¹⁾ heeft op de grondslagen van de electronentheorie een theorie van het diamagnetisme opgesteld. Hij neemt in tegenstelling met WEBER aan, dat ook buiten het magnetisch veld in een molecuul electriche stroomen rondloopen, maar zoodanig, dat het resulterend magnetisch moment van ieder molecuul van een diamagnetische stof gelijk aan nul is. Bij het aanbrengen van een magnetisch veld onder vinden deze stroompjes een inductiewerking, waardoor het molecuul een magnetisch moment verkrijgt in de richting tegengesteld aan die van het veld. Dit moment blijft bestaan, zoolang het magnetisch veld aanwezig is. LANGEVIN legt er den nadruk op, dat alle stoffen de diamagnetische eigenschap bezitten, ook de stoffen, waarvan het oorspronkelijk moment der moleculen van nul verschillend is (paramagnetische), bij deze wordt echter het diamagnetisch effect te niet gedaan door het grootere paramagnetisch effect.

Nemen we dus aan, dat het diamagnetisme te danken is aan electriche stroomen, die geïnduceerd worden in vaste weerstandlooze banen in het molecuul. Zij A het oppervlak door een baan omsloten en ϑ de hoek, dien het magnetisch veld H maakt met de as van het molecuul, die loodrecht staat op het vlak van den electriche stroom, dan zal de inductiestoot in de baan tengevolge van het ontstaan van het veld

$$-\frac{HA}{c} \cos \vartheta = E$$

bedragen; als positieve richting is die gekozen, welke past bij de als positieve richting langs de as van het molecuul aangenomene. Zij L de coëfficiënt van zelfinductie van de baan en i de geïnduceerde stroom, dan is in de veronderstelling, dat er voor de aanwezigheid van het magnetisch veld geen stroom in de baan was,

$$Li = -\frac{HA}{c} \cos \vartheta$$

of

$$i = -\frac{HA}{cL} \cos \vartheta.$$

¹⁾ Ann. de Chim. et de Phys., (8) 5 (1905), p. 82.

Het hierbij behoorend magnetisch moment is

$$\frac{i A}{c} = - \frac{H A^2}{c^2 L} \cos \vartheta .$$

Dus vinden we voor de magnetisatie van de stof in de richting van de magnetische kracht

$$\sum - \frac{H A^2}{c^2 L} \cos^2 \vartheta , \dots \dots \dots (42)$$

als we veronderstellen, dat er geen wisselwerking tusschen de moleculen bestaat. Zijn er N moleculen per volume-eenheid en zijn hun assen gelijkmatig over alle richtingen verdeeld, dan is de magnetisatie

$$M = - \frac{1}{3} \frac{N A^2}{c^2 L} H ,$$

en de susceptibiliteit

$$\kappa = - \frac{1}{3} \frac{N A^2}{c^2 L} \dots \dots \dots (43)$$

Deze uitdrukking voor κ bevat behalve bekende grootheden het oppervlak A door een geïnduceerden stroom omsloten en den coëfficiënt van zelfinductie L . Als voorbeeld nemen we water; hiervoor is $N = 4 \cdot 10^{22}$ en $\kappa = - 0,72 \cdot 10^{-6} \times 4 \pi = 9,0 \cdot 10^{-6}$ 1). Verder heeft men voor den diameter van een watermolecuul $4,0 \cdot 10^{-8}$ c.m. 2). Nemen we nu aan, dat de straal van een geïnduceerden stroom kleiner is dan $2 \cdot 10^{-8}$ en grooter dan 10^{-8} , dan ligt A tusschen de grenzen $13 \cdot 10^{-16}$ en $3 \cdot 10^{-16}$. In deze veronderstelling moet blijkens (43) L kleiner dan $2,8 \cdot 10^{-24}$ en grooter dan $0,15 \cdot 10^{-24}$ zijn.

§ 2. In aansluiting aan het voorgaande zullen we nu het geval behandelen van negatieve electronen, die rondloopen in vaste cirkelbanen, waar zij niet buiten kunnen komen. We beschouwen een dezer banen, die een willekeurigen stand heeft, en kiezen daarin een positieve richting van omloop s . De daarbij passende richting van de normaal op het vlak der baan zij n , en a de straal van de baan. We onderstellen, dat het electron eerst een snelheid v heeft. De elektrische kracht in de richting der baan zij E_s . Dan is na een vollen omloop de snelheid geworden v' , bepaald door

$$\frac{1}{2} m_e v'^2 - \frac{1}{2} m_e v^2 = - e \int E_s v dt ,$$

1) A. A. PICCARD, zie noot 1, p. 24.

2) H. ABRAHAM et P. SACERDOTE, Recueil de constantes physiques, p. 133.

als $-e$ de lading en m_e de massa van het electron is. Veronderstellen we, dat de verandering in snelheid klein is, dan kan men voor den aan den omloop besteden tijd τ stellen

$$\tau = \pm \frac{4\pi a}{v+v'}$$

waarbij het eene of het andere teeken geldt naar gelang het electron in de positieve of de negatieve richting rondloopt. Verder is

$$\int E_s v dt = \pm \int E_s ds$$

en dus

$$v' - v = - \frac{2e}{m_e} \int E_s ds \cdot \frac{\tau}{4\pi a}$$

Voor het magnetisch moment, dat een rondlopend electron teweegbrengt, kan men het tijdsgemiddelde van

$$m = \frac{1}{2c} [r \cdot e v]$$

nemen, als r de voerstraal is van een vast punt O naar de lading e . Dus in het hier beschouwde geval van het negatieve electron rondlopend in een cirkelvormige baan hebben we een moment volgens de normaal n

$$m_n = - \frac{1}{2c} a e v.$$

De verandering van dit moment in den tijd τ is

$$\delta m_n = - \frac{1}{2c} a e (v' - v) = \frac{e^2}{4\pi m_e c} \int E_s ds \cdot \tau.$$

Daar volgens de grondvergelijkingen

$$\int E_s ds = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int H_n d\sigma,$$

vinden we

$$\delta m_n = - \frac{e^2}{4\pi m_e c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int H_n d\sigma \cdot \tau = - \frac{e^2 a^2}{4 m_e c^2} \frac{\partial H_n}{\partial t} \tau,$$

of, als we τ als een tijdselement dt beschouwen,

$$\frac{dm_n}{dt} = - \frac{e^2 a^2}{4 m_e c^2} \frac{\partial H_n}{\partial t},$$

en

$$m_n = - \frac{e^2 a^2}{4 m_e c^2} H_n, \quad \text{als } m_n = 0 \quad \text{voor } H_n = 0.$$

Heeft nu het magnetisch veld H_1 dat men doet ontstaan, de richting der X-as, dan is voor een molecuul, waarvan de as een hoek ϑ met de X-as maakt, $H_n = H \cos \vartheta$, $m_n = -\frac{e^2 a^2}{4 m_e c^2} H \cos \vartheta$. De bijdrage, die dit molecuul tot het resulterend moment in de richting van H levert, is

$$-\frac{e^2 a^2}{4 m_e c^2} H \cos^2 \vartheta$$

en men heeft voor de resulterende magnetisatie, als N het aantal moleculen per volume-eenheid is, en de cirkelbanen alle standen hebben, zonder voorkeur voor eenige bepaalde richting,

$$M = -\frac{e^2 a^2 N}{12 m_e c^2} H.$$

Nemen we nu in aanmerking, dat de massa van het electron ¹⁾

$$m_e = \frac{e^2}{6 \pi R c^2}$$

bedraagt, waarin R de straal van het electron is, dan vinden we

$$\kappa = -\frac{1}{2} \pi R a^2 N.$$

Deze uitdrukking voor κ bevat behalve bekende grootheden den straal a , die dus hieruit te berekenen is. Als voorbeeld nemen we weer water ²⁾. Men heeft $R = 1,5 \cdot 10^{-13}$ ³⁾; dit geeft met $N = 4 \cdot 10^{22}$ en $\kappa = -9,0 \cdot 10^{-6}$

$$a = 3,1 \cdot 10^{-8},$$

van dezelfde orde van grootte als hetgeen bekend is over de afmetingen van het molecuul. Ook zouden we kunnen aannemen, dat er een zeker aantal b.v. 2 electronen in den kring rondloopen, waarbij we dan van de wisselwerking afzien. Dan is $\kappa = -\pi R a^2 N$ en voor water vinden we in dit geval $a = 2,2 \cdot 10^{-8}$.

§ 3. Om de theorie van § 1 van dit hoofdstuk aan te passen aan de verschijnselen, die zich voordoen bij diamagnetische kristallen, kunnen we tweeërlei veronderstellingen maken:

1° dat de coëfficiënt van zelfinductie niet voor alle banen even groot

1) LORENTZ, Theory of electrons, p. 39.

2) Verg. p. 47.

3) LORENTZ, loc. cit., p. 46.

is, maar afhankelijk van de richting van het baanvlak ten opzichte van het kristalnet,

of 2° dat de assen der moleculen niet meer gelijkmatig over alle richtingen verdeeld zijn.

Berekenen we eerst de magnetisatie in de veronderstelling, dat L niet voor alle banen even groot is. We nemen in het kristal een coördinatenstelsel aan, en bepalen een molecuul door de richtingsconstanten α , β , γ van de as, die loodrecht op het baanvlak van den moleculairen stroom staat en een scherpen hoek maakt met de magnetische kracht. Zijn α_0 , β_0 , γ_0 de richtingsconstanten van de magnetische kracht, dan leveren de moleculen, wier as ligt binnen een ruimtehoek $d\omega$, tot de X -component der magnetisatie een bijdrage

$$-\frac{NA^2 H (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0) \alpha d\omega}{4\pi c^2 L}$$

L is een functie van α , β , γ ; N is het aantal moleculen per volume-eenheid. Stellen we

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha^2 d\omega}{L} = \frac{1}{L_{11}}, \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{\beta^2 d\omega}{L} = \frac{1}{L_{22}}, \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{\gamma^2 d\omega}{L} = \frac{1}{L_{33}},$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha\beta d\omega}{L} = \frac{1}{L_{12}}, \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha\gamma d\omega}{L} = \frac{1}{L_{13}}, \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{\beta\gamma d\omega}{L} = \frac{1}{L_{23}},$$

dan vinden we voor de magnetisatie

$$M_x = -\frac{NA^2}{c^2} \left(\frac{H_x}{L_{11}} + \frac{H_y}{L_{12}} + \frac{H_z}{L_{13}} \right),$$

$$M_y = -\frac{NA^2}{c^2} \left(\frac{H_x}{L_{12}} + \frac{H_y}{L_{22}} + \frac{H_z}{L_{23}} \right),$$

$$M_z = -\frac{NA^2}{c^2} \left(\frac{H_x}{L_{13}} + \frac{H_y}{L_{23}} + \frac{H_z}{L_{33}} \right).$$

In overeenstemming met hetgeen op p. 7 gevonden is, voldoet de susceptibiliteit aan de symmetrische betrekkingen $\kappa_{hk} = \kappa_{kh}$ ($h, k = 1, 2, 3$.) Kiezen we de magnetische hoofdasen tot coördinaatassen, dan is

$$\int \frac{\alpha\beta}{L} d\omega = \int \frac{\alpha\gamma}{L} d\omega = \int \frac{\beta\gamma}{L} d\omega = 0.$$

L moet dan symmetrisch ten opzichte van de coördinaatvlakken zijn.

We gaan nu de magnetisatie na in de tweede veronderstelling, dat de assen der moleculen niet gelijkmatig over alle richtingen verdeeld zijn. We vinden dan weer voor de bijdrage tot de X -component der

magnetisatie, afkomstig van de moleculen, wier as ligt binnen den ruimtehoek $d\omega$

$$-\frac{NA^2 H(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)\alpha d\omega}{4\pi c^2 L},$$

maar nu is hierin N een functie van α , β , γ , terwijl L een constante is. Stellen we

$$\frac{1}{4\pi} \int N\alpha^2 d\omega = N_{11}, \quad \frac{1}{4\pi} \int N\beta^2 d\omega = N_{22}, \quad \frac{1}{4\pi} \int N\gamma^2 d\omega = N_{33},$$

$$\frac{1}{4\pi} \int N\alpha\beta d\omega = N_{12}, \quad \frac{1}{4\pi} \int N\alpha\gamma d\omega = N_{13}, \quad \frac{1}{4\pi} \int N\beta\gamma d\omega = N_{23},$$

dan is

$$M_x = -\frac{A^2}{c^2 L} (N_{11} H_x + N_{12} H_y + N_{13} H_z),$$

$$M_y = -\frac{A^2}{c^2 L} (N_{12} H_x + N_{22} H_y + N_{23} H_z),$$

$$M_z = -\frac{A^2}{c^2 L} (N_{13} H_x + N_{23} H_y + N_{33} H_z);$$

aan de symmetrische betrekkingen $\kappa_{hk} = \kappa_{kh}$ is dus weer voldaan.

§ 4. Ten einde er rekenschap van te geven, waarom in een diamagnetisch kristal de assen der moleculen niet gelijkmatig over alle richtingen verdeeld zouden zijn, kunnen we aannemen, dat op ieder molecuul elastische krachten werken uitgaande van het kristalnet, die een koppel tengevolge hebben, waarvan de grootte afhangt van de richting van de as van het molecuul (verg. § 9 van dit hoofdstuk). Het molecuul heeft dan een zekere potentieele energie W ten opzichte van de elastische krachten. We nemen de magnetische hoofdassen tot coördinaatassen aan en bepalen een molecuul door den hoek ϑ , dien zijn as maakt met de X-as en den hoek ϕ , dien het vlak door de X-as en de as van het molecuul maakt met het XY-vlak. Hebben we een diamagnetisch kristal, waarvan de susceptibiliteit in de richting van de X-as het grootst is en het kleinste in de richting van de Z-as, dan kunnen we de onderstelling maken, dat de potentieele energie W van een molecuul (ϑ , ϕ) gelijk is aan

$$a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi,$$

waarbij $a < b < c$. Gaan we nu te werk volgens de statistische methode, die bij de behandeling van de theorie der paramagnetische kristallen

nader besproken zal worden (§ 7 en § 8 van dit hoofdstuk), dan vinden we voor de gemiddelde waarde van $\cos^2 \vartheta$

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta e^{-\frac{1}{rT}(a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi)} \sin \vartheta d\phi d\vartheta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{1}{rT}(a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi)} \sin \vartheta d\phi d\vartheta}$$

Veronderstellen we verder, dat het kristal zeer weinig van een magnetisch isotrope stof afwijkt. Dan moeten we ons voorstellen, dat de elastische krachten weinig invloed op de orienteering van de assen der moleculen hebben. De verhouding van de potentieele energie der elastische krachten tot de kinetische energie is dan zeer klein en $\frac{b-a}{rT}$ en $\frac{c-a}{rT}$ zijn kleine grootheden. Verwaarloozen we hiervan tweede en hoogere machten, dan is

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT} \right),$$

en we vinden voor de susceptibiliteit

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{NA^2}{3c^2L} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT} \right), \\ \chi_2 &= -\frac{NA^2}{3c^2L} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{c+a-2b}{rT} \right), \\ \chi_3 &= -\frac{NA^2}{3c^2L} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{a+b-2c}{rT} \right). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

In het bovenstaande hebben we alleen in aanmerking genomen de potentieele energie van het molecuul ten opzichte van de elastische krachten van het kristalnet en verwaarloosd de potentieele energie, die het geïnduceerde momentje heeft ten opzichte van het magnetisch veld. We moeten dus nog nagaan, of de moleculen door het koppel, dat het uitwendig veld op de geïnduceerde stroom- uitoefent, min of meer met hun assen in een bepaalde richting zullen worden gebracht, want daarvan zal het afhangen, hoe groot ten slotte de som

$$\sum -\frac{HA^2}{c^2L} \cos^2 \vartheta$$

uitvalt. Dit geldt natuurlijk ook voor een niet-kristallijne diamagnetische stof. Daar het slechts om een schatting te doen is, zullen we de statistische theorie niet volledig opstellen, maar slechts opmerken,

dat de mate, waarin de orienteering der assen van de moleculen door het genoemde koppel gewijzigd wordt, volgens de statistische theorie bepaald wordt door de verhouding van

$$e^{-\frac{H^2 A^2}{2 c^2 L r T} \cos^2 \vartheta} \dots \dots \dots (45)$$

tot de eenheid. Immers het geïnduceerde moment van een molecuul is

$$-\frac{H A^2}{c^2 L} \cos \vartheta,$$

en het koppel in de richting van toenemende ϑ door het veld H er op uitgeoefend

$$\frac{H^2 A^2}{c^2 L} \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Dus bedraagt de potentieele energie van een molecuul tegenover het uitwendig veld

$$\frac{1}{2} \frac{H^2 A^2}{c^2 L} \cos^2 \vartheta.$$

Of er ondanks de warmtebeweging een noemenswaarde invloed van de nu besproken werking zal bestaan, hangt er dus van af, hoe groot tegenover de kinetische energie der warmtebeweging de verschillen in potentieele energie bij de verschillende richtingen tegenover het magneetveld zijn.

We zullen nu de orde van grootte van (45) berekenen voor een diamagnetische stof b.v. voor water. Daarvoor is de susceptibiliteit

$$\kappa \left(= -\frac{1}{3} \frac{N A^2}{c^2 L} \right) = -9,0 \cdot 10^{-6} \text{ en } N = 4 \cdot 10^{22}, \text{ dus}$$

$$\frac{1}{2} \frac{H^2 A^2}{c^2 L} \cos^2 \vartheta = -3,3 \cdot 10^{-28} H^2 \cos^2 \vartheta.$$

Verder is r , de gasconstante per molecuul, gelijk aan $1,2 \cdot 10^{-16}$ en $r T$ voor kamertemperatuur $3,5 \cdot 10^{-14}$. Dit geeft $-\frac{1}{2} \frac{H^2 A^2}{c^2 L r T} \cos^2 \vartheta < 10^{-14} H^2$.

Voor de bereikbare waarden van H verschilt dus de grootte (45) zoo weinig van de eenheid, dat dit geen noemenswaarden invloed op de verdeling van de assen der moleculen kan hebben.

§ 5. Nemen we aan, dat A en L onafhankelijk zijn van de temperatuur, dan doet zich bij diamagnetische stoffen het geval voor op p. 20 genoemd, dat κ onafhankelijk is van de temperatuur. Dit is in overeenstemming met de onderzoeken van CURIE, die uit zijn

waarnemingen besloot, dat bij diamagnetische lichamen χ onafhankelijk van de temperatuur is.

Bij de uitwerking van de theorie voor diamagnetische kristallen vonden we bij de beschouwing van § 4 waarden voor de susceptibiliteit (44) wel afhankelijk van de temperatuur; na hetgeen omtrent het kristal verondersteld werd, kunnen we aannemen, dat de termen $\frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT}$, enz. klein zijn ten opzichte van de eenheid. De afhankelijkheid van de temperatuur treedt dus slechts op in een term, die als correctieterm van de susceptibiliteit $-\frac{NA^2}{3c^2L}$ te beschouwen is. De temperatuurafhankelijkheid komt echter op den voorgrond bij de beschouwing van het koppel door het magnetisch veld op een gemagnetiseerd kristal uitgeoefend, want, zooals we gevonden hebben, zijn de componenten van het koppel evenredig aan de verschillen der susceptibiliteiten. Inderdaad heeft FARADAY ¹⁾ waargenomen, dat de kracht, waarmee kristallen, draaibaar opgehangen in een magneetveld, zich tusschen de magneetpolen instellen, afneemt bij stijging van de temperatuur.

We vermelden hierbij ook de waarnemingen van LUTTEROTH ²⁾, die de afhankelijkheid onderzocht van de magnetiseerbaarheid der kristallen in verschillende richtingen van de temperatuur. Zoowel bij de diamagnetische als bij de paramagnetische kristallen, die hij onderzocht, vindt hij, dat tusschen 0° en 50° C. het verschil der susceptibiliteiten volgens twee magnetische hoofdassen verandert met de temperatuur; uit zijn waarnemingen besluit hij, dat deze verandering lineair is met een negatieven temperatuurcoëfficiënt; alleen bij $NiSO_4$, $ZnSO_4$ en $CoSO_4$ vindt hij, dat het verschil tusschen de middelste en de kleinste susceptibiliteit een positieven temperatuurcoëfficiënt heeft.

§ 6. Voor paramagnetische lichamen heeft LANGEVIN ³⁾ een theorie opgesteld. Hij veronderstelt, dat ieder molecuul van een paramagnetische stof (hij beschouwt voornamelijk gassen en vloeistoffen) een magnetisch moment heeft van nul verschillend, dat de resultante is van de magnetische momenten teweeggebracht door de electronen, die in het molecuul met groote snelheid gesloten banen beschrijven,

1) FARADAY, Exp. Res., Ser. 22, 30.

2) Wied. Ann., 66 (1898), p. 1081.

3) Ann. de Chim. et de Phys., (8) 5 (1905), p. 70.

en hij gaat na, wat de magnetisatie zijn zal, die een paramagnetische stof aanneemt tengevolge van het draaien der moleculen onder den invloed van een magnetisch veld. Uit de geringe intensiteit van de magnetisatie, door een zwak veld teweeggebracht, blijkt, dat er oorzaken zijn, die er zich tegen verzetten, dat de moleculen zich zoo draaien, dat hun moment volkomen samenvalt met de richting van het magnetisch veld. Vroeger heeft men deze oorzaken gezocht in quasi-elastische koppels, die de moleculen in een evenwichtsstand houden, maar LANGEVIN veronderstelt, dat het alleen de rotatie der deeltjes tengevolge van de warmtebeweging is, die de volkomen magnetisatie verhindert. Hij berekent het verband tusschen de magnetisatie, de magnetische kracht en de temperatuur door na te gaan, wat de verdeeling der magnetische assen der moleculen moet zijn over de verschillende richtingen ten opzichte van de richting van het magnetisch veld.

Dit probleem vertoont groote analogie met dat van het evenwicht van een gaskolom onder den invloed van de zwaartekracht. Heeft men een gasmassa in een gesloten vat en onttrokken aan de werking der zwaartekracht, dan verdeelen de moleculen zich zoodanig over het vat, dat de dichtheid van het gas overal dezelfde is. Evenzoo hebben bij afwezigheid van een uitwendig veld de moleculen van een paramagnetisch gas zooals b.v. de zuurstof hun magnetische assen gelijkmatig over alle richtingen verdeeld, zoodat hun resulterend magnetisch moment gelijk aan nul is. Werkt echter de zwaartekracht op het gas, dan is de verhouding der dichtheden op twee plaatsen, waartusschen de potentieele energie van een molecuul tegenover de zwaartekracht met een bedrag W verschilt, gelijk aan $e^{\frac{W}{rT}}$; hierin is T de absolute temperatuur van het gas en r de gasconstante voor één molecuul. Evenzoo hebben de moleculen van een paramagnetisch gas onder den invloed van een uitwendig veld hun assen niet meer gelijkmatig over alle richtingen verdeeld. Is m het moment van één molecuul en α de hoek, dien zijn magnetische as maakt met het veld H , dan is de potentieele energie van het molecuul ten opzichte van het veld gelijk aan $-mH \cos \alpha$. De dichtheid van de magnetische assen der moleculen per eenheid van ruimtehoek verandert van de ééné tot de andere richting met een bedrag evenredig aan $e^{\frac{mH \cos \alpha}{rT}}$ (voor $m = 0$ of $H = 0$ zijn alle richtingen even waarschijnlijk). De afwijking, die er van een gelijkmatige verdeeling zal bestaan, hangt er dus van af, hoe groot tegenover de kinetische energie der warmtebeweging de

verschillen in potentieele energie bij de verschillende richtingen tegenover het magneetveld zijn. Voor het aantal moleculen, waarvan de magnetische assen met het uitwendig veld een hoek maken tusschen α en $\alpha + d\alpha$, geeft LANGEVIN dus

$$dn = K e^{\frac{mH \cos \alpha}{rT}} d\omega, \dots \dots \dots (46)$$

waarin $d\omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$. Hij stelt verder $\frac{mH}{rT} = a$ en het aantal moleculen per volume-eenheid gelijk aan N . Dan wordt K bepaald door

$$N = 2\pi K \int_0^\pi e^{a \cos \alpha} \sin \alpha d\alpha,$$

of

$$K = \frac{Na}{4\pi \sinh a}. \dots \dots \dots (46')$$

Het resulterend magnetisch moment van de N moleculen zal klaarblijkelijk gericht zijn evenwijdig aan het veld en gelijk aan de som der projecties van de momenten der moleculen op de richting van het veld. Dus

$$M = \int_0^\pi m \cos \alpha dn = Nm \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) = M_0 \left(\coth a - \frac{1}{a} \right), \dots (47)$$

als we Nm vervangen door M_0 .

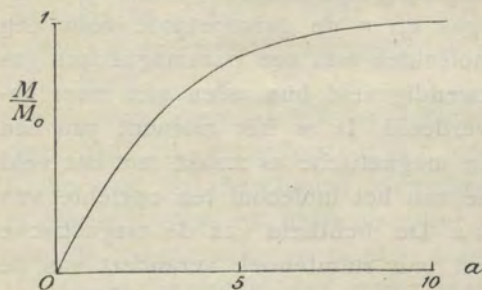
M is dus een functie van a , d. w. z. van $\frac{H}{T}$. De uitdrukking $\coth a - \frac{1}{a}$ is nul voor $a = 0$ en nadert tot één, wanneer a onbepaald toeneemt.

Dan bereikt de magnetisatie de verzadigingswaarde M_0 , waarbij de magnetische assen van alle moleculen evenwijdig zijn aan het uitwendig veld.

Figuur I stelt de magnetisatiekromme voor van een paramagnetisch gas bij constante temperatuur T volgens de formule

$$\frac{M}{M_0} = \coth a - \frac{1}{a}.$$

Alle stoffen, die een dergelijke magnetisatiekromme hebben, moeten voldoen aan de gestelde voorwaarden. Haar moleculen moeten bij de



Figuur I.

warmtebeweging vrij kunnen roteeren en de onderlinge werking tus-
schen de magnetische moleculen moet verwaarloosd kunnen worden.

Ontwikkelt men $\coth a$ in een reeks en behoudt men alleen de
eerste macht van a , dan vindt men

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{3} a,$$

of

$$M = \frac{m N a}{3} = \frac{m^2 N}{3 r T} H,$$

dus

$$\kappa = \frac{m^2 N}{3 r T} \dots \dots \dots (48)$$

Voor kleine waarden van a blijkt de susceptibiliteit omgekeerd
evenredig te zijn met de absolute temperatuur, in overeenstemming
met de wet van CURIE. De grootheid

$$C = \kappa T = \frac{m^2 N}{3 r} = \frac{M_0 m}{3 r} \dots \dots \dots (48')$$

is de constante van CURIE per volume-eenheid. Beschouwen we het
grammolecuul als eenheid, dan moeten we de specifieke susceptibiliteit
 κ_m invoeren, nl. de verhouding der magnetisatie per grammolecuul
tot de magnetische kracht. Men heeft

$$\kappa_m = \frac{M_{m_0}^2}{3 R T},$$

waarin M_{m_0} de verzadigingsmagnetisatie en R de gasconstante per
grammolecuul zijn. Dit geeft voor de constante van CURIE per gram-
molecuul

$$C_m = \kappa_m T = \frac{M_{m_0}^2}{3 R} \dots \dots \dots (49)$$

Uit de gegevens van PICCARD volgt voor de susceptibiliteit κ van
zuurstof bij een druk van 76 cM. kwik en een temperatuur van 0° C.
 $\kappa = 1,51 \cdot 10^{-7}$. $4 \pi = 1,90 \cdot 10^{-6}$. Hiermee is M_0 te vinden, want
voor κ mag men schrijven

$$\kappa = \frac{m^2 N^2}{3 N r T} = \frac{M_0^2}{3 p},$$

als p de druk is, waaronder de zuurstof zich bij de meting van κ
bevond. We vinden dan

$$M_0^2 = 3 \cdot 1,01 \cdot 10^6 \cdot 1,90 \cdot 10^{-6} = 5,78 \text{ en } M_0 = 2,40.$$

Met behulp van de waarde van M_0 kan men de orde van grootte van a nagaan, immers

$$a = \frac{m H}{r T} = \frac{M_0 H}{N r T}.$$

Substitutie van $N r T = p = 1,01 \cdot 10^6$ en $M_0 = 2,40$ geeft voor a $2,37 \cdot 10^{-6} H$; voor een veld van 10000 eenheden is a dus nog beneden 0,03 en is men nog zeer dicht bij den oorsprong van de magnetisatiekromme en in het gebied, waar de kromme samenvalt met een rechte lijn. Om $a = 1$ te maken, voor welke waarde de kromme merkbaar begint af te wijken van een rechte lijn, is een veld noodig grooter dan $4 \cdot 10^5$ eenheden, wat met een electromagneet niet te bereiken is.

§ 7. De formule van LANGEVIN kan, zooals reeds meer is aange-toond, uit beschouwingen der statistische mechanica worden afgeleid. Wij zullen ons nu met die afleiding in zoo eenvoudig mogelijken vorm bezighouden, ten einde dan dezelfde methode op enkele andere vraagstukken toe te passen. We merken vooreerst op, dat de statistische beschouwingen hier mogen worden toegepast, omdat we aannemen, dat de magnetische moleculen bij hun warmtebeweging vrij kunnen roteeren en dat de gemiddelde kinetische energie van een molecuul per vrijheidsgraad gelijk is aan die van een gas- of vloeistofmolecuul. We beschouwen nu een canonisch ensemble, dat bestaat uit het magnetiseerbare lichaam een groot aantal malen herhaald, en gaan den stationairen toestand na, die er bij aanwezigheid van het magnetisch veld zijn zal. We veronderstellen, dat het magnetiseerbare lichaam bestaat uit n moleculen en denken ons deze als omwentelingslichamen en wel als dunne staafjes, waarvan het zwaartepunt vast is in de ruimte. We letten alleen op de as van de moleculaire magneetjes; dan is de stand van ieder molecuul bepaald door de twee hoeken ϑ en φ (verg. p. 51). Van de wenteling van het moleculair magneetje om zijn as zien we af; de bewegingstoestand van een molecuul wordt dan bepaald door de momenten ϑ en φ . Het aantal parameters van een systeem van het ensemble bedraagt dus $4n$, nl. de coördinaten $\vartheta_1, \varphi_1, \dots, \vartheta_n, \varphi_n$ en de momenten $\vartheta_1, \varphi_1, \dots, \vartheta_n, \varphi_n$. Veronderstellen we, dat het molecuul een moment m heeft in de richting van zijn as en dat het magnetisch veld H werkt volgens de X-as, dan is de potentieele energie van het eerste molecuul ten opzichte van het uitwendig veld $-Hm \cos \vartheta_1$. Is Q het traagheidsmoment van een molecuul om een as loodrecht op zijn magnetische

as, dan kunnen we voor de totale energie van het eerste molecuul schrijven

$$\varepsilon_1 = \frac{I}{2Q} (\mathcal{S}_1^2 + \frac{I}{\sin^2 \mathcal{S}} \Phi_1^2) - H m \cos \mathcal{S}_1.$$

Er zal nu een stationaire toestand bestaan, wanneer het aantal systemen in het ensemble, waarbij het eerste molecuul ligt in het element $d\omega_1 = d\mathcal{S}_1 d\Phi_1 d\mathcal{S}_1 d\Phi_1$ zijner phase-ruimte, het tweede in het element $d\omega_2$ van zijn phase-ruimte, enz. gelijk is aan

$$C e^{-\frac{[\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n]}{rT}} d\omega_1 \dots d\omega_n = C e^{-\frac{[\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n]}{rT}} d\lambda \dots \quad (50)$$

(C is een constante, $d\lambda$ een element der phase-uitgebreidheid van het ensemble, waarvan de grootte bepaald wordt door het product $d\omega_1 \dots d\omega_n$). Immers, omdat we als parameters van de phase-ruimte de coördinaten en de hoeveelheden van beweging gekozen hebben, geldt het theorema van LIOUVILLE, ook bij botsingen, die dus nu niet geheel buiten beschouwing blijven. Het element $d\lambda'$, waarin de systemen (50) zich bevinden na den tijd dt is dus gelijk aan $d\lambda$; verder is de energie $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ constant, (50) is dus onafhankelijk van den tijd.

Ten einde uit de beschouwing van het canonisch ensemble de eigenschappen af te leiden, die men werkelijk bij het lichaam kan waarnemen, kan men twee wegen inslaan. De eerste bestaat hierin, dat men aan een grootheid, die den toestand van het werkelijke lichaam karakteriseert, een waarde toekent, die het gemiddelde is van de waarden, die de overeenkomstige grootheid in al de stelsels van het ensemble heeft. De tweede weg is, dat men voor de grootheid de waarde neemt, die zij in het stelsel heeft, dat in het ensemble het meest voorkomt. Elke gemiddelde grootheid in het ensemble stemt nl. volkomen overeen met de overeenkomstige grootheid in het meest voorkomende systeem ¹⁾.

Het magnetisch moment van het beschouwde lichaam is

$$m (\cos \mathcal{S}_1 + \dots + \cos \mathcal{S}_n).$$

Om dit volgens de eerste methode te berekenen moeten we de gemiddelden $\overline{\cos \mathcal{S}_1}, \dots, \overline{\cos \mathcal{S}_n}$ zoeken van de waarden, die $\cos \mathcal{S}_1, \dots, \cos \mathcal{S}_n$ in alle stelsels van het ensemble hebben. Nu is

1) Verg. ORNSTEIN, Toepassing der statistische mechanica van GIBBS op molekulair-theoretische vraagstukken, p. 13.

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{C \int \cos \vartheta_1 e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1 \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n}{C \int e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1 \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n},$$

waarbij over alle parameters van de phase-uitgebreidheid moet worden geïntegreerd. Als we de gelijke factoren in teller en noemer weg laten vallen en $\frac{\phi_1}{\sin \vartheta_1} = \psi_1$ stellen, vinden we

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{\int \cos \vartheta_1 e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2} \varrho (\vartheta_1^2 + \psi_1^2)]} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\phi_1 d\underline{\vartheta}_1 d\psi_1}{\int e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2} \varrho (\vartheta_1^2 + \psi_1^2)]} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\phi_1 d\underline{\vartheta}_1 d\psi_1}, \quad (51)$$

waarbij de integratie naar ϑ_1 van 0 tot π moet worden uitgestrekt, naar ϕ_1 van 0 tot 2π en naar $\underline{\vartheta}_1$ en ψ_1 van $-\infty$ tot $+\infty$. De integraties naar ϕ_1 , $\underline{\vartheta}_1$ en ψ_1 geven in teller en noemer eenzelfde factor. Na vereenvoudiging vinden we

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{\int_0^\pi \cos \vartheta_1 e^{\frac{Hm \cos \vartheta_1}{rT}} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{\int_0^\pi e^{\frac{Hm \cos \vartheta_1}{rT}} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}.$$

Stellen we nu $\frac{Hm}{rT} = a$ en voeren we $x_1 = \cos \vartheta_1$ als nieuwe veranderlijke in. Dan is

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{\int_{-1}^{+1} x_1 e^{ax_1} dx_1}{\int_{-1}^{+1} e^{ax_1} dx_1} = \coth a - \frac{1}{a}.$$

Evenzoo is $\overline{\cos \vartheta_2} = \dots = \overline{\cos \vartheta_n} = \coth a - \frac{1}{a}$.

Voor de magnetisatie van het lichaam vinden we dus

$$nm \overline{\cos \vartheta_1} = nm \left(\coth a - \frac{1}{a} \right)$$

en per volume-eenheid

$$M = Nm \left(\coth a - \frac{1}{a} \right),$$

of, als we Nm door M_0 vervangen,

$$M = M_0 \left(\coth a - \frac{1}{a} \right),$$

in overeenstemming met de uitkomst van LANGEVIN.

Om de tweede methode te volgen moeten we het stelsel hebben, dat in het ensemble het meest voorkomt. Zooals in § 8 nader zal worden uitgewerkt, is in dat stelsel het aantal moleculen, waarvoor ϑ ligt tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, ϕ tusschen ϕ en $\phi + d\phi$, ϑ tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, ψ tusschen ψ en $\psi + d\psi$

$$dn = K e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi,$$

waarbij de constante K bepaald wordt door

$$n = K \int e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi.$$

De magnetisatie van het lichaam verkrijgen we nu door de som te nemen van de magnetische momenten van alle moleculen in dit stelsel, dus

$$\begin{aligned} & K \int m \cos \vartheta e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi = \\ & \frac{n m \int \cos \vartheta e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi}{\int e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi}; \dots (52) \end{aligned}$$

bij de integratie zijn de grenzen van ϑ , ϕ , ϑ en ψ dezelfde als van ϑ_1 , ϕ_1 , ϑ_1 en ψ_1 in (51). Werken we (52) uit en stellen we weer $\frac{Hm}{rT} = a$, dan vinden we voor de magnetisatie van het lichaam evenals hierboven $nm \left(\coth a - \frac{1}{a} \right)$.

§ 8. Om met behulp van een canonisch ensemble de configuratie-verdeeling van de moleculen van een paramagnetische stof onder den invloed van een magnetisch veld te bepalen kan men de twee in § 7 onderscheiden wegen inslaan.

Bij de eerste methode vatten we een bepaald element $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\vartheta d\psi$ der phase-uitbreidheid van één molecuul in het oog en onderzoeken, hoeveel deeltjes in de N stelsels van het ensemble gemiddeld daarin liggen. Daartoe tellen we bij al de N stelsels de in $d\omega$ liggende moleculen en deelen het zoo verkregen aantal Q door N . N wordt bepaald door

$$N = C \int e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1 \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n,$$

waarbij naar alle parameters van de phase-uitgebreidheid moet worden geïntegreerd. Bij

$$C e^{-\frac{\epsilon}{rT}} d\omega \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \int e^{-\frac{\epsilon_3}{rT}} d\omega_3 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n \dots (53)$$

stelsels ligt het eerste molecuul in $d\omega$. Dit is een bijdrage tot het getal Q . Nemen we in aanmerking, dat $\int e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1 = \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2$, dan vinden we voor het aantal stelsels, waarbij het tweede molecuul in $d\omega$ ligt, weer de uitdrukking (53). Dus is

$$Q = n C e^{-\frac{\epsilon}{rT}} d\omega \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n,$$

en het aantal deeltjes dn in de N stelsels, dat gemiddeld ligt in $d\omega$, bedraagt

$$dn = \frac{n C e^{-\frac{\epsilon}{rT}} d\omega \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n}{C \int e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1 \int e^{-\frac{\epsilon_2}{rT}} d\omega_2 \dots \int e^{-\frac{\epsilon_n}{rT}} d\omega_n}.$$

Laten we de gemeenschappelijke factoren in teller en noemer weg en stellen we

$$\frac{n}{\int e^{-\frac{\epsilon_1}{rT}} d\omega_1} = C', \dots \dots \dots (54)$$

dan is

$$dn = C' e^{\frac{1}{rT} [H_m \cos \vartheta - \frac{1}{2} Q (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\psi.$$

Voor de verdeeling der moleculen over de phase-uitgebreidheid vinden we dus een wet, die overeenkomt met die van MAXWELL. Integreeren we naar de hoeveelheden van beweging en stellen we

$$C' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{Q}{rT} (\vartheta^2 + \psi^2)} d\vartheta d\psi = K, \dots \dots \dots (55)$$

dan is

$$dn = K e^{\frac{H_m \cos \vartheta}{rT}} \sin \vartheta d\vartheta d\phi \dots \dots \dots (56)$$

het aantal moleculen in het element $\sin \vartheta d\vartheta d\phi$ der configuratie-

uitgebreidheid. K wordt, zooals ook uit (54) en (55) volgt, bepaald door

$$K \int e^{\frac{H_m \cos \vartheta}{rT}} \sin \vartheta d\vartheta d\phi = n.$$

(56) stemt volkomen overeen met de door LANGEVIN gebezigde uitdrukking (46). We merken op, dat LANGEVIN alleen rekening houdt met de potentieele energie der moleculen ten opzichte van het uitwendig veld, terwijl bij de berekening volgens de statistische methode zoowel de potentieele als de kinetische energie der moleculen in aanmerking genomen werd. Daar het bij de bepaling der magnetisatie alleen op de configuratieverdeling der moleculen aankomt, behoeft blijkens (56) alleen de potentieele energie in aanmerking genomen te worden.

Bij de tweede methode moeten we het stelsel zoeken, dat in het ensemble het meest voorkomt. We gaan uit van de uitdrukking

$$C e^{-\frac{1}{rT}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n,$$

nl. het aantal stelsels in het ensemble, waarbij het eerste molecuul ligt in het element $d\omega_1 = \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\phi_1 d\vartheta_2 d\psi_1$ zijner phase-ruimte, het tweede in het element $d\omega_2$ van zijn phase-ruimte, enz. Verdeelen wij nu de phase-ruimte van een molecuul in k even groote elementen $d\omega_1, d\omega_2, \dots, d\omega_k$, dan kunnen wij voor het aantal stelsels, waarbij n_1 bepaalde moleculen liggen in $d\omega_1$, n_2 bepaalde moleculen in $d\omega_2, \dots, n_k$ bepaalde moleculen in $d\omega_k$, schrijven

$$C' e^{-\frac{1}{rT}(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k)} (d\omega_1)^{n_1} (d\omega_2)^{n_2} \dots (d\omega_k)^{n_k},$$

of

$$C' e^{-\frac{\epsilon}{rT}},$$

als $C' (d\omega_1)^{n_1} (d\omega_2)^{n_2} \dots (d\omega_k)^{n_k} = C'$ en $n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k = \epsilon$, terwijl $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Het aantal stelsels, waarbij n_1, n_2, \dots, n_k moleculen, welke dan ook, liggen in $d\omega_1, d\omega_2 \dots d\omega_k$, is evenredig met

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} e^{-\frac{1}{rT}(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k)} \dots \dots \dots (57)$$

We zullen nagaan voor welke waarden van n_1, \dots, n_k dit een maximum is. Daartoe beschouwen we den logarithmus van bovenstaande uitdrukking, dien we $-H$ noemen. De faculteiten der n 's benaderen we met de formule van STIRLING. Dit geeft

$$H = -n \log n + \sum_i n_i \log n_i + \frac{1}{rT} \sum_i n_i \varepsilon_i \quad (i = 1, 2 \dots k).$$

H moet een minimum zijn. We varieeren de n 's om na te gaan voor welke waarden der n 's dit het geval zal zijn; n_1, n_2, \dots, n_k zijn geheele getallen, en dus moeten ook $\delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_k$ geheele getallen zijn, maar daar n_1, n_2, \dots, n_k heel groot zijn, kunnen we toch de differentiaalrekening toepassen. We vinden dan

$$\delta H = \sum_i (1 + \log n_i) \delta n_i + \frac{1}{rT} \sum_i \varepsilon_i \delta n_i. \dots \dots \dots (58)$$

Dus moet (58) verdwijnen voor alle waarden van δn_i , die voldoen aan

$$\sum_i \delta n_i = 0. \dots \dots \dots (59)$$

Om de voorwaarde hiervoor te vinden, vermenigvuldigen we (59) met $-C$, tellen er (58) bij op en stellen de coëfficiënten van $\delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_k$ gelijk nul. Dit geeft k betrekkingen van den vorm

$$\log n_i + \frac{\varepsilon_i}{rT} = C - 1 = \log p$$

en

$$n_i = p e^{-\frac{\varepsilon_i}{rT}}$$

voor het aantal moleculen gelegen in het element $d\omega_i = \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i d\psi_i$.

Stellen we $p = q \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i d\psi_i$ en vervangen we ε_i door $\frac{1}{2Q} (\vartheta_i^2 + \psi_i^2) - Hm \cos \vartheta_i$; dan is

$$n_i = q e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta_i - \frac{1}{2Q} (\vartheta_i^2 + \psi_i^2)]} \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i d\psi_i.$$

Voor alle elementen is q hetzelfde, omdat p en $d\omega$ voor alle elementen even groot zijn, dus in het algemeen is

$$q e^{\frac{1}{rT} [Hm \cos \vartheta - \frac{1}{2Q} (\vartheta^2 + \psi^2)]} \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\psi$$

het aantal moleculen in een element der phase-uitgebreidheid. Na integratie naar de hoeveelheden van beweging is in overeenstemming met (56)

$$dn = K e^{\frac{Hm \cos \vartheta}{rT}} \sin \vartheta d\vartheta d\phi, \dots \dots \dots (60)$$

als $K = q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2QrT} (\vartheta^2 + \psi^2)} d\vartheta d\psi.$

Het is van belang op te merken, dat men het vraagstuk ook op een derde wijze kan behandelen, nl. door de bekende loterij, waarvan BOLTZMANN het eerste voorbeeld heeft gegeven. Merkwaardig is het, dat deze weg tot hetzelfde leidt als die, welke hierboven gevolgd werd, ofschoon er dit verschil tusschen bestaat: in het bovenstaande komt in de uitdrukking voor de waarschijnlijkheid, dat een molecuul binnen $d\omega$ ligt, reeds de energie te pas, daar die waarschijnlijkheid evenredig aan $e^{-\frac{\epsilon}{rT}} d\omega$ gesteld wordt. Bij de manier van BOLTZMANN wordt a priori de waarschijnlijkheid voor alle gelijke elementen even groot gesteld, maar wordt bij het zoeken van het maximum rekening gehouden met de bijkomstige voorwaarde, dat de totale energie een voorgeschreven waarde heeft.

§ 9. De theorie van LANGEVIN voor paramagnetische stoffen werd door WEISS ¹⁾ uitgebreid tot paramagnetische kristallen. Om de magnetische anisotropie der kristallen te verklaren neemt WEISS elastische krachten aan, die uitgaan van het kristalnet en het molecuul naar een evenwichtsstand trachten terug te drijven. Zulke elastische krachten werden ook aangenomen door MAXWELL ²⁾ om het verband tusschen de magnetische kracht en de magnetisatie bij ijzer te verklaren, waarbij hij de warmtebeweging geheel buiten beschouwing laat; hij veronderstelt per volume-eenheid N magnetische moleculen, ieder met een moment m . Indien het molecuul geheel vrij was om te draaien, zou de geringste magnetische kracht tengevolge hebben, dat alle moleculen hun magnetische assen evenwijdig aan de magnetische kracht plaatsten en dat de verzadigingsmagnetisatie $M_0 = Nm$ bereikt werd. Om te verklaren, dat dit niet het geval is, neemt MAXWELL elastische krachten aan, die het molecuul in zijn oorspronkelijken stand trachten te houden, zoodat de stand, dien het molecuul werkelijk aanneemt, bepaald wordt door de resultante van de magnetische en de elastische kracht. WEISS veronderstelt de moleculen geplaatst in de knooppunten van een net en onderhevig aan de warmtebeweging. In iederen stand heeft een molecuul bovendien een bepaalde potentieele energie W ten opzichte van de elastische krachten. De verdeling van de moleculaire magneetjes, wat hun richting betreft, stelt hij voor door de punten op een bol ingenomen door de noordpolen, als de zuidpolen zich in het middelpunt van den bol bevinden. Bij afwezigheid van het mag-

1) Comptes rendus, 156 (1913), p. 1674.

2) MAXWELL, Treatise on electricity and magnetism, II, p. 81.

netisch veld heeft de stof geen magnetisatie, het zwaartepunt der noordpolen valt dan samen met het middelpunt van den bol.

Op dit kristalschema past WEISS een beschouwing toe, analoog aan die van LANGEVIN over het paramagnetisme van gassen.

Is n het aantal moleculen per grammolecuul, r de gasconstante voor één molecuul, c een constante, dan geeft WEISS voor het aantal moleculen binnen den ruimtehoek $d\omega$ bij afwezigheid van een magnetisch veld

$$dn = c e^{-\frac{W}{rT}} d\omega.$$

Een magnetisch veld, dat een hoek α maakt met het moleculair moment m vermeerderd de potentieele energie met $-Hm \cos \alpha$; het aantal magneetjes binnen den ruimtehoek $d\omega$ wordt dan

$$dn = c e^{-\frac{W - Hm \cos \alpha}{rT}} d\omega,$$

en hun magnetisch moment is

$$dM_m = c m e^{-\frac{W - Hm \cos \alpha}{rT}} \cos \alpha d\omega.$$

Dus is de magnetisatie per grammolecuul

$$M_m = c m \int e^{-\frac{W - Hm \cos \alpha}{rT}} \cos \alpha d\omega.$$

Aangezien de magnetisatie evenredig is aan het veld, kan men voor de bepaling van de susceptibiliteit H zoo klein nemen als men wil. Dus mag men schrijven

$$M_m = c m \int e^{-\frac{W}{rT}} \left(1 + \frac{Hm \cos \alpha}{rT} \right) \cos \alpha d\omega,$$

en, omdat M_m nul is voor $H=0$, heeft men

$$M_m = \frac{c m^2 H}{r T} \int e^{-\frac{W}{rT}} \cos^2 \alpha d\omega.$$

Eliminatie van c uit deze vergelijking en $n = c \int e^{-\frac{W}{rT}} d\omega$ geeft

$$M_m = \frac{n m^2 H}{r T} \frac{\int e^{-\frac{W}{rT}} \cos^2 \alpha d\omega}{\int e^{-\frac{W}{rT}} d\omega}.$$

Stelt men $nm = M_{m0}$, de magnetische verzadiging, en $nr = R$, de gasconstante per grammolecuul, dan is

$$M_m = \frac{M_{m_0}^2 H}{R T} \frac{\int e^{-\frac{W}{r T} \cos^2 \alpha} d\omega}{\int e^{-\frac{W}{r T}} d\omega},$$

welke uitdrukking aantoont, dat in het algemeen de susceptibiliteit niet omgekeerd evenredig is met de absolute temperatuur, maar een meer ingewikkelde functie ervan.

Is W constant, dan krijgen we weer (verg. p. 57)

$$M_m = \frac{M_{m_0}^2}{3 R T} H, \quad \chi_m = \frac{M_{m_0}^2}{3 R T}, \quad C_m = \frac{M_{m_0}^2}{3 R}.$$

Een paramagnetisch kristal zal wel of niet aan de wet van CURIE gehoorzamen, naarmate

$$\frac{\int e^{-\frac{W}{r T} \cos^2 \alpha} d\omega}{\int e^{-\frac{W}{r T}} d\omega}$$

een constante is of niet. Als voorbeeld van het eerste noemt WEISS het geval, dat de elementaire magneetjes liggen in een nauwen bundel, die een richting heeft onafhankelijk van de temperatuur. Dit zal zich voordoen, wanneer W een zeer geaccentueerd minimum heeft; de stof zal dan de wet van CURIE volgen en een constante van CURIE hebben in het algemeen afhankelijk van de richting.

§ 10. In het volgende zullen we het door WEISS aangegeven geval nader beschouwen. We bepalen een molecuul door de richtingsconstanten α, β, γ van zijn magnetische as ten opzichte van een vast coördinatenstelsel. Daar de elastische krachten niet van magnetischen aard zijn, is het koppel, dat zij tengevolge hebben, even groot voor een molecuul, waarvan de richtingsconstanten α, β, γ zijn als voor een molecuul met de richtingsconstanten $-\alpha, -\beta, -\gamma$. Drijven dus de elastische krachten de assen der moleculen naar een richting α, β, γ , dan zullen zij dit in even sterke mate doen naar de richting $-\alpha, -\beta, -\gamma$. Opdat nu de assen der moleculen zullen liggen in een nauwen bundel met de richtingsconstanten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ en $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$ moet W een zoodanigen vorm hebben, dat W zeer klein is als α, β, γ de waarden hebben van den bundel, maar zeer groot voor waarden van α, β, γ , die van die van den bundel ook maar heel weinig afwijken.

We kunnen dan veronderstellen

$$W = F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2),$$

waarbij ε_1 de hoek is, dien de as van het molecuul maakt met die as van den bundel, waarbij de richtingsconstanten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ behooren en ε_2 de hoek, dien zij maakt met de as $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$, terwijl de functie $F(\varepsilon)$ zeer groot is ($=A$), zoodra het argument boven een zekere zeer kleine waarde ligt, maar een veel kleinere waarde heeft voor $\varepsilon = 0$ en de allernaaste omgeving. Zetten we van uit een punt O naar alle richtingen voerstralen uit met een lengte evenredig aan de potentieele energie van een molecuul, dat zijn as in die richting heeft, dan liggen de eindpunten van die voerstralen op een oppervlak, dat den vorm heeft van een bol met een straal $2A$ en waarin zich twee zeer smalle kegelvormige kraters in de richting van de as van den bundel bevinden.

Stel, dat er een veld H werkt met de richtingsconstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; we moeten nu ook met de potentieele energie $F(\varepsilon_1)$ en $F(\varepsilon_2)$ rekening houden.

Beperken we ons aanstonds tot de verdeling over de configuratie-uitgebreidheid, dan is blijkens (56) het aantal moleculen, wier assen liggen binnen den ruimtehoek $d\omega$

$$dn = K e^{-\frac{1}{rT}[F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega \dots \dots (61)$$

De componenten van de magnetisatie zijn

$$M_x = Nm\bar{\alpha}, \quad M_y = Nm\bar{\beta}, \quad M_z = Nm\bar{\gamma}.$$

Uit (61) volgt

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \alpha e^{-\frac{1}{rT}[F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}{\int e^{-\frac{1}{rT}[F(\varepsilon_1) + F(\varepsilon_2) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}.$$

In den exponent komen twee termen voor, $\frac{F(\varepsilon_1)}{rT}$ en $\frac{F(\varepsilon_2)}{rT}$, die zeer groot zijn ($=\frac{A}{rT}$) buiten de kleine gebieden om $\varepsilon_1 = 0$ en $\varepsilon_2 = 0$, maar voor $\varepsilon_1 = 0$ of $\varepsilon_2 = 0$ is één van beide termen klein. Voor de waarde van $\bar{\alpha}$ komt dus slechts de integratie over de kleine gebieden om $\varepsilon_1 = 0$ en $\varepsilon_2 = 0$ in aanmerking; in het eerste gebied is $F(\varepsilon_2) = A$, in het tweede gebied is $F(\varepsilon_1) = A$.

Deelen we teller en noemer door $e^{-\frac{A}{rT}}$, dan krijgen we

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_1 \alpha e^{-\frac{1}{rT}[F(\epsilon_1) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega + \int_2 \alpha e^{-\frac{1}{rT}[F(\epsilon_2) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}{\int_1 e^{-\frac{1}{rT}[F(\epsilon_1) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega + \int_2 e^{-\frac{1}{rT}[F(\epsilon_2) - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}$$

In de eerste integraal van teller en noemer kunnen we nu α , β , γ door α_1 , β_1 , γ_1 vervangen en in de tweede integraal door $-\alpha_1$, $-\beta_1$, $-\gamma_1$. Verder stellen we

$$\int_1 e^{-\frac{F(\epsilon_1)}{rT}} d\omega = \int_2 e^{-\frac{F(\epsilon_2)}{rT}} d\omega = B;$$

dan is na deeling door B

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 e^{\frac{Hm(\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0)}{rT}} - \alpha_1 e^{-\frac{Hm(\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0)}{rT}}}{e^{\frac{Hm(\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0)}{rT}} + e^{-\frac{Hm(\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0)}{rT}}}$$

Nemen we nu in aanmerking, dat $\frac{Hm}{rT}$ een kleine grootheid is, waarvan we tweede en hoogere machten mogen verwaarlozen; dan is na reeksontwikkeling der exponentieele functiën

$$\bar{\alpha} = \frac{Hm}{rT} \alpha_1 (\alpha_1 \alpha_0 + \beta_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0).$$

Dus vinden we voor de componenten der magnetisatie teweeggebracht door een veld H

$$M_x = \frac{Nm^2}{rT} (\alpha_1^2 H_x + \alpha_1 \beta_1 H_y + \alpha_1 \gamma_1 H_z),$$

$$M_y = \frac{Nm^2}{rT} (\alpha_1 \beta_1 H_x + \beta_1^2 H_y + \beta_1 \gamma_1 H_z),$$

$$M_z = \frac{Nm^2}{rT} (\alpha_1 \gamma_1 H_x + \beta_1 \gamma_1 H_y + \gamma_1^2 H_z).$$

Aan de symmetriebetrekkingen $\kappa_{hk} = \kappa_{kh}$ is dus weer voldaan.

Het spreekt van zelf, dat bij de nu gemaakte onderstelling het lichaam symmetrie vertoont rondom de lijn, die de richting aanwijst van den smallen bundel, waarin de assen der moleculen liggen.

In verband met het bovenstaande kunnen we het volgende opmerken. Ook bij afwezigheid van het veld liggen de assen van de magnetische moleculen in een nauwen bundel, omdat de potentieele oriënteringsenergie W niet van magnetischen aard is. Stel, dat er

per grammolecuul n magnetische moleculen zijn, dan zal zonder uitwendig veld de magnetisatie gelijk aan nul zijn, indien $\frac{1}{2}n$ magneetjes hun noordpolen in de ééne richting van den bundel en de overige $\frac{1}{2}n$ hun noordpolen in de andere richting hebben. Dit is de meest waarschijnlijke toestand, maar er zullen kleine afwijkingen zijn, waarvan de gemiddelde waarde $\sqrt{\frac{n}{2}}$ bedraagt, dus in één richting be-

vinden zich gemiddeld $\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n}{2}}$ noordpolen en $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n}{2}}$ zuid-

polen. Er blijft dus per grammolecuul een magnetisatie $p\sqrt{2n} \cdot m$, als p een constante is, een weinig kleiner dan de eenheid, om er rekening mee te houden, dat de ruimtehoek van den bundel een zekere, zij het dan ook zeer kleine, waarde heeft. Stelt men $nm = M_{m_0}$, dan is er dus zonder veld per grammolecuul een gemiddelde magnetisatie

$p M_{m_0} \sqrt{\frac{2}{n}}$. We zullen hiervan de orde van grootte nagaan voor

dolomiet, voor welke stof uit de gegevens van VOIGT en KINOSHITA volgt

$$\kappa_1 = 22,85 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi = 28,71 \cdot 10^{-6}, \quad \kappa_3 = 34,97 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi = 43,95 \cdot 10^{-6}.$$

κ_1 is de susceptibiliteit in een richting loodrecht op de kristallografische hoofdas, κ_3 in de richting van die hoofdas.

We zullen een grammolecuul beschouwen. De susceptibiliteit daarvan is

$$\frac{M_{m_0}^2}{3RT}$$

Leiden we dit af uit het gemiddelde van de susceptibiliteiten in de drie hoofdrichtingen, met inachtneming van het moleculair gewicht van dolomiet ($CaMgC_2O_6 = 184$) en de dichtheid (2,9), dan vinden we

$$\frac{M_{m_0}^2}{3RT} = 184 \cdot 11,65 \cdot 10^{-6}.$$

Stellen we $T = 290^\circ$; dit geeft $M_{m_0} = 12,4 \cdot 10^3$. Substitueeren we voor n $70 \cdot 10^{22}$, dan is

$$p M_{m_0} \sqrt{\frac{2}{n}} < 2,1 \cdot 10^{-8}.$$

Dit is per volume-eenheid kleiner dan $2,1 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{2,9}{184}}$ of $2,6 \cdot 10^{-9}$ en dus te verwaarloozen.

§ 11. We zullen nu een meer algemeen geval beschouwen, waarbij de moleculen niet in een smallen bundel liggen. Omdat de krachten, die het kristalnet op een molecuul uitoefent, niet van magnetischen aard zijn, hangt haar grootte slechts af van den stand van het molecuul, onverschillig of zijn noordpool naar de eene of naar de andere zijde gericht is.

W is een functie van de richtingsconstanten α , β , γ en blijft hetzelfde, als men α , β , γ door $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ vervangt. Is het uitwendig veld weer bepaald door $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, dan is nu

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \alpha e^{-\frac{1}{rT}[W - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}{\int e^{-\frac{1}{rT}[W - Hm(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)]} d\omega}.$$

Nemen we in aanmerking, dat $\frac{Hm}{rT}$ klein is en ontwikkelen we $e^{\frac{Hm}{rT}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)}$ in een reeks, waarbij we tweede en hoogere machten van $\frac{Hm}{rT}$ verwaarloozen, dan is

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{\int \alpha e^{-\frac{W}{rT}} [1 + \frac{Hm}{rT}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)] d\omega}{\int e^{-\frac{W}{rT}} [1 + \frac{Hm}{rT}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)] d\omega} = \\ &= \frac{\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha d\omega + \frac{H_x m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha^2 d\omega + \frac{H_y m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \beta d\omega + \frac{H_z m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \gamma d\omega}{\int e^{-\frac{W}{rT}} d\omega + \frac{H_x m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha d\omega + \frac{H_y m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta d\omega + \frac{H_z m}{rT} \int e^{-\frac{W}{rT}} \gamma d\omega}. \end{aligned}$$

Nemen we nu aan, dat het oppervlak V gevormd door de eindpunten der voerstralen, uit O getrokken met een lengte evenredig aan de bij die richting behorende potentieele energie, symmetrisch is met betrekking tot de coördinaatvlakken, dan is

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \gamma d\omega = 0,$$

en ook

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \beta d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \gamma d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta \gamma d\omega = 0.$$

Stellen we verder

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha^2 d\omega = A, \quad \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta^2 d\omega = B,$$

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \gamma^2 d\omega = C, \quad \int e^{-\frac{W}{rT}} d\omega = D,$$

waarbij dus $A + B + C = D$, dan vinden we

$$\bar{\alpha} = \frac{H_x m}{r T} \frac{A}{D}.$$

Hieruit volgt, dat de componenten der magnetisatie zijn

$$M_x = \frac{N m^2}{r T} \frac{A}{D} H_x, \quad M_y = \frac{N m^2}{r T} \frac{B}{D} H_y, \quad M_z = \frac{N m^2}{r T} \frac{C}{D} H_z,$$

en de susceptibiliteiten

$$\kappa_1 = \frac{N m^2}{r T} \frac{A}{D}, \quad \kappa_2 = \frac{N m^2}{r T} \frac{B}{D}, \quad \kappa_3 = \frac{N m^2}{r T} \frac{C}{D}.$$

De magnetische hoofdassen vallen dus samen met de coördinaatassen.

Nemen we nu het geval, dat het oppervlak V asymmetrisch is met betrekking tot de coördinaatvlakken. Dan geldt nog wel

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta d\omega = \int e^{-\frac{W}{rT}} \gamma d\omega = 0,$$

omdat wegens den niet-magnetischen aard der elastische krachten het oppervlak V steeds den oorsprong tot middelpunt moet hebben. Zij verder

$$\int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \beta d\omega = E, \quad \int e^{-\frac{W}{rT}} \alpha \gamma d\omega = F, \quad \int e^{-\frac{W}{rT}} \beta \gamma d\omega = G,$$

dan is nu

$$\bar{\alpha} = \frac{H_x m}{r T} \frac{A}{D} + \frac{H_y m}{r T} \frac{E}{D} + \frac{H_z m}{r T} \frac{F}{D},$$

$$\bar{\beta} = \frac{H_x m}{r T} \frac{E}{D} + \frac{H_y m}{r T} \frac{B}{D} + \frac{H_z m}{r T} \frac{G}{D},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{H_x m}{r T} \frac{F}{D} + \frac{H_y m}{r T} \frac{G}{D} + \frac{H_z m}{r T} \frac{C}{D},$$

en

$$M_x = \frac{N m^2}{r T D} (A H_x + E H_y + F H_z),$$

$$M_y = \frac{N m^2}{r T D} (E H_x + B H_y + F H_z),$$

$$M_z = \frac{N m^2}{r T D} (F H_x + G H_y + C H_z).$$

Aan de symmetriebetrekkingen $\kappa_{hk} = \kappa_{kh}$ is dus weer voldaan.

In het volgende zullen we een voorbeeld uitwerken van het geval, dat het oppervlak V symmetrisch is ten opzichte van de coördinaatvlakken. In de ruimte nemen we een vast coördinatenstelsel aan en bepalen een molecuul door de hoeken ϑ en ϕ (§ 4, p. 51). Aan W geven we den vorm

$$W = a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi,$$

waarbij $a < b < c$ voor een kristal, dat de grootste susceptibiliteit heeft in de richting van de X-as en de kleinste susceptibiliteit in de richting van de Z-as. Nemen we bovendien aan, dat het kristal zeer weinig van een magnetisch isotrope stof afwijkt (verg. § 4, p. 52), dan zijn $\frac{b-a}{rT}$ en $\frac{c-a}{rT}$ zeer kleine grootheden.

De coördinaatassen zijn nu tevens de magnetische hoofdasen. Is er een magnetische kracht H in de richting van de X-as, dan krijgt het kristal een magnetisatie $Nm \overline{\cos \vartheta}$ in de richting van de X-as, waarbij

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \vartheta e^{-\frac{1}{rT}(a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi - Hm \cos \vartheta)} \sin \vartheta d\phi d\vartheta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{rT}(a \cos^2 \vartheta + b \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + c \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi - Hm \cos \vartheta)} \sin \vartheta d\phi d\vartheta}.$$

Houden we eerst ϕ constant en integreren we naar ϑ , waarbij we $\cos \vartheta = x$ stellen. Zij verder $b = a + \delta$ en $c = a + \delta'$, (δ en δ' zijn wegens het boven veronderstelde zeer kleine grootheden). Dan is

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} x e^{-\frac{1}{rT}[a + (1-x^2)(\delta \cos^2 \phi + \delta' \sin^2 \phi) - Hm x]} d\phi dx}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{1}{rT}[a + (1-x^2)(\delta \cos^2 \phi + \delta' \sin^2 \phi) - Hm x]} d\phi dx}.$$

Daar a een constante is, vallen in teller en noemer $e^{-\frac{a}{rT}}$ tegen elkaar weg. Stellen we $\frac{\delta \cos^2 \phi + \delta' \sin^2 \phi}{rT} = \varepsilon$; dit geeft

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} x e^{\frac{Hm}{rT} x - \varepsilon(1-x^2)} d\phi dx}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{Hm}{rT} x - \varepsilon(1-x^2)} d\phi dx}.$$

ε is een zeer kleine grootheid (voor $\phi = 0$ is $\varepsilon = \frac{\delta}{rT}$ en voor $\phi = \frac{\pi}{2}$ is $\varepsilon = \frac{\delta'}{rT}$) en daar $0 < x^2 < 1$ mogen we onder het integraalteeken in teller en noemer $e^{-\varepsilon(1-x^2)}$ in een reeks ontwikkelen; verder is ook $\frac{Hm}{rT}$ zeer klein, zoodat we $e^{\frac{Hm}{rT}x}$ in een reeks mogen ontwikkelen. Dit geeft

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{Hm}{rT}x + \dots\right) (1 - \varepsilon + \varepsilon x^2 + \dots) x d\phi dx}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{Hm}{rT}x + \dots\right) (1 - \varepsilon + \varepsilon x^2 + \dots) d\phi dx}$$

Bij het integreeren vallen alle termen weg, die voor de integratie een oneven macht van x bevatten. Dus in den teller blijven de termen met H, H^3 , enz., in den noemer die met H^0, H^2 , enz. Laten we de termen met derde en hoogere machten van H weg, dan kunnen we ons in den teller tot de termen met H en in den noemer tot het gedeelte zonder H bepalen. Verder verwaarloozen we tweede en hoogere machten van ε . Na integratie naar x en deeling van teller en noemer door 2 is

$$\begin{aligned} \overline{\cos \vartheta} &= \frac{\frac{Hm}{3rT} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2}{5}\varepsilon\right) d\phi}{\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) d\phi} = \\ &= \frac{\frac{Hm}{3rT} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{2}{5} \frac{(b-a) \cos^2 \phi + (c-a) \sin^2 \phi}{rT}\right] d\phi}{\int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{(b-a) \cos^2 \phi + (c-a) \sin^2 \phi}{rT}\right] d\phi} = \\ &= \frac{\frac{Hm}{3rT} \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \frac{b+c-2a}{rT}\right)}{2\pi - \frac{2\pi}{3} \frac{b+c-2a}{rT}}. \end{aligned}$$

In aanmerking nemende, dat $\frac{b+c-2a}{rT}$ een zeer kleine grootheid

is, waarvan tweede en hogere machten verwaarloosd mogen worden, vinden we

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{Hm}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT} \right).$$

Hieruit volgt

$$M_x = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT} \right) H, \text{ enz.,}$$

zoodat we vinden voor de susceptibiliteiten

$$\kappa_1 = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{b+c-2a}{rT} \right),$$

$$\kappa_2 = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{c+a-2b}{rT} \right),$$

$$\kappa_3 = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{a+b-2c}{rT} \right).$$

Bij een kristal van het tetragonale of hexagonale stelsel, dat de symmetrie van een omwentelingsellipsoïde heeft, kunnen we aannemen, dat $a = b$, dus

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{c-a}{rT} \right)$$

en

$$\kappa_3 = \frac{Nm^2}{3rT} \left(1 - \frac{4}{15} \frac{c-a}{rT} \right).$$

Daar regulaire kristallen zich magnetisch isotroop gedragen, moeten we voor deze aannemen, dat $a = b = c$, dus

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \frac{Nm^2}{3rT};$$

deze zelfde susceptibiliteit vonden we voor een niet-kristallijne stof (p. 57, (48)), waarvoor we mogen veronderstellen, dat $a = b = c = 0$.

§ 12. Ten slotte kunnen we nog de vraag stellen: moet men zich voorstellen, dat de moleculen geheel omdraaien? De theorie berust er op, dat zij het kunnen doen (verg. p. 57), maar niet alle moleculen zullen geheel omdraaien; er zijn er, die slechts heen en weer draaien. In het door LANGEVIN behandelde geval kan men b.v. nagaan, hoe het hiermee gesteld is.

Voor het aantal moleculen, welker assen met het magnetisch veld een hoek maken tusschen $\pi - \alpha_1$ en π , volgt uit de formules (46) en (46') van LANGEVIN

$$\frac{Na}{2 \sinh a} \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} e^{a \cos \alpha} \sin \alpha d\alpha = N \frac{e^{-a \cos \alpha_1} - e^{-a}}{e^a - e^{-a}}.$$

Voor een kleine waarde van α_1 wordt dit

$$\frac{N}{2} \alpha_1^2 \frac{a e^{-a}}{e^a - e^{-a}},$$

dus, als a ver beneden 1 ligt,

$$\frac{N}{4} \alpha_1^2 (1 - a). \dots \dots \dots (62)$$

De term $\frac{N}{4} \alpha_1^2$ geeft het gezochte aantal moleculen bij een gelijkmatige verdeling van de assen der moleculen. Voor zuurstof bij 0°C . vonden we, dat $a < 0,03$, als $H = 10\,000$ (p. 58). Uit (62) blijkt dus, dat er een zeer sterk veld noodig is om eenige afwijking te krijgen van een gelijkmatige verdeling en om een noemenswaard aantal moleculen te beletten geheel rond te draaien.

Anders is het in het geval, dat in §§ 9—10 van dit hoofdstuk werd behandeld. Het „vasthouden” in een nauwen bundel door de elastische krachten sluit in zich, dat de meeste moleculen slechts over kleine hoeken heen en weer schommelen.

HOOFDSTUK III.

Ferromagnetische lichamen.

§ 1. Ferromagnetische stoffen onderscheiden zich van paramagnetische 1°. door hun veel grootere magnetisatie ook bij een geringe sterkte van het induceerende veld, 2°. door het ontbreken van een bepaalde susceptibiliteit en 3°. door het optreden van de hysteresis. De ferromagnetische stoffen vertoonen magnetische verzadiging, d. w. z. bij toenemende sterkte van het induceerende veld bereikt de magnetisatie een maximumwaarde, die niet overschreden wordt. Bij de paramagnetische stoffen werd aangenomen, dat de magnetisatie haar ontstaan dankt aan het gericht worden der magnetische moleculen door een magnetisch veld, terwijl van een werking tusschen de moleculen onderling geen sprake was. Dat bij een ferromagnetische stof een magnetisch veld van geringe intensiteit reeds een zeer groote magnetisatie teweeg brengt, schrijft men toe aan de onderlinge werking der moleculaire magneetjes. Op deze hypothese berust de theorie door WEISS ¹⁾ opgesteld. Hij veronderstelt, dat een molecuul van een ferromagnetische stof van zijn omgeving een werking ondervindt gelijk aan de werking van een homogeen veld, evenredig aan de magnetisatie en gelijk gericht als deze. Dit veld noemt hij het moleculaire veld, $H_m = k M$, k is de constante van het moleculaire veld. Het veld H_m , gevoegd bij het uitwendig veld, geeft rekenschap van de groote intensiteit van de magnetisatie van de ferromagnetische stoffen. CURIE heeft reeds gewezen op de analogie tusschen de wijze, waarop bij een ferromagnetische stof de magnetisatie met de temperatuur en de veldsterkte verandert en de wijze, waarop de dichtheid van een vloeistof van de temperatuur en den druk afhangt. In dezen gedachten-gang kan men het moleculaire veld van WEISS met den moleculairen druk bij een vloeistof vergelijken; evenals deze laatste de moleculen bijeen kan houden, ook als er geen uitwendige druk is, kan het mole-

1) Journal de Physique, (4) 6 (1907), p. 661.

culaire veld de deeltjes, ook bij afwezigheid van een uitwendig veld, gericht houden.

De magnetisatie van een ferromagnetische stof wordt volgens WEISS bepaald door de formule voor de magnetisatie van een paramagnetische stof, als men daarin het magnetisch veld H vervangt door de resultante van het uitwendige en het moleculaire veld, dus

$$\frac{M}{M_0} = \coth a - \frac{1}{a}, \dots \dots \dots (63)$$

waarbij

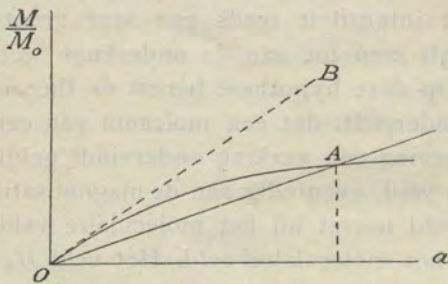
$$a = \frac{(H + k M) m}{r T} \dots \dots \dots (64)$$

WEISS neemt aan, dat de onderlinge werking der moleculen geheel uitgedrukt wordt door den term $k M$ en dat, afgezien van deze wisselwerking, de rotaties der moleculen in een ferromagnetische stof even vrij zijn als in een gas.

Ook zonder uitwendig veld kunnen ferromagnetische lichamen een magnetisatie hebben, de zoogenaamde spontane magnetisatie ¹⁾; dan is

$$a = \frac{k M m}{r T} = \frac{k M_0^2}{N r T} \cdot \frac{M}{M_0} \dots \dots \dots (65)$$

Zijn k , M_0 en N bekend, dan kan men uit (63) en (65) voor een bepaalde temperatuur M oplossen, hetgeen het gemakkelijkst graphisch gaat.



Figuur II.

In figuur II stelt de kromme lijn de vergelijking (63) voor en de betrekking (65) wordt voorgesteld door de rechte lijn OA door den oorsprong. Het snijpunt A geeft de waarde van $\frac{M}{M_0}$ aan,

die aan (63) en (65) voldoet. Er zijn wel is waar twee snijpunten, O en A , maar alleen A heeft een physische beteekenis; de toestand door O aangegeven is, zooals WEISS heeft aangetoond, niet stabiel. Stijgt de temperatuur, dan wordt de hoek, dien de rechte lijn met de a -as maakt grooter, de spontane magnetisatie neemt af; de rechte lijn wordt ten slotte raaklijn voor

1) Daar er een zeer sterk magnetisch veld nodig zou zijn om deze spontane magnetisatie nog te vergrooten, stelt WEISS haar gelijk aan de verzadigingsmagnetisatie bij de beschouwde temperatuur.

$tg BO a = \frac{1}{3}$, zooals uit (63) volgt. Er is dus alleen spontane magnetisatie mogelijk bij temperaturen $T < \frac{k M_0 m}{3 r}$, terwijl boven de temperatuur

$$\vartheta = \frac{k M_0 m}{3 r} \dots \dots \dots (66)$$

de stof haar ferromagnetische eigenschappen verliest. ϑ is het CURIEpunt.

Voor a kunnen we ook schrijven $a = 3 \frac{\vartheta M}{T M_0}$. Dit in (63) gesubstitueerd geeft

$$\frac{M}{M_0} = \coth \left(3 \frac{\vartheta M}{T M_0} \right) - \frac{1}{3 \frac{\vartheta M}{T M_0}}$$

Analoog aan de wet van de overeenstemmende toestanden hebben we hier een betrekking tusschen de magnetisatie en de temperatuur, die hetzelfde is voor alle stoffen, met M_0 en ϑ als kritische grootheden.

§ 2. Voor een temperatuurgebied boven het CURIEpunt leidt WEISS voor ferromagnetische stoffen een betrekking af, die de magnetisatie geeft in afhankelijkheid van de temperatuur en het uitwendige veld. Bij het CURIEpunt verliest de stof haar spontane magnetisatie, maar zij behoudt in een temperatuurgebied boven ϑ een groote susceptibiliteit (voor ijzer is $\vartheta = 756^\circ \text{C}$. en strekt het bedoelde gebied zich uit tot 920°C .); volgens WEISS is in dit gebied bij de magnetisatie nog steeds het moleculaire veld in het spel. De vergelijkingen (63) en (64) bepalen den magnetisatietoestand. Zij $T > \vartheta$. Is dan $H = 0$, dan wordt aan (63) en (64) voldaan door $a = 0$, $M = 0$. Laten wij dan een zwak veld H werken, dan zullen a en M klein zijn. Door reeksontwikkeling van het tweede lid gaat (63) over in

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{3} a,$$

als wij termen met a^3 en hogere machten weglaten. Substitueert men de, hieruit voor a volgende waarde in (64), dan krijgt men de vergelijking, die het verband tusschen de magnetische kracht en de magnetisatie uitdrukt:

$$\frac{3 M}{M_0} = \frac{(H + k M) m}{r T},$$

of, als men (66) in aanmerking neemt,

$$M = \frac{\mathfrak{S}}{k} \frac{H}{T - \mathfrak{S}}, \dots \dots \dots (67)$$

waarvoor men mag schrijven

$$M = C \frac{H}{T - \mathfrak{S}};$$

hierin is C de constante van CURIE per volume-eenheid. Deze vergelijking stelt bij een bepaalde waarde van het magnetisch veld een gelijkzijdige hyperbool voor; de waarnemingen van CURIE over de magnetisatie van ijzer boven 756° C. in afhankelijkheid van de temperatuur bevestigen inderdaad deze vergelijking.

Uit (67) kan men de constante van het moleculaire veld berekenen. Voor ijzer vindt WEISS $k = \frac{3850}{4\pi}$. Volgens de waarnemingen van CURIE bedraagt bij de gewone temperatuur de magnetisatie van ijzer $1700 \times \sqrt{4\pi}$ bij een veldsterkte van $\frac{1300}{\sqrt{4\pi}}$ eenheden, dan is dus het moleculaire veld

$$kM = \frac{6\,550\,000}{\sqrt{4\pi}} = 1\,890\,000;$$

dit is een veel sterker veld dan met een electromagneet te bereiken is.

Ten slotte vermelden we nog een artikel van WEISS en PICCARD¹⁾ over de temperatuursverandering bij adiabatische magnetisatie. Zij leiden daarvoor de formule

$$dT = \frac{T}{\mathfrak{S}} \frac{k}{2c_M} d(M^2) \dots \dots \dots (68)$$

af, waarin c_M de soortelijke warmte bij constante magnetisatie voorstelt. Hoewel deze formule uit (24) (p. 22) volgt, als men daarin een kleine omzetting aanbrengt en bovendien (67) in aanmerking neemt, is het in dit geval eenvoudiger T en M als onafhankelijk veranderlijken te nemen (in Hoofdstuk I, § 7 werden achtereenvolgens T , B_x , B_y , B_z en T , H_x , H_y , H_z als onafhankelijk veranderlijken genomen).

Men vindt dan

$$dT = \frac{T \frac{\partial H}{\partial T}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - H \frac{\partial H}{\partial T}} dM, \dots \dots \dots (69)$$

1) Comptes rendus, 166 (1918), p. 352.

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - H \frac{\partial H}{\partial T}$ is de soortelijke warmte bij constante magnetisatie. Stellen we deze weer c_M en substitueeren we voor $\frac{\partial H}{\partial T}$ de waarde $\frac{kM}{\mathfrak{S}}$, die uit (67) volgt, dan vinden we

$$dT = \frac{T}{\mathfrak{S}} \frac{k}{2c_M} d(M^2),$$

in overeenstemming met (68).

WEISS en PICCARD hebben door waarnemingen boven het CURIE-punt bij nikkel bevestigd gevonden, dat de toename van temperatuur bij adiabatische magnetisatie evenredig is aan het kwadraat van de magnetisatie. Bij invoering van de door WEISS, PICCARD en CARRARD ¹⁾ bepaalde waarde van de soortelijke warmte boven het CURIE-punt (0,1256) en de waarde van k (70 000), ontleend aan magnetische metingen, bleek er slechts een ruwe numerieke overeenkomst te bestaan tusschen de waargenomen verhouding van dT en $d(M^2)$ en de, uit de formule (68) berekende. Dit is toe te schrijven aan de omstandigheid, dat de waarnemingen eerst konden geschieden 25 seconden, nadat de stroom, die het magnetisch veld teweegbracht, was gesloten, hetgeen noodig was, omdat het veld niet oogenblikkelijk zijn volle sterkte bereikte; zodoende vielen de waargenomen waarden van dT te klein uit.

§ 3. We hebben gezien, dat WEISS de magnetisatie van ferromagnetische stoffen bepaalt door in de uitkomsten van LANGEVIN voor paramagnetische stoffen het magnetisch veld te vervangen door de resultante van het moleculaire en het uitwendige veld. In het volgende zullen we de onderlinge werking der moleculen reeds in de berekening opnemen en nagaan, of in de einduitkomst het moleculaire veld op dezelfde wijze voorkomt als het uitwendige veld.

We gaan weer statistisch te werk en beschouwen een canonisch ensemble van systemen, waarbij ieder systeem uit n moleculaire magnetjes bestaat. Denken we ons deze weer als dunne staafjes; ieder molecuul is dan bepaald door de twee hoeken \mathfrak{S} en ϕ en de daarbij behorende momenten $\underline{\mathfrak{S}}$ en $\underline{\phi}$; het stelsel is bepaald door $\mathfrak{S}_1, \phi_1, \mathfrak{S}_2, \phi_2, \dots, \mathfrak{S}_n, \phi_n, \mathfrak{S}_n, \phi_n$. De kinetische energie van een molecuul is $\frac{1}{2Q} \left(\mathfrak{S}^2 + \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{S}} \phi^2 \right)$ en de potentieele energie ten opzichte van het

1) Arch. de Genève, 43 (1917), p. 117.

uitwendig veld $-Hm \cos \vartheta$. Noemen we verder V de potentieele energie, die een molecuul heeft tengevolge van de onderlinge werking der moleculen; daar deze alleen van den stand der moleculen afhangt, is V een functie van $\vartheta_1, \varphi_1, \dots, \vartheta_n, \varphi_n$. Het aantal stelsels, dat ligt binnen de speelruimten ϑ_1 en $\vartheta_1 + d\vartheta_1, \dots, \varphi_n$ en $\varphi_n + d\varphi_n$ is

$$C e^{-\frac{1}{rT}[-Hm \cos \vartheta_1 + \frac{1}{2Q} \vartheta_1^2 + \frac{1}{2Q \sin^2 \vartheta_1} \varphi_1^2 + \dots - Hm \cos \vartheta_n + \frac{1}{2Q} \vartheta_n^2 + \frac{1}{2Q \sin^2 \vartheta_n} \varphi_n^2 + V]} d\vartheta_1 d\varphi_1 \dots d\vartheta_n d\varphi_n$$

Voeren we als nieuwe veranderlijken $\psi_\kappa = \frac{\varphi_\kappa}{\sin \vartheta_\kappa}$ in, dan wordt bovenstaande uitdrukking

$$C e^{-\frac{1}{rT}[-Hm \cos \vartheta_1 + \frac{1}{2Q}(\vartheta_1^2 + \psi_1^2) + \dots - Hm \cos \vartheta_n + \frac{1}{2Q}(\vartheta_n^2 + \psi_n^2) + V]} \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n d\vartheta_1 d\psi_1 \dots d\vartheta_n d\psi_n$$

Nu komen de grootheden, die betrekking hebben op den bewegings-toestand van het molecuul, geheel gescheiden voor van de grootheden, die den stand van het molecuul bepalen. Zoeken we de gemiddelde waarde van een grootheid, die alleen van de standen afhangt, zooals $\overline{\cos \vartheta_1}$, dan vallen in teller en noemer de integraties naar de ϑ 's en ψ 's tegen elkaar weg, zoodat

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{\int \cos \vartheta_1 e^{\frac{1}{rT}[Hm \cos \vartheta_1 + \dots Hm \cos \vartheta_n - V]} \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n d\vartheta_1 \dots d\varphi_n}{\int e^{\frac{1}{rT}[Hm \cos \vartheta_1 + \dots Hm \cos \vartheta_n - V]} \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n d\vartheta_1 \dots d\varphi_n}$$

De potentieele energie, die twee moleculen te zamen hebben door hun onderlinge werking, hangt af van den hoek ω , die hun assen met elkaar maken. Zij $-k m^2 \cos \omega_{\mu\nu}$ de potentieele energie, die het μ de en het ν de molecuul door hun wisselwerking hebben, dan kan V geschreven worden in den vorm

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} k m^2 \cos \omega_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n, \text{ met weglating van } \mu = \nu)$$

$$= -\frac{1}{2} k m^2 \sum_{\mu\nu} \{ \cos \vartheta_\mu \cos \vartheta_\nu + \sin \vartheta_\mu \sin \vartheta_\nu \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu) \},$$

zoodat

$$\overline{\cos \vartheta_1} = \frac{\int \cos \vartheta_1 e^{\frac{1}{rT}[Hm \cos \vartheta_1 + \dots Hm \cos \vartheta_n + \frac{k}{2} m^2 \sum_{\mu\nu} \{ \cos \vartheta_\mu \cos \vartheta_\nu + \sin \vartheta_\mu \sin \vartheta_\nu \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu) \}]} \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n d\vartheta_1 \dots d\varphi_n}{\int e^{\frac{1}{rT}[Hm \cos \vartheta_1 + \dots Hm \cos \vartheta_n + \frac{k}{2} m^2 \sum_{\mu\nu} \{ \cos \vartheta_\mu \cos \vartheta_\nu + \sin \vartheta_\mu \sin \vartheta_\nu \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu) \}]} \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n d\vartheta_1 \dots d\varphi_n}$$

Voeren we de nieuwe veranderlijken $\cos \vartheta_1 = x_1, \dots, \cos \vartheta_n = x_n$ in en stellen we $\frac{Hm}{rT} = a$ en $\frac{k m^2}{rT} = b$. Ter vereenvoudiging nemen we

aan, dat de potentiële energie van twee moleculen tengevolge van hun onderlinge werking klein is ten opzichte van de kinetische energie rT , de constante b is dan een kleine grootheid; vroeger hebben we gevonden, dat ook a een kleine grootheid is (p. 58). Ontwikkelen we nu de exponentiële functiën in een reeks, dan vinden we

$$\overline{\cos \mathcal{S}_1} = \frac{\int x_1 [1 + ax_1 + \dots + ax_n + \frac{b}{2} \sum_{\mu, \nu} \{x_\mu x_\nu + \sqrt{1-x_\mu^2} \cdot \sqrt{1-x_\nu^2} \cdot \cos(\Phi_\mu - \Phi_\nu)\} + \dots] dx_1 \dots dx_n d\Phi_1 \dots d\Phi_n}{\int [1 + ax_1 + \dots + ax_n + \frac{b}{2} \sum_{\mu, \nu} \{x_\mu x_\nu + \sqrt{1-x_\mu^2} \cdot \sqrt{1-x_\nu^2} \cdot \cos(\Phi_\mu - \Phi_\nu)\} + \dots] dx_1 \dots dx_n d\Phi_1 \dots d\Phi_n},$$

de grenzen van de integraties naar x_1, \dots, x_n zijn -1 en $+1$, naar Φ_1, \dots, Φ_n 0 en 2π . We merken vooreerst op, dat de integratie naar de Φ 's in de termen, die geen factor $\cos(\Phi_\mu - \Phi_\nu)$ bevatten, in teller en noemer een factor $(2\pi)^n$ geven, terwijl de integratie naar Φ_μ bij constante Φ_ν van de termen, die $\cos(\Phi_\mu - \Phi_\nu)$ bevatten, nul oplevert; we mogen dus de integraties naar Φ_1, \dots, Φ_n in teller en noemer weglaten. Verwaarloozen we de termen met vierde en hoogere machten van a en tweede en hoogere machten van b en schrijven we alleen die termen neer, die bij de integratie wat opleveren, nl. de termen, die onder het integraalteeken slechts even machten van x_1, \dots, x_n bevatten; dit geeft

$$\overline{\cos \mathcal{S}_1} = \frac{\int_{-1}^{+1} (ax_1^2 + ab \sum_{\mu} x_1^2 x_\mu^2 + \frac{a^3 x_1^4}{6} + \frac{a^3}{2} \sum_{\mu} x_1^2 x_\mu^2 + \frac{a^3 b}{2} \sum_{\mu} x_1^4 x_\mu^2 + \frac{a^3 b}{6} \sum_{\mu} x_1^2 x_\mu^4 + a^3 b \sum_{\mu, \nu} x_1^2 x_\mu^2 x_\nu^2) dx_1 \dots dx_n}{\int_{-1}^{+1} (1 + \frac{a^2}{2} \sum_{\mu} x_\mu^2 + \frac{a^2 b}{2} \sum_{\mu, \nu} x_\mu^2 x_\nu^2) dx_1 \dots dx_n}$$

(voor den teller geldt $\mu, \nu = 2, \dots, n$, voor den noemer $\mu, \nu = 1, \dots, n$, terwijl weer $\mu = \nu$ weggelaten moet worden). Na deeling van teller en noemer door 2^n vinden we

$$\overline{\cos \mathcal{S}_1} = \frac{\frac{1}{3}a + \frac{1}{9}ab(n-1) - \frac{1}{45}a^3 + \frac{1}{18}a^3n + \frac{2}{45}a^3b(n-1) + \frac{1}{27}a^3b(n-1)(n-2)}{1 + \frac{1}{6}a^2n + \frac{1}{18}a^2bn(n-1)},$$

of, na reeksontwikkeling van den noemer,

$$\overline{\cos \mathcal{S}_1} = \frac{1}{3}a \left\{ 1 + \frac{1}{3}b(n-1) \right\} - \frac{1}{45}a^3 \left\{ 1 + \frac{4}{3}b(n-1) \right\}.$$

Dezelfde uitdrukking vinden we voor $\overline{\cos \mathfrak{S}_x}$, dus in het algemeen is

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = \frac{Hm}{3rT} \left\{ 1 + \frac{knm^2}{3rT} \right\} - \frac{H^3 m^3}{45 r^3 T^3} \left\{ 1 + \frac{4knm^2}{3rT} \right\}, \dots (70)$$

als we $n - 1$ vervangen door n .

We gaan nu na, of in deze formule het moleculaire veld op dezelfde wijze voorkomt als het veld H . Is het moleculaire veld nul, dus $k = 0$, dan hebben we

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = f(H),$$

en wel

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = \frac{Hm}{3rT} - \frac{H^3 m^3}{45 r^3 T^3},$$

zoals uit de formule van LANGEVIN volgt door reeksontwikkeling van $\coth \frac{Hm}{rT}$ (p. 56). Het moleculaire veld is evenredig met $\overline{\cos \mathfrak{S}}$ en met k ; als het moleculaire veld op dezelfde wijze voorkomt als het veld H , dan moet bij aanwezigheid van het moleculaire veld

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = f(H + knm \overline{\cos \mathfrak{S}}). \dots (71)$$

Omdat we k zeer klein verondersteld hebben, mogen we in $knm \overline{\cos \mathfrak{S}}$ voor $\overline{\cos \mathfrak{S}}$ de waarde substitueeren, zoals die is voor $k = 0$, dus

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = f\left(H + \frac{knm^2 H}{3rT} - \frac{knm^4 H^3}{45 r^3 T^3}\right).$$

Bij verwaarloozing van vierde en hoogere machten van $\frac{Hm}{rT}$, is dan

$$\overline{\cos \mathfrak{S}} = \frac{Hm}{3rT} \left(1 + \frac{knm^2}{3rT}\right) - \frac{H^3 m^3}{45 r^3 T^3} \left(1 + \frac{4knm^2}{3rT}\right).$$

Dit is de uitkomst, die we hierboven (70) vonden. Voor het geval, dat de wisselwerking tusschen de moleculen klein is ten opzichte van hun kinetische energie komt dus in de eindformule het moleculaire veld op dezelfde wijze voor als het uitwendige veld. Nemen we de volume-eenheid, dan is $nm \overline{\cos \mathfrak{S}} = M$. Uit (71) volgt dan

$$M = F(H + kM),$$

in overeenstemming met de formule van WEISS.

§ 4. Voor een paramagnetische stof hebben we de configuratieverdeling der moleculen gevonden onder den invloed van een uitwendig magnetisch veld (Hoofdstuk II, § 8). We zullen dit nu ook nagaan voor een ferromagnetische stof.



We vonden vroeger (p. 63) de uitdrukking

$$C \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} e^{-\frac{\epsilon}{rT}} (d\omega_1)^{n_1} \dots (d\omega_k)^{n_k},$$

voor het aantal stelsels, waarbij n_1, \dots, n_k moleculen, welke dan ook, liggen in de even groote elementen $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi d\underline{\vartheta} d\underline{\psi}$ van de phase-uitgebreidheid. Wij kwamen tot die uitkomst door uit te gaan van een uitdrukking voor het aantal stelsels in het canonisch ensemble, bij welke het eerste molecuul ligt in een element $d\omega_1$ der phase-uitgebreidheid, het tweede molecuul in een element $d\omega_2$, enz. Door de laatstbedoelde uitdrukking naar $\underline{\vartheta}$ en $\underline{\psi}$ te integreeren kan men vinden in hoeveel stelsels het eerste molecuul ligt in een element ds_1 der configuratie-uitgebreidheid, het tweede in een element ds_2 , enz. Daaruit vindt men dan voor het aantal stelsels, waarbij n_1, \dots, n_k moleculen, welke dan ook, liggen in de even groote elementen $ds = \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ van de configuratie-uitgebreidheid

$$C' \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} e^{-\frac{V}{rT}} (ds_1)^{n_1} \dots (ds_k)^{n_k}.$$

De potentieele energie V is gelijk aan

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 + \dots n_k f_k + n_1 n_2 f_{12} + \dots n_{k-1} n_k f_{k-1, k},$$

als f_i de potentieele energie is ten opzichte van het uitwendig veld van een molecuul in ds_i en f_{ij} de potentieele energie ten opzichte van elkander van twee moleculen, één in ds_i en één in ds_j .

Zij $-H$ de logarithmus van $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} e^{-\frac{V}{rT}}$ en benaderen we de faculteiten met het theorema van STIRLING, dan is

$$H = -n \log n + \sum_i n_i \log n_i + \frac{1}{rT} \sum_i n_i f_i + \frac{1}{2rT} \sum_{i,j} n_i n_j f_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k)$$

waarbij verondersteld is, dat $f_{ii} = 0$.

We varieeren de n 's om de minimumwaarde van H te vinden.

$$\delta H = \sum_i (1 + \log n_i) \delta n_i + \sum_i \frac{f_i}{rT} \delta n_i + \sum_{i,j} \frac{n_j f_{ij}}{rT} \delta n_i \dots \dots (72)$$

δH moet verdwijnen voor alle waarden van δn_i , die voldoen aan

$$\delta n_1 + \delta n_2 + \dots \delta n_k = 0 \dots \dots \dots (73)$$

Vermenigvuldigen we (73) met $-C$ en tellen we hierbij (72) op, dan krijgen we de k betrekkingen

$$\log n_i + \frac{f_i}{rT} + \sum_j \frac{n_j f_{ij}}{rT} = C - 1 = \log p,$$

of

$$n_i = p e^{-\frac{1}{rT}(f_i + \sum_j n_j f_{ij})}. \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Hieruit moeten we n_1, n_2, \dots, n_k oplossen om de configuratieverdeling der moleculen te vinden. Nemen we ter vereenvoudiging aan, dat de f_{ij} 's heel klein zijn, zoodanig, dat we $e^{-\sum_j \frac{n_j f_{ij}}{rT}}$ in een reeks mogen ontwikkelen, waarbij we tweede en hoogere machten der f_{ij} 's verwaarloozen. Dit geeft

$$n_i = p e^{-\frac{f_i}{rT}} \left(1 - \sum_j \frac{n_j f_{ij}}{rT} \right).$$

Als we in het tweede lid n_j vervangen door $p e^{-\frac{f_j}{rT}}$, wat we mogen doen na hetgeen verondersteld werd omtrent f_{ij} , vinden we

$$n_i = p e^{-\frac{f_i}{rT}} \left(1 - p \sum_j \frac{f_{ij}}{rT} e^{-\frac{f_j}{rT}} \right).$$

Dit is het aantal moleculen in het element $ds_i = \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i$.

Nemen we in aanmerking, dat $\frac{f_{ij}}{rT}$ en $\frac{f_j}{rT}$ kleine grootheden zijn, dan kunnen we in den term $\frac{f_{ij}}{rT} e^{-\frac{f_j}{rT}}$ den factor $e^{-\frac{f_j}{rT}}$ door de eenheid vervangen; stellen we bovendien $p = K \sin \vartheta d\vartheta d\phi$, dan is

$$n_i = K e^{-\frac{f_i}{rT}} \left(1 - K \sum_j \frac{f_{ij}}{rT} \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\phi_j \right) \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i,$$

of

$$n_i = K e^{\frac{H_m \cos \vartheta_i}{rT}} \left(1 + \frac{H_m m \cos \vartheta_i}{rT} \right) \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\phi_i,$$

als we voor f_i schrijven $-H_m \cos \vartheta_i$ en voor $K \sum_j f_{ij} \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\phi_j$ $-H_m m \cos \vartheta_i$.

De potentieele energie van een molecuul in ds_i ten opzichte van één in ds_j is f_{ij} , dus ten opzichte van alle moleculen in ds_j (het aantal daarvan is bij de benadering, waartoe wij ons boven beperkten, $p ds_j$)

$$p f_{ij} ds_j = K f_{ij} \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\phi_j.$$

Daaruit volgt, dat

$$K \sum_j f_{ij} \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\phi_j$$

de potentieele energie van een deeltje in ds_i ten opzichte van alle andere voorstelt. Wij schrijven daarvoor (verg. de volgende §) — $H_m m \cos \vartheta_i$, nl. de potentieele energie van het beschouwde molecuul tegenover het moleculaire veld H_m , waarbij wij onder ϑ_i den hoek tusschen de as van het molecuul en de resulterende magnetisatie verstaan. Zoo vinden wij voor het aantal moleculen in het element $\sin \vartheta d\vartheta d\phi$

$$K e^{\frac{H_m \cos \vartheta}{r T}} \left(1 + \frac{H_m m \cos \vartheta}{r T} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\phi.$$

Deze uitkomst vinden we ook, als we in de formule (60) van p. 64 H vervangen door $H + H_m$ en vervolgens, evenals hierboven, onderstellen, dat H_m zeer klein is, zoodat $e^{\frac{H_m m \cos \vartheta}{r T}}$ in een reeks ontwikkeld kan worden, waarbij tweede en hoogere machten van $\frac{H_m m \cos \vartheta}{r T}$ verwaarloosd worden.

§ 5. In het volgende gaan we de gezamenlijke potentieele energie U na, die de magnetische moleculen van een ferromagnetische stof hebben ten gevolge van de onderlinge werking der moleculen. Stel, dat we n magnetische moleculen hebben, die gezamenlijk een spontane magnetisatie hebben; de moleculen hebben elk een moment m , en hun magnetische as maakt met de richting van hun resulterend magnetisch moment de hoeken $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Dit resulterend moment M bedraagt

$$M = m (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_n).$$

Nemen we nu met WEISS aan, dat de gezamenlijke werking van alle moleculen op één er van aequivalent is met een homogeen magnetisch veld, dat evenredig is aan de magnetisatie en gelijk gericht als deze, dan is de potentieele energie van het eerste molecuul ten opzichte van de onderlinge werking

$$- k m (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_n) m \cos \vartheta_1$$

(k is de constante van het moleculaire veld), van het tweede molecuul

$$- k m (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_n) m \cos \vartheta_2,$$

enz. en ten slotte van het n^{de} molecuul

$$- k m (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_n) m \cos \vartheta_n.$$

In de som hiervan komt de potentieele energie van de wisselwerking

van telkens twee moleculen tweemaal voor, dus is de gezamenlijke potentieele energie

$$U = -\frac{k}{2} m^2 (\cos \mathfrak{S}_1 + \cos \mathfrak{S}_2 + \dots + \cos \mathfrak{S}_n)^2 = -\frac{k}{2} M^2. \dots (74)$$

§ 6. We hebben in Hoofdstuk II, § 10 gesproken over toevallige afwijkingen van een evenwichtstoestand, vergelijkbaar met de welbekende fluctuaties in dichtheid in een gas- of vloeistofmassa, en waarmede een resulterend magnetisch moment kan gepaard gaan. We zullen nu dit vraagstuk behandelen voor een isotrope stof, waarvan de moleculen de onderlinge werkingen op elkander uitoefenen, waaruit het moleculaire veld voortvloeit. Daartoe laten we voorafgaan eenige elementaire beschouwingen over het zwaartepunt van naar het toeval verdeelde punten ¹⁾. Onderstel vooreerst, dat q punten verdeeld zijn over een lijn, die zich aan weerskanten van den oorsprong over een afstand u uitstrekt. We verdeelen de lijn in p gelijke vakken V_1, V_2, \dots, V_p van links naar rechts. De waarschijnlijkheid, dat q_1 punten in V_1, q_2 in V_2, \dots, q_p in V_p ($q_1 + q_2 + \dots + q_p = q$) liggen, is

$$W = \frac{1}{p^q} \frac{q!}{q_1! q_2! \dots q_p!}.$$

W is een maximum voor

$$q_1 = q_2 = \dots = q_p = \frac{q}{p}. \dots \dots \dots (75)$$

Wij willen nu de waarschijnlijkheid zoeken voor het geval, dat alle q 's met een klein bedrag afwijken van deze waarden. Zijn deze afwijkingen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$, dan moeten we de waarde zoeken van

$$W = \frac{1}{p^q} \frac{q!}{(q_1 + \delta_1)! (q_2 + \delta_2)! \dots (q_p + \delta_p)!}$$

of van $\log W$. Met behulp van de reeks van TAYLOR kunnen we $\log W$ in $\log W_m$ uitdrukken, als W_m de maximumwaarschijnlijkheid is, nl.

$$\begin{aligned} \log W = \log W_m + \frac{\partial (\log W)}{\partial q_1} \delta_1 + \frac{\partial (\log W)}{\partial q_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial (\log W)}{\partial q_p} \delta_p + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\log W)}{\partial q_1^2} \delta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\log W)}{\partial q_2^2} \delta_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\log W)}{\partial q_p^2} \delta_p^2 + \frac{\partial^2 (\log W)}{\partial q_1 \partial q_2} \delta_1 \delta_2 + \dots, \end{aligned}$$

1) Verg. G. L. DE HAAS—LORENTZ. Over de Theorie van de Brown'sche beweging en daarmede verwante verschijnselen, p. 13.

waarbij de differentiaalquotienten moeten genomen worden voor de waarden (75) van q_1, q_2, \dots, q_p .

Volgens de formule van STIRLING is $q! = q^{q+\frac{1}{2}} e^{-q} \sqrt{2\pi}$; passen we deze hier toe, dan vinden we

$$\log W = \log W_m - \frac{p}{2q} \sum \delta^2$$

en

$$W = W_m e^{-\frac{p}{2q} \sum \delta^2} \dots \dots \dots (76)$$

Stel p even en laat ieder punt in het van O afgekeerde einde van het vak V_x liggen; is p groot, dan is hiertegen geen bezwaar. De coördinaat van het zwaartepunt van de aldus verdeelde punten is

$$\xi = \frac{2u}{pq} \left\{ -\frac{p}{2} \delta_1 - \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \delta_2 \dots - \delta_{\frac{p}{2}} + \delta_{\frac{p}{2}+1} + 2 \delta_{\frac{p}{2}+2} + \dots \frac{p}{2} \delta_p \right\}. \quad (77)$$

We willen de waarschijnlijkheid hebben, dat de coördinaat van het zwaartepunt tusschen bepaalde grenzen ligt. Daartoe moeten we alle waarden der δ 's beschouwen, waarvoor dit het geval is en die bovendien voldoen aan

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_p = 0. \dots \dots \dots (78)$$

Met behulp van (76) moeten we voor ieder van deze waardenreeksen de waarschijnlijkheid berekenen en dan deze waarschijnlijkheden bij elkaar optellen. Bij de oplossing van dit vraagstuk zullen we gebruik maken van de meerdimensionale meetkunde. Wij kunnen ons nl. een p -dimensionale ruimte voorstellen met de coördinaten

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p.$$

In deze ruimte stellen de vergelijkingen (77) en (78) „platte vlakken” voor en wij moeten nu onderzoeken, hoeveel punten er liggen in het vlak (78) en tevens tusschen de vlakken (77) en (77'), als (77') uit (77) ontstaat door ξ te vervangen door $\xi + d\xi$. Met een orthogonale substitutie voeren we nieuwe coördinaten $\delta_1', \delta_2', \dots, \delta_p'$ in, en wel zóó, dat δ_1' loodrecht staat op het vlak (78) en δ_2' loodrecht op het vlak (77). Er is voldaan aan de voorwaarden, dat δ_1' en δ_2' loodrecht op elkaar staan, want de loodlijn op (78) heeft de richtingsconstanten

$$\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}$$

en van de loodlijn op (77) zijn de richtingsconstanten evenredig met

$$-\frac{p}{2}, -\frac{p}{2} + 1, \dots, \frac{p}{2}.$$

De overige coördinaten $\delta_3', \dots, \delta_p'$ worden zoo gekozen, dat aan de voorwaarde voor een orthogonale transformatie voldaan is. Men heeft dus $\Sigma \delta^2 = \Sigma \delta'^2$ en de uitdrukking (78) gaat over in

$$W = W_m e^{-\frac{p}{2q} \Sigma \delta'^2}.$$

We merken nu op, dat $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ geheele getallen moeten zijn, en dat dit alleen het geval is in bepaalde punten van de beschouwde p -dimensionale ruimte. We moeten die punten hebben, die in het vlak (78) of

$$\delta_1' = 0$$

liggen en bovendien aan de gestelde voorwaarde voldoen. De punten zijn regelmatig over het vlak $\delta_1' = 0$ verspreid. Is Δ de dichtheid dier verspreiding, dan is het aantal punten in een element $d\delta_2' \dots d\delta_p'$ van het vlak

$$\Delta d\delta_2' \dots d\delta_p'$$

en wij vinden de gezochte waarschijnlijkheid door de uitdrukking

$$W_m \Delta e^{-\frac{p}{2q} (\delta_2'^2 + \dots + \delta_p'^2)} d\delta_2' \dots d\delta_p' \dots \dots \dots (79)$$

te integreeren over dat deel van het vlak, waar aan de gestelde voorwaarde voldaan is. De lengte van de loodlijn op (77) bedraagt

$$\delta_2' = \frac{\xi p q}{2u \sqrt{2 \left\{ 1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \right\}}}.$$

Nemen we nu in aanmerking, dat $1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} + 1\right) (p + 1)$ of $\frac{p^3}{24}$, daar $\frac{p}{2}$ zeer groot is, dan vinden we

$$\delta_2' = \frac{\xi q}{u} \sqrt{\frac{3}{p}}.$$

De voorwaarde, dat ξ moet liggen tusschen ξ en $\xi + d\xi$ komt dus hierop neer, dat de coördinaat δ_2' moet liggen tusschen δ_2' en $\delta_2' + d\delta_2'$, waarbij

$$d\delta_2' = \frac{q}{u} \sqrt{\frac{3}{p}} d\xi.$$

$\delta_3' \dots \delta_p'$ kunnen alle waarden tusschen $-\infty$ en $+\infty$ hebben. Integreeren we (79) naar deze veranderlijken en vatten we de constante factoren in een coëfficiënt C samen, dan vinden we voor de gezochte waarschijnlijkheid

$$W = C e^{-\frac{3q\xi^2}{2n^2}} d\xi. \dots \dots \dots (80)$$

De waarde van C vinden we uit de overweging, dat de integratie van W van $\xi = -\infty$ tot $\xi = +\infty$ 1 moet opleveren. Dit geeft tenslotte

$$W = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{3q}{2\pi}} e^{-\frac{3q\xi^2}{2n^2}} d\xi. \dots \dots \dots (81)$$

Vervolgens zullen we ons n punten naar het toeval over het oppervlak van een bol met straal 1 verdeeld denken. We vatten nu een middellijn van den bol in de richting van de X-as in het oog en verdeelen deze in p gelijke vakken. De waarschijnlijkheid, dat de x -coördinaat van een punt zich in één van deze vakken bevindt, is voor alle vakken even groot, daar aan de vakken bolschijven van gelijk oppervlak beantwoorden. Uit het voorgaande volgt dan onmiddellijk, dat de waarschijnlijkheid, dat de x -coördinaat van het zwaartepunt der n punten ligt tusschen x en $x + dx$, bedraagt

$$W_x = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}} e^{-\frac{3nx^2}{2}} dx.$$

Ten einde nu de waarschijnlijkheid te vinden, dat de afstand van het zwaartepunt der n punten tot het middelpunt ligt tusschen r en $r + dr$, merken we vooreerst op, dat deze waarschijnlijkheid symmetrisch ten opzichte van het middelpunt is, zoodat we mogen stellen

$$W_r = f(r) dr.$$

De waarschijnlijkheid, dat de bedoelde afstand ligt tusschen r en $r + dr$ en dat bovendien de x -coördinaat van het zwaartepunt zich bevindt tusschen x en $x + dx$ is dan

$$\frac{f(r)}{2r} dr dx.$$

Integreeren we deze uitdrukking naar r van x tot 1, dan moeten we de zoeven berekende waarschijnlijkheid W_x vinden. Dit geeft

$$\int_x^1 \frac{f(r)}{2r} dr = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}} e^{-\frac{3nx^2}{2}},$$

waaruit na differentiatie naar x volgt



$$\frac{f(x)}{2x} = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}} e^{-\frac{3nx^2}{2}} 3nx.$$

Dus is

$$f(r) = 4\pi \left(\frac{3n}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} r^2 e^{-\frac{3nr^2}{2}}$$

en

$$W_r = 4\pi \left(\frac{3n}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} r^2 e^{-\frac{3nr^2}{2}} dr \dots \dots \dots (82)$$

We gaan nu over tot de berekening van de spontane magnetisatie. We beschouwen een lichaam, dat n magnetische moleculen bevat, ieder met een moment m . We geven de richting van elk molecuul aan door uit het middelpunt O van een met den straal 1 beschreven bol een lijn evenwijdig aan de as van het deeltje te trekken; het punt, waar die lijn het boloppervlak snijdt, kunnen wij het „voorstellende punt” van het molecuul noemen.

Oefenden de moleculen geen krachten op elkaar uit, dan zou van de verdeeling der voorstellende punten over het boloppervlak het boven gezegde gelden. Thans echter, nu er een wisselwerking bestaat, is dat niet meer het geval; de potentieele energie, die voor de eene verdeeling anders is dan voor de andere, zal haar invloed doen gevoelen.

Hierbij is het een vereenvoudigende omstandigheid, dat deze energie bepaald wordt door den afstand r van het zwaartepunt P der voorstellende punten tot het middelpunt O . Dit volgt uit (74), in welke vergelijking wij onder $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_n$ de hoeken moeten verstaan, die de assen der moleculen met OP maken. Klaarblijkelijk is

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots \cos \vartheta_n = nr,$$

zoodat de potentieele energie

$$U = -\frac{1}{2} k m^2 n^2 r^2$$

wordt.

Bestond deze potentieele energie niet, dan zou de boven de afgeleide formule (82) gelden. Thans kunnen wij met U rekening houden door den factor

$$e^{-\frac{U}{sT}} = e^{-\frac{k m^2 n^2 r^2}{2sT}},$$

waarin s de gasconstante van een molecuul voorstelt, in te voeren. Wij vinden dus

$$W_r = C r^2 e^{-\left(\frac{3n}{2} - \frac{k m^2 n^2}{2sT}\right) r^2} dr \dots \dots \dots (83)$$

Bij de bepaling van de constante C moeten twee gevallen onderscheiden worden. In het eerste geval zij $\frac{3n}{2} - \frac{km^2n^2}{2sT} > 0$ of $T > \frac{km^2n}{3s}$.

We merken op, dat de temperatuur $\frac{km^2n}{3s}$ gelijk is aan de, op p. 79 ingevoerde, CURIE-temperatuur \mathfrak{S} . Immers hadden we de volume-eenheid genomen, dan was k overeengekomen met de constante van het moleculaire veld van WEISS en dan zou $nm = M_0$ zijn. We mogen dus hier de grootheid $\frac{km^2n}{3s}$ door \mathfrak{S} vervangen. (83) gaat dan over in

$$W_r = Cr^2 e^{-\frac{3n}{2} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} r^2} dr.$$

Is nu $T > \mathfrak{S}$, dan levert de bepaling van de constante C geen moeilijkheden op. We vinden voor de waarschijnlijkheid, dat de afstand van het zwaartepunt der voorstellende punten tot het middelpunt tusschen r en $r + dr$ ligt,

$$W_r = 4\pi \left(\frac{3n}{2\pi} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} \right)^{\frac{3}{2}} r^2 e^{-\frac{3n}{2} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} r^2} dr \dots \dots \dots (84)$$

bedraagt. Hieruit volgt voor het gemiddelde $\overline{M^2}$ van de tweede macht van de magnetisatie

$$\overline{M^2} = 4\pi n^2 m^2 \left(\frac{3n}{2\pi} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{3n}{2} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} r^2} dr.$$

Voor de grenzen van de integratie zijn 0 en ∞ genomen, hetgeen geoorloofd is, omdat W_r alleen voor zeer kleine waarden van r van nul verschillend is. Dit geeft

$$\overline{M^2} = 4\pi n^2 m^2 \left(\frac{3n}{2\pi} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3\pi^{-2}}{8 \left(\frac{3n}{2\pi} \frac{T-\mathfrak{S}}{T} \right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{n m^2 T}{T-\mathfrak{S}}.$$

Bij temperaturen boven het CURIE-punt is dus de spontane magnetisatie evenredig aan \sqrt{n} en nadert tot $m\sqrt{n}$, als de temperatuur zeer hoog is.

Als voorbeeld noemen we ijzer en nikkel, waarvoor KUNZ ¹⁾ de absolute waarde van het elementaire magnetisch moment berekend heeft. Uit zijn gegevens volgt voor ijzer

$$m = 1,82 \cdot 10^{-19} \text{ en } M_0 = 7500 \text{ (gewijzigde eenheden)}$$

1) Phys. Rev., 30 (1910), p. 359.

en voor nikkel

$$m = 1,03 \cdot 10^{-19} \text{ en } M_0 = 2020.$$

Boven het CURIE-punt nadert de spontane magnetisatie van de volume-eenheid tot $m\sqrt{N}$ of $\sqrt{M_0 m}$; deze grootte is voor ijzer gelijk aan $3,7 \cdot 10^{-8}$ en voor nikkel $1,4 \cdot 10^{-8}$ en is dus niet meer waarneembaar.

In het tweede geval, waarbij $T < \vartheta$ is, levert deze methode groote moeilijkheden op. We zullen daarom dat deel van het vraagstuk laten rusten.

STELLINGEN.





STELLINGEN.

I.

Het bewijs, dat KELVIN geeft voor de symmetrische betrekkingen tusschen de susceptibiliteiten van een kristallijne stof, is niet geheel volledig. (Sir W. Thomson, Papers on electrostatics and magnetism, p. 479.)

II.

Ten onrechte beweert LANGEVIN, dat op thermodynamische gronden de magnetisatie een functie moet zijn van het quotient van de magnetische kracht en de absolute temperatuur (Ann. de Chim. et de Phys., (8) 5 (1905), p. 114.)

III.

De atoomsusceptibiliteit van het nikkel in waterige en ammoniakale oplossingen van nikkelzouten is onafhankelijk van den aard van het zout en van de concentratie der oplossing.

IV.

De atoomsusceptibiliteit van het nikkel in oplossingen van nikkelzouten volgt de wet van CURIE.

V.

Het aantal magnetonen van het nikkelatoom in waterige oplossingen van nikkelzouten is binnen de grenzen der waarnemingsfouten een geheel getal.

VI.

Voor de bepaling van de susceptibiliteit van vloeistoffen verdient de, door PICCARD verbeterde, stijghoogte-methode van QUINCKE de voorkeur boven de methode van CURIE. (A. A. PICCARD, Arch. de Genève, (4) 36 (1913), p. 209; P. CURIE, Journal de Phys. (4) 2 (1903), p. 796.)

VII.

De waarnemingen van COMPTON en TROUSDALE over de diffractie-figuren van een gemagnetiseerd kristal leveren nog geen afdoend bewijs voor de onhoudbaarheid van de moleculaire theorie van het magnetisme. (Phys. Rev., 5 (1915), p. 315.)

VIII.

De toepassing van de formule van STOKES op de electronen, die SKAUPY geeft in zijn theorie over de concentratie der electronen in vloeibare metalen, is weinig bevredigend. (Verh. der Deutschen Phys. Ges., 18 (1916), p. 255.)

IX.

In zijn toepassing van de vergelijking van VAN DER WAALS op het magnetisme stelt ASHWORTH ten onrechte de, bij de vergelijking behorende, kritische temperatuur gelijk aan de CURIE-temperatuur. (Phil. Mag., 30 (1915), p. 711 en 33 (1917), p. 334.)

X.

De atoomtheorie van VEGARD is niet in alle opzichten bevredigend. (Verh. der Deutschen Phys. Ges., 19 (1917), p. 344.)

XI.

De coagulatie der ultramikronen van de electrolyt-gevoelige hydrosolen wordt veroorzaakt door onderlinge aantrekking. (v. SMOLUCHOWSKI, Zeitschrift für phys. Chemie, 92 (1917), p. 129; ZSIGMONDY, Zeitschrift für phys. Chemie, 92 (1918), p. 600.)

XII.

In hoofdstuk III van zijn „Synthetische Zahlentheorie” bewijst R. FUETER de existentie van de n wortels der vergelijking $x^n = 1$ met transcendente hulpmiddelen. Het volledig bewijs dezer stelling kan veel eenvoudiger geleverd worden langs zuiver algebraïschen weg.

XIII.

Hoewel COPERNICUS zelf zich voor aswenteling en kringloop der aarde beroept op de zienswijze van den Pythagoraeër Philolaus, is het toch uitsluitend Aristarchus van Samos, die met volle recht mag worden aangemerkt als Copernicus' voorlooper in de oudheid. (Copernicus, De revolutionibus orbium coelestium, Lib. I, cap. 5.)



